

Relativeca Dopplera efiko inter du akcelataj korpoj – I

Efeito Doppler relativista entre dois corpos acelerados – I

F.M. Paiva

Departamento de Física, U.E. Humaitá II, Colégio Pedro II
Rua Humaitá 80, 22261-040 Rio de Janeiro-RJ, Brasil; fmpaiva@cbpf.br

A.F.F. Teixeira

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
22290-180 Rio de Janeiro-RJ, Brasil; teixeira@cbpf.br

6-a de marto, 2008

Resumo

Ni priskribas luman Doppleran efikon inter same akcelataj fonto kaj observanto ĉe special-relativeco. La propraj akceloj estas konstantaj kaj paralelaj.

Descrevemos o efeito Doppler relativista entre fonte luminosa e observador igualmente acelerados. As acelerações próprias são constantes, e paralelas.

1 Enkonduko

En special-relativeco, Lorentzaj transformoj estas gravaj. Ili montras kiel, el koordinata priskribo de fizika situacio per iu inercia referenca sistemo, oni trovas priskribon per alia inercia referenca sistemo. Tamen, tio ne montras tion kion observanto vere vidas. Por tio, oni devas konsideri plurajn faktorojn, ĉefe, Doppleran efikon.

En antaŭaj artikoloj [1, 2, 3] ni studis luman Doppleran efikon ĉe kelkaj specialaj situacioj: tie aŭ observanto aŭ fonto restas. Ĉi tie, ambaŭ moviĝas. Ili moviĝas ĉe konstanta propra akcelo, kiu tre taŭgas por special-relativeco. Fakte, tiu akcelo estas relativeca ekvivalenta de Newtona konstanta akcelo, kaj plibone ne generas rapi-

1 Introduçã

As transformações de Lorentz são importantes na relatividade especial. Elas mostram como, partindo da descrição de uma situação física mediante um sistema inercial de referência, acha-se a descrição mediante outro sistema inercial de referência. Entretanto, isso não mostra o que o observador verdadeiramente vê. Para tanto deve-se considerar vários fatores, principalmente o efeito Doppler.

Em artigos anteriores [1, 2, 3] nós estudamos o efeito Doppler luminoso em algumas situações especiais: ali, ou o observador ou a fonte estão em repouso. Aqui ambos se movem. Eles se movem com aceleração própria constante, que se ajusta bastante bem à relatividade especial. Com efeito, tal aceleração é o equivalente relativista da aceleração Newtoniana constante, e

don pli granda ol rapido de lumo en vakuo, c ; cetere ĝi multe simpligas kalkulon, kaj havas specialajn kvalitojn pri kiuj ni diskutos en Konkludo.

Luma Dopplera efiko estas malsameco $\nu' \neq \nu$ de frekvenco ν' de eligita lumo kaj frekvenco ν de observata lumo, pro movado de fonto aŭ observanto, aŭ ambaŭ. Proportio $D = \nu/\nu'$ nomiĝas Dopplera faktoro. Ĉar frekvenco estas inverso de periodo, tial ni difinas Doppleran faktoron kiel

$$D(\tau) := \frac{d\tau'}{d\tau} = \frac{\gamma(t) dt'}{\gamma(t') dt} . \quad (1)$$

Ĉi tie $d\tau'$ estas infinitezima propra intertempo per fonto inter eligo de du lumaj signaloj, kaj $d\tau$ estas infinitezima propra intertempo per observanto inter enigo de tiuj signaloj. Momento de eligo de lumosignalo el fonto nomiĝas t' aŭ τ' , kaj momento de enigo de tiu signalo en observanto nomiĝas t aŭ τ . Ĉe la tria termo en (1), ni uzis rilaton de intertempa dilato $d\tau = dt/\gamma$ inter propra kaj koordinata intertempoj, kie $\gamma := 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, kaj $v := dx/dt$.

Por kalkuli Doppleran faktoron ni unue kalkulas distancon inter fonto je momento t' de eligo de signalo kaj observanto je momento t de enigo de tiu signalo. Poste ni egalas tiun distancon al distanco $c(t - t')$ kiun lumo trakuras dum intertempo $t - t'$. Tiu ekvacio, nomota elig-eniga ekvacio, rilatas momentojn de eligo t' (aŭ τ') kun momentoj de enigo t (aŭ τ). Diferenciante ĝin ni havigas Doppleran faktoron je momento t (aŭ τ), per ekvacio (1).

Dopplera efiko kun $D < 1$ nomiĝas “ruĝ-delokiĝo”, ĉar frekvenco etiĝas; ekzemple, delokiĝo de flava koloro al ruĝa. Kontraŭe, efiko kun $D > 1$ nomiĝas “viol-delokiĝo”. Se $D = 1$ oni diras ke ne estas Dopplera efiko. Rimarku, ke ĉar propratempoj $d\tau'$ kaj $d\tau$ estas Lorentze

apropriadamente ne produktas pli grandan rapidon ol lumo en vakuo, c ; alĉi, ĉar ĝi multe simpligas kalkulon, kaj havas specialajn kvalitojn pri kiuj ni diskutos en Konkludo.

Efeito Doppler luminoso é a diferença $\nu' \neq \nu$ da frequência ν' da luz emitida e a frequência ν da observada, por motivo de movimento da fonte ou do observador, ou de ambos. A razão $D = \nu/\nu'$ se denomina fator Doppler. Dado que a frequência é o inverso do período, nós definimos o fator Doppler como

Aqui $d\tau'$ é o intervalo infinitesimal de tempo próprio, na fonte, entre a emissão de dois sinais luminosos, e $d\tau$ é o intervalo infinitesimal de tempo próprio, no observador, entre a recepção desses sinais. O momento da emissão de um sinal é designado como t' ou τ' , e o momento da recepção desse sinal é designado como t ou τ . Quanto ao terceiro termo em (1), nós usamos a relação de dilatação temporal $d\tau = dt/\gamma$ entre o intervalo de tempo próprio e o de tempo coordenada, onde $\gamma := 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, e $v := dx/dt$.

Para calcular o fator Doppler nós primeiramente calculamos a distância entre a fonte, no momento t' da emissão de um sinal, e o observador, no momento t da recepção desse sinal. Em seguida nós igualamos essa distância à distância $c(t - t')$ que a luz percorre no intervalo de tempo $t - t'$. Esta equação, a ser chamada equação de emissão-recepção, relaciona os momentos de emissão t' (ou τ') com os de recepção t (ou τ). Diferenciando-a nós obtemos o fator Doppler no momento t (ou τ), mediante a equação (1).

O efeito Doppler com $D < 1$ se chama “deslocamento para o vermelho”, porque a frequência diminui; por exemplo, a cor amarela desloca-se para a vermelha. Ao contrário, o efeito com $D > 1$ se chama “deslocamento para o violeta”. Se $D = 1$, diz-se que não há efeito Doppler. Note que, como os intervalos de tempo próprio $d\tau'$ e

skalaraj, do ankaŭ Dopplera faktoro D estas Lorentze skalara.

Iuj rezultoj pri Dopplera efiko troviĝas ekzemple en [1, 2, 3, 4]. Unue, se fonto kaj observanto kolinie foriĝas unu de la alio), okazas ruĝ-delokiĝo. Kontraŭe, se ili kolinie alproksimiĝas, okazas viol-delokiĝo. Due, se fonto ĉirkaŭiras restantan observanton, okazas ruĝ-delokiĝo, pro intertempa dilato ĉe fonto. Kontraŭe, se observanto ĉirkaŭiras restantan fonton, okazas viol-delokiĝo.

Iom pli ĝenerale, estiĝu restanta fonto kaj moviĝanta observanto kun rapido V , kiel en figuro 1(a), do elig-eniga ekvacio estas $\sqrt{P^2 + x^2(t)} = c(t - t')$. Diferenciante kaj uzante iom da geometrio, Dopplera faktoro estiĝas

$$D = \gamma \left(1 - \frac{V}{c} \cos \alpha \right) . \quad (2)$$

Kontraŭe, por restanta observanto kaj moviĝanta fonto kun rapido V , kiel en figuro 1(b), elig-eniga ekvacio estas $\sqrt{P^2 + x^2(t')} = c(t - t')$. Diferenciante, Dopplera faktoro estiĝas

$$D = \left[\gamma \left(1 + \frac{V}{c} \cos \alpha \right) \right]^{-1} . \quad (3)$$

En tiuj du pli ĝeneralaj okazoj, Dopplera faktoro dependas de rapido kaj de angulo.

Ni esploras kvin malsamajn fizikajn sistemojn, en kiuj observanto kaj fonto moviĝas kun sama konstanta propra akcelo. Je la unuaj du sistemoj, observanto kaj fonto moviĝas kolinie. Je la tria, movadoj estas paralelaj kaj ortaj al linio kunigante ilin. Kaj fine, je la du lastaj, movadoj estas ankaŭ paralelaj, sed klinaj rilate al tiu linio. Ĉe ĉiu sistemo, ni inspektas plurajn eblajn fazojn. Ĉe fazo 0,

$d\tau$ ŝajnas skalares de Lorentz, entaŭn tiam e la faktoro Doppler D e la unu skalaro de Lorentz.

