CBPF-MO-002/98

INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA TENSORIAL

Letícia Maria Gonçalves Furtado
Patrícia Macedo da Costa Jorge
Patrícia Duarte Peres
Renata Alves Campos
Viviane Monteiro Braconi

Curso de Ciência da Computação
Universidade Católica de Petrópolis (UCP)
e

PIBIC - CNPq / CBPF.

Maio '98

Introdução ao conceito de TENSORES

As teorias e os modelos propostos pela Física para tratar os sistemas que se apresentam na Natureza utilizam-se de grandezas categorizadas como ESCALARES, VETORES, TENSORES ou ESPINORES, para parametrizar a evolução e descrever os estados dos mesmos.

Seja na Física Clássica que nas Físicas Quânticas e Relativísticas, as grandezas físicas adquirem o status de escalares, vetores, tensores ou espinores. Porém, o que define este ou aquele caráter são as rotações (na verdade, o grupo de rotações) dos eixos coordenados adotados pelos sistemas-de-referência adotados para se estudar os fenômenos a serem descritos.

É, portanto, frente às rotações que uma particular grandeza física será classificada de escalar, vetorial,tensorial ou espinorial.

Apesar de ainda prematuro, convém mencionar que as rotações de eixo coordenados podem diferir segundo o tipo de Física que se está adotando. Por exemplo, a Física Clássica Newtoniana e a Física Quântica não-relativística adotam como rotações as usuais rotações dos eixos coordenados de espaços como o R^2 e o R^3. Assim, escalares, vetores, tensores ou espinores serão grandezas que apresentarão um determinado padrão de transformação sob as rotações acima.

Passando ao domínio da Física Relativística, onde tempo e espaço não são tratados como coordenadas disjuntas, o conceito de rotação de eixos coordenados é estendido: consideram-se transformações mais gerais do que as usuais rotações no R^2 e no R^3. A consequência imediata desta extensão no grupo de rotações é a mudança no caráter de certas grandezas.

Por exemplo, uma quantidade que tenha caráter escalar frente às rotações em R^3 pode, no domínio da Física Relativística, passar a desempenhar papel de componente de um vetor. É o caso da energia: em Física Newtoniana, esta grandeza é categorizada como escalar; já na Mecânica Relativística, a energia assume cará ter vetorial (na verdade, a energia e o momentum linear passam a constituir um vetor de 4 componentes, definido em um novo espaço, ao final nos referimos como espaço de Minkowski).

O que se pode concluir, e isto será aprofundado no material que aqui apresentamos, é que, ao discutimos uma teoria física, devemos, antes de mais nada, explicitar as possíveis rotações de eixos coordenados dos referenciais que se podem adotar. Em seguida, dependendo de como as grandezas transformam-se sob estas rotações, as mesmas serão classificadas como escalares, vetoriais, tensoriais ou espinoriais.

De nosso estudo de diferentes campos da Física não-relativística, podemos citar exemplos de grandezas que são categorizadas de escalares: energia, massa, temperatura, pressão, entropia, potencial eletrostático. Já na Física Relativística, a energia, como já mencionado, e o potencial eletrostático passam a se incorporar a quadrivetores; as demais grandezas acima permanecem escalares.

Como exemplos de vetores em Física não-relativística, podemos mencionar: posição, velocidade, momentum linear, momentum angular, campos elétrico e magnético, potencial vetorial magnético, vetor de Poynting, e outros.

Já do ponto-de-vista da Relatividade, a posição, a velocidade, o momentum linear e o potencial vetorial magnético permanecem com caráter vetorial, porém, são incorporados em 4-vetores convenientemente definidos.

Quanto ao momentum angular, aos campos elétrico e magnético e ao vetor de Poynting, todas estas grandezas passam a se classificar como tensores no domínio relativístico.

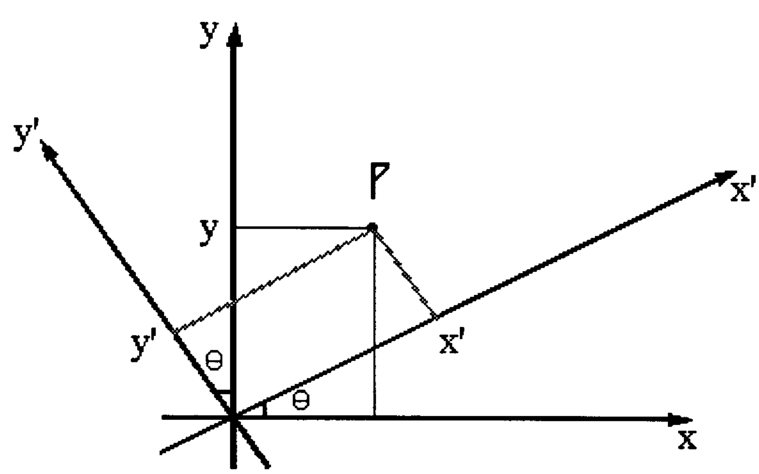
Finalmente, em Física Clássica, um exemplo de grandeza tensorial é o momento de inércia, definido no estudo de rotações de corpos rígidos.

Também, em Mecânica Newtoniana, aparece o conceito de tensor de tensões. (Não discutiremos aqui o conceito e a aplicação dos espinores).

Tendo feito esta exposição de idéias gerais a respeito da classificação de grandezas frente a rotações, discutiremos, na próxima secção, exemplos explícitos de rotações e de como certas grandezas físicas transformam-se sob as mesmas.

Rotações no R^2 e Tensores

Tomemos como base o espaço Euclidiano R^2, parametrizado por coordenadas (x;y), e efetuemos uma rotação de ângulo θ de seus eixos coordenados, o que nos leva a coordenadas (x';y').



O ponto P da figura acima, quando referido aos eixos - x e - y, apresenta coordenadas (x;y); no sistema de eixos - x' e - y', suas coordenadas lêem-se (x';y').

A relação entre as mesmas é:

$$x = (\cos\theta)x' - (\sin\theta)y'$$

$$y = (\sin\theta)x' + (\cos\theta)y',$$

ou , invertendo-se,

$$x' = (\cos\theta)x + (\sin\theta)y$$

$$y' = -(\sin\theta)x + (\cos\theta)y.$$

Em termos matriciais:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R(\theta)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

onde

$$R(\theta) \equiv \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

A matriz-R é ortogonal ($R^tR = RR^t =$ matriz identidade) e apresenta determinante unitário ($detR = 1$). Matrizes -2×2 reais, ortogonais e com determinante igual a um, constituem o chamado grupo SO(2). O importante a fixar aqui é a lei-de-transformação do vetor-posição $(x;y)$ sob as rotações de ângulo - θ. Esta forma de transformação caracteriza os vetores. Portanto, qualquer grandeza vetorial, $\vec{A}$, deve, sob rotações no plano, transformar-se segundo a expressão:

$$\begin{pmatrix} A'_x \\ A'_y \end{pmatrix} = R(\theta)\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}.$$

Consideremos a grandeza

$$\Phi \equiv A_x^2 + A_y^2.$$

Escrevendo-a no sistema de coordenadas transformado, temos:

$\Phi' \equiv A'^2_x + A'^2_y.$

Com a transformação acima, chega-se a:

$$\Phi' = (\cos\theta A_x + \sin\theta A_y)^2 + (-\sin\theta A_x + \cos\theta A_y)^2,$$

$$\Phi' = A_x^2 + A_y^2 = \Phi.$$

Portanto, a grandeza Φ não sofre qualquer mudança frente à rotação R(θ), isto é,Φ é a mesma nos 2 sistemas de eixos. Este comportamento define uma chamada grandeza escalar. Apresentamos um outro exemplo de grandeza escalar.

Seja :

$$\chi \equiv \frac{\partial}{\partial x}A_x + \frac{\partial}{\partial y}A_y.$$

No sistema transformado, teremos:

$$\chi' = \frac{\partial}{\partial x'}A'_x \frac{\partial}{\partial y'}A'_y.$$

Pela regra da cadeia, podemos escrever:

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x'}$$

$$= \cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y} \;;$$

$$\frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y'}$$

$$= -\sin\theta\frac{\partial}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial x} \;.$$

Assim:

$$\chi' = \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\,\frac{\partial}{\partial y}\right)(\cos\theta A_x + \sin\theta A_y) + \left(-\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} + \cos\theta\,\frac{\partial}{\partial y}\right)(-\sin\theta A_x + \cos\theta\,A_y)$$

$$\chi' = \frac{\partial}{\partial x} A_x + \frac{\partial}{\partial y} A_y = \chi.$$

Logo, x também exibe caráter escalar.

Tomemos uma grandeza um pouco mais peculiar:

$$\Delta \equiv \frac{\partial}{\partial x} A_y - \frac{\partial}{\partial y} A_x.$$

Escrevendo-a no sistema transformado:

$$\Delta' \equiv \frac{\partial}{\partial x'} A'_y - \frac{\partial}{\partial y'} A'_x.$$

$$A' = \left(\cos\theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial y}\right)(-\sin\theta A_x + \cos\theta A_y) + \left(-\sin\theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos\theta \frac{\partial}{\partial y}\right)(\cos\theta A_x + \sin\theta A_y)$$

$$\Delta' \equiv \frac{\partial}{\partial x} A_y - \frac{\partial}{\partial y} A_x = \Delta.$$

Assim, frente às rotações, a grandeza Δ é também um <u>escalar</u>.

Finalmente, consideremos uma grandeza com 3 componentes:

$(T_{11}, T_{12} = T_{21}\, e\, T_{22})$, definidas como segue:

$$T_{11} \equiv A_x^2,$$

$$T_{12} = T_{21} = A_x A_y,$$

$$T_{22} = A_y^2.$$

Tal grandeza é gerada pelo produto das componentes do vetor $\vec{A}$ consigo próprio.

Vejamos como a mesma reage às rotações:

$$T'_{11} = A'^2_x = (\cos\theta A_x + \sin\theta\, A_y)^2$$

$$= \cos^2\theta A_x^2 + \sin^2\theta\, A_y^2 + 2\sin\theta\cos\theta A_x\, A_y$$

$$= \cos^2\theta T_{11} + \sin^2\theta\, T_{22} + 2\sin\theta\cos\theta\, T_{12}\,;$$

$$T'_{12} = T'_{21} = A'_x A'_y = (\cos\theta A_x + \sin\theta\, A_y)(-\sin\theta A_x + \cos\theta A_y\,)$$

$$T'_{12} = -\sin\theta\cos\theta T_{11} + \sin\theta\cos\theta T_{22} + (\cos^2\theta - \sin^2\theta\,)T_{12}\,;$$

$$T'_{22} = A'^2_y = (-\sin\theta A_x + \cos\theta A_y\,)^2$$

$$T'_{22} = \sin^2\theta\, T_{11} + \cos^2\theta\, T_{22} - 2\sin\theta\cos\theta\, T_{12}\,.$$

O que se observa é que a transformação de cada componente $T_{ij}\,(i,j = 1,2)$ depende linearmente das demais componentes. Este padrão de comportamento define um tensor. Em outras palavras: um tensor é um conjunto de componentes cujas leis-de-transformação sob rotações expressam as componentes transformadas como combinações lineares das componentes originais. É fácil verificar que as transformações dadas acima para as componentes podem ser agrupadas na seguinte equação matricial:

$$T'_{ij} = \sum_{k=1}^{2} \sum_{l=1}^{2} R_{ik} R_{jl}\, T_{kl}$$

O exemplo de tensor acima, caracterizado por 2 índices, define um tensor de rank-2. (O rank de umtensor é o número de índices que o mesmo apresenta.)

Um outro exemplo de tensor de rank-2 é dado por:

$$S_{11} = xA_x$$

$S_{12} = xA_y$

$S_{21} = yA_x$

$S_{22} = yA_y$,

isto é, um tensor com componentes $S_{ij} = x_i A_j$.

Procedendo-se analogamente ao que se fez no caso do tensor T, pode-se demonstrar que S transforma-se como abaixo:

$$S'_{ij} = \sum_{k=1}^{2} \sum_{l=1}^{2} R_{ik} R_{jl} S_{kl}$$

Generalizando, para tensores de rank superior, a transformação das componentes segue o mesmo padrão que o mostrado acima:

$$W'_{ijk} = \sum_{l=1}^{2} \sum_{m=1}^{2} \sum_{n=1}^{2} R_{il} R_{jm} R_{kn} W_{lmn}$$

(Pede-se ao leitor que procure construir, por si próprio, um exemplo explícito de tensor de rank-3.)

Passando-se a um espaço genérico, R^n, suponhamos efetuar no mesmo a transformação linear abaixo:

$x'_i = R_{ij} x_j$, onde $i, j = 1, 2, ..., n$

e a matriz R sendo tal que: $R^t R = I_n$ (onde I representa a matriz identidade) e det $R = +1$, ou seja, R é uma matriz ortogonal $n \times n$ com determinante igual à unidade. Uma matriz com estas duas características é denominada matriz-SO(n). S designa special, det $= +1$; O significa orthogonal, $R^{-1} = R^t$; n indica ser a matriz $n \times n$. Matrizes-SO(n) descrevem rotações dos eixos coordenados no espaço R^n . São, nada mais nada menos, que uma generalização R(θ) do caso SO(2) ao caso de n dimensões.

É interessante observar que as matrizes-SO(n) preservam as normas dos vetores:

$$\|v\|^2 \equiv v_i v_i.$$

Com uma rotação-SO(n),

$$v_i' = R_{ij} v_j$$

Portanto,

$$\begin{aligned} v_i' \, v_i' &= R_{ik} R_{im} v_k v_m \\ &= (R^t)_{ki} R_{im} v_k v_m \\ &= \delta_{km} v_k v_m = v_k v_k \\ &= v_i v_i \ , \end{aligned}$$

logo $\|v'\|^2 = \|v\|'^2$.

Procedendo-se por extensão do que se discutiu no caso do R^2,um tensor de R^n com rank p é uma grandeza com p índices, todos assumindo valores de 1 até n (logo, possui n^p componentes) e que se transforma, sob rotações, como segue:

$$T'_{ij..p} = R_{ik} R_{jl} ....R_{pq} T_{kl....q}$$

Tendo introduzido de forma geral a idéia de tensores, iremos, em seguida, discutir as várias propriedades dos mesmos e a álgebra associada a eles em espaços genéricos.

Introdução ao Cálculo Tensorial

É uma extensão ao conceito de escalares, vetores e matrizes, sendo estes tensores de rank 0, 1 e 2 , respectivamente. O rank de um tensor representa a quantidade de indices que este possui, onde cada índice varia de acordo com a dimensão do espaço (D). A notação usualmente adotada é a seguinte:

T - Tensor de rank 0 (escalar).

Sem componentes - Φ , por exemplo.

T_i - Tensor de rank 1 (vetor).

Com uma componente - $\vec{v}_i = (v_1 \; ; \; v_2 \; ; \; ... \; ; \; v_D)$

onde $i = 1..D$

T_{ij} - Tensor de rank 2 (matriz).

onde, $i,j = 1..D$

Esses Tensores posuem D^2 componentes.

T_{ijk} - Tensor de rank 3.

E etc.

Para Tensores T_{i_n} (n - componentes) temos D^n componentes. Ou seja, T_{ijk} possui D^3 componentes.

Tipos de índices

Indices livres

São os índices em que, em um tensor, não há um par correspondente.

Ex:

a_i - i é um índice livre

a_i^j - i e j são índices livres

Indices mudos

São aqueles em que, em um tensor, há um par correspondente. Todo índice mudo pode ser trocado por outros.

Ex:

a_{ii} - i é um índice mudo

$a_{ij}^{\ j}$ - j é um índice mudo e i é livre

$a_i^{\ i} = a_j^{\ j}$ - A troca de índices não modificou o tensor.

Convenção do Somatório de Einstein

Convenciona que índices repetidos (mudos) representam somatórios, onde os índices variam de acordo com a dimensão do espaço. Dizemos que os índices envolvidos em somátorios foram contraídos ou que sofreram uma contração.

$$a_i x_i = \sum_i a_i x_i = \sum_{i=1}^{D} a_i x_i = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \ldots + a_D x_D$$

Os índices livres em somatórios podem assumir valores independentes dos termos envolvidos, como no exemplo que se segue (supondo D = 2):

$$a_{ij}x_j = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2$$

ou seja, i pode assumir, em qualquer um dos membros, tanto o valor 1 como o valor 2, independentemente do somatório.

Observação importante :

Em um mesmo termo de uma expressão, não pode haver mais de dois índices iguais.

Ex:

$a_{ii}x_i$ não faz sentido.

$a^i{}_j x_i x_i$ não faria sentido, a não ser que representasse: $a^i{}_j(x_i)^2$

Substituições

Ao fazermos substituições, precisamos ter cuidado com todos os índices, que não podem possuir mais de um par no mesmo termo.

Ex:

Substituir $y_i = a_{ij}x_j$ em $Q = b_{ij}y_i x_j$

Se fossemos fazer a substituição do jeito em que se encontra a expressão, obteríamos o seguinte resultado:

$Q = b_{ij}a_{ij}x_j x_j$ que não teria sentido pelo número de índices repetidos.

Para aplicarmos a substituição, temos que primeiro fazer a troca dos índices mudos na expressão a ser substituida:

$y_i = a_{ik}x_k$ e depois fazer a substituição: $Q = b_{ij}a_{ik}x_kx_j$

Ex:

Substituir $y_i = a_{ij}x_j$ em $Q = g_{ij}y_iy_j$ em termos de x.

Fazendo a troca de índices: $y_i = a_{ir}x_r$ e $y_j = a_{js}x_s$

$Q = g_{ij}a_{ir}x_ra_{js}x_s = g_{ij}a_{ir}a_{js}x_rx_s$

Adotando um termo com os índices livres:

$Q = h_{rs}x_rx_s$ onde $h_{rs} = g_{ij}a_{ir}a_{js}$

OBS: Ambos os lados de uma igualdade devem estar coerentes com o número de índices livres e posição dos mesmos (em cima ou em baixo), não importando o número de índices mudos.

$T_{ij} = a_{ik}{x_j}^k$ - esta expressão está coerente.

$X = {x_a}^a y_i + {y_b}^b w_j$ - não está coerente devido aos índices livres do lado direito da igualdade: i e j , assim como o lado esquerdo, que representa um tensor de rank 0.

Delta de kronequer (δ)

Pela sua definição, o delta de Kronecker elimina as componentes fora da diagonal principal do tensor com o qual esteja operando, desde que este possua um índice mudo com o delta.

$$\delta_{ij} \qquad i = 1,2,....D.$$

D = dimensão. Exemplo: No R^3, a dimensão é = 3.

$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad no\ R^2.$$

$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} no\, R^3.$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} +1 \,;\, i = j \\ 0 \,;\, i \neq j \end{cases}$$

$$T_{ij} = \delta_{ij} + v_i v_j$$

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

$$T_{11} = \delta_{11} + v_1 v_1 = 1 + v_1^2$$

$$T_{12} = \delta_{12} + v_1 v_2 = v_1 v_2$$

$$T_{13} = \delta_{13} + v_1 v_3 = v_1 v_3$$

$$T_{21} = \delta_{21} + v_2 v_1 = v_2 v_1 = T_{12}$$

$$T_{22} = \delta_{22} + v_2 v_2 = 1 + v_2^2$$

$$T_{23} = \delta_{23} + v_2 v_3 = v_2 v_3$$

$$T_{31} = \delta_{31} + v_3 v_1 = v_3 v_1 = T_{13}$$

$$T_{32} = \delta_{32} + v_3 v_2 = v_3 v_2 = T_{23}$$

$$T_{33} = \delta_{33} + v_3 v_3 = 1 + v_3^2$$

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 1 + {v_1}^2 & v_1 v_2 & v_1 v_3 \\ v_2 v_1 & 1 + {v_2}^2 & v_2 v_3 \\ v_3 v_1 & v_3 v_2 & 1 + {v_3}^2 \end{pmatrix}$$

$$T_{ij} = \underbrace{1}_{\downarrow} + \begin{pmatrix} {v_1}^2 & v_1 v_2 & v_1 v_3 \\ v_2 v_1 & {v_2}^2 & v_2 v_3 \\ v_3 v_1 & v_3 v_2 & {v_3}^2 \end{pmatrix}$$

Sendo que este número 1 é a seguinte matriz: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\underline{R^3}$:

$$S = v_i u_j \delta_{ij}$$

$$S = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} v_i u_j \delta_{ij}$$

$$S = v_1 u_1 \underbrace{\delta_{11}}_{1} + \underbrace{v_1 u_2 \delta_{12}}_{0} + \underbrace{v_1 u_3 \delta_{13}}_{0} + \underbrace{v_2 u_1 \delta_{21}}_{0} +$$

$$+ v_2 u_2 \underbrace{\delta_{22}}_{1} + \underbrace{v_2 u_3 \delta_{23}}_{0} + \underbrace{v_3 u_1 \delta_{31}}_{0} + \underbrace{v_3 u_2 \delta_{32}}_{0} + v_3 u_3 \underbrace{\delta_{33}}_{1}$$

$$S = v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3$$

$$S = v_i u_i$$

$$T_{ijk}$$

$$S_k = T_{ijk} \delta_{ij} = T_{iik}$$

$$S_1 = T_{ij1} \delta_{ij}$$

$$= T_{11}\delta_{11} + T_{12}\delta_{12} + T_{13}\delta_{13} + T_{21}\delta_{21} +$$

$$+ T_{22}\delta_{22} + T_{23}\delta_{23} + T_{31}\delta_{31} + T_{32}\delta_{32} + T_{33}\delta_{33}$$

$$= T_{111} + T_{221} + T_{331}$$

$$S_1 = T_{ii1}$$

$$S_2 = T_{ij2} \delta_{ij}$$

$$S_3 = T_{ij3} \delta_{ij}$$

$$S_{ij} = T_{im} U_{jn} \delta_{mn} = T_{im} U_{jm}$$

$$S_{11} = T_{1m} U_{1m} = T_{11} U_{11} + T_{12} U_{12} + T_{13} U_{13}$$

$$S_{23} = T_{2m} U_{3m} = T_{21} U_{31} + T_{22} U_{32} + T_{23} U_{33}$$

$$S_{31} = T_{3m} U_{1m} = T_{31} U_{11} + T_{32} U_{12} + T_{33} U_{13}$$

* Índices que sobram: **LIVRES**;

* Índices pareados: **MUDOS**.

