CBPF-NF-001/06

O Mito das Ambigüidades nas Representações Decimais

Gentil Lopes da Silva[*]

19 de janeiro de 2006

"E aquilo que nesse momento se revelará aos povos, surpreenderá a todos não por ser exótico mas pelo fato de poder ter sempre estado oculto quando terá sido o óbvio."
(O índio/Caetano Veloso)

Introdução: Neste trabalho abordaremos a questão das representações decimais e perseguiremos, dentre outros, o seguinte objetivo: mostrar que as supostas ambigüidades das representações decimais são um mito.

Por exemplo, a maioria das pessoas está convencida da dupla igualdade seguinte:

$$0,5 = \frac{1}{2} = 0,499999\ldots \tag{1}$$

A segunda das igualdades acima não tem a mesma legitimidade da primeira, porquanto exige uma interpretação mais elaborada.

O conceito do éter revelou-se um fantasma criado pela imaginação dos físicos do século XIX. Neste trabalho mostramos, igualmente, que igualdades tipo (1) não têm "existência real"; são fantasmas criados pela imaginação dos matemáticos. Assim como foi decisivo, para o progresso da física, que se exorcizasse o fantasma do éter, cremos que igualmente será de relevância para a matemática - e por contigüidade, para a física - exorcizarmos os fantasmas das ambigüidades.

A partir do presente trabalho "igualdades" tipo $0,5 = 0,499999\ldots$ não deverão ser tratadas como uma questão de arredondamentos, isto é, de uma aproximação com erro tão pequeno quanto se queira; trata-se agora de um erro de lógica o qual, se para o físico experimental pode não fazer muita diferença, para o físico teórico pode ser simplesmente desastroso[†] no sentido de que pode falsear uma interpretação teórica.

Arrolamos três argumentos, irrefutáveis, contra as supostas ambigüidades, onde cada um destes argumentos, por si só, já seria suficiente para exorcizar os tais fantasmas.

O presente trabalho dará suporte teórico a um outro - que estaremos disponibilizando em breve - que trata da questão da transferência de objetos (em particular supercordas) entre dimensões arbitrárias. Portanto constitui-se em um pré-requisito para a leitura do trabalho seguinte.

[*]Prof. da UFRR, email: gentil@dmat.ufrr.br

[†]A exemplo do que ocorreu na matemática com respeito a construção da curva do italiano Giuseppe Peano ($1858 - 1932$), onde encontramos - fundamentados no presente trabalho - erros de lógica, os quais estaremos assinalando neste trabalho.

Mostraremos agora que a causa das supostas ambigüidades assenta-se numa definição ilegítima.

1 Uma Definição Espúria

Em livros texto* de matemática nos deparamos com a seguinte definição:

"Dado $x \in [0, 1]$, representar x na base 2 significa escrever $x = 0, x_1 x_2 x_3 \ldots$, onde cada um dos digitos x_n é igual a 0 ou 1, de tal modo que

$$x = \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2^2} + \cdots + \frac{x_n}{2^n} + \cdots \text{"}$$

Esta definição apresenta uma falha. Por uma simples razão: Ela comporta ambigüidades. Por exemplo; $0,011000\ldots$ e $0,010111\ldots$ são duas representações (segundo esta definição) de $\frac{3}{8}$, porquanto

$$\frac{0}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \frac{0}{2^5} + \frac{0}{2^6} + \cdots = \frac{3}{8} = \frac{0}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \cdots$$

E por que uma definição que permite ambigüidades é falha?

Por uma simples razão: conduz a contradições. Vejamos duas:

1.1 Primeiro argumento/A Seqüência shift

Vamos definir a seguinte seqüência recursiva, de termos no intervalo $[0, 1]$:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{x_1}{2^1} + \frac{x_2}{2^2} + \frac{x_3}{2^3} + \cdots \\ a_n = \frac{x_n}{2^1} + \frac{x_{n+1}}{2^2} + \frac{x_{n+2}}{2^3} + \cdots, \quad n \geq 2. \end{cases}$$

onde $a_1 \in [0, 1]$ é dado e (x_i) é a sua representação binária.

Pois bem, para apreciarmos uma inconsistência das supostas ambigüidades, vamos iniciar com $a_1 = \frac{3}{8}$. tomando

$$\frac{3}{8} = \frac{0}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \frac{0}{2^5} + \frac{0}{2^6} + \cdots$$

obtemos que $a_n = 0$, para todo $n \geq 4$. Isto é, $\lim a_n = 0$. Por outro lado, tomando

$$\frac{3}{8} = \frac{0}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7} + \cdots$$

obtemos que $a_n = 1$, para todo $n \geq 4$. Isto é, $\lim a_n = 1$ e isto contraria a unicidade do limite de uma seqüência.

---

*Ver por exemplo: Lima, Elon Lages. Análise Real, Volume 1 (Coleção Matemática Universitária). Rio de Janeiro: IMPA-CNPq, 1989. *Obs:* Neste livro a definição apresentada é para a base 3, aqui adaptamos para a base 2.

Obs: Não precisamos nem apelar para convergência de seqüências. De fato, partindo de $a_1 = \frac{3}{8}$, obtemos: $a_4 = 0$ e $a_4 = 1 \Rightarrow 0 = 1 \rightarrow\leftarrow$.

Em resumo, a dupla igualdade $.011000\ldots = \frac{3}{8} = .010111\ldots$ nos coloca em uma situação assaz desconfortável.

O exemplo proporcionado pela seqüência shift nos mostra que as supostas ambigüidades, ao contrário do que ingenuamente se poderia pensar, podem sim trazer graves conseqüências em uma construção matemática (ou física).

Mostraremos agora mais uma inconsistência das referidas ambigüidades.