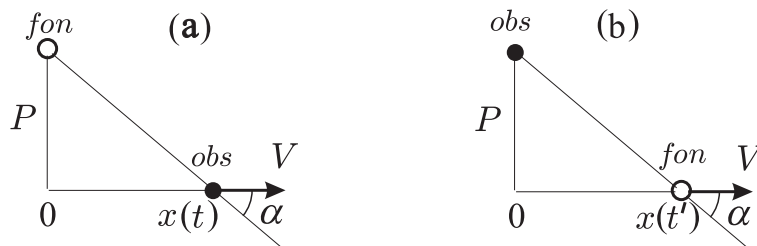
Alguns resultados sobre efeito Doppler se encontram em, por exemplo, [1, 2, 3, 4]. Primeiro, se fonte e observador estao se afastando colinearmente um do outro, ocorre deslocamento para o vermelho. Ao contrario, se eles estao se aproximando colinearmente, ocorre deslocamento para o violeta. Segundo, se a fonte esta contornando o observador em repouso, ocorre deslocamento para o vermelho, devido a dilatacao temporal na fonte. Ao contrario, se o observador esta contornando a fonte, ocorre deslocamento para o violeta.

De modo mais geral, esteja a fonte em repouso, e o observador com velocidade V , como na figura 1(a); entao a equacao de emissao-recepcao e $\sqrt{P^2 + x^2(t)} = c(t - t')$. Diferenciando-a e com um pouco de geometria, o fator Doppler se torna

Ao contrario, para observador em repouso e fonte com velocidade V , como na figura 1(b), a equacao de emissao-recepcao e $\sqrt{P^2 + x^2(t')} = c(t - t')$. Diferenciando-a, o fator Doppler se torna

Nestes dois casos mais gerais o fator Doppler depende da velocidade e do angulo.

Nos vamos analisar cinco sistemas fisicos diferentes, nos quais o observador e a fonte se movem com mesma aceleraao propria constante. Nos primeiros dois sistemas, o observador e a fonte se movem colinearmente. No terceiro, os movimentos sao paralelos, e ortogonais a linha que os une. E finalmente, nos ultimos dois, os movimentos sao tambem paralelos, mas inclinados relativamente a aquela linha. Em cada sistema, nos examinamos as varias possiveis fases.



Figuro 1: El sekcio 1. (a) Restanta fonto kaj moviĝanta observanto. (b) Kontraŭe.

Figura 1: Refere-se à seção 1. (a) Fonte em repouso e observador em movimento. (b) O contrário.

restanta observanto ricevas signalon eligitan el fonto ankaŭ restanta; ĉar ne estas Dopplera efiko en tiu fazo ($D = 1$), tiu fazo ne estos ordinaro prezentata. Ĉe fazo 1, moviĝanta observanto ricevas signalon eligitan el ankoraŭ restanta fonto. Fine, ĉe fazo 2, moviĝanta observanto ricevas signalon eligitan el ankaŭ moviĝanta fonto; ni rimarkos, ke ĉi tiu fazo ne ĉiam ekzistas.

Sekcio 2 difinas propran akcelon de korpo, kaj priskribas movadon de korpo se tiu akcelo estas konstanta. En sekcio 3, observanto moviĝas malantaŭ fonto, kaj en sekcio 4, kontraŭe. Sekcio 5 priskribas la nekolinian ortan movadon. Sekcioj 6 kaj 7 priskribas klinajn movadojn kun observanto malantaŭ fonto kaj kontraŭe. Sekcio 8 konkludas.

2 Konstanta propra akcelo

Antaŭigante studon de Dopplera faktoro, ĉi tiu sekcio difinas propran akcelon, kaj priskribas movadon laŭ konstanta propra akcelo, kiel Møller [5, paĝoj 73-74] kaj Rindler [4, paĝo 49].

Estiĝu inercia referenca sistemo en kiu korpo momente ripozas. En tiu sistemo, derivaĵo de rapido de korpo rilate al tempo nomiĝas propra akcelo a de korpo (rimarku, ke a estas Lorentze skalara). Ĉe unudimensia movado, oni montras, ke en iu ajn inercia referenca sistemo

Na fase 0, o observador em repouso recebe sinal emitido pela fonte também em repouso; como não há efeito Doppler nesta fase ($D = 1$), ela não é geralmente apresentada. Na fase 1, o observador em movimento recebe sinal emitido pela fonte ainda em repouso. Finalmente, na fase 2 o observador em movimento recebe sinal emitido pela fonte também em movimento; nós vamos ver que esta fase nem sempre existe.

A seção 2 define aceleração própria de um corpo, e descreve o movimento do corpo se aquela aceleração for constante. Na seção 3, o observador se move atrás da fonte, e na seção 4, o contrário. A seção 5 descreve o movimento não-colinear ortogonal. As seções 6 e 7 descrevem os movimentos inclinados com o observador atrás da fonte e o contrário. A seção 8 encerra o artigo.

2 Aceleração própria constante

Antecedendo o estudo do fator Doppler, esta seção define aceleração própria, e descreve o movimento de um corpo sob aceleração própria constante, do mesmo modo que Møller [5, pág. 73-74] e Rindler [4, pág. 49].

Seja um sistema inercial de referência no qual um corpo esteja momentaneamente em repouso. Nesse sistema, a derivada da velocidade do corpo com relação ao tempo se chama aceleração própria a do corpo (note que a é escalar de Lorentz). Para movimento unidimensional, mostra-se que em qualquer outro sistema iner-

cial de referência

$$a = \frac{d(\gamma v)}{dt} . \quad (4)$$

Estiĝu korpo komence restanta ($v_0 = 0$) en pozicio 0 de akso x de inercia sistemo S_0 de referenco. Ekde $t = 0$ ($\tau = 0$), ĝi moviĝu kun konstanta propra akcelo a en pozitiva direkto de x . Integrante (4), la movado estiĝas

Esteja um corpo inicialmente em repouso ($v_0 = 0$) na posição 0 do eixo x de um sistema inercial S_0 de referência. A partir de $t = 0$ ($\tau = 0$) mova-se ele com aceleração própria a constante na direção positiva de x . Integrando (4), o movimento se torna

$$x = \frac{c^2}{a} \left(\sqrt{1 + (at/c)^2} - 1 \right) = \frac{c^2}{a} [\cosh(a\tau/c) - 1] , \quad (5)$$

$$v = \frac{at}{\sqrt{1 + (at/c)^2}} = c \tanh(a\tau/c) , \quad (6)$$

$$\gamma = \sqrt{1 + (at/c)^2} = \cosh(a\tau/c) , \quad (7)$$

$$at/c = \sinh(a\tau/c) . \quad (8)$$

Rimarku en (6), ke $v \rightarrow c$ kiam $t \rightarrow \infty$. Eblas pruvi, ke Newtona akcelo ($a_N := dv/dt$) de tiu movado estas $a_N(t) = a/\gamma^3(t)$, kiu etiĝas laŭ tempo, ĉar $\gamma(t)$ egiĝas laŭ rapido.

Note na (6) que $v \rightarrow c$ quando $t \rightarrow \infty$. É possível provar que a aceleração Newtoniana ($a_N := dv/dt$) desse movimento é $a_N(t) = a/\gamma^3(t)$; ela diminui com o tempo, de vez que $\gamma(t)$ cresce com a velocidade.

3 Observanto malantaŭ fonto

Laŭ figuro 2(a), kaj observanto A kaj luma fonto A' restas en inercia sistemo S_0 de referenco. Ekde $t = 0$, ambaŭ moviĝas dekstren en akso x , kun sama konstanta propra akcelo a .

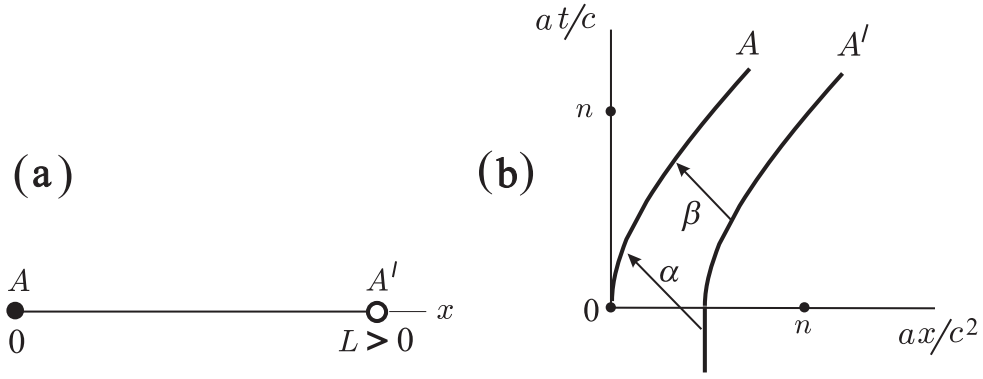
Ĉe fazo 1, observanto moviĝas laŭ (5), kaj ricevas signalojn (kiel sago α en figuro 2(b)) eligitajn el fonto restanta en $L > 0$; do elig-eniga ekvacio estas $L - x(t) = c(t - t')$. Uzante (5) por $x(t)$, kaj (8) por $t(\tau)$, kaj $t' = \tau'$, tiu ekvacio estiĝas

3 Observador atrás da fonte

Segundo a figura 2(a), tanto o observador A como a fonte luminosa A' estão em repouso em um sistema S_0 inercial de referência. A partir de $t = 0$ ambos se movem para a direita no eixo x , com mesma aceleração própria constante a .

