

Teoria de Cordas Bosônicas*

M.A.C. Torres

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas – CBPF/MCT
Rua Dr. Xavier Sigaud, 150
22290-180 – Rio de Janeiro, RJ – Brasil

* Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Física, Tese de Mestrado defendida em abril de 2002, sob orientação de Clóvis José Wotzasek.

Prefácio

Esta Monografia é um trabalho de tese de Mestrado, defendido em abril de 2002, que acreditamos caber a estudantes de pós-graduação interessados em ingressar em estudos teóricos da Física de Partículas e Teoria de Cordas. Este é um trabalho conciso e convém conhecimentos de Teoria Quântica de Campos para trazer clareza à linguagem e facilitar o entendimento do leitor.

Ao estudante entusiasmado em conhecer Teoria de Cordas, gostaria de preveni-lo a respeito e aconselhá-lo a procurar conhecer o Modelo Padrão e outras propostas de Unificação durante seu longo processo de crescimento intelectual, antes de se decidir a trabalhar tão somente em Teoria de Cordas.

Como um iniciante na Física de Partículas, este estudo foi muito enriquecedor para o seu autor por abordar questões relativas a TQC de uma forma direta: métodos de quantização, anomalia quântica, ordenamento, regularização, Integral de caminho, correção de Fadeev-Popov e campos fantasmas. Por tal motivo o autor acredita que esse trabalho possa ser útil ao estudante de Física de Partículas em geral e ao estudante que queira conhecer um pouco sobre Teoria de Cordas em particular.

Namastê.

M. A. C. Torres.

Resumo

Torres, M. A. C. **Teoria de Cordas Bosônicas**. Orientador: Clóvis José Wotzasek. Rio de Janeiro: UFRJ/IF; CAPES, 2002. Dissertação (Mestrado em Ciências).

Estudo introdutório da Teoria de Cordas Bosônicas. Corda Clássica e suas simetrias internas. Comparação dos métodos de quantização no cone de luz, covariante e no calibre conforme explorando a teoria de campos conformes na folha de universo da corda. Formulação integral de caminho de Polyakov. Teoria perturbativa. Cordas não críticas e estudo de sua de aplicação em confinamento de quarks.

Abstract

Torres, M. A. C. **Teoria de Cordas Bosônicas**. Orientador: Clóvis José Wotzasek.
Rio de Janeiro: UFRJ/IF; CAPES, 2002. Dissertação (Mestrado em Ciências).

Introductory study of Bosonic String Theory. Classical String and its internal symmetries. Light Cone, Covariant and Conformal quantization methods exposure. Conformal Field Theory on String world-sheet. Polyakov's Path Integral formalism. Non critical String and its application in quark confinement problem.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	A Ação de Polyakov	5
2.1	A Partícula Corda	5
2.2	Dinâmica da Corda	11
2.3	Quantização da Corda	13
2.3.1	Quantização no Cone de Luz	14
2.3.2	Quantização Covariante	25
3	Teoria de Campos Conformes	30
3.1	CFT no Plano Complexo	30
3.2	A Identidade de Ward	34
3.3	Ordenamento Normal	36
3.4	Campos primários	39
3.5	Álgebra de Virasoro	40
3.6	Espectro da corda	41
3.7	Operadores de Vértice	44
3.7.1	Integral de caminho	48
4	A Integral de Caminho de Polyakov	51
4.1	Introdução	51
4.2	Soma sobre Folhas de Universo	51
4.3	O Funcional Integral	52
4.4	Fixação de Calibre	54
4.5	A Anomalia de Weyl	57

4.6	A Matriz S	60
4.6.1	Superfícies topológicas	62
4.7	Operadores de Vértice	65
4.8	Cordas no espaço-tempo curvo	68
5	Cordas Não Críticas	71
5.1	Corda Não Crítica	71
5.2	Critério de Confinamento de Wilson	73
5.3	Cordas Confinantes	75
6	Considerações Finais	77
	Bibliografia	79

Lista de Figuras

2.1	a)Corda fechada b)Corda aberta	6
2.2	Linha de universo	7
3.1	Plano complexo da corda fechada $c/$ linhas equitemporais. (a)Em coordenadas w , com as bordas identificadas umas as outras. (b)Em coordenadas z	45
3.2	Plano complexo da corda aberta com linhas equitemporais. (a) Em coordenadas w . (b) Em coordenadas z	46
3.3	(a)Plano z com 2 operadores locais. (b)Estado obtido na integração de caminho até a fronteira. (c) Operador de Vértice que produz o mesmo estado na borda	49
3.4	Representação diagramática de um OPE	50
4.1	Interações entre cordas	52
4.2	(a) Espalhamento de quatro cordas fechadas, partindo de estados assintóticos. (b) Folha de universo conformalmente equivalente.	63
4.3	(a) Espalhamento de quatro cordas abertas, partindo de estados assintóticos. (b) Folha de universo no espaço conforme	63
4.4	Projeção estereográfica	64
4.5	Adicionando roscas	65
5.1	Laços de Wilson	75

Capítulo 1

Introdução

A Teoria de Cordas é na atualidade a principal alternativa para a superação de uma série de divergências entre duas teorias físicas fundamentais, a Mecânica Quântica (MQ) e a Relatividade Geral (RG) e é também a única proposta para a unificação das 4 forças de interação que conhecemos: eletromagnética, fraca, forte e gravitacional. O encontro inevitável entre a RG e a MQ gerou, de início, resultados entusiasmantes, como a antecipação da descoberta experimental do pósitron através da Mecânica Quântica Relativística de Dirac. Herdeira desse trabalho pioneiro, a Teoria Quântica dos Campos (TQC) deu origem a modelos bem sucedidos da Física de Partículas, como a Eletrodinâmica Quântica (QED), a Teoria Eletrofraca e a Cromodinâmica Quântica (QCD). Tais sucessos fazem parte do chamado Modelo Padrão da Física de Partículas.

Apesar do êxito das aplicações da TQC, do ponto de vista teórico, o Modelo Padrão deixa fortes indícios da existência de princípios fundamentais não descobertos, ou seja, que existe uma teoria implícita. Há um número excessivo (~ 20) de parâmetros no Modelo Padrão cujos valores são obtidos a partir de resultados experimentais, não havendo compreensão teórica para tais. Em particular não sabemos justificar as massas das partículas elementares e também não sabemos por que há 3 famílias (ou gerações) de quarks e léptons ou se há mais gerações por se descobrir. Considerando a Relatividade Geral, também há uma necessidade de uma teoria implícita, a Gravitação Quântica, correspondente a uma versão quantizada que tenha como limite clássico a RG devido a natureza intrínseca da matéria: ela se revela em

forma de pacotes discretos. Portanto é de se esperar que a força de atração gravitacional, se expresse na forma de transmissão de momentos contidos em pacotes, os grávitons. Esta forma de pensar evita o princípio newtoniano da ação instantânea a distância, uma vez que nenhuma partícula pode trafegar acima da velocidade da luz. Um outro motivo é a existência de singularidades na RG. Tais singularidades seriam varridas a partir de um tratamento quântico, tal como o colapso de um átomo sugerido pela Física Clássica é evitado pelas leis da MQ. No entanto a Gravitação Quântica é uma teoria não renormalizável segundo a Teoria Quântica de Campos (TQC). Não se é capaz de obter, via TQC, previsões numéricas a seu respeito devido a divergências em seu cálculo que não podem ser absorvidas numa renormalização usual dos parâmetros da teoria.

Em acréscimo, A Relatividade Geral e o Modelo Padrão tem quase todas as suas previsões já verificadas experimentalmente. Porém, descobertas recentes e alguns problemas antigos não encontram respostas naturais nestas teorias. Para citar um exemplo, na Cosmologia a discrepância entre a energia quântica residual do vácuo e a Constante Cosmológica, que representa densidade de energia do vácuo, é de 30 ordens de magnitude, no melhor dos cálculos da física convencional.

A teoria de cordas surge naturalmente como uma teoria de unificação ao oferecer propostas aos problemas do Modelo Padrão e da Gravitação Quântica. Um grande número de simetrias internas da Teoria de Cordas elimina parâmetros antes independentes (massa, por exemplo) na Teoria de Campos, seus grupos de calibre surgem espontaneamente e a conceituação de partículas como cordas acaba com divergências oriundas de cálculos com partículas de dimensões pontuais. Somando-se a tais características, temos que dentro do espectro de modos de vibração da corda está o gráviton, isto é, uma partícula de spin 2 tal como é descrita na Gravitação Quântica.

Outra motivação para o estudo da Teoria de Cordas provém da simplicidade de suas premissas (embora não fundamentais o bastante), em oposição ao Modelo Padrão que é nada menos que uma coletânea de simetrias emendadas numa única teoria, sem entendimento da origem dos distintos grupos de simetria. Um único grupo de simetria, $SO(32)$, existente nas supercordas, a teoria de cordas supersimétricas, é suficientemente grande para incluir todas as simetrias de calibre do modelo padrão embora seja mais largo que a realidade que observamos.

Mas não só de flores se revestem os caminhos da Teoria de Cordas. É de se suspeitar que ao se encarar uma teoria de 30 anos de desenvolvimento e ainda tida como uma teoria nascente algo haja de errado. Entre os contras desta teoria está o fato de que algumas das características agradáveis que ela possui, como simetrias internas, se realizam apenas em 26 dimensões (10 para o caso das supercordas). Onde estão as dimensões que não vemos ainda é um tema em aberto. Uma outra possibilidade de trabalhar com cordas num espaço de 4 dimensões (cordas não críticas) provoca o surgimento de uma dimensão extra, cujo significado físico ainda está por ser entendido. Não está claro também o significado do vácuo de cordas, uma vez que não há ainda uma teoria completa de campos de cordas. De fato, esse “vazio” no entendimento sobre o que é o vácuo abre na teoria de cordas infinitas configurações possíveis de vácuo, forçando os cientistas a uma arbitragem sobre um número grande de parâmetros, para se configurar na teoria de cordas um modelo equivalente ao Modelo Padrão, por exemplo.

Em suma, questões como a Unificação e a Gravitação quântica estão além da fronteira de todo conhecimento da Física de Partículas e Relatividade Geral atual e são ainda apenas teorias, no sentido especulativo da palavra.

O presente trabalho ambiciona realizar apenas uma abordagem introdutória da teoria realçando contribuições originais da Teoria Quântica de Campos em duas dimensões que particularmente impressionaram o autor, como por exemplo a quantização conforme.

O trabalho se originou dos estudos do autor sobre os livro-textos [1, 2] com consulta a vários textos de referência [3] e artigos de revisão [4, 5] e não há originalidade algum nele, mas tão somente o entendimento do autor sobre o assunto. No capítulo 2 conceituamos uma corda, abordamos o princípio da ação mínima exibindo suas simetrias clássicas, realizamos a quantização canônica e no cone de luz e verificando a invariância de Lorentz através da sua algebra de comutadores.

No capítulo 3 descrevemos a Teoria de Campos Conforme existente na folha de universo de métrica plana, realizando a quantização da corda e trabalhando no espaço de operadores.

No capítulo 4 apresentamos o formalismo de Feynman de integração funcional, introduzimos as correções dos fantasmas de calibre no funcional gerador, calculamos a anomalia surgida da quantização no calibre conforme, mostramos a simplificação

do número de diagramas de Feynman e através das propriedades destes diagramas definimos a matriz S de espalhamento e o operador de vértice que representa um determinado estado assintótico de uma corda. E conhecendo os operadores de vértice das partículas, mostramos o aparecimento espontâneo de grávitons numa corda que varre um espaço-tempo curvo.

No capítulo 5 uma alternativa coerente da teoria de cordas que surgiu para driblar o problema da anomalia quântica de Weyl e sua aplicação em confinamento de quarks é descrita. Tal teoria evita a imposição da dimensão crítica do espaço-tempo e expõe uma nova realização da teoria de cordas.

Em nosso desfecho voltamos a comentar alguns obstáculos da teoria de cordas encontrados ao longo deste trabalho e apontamos alguns caminhos para se alcançar os modernos aspectos da teoria de cordas.

Capítulo 2

A Ação de Polyakov

2.1 A Partícula Corda

A Teoria de Cordas se baseia na interpretação das partículas fundamentais como objetos unidimensionais, ou seja pequenas cordas de extensão muito pequena que se propagam no espaço-tempo. Esta proposta confronta o modelo existênte da Física de Partículas baseado na Teoria Quântica de Campos, onde as partículas são representadas por pontos de dimensão zero. Esta diferença confere propriedades interessantes e desejáveis a Teoria de Cordas, conforme será visto neste trabalho.

Um argumento a favor desta concepção de partícula segue do princípio de incerteza de Heisenberg:

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar \tag{2.1}$$

Para uma incerteza na posição suficientemente pequena, a incerteza no momento de pode alcançar altíssimos valores e a escala de energia desta partícula pode se aproximar da energia de Plank $\simeq 10^{19}$ GeV, onde sua interação com o campo gravitacional se torna forte e as correções da interação partícula-gráviton divergem. Como na Natureza não existem divergências (se as interações acontecem a matriz S de tais interações tem que ser capaz de exprimir tais resultados), na escala de Plank ($10^{-33}m$) algo deve ser diferente da Teoria de Quântica de Campos conhecida para “suavizar” tais singularidades. Oportunamente, o conceito de partícula-corda “suaviza” tais singularidades conhecidas como divergências do ultravioleta (UV), ao

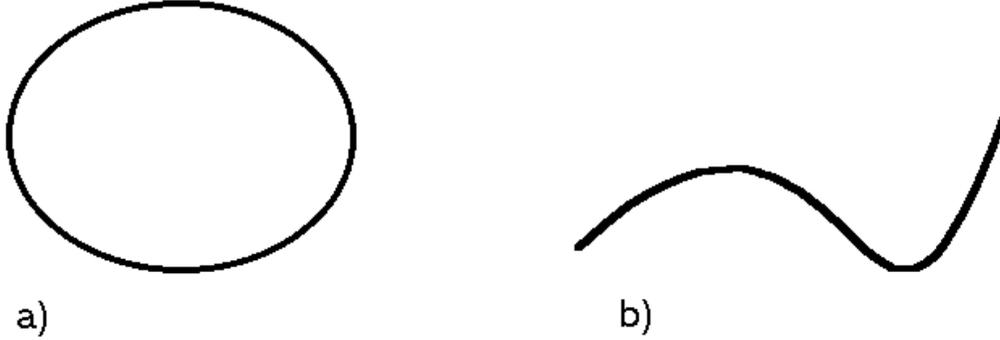


Figura 2.1: a) Corda fechada b) Corda aberta

tornar não locais as interações entre partículas, conforme veremos na seção (4.7).

A partícula, sendo uma corda, pode existir em duas formas, corda aberta ou fechada (Fig. 2.1) e a sua propagação no espaço-tempo forma uma superfície bidimensional comumente chamada de folha de universo, em analogia a linha de universo da partícula pontual no espaço de Minkowski.

Para construirmos a dinâmica da corda e posteriormente quantizar seus estados, precisamos determinar a ação da corda, que faremos por uma analogia nos reportando ao caso de uma partícula pontual.

Uma partícula pontual que se desloca no espaço-tempo de D dimensões descreve uma linha de universo. A distância Δl entre 2 pontos ao longo deste caminho é invariante sob transformações de Lorentz (Fig.2.2). A linha de universo possui um parâmetro interno de varredura da linha que seria a escala de tempo de determinado observador. O comprimento Δl da linha independe da parametrização interna τ da linha de universo, ou seja, independe do observador externo e de sua escala de tempo. Portanto a invariância de Lorentz do espaço tempo está imersa na invariância por reparametrização:

$$\Delta l'(\tau'(\tau)) = \Delta l(\tau) \quad (2.2)$$

Enquanto que a simetria de Lorentz envolve linearidade entre as escalas de tempo,

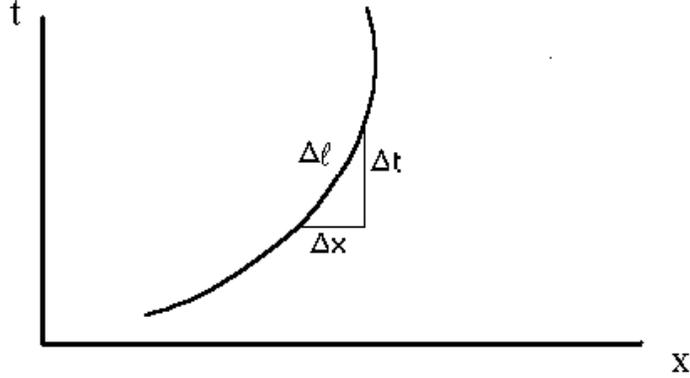


Figura 2.2: Linha de universo

a única restrição para $\tau'(\tau)$ é que seja apenas uma função monótona. A simetria de reparametrização é maior que a de Lorentz porque inclui no espaço externo as transformações de coordenadas entre referenciais não inerciais. Poderemos considerar a simetria de Lorentz equivalente a de reparametrização se aplicarmos o conceito de referenciais inerciais instantâneos.

A ação invariante de Lorentz e por reparametrização interna mais simples que podemos obter é o comprimento desta linha no espaço de Minkowski que nada mais é senão a medida do tempo próprio :

$$S = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{\Delta t} \sqrt{(\Delta X^0)^2 - (\Delta X^\mu)^2} \quad (2.3)$$

$$\Delta X^\mu \rightarrow \dot{X}^\mu d\tau \quad \mu = 0, 1, \dots, D-1 \quad (2.4)$$

e a ação se torna,

$$S = \int d\tau (-\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu)^{1/2} \quad (2.5)$$

com métrica $\eta_{\mu\nu}(-, +, +, \dots, +)$.

Para o caso da corda, existem 2 parâmetros internos que identificam todos os pontos da folha de universo. Podemos associa-los inicialmente às coordenadas temporal τ e de posição relativa σ dentro da corda. Mas de fato, temos a liberdade de escolher para a folha de universo qualquer reparametrização difeomórfica (transformação isométrica e infinitamente diferenciável) a esta, preservadas as coordenadas espaço-tempo X^μ , pois são estas as grandezas com realidade física de interesse. A ação da corda também deve preservar a simetria de Poincaré para campos de partículas no espaço-tempo. Y. Nambu e T. Goto [6, 7] propuseram que a ação mais simples que poderíamos escrever seria proporcional a área da folha de universo. Partindo do elemento de linha invariante de Lorentz:

$$ds^2 = dX^\mu dX_\mu = h_{ab} d\sigma^a d\sigma^b \quad (2.6)$$

para $h_{ab} = \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu$ métrica da folha de universo induzida pelas coordenadas de espaço-tempo, chega-se que o elemento de área será: $dA = \sqrt{-h} d^2\sigma$, $h = \det(h_{ab})$ e a respectiva ação:

$$S = -T \int d^2\sigma \sqrt{-h} \quad (2.7)$$

onde T é a chamada tensão da corda. Observamos, em concordância com a adimensionalidade de S , que T tem dimensão $(\text{distância})^{-2}$. Na escala de energia da corda, é conveniente escrevermos:

$$T = \frac{1}{2\pi\alpha'}, \quad \text{onde } \alpha' \text{ é a inclinação de Regge,} \\ \alpha' = l_P^2 \sim 10^{-66} \text{ cm}^2, \quad l_P \text{ comprimento de Planck} \quad (2.8)$$

O comprimento de Planck é a escala de distância onde a gravitação quântica tem efeito e por isso é tomado como a escala de comprimento da corda.