1.2 Segundo argumento/Euclides

Iremos necessitar do seguinte - clássico - resultado:

Teorema 1 (Representação dos Naturais num Sistema de Base b)**.** *Dado um inteiro positivo $b > 1$, todo inteiro positivo n admite uma única representação da forma:*

$$n = a_m b^m + a_{m-1} b^{m-1} + \ldots + a_2 b^2 + a_1 b_1 + a_0$$

onde m é um inteiro não negativo e os coeficientes a_i $(i = 0, 1, \ldots, m)$ são inteiros que satisfazem às condições:

$$0 \leq a_i < b \ \ \textit{para} \ \ i = 0, 1, 2, \ldots, m \ \ \textit{e} \ \ a_m \neq 0.$$

Para apreciarmos uma outra contradição das ambigüidades em consideração, vamos converter $\frac{3}{8}$ para a base binária. Inicialmente convertemos 3 para a base 2, assim

$$3 = 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

Pelo teorema 1 esta representação é única. Agora dividamos a equação anterior por 8,

$$\frac{3}{8} = \frac{1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0}{2^3} = \frac{1 \cdot 2^1}{2^3} + \frac{1 \cdot 2^0}{2^3} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} = \frac{0}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}$$

Portanto, $\frac{3}{8} = (.011000\ldots)_2$ e pelo mesmo teorema 1 somos forçados a concluir que esta representação é única. Logo, $(.010111\ldots)$ não pode ser a representação de $\frac{3}{8}$.

O que foi feito aqui para a base 2 pode ser repetido para uma base qualquer.

Vê-se daí que uma definição válida, para representações decimais, não deve permitir ambigüidades.

E como seria uma definição válida?. Construiremos uma oportunamente.

2 Uma definição legítima

Construiremos agora uma representação alternativa para os números reais. Vamos nos restringir aos reais do intervalo $[\,0, 1\,[$ uma vez que qualquer número real situa-se entre dois inteiros consecutivos, isto é, dado $x \in \mathbb{R}$ sucede que $x \in [m, m+1[$ para algum inteiro m. Em suma, todo real pode ser transladado para o intervalo $[\,0, 1\,[$. Também vamos nos restringir ao caso da base 2 - base binária - uma vez que o que faremos aqui com respeito a esta base pode ser repetido para uma outra base qualquer.

Por ora diremos que uma representação (binária) é uma seqüência (infinita), cujos termos são os algarismos: 0, 1. Reuniremos todas estas seqüências no conjunto:

$$\{0,\,1\}^{\mathbb{N}} = \{0,\,1\} \times \{0,\,1\} \times \{0,\,1\} \times \cdots$$

Este é o conjunto das seqüências infinitas de $0'$s e $1'$s. Por exemplo, dois elementos deste conjunto são: 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 . . . e 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 . . ..

Gostariamos de definir uma bijeção entre os conjuntos $\{0,\,1\}^{\mathbb{N}}$ e $[\,0,\,1\,[$, assim:

$$\begin{aligned} f\colon \big\{0,1\big\}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow [\,0,\,1\,[\\ (x_n) \ &\longmapsto \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} \end{aligned}$$

Esta aplicação está bem definida uma vez que a série em questão é majorada pela série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ cuja soma é 1 . Infelizmente f não é injetiva porquanto,

$$f\big(x_1 \ldots x_j 000\ldots\big) = f\big(x_1 \ldots x_{j-1}(x_j - 1)111\ldots\big) \tag{2}$$

Como é fácil verificar. Reciprocamente, supondo $f(x) = f(y)$ e $x \neq y$ vamos mostrar que $x = x_1 x_2 x_3 \ldots$ e $y = y_1 y_2 y_3 \ldots$ só podem ser da forma das representações que aparecem em (2).

Prova: De fato, seja j o primeiro índice onde x difere de y; suponhamos, ademais, que $x_j = 1$. Sendo assim podemos escrever

$$\begin{aligned} x &= x_1\, x_2 \ldots x_{j-1} 1\, x_{j+1}\, x_{j+2} \ldots \\ y &= x_1\, x_2 \ldots x_{j-1} 0\, y_{j+1}\, y_{j+2} \ldots \end{aligned}$$

Devemos mostrar que

$$f(x) = f(y) \implies \begin{cases} x_{j+1} = x_{j+2} = \ldots = 0; \\ y_{j+1} = y_{j+2} = \ldots = 1. \end{cases}$$

A igualdade $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{2^n}$ pode ser escrita assim

$$\frac{x_1}{2^1} + \frac{x_2}{2^2} + \cdots + \frac{x_{j-1}}{2^{j-1}} + \frac{1}{2^j} + \frac{x_{j+1}}{2^{j+1}} + \cdots = \frac{x_1}{2^1} + \frac{x_2}{2^2} + \cdots + \frac{x_{j-1}}{2^{j-1}} + \frac{0}{2^j} + \frac{y_{j+1}}{2^{j+1}} + \cdots$$

Logo,

$$\frac{1}{2^j} + \frac{x_{j+1}}{2^{j+1}} + \cdots = \frac{y_{j+1}}{2^{j+1}} + \cdots$$

Ou ainda,

$$\frac{1}{2^j} + \sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} = \sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{y_n}{2^n}$$

como $\displaystyle\sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{y_n}{2^n} \leq \frac{1}{2^j}$, isto implica em que esta igualdade só poderá ser satisfeita em uma única situação; qual seja, aquela em que $x_n = 0$, para $n \geq j+1$ e $y_n = 1$, para $n \geq j+1$. ■

Tendo em vista os argumentos anteriores, resulta injetiva a seguinte aplicação

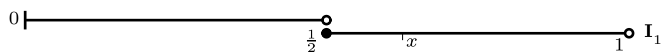
$$\begin{aligned} \lambda\colon \mathbb{B} &\longrightarrow [\,0,\,1\,[\\ (x_n) &\longmapsto \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} \end{aligned}$$

onde $\mathbb{B}$ é o subconjunto de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ cujos elementos não têm todos os termos iguais a 1, a partir de alguma posição. Por exemplo: $0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1 \ldots \in \mathbb{B}$ e $1\,0\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1 \ldots \notin \mathbb{B}$.

Mostraremos agora que λ é sobre $[\,0,\,1\,[$. Seja dado, arbitrariamente, um ponto $x \in [\,0,\,1\,[$ e mostremos que este é imagem, por λ, de alguma seqüência binária de $\mathbb{B}$. De fato, dividamos o intervalo $[\,0,\,1\,[$ ao meio, assim

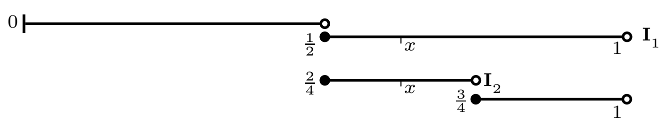
$$[0,\,1[= \bigcup_{j=0}^{1} \Big[\frac{j}{2},\, \frac{j+1}{2}\Big[\;=\; \big[\,0,\,\frac{1}{2}\big[\,\cup\,\big[\,\frac{1}{2},\,1\big[$$

sendo assim, x pertence a um, e só um, desses subintervalos, digamos $x \in \mathbf{I}_1 = \big[\frac{x_1}{2},\, \frac{x_1+1}{2}\big[$:

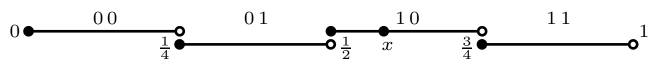


Após o "corte" se x resulta no subintervalo da esquerda $x_1 = 0$, se, no da direita $x_1 = 1$. No caso da figura temos $x_1 = 1$. A seguir dividamos este subintervalo em dois outros, assim $\big[\frac{x_1}{2},\, \frac{x_1+1}{2}\big[\;=\; \displaystyle\bigcup_{j=0}^{1} \Big[\frac{x_1}{2} + \frac{j}{2^2},\, \frac{x_1}{2} + \frac{j+1}{2^2}\Big[$. Selecionemos x_2 tal que $x \in \mathbf{I}_2 = \big[\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2^2},\, \frac{x_1}{2} + \frac{x_2+1}{2^2}\big[$.

(parentêsis:) Observe que o extremo esquerdo deste intervalo, no caso, $\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2^2}$ nada mais é que a segunda soma parcial da série $\sum \frac{x_n}{2^n}$ (da definição de λ). Por exemplo, o extremo esquerdo de $\mathbf{I}_3$ seria $\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2^2} + \frac{x_3}{2^3}$, a terceira soma parcial da referida série.



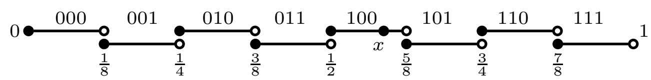
No caso da figura $x_2 = 0$. Dividindo o intervalo $[\,0,\,1\,[$ em quatro partes os dois primeiros digitos $(x_1\, x_2 \ldots)$ da seqüência que pretendemos associar a x, são as "coordenadas" do ponto x de acordo com o diagrama a seguir:



x_1	x_2
0	0
0	1
1	0
1	1

Resumindo: x_1 nos diz em qual metade do intervalo encontra-se x; $x_1\, x_2$ nos diz em qual quarta parte do intervalo encontra-se x.

Dividindo o intervalo $[0,\, 1[$ em oito partes os três primeiros digitos $(x_1\, x_2\, x_3 \ldots)$ da seqüência que pretendemos associar a x, são as "coordenadas" do ponto x de acordo com o diagrama a seguir:



x_1	x_2	x_3
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

Este processo de divisões sucessivas é continuado indefinidamente. Pelo teorema dos intervalos encaixantes, resulta que $\cap_{n=1}^{\infty}\bar{\mathbf{I}}_n$ consiste em um único ponto ($\bar{\mathbf{I}}_n$ designa o intervalo fechado com os mesmos extremos de $\mathbf{I}_n$). Como $x \in \cap_{n=1}^{\infty}\bar{\mathbf{I}}_n$, resulta que a seqüência formada pelas extremidades esquerdas dos $\mathbf{I}_n$ converge para x, isto é, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} = x$. Sendo assim tomamos a seqüência binária $(x_1 x_2 x_3 \ldots)$ para corresponder a x.

Resulta assim que λ é uma bijeção e, desta forma, podemos identificar os elementos de ambos os conjuntos: $[0,\, 1[$ e $\mathbb{B}$.

Dissemos ainda há pouco que $\mathbb{B}$ é o subconjunto de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ cujos elementos não têm todos os termos iguais a 1, a partir de alguma posição. Faremos aqui uma única exceção: incluiremos em $\mathbb{B}$ a seqüência $(1\,1\,1\ldots)$, com isto temos a bijeção

$$\begin{aligned} \lambda\colon \mathbb{B} &\longrightarrow [0,\, 1] \\ (x_n) &\longmapsto \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} \end{aligned}$$

E colocaremos, por definição, $(1\,1\,1\ldots) \leftrightarrow 1$.

2.1 Definição de representação binária

λ sendo uma bijeção possui inversa $\lambda^{-1}\colon [0,\, 1] \to \mathbb{B}$. A imagem de um $x \in [0,\, 1]$ por λ^{-1} é o que chamamos de representação binária de x. Isto é, diremos, por definição, que uma representação binária é um elemento de $\mathbb{B}$. Sendo assim, por exemplo, $(101010\ldots)$ é uma representação binária, enquanto $(0101111\ldots)$ não. Dizemos que os números do intervalo $[0,\, 1]$ são **codificados** pelos elementos de $\mathbb{B}$

No caso da base 10 teremos

$$\begin{aligned} \lambda\colon \mathbb{D} &\longrightarrow [0,\, 1[\\ (x_n) &\longmapsto \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{10^n} \end{aligned}$$

onde $\mathbb{D}$ é o subconjunto de $\{0,\, 1,\, 2, \ldots, 9\}^{\mathbb{N}}$ cujos elementos não têm todos os termos iguais a 9, a partir de alguma posição. Sendo assim, $.4999\ldots$ não é a representação decimal de $\frac{1}{2}$.

Observe que $\frac{1}{2}$ é a imagem da seqüência $(4999\ldots)$ pela aplicação

$$\begin{aligned} f\colon \{0,\,1,\,\ldots,9\}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow [0,\,1[\\ (x_n) \;&\longmapsto \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{10^n} \end{aligned}$$

mas esta, como já vimos no caso da base 2, não é bijeção; portanto não tem sentido (não é válida) a identificação $.4999\ldots = \frac{1}{2}$. Fazemos distinção entre *representação* (ou desenvolvimento) decimal e *expansão* decimal. As três igualdades seguintes:

$$1/2 = .500000\ldots \tag{3}$$

$$1/2 = \frac{5}{10^1} + \frac{0}{10^2} + \frac{0}{10^3} + \frac{0}{10^4} + \cdots \tag{4}$$

$$1/2 = \frac{4}{10^1} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \cdots \tag{5}$$

são todas legítimas. Mas são suscetíveis de interpretações distintas: Em (3) temos uma representação decimal, em (4) temos uma expansão decimal (é uma série) e em (5) temos uma série cuja soma é $1/2$, mas aqui não temos uma expansão decimal.