Na fase 1, o observador se move segundo (5), e recebe sinais (como a flecha α na figura 2(b)) emitidos pela fonte em repouso em $L > 0$; portanto a equação de emissão-recepção é $L - x(t) = c(t - t')$. Usando (5) para $x(t)$, e (8) para $t(\tau)$, e $t' = \tau'$, aquela equação se torna

$$\tau' = \frac{c}{a} [\exp(a\tau/c) - (1 + aL/c^2)] . \quad (9)$$



Figuro 2: El sekcio 3. (a) Observanto A kaj luma fonto A' komence restas ĉe $x = 0$ kaj $x = L > 0$, respektive. (b) Ambaŭ A kaj A' akceliĝas dekstren ekde $t = 0$. Sagoj je 135° indikas lumajn signalojn. Observanto ricevas signalojn eligitajn el fonto kaj restanta (α) kaj moviĝanta (β).

Figura 2: Refere-se à seção 3. (a) Observador A e fonte luminosa A' inicialmente em repouso em $x = 0$ e $x = L > 0$, respectivamente. (b) Ambos A e A' se aceleram para a direita a partir de $t = 0$. As flechas a 135° indicam sinais luminosos. O observador recebe sinais emitidos pela fonte tanto em repouso (α) como em movimento (β).

Fazo 1 finiĝas je τ_0 , kiu estas la valoro de τ | A fase 1 termina em τ_0 , que é o valor de τ na (9)
en (9) se $\tau' = 0$: | se $\tau' = 0$:

$$\exp\left(\frac{a\tau_0}{c}\right) := 1 + \frac{aL}{c^2}. \quad (10)$$

Kalkulante $d\tau'/d\tau$ el (9) aperas Dopplera | Calculando $d\tau'/d\tau$ a partir da (9) aparece o fator
faktoro | Doppler

$$D_1 = \exp(a\tau/c), \quad 0 < \tau < \tau_0. \quad (11)$$

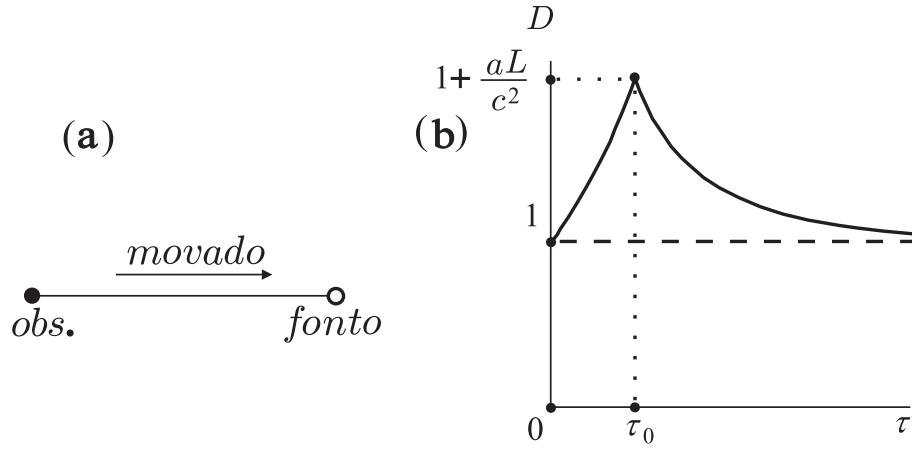
Oni rimarkas, ke D eksponentiale egiĝas en fazo 1, kiel figuro 3(b) montras. Tio estas facile komprenebla, ĉar en inercia sistemo S_0 , observanto alproksimiĝas al restanta fonto pli kaj pli rapide, do li vidas violdelokiĝon pli kaj pli forta.

Ĉe fazo 2 (kiel sago β en figuro 2(b)), ambaŭ A' kaj A moviĝas, do nova elig-eniga ekvacio estas $L + x(t') - x(t) = c(t - t')$; uzante (5) por $x(t')$ kaj $x(t)$, kaj uzante (8) por t kaj t' , tiu ekvacio estiĝas

Nota-se que D cresce exponencialmente na fase 1, como a figura 3(b) mostra. Isso é facilmente compreensível, de vez que no sistema inercial S_0 o observador se aproxima da fonte em repouso cada vez mais rapidamente, portanto ele vê um deslocamento para o violeta cada vez mais forte.

Na fase 2 (como a flecha β na figura 2(b)), ambos A' e A estão em movimento, portanto a nova equação de emissão-recepção é $L + x(t') - x(t) = c(t - t')$; usando (5) para $x(t')$ e $x(t)$, e usando (8) para t e t' , aquela equação se torna

$$\exp(a\tau'/c) = \exp(a\tau/c) - (aL/c^2). \quad (12)$$



Figuro 3: El sekcio 3. (a) Direkto de akcelo kaj movado. (b) Dopplera faktoro D kiel funkcio de propratempo τ de observanto. Estas τ_0 en (10).

Figura 3: Refere-se à seção 3. (a) Direção da aceleração e do movimento. (b) Fator Doppler D como função do tempo próprio τ do observador. Está τ_0 na (10).

Fine, kalkulante $d\tau'/d\tau$ el (12) aperas faktoro

Finalmente, calculando $d\tau'/d\tau$ a partir de (12) aparece o fator

$$D_2 = \frac{1}{1 - (aL/c^2) \exp(-a\tau/c)}, \quad \tau > \tau_0. \quad (13)$$

Ni rimarkas en (13) kaj en figuro 3(b), ke D_2 etiĝas ekde $\tau = \tau_0$. Tio estas facile komprenebla en inercia sistemo S_0 de referenco: Newtona akcelo $a_N(t)$ de observanto, je momento t de ricevo de lumo, estas pli eta ol Newtona akcelo $a_N(t')$ de fonto, je momento $t' < t$ de eligo de tiu lumo; do observanto en $x(t)$ alproksimiĝas al loko $x(t')$ de eligo de lumo pli kaj pli malrapide.

Ni ankaŭ rimarkas en (13) kaj en figuro 3(b), ke okazas $D_2 \rightarrow 1$ kiam $\tau \rightarrow \infty$; tiam ambaŭ observanto kaj fonto havas rapidon ĉirkaŭe c , kaj ne ekzistas Dopplera efiko. Newtona kinematiko facile eksplikas tiun faktoro: se fonto kaj observanto estas kolinie moviĝantaj kun similaj rapidoj, Dopplera efiko ne ekzistas. Sed relativeca kinematiko bezonas fari pli detalan analizon. Rapido de observanto (je momento τ de ricevo de signalo) mezurata en inercia sistemo de momenta ripozo de fonto (je momento τ' de eligo de tiu signalo) es-

Nós notamos, na (13) e na figura 3(b), que D_2 diminui a partir de $\tau = \tau_0$. Isto é facilmente compreensível no sistema inercial S_0 de referência: a aceleração Newtoniana $a_N(t)$ do observador, no momento t de recepção de luz, é menor que a aceleração Newtoniana $a_N(t')$ da fonte, no momento $t' < t$ de emissão daquela luz; portanto o observador em $x(t)$ se aproxima do local $x(t')$ de emissão de luz cada vez mais lentamente.

Notamos também, na (13) e na figura 3(b), que ocorre $D_2 \rightarrow 1$ quando $\tau \rightarrow \infty$; nesse tempo ambos observador e fonte têm velocidade aproximadamente c , e não ocorre efeito Doppler. A cinemática Newtoniana explica facilmente esse fato: é que a fonte e o observador estão em movimento colinear com velocidades semelhantes. Mas a relatividade especial precisa fazer uma análise mais detalhada. A velocidade do observador (no momento τ da recepção de um sinal) medida em um sistema inercial de repouso momentâneo da fonte (no momento τ' da emissão daquele sinal) é $V = [v(\tau) - v(\tau')]/[1 -$

tas $V = [v(\tau) - v(\tau')]/[1 - v(\tau)v(\tau')/c^2]$. Uzante (6) por $v(\tau)$ kaj $v(\tau')$, tiu estiĝas $V = c \tanh a(\tau - \tau')/c$. Ekvacio (12) implicas $(\tau - \tau') \rightarrow (L/c) \exp(-a\tau/c) \rightarrow 0$ kiam $\tau \rightarrow \infty$, do relativa rapido V (de loko de ricevo al loko de eligo) nuliĝas kiam $\tau \rightarrow \infty$, eksplikante $D_2 \rightarrow 1$.

Kurioze, ĉe inercia sistemo S_0 de referenco, distanco inter loko $L+x(t')$ de eligo de signalo kaj loko $x(t)$ de ricevo ĉiam estiĝas, de L je $t = 0$ ĝis $L/2$ je $t \rightarrow \infty$. Tio estas facile komprenebla ĉar rapido de observanto kiam $t \rightarrow \infty$ estas proksimume c , kaj rapido de signalo estas $-c$; do renkonto de observanto kun signalo okazas ĉe mezo de konstanta distanco L de observanto al fonto.