$i,,j,k = 1,2,3.$

$$T_{111} = \delta_{11} V_1 = V_1$$

$$T_{112} = \delta_{11} V_2 = V_2$$

$$T_{113} = \delta_{11} V_3 = V_3$$

$$T_{121} = \delta_{12} V_1 = 0$$

$$T_{122} = \delta_{12} V_2 = 0$$

$$T_{123} = \delta_{12} V_3 = 0$$

No R^2 :

$$T_{1111} = \underbrace{\delta_{11}\delta_{11} - \delta_{11}\delta_{11}}_{0}$$

$$T_{1211} = \underbrace{\delta_{11}\delta_{\underline{21}} - \delta_{11}\delta_{\underline{21}}}_{0}$$

$$T_{1212} = \underbrace{\underbrace{\delta_{12}\delta_{21}}_{0} - \underbrace{\delta_{11}\delta_{22}}_{1}}_{-1}$$

$i, j, k, l = 1,2.$

T_{ijk} : (i , j, k variam de 1 até 2 pois está no R^2 = dimensão), logo têm-se 8 componentes. Número de componentes é igual a n (nº da dimensão) elevado ao número de índices.

R^n :

$$\#\,componentes = n^{\#\,índices}$$

Exercício 1:

No R^3 : Usando o delta de Kronecker, escrever as componentes do tensor:

$$T_{ijk} = \delta_{ij} V_k ,$$

onde V_k é o vetor $\vec{V} = (V_1, V_2, V_3)$.

$$T_{ijk} = \delta_{ij} V_k$$

$$T_{111} = \delta_{11} V_1 = V_1$$

$$T_{112} = \delta_{11} V_2 = V_2$$

$$T_{113} = \delta_{11} V_3 = V_3$$

$$T_{221} = \delta_{22} V_1 = V_1$$

$$T_{222} = \delta_{22} V_2 = V_2$$

$$T_{223} = \delta_{22} V_3 = V_3$$

$$T_{331} = \delta_{33} V_1 = V_1$$

$$T_{332} = \delta_{33} V_2 = V_2$$

$$T_{333} = \delta_{33} V_3 = V_3$$

Exercício 2:

No R^2 : Escrever todas as componentes do tensor T de rank - 4:

$$T_{ijkl} = \delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jl}$$

$$T_{1111} = \delta_{11}\delta_{11} - \delta_{11}\delta_{11} = 0$$

$$T_{1112} = \delta_{12}\delta_{11} - \delta_{11}\delta_{12} = 0$$

$$T_{1121} = \delta_{11}\delta_{12} - \delta_{12}\delta_{11} = 0$$

$$T_{1122} = \delta_{12}\delta_{12} - \delta_{12}\delta_{12} = 0$$

$$T_{1211} = \delta_{11}\delta_{21} - \delta_{11}\delta_{21} = 0$$

$$T_{1212} = \delta_{12}\delta_{21} - \delta_{11}\delta_{22} = -1$$

$T_{1221} = \delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21} = 1$

$T_{1222} = \delta_{12}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{22} = 0$

$T_{2111} = \delta_{21}\delta_{11} - \delta_{21}\delta_{11} = 0$

$T_{2112} = \delta_{22}\delta_{11} - \delta_{21}\delta_{12} = 1$

$T_{2121} = \delta_{21}\delta_{12} - \delta_{22}\delta_{11} = -1$

$T_{2122} = \delta_{22}\delta_{12} - \delta_{22}\delta_{12} = 0$

$T_{2211} = \delta_{21}\delta_{21} - \delta_{21}\delta_{21} = 0$

$T_{2212} = \delta_{22}\delta_{21} - \delta_{21}\delta_{22} = 0$

$T_{2221} = \delta_{21}\delta_{22} - \delta_{22}\delta_{21} = 0$

$T_{2222} = \delta_{22}\delta_{22} - \delta_{22}\delta_{22} = 0$

Exercício 3:

No R^3 : Escrever as componentes de T : $T_{ijk} = \delta_{im} V_m \delta_{jl} U_l W_k$,

usando o MAPLE:

usando contração :$T_{ijk} = V_i U_j W_k$

$T_{111} = V_1 U_1 W_1$

$T_{112} = V_1 U_1 W_2$

$T_{113} = V_1 U_1 W_3$

$$T_{121} = V_1 U_2 W_1$$

$$T_{122} = V_1 U_2 W_2$$

$$T_{123} = V_1 U_2 W_3$$

$$T_{131} = V_1 U_3 W_1$$

$$T_{132} = V_1 U_3 W_2$$

Exercício 4:

No R^2 : Escrever as componentes do tensor:

$$T_{ij} = U_i \underline{V_m} \underbrace{S_{nq}} U_{qj} \underline{\delta_{mp}} \underbrace{\delta_{nq}}$$

$$(V_m \delta_{mp} = V_p)$$

$$(S_{np} \delta_{nq} = S_{qp})$$

$$T_{ij} = U_i V_p S_{qp} U_{qj}$$

$$T_{11} = U_1 V_1 S_{11} U_{11} + U_1 V_1 S_{21} U_{21} + U_1 V_2 S_{12} U_{11} + U_1 V_2 S_{22} U_{21}$$

$$T_{12} = U_1 V_1 S_{11} U_{12} + U_1 V_1 S_{21} U_{22} + U_1 V_2 S_{12} U_{12} + U_1 V_2 S_{22} U_{22}$$

Aplicação: (Ensaio para o estudo da equação de Einstein que leva aos buracos negros.)

Considerando a equação tensorial no R^4,

$$G_{ij} - \tfrac{1}{2}\eta_{ij}G = T_{ij},$$

onde

$$G_{ij} = G_{ij} \text{ (tensor simétrico)},$$

$$\eta_{ij} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$G = G_{11} - G_{22} - G_{33} - G_{44}$$

$$T_{ij} = T_{ji} \text{ (também simétrico).}$$

(i) Quantas componentes independentes apresenta a equação considerada?

(ii) É possível resolver algebricamenteas componentes de G_{ij} em termos de T_{ij}?

solução

$$T_{11} = G_{11} - \tfrac{1}{2}\eta_{11}G$$

$$T_{12} = G_{12} - \tfrac{1}{2}\eta_{12}G$$

$$T_{13} = G_{13} - \tfrac{1}{2}\eta_{13}G$$

$$T_{14} = G_{14} - \tfrac{1}{2}\eta_{14}G$$

$$T_{21} = G_{21} - \tfrac{1}{2}\eta_{21}G$$

$$T_{22} = G_{22} - \tfrac{1}{2}\,\eta_{22}G$$

$$T_{23} = G_{23} - \tfrac{1}{2}\,\eta_{23}G$$

$$T_{24} = G_{24} - \tfrac{1}{2}\,\eta_{24}G$$

$$T_{31} = G_{31} - \tfrac{1}{2}\,\eta_{31}G$$

$$T_{32} = G_{32} - \tfrac{1}{2}\,\eta_{32}G$$

$$T_{33} = G_{33} - \tfrac{1}{2}\,\eta_{33}G$$

$$T_{34} = G_{34} - \tfrac{1}{2}\,\eta_{34}G$$

$$T_{41} = G_{41} - \tfrac{1}{2}\,\eta_{41}G$$

$$T_{42} = G_{42} - \tfrac{1}{2}\,\eta_{42}G$$

$$T_{43} = G_{43} - \tfrac{1}{2}\,\eta_{43}G$$

$$T_{44} = G_{44} - \tfrac{1}{2}\,\eta_{44}G$$

10 componentes independentes

$$T_{11} = G_{11} - \tfrac{1}{2}G$$

$$T_{12} = G_{12} - \tfrac{1}{2}0G = G_{12}$$

$$T_{13} = G_{13} - 0 = G_{13}$$

$$T_{14} = G_{14}$$

$$T_{21} = G_{21}$$

$$T_{22} = G_{22} + \tfrac{1}{2}G$$

$$T_{23} = G_{23}$$

$$T_{24} = G_{24}$$

$$T_{31} = G_{31}$$

$$T_{32} = G_{32}$$

$$T_{33} = G_{33} + \tfrac{1}{2}G$$

$$T_{34} = G_{34}$$

$$T_{41} = G_{41}$$

$$T_{42} = G_{42}$$

$$T_{43} = G_{43}$$

$$T_{44} = G_{44} + \tfrac{1}{2}G$$

$$T_{11} = G_{11} - \tfrac{1}{2}(G_{11} - G_{22} - G_{33} - G_{44})$$

$$T_{22} = G_{22} - \tfrac{1}{2}(G_{11} - G_{22} - G_{33} - G_{44})$$

$$T_{33} = G_{33} - \tfrac{1}{2}(G_{11} - G_{22} - G_{33} - G_{44})$$

$$T_{44} = G_{44} - \tfrac{1}{2}(G_{11} - G_{22} - G_{33} - G_{44})$$

$$\begin{cases} T_{11}+T_{22} = G_{11}+G_{22} \\ T_{11}+T_{33} = G_{11}+G_{33} \\ T_{11}+T_{44} = G_{11}+G_{44} \end{cases}$$

$$T_{44} = G_{44}+\tfrac{1}{2}(G_{11}-G_{22}-G_{33}-G_{44})$$

$$T_{44} = T_{11}+T_{44}-G_{11}+\tfrac{1}{2}(G_{11}-G_{22}-G_{33}-G_{44})$$

$$0 = T_{11}-\tfrac{1}{2}(T_{11}+T_{22}+G_{33}+G_{44})$$

$$T_{11}+T_{33} = G_{11}+G_{33}$$

$$T_{11}+T_{44} = G_{11}+G_{44}$$

$$G_{33}+G_{44} = -2G_{11}+2T_{11}+T_{33}+T_{44}$$

$$T_{11} = \tfrac{1}{2}(T_{11}+T_{22}+G_{33}+G_{44})$$

$$T_{11} = \tfrac{1}{2}(T_{11}+T_{22}-2G_{11}+2T_{11}+T_{33}+T_{44})$$

$$T_{11} = \tfrac{3}{2}T_{11}+\tfrac{1}{2}(T_{22}+T_{33}+T_{44})-G_{11}$$

$$G_{11} = \tfrac{1}{2}(T_{11}+T_{22}+T_{33}+T_{44})$$

$$T_{11} + T_{33} = G_{11} + G_{33}$$

$$T_{11} + T_{33} = [\tfrac{1}{2}(T_{11} + T_{22} + T_{33} + T_{44})] + G_{33}$$

$$G_{33} = \tfrac{1}{2}(T_{11} - T_{22} + T_{33} - T_{44})$$

$$T_{11} + T_{44} = G_{11} + G_{44}$$

$$T_{11} + T_{44} = [\tfrac{1}{2}(T_{11} + T_{22} + T_{33} + T_{44})] + G_{44}$$

$$[G_{44} = \tfrac{1}{2}(T_{11} - T_{22} - T_{33} + T_{44})$$

$$T_{11} + T_{22} = G_{11} + G_{22}$$

$$T_{11} + T_{22} = [\tfrac{1}{2}(T_{11} + T_{22} + T_{33} + T_{44})] + G_{22}$$

$$G_{22} = \tfrac{1}{2}(T_{11} + T_{22} - T_{33} - T_{44})$$

Tensor de Levi_Civita(ϵ)

É um tensor que pode ser definido em qualquer espaço R^n. Apresenta rank = n, ou seja, possui tantos índices quantas forem as dimensões do espaço, isto é, número de índices = n.

Característica: as suas componentes possuem apenas valores (± 1) e 0, e é categorizado como um tensor totalmente anti-simétrico: permutando-se qualquer par de índices, a componente recebe + ou - , se houver um número par de permutações respectivamente.

Convenção:

$$\left[\begin{array}{ll} \varepsilon_{12} = +1 & \\ \varepsilon_{21} = -1 & \\ \varepsilon_{ij} = 0, & i = j \end{array}\right]$$

$$F = \varepsilon_{ij} u_i v_j$$

$$F = \varepsilon_{11} u_1 v_1 + \varepsilon_{12} u_1 v_2 + \varepsilon_{21} u_2 v_2 + \varepsilon_{22} u_2 v_2$$

$$F = u_1 v_2 - u_2 v_1$$

R^2

$\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji}$ (Propriedade de anti-simetria)

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \end{array}\right\} \text{em princípio, 4 componentes.}$$

$$\varepsilon_{11} = -\varepsilon_{11} \Rightarrow \varepsilon_{11} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{21} = -\varepsilon_{12} \end{array}\right\}$$

$$\varepsilon_{22} = -\varepsilon_{22} \Rightarrow \varepsilon_{22} = 0$$

Anti-simetria => componentes com 2 índices iguais são nulas.

$$\varepsilon_{ij}\varepsilon_{jk} = \begin{cases} -1; \; i = k = 1, \quad i = k = 2 \\ 0; \; i \neq k \end{cases}$$

$$\varepsilon_{ij}\,\varepsilon_{jk} = -\delta_{ik}$$

$$\varepsilon_{ij}\,\varepsilon_{kj} = +\delta_{ik}$$

$$\varepsilon_{ij}\,\varepsilon_{ij} = \delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} = 2$$

$$\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} = +2$$
$$\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ji} = -2$$

Relações úteis entre o tensor de Levi_Civita e o delta de Kronecker:

R^2

$$\varepsilon_{ij}\varepsilon_{jk} = -\delta_{ik},$$
$$\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} = -2$$

R^3

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{mnp} = \delta_{im}\,\delta_{jn}\,\delta_{kp} + \delta_{in}\,\delta_{jp}\,\delta_{km} + \delta_{ip}\,\delta_{jm}\,\delta_{kn} - \delta_{in}\,\delta_{jm}\,\delta_{kp} +$$
$$- \delta_{im}\,\delta_{jp}\,\delta_{kn} - \delta_{ip}\,\delta_{jn}\,\delta_{km}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk} = (\delta_{im}\,\delta_{jn} - \delta_{in}\,\delta_{jm})$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mjk} = +2\,\delta_{im}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6$$

R^4

$$\varepsilon_{ijkq}\,\varepsilon_{mnpq} = \begin{pmatrix} \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kp} - \delta_{im}\delta_{jp}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kp} + \\ +\delta_{in}\delta_{jp}\delta_{km} + \delta_{ip}\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{ip}\delta_{jn}\delta_{km} \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_{ijpq}\,\varepsilon_{mnpq} = 2\,(\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm})$$

$$\varepsilon_{imnp}\,\varepsilon_{jmnp} = 6\,\delta_{ij}$$

$$\varepsilon_{ijkl}\,\varepsilon_{ijkl} = 4! = 24$$

Voltando ao R^2 :

$$i = 1 = k : \quad \varepsilon_{1j}\varepsilon_{j1} = \varepsilon_{11}\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12}\varepsilon_{21} = -1$$

$$i = 1, k = 2 : \varepsilon_{1j}\varepsilon_{j2} = \underbrace{\varepsilon_{11}\varepsilon_{12} + \varepsilon_{12}\varepsilon_{22}}_{0}$$

$$i = 2, k = 1 \Rightarrow 0$$

$$i = 2, k = 2 \Rightarrow \varepsilon_{2j}\varepsilon_{j2} = \varepsilon_{21}\varepsilon_{12} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{22} = -1$$

R^3

ε_{ijk}

$\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ijk}$

$\varepsilon_{kji} = \varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{ijk}$

$\varepsilon_{jki} = \varepsilon_{ijk}$

Conclusão:

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{kji}$$

$\varepsilon_{121} = \varepsilon_{211} = \varepsilon_{112} = -\varepsilon_{211} = -\varepsilon_{112} = -\varepsilon_{121}$

$\varepsilon_{121} = 0$

$\varepsilon_{ijk} \neq 0$, se todos os índices forem diferentes.

Se houver ao menos dois índices iguais $\varepsilon = 0$.

$$\begin{cases} \varepsilon_{123} = +1 \quad \text{(convenção)} \\ \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = +1 \\ \varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = -1 \end{cases}$$

R^4 :

$\varepsilon_{ijkl}\ :\ i,j,k,l = 1,2,3,4$

$\varepsilon_{1234} = +1$

$\varepsilon_{ijkl} \neq 0$, somente se todos os índices forem diferentes.

Se pelo menos houver um par de índices iguais,

então $\varepsilon_{ijkl} = 0$.

$\varepsilon_{4213} = \varepsilon_{1423} = -\varepsilon_{1243} = \varepsilon_{1234} = +1$

$\varepsilon_{3414} = 0$

Exercício:

1) $F = \varepsilon_{ijk} u_i v_j v_k$;

2) $F = \varepsilon_{ijk} u_i v_j w_k$

soluções:

$$\mathbf{1)} F = \varepsilon_{ijk} u_i v_j v_k$$

$$= \varepsilon_{111} u_1 v_1 v_1 + \varepsilon_{112} u_1 v_1 v_2 + \varepsilon_{113} u_1 v_1 v_3 +$$

$$+ \varepsilon_{121} u_1 v_2 v_1 + \varepsilon_{122} u_1 v_2 v_2 + \varepsilon_{123} u_1 v_2 v_3 +$$

$$+ \varepsilon_{131} u_1 v_3 v_1 + \varepsilon_{132} u_1 v_3 v_2 + \varepsilon_{133} u_1 v_3 v_3 +$$

$$+ \varepsilon_{211} u_2 v_1 v_1 + \varepsilon_{212} u_2 v_1 v_2 + \varepsilon_{213} u_2 v_1 v_3 +$$

$$+ \varepsilon_{221} u_2 v_2 v_1 + \varepsilon_{222} u_2 v_2 v_2 + \varepsilon_{223} u_2 v_2 v_3 +$$

$$+ \varepsilon_{231} u_2 v_3 v_1 + \varepsilon_{232} u_2 v_3 v_2 + \varepsilon_{233} u_2 v_3 v_3 +$$

$$+ \varepsilon_{311} u_3 v_1 v_1 + \varepsilon_{312} u_3 v_1 v_2 + \varepsilon_{313} u_3 v_1 v_3 +$$

$$+ \varepsilon_{321} u_3 v_2 v_1 + \varepsilon_{322} u_3 v_2 v_2 + \varepsilon_{323} u_3 v_2 v_3 +$$

$$+ \varepsilon_{331} u_3 v_3 v_1 + + \varepsilon_{332} u_3 v_3 v_2 + \varepsilon_{333} u_3 v_3 v_3$$

$$= \varepsilon_{123} u_1 v_2 v_3 + \varepsilon_{132} u_1 v_3 v_2 + \varepsilon_{213} u_2 v_1 v_3 + \varepsilon_{231} u_2 v_3 v_1 +$$

$$+ \varepsilon_{312} u_3 v_1 v_2 + \varepsilon_{321} u_3 v_2 v_1$$

$$= u_1 v_2 v_3 - u_1 v_3 v_2 - u_2 v_1 v_3 + u_2 v_3 v_1 +$$

$$+ u_3 v_1 v_2 - u_3 v_2 v_1 = 0$$

2) $F = \varepsilon_{ijk}\, u_i v_j w_k$

$$= u_1v_2w_3 - u_1v_3w_2 - u_2v_1w_3 + u_2v_3w_1 +$$

$$+ u_3v_1w_2 - u_3v_2w_1$$

$$= u_1v_2w_3 + u_2v_3w_1 + u_3v_1w_2 +$$

$$- (u_1v_3w_2 + u_2v_1w_3 + u_3v_2w_1)$$

O ε de levi_civita é útil no cálculo de determinantes.

