

Introdução à Topologia Cósmica

*G.I. Gomeró **

Grupo de Física Teórica

Rua 16 de Março 280/801, 25610-040, Centro, Petrópolis – RJ, Brasil

M.J. Rebouças†

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rua Dr. Xavier Sigaud 150, 22290-180, Rio de Janeiro – RJ, Brasil

Resumo

Se nosso universo for finito e pequeno o suficiente para que a radiação emitida por algumas fontes o tenha percorrido mais de uma vez, poderíamos estar observando múltiplas imagens do mesmo objeto, em diferentes direções e a diferentes distâncias, sem termos percebido. Neste curso fazemos uma breve revisão dos conceitos envolvidos no estudo da cosmologia de universos com topologia não-trivial, e apresentamos resultados recentes obtidos por nosso grupo referentes a métodos desenvolvidos para detectar uma possível topologia não-trivial do nosso universo, assim como para identificar possíveis imagens múltiplas de objetos cósmicos.

*german@cbpf.br

†reboucas@cbpf.br

1 Introdução

O universo é finito ou infinito? Existe uma tendência natural a pensar que o universo *tem* que ser infinito, pois do contrário alguma coisa deveria existir além dele. Esta afirmação pode parecer evidente a primeira vista se considerarmos que um espaço finito precisa ter fronteiras, porém na matemática são bem conhecidos os espaços finitos sem fronteiras, também chamados de espaços fechados. Portanto o universo bem poderia ser finito e não existir o *além dele*.

Em todo espaço fechado, dois pontos podem sempre ser unidos por mais de um segmento geodésico. Como a radiação emitida por uma fonte cósmica segue uma trajetória geodésica, se nosso universo fosse fechado existiria a possibilidade de observar uma mesma fonte cósmica em pelo menos duas direções distintas. De fato, como o universo está se expandindo e possui uma idade finita, se ele fosse suficientemente pequeno para que a luz proveniente de algumas fontes tivesse tido tempo de atravessá-lo, o céu deveria apresentar imagens múltiplas de tais fontes. Sob condições adequadas estas imagens poderiam estar sendo registradas em catálogos astronômicos.

O objetivo deste curso é analisar brevemente alguns aspectos observacionais da topologia do universo no contexto dos modelos cosmológicos de Friedmann-Lemaître (FL), e apresentar sucintamente os recentes resultados obtidos por nosso grupo referentes a métodos desenvolvidos para detectar uma possível topologia não-trivial do nosso universo, assim como para identificar possíveis imagens múltiplas de objetos cósmicos. Nas referências no final do artigo, o leitor encontrará uma seleção de artigos de revisão onde são apresentados outros tópicos não considerados neste curso (veja refs. [1] e [27]).

2 Universos multiplamente conexos

Observações recentes da radiação cósmica de fundo, p. ex., sugerem que nosso universo pode ser descrito localmente por uma métrica de Robertson-Walker (RW)

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)d\sigma^2, \quad (1)$$

onde $a(t)$ é o fator de escala e $d\sigma$ é uma métrica riemanniana com curvatura seccional constante que geralmente é escrita na forma

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (2)$$

A evolução temporal do fator de escala é determinada pelas equações de Friedmann, que serão consideradas na Sec.3. Nesta seção vamos apenas descrever alguns aspectos geométricos relevantes ao tema da topologia cósmica.

Existem três famílias de modelos de universo compatíveis com a métrica de RW, cada uma delas caracterizada pelo parâmetro k que pode tomar os valores $1, 0, -1$. As seções espaciais de um modelo de universo com $k = 0$ são dotadas da geometria euclideana, quando $k = -1$ as seções espaciais são dotadas da geometria hiperbólica, e quando $k = 1$ da geometria esférica.¹

¹O parâmetro k é a curvatura seccional normalizada das seções espaciais de um universo RW.

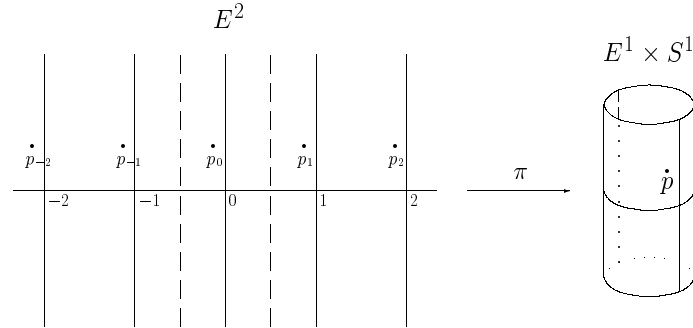


Figura 1: O cilindro é um quociente do plano euclidiano. O ponto p é a classe de equivalência formada pelos pontos p_i , com i inteiro. Uma curva fechada que de a volta em torno do cilindro não pode ser deformado continuamente até virar um ponto.

Na abordagem tradicional da cosmologia considera-se que todas as seções espaciais de um modelo cosmológico possuem a propriedade topológica de que toda curva simples fechada pode ser continuamente deformada até colapsar a um ponto. Estes espaços são chamados de simplesmente conexos, e ao nos limitarmos a considerar apenas eles, a questão da finitude do universo fica determinada pelo valor de k . Se $k = 0$ ou -1 , então o universo é infinito, se $k = 1$ o universo é finito.

Sabe-se, porém, que existe uma infinidade de modelos de universos multiplamente conexos consistentes com cada métrica RW, podendo ser estes espacialmente finitos ou infinitos mesmo quando $k = -1$ ou 0 . Os modelos cosmológicos com seções espaciais simplesmente conexos são referidos como modelos cosmológicos com topologia trivial; os modelos cosmológicos com topologia não-trivial são aqueles com seções espaciais multiplamente conexas.

Para se familiarizar com os espaços com topologia não-trivial, imagine um rolo de papel toalha de altura muito grande (um cilindro longo), e fure-o com um alfinete perpendicularmente à superfície até atingir o tubo de papelão que está no centro. A seguir, desenrole o rolo no chão e você terá um pedaço de papel muito grande, de largura igual à altura do rolo, e com um conjunto de furos igualmente espaçados distribuídos ao longo de uma reta. O pedaço enorme de papel representa o plano E^2 , o recobrimento universal do cilindro; e os buracos deixados no papel pelo alfinete são, todos, imagens de um único ponto no cilindro.² Considerar este conjunto de pontos como um único ponto equivale apenas a enrolar novamente o pedaço de papel que está no chão, em torno do tubo de papelão (veja a fig.1).

Resulta conveniente formalizar este exemplo. No plano E^2 , considere dois pontos $p = (x_1, y_1)$ e $q = (x_2, y_2)$ como equivalentes se e somente se $x_1 - x_2 = n$ e $y_1 = y_2$, onde n é qualquer número inteiro (positivo, negativo ou zero). Considere o conjunto de todos os pontos do plano equivalentes a $p \in E^2$, formando assim a classe $[p]$. O conjunto de todas estas classes de equivalência é um cilindro.