Se trabalharmos na parametrização inicial τ e σ da folha de universo e adotarmos as convenções $\partial_\tau X^\mu = \dot{X}^\mu$ e $\partial_\sigma X^\mu = X'^\mu$ e os índices 0 e 1 para as direções temporais e espaciais da métrica da folha de universo, teremos por ação:

$$S = -T \int \sqrt{(\dot{X}^\mu X'_\mu)^2 - (\dot{X})^2 (X')^2} d^2\sigma \quad (2.9)$$

Essa é a conhecida ação de Nambu-Goto. A existência da raiz na ação introduz dificuldades no cálculo. Utilizando uma métrica intrínseca auxiliar [8, 9] da folha de universo, independente das coordenadas do espaço-tempo, $g_{ab}(\sigma^1, \sigma^2)$ com assinatura $(-, +)$ obtemos uma ação equivalente, chamada ação de Polyakov [10]:

$$S = -\frac{T}{2} \int \sqrt{-g} g^{ab} \eta_{\mu\nu} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \quad (2.10)$$

O que se fez ao se criar a métrica intrínseca g^{ab} foi adicionar novas simetrias a folha de universo. Uma escolha de calibre para cada simetria, fixa a métrica intrínseca g_{ab} e não se tem liberdades extras em relação a ação anterior. Por uma contagem do número de parâmetros livres e do número de restrições das simetrias verificamos se há graus extras de liberdade:

A matriz simétrica

$$g_{ab} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix}$$

possui 3 parâmetros livres. As simetrias na folha de universo da ação de Polyakov são :

- Difeomorfismo (ou simetria de reparametrização) :

$$\begin{aligned} \sigma^{1,2} &\rightarrow \sigma'^{1,2}(\sigma^1, \sigma^2) \\ X'^\mu(\sigma'^1, \sigma'^2) &= X^\mu(\sigma^1, \sigma^2) \\ \frac{\partial \sigma'^a}{\partial \sigma^c} \frac{\partial \sigma'^b}{\partial \sigma^d} g_{ab}(\sigma'^1, \sigma'^2) &= g_{cd}(\sigma^1, \sigma^2) \end{aligned} \quad (2.11)$$

- Invariância de Weyl (ou reescalamento conforme da métrica):

$$\begin{aligned} g'_{ab}(\sigma^1, \sigma^2) &= \exp(2\omega(\sigma^1, \sigma^2)) g_{ab}(\sigma^1, \sigma^2) \\ X'^\mu(\sigma^1, \sigma^2) &= X^\mu(\sigma^1, \sigma^2) \end{aligned} \quad (2.12)$$

e no espaço-tempo temos a simetria de Poincaré, uma composição das simetrias de

Lorentz e invariância por translação das cordas:

$$\begin{aligned} X'^{\mu}(\sigma^1, \sigma^2) &= \Lambda^{\mu}_{\nu} X^{\nu}(\sigma^1, \sigma^2) + a^{\mu} \\ g'_{ab}(\sigma^1, \sigma^2) &= g_{ab}(\sigma^1, \sigma^2) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Pelo difeomorfismo, podemos manipular 2 graus de liberdade na métrica g_{ab} e pela invariância de Weyl 1 grau de liberdade pode ser manipulado. Escolhendo os calibres certos podemos então usar para métrica intrínseca os valores que desejarmos.

A combinação das transformações por difeomorfismo (isométricas) e Weyl são chamadas de transformações conformes. A simetria conforme na folha de universo terá destaque no capítulo 3.

Cabe aqui observar que a invariância de Weyl é uma simetria que não existia antes na ação de Nambu-Goto. Para verificarmos sua validade na ação de Polyakov, precisamos calcular o novo determinante g' ,

$$\begin{aligned} g'^{ab} &= e^{-2\omega} g^{ab} \\ g' &= \det(e^{2\omega} g_{ab}) = e^{4\omega} g, \text{ e portanto,} \\ S' &= -\frac{T}{2} \int \sqrt{-g} e^{2\omega} g^{ab} e^{-2\omega} \eta_{\mu\nu} \partial_a X^{\mu} \partial_b X^{\nu} = S \end{aligned} \quad (2.14)$$

A nível clássico, podemos ser mais enfáticos e mostrar a equivalência entre as duas ações. Na ação de Polyakov, a métrica intrínseca não deve possuir dinâmica, o que implica na nulidade do tensor energia-momento :

$$T_{ab} = -\frac{2}{T} \sqrt{-g} \frac{\delta S}{\delta g^{ab}} = \partial_a X^{\mu} \partial_b X_{\mu} - \frac{1}{2} g_{ab} g^{cd} \partial_c X^{\mu} \partial_d X_{\mu} = 0 \quad (2.15)$$

as três equações acima tem como solução $g_{ab} = h_{ab}$. Aplicando esta solução na ação de Polyakov, chega-se a ação de Nambu-Goto, confirmando a equivalência clássica. A nível quântico, até hoje não foi provado a equivalência entre tais ações.

2.2 Dinâmica da Corda

Vamos utilizar o princípio da ação mínima para determinarmos as equações clássicas de movimento de uma corda de comprimento l . Os pontos fixos são a corda na posição inicial $X^\mu(\sigma, \tau^1)$ e na posição final $X^\mu(\sigma, \tau^2)$, onde a folha de universo está parametrizada em suas coordenadas de posição relativa σ e tempo τ . Consideremos a variação da ação sob variações infinitesimais dos campos X^μ da folha de universo:

$$\text{partindo de } S = \int d\sigma d\tau \mathcal{L}$$

$$\delta S = \int_{\tau^1}^{\tau^2} \int_{\sigma} d\tau d\sigma \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'_\mu} \delta X'_\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}_\mu} \delta \dot{X}_\mu \right)$$

com $\dot{X} = \partial_\tau X$ e $X' = \partial_\sigma X$. Sendo δ variação na forma, este é independente da variação nos parâmetros: $\delta \partial_a X = \partial_a \delta X$. Integrando por partes,

$$\delta S = \int_{\tau^1}^{\tau^2} d\tau \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'_\mu} \delta X_\mu \right|_{\sigma=0}^{\sigma=l} - \int_{\tau^1}^{\tau^2} \int_{\sigma} d\tau d\sigma \left(\partial_\sigma \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta X'_\mu} + \partial_\tau \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{X}_\mu} \right) \delta X_\mu \quad (2.16)$$

Pelo princípio da ação mínima, a variação de S deve ser nula, o que nos leva a dois tipos de equação:

$$\text{as equações de movimento} \quad \partial_\sigma \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta X'_\mu} + \partial_\tau \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{X}_\mu} = 0 \quad (2.17)$$

$$\text{e as condições de contorno nas bordas} \quad \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'_\mu} \right|_{\sigma=l} = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'_\mu} \right|_{\sigma=0} \quad (2.18)$$

No formalismo Hamiltoniano, para o Lagrangeano do tipo $\mathcal{L}(X^\mu, \dot{X}^\mu, X'^\mu, \tau, \sigma)$, os momentos conjugados de X^μ são respectivamente,

$$p_\tau^\mu = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{X}_\mu}, \text{ e } p_\sigma^\mu = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta X'_\mu} \quad (2.19)$$

o que nos permite reescrever 2.17 e 2.18

$$\partial_\tau p_\tau^\mu + \partial_\sigma p_\sigma^\mu = 0 \quad (2.20)$$

$$p_\sigma^\mu|_{\sigma=l} = p_\sigma^\mu|_{\sigma=0} \quad (2.21)$$

A equação 2.20 é uma equação de conservação de corrente enquanto a equação 2.18 expressa que o fluxo de momento sigma que sai da corda é igual ao fluxo de momento sigma que entra na corda, havendo portanto conservação de momento sigma total da corda. Para uma corda aberta de extremidades livres, podemos dizer que não há fluxo de momento nas extremidades e impor a condição de contorno de Neumann

$$p_\sigma^\mu(\sigma = l) = p_\sigma^\mu(\sigma = 0) = 0 \quad (2.22)$$

Outras condições de contorno podem ser impostas e originam diferentes espaços varridos pelas extremidades das cordas, conhecidos como branas, objetos de variadas dimensões e que assumiram um papel importante no estudo da teoria de corda quando se descobriu que estes objetos possuem dinâmica.

Utilizando a ação de Nambu-Goto, encontramos para os momentos conjugados

$$p_\tau^\mu = T \frac{(\dot{X} \cdot X')X'^\mu - (X')^2\dot{X}^\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (X')^2(\dot{X})^2}} \quad (2.23)$$

$$p_\sigma^\mu = T \frac{(\dot{X} \cdot X')\dot{X}^\mu - (\dot{X})^2X'^\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (X')^2(\dot{X})^2}} \quad (2.24)$$

É fácil verificar que as equações acima satisfazem

$$\begin{aligned} p_\tau^\mu \cdot X'_\mu &= 0, & p_\tau^2 + T^2(X')^2 &= 0 \\ p_\sigma^\mu \cdot \dot{X}_\mu &= 0, & p_\sigma^2 + T^2(\dot{X})^2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

2.3 Quantização da Corda

A quantização da teoria de cordas equivale a segunda quantização na teoria de Campos, pois as coordenadas espaço-tempo dos pontos da corda podem ser vistos como campos escalares imersos na folha de universo bidimensional. As diferentes configurações possíveis de X corresponderão a composições dos modos de vibração da corda.

No formalismo canônico de quantização, substituímos variáveis clássicas por operadores e colchetes de Poisson por relações de comutação. Mas quando o sistema possui simetrias, que se traduzem em vínculos, nem todas as variáveis são independentes e podem ser transformadas em operadores. Nestas circunstâncias, há dois procedimentos usuais em Teoria Quântica de Campos que se traduzem na teoria de Cordas nos métodos de quantização covariante e a quantização no cone de luz. Um terceiro método que explora a simetria conforme da folha de universo será estudado no capítulo seguinte.

A quantização no cone de luz consiste em escolhermos um calibre (cone de luz), separar as variáveis não dinâmicas e quantizar canonicamente sobre as variáveis restantes. Ao identificarmos as variáveis não dinâmicas entre os campos X^μ , perde-se a covariância de Lorentz explícita existente na ação da corda. Após a quantização tem que se verificar a existência da simetria de Lorentz através dos geradores de simetria da corda, verificando se eles satisfazem a álgebra dos geradores de Lorentz. Veremos adiante que a necessidade da manutenção da invariância de Lorentz na teoria de cordas levará a imposição da dimensão $D = 26$ do espaço-tempo para as cordas bosônicas. Este é um resultado bastante significativo pois nunca houve uma teoria que apontasse a dimensão espaço-temporal em que ela vive, muito embora $D = 26$ não seja o resultado esperado. Até onde conseguimos entender o universo em que vivemos, temos por base outro resultado, $D = 4$. A adição de supersimetria e compactificação de coordenadas são as alternativas para explicar por que $D = 4$ é o espaço-tempo que enxergamos dentro da teoria de cordas.

Ainda ilustrando a importância do método de quantização no cone de luz em teorias de calibre em geral, a sua aplicação na QCD [11, 12] torna finita contribuições de até 2 laços nos gráficos de Feynman. É esperado que divergências nas integrais de Feynman diminuam por estarmos (por esse método) eliminando uma das variáveis

de integração.

Pelo outro lado, o método de quantização covariante visa preservar a invariância de Lorentz do início ao fim. Para que isso se concretize, é preciso ignorar a existência de vínculos (simetrias) na teoria e realizar o procedimento canônico de quantização. Porém, a relação de comutação de variáveis covariantes envolve a métrica do espaço-tempo que é de tipo indefinida (nem positiva, nem negativa em todos os seus termos). A métrica do espaço de Hilbert correspondente será também indefinida, o que implica na perda de unitariedade (conservação da probabilidade) e na existência de estados de norma negativa (fantasmas). Para sanar este problema, resta restabelecer os vínculos existentes na teoria. Os vínculos são impostos posteriormente nos estados, uma vez que estes não são compatíveis com as relações de comutação da teoria. Impostos os vínculos, é preciso checar se os estados fantasmas estão desacoplados para se recuperar a unitariedade. Novamente a condição para que isso ocorra será quando a dimensão do espaço-tempo for menor ou igual a 26.

Embora consigamos realizar a quantização da corda bosônica mantendo a unitariedade e a invariância de Lorentz, um sério percalço surge na quantização: o estado fundamental da corda é taquiônico (velocidade acima da luz ou $m^2 < 0$). Tal obstáculo só é sanado acrescentando supersimetria à teoria de cordas.

2.3.1 Quantização no Cone de Luz

Sobre as liberdades das simetrias internas da folha de universo, escolhamos um calibre onde possamos especificar sua métrica intrínseca $g_{ab} = \eta_{ab}(+, -)$ na ação de Polyakov, onde η_{ab} é a métrica de Minkowski de um espaço de 2 dimensões. Deixando os campos da métrica de ser variáveis livres do sistema, sua respectiva corrente de simetria, o tensor energia-momento, tem que ser obrigatoriamente nula. Tal condição gerará o vínculo de nossa teoria, que obteremos a seguir.

Primeiramente, notemos que para a escolha da métrica $g_{ab} = \eta_{ab}$ a ação de Polyakov toma a forma:

$$S = -\frac{T}{2} \int d\sigma d\tau \left[(\dot{X})^2 - (X')^2 \right] \quad (2.26)$$

onde os índices covariantes e contravariantes estão contraídos. Recorrendo à equação

(2.15), temos que os vínculos $T_{ab} = 0$ se traduzem em:

$$\begin{aligned} T_{01} = T_{10} &= \dot{X} \cdot X' = 0 \\ T_{00} = T_{11} &= \frac{1}{2}(\dot{X}^2 + X'^2) = 0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

onde tomamos o índice 0 para o parâmetro τ e o índice 1 para σ em g_{ab} .

Usando a ação (2.26), os momentos (2.19) e a equação de movimento (2.20) se tornam

$$p_\tau^\mu = T \dot{X}^\mu, \quad p_\sigma^\mu = -T X'^\mu \quad (2.28)$$

$$(\partial_\sigma^2 - \partial_\tau^2)X^\mu = 0 \quad (2.29)$$

A equação de movimento (2.29) possui como solução geral a soma de campos que se movem à velocidade da luz ($c = 1$) para a direita e esquerda.

$$X^\mu(\sigma, \tau) = X_D^\mu(\tau - \sigma) + X_E^\mu(\tau + \sigma) \quad (2.30)$$

Para as cordas fechadas de comprimento parametrizado em $l = 2\pi$, adicionamos a periodicidade como condição de contorno

$$X^\mu(\sigma, \tau) = X^\mu(\sigma + 2\pi, \tau) \quad (2.31)$$

que nos permite escrever a solução geral periódica de X^μ na forma de série exponencial de Fourier

$$\begin{aligned} X_D^\mu(\tau - \sigma) &= \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{4\pi T}(\tau - \sigma)p^\mu + \frac{i}{2\sqrt{2\pi T}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu \exp(-in(\tau - \sigma)) \\ X_E^\mu(\tau + \sigma) &= \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{4\pi T}(\tau + \sigma)p^\mu + \frac{i}{2\sqrt{2\pi T}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^\mu \exp(-in(\tau + \sigma)) \end{aligned} \quad (2.32)$$

com x^μ e p^μ sendo respectivamente posição e momento do centro de massa da corda. Como queremos que X^μ sejam reais, teremos sempre para os conjugados complexos $\alpha_{-n}^\mu = \alpha_n^{\mu*}$ e $\tilde{\alpha}_{-n}^\mu = \tilde{\alpha}_n^{\mu*}$.

Para as cordas abertas, com comprimento parametrizado em $l = 2\pi$, relem-

bramos a condição de contorno (2.22)

$$\partial_\sigma X^\mu(\sigma = 0) = \partial_\sigma X^\mu(\sigma = 2\pi) = 0$$

que obriga $\alpha_n^\mu = \tilde{\alpha}_n^\mu$ e vincula os movimentos esquerda/direita da corda. Neste caso, temos como solução

$$X^\mu(\sigma, \tau) = x^\mu + \frac{1}{2\pi T} p^\mu \tau + \frac{i}{\sqrt{2\pi T}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu \exp(-in\tau) \cos(n\sigma) \quad (2.33)$$

Para realizarmos a quantização da corda, transformando α_n^μ , x^μ e p^μ em operadores precisamos encontrar e eliminar uma liberdade de calibre que não está aparente. Checando a contagem dos graus de liberdade e vínculos impostos até agora, conforme comentado anteriormente, a ação de Polyakov, devido as suas simetrias, tem 3 graus de liberdade e nós só impusemos 2 vínculos (eq. 2.27) no sistema por escolha de calibre. Portanto, antes da quantização, ainda devemos escolher um calibre que quebre uma liberdade do sistema. Esta liberdade podemos identificar como uma invariância de reparametrização residual. Pelos vínculos em (2.27), reconhecemos que as tangentes $\dot{X}^\mu(\sigma, \tau)$ e $X'_\mu(\sigma, \tau)$ da folha de universo em (σ, τ) são ortogonais, mas não existe uma direção preferencial destas tangentes sobre o plano tangente em (σ, τ) . Para analisarmos esta parametrização residual, vamos supor que existem duas parametrizações (σ, τ) e $(\tilde{\sigma}, \tilde{\tau})$ que satisfaçam (2.27). Sabendo que

$$\frac{\partial X}{\partial \tau} = \left(\frac{\partial X}{\partial \tilde{\tau}} \frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial \tau} + \frac{\partial X}{\partial \tilde{\sigma}} \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tau} \right)$$

Podemos deduzir que

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \right) \tilde{\sigma} = 0 \quad \text{e} \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \right) \tilde{\tau} = 0 \quad (2.34)$$

Este resultado poderíamos ter visto de outra forma: os vínculos (2.27) colocam g_{ab} no calibre conforme, e portanto as transformações de $\sigma^\pm = \tau \pm \sigma$ são sempre holomórficas, onde se verifica sempre

$$\partial_+ \partial_- \tilde{\sigma}^{\pm(\sigma^+, \sigma^-)} = \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \right) \tilde{\sigma}^{\pm(\sigma^+, \sigma^-)} = 0$$

As reparametrizações $\tilde{\tau}(\sigma, \tau)$ e $\tilde{\sigma}(\sigma, \tau)$ satisfazem as mesmas equações que $X^\mu(\sigma, \tau)$. Logo, temos a liberdade de escolher um calibre tal que uma das coordenadas internas (σ, τ) da folha de universo seja igual a um dos campos X^μ . Escolhemos identificar a coordenada do cone de luz com o parâmetro τ

$$X^+ = x^+ + \frac{1}{2\pi T} p^+ \tau \quad (2.35)$$

onde trocamos no espaço de coordenadas X^0 e X^1 por $X^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^0 \pm X^1)$. O produto escalar covariante se torna: $p^\mu X_\mu = p^+ X^- + p^- X^+ - p^i X^i$, onde os termos com índices i dobrados são somados para $i = 2, \dots, D$. Utilizando os vínculos em (2.27) e a definição de X^+ somos capazes de determinar x'^- , p^- e α_n^- , coeficientes da expansão de X^- .

Recordando (2.25),

$$p_\tau \cdot X' = p_\tau^+ X'^- + p_\tau^- X'^+ - p_\tau^i X'^i = 0, \quad i = 2, \dots, D$$

mas $X'^+ = 0$, $p_\tau^+ = p^+/2\pi$ e de (2.29) $p_\tau^i = T\dot{X}^i$. Logo,

$$X'^- = \frac{2\pi T}{p^+} \dot{X}^i X'^i \quad (2.36)$$

A outra equação em (2.25) fornece

$$p_\tau \cdot p_\tau + T^2 X' \cdot X' = 0 = 2p_\tau^+ p_\tau^- - p_\tau^i p_\tau^i + T^2 (2X'^+ X'^- - X'^i X'^i)$$

e portanto

$$\dot{X}^- = \frac{p_\tau^-}{T} = \frac{\pi T}{p^+} (X'^i X'^i + \dot{X}^i \dot{X}^i) \quad (2.37)$$

Somando (2.36) e (2.37)

$$X'^- + \dot{X}^- = \frac{\pi T}{p^+} (X'^i + \dot{X}^i)^2 \quad (2.38)$$

Se expressarmos X^- numa expansão de Fourier

$$X^-(\tau, \sigma) = x^- + \frac{p^- \tau}{2\pi T} + \frac{i}{\sqrt{2\pi T}} \sum \frac{\alpha_n^-}{n} e^{-in\tau} \cos n\tau \quad \text{para a corda aberta} \quad (2.39)$$

e para a corda fechada

$$\begin{aligned} X_D^-(\tau - \sigma) &= x_D^- + \frac{\alpha_0^-}{2\pi T} \tau + \frac{i}{\sqrt{2\pi T}} \sum \frac{\alpha_n^-}{n} e^{-in(\tau \pm \sigma)} \\ X_E^-(\tau + \sigma) &= x_E^- + \frac{\tilde{\alpha}_0^-}{2\pi T} \tau + \frac{i}{\sqrt{2\pi T}} \sum \frac{\tilde{\alpha}_n^-}{n} e^{-in(\tau \pm \sigma)} \end{aligned} \quad (2.40)$$

e aplicando a expansão de X^- e X^i em (2.38), igualando os coeficientes de igual expoente, determinamos

$$\alpha_m^- = \frac{\sqrt{2\pi T}}{2p^+} \sum_n \alpha_n^i \alpha_{m-n}^i \quad \text{para a corda aberta} \quad (2.41)$$

e

$$\alpha_m^- = \frac{\sqrt{2\pi T}}{p^+} \sum_n \alpha_n^i \alpha_{m-n}^i; \quad \tilde{\alpha}_m^- = \frac{\sqrt{2\pi T}}{p^+} \sum_n \tilde{\alpha}_n^i \tilde{\alpha}_{m-n}^i \quad \text{para a corda fechada} \quad (2.42)$$

e em especial para a corda fechada, encontramos que

$$\tilde{\alpha}_0^- = \alpha_0^- \quad (2.43)$$

Agora podemos realizar a quantização estabelecendo os comutadores entre os campos, para $i, j = 2..D$

$$[x^-, p^+] = -i, \quad [X^i(\sigma, \tau), p_\tau^j(\sigma', \tau)] = i\delta_{ij} \delta(\sigma - \sigma') \quad (2.44)$$

As implicações destas relações para as cordas abertas e fechadas são semelhantes e as trataremos em paralelo, acrescentando as contribuições dos operadores anti-holomórficos $\tilde{\alpha}_n^\mu$ existentes nas cordas fechadas. Aplicando a expansão de Fourier de

X^i e $p_\tau^j = T\dot{X}^j$ obtemos a relação de comutação

$$\begin{aligned} [x^i, p^j] &= i\delta_{ij}, \quad [\alpha_n^i, \alpha_m^j] = n\delta_{ij} \delta_{n+m} \quad \text{e em adicional,} \\ [\tilde{\alpha}_n^i, \tilde{\alpha}_m^j] &= n\delta_{ij} \delta_{n+m}, \quad [\tilde{\alpha}_n^i, \alpha_m^j] = 0 \quad \text{para as cordas fechadas} \end{aligned} \quad (2.45)$$

observando que para os operadores $\alpha_{-n}^j = (\alpha_n^j)^\dagger$ como consequência da relação clássica (2.33). Semelhante a uma série de osciladores harmônicos, α_n^j são os operadores de criação ($n < 0$) e aniquilação ($n > 0$) de modo $|n|$ de vibração da corda, o mesmo valendo para os operadores antiholomórficos $\tilde{\alpha}_n^j$.