Matriz: M_{ij}

R^2

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det M = M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21}$$

$$\det M = \varepsilon_{ij}M_{1i}M_{2j}$$

R^3

$$M = \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{vmatrix}$$

$$\det M = \varepsilon_{ijk}M_{1i}M_{2j}M_{3k}$$

$$\det M = \varepsilon_{ijk} M_{1i} M_{2j} M_{3k}$$

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon_{111} M_{11} M_{21} M_{31} + \varepsilon_{112} M_{11} M_{21} M_{32} + \varepsilon_{113} M_{11} M_{21} M_{33} + \\
&+ \varepsilon_{121} M_{11} M_{22} M_{31} + \varepsilon_{122} M_{11} M_{22} M_{32} + \varepsilon_{123} M_{11} M_{22} M_{33} + \\
&+ \varepsilon_{131} M_{11} M_{23} M_{31} + \varepsilon_{132} M_{11} M_{23} M_{32} + \varepsilon_{133} M_{11} M_{23} M_{33} + \\
&+ \varepsilon_{211} M_{12} M_{21} M_{31} + \varepsilon_{212} M_{12} M_{21} M_{32} + \varepsilon_{213} M_{12} M_{21} M_{33} + \\
&+ \varepsilon_{221} M_{12} M_{22} M_{31} + \varepsilon_{222} M_{12} M_{22} M_{32} + \varepsilon_{223} M_{12} M_{22} M_{33} + \\
&+ \varepsilon_{231} M_{12} M_{23} M_{31} + \varepsilon_{232} M_{12} M_{23} M_{32} + \varepsilon_{233} M_{12} M_{23} M_{33} + \\
&+ \varepsilon_{311} M_{13} M_{21} M_{31} + \varepsilon_{312} M_{13} M_{21} M_{32} + \varepsilon_{313} M_{13} M_{21} M_{33} + \\
&+ \varepsilon_{321} M_{13} M_{22} M_{31} + \varepsilon_{322} M_{13} M_{22} M_{32} + \varepsilon_{323} M_{13} M_{22} M_{33} + \\
&+ \varepsilon_{331} M_{13} M_{23} M_{31} + \varepsilon_{332} M_{13} M_{23} M_{32} + \varepsilon_{333} M_{13} M_{23} M_{33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det M &= \varepsilon_{123} M_{11} M_{22} M_{33} + \varepsilon_{132} M_{11} M_{23} M_{32} + \varepsilon_{213} M_{12} M_{21} M_{33} + \\
&+ \varepsilon_{231} M_{12} M_{23} M_{31} + \varepsilon_{312} M_{13} M_{21} M_{32} + \varepsilon_{321} M_{13} M_{22} M_{31}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det M &= M_{11} M_{22} M_{33} - M_{11} M_{23} M_{32} - M_{12} M_{21} M_{33} + \\
&+ M_{12} M_{23} M_{31} + M_{13} M_{21} M_{32} - M_{13} M_{22} M_{31}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det M &= M_{11} M_{22} M_{33} + M_{12} M_{23} M_{31} + M_{13} M_{21} M_{32} + \\
&- M_{11} M_{23} M_{32} - M_{12} M_{21} M_{33} - M_{13} M_{22} M_{31}
\end{aligned}$$

(i) Mostrar que o determinante é expresso em termos de Levi_Civita como segue:

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & \dots & \dots & M_{14} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{41} & \dots & \dots & M_{44} \end{pmatrix}$$

(α) $\det M$ -> calculado como usualmente.

(β) $\det M = \varepsilon_{ijkl}\, M_{1i}\, M_{2j}\, M_{3k}\, M_{4l}$

Mostrar que (α) e (β) coincidem.

```
restart;

Epslon := proc(a,b,c,d)

> if ( a = b ) or ( a = c ) or ( b = c ) or ( a = d ) or ( b = d ) or ( c = d ) then 0

> else

> if ( ( a = 1 ) and ( b = 2 ) and ( c = 3 ) and ( d = 4 ) ) or

> ( ( a = 1 ) and ( b = 3 ) and ( c = 4 ) and ( d = 2 ) ) or

> ( ( a = 1 ) and ( b = 4 ) and ( c = 2 ) and ( d = 3 ) ) or

> ( ( a = 2 ) and ( b = 1 ) and ( c = 4 ) and ( d = 3 ) ) or

> ( ( a = 2 ) and ( b = 3 ) and ( c = 1 ) and ( d = 4 ) ) or

> ( ( a =2 ) and ( b = 4 ) and ( c = 3 ) and ( d = 1 ) ) or

> ( ( a = 3 ) and ( b = 1 ) and ( c = 2 ) and ( d = 4 ) ) or
```

```
> ( ( a = 3 ) and ( b = 2 ) and ( c = 4 ) and ( d = 1 ) ) or

> ( ( a = 3 ) and ( b = 4 ) and ( c = 1 ) and ( d = 2 ) ) or

> ( ( a = 4 ) and ( b = 1 ) and ( c = 3 ) and ( d = 2 ) ) or

> ( ( a = 4 ) and ( b = 2 ) and ( c = 1 ) and ( d = 3 ) ) or

> ( ( a = 4 ) and ( b = 3 ) and ( c = 2 ) and ( d = 1 ) ) then 1 else -1

> fi;

> fi;

> end;

Epslon := proc ( a, b, c, d )

if a = b or a = c or b = c or a = d or b = d or c = d

then 0

else

if a = 1 and b = 2 and c = 3 and d = 4 or

a = 1 and b = 3 and c = 4 and d = 2 or

a = 1 and b = 4 and c = 2 and d = 3 or

a = 2 and b = 1 and c = 4 and d = 3 or

a = 2 and b = 3 and c = 1 and d = 4 or

a = 2 and b = 4 and c = 3 and d = 1 or

a = 3 and b = 1 and c = 2 and d = 4 or

a = 3 and b = 2 and c = 4 and d = 1 or

a = 3 and b = 4 and c = 1 and d = 2 or
```

```
a = 4 and b = 1 and c = 3 and d = 2 or

a = 4 and b = 2 and c = 1 and d = 3 or

a = 4 and b = 3 and c = 2 and d = 1 then 1

else -1

fi

fi

end

> LC : = ( i, j, k, l ) -> Epslon( i, j, k, l ) * M [ 1, i ] * M [ 2, j ] * M [ 3, k ] * M [ 4, l ];

LC : = ( i, j, k, l ) -> Epslon( i, j, k, l ) M [ 1, i ] M [ 2, j ] M [ 3, k ] M [ 4, l ]

> aux : = 0;

aux : = 0

> for i to 4 do

> for j to 4 do

> for k to 4 do

> for l to 4 do

> aux : = aux + LC( i, j, k, l );

> od;

> od;

> od;

> od;

> print ( LC = aux );
```

$$
\begin{aligned}
LC = {} & M[1,1]M[2,2]M[3,3]M[4,1] \\
& - M[1,1]M[2,2]M[3,4]M[4,1] \\
& - M[1,1]M[2,3]M[3,2]M[4,1] \\
& + M[1,1]M[2,3]M[3,4]M[4,1] \\
& + M[1,1]M[2,4]M[3,2]M[4,1] \\
& - M[1,1]M[2,4]M[3,3]M[4,1] \\
& - M[1,2]M[2,1]M[3,3]M[4,1] \\
& + M[1,2]M[2,1]M[3,4]M[4,1] \\
& + M[1,2]M[2,3]M[3,1]M[4,1] \\
& - M[1,2]M[2,3]M[3,4]M[4,1] \\
& - M[1,2]M[2,4]M[3,1]M[4,1] \\
& + M[1,2]M[2,4]M[3,3]M[4,1] \\
& + M[1,3]M[2,1]M[3,2]M[4,1] \\
& - M[1,3]M[2,1]M[3,4]M[4,1] \\
& - M[1,3]M[2,2]M[3,1]M[4,1] \\
& + M[1,3]M[2,2]M[3,4]M[4,1] \\
& + M[1,3]M[2,4]M[3,1]M[4,1] \\
& - M[1,3]M[2,4]M[3,2]M[4,1] \\
& - M[1,4]M[2,1]M[3,2]M[4,1] \\
& + M[1,4]M[2,1]M[3,3]M[4,1]
\end{aligned}
$$

+M [1, 4] M [2, 2] M [3, 1] M [4, 1]

- M [1, 4] M [2, 2] M [3, 3] M [4, 1]

- M [1, 4] M [2, 3] M [3, 1] M [4, 1]

+M [1, 4] M [2, 3] M [3, 2] M [4, 1]

> restart;

> with(linalg):

> V : = matrix (4, 4, [M [1, 1], M [1, 2], M [1, 3], M [1, 4], M [2, 1], M [2, 2], M [2, 3],

M [2, 4], M [3, 1], M [3, 2], M [3, 3], M [3, 4], M [4, 1], M [4, 2], M [4, 3], M [4, 4]]);

[M [1, 1] M [1, 2] M [1, 3] M [1, 4]]
[M [2, 1] M [2, 2] M [2, 3] M [2, 4]]

V : = [ ]

[M [3, 1] M [3, 2] M [3, 3] M [3, 4]]

[M [4, 1] M [4, 2] M [4, 3] M [4, 4]]

> E: = det (V);

E : = M [1, 1] M [2, 2] M [3, 3] M [4, 4]

- M [1, 1] M [2, 2] M [3, 4] M [4, 3]

- M [1, 1] M [3, 2] M [2, 3] M [4, 4]

+M [1, 1] M [3, 2] M [1, 2] M [4, 3]

+M [1, 1] M [4, 2] M [2, 3] M [3, 4]

- M [1, 1] M [4, 2] M [2, 4] M [3, 3]

$$
\begin{aligned}
&- M[2,1]M[1,2]M[3,3]M[4,4]\\
&+ M[2,1]M[1,2]M[3,4]M[4,3]\\
&+ M[2,1]M[3,2]M[1,3]M[4,4]\\
&- M[2,1]M[3,2]M[1,4]M[4,3]\\
&- M[2,1]M[4,2]M[1,3]M[3,4]\\
&+ M[2,1]M[4,2]M[1,4]M[3,3]\\
&+ M[3,1]M[1,2]M[2,3]M[4,4]\\
&- M[3,1]M[1,2]M[2,4]M[4,3]\\
&- M[3,1]M[2,2]M[1,3]M[4,4]\\
&+ M[3,1]M[2,2]M[1,4]M[4,3]\\
&+ M[3,1]M[4,2]M[1,3]M[2,4]\\
&- M[3,1]M[4,2]M[1,4]M[2,3]\\
&- M[4,1]M[1,2]M[2,3]M[3,4]\\
&+ M[4,1]M[1,2]M[2,4]M[3,3]\\
&+ M[4,1]M[2,2]M[1,3]M[3,4]\\
&- M[4,1]M[2,2]M[1,4]M[3,3]\\
&- M[4,1]M[3,2]M[1,3]M[2,4]\\
&+ M[4,1]M[3,2]M[1,4]M[2,3]\\
&- M[4,1]M[2,2]M[3,4]M[4,3]\\
&- M[1,1]M[3,2]M[2,3]M[4,4]\\
&+ M[1,1]M[3,2]M[2,4]M[4,3]
\end{aligned}
$$

+M[1,1]M[4,2]M[2,3]M[3,4]

-M[1,1]M[4,2]M[2,4]M[3,3]

-M[2,1]M[1,2]M[3,3]M[4,4]

+M[2,1]M[1,2]M[3,4]M[4,3]

+M[2,1]M[3,2]M[1,3]M[4,4]

-M[2,1]M[3,2]M[1,4]M[4,3]

-M[2,1]M[4,2]M[1,3]M[3,4]

+M[2,1]M[4,2]M[1,4]M[3,3]

+M[3,1]M[1,2]M[2,3]M[4,4]

-M[3,1]M[1,2]M[2,4]M[4,3]

-M[3,1]M[2,2]M[1,3]M[4,4]

+M[3,1]M[2,2]M[1,4]M[4,3]

+M[3,1]M[4,2]M[1,3]M[2,4]

-M[3,1]M[4,2]M[1,4]M[2,3]

-M[4,1]M[1,2]M[2,3]M[3,4]

+M[4,1]M[1,2]M[2,4]M[3,3]

+M[4,1]M[2,2]M[1,3]M[3,4]

-M[4,1]M[2,2]M[1,4]M[3,3]

-M[4,1]M[3,2]M[1,3]M[2,4]

+M[4,1]M[3,2]M[1,4]M[2,3]

(**ii**) Mostrar que

$$\varepsilon_{ijkl}\varepsilon_{mnpq} = \begin{vmatrix} \delta_{im} & \delta_{in} & \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{jm} & \delta_{jn} & \delta_{jp} & \delta_{jq} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} & \delta_{kp} & \delta_{kq} \\ \delta_{lm} & \delta_{ln} & \delta_{lp} & \delta_{lq} \end{vmatrix}$$

restart;

with(linalg):

> M := matrix (4, 4, [delta [i, m], delta [i, n], delta [i, p], delta [i, q], delta [j, m], delta [j, n], delta

[j, p], delta [j, q], delta [k, m], delta [k, n], delta [k, p], delta [k, q], delta [l, m], delta [l, n], delta

[l, p], delta [l, q]]);

[delta [i, m] , delta [i, n] , delta [i, p] , delta [i, q]]
[delta [j, m] , delta [j, n] , delta [j, p] , delta [j, q]]

M := [ ]

[delta [k, m] , delta [k, n] , delta [k, p] , delta [k, q]]

[ ]
[delta [l, m] , delta [l, n] , delta [l, p] , delta [l, q]]

> E : = det (M);

E : = delta [i, m] delta [j, n] delta [k, p] delta [l, q]

- delta [i, m] delta [j, n] delta [k, q] delta [l, p]

- delta [i, m] delta [k, n] delta [j, p] delta [l, q]

+ delta [i, m] delta [k, n] delta [j, q] delta [l, p]

+ delta [i, m] delta [l, n] delta [j, p] delta [k, q]

- delta [i, m] delta [l, n] delta [j, q] delta [k, p]

- delta [j, m] delta [i, n] delta [k, p] delta [l, q]

+ delta [j, m] delta [i, n] delta [k, q] delta [l, p]

+ delta [j, m] delta [k, n] delta [i, p] delta [l, q]

- delta [j, m] delta [k, n] delta [i, q] delta [l, p]

- delta [j, m] delta [l, n] delta [i, p] delta [k, q]

+ delta [j, m] delta [l, n] delta [i, q] delta [k, p]

+ delta [k, m] delta [i, n] delta [j, p] delta [l, q]

- delta [k, m] delta [i, n] delta [j, q] delta [l, p]

- delta [k, m] delta [j, n] delta [i, p] delta [l, q]

+ delta [k, m] delta [j, n] delta [i, q] delta [l, p]

+ delta [k, m] delta [l, n] delta [i, p] delta [j, q]

- delta [k, m] delta [l, n] delta [i, q] delta [j, p]

- delta [l, m] delta [i, n] delta [j, p] delta [k, q]

+ delta [l, m] delta [i, n] delta [j, q] delta [k, p]

+ delta [l, m] delta [j, n] delta [i, p] delta [k, q]

- delta [l, m] delta [j, n] delta [i, q] delta [k, p]

- delta [l, m] delta [k, n] delta [i, p] delta [j, q]

+ delta [l, m] delta [k, n] delta [i, q] delta [j, p]

(iii)

$$\varepsilon_{ijkq}\,\varepsilon_{mnpq} = \left(\begin{array}{c} \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kp} - \delta_{im}\delta_{jp}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kp} + \delta_{in}\delta_{jp}\delta_{km} + \\ \\ +\delta_{ip}\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{ip}\delta_{jn}\delta_{km} \end{array} \right)$$

(iv)

$$\varepsilon_{ijpq}\,\varepsilon_{mnpq} = 2(\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm})$$

(v)

$$\varepsilon_{imnp}\,\varepsilon_{jmnp} = 6\,\delta_{ij}$$

(vi)

$$\varepsilon_{ijkl}\,\varepsilon_{ijkl} = 4! = 24$$

Traços de tensores

T_{ijk} : contrações deste tensor com o delta de kronecker fornecem os chamados traços do tensor, que nada mais são que a generalização do traço de uma matriz.

$$M_{ij} = \underbrace{\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & \dots & M_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \dots & M_{nn} \end{pmatrix}}_{n\times n}$$

trM = soma de todos os elementos da diagonal.

$trM = M_{11} + M_{22} + ... + M_{nn}$

Por outro lado,

$M_{ij}\delta_{ij}$ (2 índices contraídos com o δ_kronecker.)

$i = 1, ..., n$
$j = 1, ..., n$

$M_{11} + M_{22} + ... + M_{nn} = trM$
$trM = M_{ij}\,\delta_{ij}$

Voltando ao tensor T_{ijkl}

$T_{ijkl}\delta_{ij},\ T_{ijkl}\delta_{ik},\ T_{ijkl}\delta_{il},\ T_{ijkl}\delta_{jk},\ \ T_{ijkl}\delta_{jl},\ T_{ijkl}\delta_{kl}$

$$T_{ijkl}\delta_{ij} = \underbrace{T_{11kl} + T_{22kl} + ... + T_{nnkl}}_{T'_{kl}}$$

$$T_{ijkl}\delta_{jk} = \underbrace{T_{i11l} + T_{i22l} + ... + T_{innl}}_{T''_{il}}$$

(i) Desenvolver as componentes (cada uma delas) da seguinte expressão tensorial no R^3 :

$$T_{ijk} = \varepsilon_{imn}\, v_m\, \varepsilon_{njl}\, u_l\, w_k$$

$$T_{111} = \varepsilon_{1mn} v_m \varepsilon_{n1l} u_l w_1 = (\delta_{11}\delta_{ml} - \delta_{1l}\delta_{m1}) v_m u_l w_1$$

$$T_{112} = \varepsilon_{1mn} v_m \varepsilon_{n1l} u_l w_2 = (\delta_{11}\delta_{ml} - \delta_{1l}\delta_{m1}) v_m u_l w_2$$

$$T_{113} = \varepsilon_{1mn} v_m \varepsilon_{n1l} u_l w_3 = (\delta_{11}\delta_{ml} - \delta_{1l}\delta_{m1}) v_m u_l w_3$$

$$T_{121} = \varepsilon_{1mn} v_m \varepsilon_{n2l} u_l w_1 = (\delta_{12}\delta_{ml} - \delta_{1l}\delta_{m2}) v_m u_l w_1$$

$$T_{122} = \varepsilon_{1mn} v_m \varepsilon_{n2l} u_l w_2 = (\delta_{12}\delta_{ml} - \delta_{1l}\delta_{m2}) v_m u_l w_2$$

$$T_{123} = \varepsilon_{1mn} v_m \varepsilon_{n2l} u_l w_3 = (\delta_{12}\delta_{ml} - \delta_{1l}\delta_{m2}) v_m u_l w_3$$

$$T_{131} = \varepsilon_{1mn} v_m \varepsilon_{n3l} u_l w_1 = (\delta_{13}\delta_{ml} - \delta_{1l}\delta_{m3}) v_m u_l w_1$$

$$T_{132} = \varepsilon_{1mn} v_m \varepsilon_{n3l} u_l w_2 = (\delta_{13}\delta_{ml} - \delta_{1l}\delta_{m3}) v_m u_l w_2$$

$$T_{133} = \varepsilon_{1mn} v_m \varepsilon_{n3l} u_l w_3 = (\delta_{13}\delta_{ml} - \delta_{1l}\delta_{m3}) v_m u_l w_3$$

$$T_{211} = \varepsilon_{2mn} v_m \varepsilon_{n1l} u_l w_1 = (\delta_{21}\delta_{ml} - \delta_{2l}\delta_{m1}) v_m u_l w_1$$

$$T_{212} = \varepsilon_{2mn} v_m \varepsilon_{n1l} u_l w_2 = (\delta_{21}\delta_{ml} - \delta_{2l}\delta_{m1}) v_m u_l w_2$$

$$T_{213} = \varepsilon_{2mn} v_m \varepsilon_{n1l} u_l w_3 = (\delta_{21}\delta_{ml} - \delta_{2l}\delta_{m1}) v_m u_l w_3$$

$$T_{221} = \varepsilon_{2mn}v_m\varepsilon_{n2l}u_lw_1 = (\delta_{22}\delta_{ml} - \delta_{2l}\delta_{m2})v_m u_l w_1$$

$$T_{222} = \varepsilon_{2mn}v_m\varepsilon_{n2l}u_lw_2 = (\delta_{22}\delta_{ml} - \delta_{2l}\delta_{m2})v_m u_l w_2$$

$$T_{223} = \varepsilon_{2mn}v_m\varepsilon_{n2l}u_lw_3 = (\delta_{22}\delta_{ml} - \delta_{2l}\delta_{m2})v_m u_l w_3$$

$$T_{231} = \varepsilon_{2mn}v_m\varepsilon_{n3l}u_lw_1 = (\delta_{23}\delta_{ml} - \delta_{2l}\delta_{m3})v_m u_l w_1$$

$$T_{232} = \varepsilon_{2mn}v_m\varepsilon_{n3l}u_lw_2 = (\delta_{23}\delta_{ml} - \delta_{2l}\delta_{m3})v_m u_l w_2$$

$$T_{233} = \varepsilon_{2mn}v_m\varepsilon_{n3l}u_lw_3 = (\delta_{23}\delta_{ml} - \delta_{2l}\delta_{m3})v_m u_l w_3$$

$$T_{311} = \varepsilon_{3mn}v_m\varepsilon_{n1l}u_lw_1 = (\delta_{31}\delta_{ml} - \delta_{3l}\delta_{m1})v_m u_l w_1$$

$$T_{312} = \varepsilon_{3mn}v_m\varepsilon_{n1l}u_lw_2 = (\delta_{31}\delta_{ml} - \delta_{3l}\delta_{m1})v_m u_l w_2$$

$$T_{313} = \varepsilon_{3mn}v_m\varepsilon_{n1l}u_lw_3 = (\delta_{31}\delta_{ml} - \delta_{3l}\delta_{m1})v_m u_l w_3$$

$$T_{321} = \varepsilon_{3mn}v_m\varepsilon_{n2l}u_lw_1 = (\delta_{32}\delta_{ml} - \delta_{3l}\delta_{m2})v_m u_l w_1$$

$$T_{322} = \varepsilon_{3mn}v_m\varepsilon_{n2l}u_lw_2 = (\delta_{32}\delta_{ml} - \delta_{3l}\delta_{m2})v_m u_l w_2$$

$$T_{323} = \varepsilon_{3mn}v_m\varepsilon_{n2l}u_lw_3 = (\delta_{32}\delta_{ml} - \delta_{3l}\delta_{m2})v_m u_l w_3$$

$$T_{331} = \varepsilon_{3mn}v_m\varepsilon_{n3l}u_lw_1 = (\delta_{33}\delta_{ml} - \delta_{3l}\delta_{m3})v_m u_l w_1$$

$$T_{332} = \varepsilon_{3mn}v_m\varepsilon_{n3l}u_lw_2 = (\delta_{33}\delta_{ml} - \delta_{3l}\delta_{m3})v_m u_l w_2$$

$$T_{333} = \varepsilon_{3mn}v_m\varepsilon_{n3l}u_lw_3 = (\delta_{33}\delta_{ml} - \delta_{3l}\delta_{m3})v_m u_l w_3$$