2.2 Representação ternária

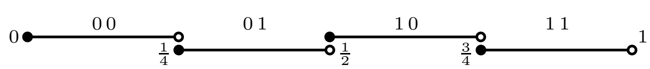
Enfatizamos que tudo o que foi feito para a base 2 se repete sem dificuldade para a base 3. Por exemplo, seja $\mathbb{T} \subset \{0,\,1,\,2\}^{\mathbb{N}}$, onde $\mathbb{T}$ é o subconjunto de $\{0,\,1,\,2\}^{\mathbb{N}}$ cujos elementos não têm todos os termos iguais a 2, a partir de alguma posição (com exceção da seqüência $(2\,2\,2\,2\,\ldots)$ que está incluida em $\mathbb{T}$). Podemos mostrar que a aplicação:

$$\begin{aligned} \lambda\colon \mathbb{T} \;&\longrightarrow [\,0,\,1\,[\\ (x_n) &\longmapsto \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \end{aligned}$$

é uma bijeção. λ sendo uma bijeção possui inversa $\lambda^{-1}\colon [0,\,1] \to \mathbb{T}$. A imagem de um $x \in [\,0,\,1\,]$ por λ^{-1} é o que chamamos de representação ternária de x. Isto é, diremos, por definição, que uma representação ternária é um elemento de $\mathbb{T}$. Sendo assim, por exemplo, $(1\,0\,2\,1\,0\,2\,1\,0\,2\ldots)$ é uma representação em base 3, enquanto $(0\,1\,0\,2\,2\,2\,2\,2\,2\,2\ldots)$ não.

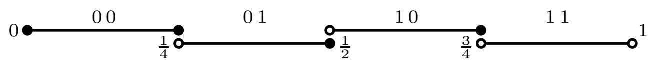
2.3 Terceiro argumento/Inviabilidade da codificação (bijeção)

Voltando à prova (por bisseccionamento) da sobrejetividade de λ, observe o diagrama a seguir:



Vamos obter a representação de $\frac{1}{4}$, por exemplo. No primeiro corte (que acontece no meio do intervalo $[\,0,\,1[$) $\frac{1}{4}$ resulta no intervalo da esquerda, portanto, seu primeiro dígito é 0 ($x_1 = 0$). No segundo corte (na metade do subintervalo esquerdo) $\frac{1}{4}$ resulta no subintervalo da direita, portanto seu novo dígito é 1 ($x_2 = 1$). Daí por diante, em cortes sucessivos, $\frac{1}{4}$ estará sempre nos subintervalos da esquerda, ou seja, todos os seus dígitos subseqüentes são iguais a 0, portanto a codificação de $\frac{1}{4}$ em binário é: $0\,1\,0\,0\,0\,0\ldots$. Este raciocínio se repete para qualquer fração diádica.

E o que aconteceria se tivéssemos - em cada corte - fechado os extremos direito dos subintervalos esquerdos e aberto os extremos esquerdos dos subintervalos à direita ?, assim:



Neste caso teriamos, por exemplo, as seguintes codificações:

$$\frac{1}{4} = 0\,0\,1\,1\,1\ldots;\;\; \frac{1}{2} = 0\,1\,1\,1\,1\ldots;\;\; \frac{3}{4} = 1\,0\,1\,1\,1\ldots$$

Pois bem, onde estaria o problema com estas codificações? Acontece que estas seqüências não moram em $\mathbb{B}$, isto é, não teriamos provado que λ é sobrejetiva. Em outras palavras, não teriamos construido um bijeção: $\mathbb{B} \;\longleftrightarrow\; [\,0,\,1\,]$; e sem bijeção não há representação binária. Resumindo: A existência das supostas ambigüidades inviabilizariam as próprias representações. Como provamos (ao construir λ) que as representações existem, segue-se que as ambigüidades não existem (são fantasmas, sem existência real), pois ambas (representações e ambiguidades) não podem coexistir simultâneamente.

Este mesmo raciocínio se aplica no caso de outras bases.

3 O mito das ambigüidades e a curva de Peano

O século XIX se iniciou com a descoberta de que curvas e funções não precisam ser do tipo bem comportado, o que até então se supunha. Peano* em 1890 mostrou até que ponto a matemática podia insultar o senso comum quando, tratando do aprofundamento dos conceitos de *continuidade* e *dimensão*, publica a sua famosa curva, proposta como cobrindo totalmente uma superfície plana quadrangular.

A curva de Peano hoje possui aplicações em compressão de imagens digitais. Em nosso próximo artigo estaremos sugerindo uma aplicação desta curva - em conexão com uma outra *patologia* por nós construida - na teoria das supercordas, no que concerne a transferência de objetos entre dimensões arbitrárias.

Mostraremos agora, como conseqüência dos argumentos aqui expostos, um erro teórico (isto é, de lógica) em duas construções da curva de Peano, constantes na literatura.

1º) Agora iremos apontar algumas falhas na construção da curva de Peano, segundo consta em [3], (*Curva de Peano*, pág. 230). Na página 231 lemos

"Vemos portanto que o conjunto de Cantor $\mathbf{K}$ foi definido de tal maneira que os seus pontos são exatamente os números $x \in [0,\,1]$ cuja expressão $x = 0, x_1 x_2 x_3 \ldots$ na base 3 contém apenas os algarismos 0 e 2."

Discordamos uma vez que $x = \frac{1}{3} \in \mathbf{K}$ e, no entanto

$$x = \frac{1}{3} = \frac{1}{3^1} + \frac{0}{3^2} + \frac{0}{3^3} + \cdots$$

*Giuseppe Peano (1858 – 1932), natural de Cuneo, Itália, foi professor da Academia Militar de Turin, com grandes contribuições à Matemática. Seu nome é lembrado hoje em conexão com os *axiomas de Peano* dos quais dependem tantas construções rigorosas da álgebra e da análise.

isto é, $x = (1\,0\,0\,0\ldots)_3$, como já mostramos a representação é única. Esta observação, por si só, já é suficiente - do ponto de vista da lógica - para invalidar a construção da curva.

Observe a aplicação φ:

$$\begin{aligned} \varphi\colon \{0,\, 2\}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow \mathbf{K} \\ x \quad &\longmapsto \textstyle\sum \frac{x_n}{3^n} \end{aligned}$$

A aplicação inversa $\varphi^{-1}\colon \mathbf{K} \longrightarrow \{0,\, 2\}^{\mathbb{N}}$ não está bem definida. Com efeito, o elemento $x = \frac{1}{3} = (1000\ldots)_3$ do domínio não tem imagem.

Poderia-se argumentar: não, mas voce tem que tomar $\frac{1}{3} = (0222\ldots)_3$!
Respondo: não entendo porque sou obrigado a cometer um erro de lógica matemática!.