O estado fundamental da corda aberta é tal que

$$\begin{aligned} \alpha_n^j |0; k\rangle &= 0, \quad n > 0 \\ p^j |0, k\rangle &= k^j |0; k\rangle \end{aligned} \quad (2.46)$$

enquanto que a corda fechada tem números quânticos a mais relativo aos modos anti-holomórficos

$$\begin{aligned} \alpha_n^j |0, 0; k\rangle &= 0, \quad \tilde{\alpha}_n^j |0, 0; k\rangle = 0 \quad n > 0 \\ p^j |0, 0; k\rangle &= k^j |0, 0; k\rangle \end{aligned} \quad (2.47)$$

Continuando a quantização, vamos determinar o operador Hamiltoniano. Como as variáveis X^+ e X^- não são dinâmicas, O Hamiltoniano no calibre do cone de luz se torna

$$\begin{aligned} H &= \frac{T}{2} \int d\sigma \left((\dot{x}^i)^2 + (x'^i)^2 \right) = \frac{1}{2T} \int d\sigma \left((p_\tau^i)^2 + T^2 (x'^i)^2 \right) \quad \text{e usando os vínculos,} \\ &= \frac{p^+ p^-}{2\pi T} \end{aligned} \quad (2.48)$$

Colocando o Hamiltoniano em função dos operadores alfa,

$$H = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \alpha_m^i \alpha_{-m}^i & \text{para a corda aberta,} \\ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \alpha_m^i \alpha_{-m}^i + \tilde{\alpha}_m^i \tilde{\alpha}_{-m}^i & \text{para a corda fechada} \end{cases} \quad \text{e} \quad (2.49)$$

onde $\alpha_0^i = p^i/\sqrt{2\pi T}$. Se aplicarmos o ordenamento criação-aniquilação no Hamiltoniano, afim de evitarmos ambiguidades, temos

$$H = \sum_{m=1}^{+\infty} : \alpha_{-m}^i \alpha_m^i : + \frac{p^i p^i}{4\pi T} - a$$

para a corda aberta e

$$H = 2 \left(\sum_{m=1}^{+\infty} : \alpha_{-m}^i \alpha_m^i : + : \tilde{\alpha}_{-m}^i \tilde{\alpha}_m^i : \right) + \frac{p^i p^i}{2\pi T} - 2a$$

$$\text{para a corda fechada, com } a = -\frac{D-2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n \quad (2.50)$$

O parâmetro a assim definido é infinito. Ele necessita passar por um processo de regularização para que um valor físico possa ser extraído dele. Seu valor é importante para a determinação da energia e massa da partícula no estado fundamental. A regularização deste termo se procede multiplicando um termo de atenuação de altos modos

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n &\rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} n \exp(-n\lambda) = -\frac{d}{d\lambda} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\lambda} \right\} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} e^{-\lambda} (1 - e^{-\lambda})^{-2} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{12} + O(\lambda) \right) \end{aligned} \quad (2.51)$$

A adição de um contratermo no Hamiltoniano

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \lambda \exp(-2n\lambda)$$

evanescente no limite $\lambda \rightarrow 0$, mas cuja contribuição de energia cancela o termo infinito λ^{-2} , mostra que este infinito não tem significado real e pode eliminado. Logo,

$$a = \frac{D-2}{24} \quad (2.52)$$

Os termos sob ordenamento normal em (2.50) realizam a contagem dos números quânticos de cada modo multiplicados pela energia deste modo, totalizando a energia

da partícula a menos da contribuição do estado fundamental. Para simplificar, designemos

$$N = \sum_{m=1}^{+\infty} : \alpha_{-m}^i \alpha_m^i : \quad \text{e} \quad \tilde{N} = \sum_{m=1}^{+\infty} : \tilde{\alpha}_{-m}^i \tilde{\alpha}_m^i : \quad (2.53)$$

Podemos obter as massas dos estados da corda a partir dos autovalores do operador M^2 . Utilizando (2.48)

$$M^2 = 2p^+ p^- - p^i p^i = 2\pi T (N - a) \quad \text{na corda aberta e,} \quad (2.54)$$

$$= 4\pi T (N + \tilde{N} - 2a) \quad \text{na corda fechada} \quad (2.55)$$

Conseqüentemente, para o estado fundamental da corda, o autovalor da massa ao quadrado é

$$m^2 = -2\pi T a \quad (\text{corda aberta}) \quad (2.56)$$

$$= -8\pi T a \quad (\text{corda fechada}) \quad (2.57)$$

À primeira vista, gostaríamos de impor $a < 0$, mas este valor será determinado na recuperação da simetria de Lorentz e infelizmente $a < 0$ não se sucederá. Por isso enquanto estivermos falando de cordas bosônicas teremos de conviver com partículas de massa quadrática negativa, o que significa que as cordas são partículas com velocidade acima da luz em seu estado fundamental. Estes tipos de partículas, denominadas táquions, até hoje nunca foram encontrados na natureza e sua existência invalidaria a Relatividade Geral. A eliminação dos táquions do espéctro das cordas se resolverá nas supercordas, que está além do escopo deste trabalho.

O estado fundamental da corda é freqüentemente referenciado como estado de vácuo. Esta designação faz sentido no contexto em que notadamente existe uma teoria de campos de 2 dimensões na folha de universo da corda. Nesta teoria de campos, os operadores alfa realizam a criação e destruição de partículas em seus respectivos modos e os números quânticos deste estado descreveriam a quantidade de partículas em cada modo n . Nesse aspecto, o estado fundamental da corda descreveria um vácuo (ausência de partículas) com sua energia residual.

Por outro lado, não podemos nos confundir com a realidade física que é expressa

no espaço-tempo. Neste, a corda nunca deixa de existir e não há criação ou destruição de cordas. Os operadores alfa atuam somente nos modos de vibração da corda e cada estado da corda possui propriedades distintas e por isso associamos a cada diferente estado da corda uma partícula diferente encontrada na natureza. Por enquanto ainda não existe uma teoria de campos de corda consistente, portanto atenção é necessária ao significado da palavra vácuo designando o estado fundamental da corda.

Realizada a quantização no calibre do cone de luz, precisamos verificar as condições para a existência da invariância de Lorentz, verificando se a álgebra de Lorentz é satisfeita para os geradores de Lorentz da teoria. Vamos agora trabalhar somente com a corda aberta, pois o resultado final é idêntico ao obtido com a corda fechada. Os geradores de Lorentz são as cargas conservadas das correntes de simetria obtidas pelo Teorema de Noether:

$$M^{\mu\nu} = \int_0^l d\sigma \quad x^\mu p_\tau^\nu - x^\nu p_\tau^\mu = T \int_0^l d\sigma \quad x^\mu \dot{x}_\tau^\nu - x^\nu \dot{x}_\tau^\mu \quad (2.58)$$

e a correspondente álgebra de Lorentz que se realiza classicamente é

$$[M^{\mu\nu}, M^{\zeta\rho}] = i\eta^{\nu\zeta} M^{\mu\rho} - i\eta^{\mu\zeta} M^{\nu\rho} - i\eta^{\nu\rho} M^{\mu\zeta} + i\eta^{\mu\rho} M^{\nu\zeta} \quad (2.59)$$

O gerador $M^{\mu\nu}$ expandido nos operadores alfa se torna

$$M^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^\mu \alpha_n^\nu - \alpha_{-n}^\nu \alpha_n^\mu) \quad (2.60)$$

sendo os resultados (2.58), (2.59) e (2.60) escritos na parametrização covariante do espaço-tempo. Na parametrização do cone de luz, classicamente teríamos os geradores M^{-i} na forma

$$M^{-i} = \frac{1}{\sqrt{2}} (M^{0i} - M^{1i}) \quad (2.61)$$

e que aplicado na álgebra de Lorentz produziria,

$$[M^{-i}, M^{-j}] = 0 \quad (2.62)$$

Porém isto não ocorre quando trabalhamos quanticamente utilizando M^{-i} expandido em operadores alfa. M^{-i} envolve α_n^- que é quadrático em α_n^i e portanto M^{-i} é cúbico em α_n^i , que acarreta em um problema de comutação entre estes operadores. A introdução do ordenamento faz aparecer parcelas com o termo a (2.52) que não se cancelam. O resultado do operoso cálculo dos comutadores é

$$[M^{-i}, M^{-j}] = \frac{2}{(p^+)^2} \sum_{m=1}^{\infty} \left[m(1 - \frac{1}{24}(D-2)) + \frac{1}{m}(\frac{1}{24}(D-2) - a) \right] (\alpha_{-m}^i \alpha_m^j - \alpha_{-m}^j \alpha_m^i) \quad (2.63)$$

Portanto a invariância de Lorentz só é recuperada para

$$a = 1 \quad e \quad D = 26 \quad (2.64)$$

anulando o lado direito de (2.63), em concordância com a álgebra de Lorentz.

Os outros geradores de Lorentz não apresentam anomalia alguma. Em M^{ij} as constantes de ordenamento são canceladas pela anti-simetria do gerador e em M^{+i} $\alpha_n^+ = 0$ apaga a contribuição dos operadores modais alfa neste gerador.

A esse valor fixo da dimensão espaço-temporal D , necessário para a manutenção da simetria de Lorentz e Weyl (cap. 4) damos o nome de dimensão crítica. Cordas não críticas, isto é, que existem em espaço de dimensão não crítica, necessitam da adição de um campo extra para contrabalancear a perda de simetria destas e serão apresentadas no capítulo 5.

Existe um esquema para reduzir a dimensão crítica D utilizando o método de paraquantizaçãoo calibre do cone de luz [13]. A paraquantização consiste numa flexibilização do método canônico de quantização pela definição dos em termos de q paraoperadores com simetria interna $SO(q)$:

$$X^i = \sum_{\alpha=1}^q X^{i\alpha}$$

e determinação das relações de comutação destes. Por esse método a dimensão crítica alcança o valor

$$D = 2 + \frac{24}{q}$$

e portanto para $q = 12$, $D = 4$. O valor de a se mantém inalterado. Por mais interessante que seja o resultado, o significado físico dos paraoperadores não é bem compreendido e tal método não é muito citado na literatura clássica de cordas.

Como consequência do resultado ($a = 1$), voltamos a afirmar que, segundo (2.56) e (2.57), os estados fundamentais das cordas aberta e fechada se tornam taquiônicos. O primeiro estado excitado da corda aberta no modo mais baixo ($n = 1$)

$$\alpha_{-1}^i |0; p\rangle \quad (2.65)$$

é um vetor de polarização i transversa a propagação no cone de luz e de massa zero (2.56) e por isso o identificamos com o fóton.

Na corda fechada, a restrição clássica (2.43) impõe que os estados da corda sejam tais que $N|\alpha\rangle = \tilde{N}|\alpha\rangle$ e o primeiro estado da corda de menor energia é do tipo

$$C_{ij} \alpha_{-1}^i \tilde{\alpha}_{-1}^j |0, 0; p\rangle \quad (2.66)$$

que possui massa zero. Existem 24^2 estados que combinados pelos coeficientes C_{ij} podem gerar estados de partículas de 3 tipos: grávitons, dilaçons e o estado tensor antisimétrico. Uma matriz $(C)_{24 \times 24}$ pode ser decomposta em 3 termos:

$$(C) = (G) + (B) + \Phi(I) \quad (2.67)$$

onde $\Phi = Tr(C)/24$ e (I) é a matriz identidade; (G) é uma matriz simétrica de traço nulo e (B) é uma matriz antisimétrica. Os estados do tipo

$$G_{ij} \alpha_{-1}^i \tilde{\alpha}_{-1}^j |0, 0; p\rangle \quad (2.68)$$

são os grávitons, por serem de spin 2, simétricos e sem massa, tal como é requerido pela gravitação quântica para a quantização da métrica do espaço-tempo.

O estado definido por um único escalar

$$\Phi \alpha_{-1}^i \tilde{\alpha}_{-1}^i |0, 0; p\rangle \quad (2.69)$$

é definido como o dilaçon.

E o estado definido por uma matriz antisimétrica

$$B_{ij}\alpha_{-1}^i\tilde{\alpha}_{-1}^j|0, 0; p\rangle \quad (2.70)$$

é chamado de estado tensor antisimétrico.

2.3.2 Quantização Covariante

Na quantização covariante, partimos do estabelecimento das relações de comutação nos campos no calibre covariantes a despeito dos vínculos da teoria.

$$\begin{aligned} [X^\mu(\sigma, \tau), p_\tau^\nu(\sigma', \tau)] &= -i\eta^{\mu\nu}\delta(\sigma - \sigma') \\ [X^\mu(\sigma, \tau), X^\nu(\sigma', \tau)] &= [p_\tau^\mu(\sigma, \tau), p_\tau^\nu(\sigma', \tau)] = 0 \end{aligned} \quad (2.71)$$

onde designamos $\eta^{\mu\nu}(+ - - \dots - -)$ a métrica de Minkowski no espaço-tempo de D dimensões. Temos liberdade para escolher a métrica interna e fazemos $g_{ab} = \eta_{ab}$, o que acarreta nos mesmos vínculos $T_{ab} = 0$ que em (2.27). Conforme dissemos anteriormente, os vínculos não podem ser estabelecidos sobre os operadores e serão condição de diferenciação dos estados físicos dos estados fantasmas.

$$\langle \text{fís} | T_{ab} | \text{fís} \rangle = 0 \quad (2.72)$$

A equação de movimento da corda é a mesma que em (2.29) e as condições de contorno continuam sendo (2.22) e (2.31) para respectivamente cordas abertas e fechadas. Como resultado, o campo X^μ segue a solução (2.30) e sua expansão de Fourier segue (2.33). Fazendo uso dessa expansão a relação de comutadores no calibre covariante implica que

$$[x^\mu, p^\nu] = -i\eta^{\mu\nu} \quad [\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = -m\delta_{m+n}\eta^{\mu\nu} \quad (2.73)$$

e em adicional para a corda fechada,

$$[\tilde{\alpha}_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu] = -m\delta_{m+n}\eta^{\mu\nu} \quad [\alpha_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu] = 0 \quad (2.74)$$

De forma equivalente à quantização no calibre do cone de luz, poderíamos considerar α_m^μ operadores de criação e aniquilação para $m < 0$ e $m > 0$ respectivamente.

Porém o comutador dos operadores com índice covariante zero possui o sinal invertido que leva ao surgimento de estados de norma negativa, ditos fantasmas. Por exemplo, numa corda aberta ($m > 0$),

$$\langle 0; p | \alpha_m^0 \alpha_{-m}^0 | 0; p \rangle = \langle 0; p | [\alpha_m^0, \alpha_{-m}^0] | 0; p \rangle = -m \quad (2.75)$$

Vamos desenvolver as condições (2.72) em forma de operadores para a aplicarmos sobre os estados físicos da corda. De agora em diante trabalhamos somente com a corda fechada pois a corda aberta possui resultados semelhantes. Dividindo X^μ em campos que se deslocam para a direita $X_D^\mu(\tau - \sigma)$ e para esquerda $X_E^\mu(\tau + \sigma)$, e usando que

$$(\partial_\tau + \partial_\sigma)X_D^\mu = 0 \rightarrow \dot{X}_D^\mu = -X_D^{\mu'} \quad (2.76)$$

$$(\partial_\tau - \partial_\sigma)X_E^\mu = 0 \rightarrow \dot{X}_E^\mu = X_E^{\mu'} \quad (2.77)$$

obtemos no lugar das equações vínculos

$$\left. \begin{array}{l} \dot{X} \cdot X' = \dot{X}_D^2 + \dot{X}_E^2 = 0 \\ \text{e} \\ \frac{1}{2}(\dot{X}^2 + X'^2) = \dot{X}_D^2 - \dot{X}_E^2 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \dot{X}_D^2 = \dot{X}_E^2 = 0 \quad (2.78)$$

Podemos expandir \dot{X}_D^2 em série exponencial,

$$\dot{X}_D^2 = -\frac{1}{4\pi T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} L_m e^{-im(\tau-\sigma)} \quad (2.79)$$

O lado esquerdo da equação acima pode ser refeito substituindo X^μ pela sua expansão (2.32). Os coeficientes L_m ficam portanto determinados

$$L_m = -\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \cdot \alpha_{m-n} \quad (2.80)$$

escrito em notação de produto escalar covariante. Analogamente,

$$\dot{X}_E^2 = -\frac{1}{4\pi T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{L}_m e^{-im(\tau-\sigma)} \quad (2.81)$$

e

$$\tilde{L}_m = -\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\alpha}_n \cdot \tilde{\alpha}_{m-n} \quad (2.82)$$

onde

$$\alpha_0^\mu = \frac{p^\mu}{2\sqrt{2\pi T}} \quad (2.83)$$

Por consequência de (2.79) e (2.81), os vínculos clássicos (2.78) aplicados nos estados implicam que para L_m e \tilde{L}_m transformados em operadores,

$$L_m |fís\rangle = \tilde{L}_m |fís\rangle = 0 \quad \text{para } m > 0 \quad (2.84)$$

O caso $m < 0$ está considerado na equação acima uma vez que $L_m = L_{-m}^\dagger$ atua sobre o bra de (2.72), compondo a mesma equação acima, em outra forma:

$$\langle fís|L_m^\dagger = \langle fís|\tilde{L}_m^\dagger = 0 \quad \text{para } m > 0 \quad (2.85)$$

Para $m = 0$ voltamos a ter que definir um ordenamento entre os operadores. Escolhendo o ordenamento criação-destruição, precisamos modificar (2.84) para

$$(L_0 - a)|fís\rangle = (\tilde{L}_0 - a)|fís\rangle = 0 \quad (2.86)$$

sendo a novamente uma constante de ordenamento. Escrevendo L_0 por extenso,

$$L_0 = -\frac{1}{2}\alpha_0^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n = \frac{p^2}{8\pi T} - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n \quad (2.87)$$

com resultado análogo para \tilde{L}_0 . O espectro de massa dos estados físicos $M^2 = p^2$ é

por conseguinte,

$$M^2 = -8\pi T \left(a + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n \right) = -8\pi T \left(a + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_{-n} \cdot \tilde{\alpha}_n \right) \quad (2.88)$$

Note que a equação acima oferece o mesmo espectro de massa que em (2.55) para $a = 1$.

Trabalhando-se com a relação de comutação dos operadores alfa, pode-se chegar a álgebra de Virasoro com extensão central

$$[L_m, L_m] = (m - n)L_{m+n} + \frac{D}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n} \quad (2.89)$$

ou seja, $\{L_m\}$ são geradores de Virasoro.

Estados quaisquer que satisfazem a relação (2.84) e (2.86), considerados estados físicos, só são livres de possuir norma negativa para $a = 1$ e $1 \leq D \leq 26$ ou $a < 1$ e $1 \leq D \leq 25$, mostrado por Brower, Goddard, Thorn e outros [14, 15, 16]. Este resultado da quantização covariante é uma condição menos restritiva que a imposição $a = 1$ e $D = 26$ na quantização no cone de Luz (2.64).

Em adicional, conseguimos implementar uma quantização com um número de variáveis independentes maior que do que no sistema clássico, sujeito aos vínculos (2.27). Em compensação houve uma redução do espaço dos estados de Fock na quantização covariante em relação a quantização no cone de luz.

Um exemplo de interesse na quantização covariante é mostrarmos que os fótons longitudinais estão excluídos, tal como acontece na quantização no cone de luz. Basta verificarmos que eles tem norma zero e portanto não são estados físicos. O fóton longitudinal é uma excitação de modo $n = 1$ do estado fundamental de uma corda aberta na direção do momento k , com este no cone de luz ($k^2 = 0$). Ou seja,

$$|\text{fóton}\rangle = p \cdot \alpha_{-1}|0; k\rangle = k \cdot \alpha_{-1}|0; k\rangle \quad (2.90)$$

e sua norma será

$$\begin{aligned} \langle \text{fóton} | \text{fóton} \rangle &= \langle 0; k | \alpha_1 \cdot k k \cdot \alpha_{-1} | 0; k \rangle = \\ &= k^2 \langle 0; k | [\alpha_1^\mu, \alpha_{-1\mu}] | 0; k \rangle = 0 \end{aligned} \quad (2.91)$$

Em relação a simetria de Lorentz, esta é preservada e pode-se mostrá-la sem dificuldades, através da obediência dos geradores $M^{\mu\nu}$ à álgebra de Lorentz. Nos limitaremos a comentar que pela inexistência de operadores α^- , $M^{\mu\nu}$ possui entre os termos em α^μ apenas os quadráticos, cujas constantes de ordenamento são eliminadas pela anti-simetria de $M^{\mu\nu}$ e nenhuma anomalia quântica é acrescentada à álgebra de Lorentz.