(ii) Dado o tensor T_{ijkl} no R^4, calcular todos os seus possíveis traços.

solução

$$T_{ijkl}\,\delta_{ij} = T_{11kl} + T_{22kl} + T_{33kl} + T_{44kl}$$

$$T_{ijkl}\,\delta_{ik} = T_{1j1l} + T_{2j2l} + T_{3j3l} + T_{4j4l}$$

$$T_{ijkl}\,\delta_{jk} = T_{i11l} + T_{i22l} + T_{i33l} + T_{i44l}$$

(iii) Verificar que:

$$(R^2)\,\varepsilon_{ij}\,\delta_{ij} = 0;$$

$$(R^3)\,\varepsilon_{ijk}\,\delta_{ij} = \varepsilon_{ijk}\delta_{ik} = \varepsilon_{ijk}\delta_{jk} = 0;$$

$$(R^4)\,\varepsilon_{ijkl}\,\delta_{ij} = \varepsilon_{ijkl}\delta_{ik} = \ldots = 0.$$

solução

$$\left[\;(R^2)\,\varepsilon_{ij}\delta_{ij} = \underbrace{\varepsilon_{11}}_{0}\,\delta_{11} + \varepsilon_{12}\,\underbrace{\delta_{12}}_{0} + \varepsilon_{21}\,\underbrace{\delta_{21}}_{0} + + \underbrace{\varepsilon_{22}}_{0}\,\delta_{22} = 0\right.$$

$$\left[\begin{aligned} (R^3)\,\varepsilon_{ijk}\delta_{ij} &= \underbrace{\varepsilon_{11k}}_{0}\,\delta_{11} + \varepsilon_{12k}\,\underbrace{\delta_{12}}_{0} + \varepsilon_{13k}\,\underbrace{\delta_{13}}_{0} + \\ &+\varepsilon_{21k}\,\underbrace{\delta_{21}}_{0} + \underbrace{\varepsilon_{22k}}_{0}\,\delta_{22} + \varepsilon_{23k}\,\underbrace{\delta_{23}}_{0} + \\ &+ \varepsilon_{31k}\,\underbrace{\delta_{31}}_{0} + \varepsilon_{32k}\,\underbrace{\delta_{32}}_{0} + \underbrace{\varepsilon_{33k}}_{0}\,\delta_{33} = 0 \end{aligned}\right.$$

$$
\left[
\begin{aligned}
&(R^4)\,\varepsilon_{ijkl}\delta_{ij} = \underbrace{\varepsilon_{11kl}}_{0}\,\delta_{11} + \varepsilon_{12kl}\,\underbrace{\delta_{12}}_{0} + \varepsilon_{13kl}\,\underbrace{\delta_{13}}_{0} + \\
&+\varepsilon_{14kl}\,\underbrace{\delta_{14}}_{0} + \varepsilon_{21kl}\,\underbrace{\delta_{21}}_{0} + \underbrace{\varepsilon_{22kl}}_{0}\,\delta_{22} + \varepsilon_{23kl}\,\underbrace{\delta_{23}}_{0} + \\
&+\varepsilon_{24kl}\,\underbrace{\delta_{24}}_{0} + \varepsilon_{31kl}\,\underbrace{\delta_{31}}_{0} + \varepsilon_{32kl}\,\underbrace{\delta_{32}}_{0} + \underbrace{\varepsilon_{33kl}}_{0}\,\delta_{33} + \\
&+\varepsilon_{34kl}\,\underbrace{\delta_{34}}_{0} + \varepsilon_{41kl}\,\underbrace{\delta_{41}}_{0} + \varepsilon_{42kl}\,\underbrace{\delta_{42}}_{0} + \varepsilon_{43kl}\,\underbrace{\delta_{43}}_{0} + \\
&+ \underbrace{\varepsilon_{44kl}}_{0}\,\delta_{44} = 0
\end{aligned}
\right.
$$

Todas as contrações duplas de Levi_civita com kronecker anulam-se.

$$\underbrace{\varepsilon_{ijk}\delta_{kl}}_{\varepsilon_{ijl}} \neq 0$$

(iv) Dada a equação:

$$G_{ij} - \tfrac{1}{2}\,\delta_{ij}G = T_{ij} \quad \text{sendo} \quad G = trG_{ij},$$

Calcular G em função do tr T_{ij}. Suponhamos estar em R^n.

solução

$$G_{ij}\delta_{ij} - \frac{1}{2}\delta_{ij}^2 G = T_{ij}\delta_{ij}$$

mas como:

$$\delta_{ij}^2 = \delta_{ij}\delta_{ij} = \delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} + \ldots + \delta_{nn} = n$$

então:

$$G - \frac{1}{2}nG = T_{ij}\delta_{ij}$$

$$G(1 - \frac{n}{2}) = trT_{ij}$$

$$G = \frac{2}{2-n}\, trT$$

Simetrização e Anti-simetrização em um par de índices:

Dado um tensor genérico, é sempre possível decompô-lo em partes simétricas e anti-simétrica com respeito a um dado par de índices.

Por exemplo, iniciemos por considerar um tensor de rank-2, T_{ij}.

$$T_{ij} = \frac{1}{2}\underbrace{(T_{ij} + T_{ji})}_{S_{ij}} + \frac{1}{2}\underbrace{(T_{ij} - T_{ji})}_{A_{ij}}$$

$$T_{ij} = S_{ij} + A_{ij}\,,$$

onde:

$$S_{ij} \equiv \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) = S_{ji}\,,$$

$$A_{ij} \equiv \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) = -A_{ji}$$

Este resultado ilustra o fato de que qualquer matriz (n × n) pode <u>sempre</u> ser decomposta como a soma de uma matriz simétrica com uma matriz anti-simétrica:

$$M = \frac{1}{2}\underbrace{(M+M^t)}_{S} + \frac{1}{2}\underbrace{(M-M^t)}_{A}$$

$$M = S + A,$$

onde:

$$S \equiv \frac{1}{2}(M+M^t),$$

$$A \equiv \frac{1}{2}(M-M^t).$$

Podemos, em seguida, generalizar este resultado para tensores de rank arbitrários. Por exemplo, tensores de rank-3 e rank-4.

T_{ijk} : por exemplo, simetrizá-lo e anti-simetrizá-lo nos índices i, k.

$$T_{ijk} = \underbrace{\frac{1}{2}(T_{ijk} + T_{kji})}_{S_{ijk}=S_{kji}} + \underbrace{\frac{1}{2}(T_{ijk} - T_{kji})}_{A_{ijk}=-A_{kji}}$$

Poderíamos fazer a mesma operação com os pares i, j ou j, k.

T_{ijkl} : Podemos simetrizá-lo em j, l.

$$T_{ijkl} = \underbrace{\frac{1}{2}(T_{ijkl} + T_{ilkj})}_{S_{ijkl}=S_{ilkj}} + \underbrace{\frac{1}{2}(T_{ijkl} - T_{ilkj})}_{A_{ijkl}=-A_{ilkj}}$$

Exercício 1:

Verificar que os tensores :

$T_{ij} \equiv U_i V_j + U_j V_i$; $W_{ij} \equiv U_i V_j - U_j V_i$, onde U e V são dois vetores quaisquer, são, respectivamente, simétrico e anti- -simétrico. Em seguida, calcular os respectivos traços:

$$T_{ij} = U_i V_j + U_j V_i$$

$$T_{ji} = U_j V_i + U_i V_j = U_i V_j + U_j V_i = T_{ij}$$

$\therefore$ T_{ij} é simétrico.

$$W_{ij} = U_i V_j - U_j V_i$$

$$W_{ji} = U_j V_i - U_i V_j = -(U_i V_j - U_j V_i) = -W_{ij}$$

$\therefore$ W_{ij} é anti-simétrico.

$$trT_{ij} = T_{ij}\delta_{ij} = (T_{11} + T_{22} + ... + T_{nn}) =$$

$$(U_1 V_1 + U_1 V_1) + (U_2 V_2 + U_2 V_2) + ... + (U_n V_n + U_n V_n) =$$

$$2U_1 V_1 + 2U_2 V_2 + ... + 2U_n V_n = 2U_i V_i$$

$$tr\,W_{ij} = W_{ij}\delta_{ij} = (W_{11} + W_{22} + ... + W_{nn}) =$$

$$(U_1 V_1 - U_1 V_1) + (U_2 V_2 - U_2 V_2) + ... + (U_n V_n - U_n V_n) = 0$$

Exercício 2:

Dado um tensor T_{ijk} , verificar que o tensor :

$$A_{ijk} \equiv \tfrac{1}{6}(T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij} - T_{jik} - T_{ikj} - T_{kji})$$

é completamente anti-simétrico, isto é,

$$A_{ijk} = A_{jki} = A_{kij} = -A_{jik} = -A_{ikj} = -A_{kji}.$$

Concluir, também, que todos os seus traços são nulos.

$$A_{ijk} \equiv \tfrac{1}{6}(T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij} - T_{jik} - T_{ikj} - T_{kji})$$

$$A_{jki} \equiv \tfrac{1}{6}(T_{jki} + T_{kij} + T_{ijk} - T_{kji} - T_{jik} - T_{ikj}) =$$

$$\tfrac{1}{6}(T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij} - T_{jik} - T_{ikj} - T_{kji}) = A_{ijk}$$

$$A_{kij} \equiv \tfrac{1}{6}(T_{kij} + T_{ijk} + T_{jki} - T_{ikj} - T_{kji} - T_{jik}) =$$

$$\tfrac{1}{6}(T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij} - T_{jik} - T_{ikj} - T_{kji}) = A_{ijk}$$

$$A_{jik} \equiv \tfrac{1}{6}(T_{jik} + T_{ikj} + T_{kji} - T_{ijk} - T_{jki} - T_{kij}) =$$

$$\tfrac{1}{6}(-T_{ijk} - T_{jki} - T_{kij} + T_{jik} + T_{ikj} + T_{kji}) = -A_{ijk}$$

$$A_{ikj} \equiv \tfrac{1}{6}(T_{ikj} + T_{kji} + T_{jik} - T_{kij} - T_{ijk} - T_{jki}) =$$

$$\tfrac{1}{6}(-T_{ijk} - T_{jki} - T_{kij} + T_{jik} + T_{ikj} + T_{kji}) = -A_{ijk}$$

$$A_{kji} \equiv \tfrac{1}{6}(T_{kji} + T_{jik} + T_{ikj} - T_{jki} - T_{kij} - T_{ijk}) =$$

$$\tfrac{1}{6}(-T_{ijk} - T_{jki} - T_{kij} + T_{jik} + T_{ikj} + T_{kji}) = -A_{ijk}$$

$$\underbrace{A_{ijk}\delta_{ij}}_{tr\,A} = A_{11k} + A_{22k} + A_{33k} + \ldots\ldots\ldots + A_{nnk}$$

(Como A é anti-simétroco e possui dois índices iguais $\rightarrow$ tr $A = 0$.)

$$A_{ijk} = \tfrac{1}{6}(T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij} - T_{jik} - T_{ikj} - T_{kji})$$

$$tr A_{ijk} = \tfrac{1}{6}(T_{11k} + T_{1k1} + T_{k11} - T_{11k} - T_{1k1} - T_{k11}) +$$

$$+ \tfrac{1}{6}(T_{22k} + T_{2k2} + T_{k22} - T_{22k} - T_{2k2} - T_{k22}) + \ldots\ldots +$$

$$+ \tfrac{1}{6}(T_{nnk} + T_{nkn} + T_{knn} - T_{nnk} - T_{nkn} - T_{knn}) = 0$$

$$A_{ijk}\delta_{ik} = (A_{1j1} + A_{2j2} + A_{3j3} + \ldots\ldots + A_{njn}) = 0.$$

Como i = j e como A é anti-simétrico, o somatório dará zero.

$$A_{ijk}\delta_{jk} = (A_{i11} + A_{i22} + A_{i33} + \ldots\ldots + A_{inn}) = 0.$$

Como j = k e como A é anti-simétrico, o somatório dará zero.

Exercício 3:

Dado um tensor simétrico de rank-2, como se pode definir, a partir do mesmo, um outro tensor simétrico, também de rank-2, porém com traço nulo?

$$S_{ij} = S_{ji}$$

Definir $\tilde{S}_{ij}$, também simétrico, a partir de S_{ij} :

$$\tilde{S}_{ij} = S_{ij} + c\delta_{ij}S, = \tilde{S}_{ij}$$

sendo $S \equiv tr S_{ij}$.

Queremos impor que tr $\tilde{S}_{ij} = 0$.

$$\text{tr}\,\tilde{S}_{ij} = tr S_{ij} + c\,(tr\,\delta_{ij})S$$

$$0 = S + cnS\ ,$$

sendo n = tr $\delta_{ij} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} + \dots\dots\dots\ \delta_{nn}$

$$(1 + cn) = 0$$

$$c = -\tfrac{1}{n}$$

Conclusão:

$$\tilde{S}_{ij} \equiv S_{ij} - \tfrac{1}{n}\,\delta_{ij}\,S$$

é simétrico e apresenta traço nulo.

Dualidade, tensores auto-duais e Tensores anti-auto-duais.

Tomando, por exemplo, o caso R^3, dado um tensor anti-simétrico, de rank-2, define-se o seu dual através da relação:

$$\mathcal{T}_i \equiv \tfrac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\,T_{jk},$$

sendo$T$ o tensor anti-simétrico e $\mathcal{T}$ o seu dual. Este último possui rank 1, sendo, portanto, um vetor. A importância desta relação é que o vetor $\mathcal{T}$ carrega toda a informação sobre as componentes do tensor T_{ij}. Este último tensor possui as seguintes componentes:

$$T_{11} = T_{22} = T_{33} = 0,$$

$$T_{12} = -T_{21}, \ T_{13} = -T_{31},$$

$$T_{23} = -T_{32};$$

ou seja, apenas T_{12}, T_{13} e T_{23} são suas componentes independentes. Vamos, agora, desenvolver a relação de dualidade acima:

$$\begin{aligned} T_1 &= \tfrac{1}{2}\varepsilon_{1jk} T_{jk} \\ &= \tfrac{1}{2}\varepsilon_{123} T_{23} + \tfrac{1}{2}\varepsilon_{132} T_{32} \\ &= \tfrac{1}{2}(+1)T_{23} + \tfrac{1}{2}(-1)(-T_{23}) \\ &= T_{23} \end{aligned}$$

$$T_2 = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{2jk} T_{jk} = -T_{13}$$

$$\tilde{T}_3 = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{3jk} T_{jk} = T_{12}$$

Isto mostra que as 3 componentes do vetor $\tilde{T}$, dual de T,

são, nada mais nada menos, que as 3 componentes de T.

Conclusão: O tensor T e seu dual $\tilde{T}$ são equivalentes, no sentido de que possuem as mesmas componentes.

Exercício (i):

Mostre que o tensor T_{ij} pode ser escrito, em termos de seu dual, através da relação :

$$T_{ij} = \varepsilon_{ijk}\ \tilde{T}_k$$

Solução:

$$\tilde{T}_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\ T_{jk}$$

$$\varepsilon_{mni}\ \tilde{T}_i = \frac{1}{2}\ \underbrace{\varepsilon_{mni}\,\varepsilon_{ijk}}_{\delta_{mj}\delta_{nk}-\delta_{mk}\delta_{nj}}\ T_{jk}$$

$$\varepsilon_{mni}\ \tilde{T}_i = \frac{1}{2}T_{mn} - \frac{1}{2}\ \underbrace{T_{mn}}_{-T_{mn}}$$

$$T_{mn} = \varepsilon_{mni}\ \tilde{T}_i$$

$$\boxed{T_{ij} = \varepsilon_{ijk}\ \tilde{T}_k}$$

$$T_{12} = \varepsilon_{123}\ \tilde{T}_3\ = \tilde{T}_3$$

$$T_{13} = \varepsilon_{132}\ \tilde{T}_2\ = -\ \tilde{T}_2$$

$$T_{23} = \varepsilon_{231}\ \tilde{T}_1\ =\ \tilde{T}_1$$

$$T_{21} = \varepsilon_{213}\ \tilde{T}_3\ = -\ \tilde{T}_3$$

$$T_{31} =\ \tilde{T}_2$$

$$T_{32} = -\ \tilde{T}_1$$

Exercício (ii) :

Ainda em R^3, estudar o dual de um tensor completamente anti-simétrico de rank-3, T_{ijk}.

$$T_{ijk} = T_{jki} = T_{kij} = -T_{jki} = -T_{ikj} = -T_{kji}$$

$$T_{ijk} \, : \, i, j, k = 1, 2, 3.$$

$R^3 \, : \, \varepsilon_{ijk}$

Uma única componente:

$$T_{123} \quad \text{ou} \quad \underbrace{T_{132}}_{-T_{123}} \quad \text{ou} \quad \underbrace{T_{231}}_{T_{123}}$$

$$\tilde{T} = \varepsilon_{ijk} T_{ijk}$$

$\tilde{T}$ não apresenta nenhum índice, isto é, é um escalar.

$$\tilde{T} = \varepsilon_{ijk} T_{ijk}$$

Em R^3, o dual de um tensor anti-simétrico de rank-3 é um <u>escalar.</u>

Dual de T_{ijk} : escalar $\tilde{T}$.

$$\tilde{T} = \varepsilon_{ijk} T_{ijk} \qquad \text{(Dual em função do tensor)}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \begin{pmatrix} \delta_{li} & \delta_{lj} & \delta_{lk} \\ \delta_{mi} & \delta_{mj} & \delta_{mk} \\ \delta_{ni} & \delta_{nj} & \delta_{nk} \end{pmatrix}$$

$$= \delta_{li}\delta_{mj}\delta_{nk} - \delta_{li}\delta_{mk}\delta_{nj} +$$

$$- \delta_{lj}\delta_{mi}\delta_{nk} + \delta_{lj}\delta_{mk}\delta_{ni} +$$

$$+ \delta_{lk}\delta_{mi}\delta_{nj} - \delta_{lk}\delta_{mj}\delta_{ni}$$

$$\varepsilon_{lmn}\,\tilde{T} = T_{lmn} - T_{lnm} - T_{m\mathrm{ln}} +$$

$$+ T_{nlm} + T_{nlm} + T_{mnl} +$$

$$- T_{nml} = 6T_{lmn}$$

$$T_{lmn} = \frac{1}{6}\varepsilon_{lmn}\,\tilde{T}\ i$$

$$\boxed{T_{ijk} = \frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\,\tilde{T}}$$

(Tensor em função do dual)

Dualidade no R^4 :

Levi-Cevita: ε_{ijkl} ;

i, j, k, l =1,.....,4.