2º) Observe que dado um ponto $(x_0,\, y_0) \in [\,0,\, 1\,]^2$ com duas coordenadas diádicas, como por exemplo $\left(\frac{1}{2},\, \frac{3}{4}\right)$, temos as seguintes alternativas de "codificação":

$$\left(\frac{1}{2},\, \frac{3}{4}\right) \rightarrow \begin{cases} \text{VV}: (1\,0\,0\,0\,0\ldots,\, 1\,1\,0\,0\,0\ldots) \\ \text{VF}: (1\,0\,0\,0\,0\ldots,\, 1\,0\,1\,1\,1\ldots) \\ \text{FV}: (0\,1\,1\,1\,1\ldots,\, 1\,1\,0\,0\,0\ldots) \\ \text{FF}: (0\,1\,1\,1\,1\ldots,\, 1\,0\,1\,1\,1\ldots) \end{cases}$$

Onde: V significa a verdadeira codificação (da fração) e F a falsa.

A nossa segunda objeção refere-se a uma outra construção da curva de Peano encontrada no artigo: "Curvas planares contínuas que preenchem um quadrado" do Prof. Luis Fernado.† Pois bem, neste artigo lemos (pág. 34):

"Queremos mostrar que esta curva tem como traço todo o quadrado $Q = [\,0,\, 1\,] \times [\,0,\, 1\,] \subset \mathbb{R}^2$. Para isso, vamos tomar $(x_0,\, y_0) \in Q$ arbitrário e fixo, e mostrar que existe $t_0 \in [\,0,\, 1\,]$, tal que $\alpha(t_0) = (x_0,\, y_0)$.

Usando a expressão binária de x_0 e y_0 podemos encontrar constantes a_n, onde $a_n = 0$ ou $a_n = 1$, $n = 0,\, 1,\, 2, \ldots$, tais que

$$x_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n}}{2^{n+1}} = \frac{a_0}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_4}{2^3} + \frac{a_6}{2^4} + \cdots$$

e

$$y_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_1}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \frac{a_5}{2^3} + \frac{a_7}{2^4} + \cdots$$

Em outras palavras, estamos dizendo que x_0 e y_0 têm expressões na base dois dadas por

$$x_0 = 0, a_0\, a_2\, a_4\, a_6 \ldots$$

e

$$y_0 = 0, a_1\, a_3\, a_5\, a_7 \ldots$$

†O qual pode ser visto no seguinte endereço: www.ici.unifei.edu.br/luisfernando; em Minicursos: Curvas planares, da intuição à perplexidade.

A partir de x_0 e y_0 podemos construir t_0 da seguinte maneira: na base três tem expressão dada por

$$t_0 = 0,(2a_0)(2a_1)(2a_2)(2a_3)\ldots,$$

ou seja,

$$t_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2a_n}{3^{n+1}} = \frac{2a_0}{3} + \frac{2a_1}{3^2} + \frac{2a_2}{3^3} + \frac{2a_3}{3^4} + \cdots$$

Decorre desta construção que $0 \leq t_0 \leq 1$."

Para os nossos propósitos até aqui é suficiente. Pois bem, tendo em conta que este artigo se utiliza da definição espúria (de representação na base b), tomando $(x_0, y_0) \in Q$ com ambas as coordenadas diádicas e com a codificação FF, resulta que $(2a_0)(2a_1)(2a_2)(2a_3)\ldots$, terá todos os seus dígitos iguais a 2 a partir de alguma posição, o que significa que esta seqüência (em base 3) não corresponde a nenhum número do intervalo unitário. Isto é, não é verdade que: $0 \leq t_0 \leq 1$. Resumindo, o autor não provou que a curva é sobrejetiva.

Ainda sob o patrocínio dos fantasmas (das ambigüidades) vejamos mais um exemplo de interpretação teórica falha: Um dos tópicos abordados no livro "Meu Professor de Matemática"(4ª Edição) do Prof. Elon Lages Lima, trata das representações decimais. Decidimos incluir aqui uma análise de alguns pontos considerados pelo autor:
a) Ao argumentar sobre igualdades tipo:

$$\frac{1}{9} = 0,111\ldots$$
$$1 = 0,999\ldots$$
$$32,8 = 32,799\ldots$$

o raciocínio ou "explicação" do autor, ao que me parece, pode ser resumido (pelo ao menos em alguns pontos) em trocar "seis por meia dúzia". De fato, quando o autor usa argumentos tais como:

"Um momento: não vimos acima que nenhuma fração decimal é equivalente a 3/11? É verdade. Mas, mesmo assim, 3/11 pode ser escrita "sob forma decimal"...

$$\frac{3}{11} = 0,2727 + \frac{3}{110000}$$

Isto quer dizer que, se substituirmos a fração ordinária 3/11 pela fração decimal 0,2727, cometeremos um erro igual a 3/110000."

Óbvio, isto é trocar seis por meia dúzia. Mas o significado da igualdade $3/11 = 0,2727\ldots$ em si, ainda não foi explicado; pelo ao menos de modo convincente.

b) Mais à frente (pág. 162):

7. Dúvidas sobre dízimas

...Duas das mais interessantes entre essas perguntas foram feitas por Sun Hsien Ming, de São Paulo, SP.

Elas são:

1ª) Existe alguma fração ordinária tal que, dividindo-se o numerador pelo denominador, obtenha-se a dízima periódica $0,999\ldots$?

A resposta é NÃO. Se a e b forem números naturais com $a/b = 0,999\ldots$ então $10\,a/b = 9,999\ldots$ Subtraindo membro a membro estas igualdades vem $9\,a/b = 9$, donde $a/b = 1$, isto é, $a = b$. Mas é claro que, dividindo a por a obteremos 1, e não $0,999\ldots$

Se o autor estivesse parado por aqui, estaria ótimo. O problema é que ele resolve continuar e aí comete uma impropriedade:

"Na realidade, existe um modo meio heterodoxo de dividir a por a e obter $0,999\ldots$ como quociente. Normalmente, numa divisão, exigimos que o resto seja inferior ao divisor. Se admitirmos, restos iguais ao divisor, ao efetuar uma divisão, por exemplo, de 7 por 7 teremos

$$\begin{array}{r|l} 7,0 & 7 \\ \hline 70 & 0,9999 \\ 70 & \\ 7 & \end{array}$$

"

Comentário: **Normalmente** não: sempre!! porquanto esta é uma exigência do algoritmo da divisão. Na matemática, pelo princípio do terceiro excluído, só existem ou o Verdadeiro ou o Falso. Desconheço o "meio heterodoxo". A menos que o autor esteja utilizando uma lógica trivalente. Aqui me deu a impressão de que o autor está forçando uma situação inteiramente desnecessária.