4 Fonto malantaŭ observanto

Laŭ figuro 4, observanto A komence restas en $x = 0$, kaj fonto A'_1 aŭ A'_2 komence restas en $-L_1$ aŭ $-L_2$, respektive, estante $0 < L_1 < c^2/a$ kaj $L_2 > c^2/a$. Por fazo 1, elig-eniga ekvacio estas $L+x(t) = c(t-t')$. Tiu fazo daŭras ĝis momento τ_0 laŭ

$$\exp\left(-\frac{a\tau_0}{c}\right) := 1 - aL/c^2 \quad \text{se } aL/c^2 < 1. \quad (14)$$

Rimarku, ke se $L > c^2/a$ (kiel por fonto A'_2 ĉe figuro 4(b)), fazo 1 daŭras ĝis $\tau \rightarrow \infty$, kaj do fazo 2 ne ekzistas. En tia okazo, lasta signalo s_2 en figuro 4(b), kiu atingas observanton A (je $\tau \rightarrow \infty$) estas eligita je $t'_2 = -(1/c)(L - c^2/a)$. Signaloj eligitaj post t'_2 ne atingas observanton kiun ekmoviĝis sufiĉe fore de fonto ($L > c^2/a$). Se tamen $0 < L < c^2/a$, fazo 2 ekzistas.

Por fazo 1, el elig-eniga ekvacio, Dopplera faktoro $d\tau'/d\tau$ estiĝas (vidu figuron 5)

$v(\tau)v(\tau')/c^2]$. Usando (6) para $v(\tau)$ e $v(\tau')$, isso se torna $V = c \tanh a(\tau - \tau')/c$. A equação (12) implica $(\tau - \tau') \rightarrow (L/c) \exp(-a\tau/c) \rightarrow 0$ quando $\tau \rightarrow \infty$, portanto a velocidade relativa V (do local de recepção relativamente ao local de emissão) se anula quando $\tau \rightarrow \infty$, assim explicando $D_2 \rightarrow 1$.

Curiosamente, no sistema inercial S_0 de referência, a distância entre o local $L+x(t')$ da emissão de um sinal e o local $x(t)$ da recepção sempre diminui, de L em $t = 0$ até $L/2$ em $t \rightarrow \infty$. Isso é facilmente compreensível, porque a velocidade do observador quando $t \rightarrow \infty$ é aproximadamente c , e a velocidade do sinal é $-c$; portanto o encontro do observador com o sinal ocorre no meio da separação constante L do observador à fonte.

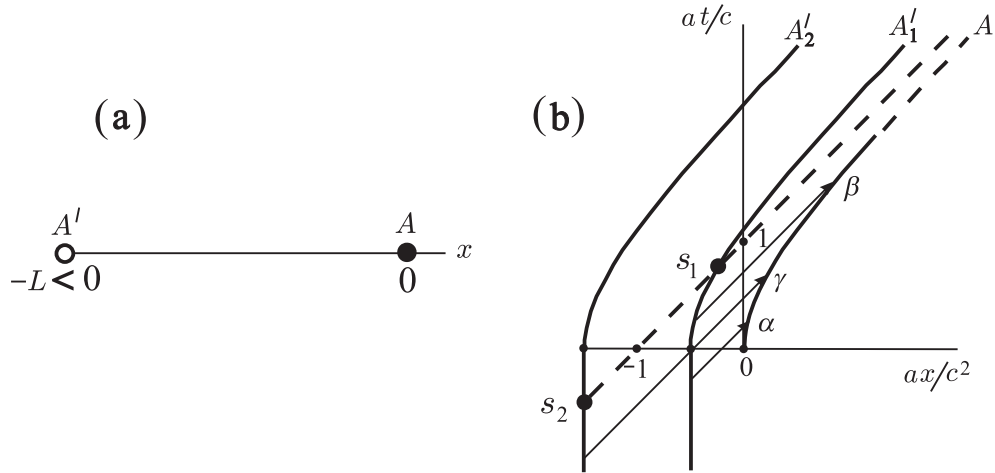
4 Fonte atrás do observador

Conforme a figura 4, o observador A inicialmente está em repouso em $x = 0$, e a fonte A'_1 ou a A'_2 estão inicialmente em repouso em $-L_1$ ou $-L_2$, respectivamente, sendo $0 < L_1 < c^2/a$ e $L_2 > c^2/a$. Para a fase 1, a equação de emissão-recepção é $L+x(t) = c(t-t')$. Essa fase dura até o momento τ_0 segundo

Note que se $L > c^2/a$ (como para a fonte A'_2 na figura 4(b)), a fase 1 dura até $\tau \rightarrow \infty$, e portanto a fase 2 não existe. Nesse caso o último sinal s_2 , na figura 4(b), que atinge o observador A (em $\tau \rightarrow \infty$) é emitido em $t'_2 = -(1/c)(L - c^2/a)$. Sinais emitidos após t'_2 não atingem o observador que tenha começado seu movimento de um ponto suficientemente afastado da fonte ($L > c^2/a$). Se entretanto $0 < L < c^2/a$, então a fase 2 existe.

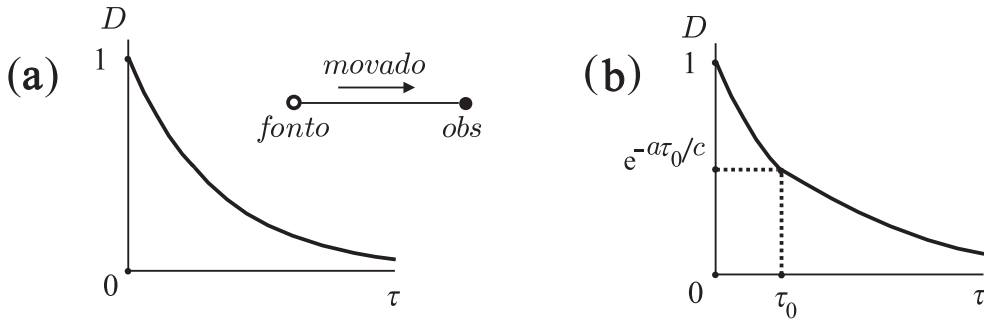
Para a fase 1, a partir da equação de emissão-recepção, o fator Doppler $d\tau'/d\tau$ se torna (veja a figura 5)

$$D_1 = \exp\left(-\frac{a\tau}{c}\right), \quad 0 < \tau < \tau_0, \quad (15)$$



Figuro 4: El sekcio 4. (a) Fonto A' kaj observanto A komence restas en $x = -L < 0$ kaj $x = 0$, respektive. (b) Ambaŭ akceliĝas dekstren ekde $t = 0$; fontoj A'_1 kaj A'_2 moviĝas ekde $x = -L_1$ kaj $-L_2$, respektive, estante $0 < L_1 < c^2/a$ kaj $L_2 > c^2/a$. Sagoj je 45° indikas lumajn signalojn. Moviĝanta observanto A ricevas lumon eligitan el fonto A'_1 kaj restanta (α) kaj moviĝanta (β). Sed li ricevas lumon eligitan el fonto A'_2 nur restanta (γ). Eventoj s_2 , aŭ s_1 , estas lasta eligo de signalo atinganta A . La strekata rekta linio estas asimptoto de hiperbola kurbo de observanto A .

Figura 4: Refere-se à seção 4. (a) Fonte A' e observador A inicialmente em repouso em $x = -L < 0$ e $x = 0$, respectivamente. (b) Ambos se aceleram para a direita a partir de $t = 0$; as fontes A'_1 e A'_2 se movimentam partindo de $x = -L_1$ e $-L_2$, respectivamente, sendo $0 < L_1 < c^2/a$ e $L_2 > c^2/a$. As flechas a 45° indicam sinais luminosos. O observador A em movimento recebe luz emitida pela fonte A'_1 tanto em repouso (α) como em movimento (β). Mas ele recebe luz emitida pela fonte A'_2 somente em repouso (γ). Os eventos s_2 , ou s_1 , são a última emissão de sinal que atinge A . A linha reta tracejada é assíntota da curva hiperbólica do observador A .



Figuro 5: El sekcio 4. Dopplera faktoro D kiel funkcio de propratempo τ de observanto. (a) Okazo $L > c^2/a$ (kiel por fonto A'_2 en figuro 4(b)), havanta nur unu fazon. (b) Okazo $0 < L < c^2/a$ (kiel por fonto A'_1 en figuro 4(b)), havanta du fazojn. Estas τ_0 en (14).

Figura 5: Refere-se à seção 4: fator Doppler D como função do tempo próprio τ do observador. (a) Caso $L > c^2/a$ (como para a fonte A'_2 na figura 4(b)), tendo somente uma fase. (b) Caso $0 < L < c^2/a$ (como para a fonte A'_1 na figura 4(b)), tendo duas fases. Está τ_0 na (14).

τ_0 estante momento de ricevo de lumo eligita je $\tau' = 0$. Estas facile komprenebla, en inercia sistemo S_0 de referenco, kiel $D_1(\tau)$ eksponenciale estiĝas: observanto iras pli kaj pli rapide fore de restanta loko de eligo de lumo.

Por fazo 2, elig-eniga ekvacio estas $L + x(t) - x(t') = c(t - t')$, do Dopplera faktoro $d\tau'/d\tau$ estiĝas (vidu figuron 5(b))

sendo τ_0 o momento de recepcão da luz emitida em $\tau' = 0$. É facilmente compreensível, no sistema inercial S_0 de referência, por que $D_1(\tau)$ diminui exponencialmente: o observador está se afastando cada vez mais rapidamente do local de emissão da luz.