Capítulo 3

Teoria de Campos Conformes

Sabemos que classicamente existe uma simetria conforme na folha de universo e é de nosso desejo (por razões a serem esclarecidas no próximo capítulo) que essa simetria seja preservada após a quantização da corda. Neste capítulo vamos estudar um processo de quantização numa condição em que a simetria conforme (Weyl×Difeomorfismo) é claramente preservada e veremos suas propriedades no espaço de operadores quânticos. Esta condição é a restrição a uma métrica plana para a folha de universo.

3.1 CFT no Plano Complexo

A folha de universo de uma corda aberta, conexa, sem furos ou alças é conformalmente equivalente ao plano complexo \mathcal{C} (ver sec. 4.6.1). Podemos ver isso transformando a métrica da folha de universo por meio de difeomorfismo e transformações de Weyl na métrica da superfície plana. Essa superfície plana possui uma estrutura complexa ao relacionarmos as transformações de rotação com as rotações no plano complexo.

Escolhida a métrica plana para a folha de universo no espaço de Minkowski,

$$g_{00} = -g_{11} = -1; \quad g_{01} = g_{10} = 0 \quad (3.1)$$

vamos aplicar uma transformação para o espaço Euclidiano $\sigma^2 = i\sigma^0$ que possui maiores vantagens para o cálculo e cujos resultados são equivalentes, por extensão

analítica, aos resultados no espaço de Minkowski. A métrica Euclidiana é então do tipo $(+, +)$ δ_{ab} com $a, b = 1, 2$ e a ação de Polyakov (2.10)

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int (\partial_1 X^\mu \partial_1 X_\mu + \partial_2 X^\mu \partial_2 X_\mu) \quad (3.2)$$

A transformação das coordenadas da folha de universo para as coordenadas do plano complexo se dá segundo: $z = \sigma^1 + i\sigma^2$ e $\bar{z} = \sigma^1 - i\sigma^2$ ($\sigma^{1,2}$ parâmetros internos da folha de universo), e usando a notação $\partial = \partial_z$ e $\bar{\partial} = \partial_{\bar{z}}$, a ação de Polyakov se torna,

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z \partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu \quad (3.3)$$

Podemos ver que sua equação clássica de movimento será:

$$\partial \bar{\partial} X^\mu = 0 \quad (3.4)$$

De (3.4) concluímos que os campos $X^\mu(z, \bar{z})$ são a soma de funções holomórficas e antiholomórficas de z , conforme vimos em capítulo anterior (2.17). Rearranjando as derivações parciais, percebe-se que $\partial X(z)$ e $\bar{\partial} X(\bar{z})$ são funções holomórficas e anti-holomórficas de z respectivamente e por isso omitiremos a notação (z, \bar{z}) de parâmetros.

A quantização na folha de universo segue da substituição das variáveis clássicas por operadores. Tais operadores poderão compor uma ação conformalmente invariante e possuir determinados pesos sob transformação conforme. Para encontrar as propriedades dos operadores precisamos fazer um estudo sobre os geradores do grupo de simetria conforme.

Veremos a seguir que o grupo de simetria conforme age segundo o espaço de transformações holomórficas e anti-holomórficas

$$z' = f(z) \text{ e } \bar{z}' = k(\bar{z}) \quad \text{respectivamente.}$$

Por haver um mesmo comportamento entre as transformações holomórficas e anti-holomórficas, trataremos de agora em diante apenas das holomórficas, fazendo menção ao anti-holomorfismo quando necessário.

Observamos uma condição para a simetria conforme ao aplicarmos a variação da ação por dilatação da métrica:

$$\text{transformação: } g_{ab} = e^\omega \hat{g}_{ab} \quad (3.5)$$

$$\frac{\delta S}{\delta \omega} = \frac{\delta g_{ab}}{\delta \omega} \frac{\delta S}{\delta g_{ab}} \propto g_{ab} T^{ab} = T^a_a \quad (3.6)$$

Logo, o traço do tensor energia-momento da corda precisa ser nulo. Isso se traduz em coordenadas do plano complexo:

$$T^a_a = T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = 0 \quad (3.7)$$

Portanto as componentes do tensor energia-momento serão somente duas:

$$T_{zz}(z) = T(z) \quad \text{e} \quad T_{\bar{z}\bar{z}}(\bar{z}) = \bar{T}(\bar{z})$$

correntes geradoras de transformações holomórficas e antiholomórficas, respectivamente.

O teorema de Noether nos mostra que a invariância da ação a transformações infinitesimais dos campos implica na conservação de correntes das simetrias j , assim conhecidas por respeitarem, semelhante a corrente de cargas elétricas, a equação de conservação:

$$\nabla \cdot j = 0$$

As correntes de dilatação (ou corrente de escala) e translação, existentes na folha de universo são:

$$\begin{aligned} \text{translação} \quad \delta z = \epsilon a \rightarrow j = T(z) \quad , \quad a = \text{constante} \\ \text{dilatação} \quad \delta z = \epsilon z \rightarrow j = zT(z) \end{aligned} \quad (3.8)$$

e para uma transformação conforme mais geral

$$\delta z = f(z) \rightarrow j = f(z)T(z) \quad (3.9)$$

A função analítica $f(z)$ pode ser escrita numa expansão da série de Laurent em

torno da origem:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{f_n}{z^{n-1}}$$

e o operador que transforma z seria:

$$\delta z = F(z)z = f(z) \rightarrow F(z) = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{f_n}{z^{n-1}} \right) \partial$$

O operador $F(z)$ é na verdade uma combinação de infinitos termos que são a base do grupo de operadores de transformação conforme,

$$L_n = z^{1-n} \partial \quad (3.10)$$

cuja álgebra de comutação é a bem conhecida álgebra de Virasoro:

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= [z^{1-m} \partial, z^{1-n} \partial] = (z^{1-m} \partial z^{1-n} - z^{1-n} \partial z^{1-m}) \partial = \\ &= (m-n) z^{1-m-n} \partial = (m-n) L_{m+n} \end{aligned} \quad (3.11)$$

com resultado análogo para os operadores anti-holomórficos \bar{L}_n e $[L_m, \bar{L}_n] = 0$ como se poderia naturalmente esperar. De uma forma mais geral, a corrente j transforma conformalmente outros campos (primários, a serem vistos) e a expressão de L_n é mais geral do que a apresentada (3.10), mas a álgebra de Virasoro acima se mantém válida a menos de uma extensão .

Até agora admitimos sem contestação a existência da simetria conforme. Para constatar a existência de simetria conforme numa folha de universo de métrica plana, precisamos verificar a condição (3.7). O Tensor energia-momento (2.15) de uma folha de universo com métrica plana se torna:

$$T_{ab} = \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu - \frac{1}{2} \delta_{ab} \partial_c X^\mu \partial^c X_\mu \quad (3.12)$$

que notadamente possui traço nulo

$$T^a_a = \delta^{ab} T_{ab} = T_{11} + T_{22} = 0$$

Há um porém: o tensor acima não está bem definido quanticamente devido a um problema de ordenamento de operadores atuando no mesmo ponto e que será tratado adiante. Mesmo assim o resultado é correto por haver cancelamento por subtração dos termos de ordenamento do tensor quântico.

3.2 A Identidade de Ward

Para sabermos como os operadores se transformam com a corrente de simetria $f(z)T(z)$, precisamos de uma relação semelhante a que conhecemos na mecânica quântica

$$\delta A = [G, A] \quad (3.13)$$

A preservação da corrente de simetria conforme obtida pelo teorema de Noether, é uma garantia da invariância da ação perante transformações conformes. Porém, nosso interesse é que haja preservação do valor esperado de um operador qualquer obtido através de inserção deste na ação quântica (ou funcional gerador ou integral):

$$\langle A \rangle = \int [dX] A \exp(-S) \quad (3.14)$$

onde, lembrando o formalismo de integração de caminho, não há operadores dentro da integral, mas valores numéricos. Ao aplicarmos a variação do valor esperado sob transformações conformes, os campos X^μ não se transformam. Caso contrário teríamos que considerar variações da medida de integração:

$$\begin{aligned} 0 = \delta \langle A \rangle &= \int [dX] \delta (A \exp(-S)) = \\ &= \langle \delta A \rangle - \langle A \delta S \rangle \end{aligned} \quad (3.15)$$

A variação da ação ocorre segundo a corrente de simetria $j = f(z)T(z)$:

$$\begin{aligned}\delta S &= \frac{1}{\pi} \int_R d^2\sigma \partial_\mu (f_\nu T^{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_R d^2z \bar{\partial} (f(z)T(z)) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz f(z)T(z)\end{aligned}\quad (3.16)$$

onde R é a região onde a corrente não se anula e C seu contorno. O resultado (3.16) assim exposto deve ser zero, pela conservação da corrente de simetria $\nabla j = 0$ e esperamos que isso se realize quanticamente, com $\langle \delta S \rangle = 0$, mas não necessariamente $\langle A\delta S \rangle$ se anula. Trabalhando com as equações (3.15) e (3.16), obtemos:

$$\langle \delta A(z_0) \rangle = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz f(z) \langle T(z)A(z_0) \rangle$$

sendo (z_0) no interior do contorno C . Caso (z_0) estivesse fora do contorno, poderíamos considerar variações infinitesimais tal que um novo contorno C' em torno de z_0 estivesse completamente exterior a C . Nessa região a corrente de simetria se anula e teríamos $\langle \delta A \rangle = 0$. Considerando que a equação acima é válida para quaisquer inserções de operadores, ela também deve ser válida no espaço de operadores

$$\delta A(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz f(z)T(z)A(z_0)\quad (3.17)$$

Tal equação é a identidade de Ward, adequada às nossas condições de trabalho. O termo do lado direito de (3.17), o resíduo de jA , é em outras palavras o termo z^{-1} da expansão de Laurent de jA e a inserção de operadores no interior de C é responsável pelos resíduos que antes não existiam. Portanto, nos será relevante, afim de obter a transformação conforme dos operadores, calcular o produto de operadores TA , dando especial atenção aos termos de singularidade (resíduos) deste produto. Um passo imediatamente anterior será determinar um tensor energia-momento bem definido no plano complexo.

3.3 Ordenamento Normal

Para preservar as simetrias clássicas, queremos que a equação de movimento (3.4) seja preservada. Quanticamente, o valor esperado de um operador é o limite clássico da variável clássica correspondente. No formalismo de integrais de caminho, o valor esperado de um funcional está descrito em (3.14). A equação de movimento que se realiza classicamente pelo caminho que extremiza a ação (ou está num ponto de sela desta) tem uma equação correspondente pela integração de caminho (3.14).

Para verificarmos a equação de movimento, façamos a derivação

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta X_\mu(z, \bar{z})} \langle 1 \rangle &= 0 = \int [dX] \frac{\delta}{\delta X_\mu(z, \bar{z})} \exp(-S) \\ &= - \int [dX] \exp(-S) \frac{\delta S}{\delta X_\mu(z, \bar{z})} \\ &= \frac{1}{\pi\alpha'} \langle \partial \bar{\partial} X^\mu(z, \bar{z}) \rangle \end{aligned} \quad (3.18)$$

A equação acima implica que no espaço de operadores,

$$\partial \bar{\partial} \hat{X}^\mu(z, \bar{z}) = 0 \quad (3.19)$$

O resultado em (3.18) não deve ser alterado se fizermos inserções em pontos distintos de (z, \bar{z}) .

$$\begin{aligned} 0 &= \int [dX] \frac{\delta}{\delta X_\mu(z, \bar{z})} [\exp(-S) X^\nu(z', \bar{z}')] \\ &= - \int [dX] \exp(-S) \frac{\delta S}{\delta X_\mu(z, \bar{z})} X^\nu(z', \bar{z}') + \int [dX] \exp(-S) \eta^{\mu\nu} \delta^2(z - z', \bar{z} - \bar{z}') \\ &= \frac{1}{\pi\alpha'} \partial \bar{\partial} \langle X^\mu(z, \bar{z}) X^\nu(z', \bar{z}') \rangle + \langle \eta^{\mu\nu} \delta^2(z - z', \bar{z} - \bar{z}') \rangle \\ &\rightarrow \partial \bar{\partial} \langle X^\mu(z, \bar{z}) X^\nu(z', \bar{z}') \rangle = -\pi\alpha' \langle \eta^{\mu\nu} \delta^2(z - z', \bar{z} - \bar{z}') \rangle \end{aligned} \quad (3.20)$$

Note que as derivadas parciais acima são no ponto z e \bar{z} respectivamente.

De fato, para dada ação em questão, um cálculo rigoroso da função de Green

de 2 pontos de campos escalares nos fornece:

$$\langle X^\mu(z, \bar{z}) X^\nu(w, \bar{w}) \rangle = -\frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu\nu} \ln |z - w|^2 \quad (3.21)$$

o que confirma o resultado anterior. Isso mostra que a função correlação de 2 pontos não é bem definida quando esses 2 pontos coincidem. É um problema conhecido da teoria de campos que é corrigido por um ordenamento dos operadores na função de Green. No caso, definimos o ordenamento normal:

$$: X^\mu(z, \bar{z}) X^\nu(w, \bar{w}) := X^\mu(z, \bar{z}) X^\nu(w, \bar{w}) + \frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu\nu} \ln |z - w|^2 \quad (3.22)$$

e conseqüentemente,

$$\partial \bar{\partial} : X^\mu(z, \bar{z}) X^\nu(z', \bar{z}') := 0 \quad (3.23)$$

Precisamos estender essa idéia de ordenamento normal para o caso de produto de mais de 2 operadores e entre operadores ordenados. Intuitivamente basta substituímos (ordenarmos) cada par de operadores não ordenados pelo par ordenado mais a singularidade. Uma realização disso já existe e é aplicável em nosso caso: o teorema de Wick. Seja $F(X)$ um funcional de X , produto não ordenado de operadores.

$$: F := \exp \left(\frac{\alpha'}{4} \int d^2 z_1 d^2 z_2 \ln |z_{12}|^2 \frac{\delta}{\delta X^\mu(z_1, \bar{z}_1)} \frac{\delta}{\delta X_\mu(z_2, \bar{z}_2)} \right) F \quad (3.24)$$

No caso de um produto não ordenado de operadores ordenados, invertendo a expressão anterior e vinculando a a ordenação de pares com um termo de cada operador (F e G), temos:

$$: F :: G := \exp \left(-\frac{\alpha'}{4} \int d^2 z_1 d^2 z_2 \ln |z_{12}|^2 \frac{\delta}{\delta X_F^\mu(z_1, \bar{z}_1)} \frac{\delta}{\delta X_{G\mu}(z_2, \bar{z}_2)} \right) : FG : \quad (3.25)$$

Uma vez definido o produto ordenado, podemos redefinir o tensor energia-momento $T(z)$. Classicamente, vimos que o tensor energia-momento se anula (2.15). Porém quanticamente isso não acontece. O tensor clássico (2.15) envolve o produto de variáveis no mesmo ponto. Quanticamente precisamos trabalhar com operadores

ordenados para que eles estejam bem definidos. Em variáveis do plano complexo, temos:

$$T(z) = -\frac{1}{\alpha'} : \partial X^\mu(z) \partial X_\mu(z) : \quad (3.26)$$

Agora, para encontrarmos os resíduos TA de (3.17), basta que expressemos este produto em função de sua forma ordenada (regular) mais singularidades. Os termos regulares não produzirão resíduo algum enquanto que o termo singular de ordem z^{-1} comporá o resíduo. Para exemplificar, obtemos a transformação do campo X^ν no ponto $(0, 0)$, a partir da corrente infinitesimal $\epsilon f(z)T(z)$ de transformação conforme. Expandindo TX em termos ordenados e singulares:

$$T(z)X^\nu(0, 0) = -\frac{1}{\alpha'} : \partial X^\mu \partial X_\mu : X^\nu(0, 0) = -\frac{1}{\alpha'} : \partial X^\mu(z) \partial X_\mu(z) X(0, 0) : + \frac{\partial X^\nu}{z}$$

Lembramos que $f(z)$ deve ser regular em torno da origem e podemos decompô-lo em série de Taylor. Aplicando o resultado acima em (3.17):

$$\delta X^\nu = (X'(\epsilon f(z)) - X(z))_{z \rightarrow 0} = \epsilon Res_{z \rightarrow 0} \left[\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) z^n \right) \frac{\partial X^\nu}{z} \right] = \epsilon f(0) \partial X^\nu$$

que é a expansão de Taylor de primeira ordem de $\delta z = \epsilon f(z)$, ou seja, a corrente de simetria conforme não realiza uma variação na forma de X , mas apenas uma reparametrização. Logo,

$$X'(z) = X(z) \quad (3.27)$$

o que caracteriza uma transformação conforme.

3.4 Campos primários

Entre os operadores existe uma classe especial chamada de campos primários ou conformes que se transformam da seguinte forma [17, 18]

$$\begin{aligned} z \rightarrow z' = w(z), \quad \bar{z} \rightarrow \bar{z}' = \bar{w}(\bar{z}) \\ \phi(z, \bar{z}) \rightarrow \phi'(w, \bar{w}) = (\partial_z w)^{-h} (\partial_{\bar{z}} \bar{w})^{-\bar{h}} \phi(z, \bar{z}) \end{aligned} \quad (3.28)$$

onde (h, \bar{h}) é o peso conforme de ϕ e $h + \bar{h}$ sua dimensão de escala. Pode-se verificar pela identidade de Ward, que o seu produto com o tensor energia-momento deve ser

$$T(z)\phi(0, 0) = \frac{h}{z^2}\phi(0, 0) + \frac{\partial\phi(0, 0)}{z} + \text{termos regulares} \quad (3.29)$$

onde o primeiro termo é responsável pelas transformações de escala e o segundo resulta da expansão de Taylor. Não há termos de maior singularidade por não respeitarem transformações segundo (3.28). Existe um número seletivo de campos primários e nem todo produto ordenado de campos primários é um campo primário, mas quando isso ocorre, seu peso conforme é a soma dos pesos conformes para cada componente, holomórfico e antiholomórfico.

Alguns campos primários usuais e seus respectivos pesos conformes são

$$\begin{aligned} dz &\equiv (-1, 0); \quad X^\mu \equiv (0, 0); \quad \partial X^\mu \equiv (1, 0); \\ \bar{\partial} X^\mu &\equiv (0, 1); \quad \partial^n \bar{\partial}^m X^\mu \equiv (n, m); \\ : \exp(ik \cdot X) : &\equiv \left(\frac{\alpha' k^2}{4}, \frac{\alpha' k^2}{4} \right); \end{aligned} \quad (3.30)$$

O peso conforme do operador exponencial em (3.30) é obtido expandindo o operador em série de Taylor de termos ordenados.

Indaguemos agora se o tensor energia-momento $T(z)$ é um campo primário ou não. Tal questão é relevante, uma vez que afetará a álgebra dos geradores do grupo conforme que compõe T . Novamente recorramos ao teorema de Wick para calcular este produto de operadores:

$$T(z)T(0) = \frac{D}{2z^4} + \frac{2}{z^2}T(0) + \frac{1}{z}\partial T(0) + : T(z)T(0) : \quad (3.31)$$

Neste caso D é o número de campos X^μ , isto é, a dimensão do espaço-tempo, resultante da contração dos índices de ambos os tensores. Numa situação mais geral o coeficiente de z^{-4} pode assumir outros valores e o denominamos de carga central.

Esta checagem mostra que o tensor energia-momento não é um campo primário. Mas se o fosse, seria de peso $(2, 0)$.

3.5 Álgebra de Virasoro

Como vimos na seção (3.1), as transformações conformes em duas dimensões possuem geradores que obedecem a álgebra de Virasoro. O tensor energia-momento responsável pelas transformações conformes nos operadores deveria ser a composição de geradores que obedecem a essa mesma álgebra. Porém, a existência da carga central na transformação conforme do próprio tensor energia-momento (ele não se transforma conformalmente) acarreta em modificações na álgebra inicial.