<u>Dual de um vetor:</u>

$$\tilde{v}_{ijk} = \varepsilon_{ijkl}\, v_l$$

Dual de um vetor é um tensor totalmente anti-simétrico de rank-3.

Dual de um tensor de rank-2: T_{ij}

$$\tilde{T}_{ij} = \frac{1}{2!}\, \varepsilon_{ijkl}\, T_{kl}$$

O dual de um tensor de rank-2 é um outro tensor de rank-2.

Dual de um tensor de rank-3:

$$\tilde{T}_i = \frac{1}{3!}\, \varepsilon_{ijkl}\, T_{jkl}$$

O dual de um tensor de rank-3 é um vetor (tensor de rank-1).

Dual de um tensor de rank-4:

$$\tilde{T} = \frac{1}{4!}\, \varepsilon_{ijkl}\, T_{ijkl}$$

O dual de um tensor de rank-4 é um escalar.

$$\varepsilon_{\underbrace{ij....n}_{p}}$$

Conclusão: Num espaço-R^n, o dual de um tensor totalmente anti-simétrico de rank-p é um tensor de

rank-(n-p).

$$\underbrace{\varepsilon_{ijkl\underbrace{mnp}}}T_{\underbrace{mnp}}$$

$$(n-p)$$

Se o tensor original e seu dual possuem o mesmo rank, então:

$$p = n - p$$

$$n = 2p$$

Ou seja, somente em espaços de dimensão par pode ocorrer que um tensor e seu dual apresentem o mesmo rank. E mais ainda: se o espaço tem dimensão par, n, então somente tensores de rank = $\frac{n}{2}$ terão a propriedade de apresentarem dual com o mesmo rank.

R^3: nunca é possível que em tensor e seu dual tenham o mesmo rank.

R^4: $n = 4$

$p = \frac{n}{2} = 2 \Rightarrow T_{ij}$ e seu dual, $\tilde{T}_{ij}$, têm ambos rank = 2.

R^6: $n = 6$

$p = \frac{n}{2} = 3 \Rightarrow$ apenas tensores de rank - 3 possuem dual com mesmo rank.

Observação importante:

Em qualquer que seja o espaço - R^n, o tensor original e seu dual apresentam mesmo número de componentes, apesar de terem ranks diferentes.

Explicação:

Num espaço - R^n, um tensor totalmente anti-simétrico de rank-p possui:

$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$ componentes independentes.

O seu dual, que possui rank igual a (n-p), apresenta

$C_n^{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$ componentes independentes.

Isto explica a nossa observação. O dado essencial para este resultado é o fato de estarmos lidando com tensor totalmente anti-simétrico de rank - p.

Ambiente de trabalho: R^4.

ε_{ijkl}

Relações importantes em R^4 :

$$\varepsilon_{ijkl}\varepsilon_{mnpq} = \begin{pmatrix} \delta_{im} & \delta_{in} & \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{jm} & \delta_{jn} & \delta_{jp} & \delta_{jq} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} & \delta_{kp} & \delta_{kq} \\ \delta_{lm} & \delta_{ln} & \delta_{lp} & \delta_{lq} \end{pmatrix}$$

$\varepsilon_{ijkl}\varepsilon_{mnpl} = ?$

$\varepsilon_{ijkl}\varepsilon_{mnkl} = ?$

$\varepsilon_{ijkl}\varepsilon_{mjkl} = ?$

$\varepsilon_{ijkl}\varepsilon_{ijkl} = 24 = 4!$

(**i**) Dadas as relações que expressam os duais em termos dos tensores originais,

$$\tilde{T} = \frac{1}{4!}\varepsilon_{ijkl}\, T_{ijkl} \ ,$$

$$\tilde{T}_i = \frac{1}{3!}\varepsilon_{ijkl}\, T_{jkl} \ ,$$

$$\tilde{T}_{ij} = \frac{1}{2!}\varepsilon_{ijkl}\, T_{kl} \ ,$$

$$\tilde{T}_{ijk} = \varepsilon_{ijkl}\, T_l \ ,$$

Invertê-las, expressando os tensores em função de seus duais:

$$T_{ijkl} = \varepsilon_{ijkl}\ \tilde{T}_i \ ,$$

$$T_{ijk} = -\varepsilon_{ijkl}\ \tilde{T}_l \ ,$$

$$T_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijkl}\ \tilde{T}_{kl} \ ,$$

$$T_i = -\frac{1}{3!}\varepsilon_{ijkl}\ \tilde{T}_{jkl} \ ,$$

(**ii**) Mostrar que o dual do dual de um tensor de rank-2 é o próprio tensor:

$$T_{ij} \to \tilde{T}_{ij} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{ijkl}\,T_{kl}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{T}}_{ij} &= \frac{1}{2}\varepsilon_{ijkl}\,\tilde{T}_{kl}\\ &= \frac{1}{2}\,\varepsilon_{ijkl}\,\frac{1}{2}\varepsilon_{ijkl}\,T_{mn}\\ &= \frac{1}{4}\,\underbrace{\varepsilon_{ijkl}\varepsilon_{klmn}}_{\downarrow}\,T_{mn}\end{aligned}$$

$$\boxed{\tilde{\tilde{T}}_{ij} = T_{ij}}$$

(**iii**) Verificar que, em R^2, o dual do dual NÃO recupera o vetor original.

$$\tilde{T}_i = \varepsilon_{ij}T_j$$

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{T}}_i &= \varepsilon_{ij}\,\tilde{T}_j\\ &= \underbrace{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{jk}}_{-\delta_{ik}}\,T_k\end{aligned}$$

$$\tilde{\tilde{T}}_i = -T_i$$

Auto-dualidade e Anti-auto-dualidade

Num espaço de dimensão par, tipo R^{2n}, já vimos que tensores totalmente anti-simétricos de rank$=$ n possuem dual com mesmo rank.

A questão a se discutir agora é saber se é possível impor sobre estes o vínculo de auto-dualidade ou de anti-auto-dualidade.

O dual de um tensor anti-simétrico T, de rank-n é dado por:

$$\tilde{T} = \frac{1}{n!}\varepsilon T$$

Se existir solução não-trivial para a condição :

$$\tilde{T} = T$$

ou para a condição:

$$\tilde{T} = -T,$$

diz-se que T é auto-dual, no primeiro caso, ou anti-auto-dual, no segundo caso.

Estudemos estas condições nos espaços $R^2, R^4, R^6, R^8, R^{10}$.

R^2

Seja T_i um vetor arbitrário. Seu dual é dado por :

$$\tilde{T}_i = \varepsilon_{ij} T_j$$

Seria possível impor que :

$$\tilde{T}_i = T_i \text{ (existe auto-dualidade ?)}$$

$$\tilde{T}_i \underset{\varepsilon_{mi}}{\uparrow}{=} \varepsilon_{ij} T_j \underset{\varepsilon_{mi}}{\uparrow}{=} T_i$$

$$\varepsilon_{mi} T_i = \underbrace{\varepsilon_{mi}\,\varepsilon_{ij}}_{-\delta_{mj}} T_i$$

$$\varepsilon_{mi} T_i = -T_m$$

$$\tilde{T}_m = T_m$$

$$T_m = -T_m \Rightarrow T_{m=0.}$$

Em R^2, NÃO é possível impor as condições de auto-dualidade e anti-auto-dualidade sobre vetores reais.

Vendo de outro modo:

$$\tilde{T}_i = \varepsilon_{ij} T_j$$

$$\tilde{T}_1 = \varepsilon_{1j} T_j = \varepsilon_{12} T_2 = T_2$$

$$\tilde{T}_2 = \varepsilon_{2j} T_j = \varepsilon_{21} T_1 = -T_1$$

$$\begin{cases} \tilde{T}_1 = T_2 \\ \tilde{T}_2 = -T_1 \end{cases}$$

$Se\ \tilde{T}_i = T_i \Rightarrow \tilde{T}_1 = T_1 = T_2$

$$\tilde{T}_2 = T_2 = -T_1$$
$$\downarrow$$
$$T_1 = T_2 = 0$$

Isto confirma o resultado encontrado acima.

Contudo, tomando vetores complexos, pode-se impor uma condição de auto-dualidade ou anti-auto-dualidade modificada, como veremos a seguir.

$$\tilde{T}_i = \varepsilon_{ij} T_j$$

Impor : $\boxed{\tilde{T}_i = iT_i}$, $i = \sqrt{-1}$

$$\underset{\uparrow \atop \varepsilon_{mi}}{} \varepsilon_{ij} T_j = \tilde{T}_i = \underset{\uparrow \atop \varepsilon_{mi}}{} iT_i$$

$$-T_m = i \underbrace{\varepsilon_{mi} T_i}_{\tilde{T}_i = iT_m} = -T_m$$

$T_m = T_m \Rightarrow T_m$ qualquer.

Para um vetor complexo, T_i, é possível impor a condição de auto-dualidade:

$\tilde{T}_i = iT_i$.

Vejamos o que nos diz esta condição.

$$\tilde{T}_i = iT_i$$

$$\tilde{T}_1 = iT_1 = \varepsilon_{12} T_2 = T_2$$

$$\tilde{T}_2 = iT_2 = \varepsilon_{21} T_1 = -T_1$$

$$T_2 = iT_1 \Leftrightarrow iT_2 = -T_1$$

A condiçãode auto-dualidade sobre o vetor complexo:

$$T_i = (T_1; T_2),$$

impõe que T possui apenas 1 componente independente:

$$T_i = (T_1; T_2 = iT_1)$$

O papel da auto-dualidade é reduzir o número de componentes à metade.

R^4

Tensores de rank-2:

$$\tilde{T}_{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijkl} T_{kl}$$

Auto-dualidade:

$$T_{ij} = T_{ij}$$

$$\tilde{T}_{ij} = \tfrac{1}{2}\underset{\substack{\downarrow \\ \varepsilon_{mnij}}}{\varepsilon_{ijkl}} T_{kl} = \underset{\substack{\downarrow \\ \varepsilon_{mnij}}}{T_{ij}}$$

$$\tfrac{1}{2}\left(2\delta_{mk}\delta_{nl} - 2\delta_{ml}\delta_{nk}\right) T_{kl} = \varepsilon_{mnij} T_{ij}$$

$$\tfrac{1}{2}\left(2T_{mn} - 2T_{nm}\right) = \varepsilon_{mnij} T_{ij}$$

$$2T_{mn} = \varepsilon_{mnij} T_{ij}$$

$$T_{mn} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{mnij} T_{ij} = \tilde{T}_{mn} = T_{mn}$$

Não há contradição, portanto, em R^4, é possível que tensores reais de rank-2 sejam auto-duais.

$$\tilde{T}_{ij} = T_{ij}$$

As componentes de T_{ij} são $T_{12}, T_{13}, T_{14}, T_{23}, T_{24}, T_{34}$

(em princípio 6 componentes) . O que nos impõe o vínculo de auto-dualidade.

$$\tilde{T}_{12} = T_{12} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{12kl}T_{kl} = T_{34}$$

$$\tilde{T}_{13} = T_{13} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{13kl}T_{kl} = -T_{24}$$

$$\tilde{T}_{14} = T_{14} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{14kl}T_{kl} = T_{23}$$

$$\tilde{T}_{23} = T_{23} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{23kl}T_{kl} = T_{14}$$

$$\tilde{T}_{24} = T_{24} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{24kl}T_{kl} = -T_{13}$$

$$\tilde{T}_{34} = T_{34} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{34kl}T_{kl} = T_{12}$$

$$\begin{cases} T_{12} = T_{34} \\ T_{13} = -T_{24} \\ T_{14} = T_{23} \end{cases}$$

Conclusão: As seis componentes de T_{ij} não são todas independentes:

$$\tilde{T}_{34} = T_{34} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{34kl}T_{kl} = T_{12}$$

$$T_{23} = T_{14}\,,$$

$$T_{24} = -T_{13}\,,$$

$$T_{34} = T_{12}\,.$$

Na verdade, ao invés de 6, temos 3 componentes:

T_{12}, T_{13} e T_{14}.

Em R^4, a auto-dualidade de um tensor de rank-2 reduz de 6 para 3 o número de componentes do tensor.

R^6 :

Verificar se é possível termos:

$$\tilde{T}_{ijk} \equiv \frac{1}{3!}\varepsilon_{ijklmn}T_{lmn} = T_{ijk}$$

T_{ijk} possui $\frac{6!}{3!3!} = 20$ componentes. A auto-dualidade deve reduzí-las para apenas 10. Expressar as

componentes em termos de 10 componentes independentes.

R^8 :

Auto-dualidade:

$$\tilde{T}_{ijkl} \equiv \frac{1}{4!}\varepsilon_{ijklmnpq}T_{mnpq} = T_{ijkl}$$

R^{10}

$$\tilde{T}_{ijklm} \equiv \frac{1}{5!}\varepsilon_{ijklmpqrst}T_{pqrst} = T_{ijklm}$$

R^4

É dado um tensor T_{abc}, com a única propriedade de ser anti-simétrico em ab.

$$T_{abc} = -T_{bac}$$

Devido a esta propriedade, ao invés de apresentar 64 componentes, T dispõe de apenas 24 componentes independentes, devido à condição de anti-simetria no primeiro par de índices.

Propomos a seguinte decomposição de T_{abc} :

$$T_{abc} \equiv R_{abc} - \varepsilon_{abcd} S_d + \tfrac{1}{3} (\delta_{ac} V_b - \delta_{bc} V_a) ,$$

onde:

$$V_b \equiv T_{aba} = \delta_{ac} T_{abc}$$

é o traço de T_{abc}, e

$S_d = \frac{1}{3!} \varepsilon_{dmnp} T_{mnp}$, isto é,

S_d corresponde à parte completamente anti-simétrica de T_{abc}.

$[T_{abc} = R_{abc} - \varepsilon_{abcd} S_d + \frac{1}{3} (\delta_{ac} V_b - \delta_{bc} V_a)$

R^3

T_{abc} tal que

$$T_{abc} = -T_{bac}$$

Se não houvesse a anti-simetria , T_{abc} apresentaria 27 componentes . Devido à anti-simetria no primeiro par de índices,

T_{abc} dispõe de somente 9 componentes independentes (devido ao vínculo de anti-simetria).

Em R^3, o Levi-Cevita é ε_{mnp}.

$[S \equiv \frac{1}{3!}\varepsilon_{abc}T_{abc}$

S é o escalar que corresponde à parte completamente anti-simétrica de T_{abc}.

$[V_b \equiv T_{abc} \equiv T_b = \delta_{ac}T_{abc}$

V_b é o vetor correspondente ao traço de T_{abc}.

Propomos a mesma decomposição que o dado em R^4, apenas com mudanças de coeficientes, isto é, :

$$T_{abc} = R_{abc} + \alpha\,\varepsilon_{abc}S + \beta(\delta_{ac}V_b - \delta_{bc}V_a),$$

onde α e β deverão ser fixados com base nas seguintes condições:

(**i**) R_{abc} tem traço nulo, ou seja, $\delta_{ac}R_{abc} \equiv R_b = 0$.

Esta condição deverá fixar o valor de β .

(achamos beta = 1/2).

```
\smallskip Form version 2.1 Aug 21 1992\bigskip
nw stat;\bigskip
dimension 3;\bigskip
function T, R, V, S;\bigskip
indices a, b, c, d, e, m, n, p;\bigskip
Symbols alpha, beta;\bigskip
local expr = d_(a, c)*T(a, b, c)- beta*(d_(a, c)*d_(a, c)*\bigskip
            *V(b)-d_(a, c)*d_(b, c)*V(a));\bigskip
contract;\bigskip
id T(c,b,c) = V(b);\bigskip
id beta = $\frac{1}{2}$;\bigskip
print;\bigskip
.end

expr = 0;
```

(ii) R_{abc} tem parte completamente anti-simétrica nula , isto é ,

$\varepsilon_{abc} R_{abc} = 0$.

Esta condição deverá fixar o valor de α.

(achamos alpha = 1).

```
Form version 2.1 Aug 21 1992

nw stat;\bigskip
dimension 3;\bigskip
function T, R, V, S;\bigskip
indices a, b, c, d, e, m, n, p;\bigskip
Symbols alpha, beta;\bigskip
local expr =e_(a,b,c)*T(a,b,c)- alpha*(e_(a,b,c)*\bigskip
           *e_(a,b,c))*S;\bigskip
contract;\bigskip
id T(a,b,c)*e_(a,b,c) = 6*S;\bigskip
id alpha = 1;\bigskip
print;\bigskip
.end

expr = 0;
```

Exercício (1) : R^6.

Reconsiderando a decomposição do tensor $T_{\mu\nu k} = -T_{\nu\mu k}$ em R^6, fixar os coeficientes α e β :

$T_{\mu\nu k} = Q_{\mu\nu k} + \alpha\, \varepsilon_{\mu\nu k\alpha\beta\gamma} R^{\alpha\beta\gamma} + \beta(\delta_{\mu k} V_\nu - \delta_{\nu k} V_\mu)$, usando que $Q_{\mu\nu k}$ possui traço nulo e componente

completamente anti-simétrica também nula.

```
FORM version 2.1 Aug 21 1992

nw stat;\bigskip
dimension 6;\bigskip
function T, R, V;\bigskip
indices mu, nu, ka, al, be, ome;\bigskip
symbols x, y;\bigskip
local TQ = d_(mu,ka)*T(mu,nu,ka)-y*(d_(mu,ka)*V(mu))+\bigskip
          -d_(mu,ka)*d_(nu,ka)*V(mu));\bigskip
contract;\bigskip
```

```
id T(ka,nu,ka) = V(nu);\bigskip
id y \ = 1/5;\bigskip
print;\bigskip
.end\bigskip

FORM version 2.1 Aug 21 1992

nw stat;\bigskip
dimension 6;\bigskip
function T, R, V;\bigskip
indices mu, nu, ka, al, be, ga, si, ro, ome;\bigskip
symbols x;\bigskip
local TQ = e_(si,ro,ome,mu,nu,ka)*T(mu,nu,ka)-x*\bigskip
          *e_(si,ro,ome,mu,nu,ka)*e_(mu,nu,ka,al,be,ga)*\bigskip
          *R(al,be,ga);\bigskip
contract;\bigskip
anti R;\bigskip
id T(mu,nu,ka)*e_(mu,nu,ka,si,ro,ome) = fac (6)*R(si,ro,ome);\bigskip
id x = 20;\bigskip
print;\bigskip
.end
```

Exercício 2:

Espaço R^D (D dimensões).

Dado um tensor de rank-4 com as propriedades de simetria a seguir :

$$R_{\mu\nu k\lambda} = -R_{\nu\mu k\lambda} = -R_{\mu\nu\lambda k},$$

isto é, anti-simétrico no 1° e no 2° par de índices, isoladamente;

uma outra propriedade é a simetria nos pares de índices,

$$R_{\mu\nu k\lambda} = R_{k\lambda\mu\nu}.$$

Assim, com as três propriedades acima , deseja-se saber:

(**i**) quantas componentes independentes apresenta o tensor R;

(**ii**)quantos traços independentes podem ser formados a partir de $R_{\mu\nu k\lambda}$;

(**iii**) no caso especial D = 3, procure decompor $R_{\mu\nu k\lambda}$ em termos de tensores de menor rank (como feito no caso do tensor $T_{\mu\nu k} = -T_{\nu\mu k}$).

Respostas:

(**i**) $N = \frac{D(D-1)}{2}$

$$\frac{\frac{D(D-1)}{2}\left[\frac{D(D-1)}{2}+1\right]}{2}$$

$$\frac{D(D-1)(D^2-D+2)}{8}$$

(ii) $R_{\mu\nu k\lambda}$

$$R_{\mu\mu k\lambda} = \delta_{\mu\nu} R_{\mu\nu k\lambda} \equiv 0$$

$$R_{\mu\nu k\lambda}\delta_{k\lambda} = R_{\mu\nu kk} \equiv 0$$

$$\begin{cases} \delta_{\mu k} R_{\mu\nu k\lambda} = R_{\mu\nu\mu\lambda} \neq 0 \\ \delta_{\mu\lambda} R_{\mu\nu k\lambda} = R_{\mu\nu k\mu} = -R_{\mu\nu\mu k} \end{cases}$$

Este 2º traço é o primeiro com o sinal trocado. $\Rightarrow$ Não é um traço independente.

$$\delta_{\nu k} R_{\mu\nu k\lambda} = R_{\mu\nu\nu\lambda}$$

$$\delta_{\nu\lambda} R_{\mu\nu k\lambda} = R_{\mu\nu k\nu} = -R_{\mu\nu\nu k}$$

Devido às propriedades de simetria, estes dois traços devem ser, nada mais nada menos, que o primeiro.