Para a fase 2, a equação de emissão-recepção é $L + x(t) - x(t') = c(t - t')$, portanto o fator Doppler $d\tau'/d\tau$ se torna (veja a figura 5(b))

$$D_2 = \frac{1}{1 + (aL/c^2) \exp(a\tau/c)}, \quad 0 < L < c^2/a, \quad \tau > \tau_0. \quad (16)$$

En tia okazo, signalo eligita je $\tau'_1 := (c/a) \ln(c^2/aL)$ estas la lasta kiu sukcesas atingi observanton (kiam $\tau \rightarrow \infty$). Vidu s_1 en figuro 4(b).

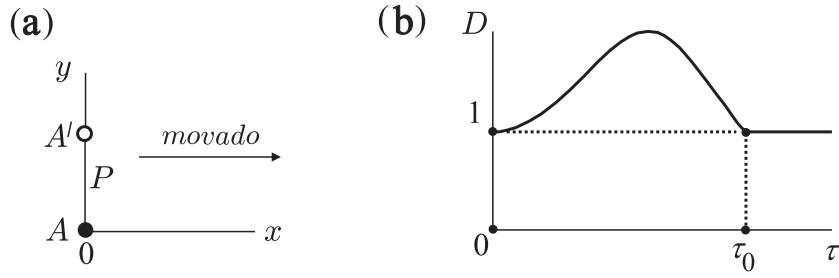
Ni rimarkas en figuro 5(b), ke $D_2 \rightarrow 0$ kiam $\tau \rightarrow \infty$; tiam rapido de observanto ĉirkaŭas c , kaj li ricevas signalon eligitan je momento τ'_1 . Je ĉi tiu finhava tempo, rapido de fonto estas ankaŭ pozitiva, sed ne ĉirkaŭas c ; tio klarigas ekstreman ruĝdelokiĝon $D_2 \rightarrow 0$.

Oni montras, ke je $\tau = \tau_0$, okazas $dD_1/d\tau = -(a/c)(1 - aL/c^2)$ kaj $dD_2/d\tau = -(a/c)(1 - aL/c^2)aL/c^2$. Ĉar $aL/c^2 < 1$, je τ_0 , grafikaĵo estas malpli klinata ĉe fazo 2

Neste caso, o sinal emitido em $\tau'_1 := (c/a) \ln(c^2/aL)$ é o último que consegue atingir o observador (quando $\tau \rightarrow \infty$). Veja s_1 na figura 4(b).

Nós notamos na figura 5(b) que $D_2 \rightarrow 0$ quando $\tau \rightarrow \infty$; nesse momento a velocidade do observador se aproxima de c , e ele está recebendo sinal emitido no momento τ'_1 . Neste tempo finito, a velocidade da fonte é também positiva, mas não se aproxima de c ; isso esclarece o extremo deslocamento para o vermelho $D_2 \rightarrow 0$.

Mostra-se que em $\tau = \tau_0$ ocorrem $dD_1/d\tau = -(a/c)(1 - aL/c^2)$ e $dD_2/d\tau = -(a/c)(1 - aL/c^2)aL/c^2$. Dado que $aL/c^2 < 1$, em τ_0 o gráfico é menos inclinado na fase 2 que na fase 1,



Figuro 6: El sekcio 5. (a) Komenca pozicio de fonto A' kaj observanto A . (b) Dopplera faktoro D kiel funkcio de propratempo τ de observanto. Estas τ_0 en (18).

Figura 6: Refere-se à seção 5. (a) Posição inicial da fonte A' e observador A . (b) Fator Doppler D como função do tempo próprio τ do observador. Está τ_0 na (18).

ol ĉe fazo 1, kiel montras figuro 5(b). Tio okazas ĉar ekde τ_0 , ricevataj signaloj estas eligitaj el jam moviĝanta fonto.

como mostra a figura 5(b). Isso ocorre porque, a partir de τ_0 , os sinais recebidos foram emitidos pela fonte já em movimento.

5 Nekoliniaj movadoj

Laŭ figuro 6(a), observanto A restas en pozicio $[x, y] = [0, 0]$ kaj luma fonto A' restas en pozicio $[0, P]$. Ekde $t = 0$, ambaŭ moviĝas dekstren kun sama konstanta propra akcelo a . Komence, moviĝanta observanto ricevas lumon el ankoraŭ restanta fonto, do elig-eniga ekvacio estas $\sqrt{P^2 + x^2(t)} = c(t - t')$. Uzante (5) por $x(t)$, (8) por $t(\tau)$, kaj $t' = \tau'$, poste kalkulante $d\tau'/d\tau$, aperas Dopplera faktoro ĉe fazo 1 (vidu figuron 6(b))

5 Movimentos não-colineares

Segundo a figura 6(a), o observador A está em repouso na posição $[x, y] = [0, 0]$ e a fonte luminosa A' está em repouso na posição $[0, P]$. A partir de $t = 0$ ambos se movimentam para a direita com mesma aceleração própria constante a . Inicialmente o observador em movimento recebe luz a partir da fonte ainda em repouso, portanto a equação de emissão-recepção é $\sqrt{P^2 + x^2(t)} = c(t - t')$. Usando (5) para $x(t)$, (8) para $t(\tau)$, e $t' = \tau'$, depois calculando $d\tau'/d\tau$, aparece o fator Doppler na fase 1 (veja a figura 6(b))

$$D_1 = \cosh(a\tau/c) \left(1 - \frac{\tanh(a\tau/c)(\cosh(a\tau/c) - 1)}{\sqrt{(aP/c^2)^2 + (\cosh(a\tau/c) - 1)^2}} \right), \quad 0 < \tau < \tau_0, \quad (17)$$

τ_0 estante momento de ricevo de lumo eligita je $\tau' = 0$:

sendo τ_0 o momento de recepção da luz emitida em $\tau' = 0$:

$$\cosh(a\tau_0/c) := 1 + \frac{1}{2}(aP/c^2)^2. \quad (18)$$

Ni analizas tiun grafikaĵon ĉirkaŭ $\tau = 0$. Tiuokaze, el (17), okazas $D_1 \approx 1 + (1/2)(a\tau/c)^2$. Ni rimarkas, ke je $\tau = 0$, okazas $dD_1/d\tau = 0$ kaj $d^2D_1/d\tau^2 = (a/c)^2$. Do tiu grafikaĵo komencas horizontale kaj

Nós analisamos esse gráfico na vizinhança de $\tau = 0$. Neste caso, a partir da (17) ocorre $D_1 \approx 1 + (1/2)(a\tau/c)^2$. Nós notamos que em $\tau = 0$ ocorrem $dD_1/d\tau = 0$ e $d^2D_1/d\tau^2 = (a/c)^2$. Portanto esse gráfico começa horizon-

kurbiĝas supren (ĝia kurbeco ne dependas de P). La interpreto de tiu rezulto estas facila. Komence okazas orta Dopplera efiko, kiu ne ekzistas en Newtona kinematiko. Tiu ordinare faras etan viol-delokiĝon, kiu egiĝas ĉar rapido egiĝas. Poste, la formovado aperigas faktoron de ruĝ-delokiĝo. Fine ĉi tiuj du malaj efektoj nuligas unu la alian je $\tau = \tau_0$, ĝuste kiam lasta signalo de fonto ankoraŭ ripozanta atingas observanton.

Ĉe fazo 2, ambaŭ observanto kaj fonto estas moviĝantaj, do elig-eniga ekvacio estas $\sqrt{P^2 + [x(t) - x(t')]^2} = c(t - t')$. Uzante (5) por $x(t)$ kaj $x(t')$, kaj uzante (8) por t kaj t' , tiu ekvacio multe simpliĝas al

$$\tau' = \tau - \tau_0 ; \quad (19)$$

do $D_2 = 1$, t.e., ne ekzistas Dopplera efiko ĉe fazo 2. Vidu figuron 6(b).

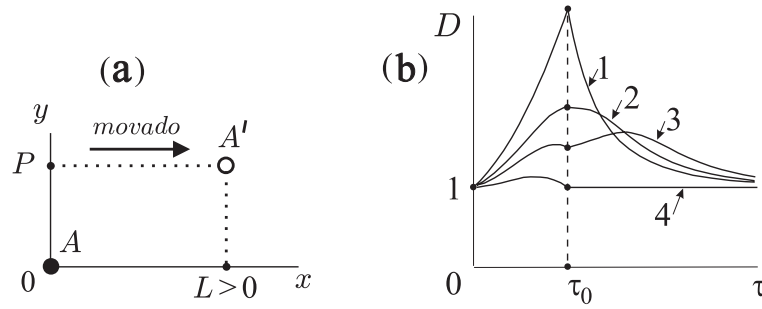
Nun ni diskutas ĉi tiun konstantecon de Dopplera faktoro. Kiel ni raportis en Enkonduko, se observanto pasas orte restantan fonton, okazas viol-delokiĝo pro tempa dilato je rapido de observanto. Alie, se observanto iras kolinie fore de restanta fonto, okazas ruĝ-delokiĝo. En ĉi tiu sekcio, tiuj du komponoj konkuras. Tiamaniere Dopplera efiko dependas de rapido de observanto rilate al fonto, kaj de angulo inter tiu rapido kaj direkto de signal-eligo, kiel en figuro 1(a). Konsideru unue la rapidon. Same kiel en sekcio 3, la relativa rapido estas $V = c \tanh a(\tau - \tau')/c$. Pro ekvacio (19), V estas konstanta. Due, konsideru la angulon. En inercia referenca sistemo S_0 , okazas $\sin \alpha = P/[c(t - t')]$. Laŭ Lorentza transformo, en inercia sistemo de momenta ripozo de fonto, la diferenco de tempoj estiĝas

talmente e se encurva para cima (sua curvatura não depende de P). A interpretação desse resultado é fácil. Inicialmente ocorre efeito Doppler transversal, inexistente na cinemática Newtoniana. Isso usualmente faz um fraco deslocamento para o violeta, que cresce devido a que a velocidade também cresce. Depois, o movimento de afastamento faz aparecer um fator de deslocamento para o vermelho. Finalmente, estes dois efeitos contrários anulam um o outro em $\tau = \tau_0$, exatamente quando o último sinal da fonte ainda em repouso atinge o observador.