Vamos expandir o tensor energia-momento em série de Laurent em torno da origem

$$T(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{L_n}{z^{n+2}} \quad (3.32)$$

onde L_n são chamados geradores de Virasoro. Note também a conveniência da potência de z estar de acordo com o peso conforme de $T(z)$, mesmo ele não sendo um campo primário. Os geradores de Virasoro podem ser obtidos por método de resíduos

$$L_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz z^{n+1} T(z) = \text{Res}(z^{n+1} T(z))_{z=0} \quad (3.33)$$

para C um contorno em torno da origem. A álgebra de comutação destes operadores pode ser obtida após o entendimento do que significa a comutação no espaço de operadores locais em duas dimensões. Para que se estabeleça a analogia com a equação (3.13), é preciso determinar a carga conservada inerente a uma dada corrente

de transformação. No plano complexo, a carga conservada, dada a corrente j , é

$$Q = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz j(z) = \text{Res} j(z) \quad (3.34)$$

Juntando (3.13) e (3.17), onde sob transformações infinitesimais, o contorno se aproxima do ponto de inserção:

$$[Q, A(0, 0)] = \text{Res}_{z \rightarrow 0} j(z) A(0, 0) \quad (3.35)$$

Aplicando para o caso em que as cargas conservadas são os geradores de Virasoro,

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= \text{Res}_{z_1 \rightarrow z} z_1^{m+1} T(z_1) \text{Res}_{z \rightarrow 0} z^{n+1} T(z) \\ &= \text{Res}_{z \rightarrow 0} z^{n+1} \text{Res}_{z_1 \rightarrow z} z_1^{m+1} \left(\frac{c}{2(z_1 - z)^4} + \frac{2}{(z_1 - z)^2} T(z) + \frac{1}{z_1 - z} \partial T(z) \right) \\ &= \text{Res}_{z \rightarrow 0} z^{n+1} \left(\frac{c}{12} \partial^3 z^{m+1} + 2\partial z^{m+1} T(z) + z^{m+1} \partial T(z) \right) \\ &= \text{Res}_{z \rightarrow 0} \left(\frac{c}{12} (m^3 - m) z^{m+n-1} + 2(m+1) z^{m+n+1} T(z) + z^{m+n+2} \partial T(z) \right) \\ &\quad \text{o terceiro termo pode ser modificado por integração parcial} \\ &= \text{Res}_{z \rightarrow 0} \left(\frac{c}{12} (m^3 - m) z^{m+n-1} + (m-n) z^{m+n+1} T(z) \right) \\ &= (m-n) L_{m+n} + (m^3 - m) \frac{c}{12} \delta_{m+n} \end{aligned} \quad (3.36)$$

δ_{m+n} é um delta de Dirac. Chamamos a álgebra acima de álgebra de Virasoro estendida com carga central c .

3.6 Espectro da corda

Uma vez que somos capazes de determinar relações de comutação entre operadores, podemos partir para encontrar os modos de vibração da corda. Tratemos primeiramente da corda fechada. Sendo ∂X e $\bar{\partial} X$ campos primários de peso (1,0) e (0,1), podemos escrevê-los na expansão de Laurent:

$$\partial X^\mu(z) = -i \left(\frac{\alpha'}{2} \right)^{1/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_m^\mu}{z^{m+1}}, \quad \bar{\partial} X^\mu(\bar{z}) = -i \left(\frac{\alpha'}{2} \right)^{1/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_m^\mu}{\bar{z}^{m+1}} \quad (3.37)$$

onde os coeficientes da série de Laurent são

$$\alpha_m^\mu = \left(\frac{2}{\alpha'}\right)^{1/2} \oint \frac{dz}{2\pi} z^m \partial X^\mu(z) \quad \text{e} \quad \tilde{\alpha}_m^\mu = -\left(\frac{2}{\alpha'}\right)^{1/2} \oint \frac{d\bar{z}}{2\pi} \bar{z}^m \bar{\partial} X^\mu(\bar{z}) \quad (3.38)$$

Em especial verificamos que $\alpha_0^\mu = \tilde{\alpha}_0^\mu$ e que correspondem a carga conservada com respeito a corrente de simetria por translação $i\partial_a X^\mu/\alpha'$ na folha de universo. Tal carga é o momento linear. Considerando contribuições holomórficas e anti-holomórficas,

$$p^\mu = \frac{1}{2\pi i} \oint_C (dz j^\mu - d\bar{z} \bar{j}^\mu) = \left(\frac{2}{\alpha'}\right)^{1/2} \alpha_0^\mu \quad (3.39)$$

Integrando 3.37,

$$X^\mu(z, \bar{z}) = x^\mu - i\frac{\alpha'}{2} p^\mu \ln |z|^2 + i \left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{1/2} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{\alpha_m^\mu}{z^m} + \frac{\tilde{\alpha}_m^\mu}{\bar{z}^m} \right). \quad (3.40)$$

Usando o mesmo procedimento que em (3.36) de expansão dos comutadores na forma de resíduos, obtemos a relação de comutação dos operadores α_m^μ e $\tilde{\alpha}_m^\mu$,

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = [\tilde{\alpha}_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu] = m\delta_{m+n}\eta^{\mu\nu} \quad (3.41)$$

A relação de comutação mostra que estes operadores α_m^μ e $\tilde{\alpha}_m^\mu$ são exatamente os operadores de criação e aniquilação de estados de corda com modo de vibração $|m\rangle$, para $m < 0$ e $m > 0$ respectivamente. É interessante notar que na quantização conforme realizada não foi preciso estabelecer, isto é, impor a relação de comutação (3.41). Isto ocorre porque a passagem das relações clássicas para a quantização foi feita anteriormente quando definimos o ordenamento normal de operadores, que assim como a relação de comutação e os colchetes de Poisson, tende para o limite clássico quando os operadores se afastam e a influência da singularidade evanesce. Utilizando (3.41) e (3.39),

$$[x^\mu, p^\nu] = [X^\mu, p^\nu] = -\frac{i}{\alpha'} \text{Res} [(dz\partial X^\nu - d\bar{z}\bar{\partial} X^\nu)X^\mu] = i\eta^{\mu\nu} \quad (3.42)$$

Naturalmente, os operadores holomórficos comutam com os operadores anti-holomórficos.

A partir destes operadores podemos definir seus autovetores como estados da corda partindo do estado fundamental com momento k

$$\begin{aligned} \alpha_n^\mu |0, 0; k\rangle &= 0, & \tilde{\alpha}_n^\mu |0, 0; k\rangle &= 0, & n > 0 \\ p^\mu |0, 0; k\rangle &= (2/\alpha')^{1/2} \alpha_0^\mu |0, 0; k\rangle = k^\mu |0; k\rangle \\ \alpha_{-n}^\mu |0, 0; k\rangle &= |1n, 0; k\rangle, & \tilde{\alpha}_{-n}^\mu |0, 0; k\rangle &= |0, 1n; k\rangle, & n > 0 \end{aligned} \quad (3.43)$$

como já o fizemos nos processos de quantização anteriores (seção 2.3). Agora podemos calcular os geradores de Virasoro L_m em função dos operadores α_m^μ . Obtenhamos primeiramente o tensor energia-momento,

$$T(z) = -\frac{1}{\alpha'} : \partial X^\mu \partial X_\mu := \frac{1}{2} : \sum_{m,n} \frac{\alpha_m^\mu \alpha_{\mu n}}{z^{m+n+2}} : \quad (3.44)$$

e por (3.33) teremos

$$L_j = \frac{1}{2} Res \sum_{n,m} : \frac{\alpha_m^\mu \alpha_{\mu n}}{z^{m+n-j+1}} := \sum_{m=-\infty}^{\infty} : \frac{\alpha_m^\mu \alpha_{\mu j-m}}{2} : \quad (3.45)$$

Para $j \neq 0$, os operadores em (3.45) comutam. Não há problema de ordenamento e podemos esquecer o símbolo $::$. Porém, para $j = 0$, os operadores α_n^μ e $\alpha_{\mu-n}$ não comutam entre si e o ordenamento normal ainda não nos é bem conhecido entre estes operadores. Ordenemos o produto colocando operadores de criação a esquerda e igualemos ao ordenamento anterior acrescentando uma constante.

$$L_0 = \frac{1}{2} (\alpha_0)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n}^\mu \alpha_{\mu n}) + a = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \circ \frac{\alpha_{-m}^\mu \alpha_{\mu m}}{2} \circ + a \quad (3.46)$$

Aplicando L_0 sobre um estado fundamental da corda e fazendo uso da álgebra de Virasoro,

$$L_0 |0, 0; 0\rangle = \frac{1}{2} [L_1 L_{-1} - L_{-1} L_1] |0, 0; 0\rangle = 0 \quad (3.47)$$

concluimos que

$$a = 0 \tag{3.48}$$

Logo os dois tipos de ordenamento, normal :: (3.45) e criação-aniquiação \circledast (3.46), são equivalentes.

3.7 Operadores de Vértice

Existe uma outra parametrização do plano complexo que permite uma visualização natural das inserções pontuais de operadores no plano complexo, permitindo que as interpretemos como estados iniciais assintóticos da corda.

Para uma dada parametrização z , podemos encontrar $w = \sigma + i\tau$ tal que

$$z = \exp(-iw) = \exp(\tau - i\sigma) \tag{3.49}$$

Se associarmos σ à coordenada de posição na corda e τ à coordenada tempo, latitudes de tempo constante no plano w serão círculos concêntricos no plano z (fig.3.1). Para o caso da corda fechada, haverá uma periodicidade que podemos definir como $\sigma = \sigma + 2\pi$, que ocorrerá desta forma também z , e para a corda aberta σ será limitado.

Consideremos o caso da corda fechada. Esta percorre a folha de universo em coordenadas temporais $\tau \in (-\infty, \infty)$ com uma periodicidade em σ que faz a corda descrever um cilindro de comprimento infinito como folha de universo. Observando a evolução da corda ela tem origem no estado assintótico $\tau \rightarrow -\infty$, como se pode ver no plano w e que corresponde a um ponto no plano z . A corda segue a flecha do tempo $\tau \rightarrow \infty$ varrendo no plano z todo o plano complexo.

Na corda aberta, não existe a periodicidade e a limitação $\sigma \in [0, \pi]$ faz com que as linhas equitemporais tracem no semi-plano z , $\text{Im}z \geq 0$, semi-circunferências. Para que possamos realizar transformações holomórficas em torno da origem, precisamos definir o tensor energia momento para $\text{Im}(z) < 0$. Lembrando-nos que $\alpha_n^\mu = \tilde{\alpha}_n^\mu$ na

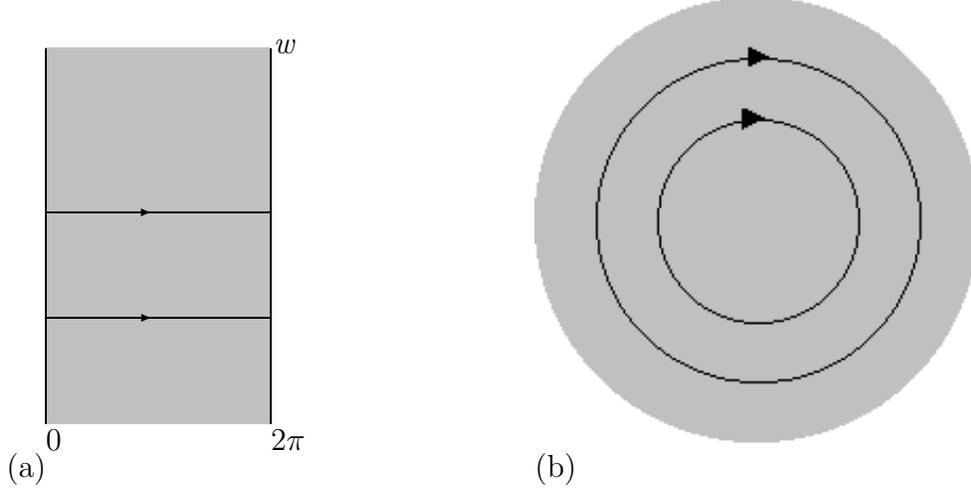


Figura 3.1: Plano complexo da corda fechada $c/$ linhas equitemporais. (a) Em coordenadas w , com as bordas identificadas umas as outras. (b) Em coordenadas z .

corda aberta e conseqüentemente $L_n = \tilde{L}_n$, podemos definir

$$T(z) = \bar{T}(\bar{z}), \quad \text{Im}(z) < 0 \quad (3.50)$$

que permite reescrever os geradores de virasoro como carga no plano z integrada da corrente de simetria, tal qual na corda fechada,

$$L_m = \frac{1}{2\pi T} \int_C (dz z^{m+1} T_{zz} - d\bar{z} \bar{z}^{m+1} T_{\bar{z}\bar{z}}) = \frac{1}{2\pi T} \oint dz z^{m+1} T_{zz} \quad (3.51)$$

onde a primeira integração é sobre um semi-círculo C e a segunda integração é sobre uma curva fechada, graças a definição (3.50) na região $\text{Im}(z) < 0$. Assim voltamos a trabalhar no plano complexo por inteiro.

Feito o mapeamento entre os planos w e z , vamos estudar o caso da corda fechada em que o plano w é um cilindro, identificadas as bordas $\sigma = 0$ e $\sigma = 2\pi$. Existe um outro mapeamento isomórfico que pode ser feito entre os estados assintóticos iniciais e operadores locais. Para a integração de caminho descrever a evolução do estado da corda, se necessita saber seu estado inicial quando $\text{Im}w \rightarrow -\infty$. No plano z isto corresponde a origem, o que é equivalente a conhecer os campos neste ponto,

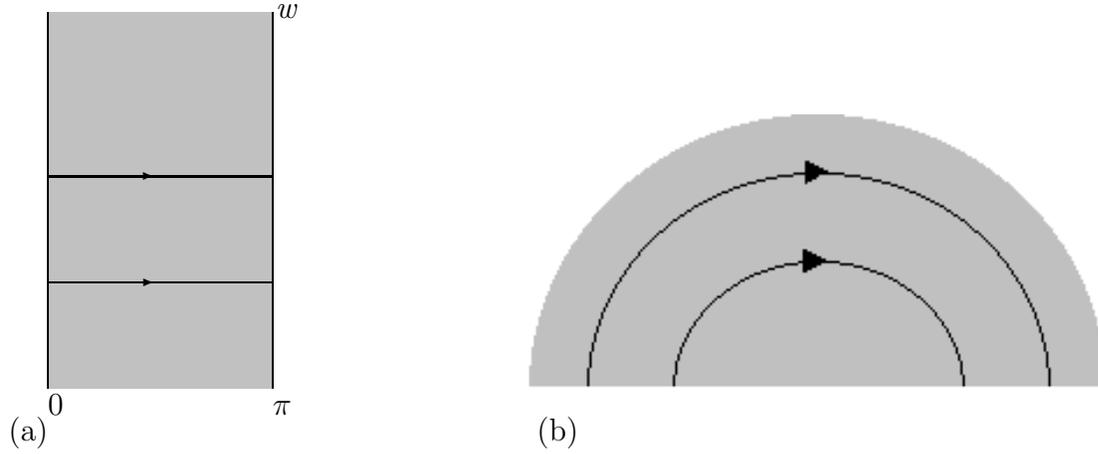


Figura 3.2: Plano complexo da corda aberta com linhas equitemporais. (a) Em coordenadas w . (b) Em coordenadas z .

que definimos como o operador de vértice. A correspondência inversa vale para um operador de vértice qualquer no plano z e um estado inicial no plano w . Assim cada operador de vértice \mathcal{A} corresponde ao estado inicial $|\mathcal{A}\rangle$.

Como exemplo, vamos estudar o estado $|I\rangle$ correspondente ao operador de vértice identidade I . No plano z , os operadores ∂X e $\bar{\partial} X$ aplicados no vértice identidade tem comportamento analítico. Portanto não apresentam resíduos em (3.38) e conseqüentemente,

$$\alpha_m |I\rangle = 0 \text{ e } \tilde{\alpha}_m |I\rangle = 0, \quad m > 0 \quad (3.52)$$

Tal comportamento deste estado é idêntico ao comportamento do estado fundamental. Logo, obtemos a indentificação estado-operador

$$|I\rangle = |0, 0\rangle \quad (3.53)$$

e por $\partial X(z)$ ($\bar{\partial} X(\bar{z})$) ser (anti-)holomórfico nesse vértice, podemos expandi-lo em série de Taylor em torno deste. Daí encontramos os operadores α como resíduos

dessa expansão

$$\alpha_{-m}^\mu |I\rangle = \left(\frac{2}{\alpha'}\right)^{1/2} \oint \frac{dz}{2\pi} z^{-m} \partial X^\mu(z) |I\rangle = \left(\frac{2}{\alpha'}\right)^{1/2} \left| \frac{i}{(m-1)!} \partial^m X^\mu(z_0) \right\rangle, \quad m > 0 \quad (3.54)$$

De forma que existe uma correspondência entre operadores

$$\alpha_{-m}^\mu \rightarrow \left(\frac{2}{\alpha'}\right)^{1/2} \frac{i}{(m-1)!} \partial^m X^\mu(z_0), \quad m > 0 \quad (3.55)$$

um atuando sobre o estado e o outro sobre o vértice. A equação acima mostra que α_{-m}^μ ($m > 0$) correspondem a campos primários de peso $(m, 0)$. correspondência acima se mantém para outros estados $|\mathcal{A}\rangle$ com operador de vértice $\mathcal{A}(z_0)$ com ordenamento normal. O operador local correspondente a α_{-m}^μ atuando no estado $|\mathcal{A}\rangle$ será o ordenamento normal do produto de ambos operadores locais

$$\alpha_{-m}^\mu |\mathcal{A}\rangle \rightarrow \left(\frac{2}{\alpha'}\right)^{1/2} \frac{i}{(m-1)!} : \partial^m X^\mu(z_0) \mathcal{A}(z_0) : \quad (3.56)$$

Um outro exemplo de correspondência estado-operador é

$$|0; k\rangle \rightarrow : e^{ik \cdot X(z_0)} : \quad (3.57)$$

que é facilmente compreendida percebendo que sob a translação $X^\mu \rightarrow X^\mu + a^\mu$ o lado direito e esquerdo de (3.57) se transformam do mesmo modo, multiplicados por $e^{ik \cdot a}$.

Procedendo segundo (3.56) podemos obter os operadores locais de todos os estados da corda, observando-se que o mesmo é válido para os operadores anti-holomórficos da corda fechada.

3.7.1 Integral de caminho

No espaço dos operadores de vértice no plano z o formalismo de integral de caminho utilizado para definir a evolução de um estado inicial toma a seguinte forma:

$$\Psi_{\mathcal{A}}[X_f^\mu, \tau_0] = \int [dX_j^\mu]_{X_f^\mu(\tau_0)} \exp(-S[X_j^\mu]) \mathcal{A}(z_0) \quad (3.58)$$

onde um estado inicial dado pelo operador de vértice \mathcal{A} no ponto (z_0) evolui para um estado com a configuração de campos X_f^μ (coordenadas espaciais). Este funcional é a função de onda na representação X de determinado estado na formulação de Schrödinger. A condição de fronteira $X_j^\mu = X_f^\mu$ acontece para um dado tempo $\tau = \tau_0$ que no plano z se expressa por uma circunferência fechada em torno do centro $z_0 = (0, 0)$. Os campos $X_j^\mu(\tau, \sigma)$ estão sujeitos a condição de causalidade. Esse conceito de funcional integral como um propagador não deve valer somente para estados iniciais assintóticos representados por operadores de vértice. Podemos expandir sua definição para estados inicial e final definidos pelas respectivas configurações de campos X_i^μ e X_f^μ , que serão as condições de borda inicial e final dos caminhos possíveis de X_j^μ nos tempos τ_i e τ_f .

$$\Psi[X_f^\mu, \tau_f] = \int [dX_j^\mu]_{X_f^\mu, X_i^\mu} \exp(-S[X_j^\mu]) \Psi[X_i^\mu, \tau_i] \quad (3.59)$$

A integração funcional acima é feita no plano z numa coroa circular $\tau_f > \tau > \tau_i$ ou $r_i < |z| < r_f$. A região $|z| < r_i$ não tem influência na equação acima, quando se conhece o estado da partícula para $|z| = r_i$. Mas poderíamos substituir esta condição de borda por uma superposição de operadores de vértice que aplicados isoladamente em pontos fixos z' s distintos no interior do disco ($|z_0| < r_i$) produzissem na fronteira desse disco a mesma configuração de campo X_i^μ por evolução temporal.