(iii)$R_{\mu\nu k\lambda} = \varepsilon_{\mu\nu\alpha}\, \varepsilon_{k\lambda\beta}\, \hat{R}_{\alpha\beta}$. Expressar o traço $\delta_{\mu k} R_{\mu\nu k\lambda}$ em termos de componentes de $\hat{R}_{\alpha\beta}$.

$$R = -\hat{R}_{\beta\beta}\,\delta_{\nu\lambda} - \hat{R}_{\lambda\nu} + 2\,\hat{R}_{\beta\beta}\,\delta_{\nu\lambda}$$

$$= \hat{R}_{\alpha\alpha}\,\delta_{\nu\lambda} - \hat{R}_{\lambda\nu}$$

$$\hat{R}_{\alpha\beta} = \hat{R}_{\beta\alpha}$$

$$= \hat{R}_{\alpha\alpha}\,\delta_{\nu\lambda} - \hat{R}_{\nu\lambda}$$

$$\underbrace{\delta_{\mu k} R_{\mu\nu k\lambda}}_{\text{Definimos:}} = \delta_{\nu\lambda}\,\hat{R}_{\alpha\alpha} - \hat{R}_{\nu\lambda}$$

$$R_{\nu\lambda} \equiv \delta_{\mu k} R_{\mu\nu k\lambda}$$

$$R_{\nu\lambda} \equiv \delta_{\nu\lambda}\,\hat{R}_{\alpha\alpha} - \hat{R}_{\nu\lambda}$$

Tomar o traço:

$$\delta_{\nu\lambda} R_{\nu\lambda} \equiv \delta_{\nu\lambda}\delta_{\nu\lambda}\,\hat{R}_{\alpha\alpha} - \delta_{\nu\lambda}\,\hat{R}_{\nu\lambda}$$

Executar esta relação e mostrar que $R \equiv \delta_{\nu\lambda} R_{\nu\lambda} = 2\,\hat{R}_{\alpha\alpha}$

$$\hat{R}_{\alpha\alpha} = \tfrac{1}{2} R$$

$$R_{\nu\lambda} \equiv \delta_{\nu\lambda}\tfrac{1}{2} R - \hat{R}_{\nu\lambda}$$

$$R_{\nu\lambda} = \tfrac{1}{2}\,\delta_{\nu\lambda} R - R_{\nu\lambda}$$

$$R_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}\,\delta_{\alpha\beta} R - R_{\alpha\beta}$$

Conclusão:

$$R_{\mu\nu k\lambda} = \varepsilon_{\mu\nu\alpha}\varepsilon_{k\lambda\beta}\,\hat{R}_{\alpha\beta} =$$

$$= -\varepsilon_{\mu\nu\alpha}\varepsilon_{k\lambda\beta}(R_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}R)$$

Isto significa que $R_{\mu\nu k\lambda}$ é função apenas de seus traços:

$$R_{\nu\lambda} \equiv \delta_{\mu k} R_{\mu\nu k\lambda} \qquad \text{e} \qquad R \equiv R_{\alpha\alpha} = \delta_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$$

Partindo do resultado :

$R_{\mu\nu k\lambda} = -\varepsilon_{\mu\nu\alpha}\varepsilon_{k\lambda\beta}(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}R)$, usar a expressão

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha}\varepsilon_{k\lambda\beta} = \begin{pmatrix} \delta_{\mu k} & \delta_{\mu\lambda} & \delta_{\mu\beta} \\ \delta_{\nu k} & \delta_{\nu\lambda} & \delta_{\nu\beta} \\ \delta_{\alpha k} & \delta_{\alpha\lambda} & \delta_{\alpha\beta} \end{pmatrix},$$

e expandir o RHS da equação acima, expressando$R_{\mu\nu k\lambda}$ em termos de$R_{\alpha\beta}$ e R.

O objetivo prático deste exercício é compreender um fato essencial no estudo da Gravitação de Einstein em 3 dimensões: o tensor de curvatura de Rieman ($R_{\mu\eta\varkappa\lambda}$) é completamente determinado pelo tensor de Ricci ($R_{\alpha\beta}$) e pelo escalar de curvatura (R), o que caracteriza um fato muito peculiar de espaço-tempo 3-dimensionais nas regiões onde não há matéria, a curvatura é nula; conseqüentemente, os efeitos de gravitação não são percebidos localmente.

Comparação:

$R^3 : \vec{A},\vec{B},\vec{C}$

Seguintes operações:

$(\vec{A}.\vec{B}) = n^o$;

$(\vec{A}x\vec{B}) = 3^o$ vetor;

$\vec{A}.(\vec{B}x\vec{C}) = n^o$;

$R^2 : \vec{A},\vec{B},\vec{C}$

Seguintes operações:

$(\vec{A}.\vec{B}) = n^o$(como no R^3);

$(\vec{A}x\vec{B}) = n^o$(novidade);

Não se pode definir o produto misto visto que o produto vetorial de 2 vetores é um #, e não um vetor;

Comparação

Operação característica do R^2,sem correspondente no R^3:

dual de um vetor = outro vetor.

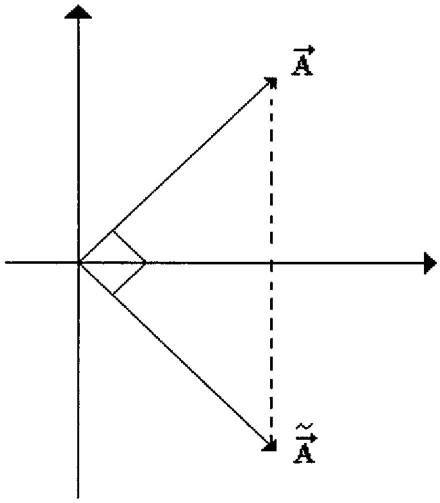
$\vec{A} = (A_1;A_2)$

$\tilde{\vec{A}} = (A_2;-A_1)$

$\tilde{A} = \varepsilon_{ij}A_j$

Propriedade do dual:

$\vec{A}.\tilde{\vec{A}} = 0$, o que significa que o dual de $\vec{A}$ é $\perp$ a $\vec{A}$.



$\left|\tilde{\vec{A}}\right| = |\vec{A}|$ ($\vec{A}$ e $\tilde{\vec{A}}$ apresentam mesmo módulo)

$\vec{A} \perp \tilde{\vec{A}}$.

Com o FORM, mostrar:

$$\left[\begin{array}{l} \vec{A} \cdot \tilde{\vec{A}} = 0 \;;\; (\mathrm{i}) \\ \vec{A} \times \tilde{\vec{A}} = -|\vec{A}|^2 = -\vec{A} \cdot \vec{A} \;(\mathrm{ii}) \\ \tilde{\vec{A}} \times \vec{A} = |\vec{A}|^2 = \vec{A} \cdot \vec{A} \;(\mathrm{iii}) \end{array}\right.$$

Resposta (i):

```
FORM version 2.1 Aug 21 1992

nw stat;\bigskip
dimension 2;\bigskip
vectors A, B;\bigskip
indices i, j;\bigskip
local phi = A( i )*(e_( i , j )*A( j ) );\bigskip
contract;\bigskip
print;\bigskip
```

```
.end

phi= 0;
```

Resposta (ii):

```
FORM version 2.1 Aug 21 1992

nw stat;\bigskip
dimension 2;\bigskip
vectors A, B;\bigskip
indices i, j, k;\bigskip
local phi = e_( i , j )*A( i ))* e_( j ,k )*A( k ));\bigskip
contract;\bigskip
print;\bigskip
.end

phi= -A.A;
```

Resposta (iii):

```
FORM version 2.1 Aug 21 1992

nw stat;
dimension 2;
vectors A, B;
indices i, j, k;
local phi = e_( i , j )* (e_( i , k )*A( k ))* A(j);
contract;
print;
.end

phi= A.A;
```

Exercício: (finalidade - simplificar expressões):

$$\Phi = (\vec{A}x\tilde{\vec{B}})^6 - (\vec{A}x\vec{B})^2(\tilde{\vec{A}}x\vec{B})^4$$

```
FORM version 2.1 Aug 21 1992

nw stat;
dimension 2;
vectors A, B;
indices i, j, k, l;
local phi = (e_( i , j )*A(i)* (e_( j , k )*B( k )))^6;
local phi2 =(A(i)*B(i)^2*((e_( k , l )*A(l)*B( k ))^4;
id e_(i,j)*e_(i,j)=2;
id e_(j,k)*e_(j,k)=2;
id e_(k,l)*e_(k,l)=2;
contract;
```

```
local resp=phi-phi2;
print;
.end

phi= 64*A.A^3*B.B^3;
phi2=4*A.A^2*A.B^2*B.B^2;
resp= -4*A.A^2*A.B^2*B.B^2+64*A.A^3*B.B^3;
```

$$\vec{V} = \tilde{\vec{A}}(\vec{A}.\tilde{\vec{B}})^4 - \vec{A}(\tilde{\vec{A}}x\vec{B})^2(\vec{A}.\vec{B})^2 - \vec{B}(\vec{A}.\tilde{\vec{B}})^3\vec{A}^2$$

```
FORM version 2.1 Aug 21 1992
nw stat;
dimension 2;
vectors A, B;
indices i, j, k, l,m;
local phi = e_( i , k )*A(k)*((A(i)*e_( i,j )*B( j ))^4;
local phi2 =A(i)*(A(l)*B(l))^2*(e_( i,k )*A(k)*e_(i,j)*
          *B( j ))^2;
local phi3 =B(i)*((A(i)*(e_( i,j )*B(j)))^3)*A(k)A(k);
id e_(i,j)*e_(i,j)=2;
id e_(A,i)*A.A^2*B.B^2=e_(j,i)*A(j)*A.A^2*B.B^2;
id e_(k,l)*e_(k,l)=2;
contract;
local resp=phi-phi2-phi3;
print;
.end

phi= -4*e_(A,i)*A.A^2*B.B^2;
phi2= 2*A(i)*A.A*A.B^2*B.B;
phi3= -2*e_(B,i)*A.A^2*A.B*B.B;
resp= -2*A(i)*A.A*A.B^2*B.B-4*e_(A,i)*A.A^2*B.B^2+
      +2*e_(B,i)*A.A^2*A.B*B.B;
```

Propriedades a serem analisadas:

(i) $\vec{A}$ e $\tilde{\vec{A}}$ são sempre 2 vetores l. ind.;

(ii)Se $\vec{A} = \tilde{\vec{A}} \Rightarrow \vec{A} = \vec{0}$;

(iii)Se $\vec{B} = \tilde{\vec{A}} \Rightarrow \vec{A} = -\tilde{\vec{B}}$;

(iv) $\left|\vec{A} + \tilde{\vec{A}}\right| \overset{?}{\underset{?}{=}} \sqrt{2}\ |\vec{A}|$.

Expressões envolvendo contrações entre vetores, tensores e matrizes

Motivação para tais cálculos: preparação ao estudo da equação de Dirac em 2 dimensões (equação que descreve o elétron em movimento planar). Aplicação Efeito Hall Quântico.

Matrizes γ : γ_i (i = 1, 2)

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} \gamma_1^2 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \gamma_2^2 = I_2 \\ \gamma_1 \gamma_2 = -\gamma_2 \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \text{checar}$$

$\{ \gamma_i, \gamma_j \} = 2\delta_{ij} I_2$

$\{ , \}$: anti-comutador

$[,]$: comutador

$\{A , B\}$: $AB + BA$

$[A , B]$: $AB - BA$

A relação $\{ \gamma_i, \gamma_j \} = 2\delta_{ij} I_2$define a chamada álgebra de Clifford, que é um concerto matemático fundamental para a formulação da equação de Dirac.

Propriedades a serem verificadas:

$tr\, \gamma_i = 0$

$tr(\gamma_i \gamma_j) = 2\delta_{ij}$

$tr(\gamma_i \gamma_j \gamma_k) = 0$

$$tr(\gamma_i\gamma_j\gamma_k\gamma_l) = -tr(\gamma_l\gamma_i\gamma_j\gamma_k) + 4\,\delta_{il}\delta_{jk} - 4\,\delta_{jl}\delta_{ik} + 4\,\delta_{kl}\delta_{ij}$$

$$= 2\delta_{ij}\delta_{kl} + 2\delta_{il}\delta_{jk} - 2\delta_{ik}\delta_{jl}$$

$$tr(\gamma_i\gamma_j\gamma_k\gamma_l\gamma_m) = 0$$

$$tr(\gamma_i\gamma_j\gamma_k\gamma_l\gamma_m\gamma_n) \stackrel{?}{=}$$

$P = \gamma_i p_i$; p_i são as componentes do vetor $\vec{p}$.

$$\vec{p} = (p_1, p_2)$$

$Q = \gamma_i q_i$; q_i são as componentes do vetor $\vec{q}$.

$$\vec{q} = (q_1, q_2)$$

<u>Expressões a serem realizadas:</u>

tr P = ?

tr Q = ?

det P = ?

det Q = ?

tr (PQ) = ?

P^2= ?

Q^2 = ?

tr P^3 = ?

tr Q^3 = ?

P^4 = ?

Q^4 = ?

tr (γ_i P γ_m Q) = ?

<u>Cálculo extra:</u>

$$\Sigma_{ij} \equiv [\gamma_i , \gamma_j]$$

$$tr\left(\Sigma_{ij}\right) = 0$$

$$tr\left(\sum_{ij}\sum_{kl}\right) \overset{?}{\underset{?}{=}} 2(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk})$$

$$R \equiv \sum_{ij} p_i q_i$$

$$tr(R^2) = ?$$

Respostas dos exercícios anteriores:

```
FORM version 2.1 Aug 21 1992

nw stat;
Dimension 2;
Indices i, j, k, l, m, n;
Vectors p, q;
Local FI = gi_(1);
Local F1 = g_(1,i);
local F2 = g_(1,i)*g_(1,j);
local F3 = g_(1,i)*g_(1,j)*g_(1,k);
local F4 = g_(1,i)*g_(1,j)*g_(1,k)*g_(1,l);
local F5 = g_(1,i)*g_(1,j)*g_(1,k)*g_(1,l)*g_(1,m);
local F6 = g_(1,i)*g_(1,j)*g_(1,k)*g_(1,l)*g_(1,m)*g_(1,n);
Local F7 = g_(1,i)*p(i)*g_(1,j)*q(j);
Local F8 = g_(1,i)*p(i);
Local F9 = g_(1,i)*q(i);
Local F10 = ( g_(1,i)*p(i))^3;
Local F11 = ( g_(1,i)*q(i))^3;
Local F12 = g_(1,i)* g_(1,j)*p(j)*g_(1,m)*g_(1,n)*q(n);
tracen,1;
unittrace 2;
print;
.end

FI = 2;

F1 = 0;

F2 = 2*d_(i,j);

F3 = 0;

F4 = 2*d_(i,j)*d_(k,l) - 2*d_(i,k)*d_(j,l) + 2*d_(i,l)* d_(j,k);

F5 = 0;

F6 =
 2*d_(i,j)*d_(k,l)*d_(m,n) - 2*d_(i,j)*d_(k,m)*
 *d_(l,n) + 2*d_(i,j)*
 d_(k,n)*d_(l,m) - 2*d_(i,k)*d_(j,l)*d_(m,n) +
 2*d_(i,k)*d_(j,m)*d_(l,n)
 - 2*d_(i,k)*d_(j,n)*d_(l,m) + 2*d_(i,l)*d_(j,k)*d_(m,n)
 - 2*d_(i,l)*d_(j,m)*d_(k,n) + 2*d_(i,l)*d_(j,n)*d_(k,m)
 - 2*d_(i,m)*d_(j,k)*d_(l,n) + 2*d_(i,m)*d_(j,l)*d_(k,n)
 - 2*d_(i,m)*d_(j,n)*d_(k,l) + 2*d_(i,n)*d_(j,k)*d_(l,m)
 - 2*d_(i,n)*d_(j,l)*d_(k,m) + 2*d_(i,n)*d_(j,m)*d_(k,l);

F7 = 2*p.q;
```

```
F8 = 0;

F9 = 0;

F10 = 0;

F11 = 0;

F12 = 2*p(i)*q(m) + 2*p(m)*q(i) - 2*d_(i,m)*p.q;


FORM version 2.1 Aug 21 1992

nw stat;
Dimension 2;
Indices i,j,k,l;
NFunction An,gi,gj;
Vectors p,q;
Local soma = An(gi,gj);
id An(?,??) = gi*gj - gj*gi;
id gi = g_(1,i);
id gj = g_(1,j);

print;
.sort

soma =
      g_(1,i,j) - g_(1,j,i);


skip soma;

local F1 = g_(1,i,j)- g_(1,j,i);
local F2 = (g_(1,i,j)- g_(1,j,i))*(g_(1,k,l)- g_(1,l,k));
local R = ( (g_(1,i,j)- g_(1,j,i))*p(i)*q(j) )^2;

tracen,1;
unittrace 2;
print;
.end

F1 = 0;

F2 =
     - 8*d_(i,k)*d_(j,l) + 8*d_(i,l)*d_(j,k);

R =
     - 32*p.p*q.q;


FORM version 2.1 Aug 21 1992

nw stat;
dimension 2;
cfunction M,N,R,V;
indices i,j;
symbols p1,p2,q1,q2;
local detp =  e_(1,2)*e_(i,j)*M(1,i)*M(2,j)+
             +e_(1,2)*e_(i,j)*N(1,i)*N(2,j);

local detq =  e_(1,2)*e_(i,j)*R(1,i)*R(2,j)+
             +e_(1,2)*e_(i,j)*V(1,i)*V(2,j);
```

```
contract;
id M(1,1) = 0;
id M(1,2) = p1;
id M(2,1) = -p1;
id M(2,2) = 0;
id N(1,1) = p2;
id N(1,2) = 0;
id N(2,1) = 0;
id N(2,2) = -p2;

id R(1,1) = 0;
id R(1,2) = q1;
id R(2,1) = -q1;
id R(2,2) = 0;
id V(1,1) = q2;
id V(1,2) = 0;
id V(2,1) = 0;
id V(2,2) = -q2;

print;
.end

detp =
      p1^2 - p2^2;

detq =
      q1^2 - q2^2;
\vspace{1pt}
```

Respostas de P^2, Q^2, P^4, Q^4 usando o MAPLE V :

> restart;

> with (linalg):

> pa:=matrix (2,2,[0,p1,-p1,0]);

$$pa := \begin{bmatrix} 0 & p1 \\ -p1 & 0 \end{bmatrix}$$

> pb:=matrix (2,2,[p2,0,0,-p2]);

$$pb := \begin{bmatrix} p2 & 0 \\ 0 & -p2 \end{bmatrix}$$

> pc:=pa + pb;

$$pc := pa + pb$$

> evalm(pc);

$$\begin{bmatrix} p2 & p1 \\ -p1 & -p2 \end{bmatrix}$$

> evalm(pc&*pc);

$$\begin{bmatrix} p2^2 - p1^2 & 0 \\ 0 & p2^2 - p1^2 \end{bmatrix}$$

> evalm(pc&*pc&*pc&*pc);

$$\begin{bmatrix} (p2^2 - p1^2)^2 & 0 \\ 0 & (p2^2 - p1^2)^2 \end{bmatrix}$$

>qa:=matrix(2,2,[0,q1,-q1,0]);

$$qa := \begin{bmatrix} 0 & q1 \\ -q1 & 0 \end{bmatrix}$$

> qb:=matrix(2,2,[q2,0,0,-q2]);

$$qb := \begin{bmatrix} q2 & 0 \\ 0 & -q2 \end{bmatrix}$$

>qc:=qa+qb;

qc := qa + qb

> evalm(qc);

$$\begin{bmatrix} q2 & q1 \\ -q1 & -q2 \end{bmatrix}$$

>evalm(qc&*qc);

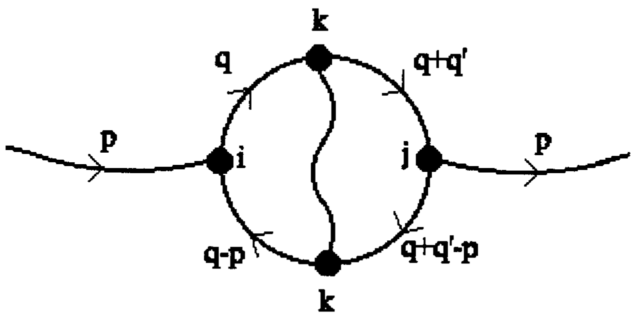
$$\begin{bmatrix} q2^2 - q1^2 & 0 \\ 0 & q2^2 - q1^2 \end{bmatrix}$$

> evalm(qc&*qc&*qc&*qc);

$$\begin{bmatrix} (q2^2 - q1^2)^2 & 0 \\ 0 & (q2^2 - q1^2)^2 \end{bmatrix}$$

Exercício 1: Desenvolvimento da parte algébrica (matrizes-γ), de um gráfico de Feyman com loop fermiônico.