Na fase 2, ambos observador e fonte estão em movimento, portanto a equação de emissão-recepção é $\sqrt{P^2 + [x(t) - x(t')]^2} = c(t - t')$. Usando a (5) para $x(t)$ e $x(t')$, e usando a (8) para t e t' , essa equação se simplifica bastante, para

portanto $D_2 = 1$, isto é, não há efeito Doppler na fase 2. Veja a figura 6(b).

Vamos agora discutir esta constância do fator Doppler. Como nós mencionamos na Introdução, se o observador passa transversalmente à fonte em repouso, ocorre deslocamento para o violeta devido à dilatação temporal causada pela velocidade do observador. Por outro lado, se o observador se afasta colinearmente da fonte em repouso, ocorre deslocamento para o vermelho. Nesta seção essas duas componentes competem. Deste modo o efeito Doppler depende da velocidade do observador com relação à fonte, e do ângulo entre essa velocidade e a direção da emissão do sinal, como na figura 1(a). Consideremos primeiro a velocidade. Do mesmo modo que na seção 3, a velocidade relativa é $V = c \tanh a(\tau - \tau')/c$. Devido à equação (19), V é constante. Segundo, consideremos o ângulo. No sistema inercial S_0 de referência ocorre $\sin \alpha = P/[c(t - t')]$. Mediante uma transformação de Lorentz, no sistema inercial de repouso da fonte a diferença de tempos se torna



Figuro 7: El sekcio 6. (a) Komencaj pozicioj de observanto A kaj fonto A' . (b) Ekzemploj de Dopplera faktoro kiel funkcio de propratempo de observanto, por $\cosh a\tau_0/c = 2$. Valoro de $[aL/c^2, aP/c^2]$ en ĉiu ekzemplo estas: **1**: $[1 + \sqrt{3}/2, 3/2]$; **2**: $[1, \sqrt{3}]$; **3**: $[1/2, \sqrt{11}/2]$; **4**: $[0, \sqrt{2}]$.
 Figura 7: Refere-se à seção 6. (a) Posições iniciais do observador A e da fonte A' . (b) Exemplos de fator Doppler como função do tempo próprio do observador, para $\cosh a\tau_0/c = 2$. O valor de $[aL/c^2, aP/c^2]$ em cada exemplo é: **1**: $[1 + \sqrt{3}/2, 3/2]$; **2**: $[1, \sqrt{3}]$; **3**: $[1/2, \sqrt{11}/2]$; **4**: $[0, \sqrt{2}]$.

$$\gamma(t') \left((t - t') - \frac{v(t')}{c^2} [x(t) - x(t')] \right) = \frac{c}{a} \sinh \frac{a(\tau - \tau')}{c}, \quad (20)$$

kie ni uzis (3)–(6) por trovi la dekstran termon. Pro ekvacio (19) denove, α havas la saman valoron en ĉiu inercia sistemo de momenta ripozo de fonto, eksplikante kial la Dopplera faktoro estas konstanta.

Ni ĵus diskutis pri la konstanteco de Dopplera faktoro en fazo 2. Pri ĝia valoro, notu ke $D(\tau_0) = 1$ por iu ajn valoro de P . Tiun interesan (kaj misteran?) fakton prezentas plidetale nia estonta artikolo *Dopplera efiko de luma ebena vidata per akcelata korpo*. Ĉi tie en Konkludo, ni rediskutis pri konstanteco kaj nuleco de D_2 uzante heŭristikajn argumentojn.

6 Observanto malantaŭ fonto, nekolinie

Ni ĝeneraligas sekciojn 3 kaj 5. Vidu en figuro 7(a), ke observanto A kaj fonto A' komence restas en $[x, y] = [0, 0]$ kaj $[L, P]$, respektive, L estante pozitiva kaj P ioma. Ekde $t = 0$, ambaŭ moviĝas dekstren kun sama konstanta propra akcelo

onde nós usámos (3)–(6) para achar o termo da direita. Novamente devido à equação (19), α tem o mesmo valor em cada sistema inercial de repouso momentâneo da fonte, explicando por quê o fator Doppler é constante.

Nós acabámos de discutir sobre a constância do fator Doppler na fase 2. Quanto ao seu valor, note que $D(\tau_0) = 1$ para qualquer valor de P . Esse interessante (e misterioso?) fato será apresentado mais detalhadamente em nosso futuro artigo *Efeito Doppler de um plano luminoso visto por um corpo acelerado*. Aqui, na Conclusão, nós rediscutimos a respeito da constância e da nulidade de D_2 usando argumentos heurísticos.

6 Observador atrás da fonte, não-colinear

Nós generalizamos as seções 3 e 5. Veja na figura 7(a) que o observador A e a fonte A' estão inicialmente em repouso em $[x, y] = [0, 0]$ e $[L, P]$, respectivamente, sendo L positivo e P qualquer. A partir de $t = 0$ ambos se movimentam para a direita com mesma aceleração

a. Por fazo 1, elig-eniga ekvacio estas $\sqrt{P^2 + [L - x(t)]^2} = c(t - t')$. Tiu fazo daŭras ĝis momento τ_0 laŭ

$$\cosh \frac{a\tau_0}{c} := 1 + \frac{a^2(L^2 + P^2)/c^4}{2(1 + aL/c^2)}. \quad (21)$$

Interesas scii kie estas observanto kiam fazo 1 finiĝas. Tio dependas de valoroj de P , kaj L , kaj a . Fakte, uzante (5) kaj (21), oni pruvas ke la signumo de $x(\tau_0) - L$ estas

$$\sigma := \text{sign}(P^2 - L^2 - 2c^2L/a). \quad (22)$$

Do fazo 1 finiĝas kiam observanto estas en aŭ $x(\tau_0) < L$ aŭ $x(\tau_0) = L$ aŭ $x(\tau_0) > L$ laŭ σ estas malpozitiva aŭ nula aŭ pozitiva, respektive. Tio estas facile komprenebla, ĉar des pli granda $|P|$, des pli malfrua estas ricevo de lumo, do des pli granda estas $x(\tau_0)$.

Por fazo 1, el la supra elig-eniga ekvacio, Dopplera faktoro estiĝas

$$D_1 = \cosh(a\tau/c) \left(1 - \frac{\alpha_1 \tanh(a\tau/c)}{\sqrt{\alpha_1^2 + (aP/c^2)^2}} \right), \quad 0 < \tau < \tau_0, \quad (23)$$

estante

$$\alpha_1 := \cosh a\tau/c - 1 - aL/c^2. \quad (24)$$

Vidu figuron 7(b). Eblas pruvi, ke $dD_1/d\tau = (aL/c)/\sqrt{L^2 + P^2}$ je $\tau = 0$; t.e., $dD_1/d\tau$ estas pozitiva (krom se $L = 0$ kiel ĉe kurbo **4**, kiu ripetas figuron 6(b) el sekcio 5). La komence kreskanta valoro de $D_1(\tau)$ okazas pro la eganta rapido de alproksimiĝado de observanto al fonto. Eblas pruvi ankaŭ, ke denove $d^2D_1/d\tau^2 = (a/c)^2$ je $\tau = 0$, same kiel en sistemo de sekcio 5; do la komenca kurbeco de $D_1(\tau)$ estas supren, kaj dependas nek de L nek de P .

Ni vidas en figuro 7(b), ke la klino de $D_1(\tau)$, je τ_0 , estas aŭ pozitiva (kurbo **1**),

própria constante a . Para a fase 1 a equação de emissão-recepção é $\sqrt{P^2 + [L - x(t)]^2} = c(t - t')$. Essa fase dura até o momento τ_0 segundo

É interessante saber onde está o observador quando a fase 1 termina. Isso depende dos valores de P , e L , e a . Com efeito, usando (5) e (21), prova-se que o sinal de $x(\tau_0) - L$ é

Portanto a fase 1 termina quando o observador está em ou $x(\tau_0) < L$ ou $x(\tau_0) = L$ ou $x(\tau_0) > L$ conforme σ seja negativo ou nulo ou positivo, respectivamente. Isso é facilmente compreensível, pois quanto maior for $|P|$, tanto mais tardia será a recepção da luz, portanto tanto maior será $x(\tau_0)$.