Pelo mesmo princípio, o produto de 2 operadores de vértice atuando em pontos distintos tem efeito na borda que contém estes pontos $|z| = 1$, por exemplo, idêntico a uma superposição de efeitos de operadores de vértice isolados na região $|z| < 1$ que, por propriedade dos operadores conformes (3.28), podem ser transportados para atuarem no ponto $z = (0, 0)$, cujo efeito é o de um único operador de vértice dual do estado inicial assintótico que evolui para o estado $|\Psi(X_i)\rangle$ na borda $|z| = 1$

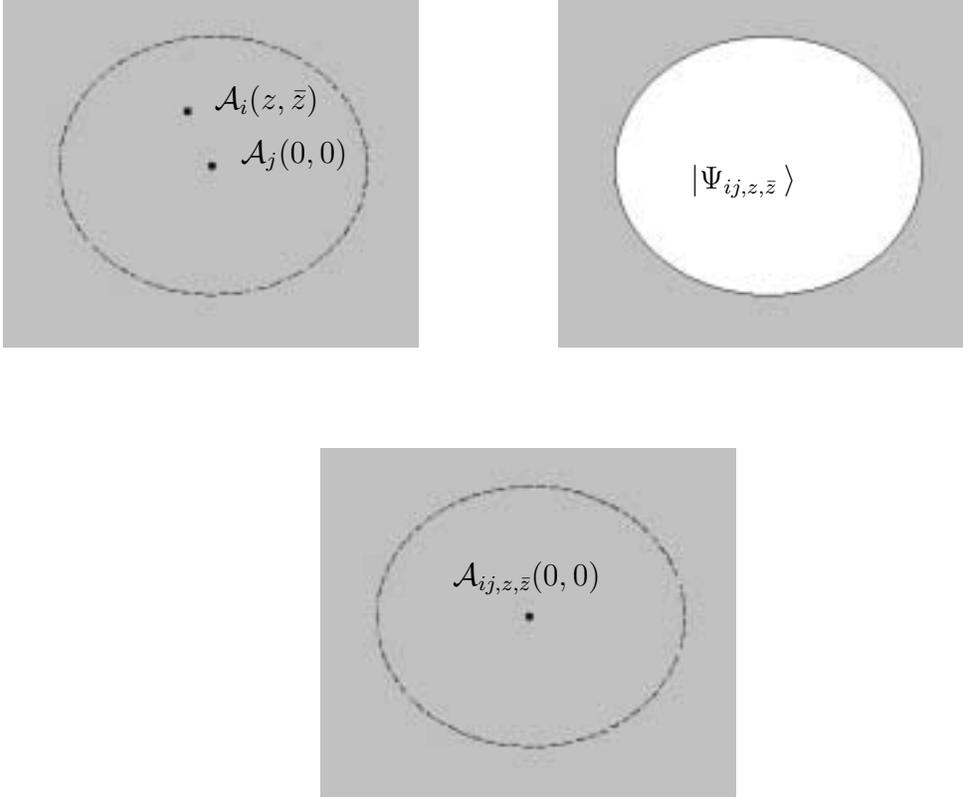


Figura 3.3: (a)Plano z com 2 operadores locais. (b)Estado obtido na integração de caminho até a fronteira. (c) Operador de Vértice que produz o mesmo estado na borda

(Fig.3.3). A expressão do produto de operadores (OPE) se traduz em

$$\mathcal{A}_i(z_1, \bar{z}_1)\mathcal{A}_j(z_2, \bar{z}_2) = \sum_k z_{12}^{h_k-h_i-h_j} \bar{z}_{12}^{\bar{h}_k-\bar{h}_i-\bar{h}_j} c_{ij}^k \mathcal{A}_k(z_2, \bar{z}_2) = \mathcal{A}_{ijz_2, \bar{z}_2}(z_1, \bar{z}_1) \quad (3.60)$$

Podemos interpretar a expressão (3.60) numa forma tipo diagrama de Feynman. Este diagrama descreve um espalhamento de 2 estados assintóticos iniciais, representados pelos operadores de vértice \mathcal{A}_i e \mathcal{A}_j e os possíveis estados finais assintóticos representados pelos operadores de vértice \mathcal{A}_k 's

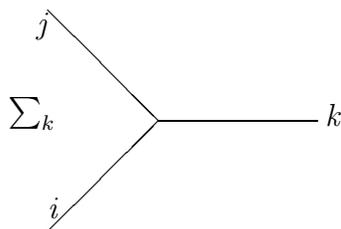


Figura 3.4: Representação diagramática de um OPE

Capítulo 4

A Integral de Caminho de Polyakov

4.1 Introdução

Já apresentamos anteriormente (3.58) a formulação de integral de caminho no plano complexo. Neste capítulo, voltamos ao assunto discutindo problemas na folha de universo tais como fixação de calibre, anomalia de Weyl e operadores de vértice. Por fim acrescentaremos complexidade a ação de Polyakov considerando a métrica $G_{\mu\nu}$ do espaço-tempo dependente dos campos de coordenada X^μ (modelo sigma não linear) que induzirá ao aparecimento de grávitons.

4.2 Soma sobre Folhas de Universo

A formulação de integral de caminho de Feynman de cálculo de propagação de uma partícula prescreve uma soma sobre todos os caminhos possíveis que essa partícula pode tomar, ponderada pelo peso e^{iS} , S ação clássica de Polyakov.

Dentre os caminhos possíveis que essa partícula pode tomar, estão aqueles que envolvem interações com o vácuo com surgimento de novas partículas e interações entre as próprias partículas. Por outro lado, devido as simetrias internas da ação clássica (difeom., Weyl), ela só denota diferença entre caminhos que traçam folhas de universo com topologias diferentes. As diferentes topologias são oriundas justamente

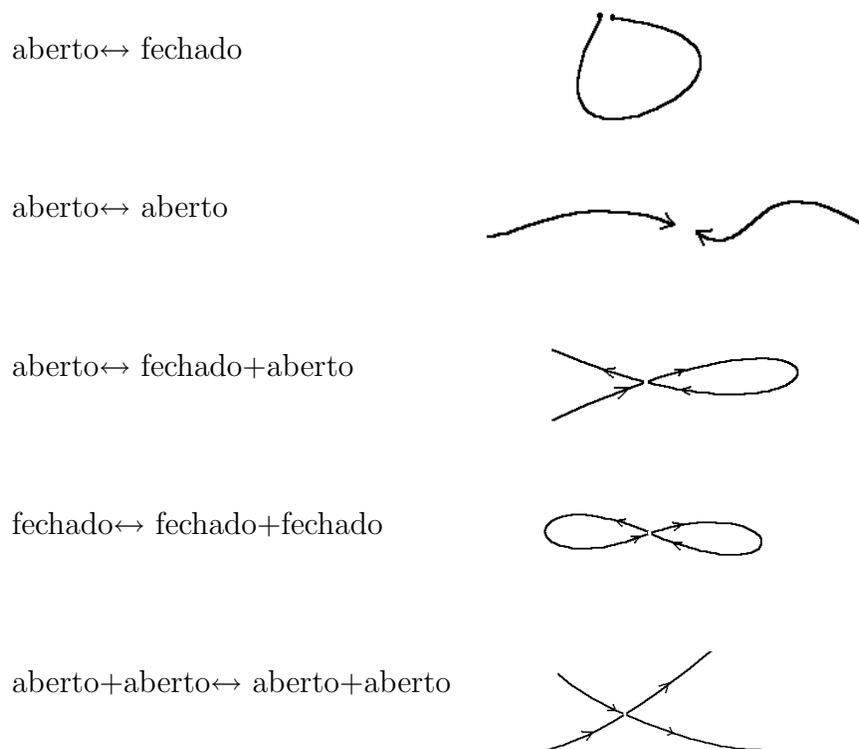


Figura 4.1: Interações entre cordas

das interações entre cordas, tais como na figura (4.1).

4.3 O Funcional Integral

A partir desta seção, vamos utilizar a métrica Euclidiana na folha de universo, aplicando uma rotação no plano complexo em τ substituindo-o por $\tau' = -i\tau$. A motivação desta troca é que topologias não triviais da folha de universo não podem ser descritas por uma métrica de Minkowski sem apresentar singularidades, enquanto que este problema não existe utilizando uma métrica Euclidiana.

O funcional integral se torna

$$\int [dX][dg] \exp(-S) \quad (4.1)$$

onde junto a ação de Polyakov acrescentamos outros termos invariantes a transformações de coordenadas (difeomorfismo) e Weyl

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_M d^2\sigma g^{1/2} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu + \lambda \left(\frac{1}{4\pi} \int_M d^2\sigma g^{1/2} R + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial M} ds k \right) \quad (4.2)$$

O terceiro termo na equação acima é a contribuição da borda da folha de universo, sendo R o escalar de Ricci e $k = t^a n_b \nabla_a t^b$ a curvatura geodésica da borda e t^a e n^a vetores tangente e normal à borda, respectivamente.

Na verdade, o segundo e o terceiro termo não são Weyl- invariante, mas sua soma sim. Contribuições da borda surgem no segundo termo sob transformação de Weyl que são canceladas por contribuições do terceiro termo transformado quando ponderamos seus coeficientes conforme escrito na equação acima. Por esse entre outros motivos que se seguem, chamaremos

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \int_M d^2\sigma g^{1/2} R + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial M} ds k \quad (4.3)$$

A constante λ não é um parâmetro livre. Seu papel será desvendado quando trabalharmos com a métrica do espaço-tempo. Mas por ora podemos destacar seu efeito na interação entre cordas. A ação S pode ser reagrupada em 2 termos:

$$S = S_{Pol} + \lambda\chi \quad (4.4)$$

χ depende somente da topologia da folha de universo e é de fato o conhecido número de Euler de superfícies bidimensionais ($\chi = Vértices + Faces - Arestas$ numa triangulação de superfície). Se fizermos um buraco em uma folha de universo de uma corda aberta, seu número de Euler é diminuído de uma unidade. Portanto o caminho correspondente a esta nova folha terá um peso multiplicado pelo fator $e^{-\lambda}$ no funcional integral (4.1) em relação a folha anterior. Por sua vez, a nova folha de universo pode ser interpretada como um caminho de propagação de uma corda aberta em que, interagindo com o vácuo, uma nova corda aberta é criada e a seguir destruída. Considerando pesos para ambos processos de criação e destruição de uma partícula, concluímos que a interação (corda aberta) \leftrightarrow (corda aberta) possui como constante de acoplamento $\sim e^{-\lambda/2}$.

As propagações com criação e posterior destruição de cordas fechadas se refletem na folha de universo com a presença de roscas ou alças ("handles" em inglês). Nestas circunstâncias o número de Euler χ é diminuído de 2 para uma corda criada e destruída em seqüência. Deste modo, a constante de acoplamento para processos de criação ou destruição de uma corda fechada é $\sim e^{-\lambda}$.

4.4 Fixação de Calibre

O funcional integral (4.1) não realiza corretamente uma integração sobre caminhos por não observar inúmeras configurações de campos e métricas que estão no mesmo grupo de simetria, isto é, que representam o mesmo caminho. O funcional correto se encontra dividindo a medida de integração pelo volume do grupo de simetria da folha de universo.

$$Z = \int \frac{[dX][dg]}{Vol_{diff \times Weyl}} \exp(-S) \quad (4.5)$$

Efetivamente calcularemos o volume do grupo de simetria pelo método de Fadeev-Popov, escolhendo uma métrica fiduciária e integrando sobre o espaço de transformações conformes ($Weyl \times dif$).

Conforme vimos anteriormente, as liberdades internas da folha de universo permitem que fixemos a métrica intrínseca da folha como uma dada métrica fiduciária:

$$\hat{g}_{ab} = \delta_{ab} \quad \rightarrow \quad R = 0 \quad (4.6)$$

Fixado o calibre, seja ξ uma transformação conforme qualquer,

$$\hat{g}_{ab}^{\xi}(\sigma^1, \sigma^2) = \exp(2\omega(\sigma^1, \sigma^2)) \frac{\partial \sigma'^c}{\partial \sigma^a} \frac{\partial \sigma'^d}{\partial \sigma^b} \hat{g}_{cd}(\sigma'^1, \sigma'^2) \quad (4.7)$$

A medida Fadeev-Popov Δ_{FP} é assim definida:

$$1 = \Delta_{FP}(g) \int [d\xi] \delta(g - \hat{g}^{\xi}) \quad (4.8)$$

Incorporando (4.8) no funcional Z (4.5),

$$Z(\hat{g}) = \int \frac{[dX dg d\xi]}{Vol_{dif \times Weyl}} \delta(g - \hat{g}^\xi) \Delta_{FP}(g) \exp(-S(X, g)) \quad (4.9)$$

onde escrevemos Z em função da métrica fiduciária por razões que ficarão clara na seção seguinte. Integrando primeiramente em g , observando a existência da função δ :

$$Z(\hat{g}) = \int \frac{[dX d\xi]}{Vol_{dif \times Weyl}} \Delta_{FP}(\hat{g}^\xi) \exp(-S(X, \hat{g}^\xi)) \quad (4.10)$$

A equação (4.8) mostra que a medida Δ_{FP} é um invariante conforme e S também o é. Deste modo, nenhum termo do integrando depende de ξ , de forma que a integração em ξ gera exatamente o volume do grupo de simetria e simplifica a expressão :

$$Z(\hat{g}) = \int [dX] \Delta_{FP}(\hat{g}) \exp(-S(X, \hat{g})) \quad (4.11)$$

Ainda resta calcularmos a medida de Fadeev-Popov para que possamos conhecer o funcional Z por completo. Para isso, consideremos transformações ξ (4.7) próximas a identidade. A variação total (forma + deslocamento) da métrica será

$$\delta g_{ab} = (2\delta\omega - \nabla_c \delta\sigma^c) g_{ab} - 2(P_1 \delta\sigma)_{ab} \quad (4.12)$$

onde

$$(P_1 \delta\sigma)_{ab} = \frac{1}{2} (\nabla_a \delta\sigma_b + \nabla_b \delta\sigma_a - g_{ab} \nabla_c \delta\sigma^c) \quad (4.13)$$

Através da equação (4.8), calculemos o inverso da medida de Fadeev-Popov na

simplificação de transformações próximas à identidade:

$$\begin{aligned}
\Delta_{FP}^{-1}(\hat{g}) &= \int [d\delta\omega d^2\delta\sigma] \delta((2\delta\omega - \nabla_c\delta\sigma^c)g - 2(P_1\delta\sigma)) \\
&\quad \text{reescrevendo o delta de Dirac em forma de integral} \\
&= \int [d\delta\omega d^2\delta\sigma d\beta] \exp \left\{ 2\pi i \int d^2\sigma \hat{g}^{1/2} \beta^{ab} (2(P_1\delta\sigma) - (2\delta\omega - \nabla_c\delta\sigma^c)g)_{ab} \right\} \\
&\quad \text{e integrando em } \delta\omega \text{ surge um delta de Dirac que força } \beta \text{ a ter traço zero} \\
&= \int [d^2\delta\sigma d\beta'] \exp \left\{ 4\pi i \int d^2\sigma \hat{g}^{1/2} \beta'^{ab} (P_1\delta\sigma)_{ab} \right\} \tag{4.14}
\end{aligned}$$

com β' sendo a restrição de traço nulo sobre as funções β . Para simplificar, podemos inverter Δ_{FP}^{-1} substituindo campos bosônicos por campos fermiônicos

$$\begin{aligned}
\delta\sigma^a &\rightarrow c^a \\
\delta\beta'_{ab} &\rightarrow b_{ab}, \quad \text{com } b \text{ também de traço nulo.} \tag{4.15}
\end{aligned}$$

A medida de Fadeev-Popov se torna:

$$\Delta_{FP}(\hat{g}) = \int [db d^2c] \exp(-S_g) \tag{4.16}$$

onde a ação fantasma S_g é

$$S_g = \frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \hat{g}^{1/2} b_{ab} (P_1c)^{ab} = \frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \hat{g}^{1/2} b_{ab} \nabla^a c^b \tag{4.17}$$

A segunda expressão de S_g decorre da nulidade do traço de b . O funcional Z (4.11) se torna

$$Z(\hat{g}) = \int [dX db d^2c] \exp(-S[X, \hat{g}] - S_g[b, c, \hat{g}]) \tag{4.18}$$

Numa observação aa nível clássico (na próxima seção se seguirá o estudo quântico), o funcional Z deve possuir peso conforme nulo para que este seja invariante à transformações de Weyl. Essa condição já era satisfeita para a ação de Polyakov e a medida de integração dX (3.3, 3.30). Precisamos checar agora a nulidade do peso conforme para a ação fantasma e seus campos b e c . Admitindo estes como op-

eradores conformes de pesos correspondentes aos seus graus tensoriais, b_{ab} (2,0) e c^a (-1,0) vemos que o peso conforme da ação S_g é (0,0) e da medida de integração também é (0,0).

Para o caso da corda aberta, precisamos limitar as transformações ξ tais que as bordas se transformem nelas mesmas para que este grupo de simetria (espaço das transformações ξ) represente a mesma folha de universo. Isto implica no requerimento

$$n_a \delta \sigma^a = 0, \quad n_a = \text{vetor normal a borda} \quad (4.19)$$

para evitar deslocamentos normais de pontos da borda. Os campos b e c também sofrerão restrições em virtude das suas equações de movimento se darem nas bordas.

4.5 A Anomalia de Weyl

Na quantização no cone de luz (2.3.1), aprendemos que a condição para preservação da invariância de Lorentz da corda após a quantização é $D = 26$. Uma anomalia existirá na algebra dos geradores do grupo de Lorentz para $D \neq 26$. A quebra da simetria de Lorentz no espaço tempo equivale a uma anomalia na folha de universo da corda. Uma vez que as coordenadas do espaço-tempo podem ser vistas como campos escalares na folha de universo da corda, a simetria de Lorentz destes campos no espaço tempo está ligada as simetrias de difeomorfismo e invariância de Weyl na folha de universo. Escolhendo a preservação do difeomorfismo na folha de universo, a anomalia se manifestará na quebra da simetria de Weyl (note que é uma escolha arbitrária qual a simetria interna a ser preservada [19]).

Problemas de ordenamento de operadores que aparecem a nível quântico destróem a simetria de Weyl, quebrando a condição de simetria $T^a_a = 0$ (3.7). É natural que se espere a quebra desta condição, uma vez que T_{ab} , a corrente de simetria existente nas transformações conformes, não é um campo primário (ou operador conforme) e portanto não se conserva conformalmente, isto é, não se transforma segundo (3.28).

É razoável crer que a simetria de Weyl na teoria quântica seja restaurada se formos no produto de tensores (3.31) a carga central a zero.

Do ponto de vista da integral de caminho, a simetria de Weyl exige que o funcional gerador Z independa da escolha da métrica fiduciária. A condição para que isso ocorra irá igualmente restaurar a simetria de Weyl. Em outras palavras, queremos que

$$Z[g^\xi] = Z[g] \quad (4.20)$$

que é equivalente a checar se

$$\langle \dots \rangle_{g^\xi} = \langle \dots \rangle_g = \int [dX db d^2c] \exp(-S[X, b, c]) \dots \quad (4.21)$$

é válido para quaisquer operadores inseridos. Tomando ξ para uma transformação de Weyl infinitesimal, $\xi : g' = (1 + \delta\omega(\sigma))g$

$$\delta_{Weyl} \langle \dots \rangle_g = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma g^{1/2} \delta\omega(\sigma) \langle T^a{}_a(\sigma) \dots \rangle_g = 0 \quad (4.22)$$

o que novamente obriga a condição (3.7).

Se há quebra da condição (3.7), que valores possíveis $T^a{}_a$ pode assumir? Vimos no capítulo 3 que no plano complexo, de métrica plana e $R = 0$, não houve a quebra desta condição (3.7). Adicionalmente, o difeomorfismo e a simetria de Poincaré estão preservadas na ação quântica (funcional Z). Consequentemente o traço $T^a{}_a$ deve ser invariante a estas simetrias. De uma maneira heurística, encontramos a única forma possível para o traço

$$T^a{}_a = a_1 R \quad (4.23)$$

Para nos compatibilizarmos com comentários anteriores (seção 3.5), temos que encontrar $a_1 \sim c$, sendo c a carga central.

No cálculo de a_1 , estaremos trabalhando com a parametrização de coordenadas complexas. A condição (3.7) se traduz em

$$T_{z\bar{z}} = \frac{a_1}{2} g_{z\bar{z}} R \quad (4.24)$$

Aplicando uma derivação covariante em ambos os lados,

$$\nabla^{\bar{z}} T_{z\bar{z}} = \frac{a_1}{2} \partial_z R \quad (\text{lembrete: } \nabla^a g_{bc} = 0) \quad (4.25)$$

Utilizando a equação de conservação de corrente,

$$\nabla^z T_{zz} = -\nabla^{\bar{z}} T_{z\bar{z}} = -\frac{a_1}{2} \partial_z R \quad (4.26)$$

Agora vamos calcular a variação de ambos os lados da equação acima sob uma transformação infinitesimal de Weyl: $g' = (1 + 2\delta\omega(z))g$. Vamos partir de uma métrica inicial plana: $g = 1$ e $R = 0$. Sabendo que o escalar de Ricci se modifica em transformações de Weyl segundo

$$g'^{1/2} R = g^{1/2} (R - 2\nabla^2 \delta\omega) \quad (4.27)$$

temos no lado direito da equação (4.26)

$$\frac{a_1}{2} \delta_W (\partial_z R) = \frac{a_1}{2} \partial_z (\delta_W R) \simeq -a_1 \partial_z \nabla^2 \delta\omega = -4a_1 \partial_z^2 \partial_{\bar{z}} \delta\omega \quad (4.28)$$

No lado esquerdo, aplicamos a identidade de Ward (3.17) e a equação (3.31) para obter a variação sob transformação conforme de T , com as coordenadas em transformação infinitesimal $\delta z = f(z)$ que induz a transformação de Weyl $2\delta\omega = \partial f(z)$.

$$\delta T_{zz}(z) = -\frac{c}{6} \partial_z^2 \delta\omega(z) - 4\delta\omega(z) T_{zz}(z) - f(z) \partial T_{zz}(z) \quad (4.29)$$

Os dois últimos termos são contribuições devido a transformação de coordenadas de um tensor conforme (2,0). A contribuição anômala da transformação de Weyl é

$$\delta_W T_{zz} = -\frac{c}{6} \partial_z^2 \delta\omega \quad (4.30)$$

e tomando a derivada covariante desta expressão, lembrando que $\partial^z = 2\partial_{\bar{z}}$ remontamos a equação (4.26) sob transformação de Weyl

$$\delta_W (\nabla^z T_{zz}) = -\frac{c}{3} \partial_z \partial_{\bar{z}}^2 \delta\omega = 4\partial_z^2 \partial_{\bar{z}} \delta\omega \quad (4.31)$$

Logo,

$$a_1 = -\frac{c}{12}; \quad T^a_a = -\frac{c}{12} R \quad (4.32)$$

em acordo com colocações anteriores.