(photo self-energy)



A expressão a ser simplificada é dada por:

$$L_{ij} = tr[\gamma_i \gamma_m \gamma_k \gamma_n \gamma_j \gamma_r \gamma_k \gamma_s] q_m (q_n + q_n^{\prime}) (q_r + q_r^{\prime} - p_r) * (q_s - p_s)$$

```
FORM version 2.1 Aug 21 1992
nw stat;
Dimension 2;
Vectors q, q1, p;
Indices i, j, k, m, n, r, s;
local L = (g_(1,i)*g_(1,m)*g_(1,k)*g_(1,n)*g_(1,j)*g_(1,r)*g_(1,k)*
* g_(1,s))*q(m)*(q(n)+q1(n))*(q(r)+q1(r) - p(r))*(q(s)-p(s));
tracen,1;
unittrace 2;
contract;
print;
.end

L =
    8*q(i)*q(j)*q1.q1 - 8*q(i)*q(j)*p.p - 8*q(i)*q1(j)*q.q +
    - 16*q(i)*q1(j)*q.q1 + 8*q(i)*q1(j)*q.p + 8*q(i)*q1(j)*q1.p +
    - 4*q(i)*q1(j)*p.p + 8*q(i)*p(j)*q.p - 4*q(i)*p(j)*q1.q1 +
    + 8*q(j)*q1(i)*q.q - 8*q(j)*q1(i)*q.p - 4*q(j)*q1(i)*p.p +
    + 8*q(j)*p(i)*q.p - 4*q(j)*p(i)*q1.q1 + 8*q(j)*p(i)*q1.p +
    + 8*q1(i)*q1(j)*q.q - 8*q1(i)*q1(j)*q.p - 4*q1(i)*p(j)*q.q +
    + 8*q1(i)*p(j)*q.p + 4*q1(j)*p(i)*q.q + 8*q1(j)*p(i)*q.q1 +
    - 8*p(i)*p(j)*q.q - 8*p(i)*p(j)*q.q1 - 8*d_(i,j)*q.q*q.q1 +
    + 8*d_(i,j)*q.q*q.p - 4*d_(i,j)*q.q*q1.q1 + 4*d_(i,j)*q.q*q1.p +
    + 4*d_(i,j)*q.q*p.p - 4*d_(i,j)*q.q^2 + 8*d_(i,j)*q.q1*q.p +
    + 4*d_(i,j)*q.q1*p.p + 4*d_(i,j)*q.p*q1.q1 - 8*d_(i,j)*q.p*q1.p+
    - 8*d_(i,j)*q.p^2;
```

Exercício 2: Preparação ao cálculo no contexto de modelos-σ (importantes no estudo do ferro-magnetismo e em Física de Partículas Elementares).

A formação de modelo-σ é baseada na existência de um tensor simétrico de rank-2, denominado tensor métrico. No caso particular de uma N-esfera, o tensor métrico pode ser expresso como:

$g_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\varphi_i \varphi_j}{1 - \varphi_k \varphi_k}$, onde i, j, k = 1, 2, ..., N

(Há soma sobre k no denominador.)

$$\varphi_k \varphi_k \leftrightarrow \sum_{k=1}^{N} \varphi_k \varphi_k$$

A partir da matriz g_{ij} , chegar à sua inversa, $(g^{-1})_{ij}$.

N = 2:

$$g = \begin{pmatrix} \frac{1-\varphi_2^2}{1-\varphi_1^2-\varphi_2^2} & \frac{\varphi_1\varphi_2}{1-\varphi_1^2-\varphi_2^2} \\ \frac{\varphi_1\varphi_2}{1-\varphi_1^2-\varphi_2^2} & \frac{1-\varphi_1^2}{1-\varphi_1^2-\varphi_2^2} \end{pmatrix}$$

N = 3:

$$g = \begin{pmatrix} \frac{1-\varphi_2^2-\varphi_3^2}{1-\varphi_1^2-\varphi_2^2-\varphi_3^2} & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{pmatrix}$$

```
\smallskip FORM version 3.-(Nov 29 1997). Run at: Fri Jan 16 16:05:59 1998
Functions g, del, phi, [1-phi (n)^2];
CFunctions PHI, [1-PHI (n)^2];
Indices i,j,k,m,n;
nwrite statistics;
Local F = del(j)*g(m,k)+
          del(k)*g(j,m)-del(m)*g(j,k);
print;
.sort

F =
del(j)*g(m,k)+del(k)*g(j,m)-del(m)*g(j,k);
*definitions
*id g(m?,k?)=d_(m,k)-phi(m)*phi(k)/[1-phi (n)^2];
print;
.sort

F =
   del(j)*d_(k,m)-del(j)*phi(m)*phi(k)/([1-phi(n)^2]) + del(k)*d_(j,m)-
   del(k)*phi(j)*phi(m)/([1-phi(n)^2])-del(m)*d_(j,k)+del(m)*phi(j)*
   phi(k)/([1-phi(n)^2]);

*rules for differentiation
repeat;
  id del (i?)*phi(j?) = d_(i,j) + phi(j)*del(i);
endrepeat;
id del(i?)/[1-phi(n)^2] = 2*phi(i)/[1-phi(n)^2]^2;
id del(i?) = 0;
print +s;
.sort

F =
    +2*phi(j)*phi(k)*phi(m)*([1-phi(n)^2])^(-2)
    -2*phi(j)*phi(m)*phi(k)*([1-phi(n)^2])^(-2)
    -2*phi(m)/([1-phi(n)^2])*d_(j,k)
    -2*phi(m)*phi(k)*phi(j)*([1-phi(n)^2])^(-2);
*
*normalization: first we look at the numerator
                denominator = (1-phi(n)^2)^2
```

```
Local expr = 1/2*g(i,m)*F;
id g(i?,m?) = d_(i,m)-phi(i)*phi(m);
print +s expr;
.sort

expr =
   -phi(i)/([1-phi(n)^2])*d_(j,k)
   -phi(i)*phi(k)*phi(j)*([1-phi(n)^2])^(-2)
   -phi(i)*phi(m)*phi(j)*phi(k)*phi(m)*([1-phi(n)^2])^(-2)
   +phi(i)*phi(m)*phi(j)*phi(m)*phi(k)*([1-phi(n)^2])^(-2)
   +phi(i)*phi(m)*phi(m)/([1-phi(n)^2])*d_(j,k)
   +phi(i)*phi(m)*phi(m)*phi(k)*phi(j)*([1-phi(n)^2])^(-2)
   -phi(j)*phi(i)*phi(k)*([1-phi(n)^2])^(-2)
   -phi(j)*phi(k)*phi(i)*([1-phi(n)^2])^(-2);
drop F;
id 1/[1-phi(n)^2]^2 = 1;
id 1/[1-phi(n)^2] = 1-phi(n)^2;
* move to commuting functions
id phi(i?) = PHI(i);
antibracket PHI;
print +s;
.sort

expr =
  +d_(j,k)*(-PHI(i)+PHI(i)*PHI(m)^2 +
  -PHI(i)*PHI(m)^2*PHI(n)^2 +PHI(i)*PHI(n)^2)+
  -PHI(i)*PHI(j)*PHI(k)*PHI(m)^2;
*
*further simplification of numerator
*
id PHI(m)^2 = 1 - [1-PHI(n)^2];
antibracket PHI;
print +s;
.sort

expr =
    +[1-PHI(n)^2]*d_(j,k)*(-PHI(i)+PHI(i)*PHI(n)^2)+
    +[1-Phi(n)^2]*(-PHI(i)*PHI(j)*PHI(k));
*
*The requested formula
*
id [1- PHI(n)^2] = 1/[1-phi(n)^2];
antibracket PHI;
print +s;
.end

expr =

     +1/([1-PHI(n)^2])*d_(j,k)*(-PHI(i)+
     +PHI(i)*PHI(n)^2)+1/([1-PHI(n)^2])*(-PHI(i)*PHI(j)*PHI(k));
```

$$\left.\begin{array}{l}\text{Dado que } g_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\varphi_i \varphi_j}{1-\varphi_k \varphi_k} \\ (g^{-1})_{ij} = \delta_{ij} - \varphi_i \varphi_j\end{array}\right] \text{e}$$

$= g.g^{-1} = I_{2n}$ (caso geral:NxN)

$= g_{im}\, g^{-1}_{mj} = \delta_{ij}$

$$= (\delta_{im} + \frac{\varphi_i\,\varphi_m}{1-\varphi_k\,\varphi_k})(\delta_{mj} - \varphi_m\,\varphi_j) \stackrel{?}{=} \delta_{ij}$$

$$= \delta_{im}\delta_{mj} - \delta_{im}\varphi_m\,\varphi_j + \frac{\varphi_i\,\varphi_m}{1-\varphi_k\,\varphi_k}\delta_{mj} - \frac{\varphi_i\,\varphi_m\,\varphi_m\,\varphi_j}{1-\varphi_k\,\varphi_k}$$

$$= \delta_{ij} - \varphi_i\varphi_j + \frac{\varphi_i\,\varphi_j}{1-\varphi_k\,\varphi_k} - \frac{\varphi_i\,\varphi_j\varphi_m\,\varphi_m}{1-\varphi_k\,\varphi_k}$$

$$= \delta_{ij} - \varphi_i\varphi_j + \frac{\varphi_i\,\varphi_j}{1-\varphi_k^2}\underbrace{(1 - \varphi_m\varphi_m)}_{1-\varphi_k^2}$$

$$= \delta_{ij}$$

A matriz inversa, g^{-1}, é expressa em termos de índices superiores.

g_{ij} (i: row, j: column),

g^{ij}(i: row, j: column); g^{ij} designa $(g^{-1})_{ij}$

A relação $g_{ik}(g^{-1})_{kj} = \delta_{ij}$ deve ser reescritaem termos da matriz com índices levantados:

$g_{ik}g^{kj} = \delta_i^j$ (δ_i^j é o usual delta de kronecker: $\delta_i^j = \begin{cases} 1, i=j \\ 0, i \neq j \end{cases}$)

Convencionalmente, referimo-nosaos índices inferiores chamando-os de <u>índices covariantes</u>; quanto aos índices superiores são designados de <u>índices contravariantes</u>.

A matriz-g (tensor métrico) apresenta índices covariantes ao passo que a inversa da métrica carrega <u>índices contravariantes</u>.

Tendo-se estabelecido o tratamento do tensor métrico da N-esfera, podemos, em seguida, introduzir o conceito do chamado <u>Símbolo de Christoffel</u>, caso particular da grandeza que em geometria diferencial é conhecida como <u>Conexão Afim</u>.

Γ^i_{jk} : Símbolo de Christoffel.

$\Gamma ijk \equiv \frac{1}{2} g_{im}(\partial_j g_{mk} + \partial_k g_{jm} - \partial_m g_{jk}),$

onde $\partial_j \equiv \frac{\partial}{\partial\theta_j}$

No nosso caso,

$$g_{mk} = \delta_{mk} - \frac{\varphi_m \varphi_k}{1-\varphi_n^2}$$

$$g^{im} = \delta^{im} - \varphi^i \varphi^m$$

Com isto, estamos aptos a escrever a expressão do Símbolo de Christoffel para a N-esfera.
Finalmente, com os tensores g_{ij} e g^{ij}, podemos definir vetores covariantes e contravariantes.
v_i : componentes covariantes do vetor v.
v^i : componentes contravariantes do vetor v.

$$\begin{cases} v^i = g^{ik} v_k \\ v_i = g_{ik} v^k \end{cases}$$

No R^n, o tensor métrico é a identidade:

$$\begin{cases} g_{ij} = \delta_{ij} \\ g^{ij} = \delta^{ij} \end{cases},$$

portanto

$$\begin{cases} v^i = \delta^{ik} v_k \\ v_{contrav} = I_2 v_{cov} \Longrightarrow v_{contrav} = v_{cov}. \end{cases}$$

Em espaços onde o tensor métrico não seja a matriz identidade, o produto escalar entre vetores deve ser realizado com o auxílio da métrica, como abaixo:

$$u \leftrightarrow u^i \text{ ou } u_i = g_{ij} u^j;$$

$$v \leftrightarrow v^i \text{ ou } v_i = g_{ij} v^j;$$

$$u.v \equiv g_{ij} u^i v^j.$$

No R^n : $g_{ij} = \delta_{ij} \Rightarrow u.v = \delta_{ij} u^i v^j = u^i v^j = u.v = u^i v^j$,
o que reproduz a expressão usual do produto escalar.
Voltando ao caso geral:

$$1)\, u.v = g_{ij} u^i v^j = u^i \underbrace{g_{ij} v^j}_{v_i} = u^i v_i$$

$$2)\, u.v = g_{ij}u^i v^j = \underbrace{g_{ji}u^i}_{u_j} v^j$$

(onde se usou o fato de que a métrica é um tensor simétrico em seus índices)

$$= u.v = u_j v^j = u_i v^i$$

Finalmente, uma outra possível forma do produto escalar é apresentada com o auxílio do tensor métrico inverso, g^{ij} :

$$g_{ik}g^{kj} = \delta_i^j$$

$$u.v = g_{ij}u^i v^j = g_{ij}(g^{ik}\, u_k)\,(g^{jm} v_m) =$$

$$= g_{ij}g^{ik}g^{jm}\, u_k v_m = \delta_j^k\, g^{jm}\, u_k\, v_m =$$

$$= g^{km} u_k v_m = g^{ij} u_i\, v_j$$

As diferentes maneiras de escrever o produto escalar estão agrupadas a seguir:

$$u.v \equiv g_{ij}u^i v^j = g^{ij}u_i\, v_j = u^i v_i = u_i v^i$$

Exemplos para fixação dos conceitos de métrica, covariância, contravariância e produto escalar num espaço curvo.

Espaço adotado: 2-esfera, $S^2 \equiv \{(x;y;z)/\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

Coordenadas esféricas: $(\theta;\varphi), 0 \leq \theta \leq \Pi$

$0 \leq \varphi \leq 2\Pi$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \end{pmatrix}$$

Exercícios:

1) $g^{ij} = ?$

2) $u^i \equiv (u_\theta; u_\varphi)$

$u^i = ?$

3) $u.v = g_{ij}u^i v^j = ?$

$= u^i v_i = ?$

$= g^{ij} u_i v_j = ?$

OBS: $g_{ij} = \delta_{ij} - \cos^2\theta\,\delta_{i2}\,\delta_{j2}$

$g^{ij} = \delta_{ij} + \cot^2\theta\,\delta_{i2}\,\delta_{j2}$

$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial\theta}, \ \partial_2 = \frac{\partial}{\partial\varphi}$

4) $\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{im}(\partial_j\, g_{mk} + \partial_k\, g_{jm} - \partial_m\, g_{jk}) = ?$

Respostas dos exercícios:

1)

```
> with(linalg):
> G[i,j]:=matrix(2, 2,[1, 0, 0,(sin (theta))^2]);
```

$$G[i, j] := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & sin(\theta)^2 \end{bmatrix}$$

```
> G[i,j,c]:=inverse(G[i,j]);
```

$$G[i, j, c] := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{sin(\theta)^2} \end{bmatrix}$$

2)

```
> U[ic] := vector( [U[theta],U [phi]] );
```

$$U_{ic} := [U_\theta, U_\phi]$$

```
> U[i]:=multiply(G[i,j],U[ic]);
```

$U_i := [U_\theta, \sin(\theta)^2\, U\phi]$

3)

> V[jc]:=vector([V[theta],V[phi]]);

$V_{jc} := [V_\theta, V_\phi]$

> UV_1:=multiply(G[i,j],U[ic],V[jc]);

$UV\_1 := U_\theta V_\theta + \sin(\theta)^2\, U_\phi\, V_\phi$

>V[i]:=multiply(G[i,j],V[jc]);

$V[i] := [V_\theta, \sin(\theta)^2\, V_\phi]$

> UV_2:=multiply(U[ic],V[i]);

$UV\_2 := U_\theta\, V_\theta + \sin(\theta)^2\, U_\phi\, V_\phi$

> UV_3:=multiply(G[i,j,c],U[i],V[i]);

$UV\_3 := U_\theta\, V_\theta + \sin(\theta)^2\, U_\phi\, V_\phi$

4)

```
FORM version 3.-(Nov 29 1997). Run at: Thu Jan 22 13:45:23 1998
Functions cot, cos, sin, g, del;
Symbols ct, st;
Indices i,j,k,m,n, theta;
nwrite statistics;
Local F = del(j)*g(m,k) + del(k)*g(j,m) - del(m)*g(j,k);
 print;
.sort

F =
del(j)*g(m,k) + del(k)*g(j,m) - del(m)*g(j,k);
*
* definitions
* id g(m,k) = d_(m,k) - cos(theta)^2*d_(m,2)*d_(k,2);
\ id g(j,m) = d_(j,m) - cos(theta)^2*d_(j,2)*d_(m,2);
\ id g(j,k) = d_(j,k) - cos(theta)^2*d_(j,2)*d_(k,2);
print;
.sort

F =
del(j)*d_(k,m) - del(j)*cos(theta)*cos(theta)*d_(2,k)*d_(2,m) +
+ del(k)* d_(j,m) - del(k)*cos(theta)*cos(theta)*d_(2,j)*d_(2,m) +
- del(m)*d_(j,k) + del(m)*cos(theta)*cos(theta)*d_(2,j)*d_(2,k);
*
* rules for differentiation
*
repeat;
id del(i?)*cos(theta) = -d_(i,1)*sin(theta)+ cos(theta)*del(i);
```

```
endrepeat;
id del(i?) = 0;
print +s;
.sort;

 F =
 + cos(theta)*sin(theta)*d_(1,j)*d_(2,k)*d_(2,m)
 + cos(theta)*sin(theta)*d_(1,k)*d_(2,j)*d_(2,m)
 - cos(theta)*sin(theta)*d_(1,m)*d_(2,j)*d_(2,k)
 + sin(theta)*cos(theta)*d_(1,j)*d_(2,k)*d_(2,m)
 + sin(theta)*cos(theta)*d_(1,k)*d_(2,j)*d_(2,m)
 - sin(theta)*cos(theta)*d_(1,m)*d_(2,j)*d_(2,k)
 ;

 Local expr = 1/2*g(i,m)*F;
 print +s expr;
.sort

 expr =
 - 1/2*g(i,1)*cos(theta)*sin(theta)*d_(2,j)*d_(2,k)
 - 1/2*g(i,1)*sin(theta)*cos(theta)*d_(2,j)*d_(2,k)
 + 1/2*g(i,2)*cos(theta)*sin(theta)*d_(1,j)*d_(2,k)
 + 1/2*g(i,2)*cos(theta)*sin(theta)*d_(1,k)*d_(2,j)
 + 1/2*g(i,2)*sin(theta)*cos(theta)*d_(1,j)*d_(2,k)
 + 1/2*g(i,2)*sin(theta)*cos(theta)*d_(1,k)*d_(2,j)
 ;

drop F;
id cos(theta) = ct;
id sin(theta) = st;
print +s;
.sort;

 expr =
 - g(i,1)*d_(2,j)*d_(2,k)*ct*st
 + g(i,2)*d_(1,j)*d_(2,k)*ct*st
 + g(i,2)*d_(1,k)*d_(2,j)*ct*st
 ;
 id g(i?,1) = d_(i,1);
id g(i?,2) = d_(i,2)/st^2;
id ct/st = cot(theta);
id ct = cos(theta);
id st = sin(theta);
print +s;
.end

 expr =
 + cot(theta)*d_(1,j)*d_(2,i)*d_(2,k)
 + cot(theta)*d_(1,k)*d_(2,i)*d_(2,j)
 - cos(theta)*sin(theta)*d_(1,i)*d_(2,j)*d_(2,k)
 ;
```

-> Dado um tensor de rank-2, T^{ij}, com componentes $T^{ij} = \begin{pmatrix} T_{\theta\theta} & T_{\theta\varphi} \\ T_{\varphi\theta} & T_{\varphi\varphi} \end{pmatrix}$

$T_{ij} = ?$ $\qquad$ $T^i_j = ?$

$T^i_j = ?$ $\qquad\qquad F = T_{ij}\, u^i v^j \; = ?$

Respostas:

> $T[i,j,c]$:=
$matrix(2,2,[T[theta,theta],T[theta,phi],T[phi,theta],T[phi,phi]])$;

$$T_{i,j,c} := \begin{bmatrix} T_{\theta,\theta} & T_{\theta,\phi} \\ T_{\phi,\theta} & T_{\phi,\phi} \end{bmatrix}$$

> interface(labeling=false);

> $T[i,j]$:= multiply $(G[i,j], T[i,j,c], G[i,j])$;

$$T_{i,j} := \begin{bmatrix} T_{\theta,\theta} & T_{\theta,\phi}\sin(\theta)^2 \\ \sin(\theta)^2 T_{\phi,\theta} & \sin(\theta)^4 T_{\phi,\phi} \end{bmatrix}$$

> $T[ic,j]$:= multiply $(T[i,j,c], G[i,j])$;

$$T_{ic,j} := \begin{bmatrix} T_{\theta,\theta} & T_{\theta,\phi}\sin(\theta)^2 \\ T_{\phi,\theta} & \sin(\theta)^2 T_{\phi,\phi} \end{bmatrix}$$

> $T[ic,i]$:= trace $(T[ic,j])$;

$$T[ic,i] := T_{\theta,\theta} + sin(\theta)^2\, T_{\phi,\phi}$$

> $U[ic]$:= vector $([U[theta], U[phi]])$;

$$U_{ic} := [U_\theta, U_\phi]$$

> $V[jc]$:=matrix $(2,1,[V[theta], V[phi]])$;

$$V_{jc} := \begin{bmatrix} V_\theta \\ V_\phi \end{bmatrix}$$

> $T[i,j]$:= multiply $(G[i,j], T[i,j,c], G[i,j])$;

$$T_{ij} := \begin{bmatrix} T_{\theta,\theta} & T_{\theta,\phi}\sin(\theta)^2 \\ \sin(\theta)^2 T_{\phi,\theta} & \sin(\theta)^4 T_{\phi,\phi} \end{bmatrix}$$

> F := multiply $(U[ic], T[i,j], V[jc])$;

$$F := [(U_\theta T_{\theta,\theta} + U_\phi \sin(\theta)^2 T_{\phi,\theta})V_\theta + (U_\theta T_{\theta,\phi}\sin(\theta)^2 + U_\phi \sin(\theta)^4 T_{\phi,\phi})V_\phi]$$

OBS1: T^{ij} NÃO é o inverso de T_{ij}, isto só vale para o tensor métrico e não para tensores genéricos.