Para a fase 1, a partir da equação de emissão-recepção, o fator Doppler se torna

Veja a figura 7(b). É possível provar que $dD_1/d\tau = (aL/c)/\sqrt{L^2 + P^2}$ em $\tau = 0$; isto é, $dD_1/d\tau$ é positiva (exceto se $L = 0$ como na curva **4**, que repete a figura 6(b) da seção 5). O crescimento inicial do valor de $D_1(\tau)$ ocorre devido à crescente velocidade de aproximação do observador à fonte. É possível mostrar que novamente $d^2D_1/d\tau^2 = (a/c)^2$ em $\tau = 0$, do mesmo modo que no sistema da seção 5; portanto a curvatura inicial de $D_1(\tau)$ é para cima, e independe tanto de L como de P .

Nós vemos na figura 7(b) que a inclinação de $D_1(\tau)$ em τ_0 é ou positiva (curva **1**), ou

aŭ nula (2), aŭ malpozitiva (3). Simpla kalkulo provas, ke tiuj signumoj estas $-\sigma$. La ĝeneralaj formoj de tiuj grafikaĵoj estas kombinoj de grafikaĵoj de figuro 3(b) kun figuro 6(b). Fakte, se L estas sufiĉe granda, figuro 3(b) superas, kaj kontraŭe se P estas sufiĉe granda, figuro 6(b) superas.

Ĉe fazo 2, $\sqrt{P^2 + [L + x(t') - x(t)]^2} = c(t - t')$ estiĝas; uzu (5) por $x(\tau)$ kaj $x(\tau')$, kaj uzu (8) por $t(\tau)$ kaj $t'(\tau')$, poste kalkulu Doppleran faktoron $d\tau'/d\tau$:

nula (2), ou negativa (3). Um cálculo simples prova que estes sinais são $-\sigma$. As formas gerais desses gráficos são combinações dos gráficos da figura 3(b) com figura 6(b). Com efeito, se L for suficientemente grande, a figura 3(b) predomina, e contrariamente se P for suficientemente grande, a figura 6(b) predomina.

Na fase 2, ocorre $\sqrt{P^2 + [L + x(t') - x(t)]^2} = c(t - t')$; use (5) para $x(\tau)$ e $x(\tau')$, e use (8) para $t(\tau)$ e $t'(\tau')$, depois calcule o fator Doppler $d\tau'/d\tau$:

$$D_2 = \frac{\sinh(a\tau/c - a\tau'/c) + (aL/c^2) \sinh a\tau/c}{\sinh(a\tau/c - a\tau'/c) + (aL/c^2) \sinh a\tau'/c}, \quad \tau_0 < \tau < \infty, \quad (25)$$

estante

sendo

$$\cosh a\tau'/c = \frac{1}{\alpha_2} \left(\alpha_3(1 + \alpha_1) + \sqrt{\alpha_3^2 + \alpha_2 \sinh a\tau/c} \right), \quad (26)$$

$$\alpha_2 := 2(aL/c^2) \cosh a\tau/c - 1 - (aL/c^2)^2, \quad (27)$$

$$\alpha_3 := \frac{1}{2} \left(\alpha_2 - 1 - (aP/c^2)^2 \right); \quad (28)$$

vidu figuron 7(b). Same kiel en figuroj 3(b) kaj 6(b), ĉi tie $D_2(\infty) = 1$. Figuro 7(b) ankaŭ montras, ke klino de $D_2(\tau)$, je τ_0 , estas aŭ malpozitiva, aŭ nula, aŭ pozitiva, kaj eblas pruvi, ke tiuj signumoj estas σ . Fakte, se fazo 2 komencas kiam observanto estas en $x(\tau_0) < L$, je tiu momento fonto foriras kun Newtona akcelo pligranda ol tiu de observanto. Do la viol-delokiĝo malfortiĝas. Kontraŭe, se observanto estas en $x(\tau_0) > L$, je tiu momento, fonto alproksimiĝas al li, do la viol-delokiĝo fortiĝas.

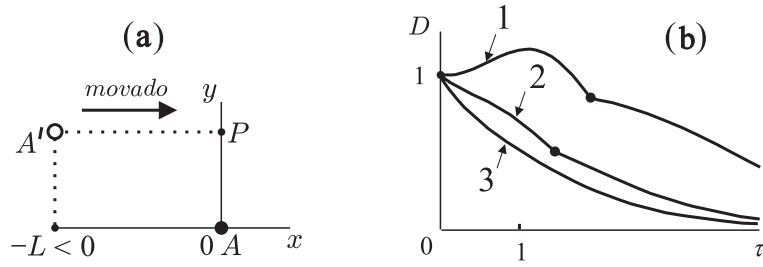
veja a figura 7(b). Do mesmo modo que nas figuras 3(b) e 6(b), aqui $D_2(\infty) = 1$. A figura 7(b) mostra também que a inclinação de $D_2(\tau)$ em τ_0 é ou negativa, ou nula, ou positiva, e é possível provar que esses sinais são σ . Com efeito, se a fase 2 começar quando o observador estiver em $x(\tau_0) < L$, nesse momento a fonte estará se afastando com aceleração Newtoniana maior que a do observador. Portanto o deslocamento para o vermelho enfraquecerá. Contrariamente, se o observador estiver em $x(\tau_0) > L$, nesse momento a fonte estará se aproximando dele, portanto o deslocamento para o violeta fortalecerá.

7 Fonto malantaŭ observanto, nekolinie

Ĉi tiu sekcio ĝeneraligas sekciojn 4 kaj 5. Vidu en figuro 8(a), ke observanto A kaj luma fonto A' komence restas respektive en $[x, y] = [0, 0]$ kaj $[-L, P]$, L es-

7 Fonte atrás do observador, não-colinear

Esta seção generaliza as seções 4 e 5. Veja na figura 8(a) que o observador A e a fonte luminosa A' estão inicialmente em repouso em $[x, y] = [0, 0]$ e $[-L, P]$, respectivamente, sendo



Figuro 8: El sekcio 7. (a) Komenca pozicio de fonto A' kaj de observanto A . (b) Ekzemploj de Dopplera faktoro kiel funkcio de propratempo de observanto. Valoroj de paro $[aL/c^2, aP/c^2]$ en ĉiu ekzemplo estas: **1**: $[3/20, 2]$; **2**: $[1/2, 1]$; **3**: $[5/4, 1]$. En ekzemplo **3**, $aL/c^2 > 1$, do ĉi tiu okazo ne prezentas fazon 2.

Figura 8: Refere-se à seção 7. (a) Posições iniciais da fonte A' e do observador A . (b) Exemplos de fator Doppler como função do tempo próprio do observador. Os valores do par $[aL/c^2, aP/c^2]$ em cada exemplo são: **1**: $[3/20, 2]$; **2**: $[1/2, 1]$; **3**: $[5/4, 1]$. No exemplo **3**, $aL/c^2 > 1$, portanto este caso não apresenta fase 2.

tante pozitiva kaj P ioma. Ekde $t = 0$, ambaŭ moviĝas dekstren je sama konstanta propra akcelo a . Elig-enigaj ekvacioj de fazo 1 kaj 2 estas tiuj de sekcio 6 per anstataŭigo de L al $-L$, do ekvacioj (23)–(28) pravas ankaŭ ĉi tie, per tiu anstataŭigo.

Fazo 1 daŭras ĝis momento τ_0 , laŭ ekvacio (21) (kun $-L$ anstataŭ L). Same kiel en sekcio 6, ni vidas, ke bezonas distingi du eblecojn. Se $L > c^2/a$, fazo 1 etendiĝas ĝis $\tau \rightarrow \infty$, kiel en kurbo **3** de figuro 8(b); en tia okazo, lumo eligita nur antaŭ $t'_2 = -(1/c)(L - c^2/a)$ atingas observanton, same kiel en sekcio 4. Se tamen $0 < L < c^2/a$, fazo 2 ekzistas. Tio estas videbla en kurboj **1** kaj **2** de figuro 8(b).

Dum fazo 1, Dopplera faktoro estas laŭ ekvacio (23) (kun $-L$ anstataŭ L). Vidu en figuro 8(b), ke ĉiuj kurboj komencas malsupren; tio okazas ĉar observanto komence iras kun eganta rapido, fore de loko de lum-eligo. Fakte, simpla kalkulo provas, ke $dD_1/d\tau = -(aL/c)/\sqrt{L^2 + P^2}$ kaj $d^2D_1/d\tau^2 = (a/c)^2$ je $\tau = 0$.

Dum fazo 2, Dopplera faktoro estas laŭ ekvacio (25) (kun $-L$ anstataŭ L). El tiu ekvacio, $D(\tau_0) = 1 - aL/c^2 < 1$, do je τ_0 , Dopplera efiko estas ruĝ-delokiĝo.

L positivo e P qualquer. A partir de $t = 0$ ambos se movimentam para a direita, com mesma aceleração própria constante a . As equações de emissão-recepção da fase 1 e fase 2 são aquelas da seção 6 com a substituição de L por $-L$, portanto as equações (23)–(28) são verdadeiras também aqui, com essa substituição.