Mais à frente lemos:

"Outra maneira de mostrar que, dividindo-se (da maneira correta) a por b nunca se chega a uma dízima de período 9 é a seguinte. ..."

Aqui só tenho a lembrar que só existe a *maneira correta* de dividir, não existe uma outra.

c) À página 164 lemos: A segunda pergunta de Sun Ming é:

2ª) O fato de a mesma fração ordinária poder ter duas representações decimais distintas (como $2/5 = 0,4000\ldots = 0,3999\ldots$) não apresenta inconveniente nem origina paradoxos?

Uma boa pergunta. Infelizmente não podemos dizer o mesmo da "resposta". De fato, o Prof. Elon usa de tergiversação ao tentar respondê-la, como o leitor pode verificar lendo sua resposta no citado livro.

No final da argumentação lemos:

"Nenhuma dessas escolhas é muito natural."

Não sei o que o Prof. entende por "muito natural" mas, a meu ver, a segunda alternativa não só é natural (haja vista o teorema 1, pág. 3) como se impõe.

Em seguida: "Por isso me parece mais razoável que nos resignemos com a falta de biunivocidade. Há coisas piores no mundo."

Este não me parece um conselho muito sábio, embora em um ponto o Prof. tenha razão: de fato, há coisas piores no mundo (as bombas sobre hiroshima e nagasaki, por exemplo).

Damos a seguinte resposta à pergunta de Sun Ming: Sim, apresenta incoveniente e, pior do que paradoxos, conduz a contradições (como, sobejamente, foi mostrado neste artigo).

3.1 Uma nova construção para a curva de Peano

> "As ambigüidades fazem o papel das ervas-daninhas, tão logo as cortamos o solo torna-se viçoso, as flores desabrocham."

Ter exorcizado o fantasma das ambigüidades vai nos permitir simplificar algumas construções matemáticas. Por exemplo, construimos (ver CBPF-NF-002/06) uma curva de Peano onde trabalhamos apenas com a base binária:

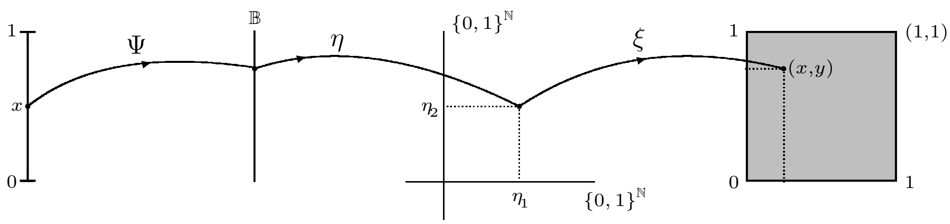


Figura 1: Curva de Peano Simplificada

Nesta construção mostramos que, sendo $(x,\, y)$ um ponto do quadrado, temos:

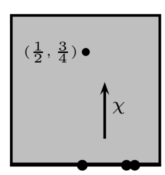
1ª) Se ambas as coordenadas, x e y, forem frações diádicas então, neste ponto são colocados três pontos do intervalo. De outro modo: a curva passa três vezes por pontos com ambas as coordenadas diádicas;

2ª) Se ambas as coordenadas, x e y, não forem diádicas então, neste ponto é colocado apenas um ponto do intervalo. De outro modo: a curva passa uma única vez em pontos com ambas as coordenadas não diádicas;

3ª) Se apenas uma das coordenadas, x ou y, é uma fração diádica então, neste ponto é colocado dois pontos do intervalo. De outro modo: a curva passa duas vezes em pontos com apenas uma coordenada diádica;

4ª) O conjunto dos pontos de auto-interseção da curva é infinito enumerável e denso no quadrado. **Exemplo:**

$\chi(\frac{39}{48})=\chi(\frac{23}{48})=\chi(\frac{37}{48})=(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$



Onde $\chi = \xi \circ \eta \circ \Psi$ é a curva de Peano. Nesta figura tomamos o intervalo unitário coincidindo com a aresta inferior do quadrado.

Observe que a curva de Peano (χ) pode ser vista de uma outra perspectiva (ainda mais paradoxal): Transfere todos os pontos da aresta inferior do quadrado (ou qualquer outra) para todo o quadrado, sem sobrar lugar vazio no quadrado (χ é sobrejetiva) e ainda guarda até três pontos da aresta numa mesma posição do quadrado!.

3.2 O quadrado hiper-mágico

Para mais um exemplo de uma construção que obtivemos, a partir da definição legítima (de representação em base b), definimos:

Definição (Quadrado hiper-mágico.) Chama-se *quadrado hiper-mágico* num espaço métrico $\big(M,\, d\big)$, com M um quadrado (unitário), a uma aplicação contínua $\varphi\colon M \to \mathbf{I}$ injetiva e não sobrejetora. $\mathbf{I}$ é um intervalo unitário.

Pois bem, construimos o seguinte:

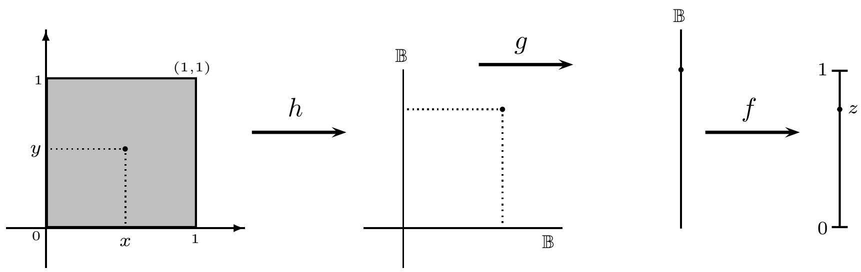


Figura 2: Quadrado hiper-mágico

Onde mostramos que, sendo $(x,\, y)$ um ponto do quadrado, temos:

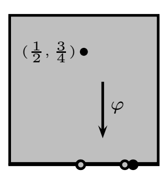
1ª) Se ambas as coordenadas, x e y, forem frações diádicas então este ponto vai para um ponto do intervalo e "gera" dois buracos (no intervalo);

2ª) Se ambas as coordenadas, x e y, não forem frações diádicas então este ponto vai para um ponto da aresta e não "gera" nenhum buraco;

3ª) Se apenas uma das coordenadas, x ou y, é uma fração diádica então este ponto vai para um ponto da aresta e "gera" um buraco;

4ª) o conjunto dos buracos é infinito enumerável, porquanto o conjunto dos pontos $(x,\, y) \in \mathbf{I}^2$ com coordenadas diádicas é enumerável.