Voltando à cosmologia, o espaço-tempo é desdobrado na forma $R \times M$, onde M é um espaço tridimensional de curvatura constante, i.e., o quociente $M = \widetilde{M}/\Gamma$, com $\widetilde{M} = S^3$,

²Note que estamos considerando o papel com uma espessura desprezível.

E^3 ou H^3 , e Γ um grupo discreto de isometrias que age livremente em \widetilde{M} . O exemplo do cilindro ilustra este método de construção de espaços multiplamente conexos, chamado de passagem ao quociente.

Expliquemos o método com certo detalhe. Dado um valor de curvatura k , o espaço \widetilde{M} fica determinado pela condição de simples conectividade. Com um grupo Γ de isometrias de \widetilde{M} formamos classes de equiivalência de pontos da seguinte forma, para cada ponto $p \in \widetilde{M}$ etiquetamos com o símbolo $[p]$ todos os pontos que podem ser levados até p por alguma isometria de Γ . Observe que se um ponto q é etiquetado com o símbolo $[p]$, então o ponto p será etiquetado também com o símbolo $[q]$. O processo de passagem ao quociente consiste em considerar iguais estas duas etiquetas, de modo que no final do processo cada ponto de \widetilde{M} acaba recebendo apenas uma etiqueta. Cada etiqueta é uma classe de equiivalência chamada de órbita de p , e o quociente \widetilde{M}/Γ é o conjunto destas órbitas. O grupo Γ deve ser discreto³ e sem pontos fixos⁴ para que o quociente M seja um espaço de curvatura constante (com o mesmo k que \widetilde{M}). Se o grupo Γ possui mais de um elemento, então M é multiplamente conexo.

Os espaços construídos desta forma chamam-se formas espaciais, e o grupo Γ é o seu grupo de recobrimento. Uma forma espacial é (globalmente) homogênea se para quaisquer dois pontos existe uma isometria do espaço todo que leva um ponto no outro. Caso contrário a forma espacial é apenas localmente homogênea.

As formas espaciais são convenientemente descritas por meio dos poliedros de Dirichlet. Dado um ponto $p \in \widetilde{M}$, os pontos que estão mais perto (ou à mesma distância) de p do que de qualquer outro ponto com a etiqueta $[p]$ formam o poliedro de Dirichlet para M com centro em p . Formalmente, este poliedro é o conjunto de pontos em \widetilde{M} definido por

$$\mathcal{D}_p = \{q \in \widetilde{M} : d(p, q) \leq d(gp, q), \forall g \in \Gamma\}. \quad (3)$$

Todo poliedro de Dirichlet possui certas características interessantes: (i) todas as etiquetas de M estão representadas por pelo menos um ponto em \mathcal{D}_p , (ii) as etiquetas representadas por pontos no interior de \mathcal{D}_p estão representadas de forma única, e (iii) as faces de \mathcal{D}_p estão agrupadas por pares, cada par de faces é identificado devido a que ambas faces contêm pontos com as mesmas etiquetas. Quando o espaço é apenas localmente homogêneo, a forma do poliedro de Dirichlet depende do centro.

Na Sec.5 veremos alguns exemplos destes poliedros, mas antes faremos uma breve revisão do modelo padrão da cosmologia (Sec.3) e de como surgem as imagens múltiplas em universos com topologia não-trivial (Sec.4).

3 Cosmologia

Uma forma alternativa à eq.(2) para a métrica da parte espacial em um espaço RW é

$$d\sigma^2 = d\chi^2 + f^2(\chi)(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2), \quad (4)$$

³ Γ é discreto se a órbita de qualquer ponto é um conjunto discreto.

⁴Um ponto $p \in \widetilde{M}$ é um ponto fixo de Γ se, para alguma isometria $g \in \Gamma$ distinta da identidade, $g(p) = p$.

onde $f(\chi) = (\sin \chi, \chi, \sinh \chi)$, dependendo de se $k = (1, 0, -1)$. Esta forma da métrica espacial é conveniente para nossos propósitos, pois a distância entre o observador e uma fonte cósmica co-móvel localizada em (χ, θ, φ) é

$$d(t) = a(t)\chi . \quad (5)$$

Convém observar que nas geometrias curvas ($k = \pm 1$), $a(t)$ é o raio de curvatura do universo no instante t ; portanto por (5), χ é a distância co-móvel em unidades do raio de curvatura, quantidade que não depende do tempo.

Integrando a equação da trajetória de um fóton procedente de uma fonte em (χ, θ, φ) e detectado pelo observador no instante t_0 , encontra-se que a distância atual da fonte ao observador é

$$d_0 = c a_0 \int_t^{t_0} \frac{d\tau}{a(\tau)} , \quad (6)$$

onde t é o instante de emissão do fóton, e $a_0 = a(t_0)$. Por outro lado, o desvio para o vermelho z (redshift) deste fóton está relacionado ao fator de escala pela relação

$$a(t) = \frac{a_0}{1+z} . \quad (7)$$

As equações (6) e (7) estabelecem uma conexão entre a distância co-móvel d_0 da fonte ao observador com o redshift da fonte. Esta é a chamada relação redshift-distância, e para obter uma expressão para ela devemos apelar às equações da dinâmica do universo.

As equações que determinam a evolução do universo são as equações de Friedmann

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho , \quad (8)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{4\pi G}{3c^2}(\rho c^2 + 3p) = 0 , \quad (9)$$

onde $\rho = \rho_m + \rho_\Lambda$ é a densidade total, e $p = p_m + p_\Lambda$ é a pressão total; sendo ρ_m a densidade de matéria (poeira), ρ_Λ a densidade de energia escura (constante cosmológica), p_m a pressão da matéria, e p_Λ a pressão da energia escura, e satisfazendo as equações de estado

$$p_m = 0 \quad \text{e} \quad p_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2 . \quad (10)$$

Estas componentes materiais satisfazem também as equações de conservação

$$\rho_m a^3 = cte \quad \text{e} \quad \rho_\Lambda = cte . \quad (11)$$

Definindo a densidade crítica do universo como

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} , \quad (12)$$

onde

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \quad (13)$$

é o parâmetro de Hubble, podemos introduzir os parâmetros de densidade

$$\Omega_m = \frac{\rho_m}{\rho_c} \quad , \quad \Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c} \quad \text{e} \quad \Omega = \Omega_m + \Omega_\Lambda \quad , \quad (14)$$

para escrever a primeira equação de Friedmann, eq.(8), na forma

$$a^2 H^2 (\Omega - 1) = kc^2 \quad . \quad (15)$$

Segue-se que o universo é localmente (i) euclidiano ($k = 0$) se $\Omega = 1$, (ii) esférico ($k = 1$) se $\Omega > 1$ e (iii) hiperbólico ($k = -1$) se $\Omega < 1$.