A carga central c engloba contribuições da ação de Polyakov e da ação fantasma. O cálculo da carga central na teoria de campos conformes sobre os campos fantasmas e a equação (3.31) fornecem

$$c = c^X + c^g = D - 26 \quad (4.33)$$

Portanto a teoria é invariante a transformações de Weyl somente para o número de dimensões $D=26$, a mesma condição obtida para a ocorrência da invariância de Lorentz encontrada na seção (2.3), o que reforça comentários anteriores sobre a igual origem da anomalia de Weyl e Lorentz.

Se trabalharmos em um espaço sem a invariância de Weyl ($D \neq 26$), a métrica da folha de universo terá um grau de liberdade, que deve ser integrado no funcional Z . Tal variável livre da métrica, $\delta\omega$, terá comportamento idêntico a um campo extra adicionado à ação. Tal teoria de cordas é chamada de não crítica e a trataremos adiante no capítulo 5.

4.6 A Matriz S

Conforme vimos no estudo da teoria de campos conformes, a soma sobre os variados tipos de folha de universo na integração funcional é bastante simplificada quando consideramos os estados inicial e final da corda assintóticos, que se tornam pontos de singularidade no plano z . A amplitude de probabilidade de transição entre estados assintóticos dados constitui um elemento da Matriz S de espalhamento de partículas.

Vamos primeiramente considerar processos de espalhamento conexos, isto é, nenhuma corda permanece livre de interação, e simples, sem a existência de partículas virtuais. Para as cordas abertas, as superfícies da folha de universo equivalem a um disco com pequenos dentes abertos na borda correspondentes aos estados assintóticos das cordas.

Para as cordas fechadas, as superfícies da folha de universo equivalem a uma esfera com pequenos furos abertos em sua superfície, onde estes furos correspondem a estados assintóticos das cordas fechadas.

Tais equivalências (figuras 4.2 e 4.3) são decorrência da estrutura da folha de universo e sua simetria conforme. A folha de universo de uma corda é classificada como uma superfície de Riemann, o que significa que ela é uma variedade topológica de 2 dimensões com estrutura complexa, em curtas palavras, uma variedade complexa unidimensional. Em tais superfícies existe uma relação de equivalência conforme quando o mapeamento de pontos entre as superfícies ocorre por meio de funções analíticas:

$$f^i \in C^\infty : M \rightarrow N \quad z'^i = f^i(z^i) \quad (4.34)$$

A simetria conforme na folha de universo torna folhas (superfícies de Riemann) conformalmente equivalentes indistinguíveis. Conseqüentemente, a distinção entre folhas de universo ocorre apenas por diferenças topológicas.

As folhas de universo são caracterizadas por suas constantes topológicas, grandezas invariantes a transformações conformes. Tais constantes são entre outras a compacidade, o número de bordas b , o número de Euler χ , a orientação e o gênero g . O gênero de uma superfície de Riemann é definido como o número máximo de curvas fechadas nesta superfície que não separam a superfície em partes desconexas.

Para superfícies com orientação (com 2 lados), alvos de nosso interesse, o número de Euler χ estabelece uma certa relação com outras constantes topológicas:

$$\chi = 2 - 2g - b \quad (4.35)$$

Em processos de interação, b é definido pelos estados assintóticos e os possíveis caminhos de evolução das cordas expressos por diferentes folhas de universo ocorrem por variação do gênero da folha.

Conforme vimos o mapeamento estado-operador da folha de universo no plano complexo, os estados assintóticos correspondem a distúrbios locais, ou operadores de vértice no plano complexo.

Os operadores de vértice $\mathcal{V}_i(k_i)$ dependem do momento k da corda. A semelhança

da teoria quântica de campos, o elemento da matriz S de um espalhamento de n partículas é dado por:

$$\mathcal{S}(k_1, \dots, k_n) = \sum_{\text{topol. f. u.}} \int \frac{[dX dg]}{V_{\text{dif}} \times W_{\text{eyl}}} \exp(-S_X - \lambda\chi) \prod_{i=1}^n \int d^2\sigma_i g(\sigma_i)^{1/2} \mathcal{V}_i(k_i, \sigma_i). \quad (4.36)$$

Na estrutura da equação acima, observamos que cada operador de vértice local é integrado sobre todos os pontos da folha de universo. Há a necessidade dessa integração para que as interações se tornem não locais e assim preservem o difeomorfismo sobre a folha de universo.

Enquanto que as figuras (4.2) e (4.3) descrevem espalhamentos simples, a equação acima considera todas as ordens da expansão perturbativa de um espalhamento através da soma sobre todas as topologias de folha de universo (fig.4.5).

Dentro do formalismo de integrais de caminho, tal expansão pode ser vista como a segunda quantização da corda.

4.6.1 Superfícies topológicas

A estrutura complexa das folhas de universo foi explorada no capítulo 3 e é manifesta pela equivalência conforme da folha de universo com uma cobertura universal \tilde{S} módulo grupo de coberturas $(\frac{\tilde{S}}{G})$, onde as coberturas universais podem ser somente o plano complexo \mathbf{C} , o disco aberto \mathbf{D} e a esfera ou plano complexo estendido $\mathbf{C} + \infty$. Este é o resultado de um importante teorema matemático de mapeamento de superfícies de Riemann. A estrutura complexa de tais coberturas universais 'é transportada para a folha de universo. Vamos comentar tais equivalências para os casos de topologias mais simples.

Esfera complexa e disco

Seja uma esfera tangenciando o plano complexo \mathbf{C} . O ponto de tangência da esfera chamamos de polo sul e o ponto da esfera diametralmente oposto é o polo

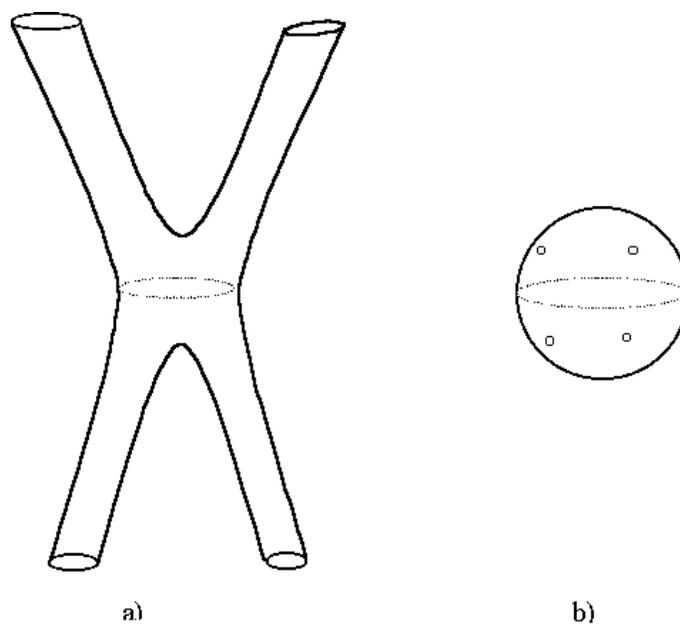


Figura 4.2: (a) Espalhamento de quatro cordas fechadas, partindo de estados assintóticos. (b) Folha de universo conformalmente equivalente.

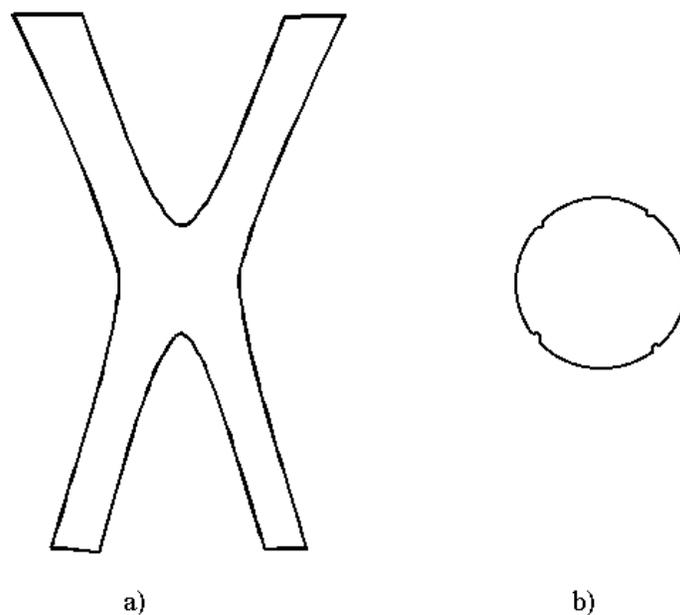


Figura 4.3: (a) Espalhamento de quatro cordas abertas, partindo de estados assintóticos. (b) Folha de universo no espaço conforme

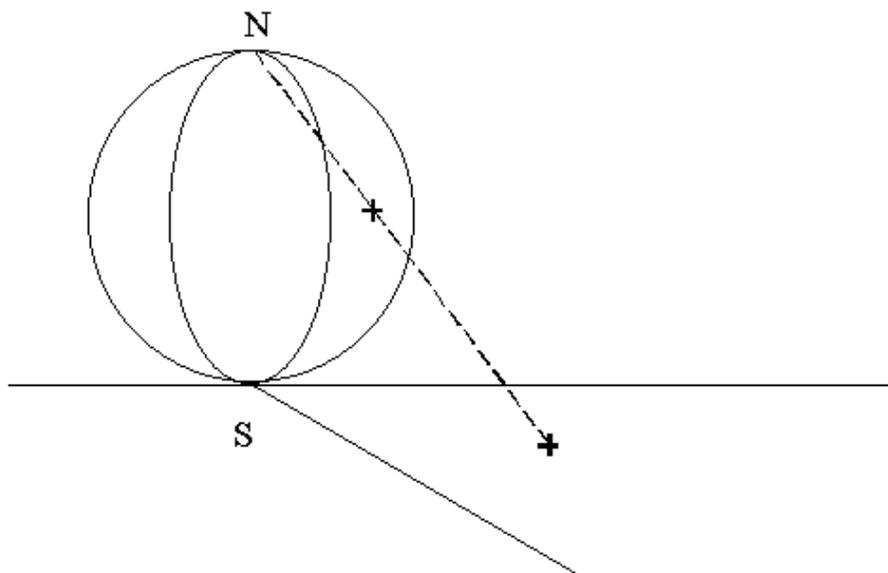


Figura 4.4: Projção estereográfica

norte da esfera (4.4). Através de um segmento de reta que parte do polo norte da esfera e corta esta e o plano complexo, associa-se a todo ponto do plano complexo um ponto da esfera. Este método chama-se projeção estereográfica. Apenas o polo norte da esfera não possui correspondência, e pela equivalência, vemos que o plano complexo é uma superfície não compacta aberta equivalente a esfera menos o polo norte $S^2 - \{N\}$, e o seu fecho $\mathbf{C} + \{\infty\}$ equivale a esfera compacta. Na seção (3.7) mostramos a equivalência entre uma folha de universo simples de uma corda fechada e o plano complexo. A inclusão dos estados assintóticos transforma o plano complexo numa esfera complexa, conforme a figura (4.2b).

O fecho do plano complexo $\mathbf{C} + \{\infty\}$ com um círculo retirado e sem bordas equivale a um disco aberto. Para mostrar isso, seja esse furo um círculo de raio unitário aberto no plano complexo. Do centro O desse círculo, centro de coordenadas polares, associamos a cada ponto de coordenada z exterior ao círculo, um ponto interior ao círculo de coordenada $1/z$ e por fim, o infinito $\{\infty\}$, pertencente ao fecho, associamos ao centro O .

Formações topológicas mais complexas são construídas adicionando-se furos, ou ligando tais furos em formação de rosca (fig.4.5).

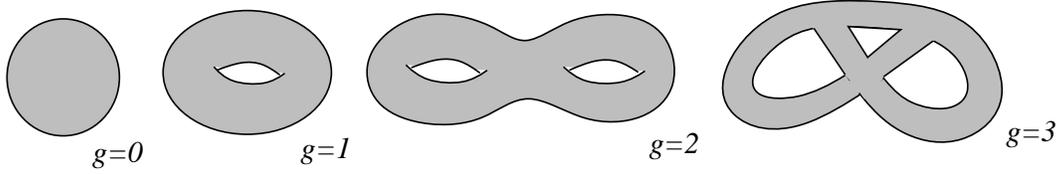


Figura 4.5: Adicionando roscas

4.7 Operadores de Vértice

Conforme os estudos do capítulo 3 de associação estado-operador, o estado taquiônico de uma corda pode ser representado por:

$$\mathcal{V}(k) = g_c : e^{ikX} : \quad (4.37)$$

onde g_c é uma constante de acoplamento e utilizamos a normalização para que o operador seja bem definido no plano complexo.

O aspecto global das interações na folha de universo das cordas determina que o operador de vértice atue em toda a folha de universo, tomando para a corda fechada a seguinte forma:

$$\begin{aligned} V_o &= 2g_c \int d^2\sigma g^{1/2} e^{ikX(\sigma)}, \text{ ou no plano complexo,} \\ &= g_c \int d^2z : e^{ikX(z)} : \end{aligned} \quad (4.38)$$

Os operadores de vértice são inseridos no funcional gerador Z (4.18) formando a função correlação entre estados assintóticos, compondo elementos da matriz S . Para que a matriz S seja invariante a transformações conformes, o peso conforme de cada operador de vértice inserido deve ser $(0,0)$. O peso conforme de d^2z é $(-1,-1)$. Logo o peso conforme de $: e^{ikX} :$ deve ser igual a $(1,1)$. A partir da equação (3.30):

$$\frac{\alpha' k^2}{4} = 1 \implies m^2 = -k^2 = -\frac{4}{\alpha'} \quad (4.39)$$

resultado idêntico ao obtido anteriormente para a massa do táquion (2.57).

Para o primeiro nível de excitação de uma corda fechada, o seu operador de

vértice será:

$$\frac{2g_c}{\alpha'} \int d^2z : \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu e^{ikX(z)} : \quad (4.40)$$

O peso conforme do integrando agora é: $h = 1 + \frac{\alpha' k^2}{4}$ e a massa quadrática correspondente será

$$\frac{\alpha' k^2}{4} + 1 = 1 \implies m^2 = 0 \quad (4.41)$$

Portanto, por respeito a invariância conforme, o estado é sem massa, de acordo com resultados anteriores.

Podemos ver que por inserção de operadores de vértice representante de diferentes estados de corda na matriz S e preservação da simetria conforme, obtém-se um espectro discreto de massa para tais estados. Porém o primeiro estado massivo é da ordem da massa de Planck (M_{Pl}) de 10^{19} GeV. Uma interpretação física inicial na teoria de cordas é que todos as partículas massivas que conhecemos seriam partículas não massivas e que teriam suas massas geradas por quebras de simetria e transições de fase em períodos remotos do universo.

Operadores de Vértice no formalismo da integral de caminho

Assim, torna-se tarefa elementar descrever um operador de vértice para qualquer estado de uma corda descrevendo a folha de universo no plano complexo, de curvatura zero (eq. 4.40). Porém, para incluirmos os operadores de vértice na integração funcional de Polyakov é necessário que a invariância de Weyl e o difeomorfismo estejam explícitos nos operadores de vértice, sem escolha de calibre de $g_{\mu\nu}$. Para esse propósito, pode-se partir de uma formulação de operador de vértice com simetria por difeomorfismo e encontrar condições para que haja a simetria de Weyl. Tais condições devem estabelecer os mesmos critérios para o espectro de massa anteriormente obtidos.

Para nos compatibilizarmos com uma descrição independente de métrica precisamos generalizar o ordenamento normal definido no plano complexo. Assim,

definimos o operador renormalizado $[\mathcal{F}]_r$ por

$$[\mathcal{F}]_r = \exp \left(\frac{1}{2} \int d^2\sigma d^2\sigma' \Delta(\sigma, \sigma') \frac{\delta}{\delta X^\mu(\sigma)} \frac{\delta}{\delta X_\mu(\sigma')} \right) \mathcal{F} \quad (4.42)$$

$$\text{com} \quad \Delta(\sigma, \sigma') = \frac{\alpha'}{2} \ln d^2(\sigma, \sigma') \quad (4.43)$$

onde $d(\sigma, \sigma')$ é a distância geodésica entre σ e σ' .

Certamente a fixação da massa quadrática dos estados da corda pela invariância de Weyl exclui da teoria quaisquer possíveis deltas de Dirac de interações locais pois

$$\delta^D(X(\sigma) - x_0) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \exp(ik \cdot (X(\sigma) - x_0)) \quad (4.44)$$

é uma formulação inconsistente, uma vez que integrações de momento k fora da camada de massa como as que produzem de divergências na TQC não são possíveis. Tal situação reforça o aspecto anteriormente comentado de não localidade das interações numa folha de universo.

Operadores de Vértice de cordas fechadas não massivas

A forma geral de operadores de vértice mais simples envolvendo derivações nos campos X^μ , em analogia a expressão (2.67), é

$$V_1 = \frac{g_c}{\alpha'} \int d^2\sigma g^{1/2} \{ (g^{ab} s_{\mu\nu} + i\epsilon^{ab} a_{\mu\nu}) [\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu e^{ik \cdot X}]_r + \alpha' \phi R[e^{ik \cdot X}]_r \} \quad (4.45)$$

com ϵ^{ab} sendo um tensor antisimétrico, $s_{\mu\nu}$ e $a_{\mu\nu}$ respectivamente matrizes simétrica e antisimétrica e ϕ um campo escalar.

Novamente a condição da invariância de Weyl sobre o operador de vértice deve ser imposta :

$$\delta_W V_1 = 0 \quad (4.46)$$

Observando uma invariância de calibre existente em V_1

$$\begin{aligned} s_{\mu\nu} &\longrightarrow s_{\mu\nu} + \xi_\mu k_\nu + \xi_\nu k_\mu \\ a_{\mu\nu} &\longrightarrow a_{\mu\nu} + \xi_\mu k_\nu - \xi_\nu k_\mu \\ \phi &\longrightarrow \phi + \frac{\gamma}{2} k \cdot \xi \end{aligned} \quad (4.47)$$

com γ constante função da distância geodésica e da renormalização escolhida. Precisamos também eliminar polarizações longitudinais inexistentes na corda (ver 2.3).

Obtemos das condições acima $k^2 = 0$ para o primeiro estado excitado da corda fechada em concordância com resultados anteriores.

4.8 Cordas no espaço-tempo curvo

Até agora não fizemos consideração alguma sobre a métrica do espaço-tempo $G_{\mu\nu}$. Tal métrica é função das coordenadas espaço-temporais:

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_M d^2\sigma g^{1/2} g^{ab} G_{\mu\nu}(X) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \quad (4.48)$$

Um espaço-tempo curvo e dinâmico é pano de fundo natural para o aparecimento de grávitons e a teoria de cordas é consistente com este quadro. Para justificá-lo, consideremos o espaço-tempo próximo a curvatura nula.

$$G_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \zeta_{\mu\nu}(X) \quad (4.49)$$

com $\zeta_{\mu\nu}(X)$ bem pequeno. O termo exponencial da integral de caminho de Polyakov pode ser reescrito através de uma expansão de Taylor

$$\exp(-S) = \exp(-S_{Pol}) \left(1 - \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_M d^2\sigma g^{1/2} g^{ab} \zeta_{\mu\nu}(X) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu + \text{termos o. sup.} \right) \quad (4.50)$$

onde vemos que surge um operador de vértice no termo em ζ . Para que este seja

um gráviton, temos

$$\zeta_{\mu\nu}(X) = -4\pi g_c e^{ik \cdot X} s_{\mu\nu} \quad (4.51)$$

de tal maneira que a ação numa exponencial com o espaço-tempo curvo termina por escrever um estado coerente de grávitons.