Exemplo: Tendo em conta o exemplo dado anteriormente a fração $\big(\frac{1}{2},\, \frac{3}{4}\big)$ vai, por φ, para o ponto $\frac{39}{48}$ e gera os buracos $\frac{23}{48}$ e $\frac{37}{48}$, assim:



Onde $\varphi = f \circ g \circ h$. Nesta figura tomamos o intervalo unitário coincidindo com a aresta inferior do quadrado.

Observe que o quadrado hiper-mágico (φ) pode ser visto de uma outra perspectiva (ainda mais paradoxal): Transfere todos os pontos do quadrado para sua aresta inferior (ou qualquer outra), sem sobrepor um ponto a outro (φ é injetiva) e ainda sobram infinitos buracos na aresta! (φ é não sobrejetora).

Nota: Construimos também a curva de Peano no cubo e o cubo hiper-mágico (ver CBPF-NF-002/06).

"Tudo isso, que à primeira vista parece excesso de irrazão, na verdade é o efeito da finura e da extensão do espírito humano e o método para encontrar verdades até então desconhecidas." **Voltaire (17ª Carta)**

4 Como obter as representações binárias

Veremos agora como obter a representação binária, com uma precisão arbitrariamente fixada, de um ponto do intervalo [0, 1[. Necessitaremos do seguinte

Lema 1. *Seja D o conjunto das frações diádicas (frações cujos denominadores são potências de 2) no intervalo $[0, 1[$, ou seja*

$$D = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \ldots, \frac{13}{16}, \frac{15}{16}, \ldots \right\}$$

D é denso em $[0, 1[$.

Prova: Seja $x \in [0, 1[$; dado $\varepsilon > 0$ arbitrário devemos mostrar que no intervalo $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ existe um ponto $m/q \in D$.

A desigualdade $\dfrac{1}{2^n} < \dfrac{1}{n}$ vale para todo n natural. Pela propriedade arquimediana existe um natural n_0 de modo que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$; portanto $\frac{1}{2^{n_0}} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Tomando $q = 2^{n_0}$, considere os intervalos

$$\left[0, \frac{1}{q}\right[, \ \left[\frac{1}{q}, \frac{2}{q}\right[, \ \left[\frac{2}{q}, \frac{3}{q}\right[, \ \ldots, \ \left[\frac{q-2}{q}, \frac{q-1}{q}\right[, \ \left[\frac{q-1}{q}, 1\right[$$

Como $[0, 1[$ é a união dos intervalos acima, um dêles, digamos $\left[\frac{m}{q}, \frac{m+1}{q}\right[$ contém x, isto é, $\frac{m}{q} \leq x < \frac{m+1}{q}$. Então

$$\frac{m}{q} \leq x < \frac{m+1}{q} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m}{q} \leq x < \frac{m}{q} + \frac{1}{q}$$

Mas $\frac{1}{q} < \varepsilon$; logo

$$\begin{aligned} \frac{1}{q} < \varepsilon \quad &\Rightarrow \quad \frac{m}{q} + \frac{1}{q} < \frac{m}{q} + \varepsilon \\ &\Rightarrow \quad x < \frac{m}{q} + \frac{1}{q} < \frac{m}{q} + \varepsilon \\ &\Rightarrow \quad x - \varepsilon < \frac{m}{q}. \end{aligned}$$

Portanto

$$x - \varepsilon < \frac{m}{q} \leq x < x + \varepsilon \tag{6}$$

Ou seja, o intervalo aberto $]x - \varepsilon,\, x + \varepsilon[$ contém o ponto $\frac{m}{q}$ que pertence a D. Por conseguinte D é denso em $[0,\, 1[$. ■

Este lema garante que qualquer número do intervalo $[0,\, 1[$ pode ser aproximado, com precisão arbitrária, por uma fração diádica.

Finalmente vamos ao teorema que interessa:

Teorema 2 (Gentil/27.10.04)**.** *Dado* $x \in [0,\, 1[$ *e* $\varepsilon > 0$ *existem um natural* n_0 *e digitos* $x_i \in \{0,\, 1\}$ *tais que*

$$x = \frac{x_1}{2^1} + \frac{x_2}{2^2} + \cdots + \frac{x_{n_0-1}}{2^{n_0-1}} + \frac{x_{n_0}}{2^{n_0}}$$

com erro menor que ε.

Prova: Sejam $x \in [0,\, 1[$ e $\varepsilon > 0$ arbitrários, escolhamos $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $\frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$. Façamos $2^{n_0} = q$. Tal como no lema 1 existe um natural m de modo que

$$\frac{m}{q} \leq x < \frac{m+1}{q} \tag{7}$$

Desta equação obtemos m, assim:

$$\frac{m}{q} \leq x < \frac{m+1}{q} \;\Rightarrow\; m \leq q \cdot x < m + 1 \;\Rightarrow\; m = \lfloor q \cdot x \rfloor.$$

De seguida obtemos o desenvolvimento binário do natural m, assim:

$$m = x_1 \cdot 2^{n_0-1} + x_2 \cdot 2^{n_0-2} + \cdots + x_{n_0-1} \cdot 2^{n_0-(n_0-1)} + x_{n_0} \cdot 2^{n_0-n_0}$$

Ou seja,

$$m = x_1 \cdot 2^{n_0-1} + x_2 \cdot 2^{n_0-2} + \cdots + x_{n_0-1} \cdot 2^1 + x_{n_0} \cdot 2^0 \tag{8}$$

Observe que, pelo teorema 1, a representação acima é única. Dividindo a equação anterior por 2^{n_0} obtemos

$$\frac{m}{2^{n_0}} = \frac{x_1}{2^1} + \frac{x_2}{2^2} + \cdots + \frac{x_{n_0-1}}{2^{n_0-1}} + \frac{x_{n_0}}{2^{n_0}} \tag{9}$$

Da equação (7) vemos que (9) é um valor aproximado (menor ou igual) de x, isto é

$$\frac{m}{2^{n_0}} = \frac{x_1}{2^1} + \frac{x_2}{2^2} + \cdots + \frac{x_{n_0-1}}{2^{n_0-1}} + \frac{x_{n_0}}{2^{n_0}} \simeq x$$

e, pelo lema, temos que

$$|x - \tilde{x}| < \varepsilon, \quad \text{onde } \tilde{x} = \frac{m}{2^{n_0}}. \tag{10}$$

Justificativa de (8): Os digitos binários no desenvolvimento de m devem ser todos nulos a partir da potência 2^{n_0} (inclusive).