Por outro lado, da segunda equação de Friedmann, eq.(9), temos que a expansão do universo é (i) desacelerada se $\rho c^2 > -3p$, (ii) acelerada se $\rho c^2 < -3p$, e (iii) uniforme se $\rho c^2 = -3p$. Observações da luminosidade de supernovas distantes de tipo Ia parecem indicar que nosso universo está se expandindo de forma acelerada. Esta aceleração da expansão do universo pode ser explicada usando modelos com poeira e constante cosmológica se a condição

$$\Omega_\Lambda > \frac{\Omega_m}{2} \quad (16)$$

for satisfeita. Os atuais valores observacionais destes parâmetros estão em concordância com o fato de o universo estar se expandindo de forma acelerada.⁵

A relação redshift-distância pode ser encontrada, sem resolver as equações de Friedmann, manipulando as equações de conservação (11), e as relações (6) e (7), obtendo-se como resultado

$$d(z) = \frac{c}{H_0} \int_1^{1+z} \frac{dx}{\sqrt{x^3 \Omega_{m0} + \Omega_{\Lambda 0} - x^2 (\Omega_0 - 1)}} \quad , \quad (17)$$

onde os subíndices 0 indicam que os parâmetros cosmológicos foram avaliados no tempo presente. Para modelos com seções espaciais com curvatura não-nula, é conveniente expressar a relação redshift-distância em termos do raio de curvatura⁶

$$a_0 = \frac{c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{|\Omega_0 - 1|}} \quad , \quad (18)$$

o que resulta em

$$\chi(z) = \sqrt{|\Omega_0 - 1|} \int_1^{1+z} \frac{dx}{\sqrt{x^3 \Omega_{m0} + \Omega_{\Lambda 0} - x^2 (\Omega_0 - 1)}} \quad . \quad (19)$$

Para encerrar esta seção notemos que, devido à idade finita do universo, podemos apenas observar uma região dele. O universo observável é a região causalmente conectada com o observador. O raio desta região é

$$d_{hor} = \lim_{z \rightarrow \infty} d(z) \quad , \quad (20)$$

e é chamado raio do horizonte. Para os modelos cosmológicos compatíveis com as observações, o raio do horizonte é da ordem de 13000 *Mpc*.

⁵Considera-se atualmente que $H_0 = 71 \pm 7 \text{ km s}^{-1}/\text{Mpc}$, $\Omega_{m0} = 0,3 \pm 0,1$ e $\Omega_{\Lambda 0} = 0,7 \pm 0,1$.

⁶Tomando $H_0 \leq 78 \text{ km s}^{-1}/\text{Mpc}$ e $0,8 \leq \Omega_0 \leq 1,2$, temos que $a_0 \geq 8600 \text{ Mpc}$.

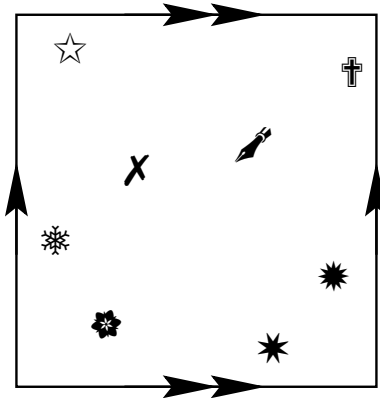


Figura 2: Um universo múltiplemente conexo onde o espaço é um toro. Existem objetos cósmicos em quantidade finita.

4 Imagens topológicas

Em um universo com topologia não-trivial é possível a existência de múltiplas imagens de objetos cósmicos. Vamos estudar sob quais condições estas imagens múltiplas seriam observáveis, e as principais dificuldades que surgem ao tentar identificar se duas imagens são de fato imagens do mesmo objeto. No que segue, por espaço vamos entender a seção espacial do espaço-tempo no instante atual.

Imagine que o espaço de um observador seja um toro bidimensional. Neste universo existiria um número finito de fontes cósmicas (galáxias, quasares, etc.), e o espaço seria mais ou menos como se mostra na figura 2, onde ele é representado por um polígono de Dirichlet, com as correspondentes identificações dos lados.

Devido à multiconectividade do espaço, a luz emitida por uma fonte pode chegar ao observador (localizado no centro do polígono) por vários caminhos, dando-lhe a ilusão de estar observando diferentes objetos em diferentes direções e a diferentes distâncias. A imagem que um observador teria do seu universo seria a de um mosaico como ilustra a figura 3.

4.1 Detectabilidade da topologia

Nem todas as imagens do mosaico seriam observáveis, no entanto, devido à idade finita do universo. De fato, se o raio do horizonte fosse tal que o universo observável fosse a região encerrada pelo círculo menor na figura 3, teríamos que o universo observável todo caberia dentro do polígono fundamental, impossibilitando de modo absoluto a observação das imagens múltiplas.

Se, por outro lado, o universo observável transpusesse o polígono fundamental (como qualquer um dos círculos externos da figura 3), então existiriam imagens múltiplas em princípio observáveis. Quanto maior o raio do universo observável em relação ao raio de injetividade do universo, maiores as chances de podermos observar imagens múltiplas.

O raio de injetividade do universo é definido como sendo a metade do comprimento da

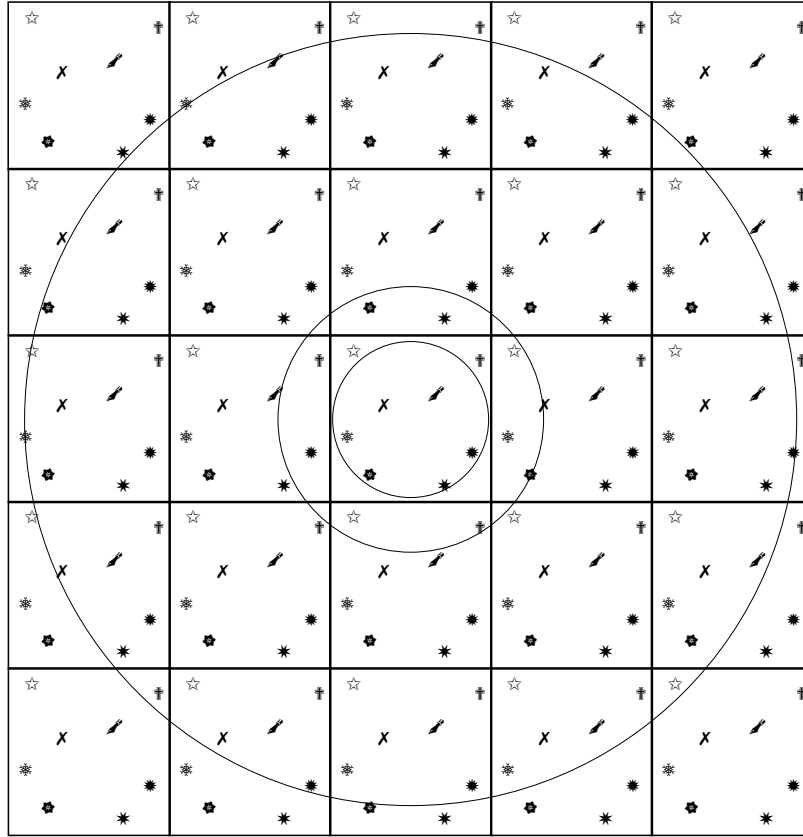


Figura 3: *Visão que um observador no universo da figura 2 teria do seu mundo.*

menor geodésica fechada que passa pelo observador, e equivale à distância do observador à face do poliedro de Dirichlet mais próxima dele. Esta definição não é ainda precisa, pois em espaços apenas localmente homogêneos o tamanho da menor geodésica fechada que passa pelo observador depende da posição dele dentro do poliedro de Dirichlet. No entanto, podemos resolver este problema definindo o raio de injetividade como sendo a metade do comprimento da menor geodésica fechada.