Podemos partir agora para uma situação mais geral em que a ação não só possui o operador de vértice do gráviton como também de outros estados não massivos da corda fechada:

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma g^{1/2} \{ (g^{ab} G_{\mu\nu}(X) + i\epsilon^{ab} B_{\mu\nu}(X)) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu + \alpha' \Phi(X) R \} \quad (4.52)$$

onde $B_{\mu\nu}(X)$ é um tensor antisimétrico e $\Phi(X)$ um escalar que junto a parte diagonal de $G_{\mu\nu}$ descreve o dÍlaton. Uma teoria de campos com uma ação do tipo (4.52) com os coeficientes do termo quadrático dependente do campo é chamada de modelo sigma não linear.

Como em (4.47), a ação possui a liberdade de calibre

$$\delta B_{\mu\nu}(X) = \partial_\mu \zeta_\nu(X) - \partial_\nu \zeta_\mu(X) \quad (4.53)$$

que é um análogo a nível de tensor do vetor potencial A^μ do eletromagnetismo. A grandeza calibre-invariante é

$$H_{\omega\mu\nu} = \partial_\omega B_{\mu\nu} + \partial_\nu B_{\omega\mu} + \partial_\mu B_{\nu\omega} \quad (4.54)$$

Precisamos garantir a invariância de Weyl para a ação na forma (4.52). Para isso vamos partir da ação Weyl-invariante de Polyakov e considerar pequenas contribuições de $B_{\mu\nu}(X)$ e $\Phi(X)$ e estando $G_{\mu\nu}(X)$ em torno da métrica plana.

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}(X) &= \eta_{\mu\nu} + \chi_{\mu\nu}(X), & \chi_{\mu\nu}(X) &= -4\pi g_c s_{\mu\nu} e^{ik \cdot X} \\ B_{\mu\nu}(X) &= -4\pi g_c a_{\mu\nu} e^{ik \cdot X} \\ \Phi(X) &= -4\pi g_c \phi e^{ik \cdot X} \end{aligned} \quad (4.55)$$

Relacionando a transformação de Weyl na ação quântica com o traço do tensor

energia-momento segundo (4.22), obtemos

$$T^a{}_a = -\frac{1}{2\alpha'}\beta_{\mu\nu}^G g^{ab}\partial_a X^\mu\partial_b X^\nu - \frac{i}{2\alpha'}\beta_{\mu\nu}^B \epsilon^{ab}\partial_a X^\mu\partial_b X^\nu - \frac{1}{2}\beta^\Phi R \quad (4.56)$$

onde β^G , β^B e β^Φ são coeficientes encontrados na expansão da ação, como em (4.52), até segunda ordem nos campos χ , B e Φ . Consideramos que O tensor acima possui ordenação.

$$\begin{aligned} \beta_{\mu\nu}^G &\approx \alpha' \mathbf{R}_{\mu\nu} + 2\alpha' \Delta_\mu \Delta_\nu \Phi - \frac{\alpha'}{4} H_{\mu\lambda\omega} H_\nu{}^{\lambda\omega} \\ \beta_{\mu\nu}^B &\approx -\frac{\alpha'}{2} \Delta^\omega H_{\omega\mu\nu} + \alpha' \Delta^\omega \Phi H_{\omega\mu\nu} \\ \beta^\Phi &\approx \frac{D-26}{6} - \frac{\alpha'}{2} \Delta^2 \Phi + \alpha' \Delta_\omega \Phi \Delta^\omega \Phi - \frac{\alpha'}{24} H_{\mu\nu\lambda} H^{\mu\nu\lambda} \end{aligned} \quad (4.57)$$

A condição para invariância de Weyl fornece 3 equações de movimento para os campos G , B e Φ :

$$\beta^G = \beta^B = \beta^\Phi = 0 \quad (4.58)$$

onde a primeira equação se assemelha a equação de Einstein com as fontes de energia provenientes do dilaton e do tensor antisimétrico.

Nas equações de movimento (4.58) Φ sempre aparece diferenciado, de forma que existe uma invariância a soluções Φ deslocadas de uma constante. Na ação (4.52) vemos que uma translação em Φ é sempre uma contribuição proporcional ao número de Euler, sendo este invariante sob transformações de Weyl. Num background (configuração de campos G , B e Φ) simples

$$\Phi(X) = \Phi_0$$

podemos associar Φ_0 com a constante λ responsável pela força de acoplamento entre cordas (seção 4.3): $\lambda = \Phi_0$ e desta forma entendemos que λ não é um parâmetro livre, mas uma parte da configuração do background da corda.

Capítulo 5

Cordas Não Críticas

Cordas não críticas são cordas definidas num espaço de dimensão $D < 26$. A perda aparente da invariância de Weyl é contornada pelo surgimento de um campo escalar extra, o campo de Liouville.

No estudo que se segue, expomos cordas não críticas, segundo o trabalho de Polyakov [10] e Polchinski [1], e com o intuito de alcançar um entendimento qualitativo da aplicação desta teoria em confinamento de quarks, revisamos o critério de Wilson [20] para confinamento e apresentamos razões para que o operador laço de Wilson possa ser interpretado como um funcional integral cuja ação é do tipo corda não crítica.

5.1 Corda Não Crítica

Vamos admitir apenas a preservação do difeomorfismo. O funcional integral (ou ação quântica) de uma corda é inicialmente

$$\int \frac{[dg dX]}{Vol_{dif}} \exp(-S[X, g]) \quad (5.1)$$

onde a métrica g interna da folha de universo da corda é função de (σ_1, σ_2) , coordenadas internas da folha de universo da corda. Uma fixação de calibre de tais coordenadas elimina 2 variáveis livres das 3 existentes na métrica da folha de uni-

verso de tal maneira que a integração sobre a métrica g ocorra segundo a forma:

$$g_{ab}(\varphi) = e^\varphi \delta_{ab} \quad (5.2)$$

A medida dg passa a ser substituída pela medida $d\varphi$ relativa apenas ao espaço de métricas conforme.

O funcional integral da corda se torna do tipo:

$$\int [d\varphi dX] \exp(-S[X, \varphi]) \quad (5.3)$$

Analisando primeiramente a integração nos campos X^μ , a integral

$$\int [dX] \exp(-S[X, g]) = Z[g] \quad (5.4)$$

seria o funcional integral (a menos de campos fantasmas para correção do volume de integração dos calibres) se não houvesse uma anomalia de Weyl presente. Ou seja, variações por transformação de Weyl em Z :

$$\delta_W Z[e^\varphi \delta] = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma g^{1/2} \delta\varphi \langle T^a_a \rangle \quad (5.5)$$

não são nulas uma vez que quanticamente o tensor energia-momento não tem mais traço nulo:

$$T^a_a = -\frac{D-26}{12} R \quad (5.6)$$

onde $D-26$ é a carga conforme do tensor energia-momento na teoria de cordas bosônicas e R é o escalar de Ricci do plano de evolução da corda. No calibre conforme de g , utilizando eq.(4.27)

$$R = -e^{-\varphi} \partial_a \partial_a \varphi \quad (5.7)$$

com a derivação parcial feita na métrica plana.

Desenvolvendo $Z[g]$ a partir de (5.5), chegamos a

$$Z[\exp(2\varphi)\delta] = Z[\delta] \exp\left(\frac{D-26}{48\pi} \int d^2\sigma (\partial_a\varphi)^2\right) \quad (5.8)$$

Isto significa que para a anomalia de Weyl não nula ($D \neq 26$), o funcional integral da corda equivale ao funcional de uma teoria de cordas Weyl-invariante acrescido de um campo escalar extra. Substituindo (5.8) em (5.3):

$$Z = \int [d\varphi dX] \exp(-S[\varphi, X]) \quad \text{onde,} \\ S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \left(\alpha' \left(\frac{26-D}{12} \right) (\partial\varphi)^2 + (\partial X^\mu)^2 \right) \quad (5.9)$$

A métrica da folha de universo acima é plana e não existe mais simetria de Weyl nesta ação. Isso nos dá a liberdade de considerar outros termos não Weyl-invariante a serem acrescentados a ação.

A teoria de cordas não críticas é autoconsistente e seus resultados e interpretação física não são necessariamente equivalentes ao modelo de cordas críticas com compactação. Em outras palavras, no caso de $D = 4$ o campo extra de Liouville na teoria não crítica talvez não seja capaz de gerar o mesmo comportamento físicos tais quais os aspectos da não-comutatividade espaço-tempo que surgem da compactação das dimensões extras na teoria crítica.

5.2 Critério de Confinamento de Wilson

Vamos fazer uma breve abordagem sobre o laço de Wilson e seu critério de confinamento [21]. Este estudo presume a existência de uma teoria de calibre que descreva a interação entre quarks.

Trabalhando num espaço Euclidiano, o laço de Wilson, definido numa grade de posições discretas do espaço-tempo, possui um limite contínuo,

$$W(C) = Tr \left\langle \mathcal{P} \exp \left[-ig \oint_C dx^\mu A^\mu(x) \right] \right\rangle \quad (5.10)$$

onde C é um caminho fechado, isto é, um laço, A^μ são os campos de calibre e \mathcal{P} é

o operador de ordenamento de caminho. Para um entendimento físico do operador $W(C)$, reescrevemos

$$\oint_C dx^\mu A^\mu(x) = \int d^4x j^\mu(x) A^\mu, \quad (5.11)$$

onde j^μ é uma função nula exceto ao longo do caminho C . Tal função pode ser vista como uma corrente externa de quarks a induzir campos de calibre. Num caminho espaço-temporal C , a corrente externa de quarks na integral (5.11) descreve a criação de um par quark-antiquark, sua propagação e seu aniquilamento num tempo subsequente. A integral (5.11) escrita numa exponencial em $W(C)$ assume o valor do termo de interação entre quarks e campos de calibre na ação. Portanto, interpretamos $W(C)$ como a amplitude de probabilidade de criação, propagação e destruição de um par quark-antiquark ao longo de um laço C . Vide fig.5.1.

Para que quarks existam em estados não ligados, é preciso que caminhos de propagação quark-antiquark afastados como em C1 na fig.5.1 tenham uma probabilidade significativa. Para que haja confinamento de quarks, isto é, quarks só existam em estado ligado, é preciso que só caminhos estreitos de propagação quark-antiquark como em C2 tenham probabilidade significativa. O critério de Wilson relaciona a possibilidade de confinamento com 2 tipos de comportamento do laço de Wilson $W(C)$:

$$W(C) \sim \begin{cases} e^{-KL(C)} & \Rightarrow \text{sem confinamento} \\ e^{-K\Sigma(C)} & \Rightarrow \text{há confinamento} \end{cases} \quad (5.12)$$

onde $L(C)$ é o perímetro de C e $\Sigma(C)$ é a área contornada por C . De posse desse conhecimento, vamos ilustrar situações de confinamento e liberdade assintótica quark-antiquark utilizando o caminho C3 que traça um retângulo de lados como percursos apenas no eixo temporal e espacial separadamente. Relevemos a invariância de Lorentz.

No caso de confinamento :

$$W(C) \sim e^{-2KLT}$$

O papel estatístico da exponencial nos permite interpretar o expoente do tipo $-ET$

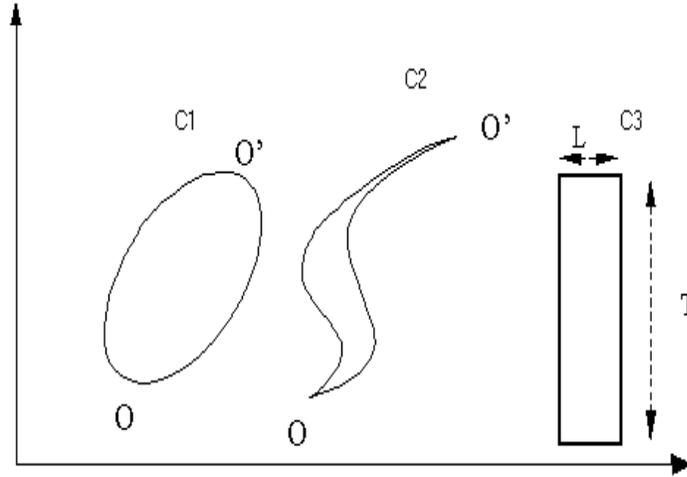


Figura 5.1: Laços de Wilson

com E sendo a energia potencial do par quark-antiquark. Então :

$$E(L) = 2KL$$

e a força entre quark e antiquark é constante, para qualquer distância entre eles, dentro do limite de acoplamento forte em baixas energias referentes a medições de espalhamento em distâncias hadrônicas onde o confinamento se realiza.

No caso de liberdade assintótica que se realiza a altas energias/curtas distâncias, imaginando o percurso C3 com $T \gg L$, o laço de Wilson tem o seguinte comportamento:

$$W(C) \sim e^{-2KT}$$

onde temos a situação $E = 2K$, isto é, as partículas percorrem uma superfície equipotencial, livres.

5.3 Cordas Confinantes

Na situação em que a teoria de calibre é confinante, o comportamento do laço de Wilson de proporcionalidade a exponencial de uma área sugere a possível existência

de teoria de cordas que descreve o laço de Wilson, pois conforme interpretação acima, o operador de Wilson pode ser visto como um funcional integral e por outro lado ação de uma corda é uma integração de área limitada pelas bordas da corda, que por difeomorfismo interno podem se transformar na curva C . Tal é a conjectura de A. Polyakov [22], ou seja, que a forma

$$W(C) = \int [d\varphi][dX] e^{-S(\varphi, X)} \quad (5.13)$$

com S descrevendo a ação da corda não crítica, é solução das equações de Yang-Mills no espaço de laços que fornecem a dinâmica do operador de Wilson [23, 24]:

$$\widehat{L}W(C) = g_0^2 \int ds du \dot{c}(s)\dot{c}(u)\delta(c(s) - c(u))W(\overline{C})W(\overline{\overline{C}}) \quad (5.14)$$

com o operador laço \widehat{L} valendo

$$\widehat{L} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint ds \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dt \frac{\delta^2}{\delta c(s+t)\delta c(s-t)} \quad (5.15)$$

Uma outra condição de contorno para as cordas confinantes é a existência da simetria "zigzag" no Operador laço de Wilson $W(C)$. Tal simetria consiste na invariância do laço de Wilson sob transformações $s \rightarrow \alpha(s)$ gerais. Em transformações não difeomórficas em que $\frac{d\alpha}{ds}$ troca de sinal, o contorno $c(\alpha(s))$ reverte seu caminho, a qual não gera variação alguma no laço de Wilson por ser um operador de transporte paralelo. Por outro lado, a ação da corda sofrerá restrições para manifestar a simetria "zigzag", que é mais genérica que o difeomorfismo da corda.

Encontrar cordas confinantes, isto é, que satisfaçam as condições acima, críticas ou não, é um dos atuais campos de trabalho dos teóricos em cordas. Em recente trabalho [25] seus autores encontraram uma descrição de corda não crítica que obedece a conjectura acima dentro da aproximação WKB. O resultado é mais impressionante ao se constatar que sua legitimidade se dá somente em $D = 4$.

Capítulo 6

Considerações Finais

Dentre os temas aqui tratados de teoria de cordas, gostaríamos de mencionar alguns problemas deixados em aberto e que são razão de estudos ainda atuais que não puderam ser alcançados nesta abordagem introdutória.

O fato da dimensão $D = 26$ não ser observada até hoje é justificada na teoria de cordas pela existência de dimensões compactas de tamanho da ordem do comprimento de Planck (l_{Pl}), de tal forma que nenhuma partícula trafegue nestas dimensões.

A compactação das dimensões extras fez surgir uma nova simetria conhecida como dualidade T, que se realiza entre dimensões compactas de curvatura R e α'/R . O quadro de dimensões compactas tornou claro a existência de soluções de cordas abertas cujas extremidades vivem em superfícies (membranas) p -dimensionais ($p < D$), conhecidas como p -branas. Tais soluções são não-perturbativas e tem sua importância para os casos que não podem ser estudados perturbativamente, como confinamento e buracos negros. Em novas interpretações da teoria de cordas, as branas são tidas como os objetos reais e as cordas descrevem tensões entre branas.

Um outro problema na teoria de cordas até aqui tratada é a existência de estados taquiônicos. Esta situação é resolvida pela adição de supersimetria e pela projeção GSO (expurgação dos estados taquiônicos). A supersimetria oferece a vantajosa contribuição de diminuir a dimensão crítica para $D = 10$ e acrescentar estados fermiônicos a teoria de cordas.

Notadamente, somente agora conseguiu-se [26] os resultados obtidos pela QCD

e confirmados experimentalmente de espalhamento às altas energias. Este é um antigo erro na teoria de cordas que a incapacitou de ser uma teoria de interação de quarks e gluons por 30 anos. Tal correção foi feita dentro da validade da conjectura AdS/CFT que estabelece uma dualidade entre teoria de cordas com supergravidade e teoria de campos conforme.

Por fim, diversas diretrizes de estudo são hoje seguidas em teoria de cordas e permanecem em aberto:

- Gravitação Quântica - estudos da conjectura ADS/CFT, cálculo de entropia e descrição de microestados de um buraco negro, aplicação do princípio de Holografia.
- Geometria não comutativa, CFT e aspectos matemáticos
- Soluções tipo Universo em Branas e estudo da constante cosmológica (ou parâmetro cosmológico).
- Teoria de Campos de Cordas - promete resolver a diversidade de soluções de vácuo na teoria de cordas e colocar mais vínculos na dinâmica do campo de fundo (métrica G + campos)
- Teorias efetivas, supergravidade, teorias fundamentais (Teoria M)

Estes e outros aspectos correntemente investigados na Teoria de Cordas visam tornar a única teoria de unificação uma proposta efetiva de modelamento da realidade física.

Bibliografia

- [1] J. Polchinski. *String theory. Vol. 1 and 2*. Cambridge Univ. Pr., UK, 1998.
- [2] B. Hatfield. *Quantum field theory of point particles and strings*. Redwood City, USA: Addison-Wesley (1992) 734 p. (Frontiers in physics, 75).
- [3] M. B. Green, J. H. Schwarz, and Edward Witten. *Superstring Theory Vol. 1 and 2*. Cambridge University Press, 1987.
- [4] E. Kiritsis. *Introduction to superstring theory*. 1997.
- [5] C. Wotzasek. *Notas de aula em teoria de campos conforme*. 1990.
- [6] Y. Nambu. *Lectures at the copenhagen symposium*. 1970.
- [7] T. Goto. *Prog. Theor. Phys.*, 46:1560, 1971.
- [8] L. Brink, P. Di Vecchia, and P. Howe. *Phys. Lett.*, B65:471, 1976.
- [9] S. Deser and B. Zumino. *Phys. Lett.*, B65:369, 1976.
- [10] Alexander M. Polyakov. *Quantum geometry of bosonic strings*. *Phys. Lett.*, B103:207–210, 1981.
- [11] D. M. Capper, J. J. Dulwich, and M. J. Litvak. *On the evaluation of integrals in the light cone gauge*. *Nucl. Phys.*, B241:463, 1984.
- [12] G. Leibbrandt. *From obscurity to two-loop respectability: Progress in the light cone gauge*. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 90:19–21, 2000.
- [13] Farhad Ardalan and Freydoon Mansouri. *Quantum theory of dual relativistic parastring models*. *Phys. Rev.*, D9:3341, 1974.

- [14] P. Goddard and C. B. Thorn. *Phys. Lett.*, 40B(2):235, 1972.
- [15] Goldstone J. Rebbi C. Goddard, P. and C. B. Thorn. *Nuc. Phys.*, B56:109, 1973.
- [16] R. C. Brower. Spectrum-generating algebra and no-ghost theorem for the dual model. *Phys. Rev.*, D6:1655, 1972.
- [17] A. A. Belavin, Alexander M. Polyakov, and A. B. Zamolodchikov. Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory. *Nucl. Phys.*, B241:333–380, 1984.
- [18] D. Friedan, E. J. Martinec, and S. H. Shenker. Conformal invariance, supersymmetry and string theory. *Nucl. Phys.*, B271:93, 1986.
- [19] D. R. Karakhanian, R. P. Manvelian, and R. L. Mkrtchian. Area preserving structure of 2-d gravity. *Phys. Lett.*, B329:185–188, 1994.
- [20] K. G. Wilson. Confinement of quarks. *Phys. Rev.*, D10:2445–2459, 1974.
- [21] K. Huang. *Quarks, Leptons and Gauge Fields*. Singapore, Singapore: World Scientific (1992) 333p.
- [22] A. M. Polyakov. String theory and quark confinement. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 68:1–8, 1998.
- [23] A. M. Polyakov. Gauge fields as rings of glue. *Nucl. Phys.*, B164:171–188, 1980.
- [24] Y. Makeenko and A. Migdal. *Nucl. Phys.*, B188:269, 1986.
- [25] A. M. Polyakov and V. Rychkov. Gauge fields - strings duality and the loop equation. *Nucl. Phys.*, B581:116–134, 2000.
- [26] Joseph Polchinski and Matthew J. Strassler. Hard scattering and gauge/string duality. *Phys. Rev. Lett.*, 88:031601, 2002.