De fato, se tal não acontecesse teríamos $m \geq 2^{n_0}$, o que é inconsistente com $m \leq q \cdot x$, isto é, $m \leq 2^{n_0} \cdot x$; pois sendo

$$x < 1 \;\Rightarrow\; 2^{n_0} \cdot x < 2^{n_0} \;\Rightarrow\; m < 2^{n_0}.$$

■

Os digitos $(x_1\, x_2\, \ldots\, x_{n_0})$ estão corretos (e são únicos) para a fração $\tilde{x} = \frac{m}{2^{n_0}}$, mas esta é apenas uma aproximação para x (isto é, $|x - \tilde{x}| < \varepsilon$). Até que ponto podemos confiar que estes sejam os n_0 primeiros digitos do desenvolvimento de x?.

Supondo que o desenvolvimento de x seja

$$x = \frac{x_1}{2^1} + \frac{x_2}{2^2} + \cdots + \frac{x_{n_0-1}}{2^{n_0-1}} + \frac{x_{n_0}}{2^{n_0}} + \frac{x_{n_0+1}}{2^{n_0+1}} + \frac{x_{n_0+2}}{2^{n_0+2}} + \cdots$$

para nos assegurar que os digitos $(x_1\, x_2\, \ldots\, x_{n_0})$ estejam corretos para x, devemos escolher* o menor natural n_0 satisfazendo $\frac{1}{2^{n_0+1}} < \varepsilon$ $\left(\text{isto é, } \frac{1}{2^{(n_0-1)+1}} = \frac{1}{2^{n_0}} \geq \varepsilon\right)$. De fato, suponhamos que apenas o digito x_{n_0} esteja incorreto, sendo assim

$$|x - \tilde{x}| = \frac{1}{2^{n_0}} + \frac{x_{n_0+1}}{2^{n_0+1}} + \cdots \geq \varepsilon$$

Isto contradiz (10). Se qualquer outro digito x_k com $k < n_0$ estiver incorreto, chegaremos à mesma contradição.

Conclusão: Escolhendo n_0 o menor natural satisfazendo $\frac{1}{2^{n_0+1}} < \varepsilon$ podemos assegurar que os digitos $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$, no desenvolvimento binário de $x \in [\,0,\, 1\,[$, estão todos corretos.

4.1 Algoritmo

Os argumentos anteriores nos facultam um algoritmo para o desenvolvimento binário de um $x \in [\,0,\, 1\,[$. Vejamos como através de um

Exemplo: Obter o desenvolvimento binário de $x = 1/3$ com uma precisão $\varepsilon = 0,01$.

Solução: Vimos que devemos escolher o menor n_0 satisfazendo $\frac{1}{2^{n_0+1}} < \varepsilon$, então

$$n_0 + 1 > \log_2^{\frac{1}{\varepsilon}} \;\Rightarrow\; n_0 = \left\lfloor -1 + \log_2^{\frac{1}{\varepsilon}} \right\rfloor + 1$$

Sendo assim,

$$n_0 = \left\lfloor -1 + \log_2^{\frac{1}{0,01}} \right\rfloor + 1 = 6 \;\Rightarrow\; m = \left\lfloor 2^6 \cdot \frac{1}{3} \right\rfloor = 21.$$

Observe que

$$\left| \frac{m}{q} - x \right| = \left| \frac{21}{2^6} - \frac{1}{3} \right| = 0,005208\ldots < \varepsilon.$$

*A propriedade arquimediana e o Princípio da boa ordenação, conjuntamente, nos garantem que esta escolha sempre é possível.

Agora desenvolvemos $m = 21$ na base binária: $21 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$, dividindo a equação anterior por $q = 2^{n_0} = 2^6$, obtemos

$$\frac{21}{2^6} = \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{0}{2^5} + \frac{1}{2^6} = \frac{0}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{0}{2^5} + \frac{1}{2^6}$$

Conclusão: $(010101)_2$ é o desenvolvimento binário de $x = 1/3$ com erro menor que um centésimo. Para que possamos "automatizar" todo o processo anterior, vamos fornecer uma fórmula (a prova da mesma encontra-se em [4]) que nos faculta o desenvolvimento binário de um natural m, consoante o algoritmo anterior

$$x_n = \left\lfloor \frac{m}{2^{n_0 - n}} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{m}{2^{n_0 - n + 1}} \right\rfloor; \qquad (n = 1,\, 2, \ldots, n_0)$$

Exemplo: Considere o exemplo anterior em que $n_0 = 6$ e $m = 21$. Pois bem,

$$x_n = \left\lfloor \frac{21}{2^{6-n}} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{21}{2^{6-n+1}} \right\rfloor; \qquad (n = 1,\, 2,\, \ldots,\, 6.)$$

$$n = 1 \;\Rightarrow\; x_1 = \left\lfloor \frac{21}{2^{6-1}} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{21}{2^{6-1+1}} \right\rfloor = 0,$$

$$n = 2 \;\Rightarrow\; x_2 = \left\lfloor \frac{21}{2^{6-2}} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{21}{2^{6-2+1}} \right\rfloor = 1, \text{ etc.}$$

Agradecimentos: A Deus por ter me concedido gestar e dar à luz a este trabalho. Isto é, assentar este tijolinho em sua magnanima obra.

Referências

[1] Figueiredo, Djairo Guedes de, *Análise I*. 2ª ed. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos,1996 .

[2] Ubaldi, Pietro. *As Noúres: Técnica e recepção das correntes de pensamento*. Tradução de Clóvis Tavares. 4. ed. Rio de Janeiro: FUNDÁPU, 1988.

[3] Lima, Elon Lages. *Espaços Métricos*. Rio de Janeiro:IMPA - CNPq,1993.

[4] Silva, Gentil Lopes. *Novas Seqüências Aritméticas e Geométricas*. Brasília - DF: THESAURUS EDITORA, 2000.