Comparando o raio de injetividade de um determinado espaço com o raio do horizonte podemos determinar se nesse universo é possível, nem que seja apenas em princípio, observar imagens múltiplas, e portanto se é possível detectar a topologia não-trivial dele. O que fazemos na prática, porém, é um pouco diferente.

Ao procurarmos por imagens múltiplas fazemos uso de catálogos de fontes cósmicas, que contêm registros das posições de algum tipo de objetos cósmicos. Em todo catálogo existe sempre uma fonte com redshift máximo, e esse valor de redshift indica com que profundidade foi feita a busca dos objetos. Neste caso, portanto, a comparação relevante a ser feita é entre a profundidade do catálogo e o raio de injetividade. Isto sugere o uso do indicador

$$T_{inj} = \frac{r_{inj}}{d_{obs}}, \quad (21)$$

onde r_{inj} é o raio de injetividade do universo, e d_{obs} é a distância da fonte mais afastada do

observador que se encontra no catálogo, e é calculada usando a relação redshift-distância (17). Se $T_{inj} > 1$ então a topologia do universo é não-detectável, enquanto que se $T_{inj} < 1$ existe a possibilidade de que o catálogo tenha registrado imagens múltiplas, mas pode ser também que o catálogo não contenha nenhuma imagem múltipla.

4.2 Dificuldades em registrar imagens topológicas

Para entender como pode ser que não sejam registradas imagens múltiplas, mesmo que o universo observável as contenha, é importante perceber que um catálogo é apenas um subconjunto de todas as imagens que se encontram dentro da região investigada. Diversas limitações práticas fazem com que seja impossível registrar todas as imagens em princípio observáveis.

As limitações observacionais são formuladas em termos de regras de seleção, que modelam como são escolhidas as imagens que serão registradas no catálogo a partir do conjunto das imagens observáveis. Vamos descrever algumas destas regras.

Seleção por limiar de luminosidade. A luminosidade aparente de um objeto diminui com a distância, enquanto que os instrumentos de detecção possuem limitações no fluxo de luz que podem detectar. Isto estabelece um limiar de luminosidade, l_{lim} , de modo que uma imagem será registrada apenas quando a sua luminosidade aparente for maior que, ou igual a ela. Agora, dadas duas imagens do mesmo objeto, a imagem mais afastada apresentará uma luminosidade aparente menor. Se a luminosidade da imagem mais próxima for maior que l_{lim} , enquanto que a luminosidade da outra imagem for menor, apenas a primeira será registrada no catálogo.

Seleção por tempo de vida finito. Toda fonte cósmica é uma estrutura complexa que se formou em algum momento da evolução do universo, e não vai durar para sempre. Cada objeto possui portanto uma data de nascimento e uma certa duração, o que determina assim o seu segmento de vida. Uma imagem observável é registrada no catálogo se o seu segmento de vida intercepta o cone de luz observado. Uma imagem pode não estar sendo observada porque a sua posição corresponde a uma época em que ainda não tinha se formado, ou quando ela já não existia mais. Esta regra de seleção não pode ser desconsiderada ao trabalhar com quasares, pois o tempo de vida estimado para estes objetos é da ordem de um milésimo da idade estimada do nosso universo.

Seleção por ocultação devido à linha de visão. Os objetos cósmicos não são pontuais, mas extensos. Portanto uma imagem que esteja mais afastada que outra, mas na mesma linha de visão, poderá não ser observada, e portanto não será registrada num catálogo.

Do visto acima segue-se que mesmo que a profundidade do catálogo seja maior que o raio de injetividade do universo, se as limitações observacionais não permitem o registro de imagens múltiplas, o catálogo não conterà informações sobre as periodicidades devidas ao grupo de recobrimento Γ , e portanto sobre a topologia do universo.

São duas as condições a serem satisfeitas para que exista uma quantidade suficiente de imagens múltiplas num catálogo, a fim de que a topologia do espaço possa ser detectada.

1. O levantamento de dados deve ser profundo, de modo que na região observada do universo existam múltiplas imagens observáveis de objetos cósmicos.
2. As regras de seleção não devem ser tão restritivas a ponto de suprimir o registro de imagens múltiplas em número suficiente para tornar possível a sua detecção.

4.3 Dificuldades em identificar imagens topológicas

Suponhamos agora que estamos de posse de um catálogo no qual temos razões para acreditar que existam imagens múltiplas. Ao tentarmos encontrar critérios para identificar se duas imagens correspondem ao mesmo objeto cósmico encontramos problemas práticos muito graves.

Duas imagens do mesmo objeto a diferentes distâncias do observador correspondem a distintos estágios na sua evolução. Como o mesmo objeto pode apresentar uma morfologia diferente em cada estágio evolutivo, a identificação direta de imagens múltiplas é impossível sem algum modelo adequado da evolução do tipo de objeto em consideração.

Além disso, duas imagens do mesmo objeto são observadas segundo orientações diferentes. Se o objeto não possui simetria esférica, então apresentará uma morfologia diferente de acordo com o ângulo de visão. Novamente, é necessário um modelo adequado do tipo de objeto em consideração.

Uma maneira de contornar estas dificuldades é usar métodos estatísticos para detectar as correlações nas posições das fontes que surgem devido à distribuição (quase) periódica das imagens observadas num catálogo que possua imagens múltiplas. Alguns destes métodos serão descritos nas seções 6 e 7.

5 Espaços de curvatura constante

5.1 Variedades euclidianas

Existem dois tipos básicos de isometrias no espaço euclidiano E^3 , as translações e as transformações ortogonais.⁷ Qualquer isometria euclidiana φ pode ser decomposta em uma transformação ortogonal seguida por uma translação, na forma

$$\varphi(x) = Ax + a, \quad (22)$$

o que permite escrever uma isometria euclidiana como $\varphi = (A, a)$. Segue-se que dadas duas isometrias (A, a) e (B, b) , a lei de composição é

$$(A, a) \circ (B, b) = (AB, Ab + a). \quad (23)$$

A estrutura de grupo de $Isom(E^3)$ é a de um produto semi-direto de E^3 com $O(3)$.