A fase 1 dura até o momento τ_0 , segundo a equação (21) (com $-L$ em vez de L). Do mesmo modo que na seção 6, nós vemos que é preciso distinguir duas possibilidades. Se $L > c^2/a$, a fase 1 se estende até $\tau \rightarrow \infty$, como na curva **3** da figura 8(b); neste caso, a luz emitida somente antes de $t'_2 = -(1/c)(L - c^2/a)$ atinge o observador, do mesmo modo que na seção 4. Se entretanto $0 < L < c^2/a$, então a fase 2 existe. Isso é visível nas curvas **1** e **2** da figura 8(b).

Durante a fase 1 o fator Doppler é como na equação (23) (com $-L$ em lugar de L). Veja na figura 8(b) que toda curva começa para baixo; isso ocorre porque o observador inicialmente se afasta do local da emissão da luz com velocidade crescente. Com efeito, um cálculo simples prova que $dD_1/d\tau = -(aL/c)/\sqrt{L^2 + P^2}$ e $d^2D_1/d\tau^2 = (a/c)^2$ em $\tau = 0$.

Durante a fase 2, o fator Doppler é como na equação (25) (com $-L$ no lugar de L). A partir dessa equação, $D(\tau_0) = 1 - aL/c^2 < 1$, portanto em τ_0 o efeito Doppler é deslocamento para o

Same kiel en sekcio 4, ekzistas signaloj kiuj neniam atingas observanton. Fakte, la lasta signalo atinganta observanton (je $\tau \rightarrow \infty$) estas eligita je $\tau'_1 = (c/a) \ln(c^2/aL)$. Do observanto kun rapido ĉirkaŭ c ricevas signalon eligata el fonto kun eta rapido, eksplikante $D_2 \rightarrow 0$. Fine rimarku, ke ĉiu grafikaĵo en figuro 8(b) estas kombino de figuro 5(b) kun figuro 6(b); speciale, $D_2(\infty) = 0$.

8 Konkludo

Ĉi tiu artikolo zorgis pri Doppleran efikon se luma fonto kaj observanto moviĝadas paralele, ambaŭ kun sama konstanta propra akcelo, kaj komencante el restado je sama momento. Ni vidis, ke se observanto moviĝas malantaŭ fonto (sekcioj 3 kaj 6), komence okazas viol-delokiĝo, kiu iĝas nula efiko kiam $t \rightarrow \infty$ (figuroj 3(b) kaj 7(b)). Se, kontraŭe, fonto moviĝas malantaŭ observanto (sekcioj 4 kaj 7), komence okazas finia ruĝ-delokiĝo, kiu iĝas nefinia ruĝ-delokiĝo ($D \rightarrow 0$) kiam $t \rightarrow \infty$ (figuroj 5 kaj 8(b)). Rimarku, ke, en sekcio 7, povas ekzisti viol-delokiĝo inter la du ruĝ-delokiĝoj. Speciale, se observanto kaj fonto moviĝas orte al linio kunigante ilin (sekcio 5), figuro 6(b) montris, ke komence estas viol-delokiĝo, kiu iĝas nula efiko ekde $t = t_0$.

Nun, ni klarigas konstantecon kaj neeston ($D = 1$) de Dopplera efiko ĉe fazo 2 de orta-nekolinia movado de sekcio 5. Per inercia sistemo de momenta ripozo de fonto kaj observanto, restanta fonto en $[x, y] = [0, P]$, kun propra akcelo a laŭ x , eligas lum-signalon. Je tiu momento, restanta observanto en $[x, y] = [0, 0]$ havas propran akcelon a laŭ x . La valoro de $\tau - \tau'$ dependas de ĉi tiuj supraj kondiĉoj. Iom poste, per nova inercia sistemo de momenta ripozo de fonto kaj observanto, propraj akceloj,

vermelho.

Do mesmo modo que na seção 4, há sinais que nunca atingem o observador. Com efeito, o último sinal que atinge o observador (em $\tau \rightarrow \infty$) é emitido em $\tau'_1 = (c/a) \ln(c^2/aL)$. Portanto o observador com velocidade perto de c recebe sinal emitido pela fonte em baixa velocidade, assim explicando $D_2 \rightarrow 0$. Finalmente note que cada curva na figura 8(b) é uma combinação da figura 5(b) com a figura 6(b); em particular, $D_2(\infty) = 0$.

8 Conclusão

Este artigo tratou do efeito Doppler quando a fonte de luz e o observador se movem paralelamente, ambos com a mesma aceleração própria constante, e partindo do repouso no mesmo momento. Nós vimos que se o observador se movimenta atrás da fonte (seções 3 e 6), inicialmente ocorre deslocamento para o violeta, que se torna efeito nulo quando $t \rightarrow \infty$ (figuras 3(b) e 7(b)). Se, ao contrário, a fonte se movimenta atrás do observador (seções 4 e 7), ocorre inicialmente um deslocamento finito para o vermelho, que se torna infinito deslocamento para o vermelho ($D \rightarrow 0$) quando $t \rightarrow \infty$ (figuras 5 e 8(b)). Note que na seção 7, pode existir deslocamento para o violeta entre os dois deslocamentos para o vermelho. Em particular, se o observador e a fonte se locomovem transversalmente à linha que os une (seção 5), a figura 6(b) mostrou que inicialmente há deslocamento para o violeta, que se torna efeito nulo a partir de $t = t_0$.

Vamos agora esclarecer a constância e a inexistência ($D = 1$) de efeito Doppler na fase 2 do movimento ortogonal não-colinear da seção 5. No sistema inercial de repouso momentâneo da fonte e do observador, a fonte parada em $[x, y] = [0, P]$, com aceleração própria a ao longo de x , emite um sinal luminoso. Nesse momento, o observador parado em $[x, y] = [0, 0]$ tem aceleração própria constante a ao longo de x . O valor de $\tau - \tau'$ depende destas condições acima. Posteriormente, em um novo sistema inercial de repouso momentâneo da fonte e do observador, as ace-

rapidoj (nulaĵ) kaj relativaj pozicioj estas samaj. Ĉar la kondiĉoj estas samaj, do la valoro de $\tau - \tau'$ estas la sama, kaj do $D = 1$. Rimarku, ke ĉi tiu argumento validas nur: (i) se propraj akceloj estas konstantaj (memoru, ke laŭ sekcio 2, propra akcelo estas difinata per inercia sistemo de momenta ripozo), (ii) se movado estas orta, ĉar kontraŭe, malsamaj Lorentzaj etigadoj de distanco L aperas, (iii) ĉe fazo 2, ĉar kontraŭe, la kondiĉoj ne estas samaj per sekvantaj inerciaj sistemoj.

Estas mirinda, taŭgeco de konstanta propra akcelo al Dopplera efiko, ĉe speciala relativeco; tiu taŭgeco estos plidetale vidata en estonta artikolo.

Lasta komento estas: ni baldaŭ publikigos parton *II* de ĉi tiu artikolo, rilate al luma Dopplera efiko inter korpoj paralele moviĝantaj, ambaŭ je (malsamaj) konstantaj propraj akceloj; speciale ni traktas pri rigida movado [1].

9 Gratuloj

Ni kore dankas al Leo Squallyorbit pro sugestis studon de Dopplera efiko de observanto kaj fonto ambaŭ akcelataj.

Citaĵoj

- [1] F. M. Paiva kaj A. F. F. Teixeira, *La relativeca tempo – I*, (2006) <http://arxiv.org/abs/physics/0603053>
- [2] F.M. Paiva kaj A.F.F. Teixeira, *Relativeca Dopplera efiko ĉe unuforme akcelata movo – I*, (2007) <http://arxiv.org/abs/physics/0701092>
- [3] F.M. Paiva kaj A.F.F. Teixeira, *Relativeca Dopplera efiko ĉe unuforme akcelata movo – II*, (2007) <http://arxiv.org/abs/0704.1130>
- [4] W. Rindler, *Essential relativity, 2nd ed*, Springer-Verlag (1977)
- [5] C. Møller, *The theory of relativity, 2nd ed*, Oxford, U P (1972)

leraĵoj propraj, velocities (nulas) e posiĉões relativas são as mesmas. Como as condições são as mesmas, o valor de $\tau - \tau'$ é o mesmo, portanto $D = 1$. Note que este argumento vale somente: (i) se as acelerações prõprias forem constantes (lembre que, segundo a seçãõ 2, a aceleraçãõ prõpria é definida no sistema inercial de repouso momentãneo), (ii) se o movimento for ortogonal, caso contrãrio aparecẽãõ diferentes contrações de Lorentz da distãncia L , (iii) na fase 2, caso contrãrio as condições não serãõ as mesmas nos sistemas inerciais seguintes.

É admirãvel, a adequaçãõ da aceleraçãõ prõpria constante ao efeito Doppler, na relatividade especial; essa adequaçãõ serã vista mais pormenorizadamente em um prõximo artigo.

Último comentãrio: nõs brevemente publicaremos uma parte *II* deste artigo, relativamente ao efeito Doppler luminoso entre corpos em movimentos paralelos, ambos com (diferentes) acelerações prõprias constantes; em particular nõs tratamos de movimentos rĩgidos [1].

9 Agradecimentos

Nõs agradecemos ao Leo Squallyorbit por sugerir o estudo do efeito Doppler com fonte e observador ambos acelerados.

Referências