Existem apenas seis classes de variedades espaciais euclidianas compactas orientáveis e quatro de não-orientáveis[2]. De todas elas, apenas o toro é globalmente homogêneo. Na figura 4 são apresentados um exemplo de cada classe orientável. Os exemplos apresentados

⁷Uma transformação ortogonal é uma função linear $A : E^3 \rightarrow E^3$ que preserva o produto interno, isto é, tal que para todo $x, y \in E^3$, $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$.

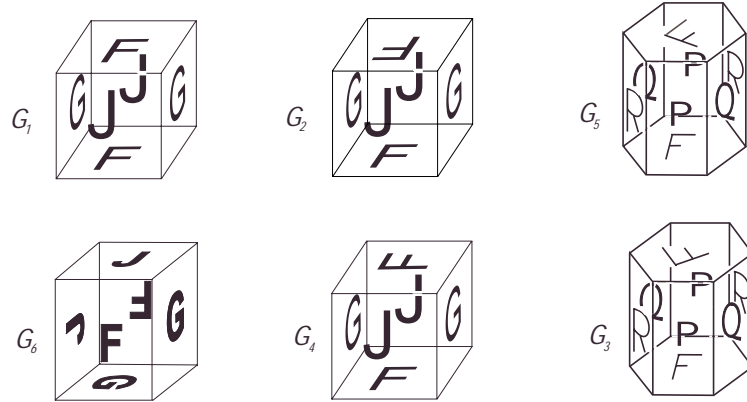


Figura 4: Um exemplo de cada classe de variedades euclidianas tridimensionais compactas e orientáveis. As letras maiúsculas servem para indicar a forma em que são identificadas as faces no correspondente poliedro fundamental.

na figura são os mais simples, pois as variedades euclidianas não são rígidas, no sentido que elas podem ser deformadas sem mudar sua topologia nem sua geometria local. Como consequência, em cada classe existem variedades de diferentes tamanhos, e até mesmo formas.

Por exemplo, um toro (classe \mathcal{G}_1) pode ser construído tomando um paralelepípedo e identificando faces opostas por translações. Usualmente é considerado um paralelepípedo com faces ortogonais (um tijolo), e no caso mais simples, um cubo. Porém, tijolos com diferentes volumes dão lugar a toros não isométricos. Além disso, esticando ou comprimindo o tijolo em uma ou mais direções, mas mantendo o volume constante, também dá lugar a toros não-isométricos.

Para cada classe de variedades euclidianas pode-se definir um conjunto de parâmetros que determina o tamanho e a forma da variedade. Este conjunto é o espaço paramétrico da classe. Em um recente trabalho fizemos a análise detalhada destes espaços paramétricos, assim como uma análise da detectabilidade que permite restringir estes espaços para cada classe[3].

5.2 Variedades esféricas

O triesfera, ou esfera tridimensional, pode ser visualizada como o conjunto

$$S^3 = \{x \in E^4 : |x| = 1\}, \quad (24)$$

com a métrica, induzida pela métrica euclideana em E^4 , dada por

$$d_S(x, y) = \theta(x, y), \quad (25)$$

onde $\theta(x, y)$ é o ângulo euclideano entre os pontos x e y da esfera. Segue-se portanto que o grupo das isometrias da triesfera é $O(4)$. A distância entre dois pontos da esfera é sempre menor que π , a menos que os pontos sejam antípodas.

Pode-se mostrar que para que $M = S^3/\Gamma$ seja uma forma espacial esférica, Γ tem que ser um subgrupo discreto de $SO(4)$ no qual o único elemento com autovalor $+1$ é a

identidade, e portanto formas espaciais esféricas tridimensionais são orientáveis. Vamos descrever brevemente as variedades esféricas tridimensionais.

Existe um número infinito de variedades esféricas tridimensionais globalmente homogêneas, e também um número infinito de não-globalmente homogêneas. Os grupos de recobrimento das variedades globalmente homogêneas são (i) os grupos poliédricos binários O^* , T^* , I^* , (ii) os grupos diédricos binários D_n^* ($n \geq 2$), e (iii) os grupos cíclicos Z_p ($p \geq 2$)[2, 4, 5, 6].

Os grupos cíclicos Z_p ($p \geq 5$) podem agir em S^3 de várias maneiras parametrizadas por um parâmetro inteiro denotado por q , tal que p e q sejam mutuamente primos, e $1 \leq q < p/2$. Estes espaços quociente são os espaços lente $L(p, q)$. A ação de Z_p em S^3 dá lugar a variedades globalmente homogêneas apenas quando $q = 1$, nos outros casos o quociente é uma variedade apenas localmente homogênea.

Os grupos de recobrimento das variedades esféricas tridimensionais não-globalmente homogêneas são (i) os grupos cíclicos Z_p ($p \geq 5$), com $1 < q < p/2$, (ii) $D_n^* \times Z_p$ com $p \geq 2$ e $n \geq 2$, notando-se que para certos valores de n , $D_n^* \times Z_p$ pode agir em S^3 de duas maneiras diferentes, e (iii) $H \times Z_p$ ($p \geq 2$), onde $H = T^*, O^*, I^*, T_n^*$, e os grupos T_n^* são subgrupos não-cíclicos de T^* .

Como todo grupo de recobrimento de uma variedade esférica tem ordem finita, todos os seus elementos são cíclicos, portanto toda variedade esférica tridimensional é finitamente recoberta por um espaço lente. Neste sentido, os espaços lente possuem um papel especial no estudo da topologia das variedades esféricas. Além disso, existe uma descrição muito simples das ações de Z_p em S^3 que dão lugar a espaços lente. Este fato foi utilizado para estudar a detectabilidade dos espaços lente, para os quais o raio de injetividade toma a forma[7].

$$r_{inj} = \frac{\pi}{p}, \quad (26)$$

de modo que a condição de detectabilidade (21) é

$$p < \frac{\pi}{\chi_{obs}} \leq p_*, \quad (27)$$

onde p_* é o menor inteiro maior ou igual a π/χ_{obs} . Na tabela 1 se mostram as condições de não-detectabilidade para catálogos de aglomerados de galáxias ($z = 1$), quasares ($z = 6$) e de radiação cósmica de fundo ($z \approx 3000$), assim como também para o raio do horizonte, em um universo com $\Omega_0 = 1,08$ e $\Omega_\Lambda = 0,66$. Se o espaço onde vivemos fosse $L(2, 1)$ (espaço projetivo) ou $L(3, 1)$, a topologia do universo seria não-detectável. Espaços $L(p, q)$ com $p \leq 6$ são não-detectáveis usando catálogos de quasares, e aqueles com $p \leq 15$ são não-detectáveis usando catálogos de aglomerados de galáxias.

Os resultados da análise da detectabilidade da topologia dependem dos valores dos parâmetros cosmológicos. Em um estudo recente, um dos autores e colaboradores quantificaram este efeito e mostraram que a detectabilidade é muito sensível aos erros na determinação destes parâmetros[8].

Tabela 1: *Condições de não-detectabilidade da topologia para espaços lente em um universo com $\Omega_0 = 1,08$ e $\Omega_\Lambda = 0,66$.*

z_{max}	χ_{obs}	P_*
∞	0.82728	4
3000	0.81135	4
6	0.49596	7
1	0.20879	16

5.3 Variedades hiperbólicas

O espaço hiperbólico tridimensional é convenientemente definido como um subconjunto do espaço de Minkowski M^4 ,

$$H^3 = \{x \in M^4 : |x|^2 = -1 \text{ e } x_0 > 0\}, \quad (28)$$

onde o produto interno em M^4 tem assinatura $(-+++)$. A distância em H^3 , induzida pela métrica de Minkowski, resulta ser

$$d_H(x, y) = \eta(x, y), \quad (29)$$

onde $\eta(x, y)$ é o ângulo lorentziano entre os vetores de tipo temporal x e y , que é dado em termos do produto interno em M^4 por

$$\cosh \eta(x, y) = -\langle x, y \rangle. \quad (30)$$

Temos portanto que as isometrias de H^3 são as transformações positivas de Lorentz.

Nenhuma variedade hiperbólica é globalmente homogênea. Além disso, embora não exista ainda uma classificação das variedades hiperbólicas tridimensionais, conhecem-se muitas propriedades gerais sobre elas. Dois resultados fundamentais e suas consequências são relevantes no contexto da topologia cósmica.

Teorema de Mostow. Duas variedades hiperbólicas de dimensão $n \geq 3$ e de volume finito, que possuem grupos de recobrimento isomorfos, são isométricas[9].

Teorema de Thurston. Seja $M = H^3/\Gamma$ uma variedade hiperbólica não compacta orientável e de volume finito. Então existe uma sequência infinita de variedades hiperbólicas orientáveis e compactas $M_j = H^3/\Gamma_j$, tais que[10]

$$Vol(M_i) \leq Vol(M_j) < Vol(M) \quad \text{se } i < j,$$

e que se acumulam em torno de M no sentido que

1. $\lim_{j \rightarrow \infty} \Gamma_j = \Gamma$ pontualmente, e
2. $\lim_{j \rightarrow \infty} Vol(M_j) = Vol(M)$.

Tabela 2: Restrições na não-detectabilidade da topologia para as primeiras sete variedades hiperbólicas em um universo com $\Omega_0 = 0,99$ e $\Omega_\Lambda = 0,68$. *ND* denota que a topologia é não-detectável.

M	r_{inj}	Quasares	Horizonte
m003(-3,1)	0.292302	<i>ND</i>	—
m003(-2,3)	0.289041	<i>ND</i>	—
m007(3,1)	0.415721	<i>ND</i>	<i>ND</i>
m003(-4,3)	0.287539	<i>ND</i>	—
m004(6,1)	0.240156	<i>ND</i>	—
m004(1,2)	0.183065	—	—
m009(4,1)	0.397067	<i>ND</i>	<i>ND</i>

O teorema de Mostow é surpreendente pois em geral duas variedades com grupos de recobrimento isomorfos não são necessariamente homeomorfas. O exemplo típico são os espaços lente. Mais ainda, duas variedades homeomorfas, ou até difeomorfas, não são necessariamente isométricas. Basta lembrar que é possível construir toros de diferentes formas e tamanhos. Pelo teorema de Mostow, porém, duas variedades hiperbólicas tridimensionais de volume finito, com a mesma forma, têm necessariamente o mesmo tamanho. Como consequência, invariantes geométricos, como volume e comprimentos de geodésicas fechadas, são invariantes topológicos.

Como resultado dos teoremas de Mostow e Thurston, as variedades hiperbólicas compactas tridimensionais podem ser arrumadas em uma sequência enumerável de sequências enumeráveis de variedades tais que (i) cada sequência de variedades satisfaz o Teorema de Thurston, (ii) a variedade de acumulação de cada sequência é uma variedade com pontas,⁸ (iii) existe uma variedade hiperbólica de volume mínimo $V_{min} > 0.32095$ [11], e (iv) variedades pequenas são gordas (p.ex. se $V_M < 1.7011$, a menor geodésica fechada em M tem comprimento $l > 0.162$)[12].

As variedades hiperbólicas podem ser construídas e estudadas com o programa Snap-Pea escrito por Jeffrey Weeks[13]. Hodgson e Weeks compilaram uma lista de 11031 variedades hiperbólicas compactas ordenadas por volume crescente[14]. A variedade de menor volume nesta lista tem volume $V_{Weeks} = 0,942707$, e acredita-se que esta seja a menor variedade hiperbólica, embora ninguém tenha conseguido demonstrar esta conjectura.

A tabela 2 apresenta os resultados da análise de detectabilidade para as primeiras sete variedades hiperbólicas do censo de Hodgson e Weeks, em um universo com $\Omega_0 = 0,99$ e $\Omega_\Lambda = 0,68$, e usando catálogos de quasares ($z = 6$) ou considerando o horizonte ($z = \infty$). Todas estas topologias são não-detectáveis usando catálogos de aglomerados de galáxias[7, 8].

⁸Uma característica peculiar na geometria hiperbólica é a existência de poliedros não compactos porém de volume finito. As variedades construídas a partir deste tipo de poliedros são chamadas de variedades com pontas.

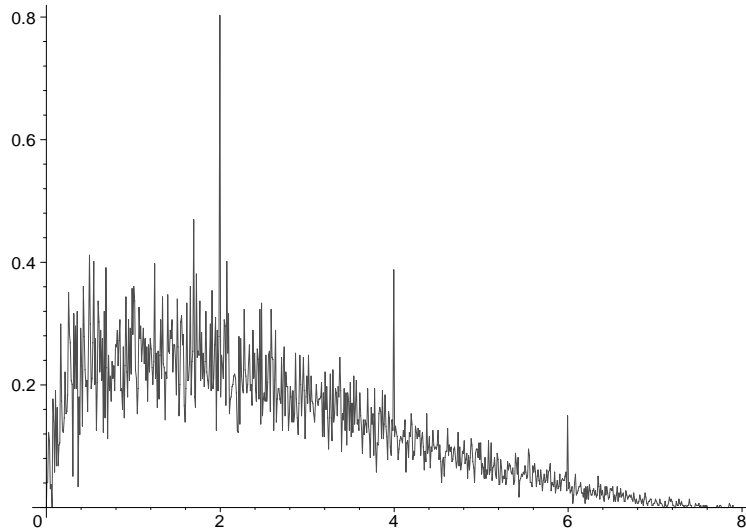


Figura 5: *HSP para uma variedade euclideana. Os picos são manifestações das translações que pertencem ao grupo de recobrimento da variedade.*

6 Cristalografia cósmica

Se nosso universo fosse multiplamente conexo, a imagem que teríamos dele se assemelharia a um mosaico (veja a fig.3). Esta distribuição periódica de fontes geraria correlações nas suas posições. Nas abordagens estatísticas à topologia cósmica usando fontes discretas tenta-se desenvolver métodos que revelem estas correlações. A cristalografia cósmica (CC) foi o primeiro destes métodos, nele procura-se por correlações nas distâncias entre fontes cósmicas usando histogramas de separação de pares (HSP's), ou seja gráficos que mostram o número de pares de fontes em função da separação (ou do quadrado da separação) dos pares (veja a figura 5)[15].

Nosso grupo desenvolveu um método geral para calcular a assinatura topológica proveniente das correlações de distância em CC, mostrando que as correlações devidas a translações manifestam-se como picos muito agudos, enquanto que as outras isometrias manifestam-se como pequenas deformações do HSP *esperado* (HSPE)⁹ da correspondente variedade de recobrimento universal, e aparecem sempre cobertas pelo ruído estatístico[16]. Duas conseqüências decorrem deste resultado.

Primeiro, nenhum HSP construído com catálogos de fontes discretas num universo hiperbólico pode apresentar picos topológicos, pois não existem translações na geometria hiperbólica. Portanto os HSP's não são capazes de fornecer informação topológica em modelos de universo com densidade de matéria menor que a crítica. Segundo, variedades euclidianas ou esféricas com as mesmas translações em seus grupos de recobrimento não podem ser distinguidas pelos seus espectros de picos topológicos.

Um problema crucial na CC é que ela está baseada fortemente no pressuposto de que as distâncias entre fontes cósmicas podem ser determinadas com grande precisão.

⁹O HSPE é o HSP com o ruído estatístico suprimido, e é essencialmente o HSPE do recobrimento universal correspondente mais a assinatura topológica, que consiste em contribuições individuais de cada isometria de recobrimento.

Porém, em catálogos reais as posições das fontes são dadas por duas coordenadas angulares e os correspondentes redshifts, que são transformados em distâncias através da relação redshift-distância. Isto acarreta erros na determinação das posições, e portanto na separação entre pares de fontes.

Os erros na determinação das posições das fontes cósmicas são, na verdade, de três tipos[17]: (i) erros na medição da posição angular e do redshift, inerentes ao processo de medição; (ii) erros na conversão de redshift em distância, devidos às incertezas nas medidas dos parâmetros cosmológicos, principalmente das densidades Ω_{m0} e $\Omega_{\Lambda0}$; e (iii) erros devidos às velocidades peculiares das fontes. Estudos preliminares sugerem que um erro na determinação dos parâmetros cosmológicos de 1% tem como consequência a supressão dos picos nos histogramas de separação por pares[18], porém estudos mais detalhados precisam ser realizados antes de chegarmos a conclusões definitivas.

Temos que a CC, no seu estado atual de desenvolvimento, não parece ser um método apropriado para a detecção da topologia do universo. Devemos pois procurar por outros métodos. Um método que parece bastante promissor foi sugerido por Uzan, Lehoucq e Luminet[19]; um outro, baseado na correlação de ruídos de histogramas desenvolvido por Bernui e um dos autores será descrito na próxima seção.

7 Correlações locais de ruído

Em 1996 Roukema propôs um método que procura por quintetos idênticos de quasares em regiões distintas do espaço[20]. Na sua forma original, este método não funciona devido a que desconsidera que em algumas das configurações um ou mais dos quasares não estejam sendo registrados, e não leva em conta os movimentos peculiares das fontes. No entanto, uma análise das idéias por trás do método do Roukema nos leva a procurar por configurações *muito* similares em distintas regiões do espaço.

Recentemente foi proposto um método que captura idéias de CC e do método das configurações dos quasares proposto por Roukema[21]. A idéia básica consiste em analisar as correlações dos ruídos dos HSPs que correspondem a duas regiões separadas do espaço. O método de correlações locais de ruído (CLR) calcula o coeficiente de correlação linear, r , do ruído dos dois HSPs. Se as regiões estudadas não estão relacionadas por uma isometria, r se anula. Já se as duas regiões estão relacionadas por uma isometria (de fato, se são a mesma região), então as duas regiões em princípio possuem a mesma distribuição de fontes, e portanto o coeficiente de correlação linear (ideal) toma o valor $r = 1$.

Na verdade, mesmo que as duas regiões estejam identificadas por uma isometria, as distribuições das fontes nelas não serão idênticas devido às velocidades peculiares das fontes e às regras de seleção dos catálogos que estão sendo utilizados (veja a Sec.4.2). Porém, os ruídos de ambos os HSPs permanecem fortemente correlacionados desde que as distorções nas distribuições não sejam muito acentuadas.

As distribuições das fontes em ambas regiões podem não ser idênticas devido a um outro motivo. As duas regiões podem não estar identificadas por uma isometria, mas a imagem isométrica de uma delas pode interceptar a outra, de modo que apenas porções de ambas distribuições coincidam. O método de CLR resulta ser robusto também com respeito a este tipo de distorções, desde que as regiões que se interceptam não sejam

pequenas demais.

O método de CLR parece ser robusto o suficiente para ser aplicado ao mundo real, porém alguns estudos ainda faltam ser realizados, como por exemplo a sensibilidade do método perante aos erros na determinação dos parâmetros cosmológicos. No entanto, resulta interessante sugerir algumas aplicações potenciais deste método, como faremos na seção seguinte.

8 Enxergando a forma do universo

Nesta seção descrevemos brevemente resultados recentes obtidos na construção e teste de modelos para a forma do universo. Todos estes resultados foram obtidos no contexto de modelos cosmológicos FL planos ($\Omega_0 = 1$). A extensão destes resultados para modelos cosmológicos não planos se encontra em desenvolvimento.

8.1 Construindo modelos

Suponha que três aglomerados de galáxias foram identificados como sendo imagens topológicas do mesmo aglomerado. O que este fato nos diz sobre a topologia do universo? Em 1997 Roukema e Edge sugeriram que os aglomerados RXJ 1347.5-1145 e CL 09104+4109 seriam imagens topológicas do aglomerado Coma, e considerando algumas hipóteses simplificadoras constuíram alguns modelos para a forma do nosso universo[22].

Recentemente um dos autores ampliou esta análise e desenvolveu um método geral para construir modelos da forma do universo a partir de hipóteses do tipo sugerido por Roukema e Edge[23]. Nesse trabalho foi mostrado que todas as seis famílias de variedades euclidianas compactas e orientáveis serviriam como modelo para a forma do universo, embora as regiões permitidas dos correspondentes espaços de parâmetros ficassem restritas pelas posições relativas das três imagens. Um resultado idêntico pode ser obtido para o caso das variedades não-orientáveis. Um outro resultado obtido foi que a identificação de mais duas ternas de imagens topológicas, vizinhas da primeira terna, seriam suficientes para determinar a topologia do universo na maioria dos modelos propostos.

8.2 Testando os modelos

Uma característica da maioria destes modelos é que uma das isometrias envolvidas é uma translação. Para estes casos fica extremamente fácil fazer predições para as posições de imagens topológicas de outros aglomerados de galáxias. Isto foi feito para 31 aglomerados de galáxias próximos à Via Láctea que se encontram registrados no catálogo de Abell-ACO[24, 25].

Surpreendentemente, várias das posições angulares das imagens preditas coincidem com posições angulares de aglomerados de luminosidade fraca do mesmo catálogo, sugerindo a possibilidade que imagens topológicas de aglomerados tenham sido detectadas e registradas, mas não identificadas como tais. O redshift de muitos destes aglomerados de luminosidade fraca nunca foi medido, portanto se nosso universo se ajusta a um destes modelos, isto seria facilmente detectável apenas medindo o redshift destas fontes.

Além disso, alguns destes modelos podem ser descartados ou confirmados construindo catálogos de aglomerados em regiões angulares em torno de RXJ 1347.5-1145 e CL 09104+4109, e seus pontos antípodas em relação a Coma. Se estes aglomerados não forem imagens de Coma por uma translação, podemos aplicar o método CLR para estes catálogos e determinar assim se estas regiões são ou não relacionadas por uma isometria.

9 Comentários finais

Neste curso foram brevemente apresentados os conceitos básicos de topologia cósmica relacionados com a busca da topologia do universo usando fontes cósmicas discretas, assim como resultados recentes obtidos por nosso grupo nesta área. Parece-nos desnecessário dizer que o critério de seleção dos tópicos apresentados (critério adotado por severas restrições de espaço) nos levou a deixar de lado contribuições pioneras como, p. ex., as do Hélio Fagundes[26], assim como de temas fundamentais como a procura da topologia usando a radiação cósmica de fundo[27]. Sugerimos ao leitor consultar as referências citadas acima.

10 Agradecimentos

G.I. Gomero agradece ao CLAF pela concessão de uma bolsa de pós-doutorado e ao CBPF pelo uso das suas instalações. M.J. Rebouças agradece ao CNPq pela Bolsa de Pesquisa. Os autores agradecem a Bruno Mota e Antonio Teixeira pela leitura e comentários importantes, e cumprimentam aos organizadores da Escola pelo evento bem sucedido.

Referências

- [1] M. Lachièze-Rey & J.-P. Luminet, *Phys. Rep.* **254**, 135 (1995);
G.D. Starkman, *Class. Quantum Grav.* **15**, 2529 (1998). Edição especial *Topology of the universe Conference*, Cleveland, Ohio, October 1997. Editor: Glenn D. Starkman; V. Blançœil & B.F. Roukema, Editores de *Cosmological Topology in Paris 1998*, astro-ph/0010170.
- [2] J.A. Wolf, *Spaces of Constant Curvature*, (fifth ed., Publish or Perish Inc., Delaware, 1984).
- [3] G.I. Gomero & M.J. Rebouças, *Detectability of Cosmic Topology in Flat universes*, gr-qc/0202094 (2002).
- [4] P. Scott, *Bull. London Math. Soc.* **15**, 401-487 (1983).
- [5] W.P. Thurston, *Three-Dimensional Geometry and Topology, Vol.1*, Ed. By Silvio Levy, Princeton university Press, Princeton (1997).
- [6] G.F.R. Ellis, *Gen. Rel. Grav.* **2**, 7 (1971).

- [7] G.I. Gomero, M.J. Rebouças & R. Tavakol, *Class. Quantum Grav.* **18**, 4461 (2001);
G.I. Gomero, M.J. Rebouças & R. Tavakol, *Class. Quantum Grav.* **18**, L145 (2001).
- [8] B. Mota, M.J. Rebouças, R. Tavakol & A.F.F. Teixeira, *Sensitivity of detectability of cosmic topology to observational errors*, em desenvolvimento.
- [9] G.D. Mostow, *Ann. Math. Studies* **78**, Princeton university Press, Princeton, New Jersey (1973).
- [10] W.P. Thurston, *Bull. Am. Math. Soc.* **6**, 357 (1982).
- [11] I. Agol, *Volume Change under Drilling*, math.GT/0101138 (2001).
- [12] C.D. Hodgson & Steven P. Kerckhoff, *Universal Bounds for Hyperbolic Dehn Surgery*, math.GT/0204345 (2002).
- [13] J.R. Weeks, SnapPea: A computer program for creating and studying hyperbolic 3-manifolds, <http://thames.northnet.org/weeks/>.
- [14] C.D. Hodgson & J.R. Weeks, *Experimental Mathematics* **3**, 261 (1994).
- [15] R. Lehoucq, M. Lachièze-Rey & J.-P. Luminet, *Astron. Astrophys.* **313**, 339 (1996).
- [16] G.I. Gomero, A.F.F. Teixeira, M.J. Rebouças & A. Bernui, *Int. J. Mod. Phys.* **D11**, 869 (2002);
G.I. Gomero, M.J. Rebouças & A.F.F. Teixeira, *Phys. Lett.* **A275**, 355 (2000);
G.I. Gomero, M.J. Rebouças & A.F.F. Teixeira, *Int. J. Mod. Phys.* **D9**, 687 (2000);
G.I. Gomero, M.J. Rebouças & A.F.F. Teixeira, *Class. Quantum Grav.* **18**, 1885 (2001).
- [17] R. Lehoucq, J.-P. Uzan & J.-P. Luminet, *Astron. Astrophys.* **363**, 1 (2000).
- [18] G.I. Gomero, *Busca da topologia do universo usando fontes cósmicas discretas*, Tese de Doutorado, CBPF (2000).
- [19] J.-P. Uzan, R. Lehoucq & J.-P. Luminet, *Astron. Astrophys.* **351**, 766 (1999).
- [20] B.F. Roukema, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **283**, 1147 (1996).
- [21] A. Bernui & G.I. Gomero, *Local Noise Correlations in Cosmic Topology*, em desenvolvimento.
- [22] B.F. Roukema & A. Edge, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **292**, 105 (1997).
- [23] G.I. Gomero, *Model Building in Cosmic Topology*, em desenvolvimento.
- [24] G.I. Gomero, *Possible Topological Images of Nearby Clusters of Galaxies*, em desenvolvimento.
- [25] G.O. Abell, H.G. Corwin & R.P. Olowin, *Astrophys. J. Supplement* **70**, 1, (1989).

- [26] H.V. Fagundes, *Braz. J. Phys.*, **32**, in press (2002).
- [27] J. Levin, *Phys. Rep.* **365**, 251 (2002);
K.T. Inoue, *Exploring Topology of the universe in the Microwave Background*, PhD Thesis, Kyoto university, astro-ph/0103158 (2001).