OBS2: $Z^{ij}{}_{kl}{}^{m}$

$$Z\underbrace{{}_{i}{}^{j}}\overbrace{{}^{k}{}_{l}}{}^{m}$$

$$Z_i{}^{jk}{}_l{}^m = g_{ip}\, g^{kp}\, Z^{pj}{}_{ql}{}^{m}$$

Aplicação: Consideremos um espaço parametrizado por coordenadas $(\xi^1 = \alpha, \xi^2 = \beta, \xi^3 = \gamma)$ e tensor métrico dado por:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta^2 \\ 0 & \alpha^2 & 0 \\ \beta^2 & 0 & \alpha^2\beta^2 \end{pmatrix}, \text{ onde se tem:}$$

$|\alpha| \neq |\beta|$.

São dados os vetores e tensores abaixo:

$u^i \equiv (u_\alpha, u_\beta, u_\gamma)$

$v^i \equiv (v_\alpha, v_\beta, v_\gamma)$

$$T^{ij} \equiv \begin{pmatrix} T_{\alpha\alpha} & T_{\alpha\beta} & T_{\alpha\gamma} \\ T_{\beta\alpha} & T_{\beta\beta} & T_{\beta\gamma} \\ T_{\gamma\alpha} & T_{\gamma\beta} & T_{\gamma\gamma} \end{pmatrix}$$

$Z^{ij}{}_{kl}$

Obter:

a) $g^{ij} = ?$

b) $u_i = ?$

c) v_i = ?

d) $T^i{}_j$ = ?

e) T_{ij} = ?

f) T^i_i = ?

g) $T_i{}^i$ = ?

h) $Z^i{}_{jk}{}^l$ = ?

i) $Z^{ij}{}_{il} \equiv W^i_j$ = ?

j) Γ^i_{jk} = ?

k) $Z^{ij}{}_{ij}$ = ?

l) $F = Z^{ij}{}_{kl}\ U_i U_j v^k v^l$ = ?

Respostas dos exercícios:

> restart;

> with(linalg):

> G[i,j]:=matrix(3,3,[1,0,beta^2,0,alpha^2,0,beta^2,0,alpha^2*beta^2]);

$$G_{i,j} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \beta^2 \\ 0 & \alpha^2 & 0 \\ \beta^2 & 0 & \alpha^2\beta^2 \end{bmatrix}$$

> U[ic]:=vector([U[alpha],U[beta],U[gamma]]);

$$U_{ic} := [U_\alpha, U_\beta, U_\gamma]$$

> V[ic]:=vector([V[alpha],V[beta],V[gamma]]);

$$V_{ic} := [V_\alpha, V_\beta, V_\gamma]$$

>T[i,j,c]:=matrix(3,3,[T[alpha,alpha],T[alpha,beta],T[alpha,gamma],T[beta,alpha],
T[beta,beta],T[beta,gamma],T[gamma,alpha],T[gamma,beta],T[gamma,gamma]]);

$$T_{i,j,c} := \begin{bmatrix} T_{\alpha,\alpha} & T_{\alpha,\beta} & T_{\alpha,\gamma} \\ T_{\beta,\alpha} & T_{\beta,\beta} & T_{\beta,\gamma} \\ T_{\gamma,\alpha} & T_{\gamma,\beta} & T_{\gamma,\gamma} \end{bmatrix}$$

exercício A)

> G[i,j,c]:=inverse(G[i,j]);

$$G[i, j, c] := \begin{bmatrix} \frac{\alpha^2}{\alpha^2-\beta^2} & 0 & -\frac{1}{\alpha^2-\beta^2} \\ 0 & \frac{1}{\alpha^2} & 0 \\ -\frac{1}{\alpha^2-\beta^2} & 0 & \frac{1}{\beta^2(\alpha^2-\beta^2)} \end{bmatrix}$$

exercício B)

> U[i]:=multiply(G[i,j],U[ic]);

$$U_i := [U_\alpha + \beta^2 U_\gamma, \alpha^2 U_\beta, \beta^2 U_\alpha + \alpha^2\beta^2 U_\gamma]$$

exercício C)

> V[i]:=multiply(G[i,j],V[ic]);

$$V_i := [V_\alpha + \beta^2\, V_\gamma, \alpha^2 V_\beta, \beta^2\, V_\alpha + \alpha^2\beta^2\, V_\gamma]$$

exercício D)

> T[ic,j]:=multiply(T[i,j,c],G[i,j]);

$$\mathrm{T}_{ic,j} := \begin{bmatrix} T_{\alpha,\alpha} + T_{\alpha,\gamma}\,\beta^2 & T_{\alpha,\beta}\,\alpha^2 & T_{\alpha,\alpha}\,\beta^2 + T_{\alpha,\gamma}\alpha^2\beta^2 \\ T_{\beta,\alpha} + T_{\beta,\gamma}\beta^2 & T_{\beta,\beta}\,\alpha^2 & T_{\beta,\alpha}\,\beta^2 + T_{\beta,\gamma}\,\alpha^2\beta^2 \\ T_{\gamma,\alpha} + T_{\gamma,\gamma}\beta^2 & T_{\gamma,\beta}\,\alpha^2 & T_{\gamma,\alpha}\,\beta^2 + T_{\gamma,\gamma}\,\alpha^2\beta^2 \end{bmatrix}$$

exercício E)

> T[i,j]:=multiply(G[i,j],T[i,j,c],G[i,j]);

$T_{ij} := [T_{\alpha,\alpha} + T_{\alpha,\gamma}\,\beta^2 + (T_{\alpha,\gamma} + T_{\gamma,\gamma}\beta^2)\beta^2, (T_{\alpha,\beta} + \beta^2 T_{\gamma,\beta})\alpha^2,$

$(T_{\alpha,\alpha} + T_{\gamma,\alpha}\,\beta^2)\beta^2 + (T_{\alpha,\gamma} + T_{\gamma,\gamma}\beta^2)\,\alpha^2\beta^2]$

$[\alpha^2 T_{\beta,\alpha} + T_{\beta,\gamma}\alpha^2\beta^2, T_{\beta,\beta}\,\alpha^4, \alpha^2 T_{\beta,\alpha}\beta^2 + \alpha^4 T_{\beta,\gamma}\,\beta^2]$

$[T_{\alpha,\alpha}\beta^2 + \alpha^2\beta^2 T_{\gamma,\alpha} + (T_{\alpha,\gamma} + T_{\gamma,\gamma}\alpha^2\beta^2)\,\beta^2, (\beta^2 T_{\alpha,\beta} + \alpha^2\beta^2\, T_{\gamma,\beta})\alpha^2,$

$(T_{\alpha,\alpha}\beta^2 + \alpha^2\beta^2 T_{\gamma,\alpha})\beta^2 + (T_{\alpha,\gamma}\beta^2 + T_{\gamma,\gamma}\alpha^2\,\beta^2)\alpha^2\,\beta^2]$

exercício F)

> T[ic,i]:=trace(T[ic,j]);

$$T_{ic,i} := T_{\alpha,\alpha} + T_{\alpha,\gamma}\,\beta^2 + T_{\beta,\beta}\alpha^2 + T_{\gamma,\alpha}\beta^2 + T_{\gamma,\gamma}\alpha^2\beta^2$$

exercício G)

> T[i,ic]:=T[ic,i];

$$T_{i,ic} := T_{\alpha,\alpha} + T_{\alpha,\gamma}\beta^2 + T_{\beta,\beta}\alpha^2 + T_{\gamma,\alpha}\beta^2 + T_{\gamma,\gamma}\alpha^2\,\beta^2$$

exercício H)

> Z[ic,j,k,lc]:=G[j,m]*G[l,n,c]*Z[ic,mc,k,n];

$$Z_{ic,j,k,lc} := G_{j,m}G_{l,n,c}Z_{ic,mc,k,n}$$

exercício I)

>W[i,j,c]:=matrix(3,3,[W[alpha,alpha],W[alpha,beta],W[alpha,gamma],W[beta,alpha], W[beta,beta],W[beta,gamma],W[gamma,alpha],W[gamma,beta],W[gamma,gamma]]);

$$W_{i,j,c} := \begin{bmatrix} W_{\alpha,\alpha} & W_{\alpha,\beta} & W_{\alpha,\gamma} \\ W_{\beta,\alpha} & W_{\beta,\beta} & W_{\beta,\gamma} \\ W_{\gamma,\alpha} & W_{\gamma,\beta} & W_{\gamma,\gamma} \end{bmatrix}$$

> W[i,jc]:=multiply(G[i,j],W[i,j,c]);

$$W[i,jc] := \begin{bmatrix} W_{\alpha,\alpha} + \beta^2 W_{\gamma,\alpha} & W_{\alpha,\beta} + \beta^2 W_{\gamma,\beta} & W_{\alpha,\gamma} + \beta^2 W_{\gamma,\gamma} \\ \alpha^2 W_{\beta,\alpha} & \alpha^2 W_{\beta,\beta} & \alpha^2 W_{\beta,\gamma} \\ \beta^2 W_{\alpha,\alpha} + \alpha^2\beta^2 W_{\gamma,\alpha} & \beta^2 W_{\alpha,\beta} + \alpha^2\beta^2 W_{\gamma,\beta} & \beta^2 W_{\alpha,\gamma} + \alpha^2\beta^2 W_{\gamma,\gamma} \end{bmatrix}$$

> Z[ic,jc,i,l]:=";

$$Z_{ic,jc,i,l} := \begin{bmatrix} W_{\alpha,\alpha} + \beta^2 W_{\gamma,\alpha} & W_{\alpha,\beta} + \beta^2 W_{\gamma,\beta} & W_{\alpha,\gamma} + \beta^2 W_{\gamma,\gamma} \\ \alpha^2 W_{\beta,\alpha} & \alpha^2 W_{\beta,\beta} & \alpha^2 W_{\beta,\gamma} \\ \beta^2 W_{\alpha,\alpha} + \alpha^2\beta^2 W_{\gamma,\alpha} & \beta^2 W_{\alpha,\beta} + \alpha^2\beta^2 W_{\gamma,\beta} & \beta^2 W_{\alpha,\gamma} + \alpha^2\beta^2 W_{\gamma,\gamma} \end{bmatrix}$$

Mais detalhes sobre os itens (f) e (g):

$$T^i{}_j = g_{jk}T^{ik} = T.g$$

$$T_i{}^j = g_{ik}T^{kj} = g.T$$

$$\left.\begin{array}{l} T^i{}_i = tr(T.g) \\ T_i{}^i = tr(g.T) \end{array}\right\}$$ Como o $tr(MN) = tr(NM) \Rightarrow T^i{}_i = T_i{}^i$; independente de T^{ij} ser,

ou não, simétrico.

$$\begin{array}{cc} T^i{}_j & \neq \; T_i{}^j \\ \uparrow & \uparrow \\ T.g & g.T \end{array}$$

$$W^j{}_l = Z^{ij}{}_{il}$$
$$= Z^{1j}{}_{il} + Z^{2j}{}_{2l} + Z^{3j}{}_{3l}$$

A contração do 1° com o 3° índice reduz o tensor Z, de rank-4, ao tensor W, de rank-2. Adotemos que:

$$W^{ij} = \begin{bmatrix} W_{\alpha\alpha} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ W_{\gamma\alpha} & W_{\gamma\beta} & W_{\gamma\gamma} \end{bmatrix}$$

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \beta^2 \\ 0 & \alpha^2 & 0 \\ \beta^2 & 0 & \alpha^2\beta^2 \end{bmatrix}$$

$$g^{ij} \rightarrow conhecida = g^{-1}$$

$$\alpha \equiv \xi^1$$
$$\beta \equiv \xi^2$$
$$\gamma \equiv \xi^3$$

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{im}(\partial_j g_{mk} + \partial_k g_{jm} + \partial_m g_{jk})$$

i = 1

Γ^1_{11} Γ^1_{12} Γ^1_{13}
Γ^1_{21} Γ^1_{22} Γ^1_{23}
Γ^1_{31} Γ^1_{33} Γ^1_{33}

i = 2

Γ^2_{11} Γ^2_{12} Γ^2_{13}
Γ^2_{21} Γ^2_{22} Γ^2_{23}
Γ^2_{31} Γ^2_{33} Γ^2_{33}

i = 3

Γ^3_{11} ...

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial \xi^1} = \frac{\partial}{\partial \alpha}$$
$$\partial_2 = \frac{\partial}{\partial \xi^2} = \frac{\partial}{\partial \beta}$$
$$\partial_3 = \frac{\partial}{\partial \xi^3} = \frac{\partial}{\partial \gamma}$$

$$Z^{ij}{}_{ij} =$$
$$W^j{}_l = Z^{ij}{}_{il}$$
$$Z^{ij}{}_{ij} = W^j_j = g_{jm} W^{jm} = W^{jm} g_{jm} = tr(W.g)$$
$$Z^{ij}{}_{ij} = tr(W.g)$$
$$F = Z^{ij}{}_{kl} U_i U_j v^k v^l$$

Soma de 81 termos:

$$Z^{11}{}_{11} U_1 U_1 v^1 v^1 + \ldots + Z^{33}{}_{33} U_3 U_3 v^3 v^3.$$

Cálculo Vetorial no R^2

Usualmente, as teorias físicas são formuladas no espaço 3-dimensional, adotando o tempo como coordenada que parametriza a dinâmica e a evolução dos sistemas tratados. Este é o caso, por exemplo, da Mecânica Quântica. Entretanto, uma série de fenômenos em Física apresentam comportamento planar, isto é, podem ser descritos, em excelente aproximação, como se desenvolvendo em um plano, sendo aceitável, portanto, descartar a 3^a dimensão espacial. O próprio movimento planetário é planar, sendo, então, necessárias apenas 2 coordenadas espaciais para descrevê-lo.

Mais recentemente, alguns fenômenos em Física da Matéria Condensada, como Efeito Hall Quântico e a Supercondutividade e as Temperaturas Finitas apresentam-se como exemplos de fenômenos planares. Desta forma, justifica-se, não somente para fins meramente didáticos, uma visão mais detalhada do cálculo e da Análise Vetorial em 2 dimensões espaciais.

Ambiente de trabalho: R^2.

coordenadas cartesianas (x ; y)

$$R^2 \qquad \begin{cases} \hat{x} \equiv \hat{i} \\ \hat{y} \equiv \hat{j} \end{cases}$$

Pontos do espaço: $\vec{x} = (x;y) = x\,\hat{x} + y\,\hat{y}$.

Vetores: referidos aos versores $\hat{x}$ e $\hat{y}$.

$\vec{A} = A_1\,\hat{x} + A_2\,\hat{y} \equiv (A_1;A_2)$

$\vec{A} \leftrightarrow A_i \quad (i = 1,2)$

i é chamado índice vetorial .

2 vetores : $\vec{A}$ e $\vec{B}$: A_i e B_i.

Produto escalar : $\vec{A}\,.\,\vec{B} = A_1B_1 + A_2B_2 = \sum_{i=1}^{2} A_iB_i$

Convenção da soma : índices repetidos (índices mudos) são naturalmente somados.
$\vec{A}\,.\,\vec{B}= A_iB_i$ (está implícita a soma sobre o índice i).

Exemplo1:

$$\Phi = \left(\vec{A}\,.\,\vec{B}\right)^2$$

$$\Phi = (A_1B_1 + A_2B_2)^2$$

$$\Phi = (A_1^2B_1^2 + A_2^2B_2^2 + 2A_1B_1.A_2B_2)$$

Em termos de índices mudos:

$$\Phi = \left(\vec{A}\,.\,\vec{B}\right)^2 \underset{?}{\overset{?}{=}} A_i^2B_i^2 \qquad (I)$$

$$\Phi = \left(\vec{A}\,.\,\vec{B}\right)^2 \underset{?}{\overset{?}{=}} (A_iB_i)(A_iB_i) \qquad (II)$$

Vamos checar as hipóteses I e II.

$$\text{I.}\quad \left[\begin{aligned} \Phi &\overset{?}{=} A_i^2B_i^2 \\ &= A_1^2B_1^2 + A_2^2B_2^2 \end{aligned}\right] \text{Falso.}$$

Falso : perde-se o termo $2A_1A_2B_1B_2$

$$\text{II.}\quad \left[\begin{aligned} \Phi &\overset{?}{=} A_iB_i.A_iB_i \\ &= A_1^2B_1^2 + A_2^2B_2^2 \end{aligned}\right] \text{Também é Falso.}$$

Como então escrever Φ corretamente em termos de índices mudos ?

$$\begin{aligned} \Phi = (A_iB_i)^2 &= \left(\vec{A}\,.\,\vec{B}\right)\left(\vec{A}\,.\,\vec{B}\right) = \\ &= (A_iB_i)(A_jB_j) \\ &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} A_iB_iA_jB_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi &= A_1 B_1 (A_1 B_1 + A_2 B_2) + A_2 B_2 (A_1 B_1 + A_2 B_2) \\ &= A_1^2 B_1^2 + A_2^2 B_2^2 + 2 A_1 B_1 A_2 B_2\end{aligned}$$

Lição que extraímos:

Sempre que no mesmo termo, houver mais de um par de índices somados, deve-se adotar para cada par um símbolo diferente.

$$\Phi = \left(\vec{A} \, . \, \vec{B}\right)\left(\vec{A} \, . \, \vec{B}\right) = A_i B_i A_j B_j$$

Exemplo 2:

$$X = \left(\vec{A} \, . \, \vec{B}\right)^3 + \left(\vec{C} \, . \, \vec{D}\right)^2 + \vec{E} \, . \, \vec{F}$$

$$X = \left(\vec{A} \, . \, \vec{B}\right)\left(\vec{A} \, . \, \vec{B}\right)\left(\vec{A} \, . \, \vec{B}\right) + \left(\vec{C} \, . \, \vec{D}\right)\left(\vec{C} \, . \, \vec{D}\right) + \vec{E} \, . \, \vec{F}$$

$$X = A_i B_i A_j B_j A_k B_k + \underbrace{C_i D_i C_j D_j}_{\substack{ou \\ C_l D_l C_m D_m}} + E_i F_i$$

Exercício de aplicação:

Simplificar ao máximo as expressões seguintes:

Exercício 1:

$$\Phi = \left(\vec{A} \, . \, \vec{B}\right)^4 - A^2 B^2 - \left(\vec{A} \times \vec{B}\right)^2;$$

$$\begin{aligned}\vec{A}^2 &\equiv \vec{A} \, . \, \vec{A} \\ \vec{B}^2 &\equiv \vec{B} \, . \, \vec{B} \\ \vec{A} \times \vec{B} &\equiv \varepsilon_{ij} A_i B_j\end{aligned}$$

ε_{ij} é a chamada densidade tensorial de Levi-Cevita.

$$\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji}$$
$$\varepsilon_{12} = +1$$
$$\varepsilon_{21} = -\varepsilon_{12} = -1$$
$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$$
$$\left[\begin{array}{l} \varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk} \\ \varepsilon_{ij}\varepsilon_{jk} = -\delta_{ik} \end{array}\right.$$

Resposta:

```
FORM version 2.1 Aug 21 1992

nw stat;
dimension 2;
vectors A, B;
indices i, j, k, l;
local phi=A( i )*B( i )*A( j )*B( j )*A( k )*B( k )*
         *A( l )*B( l )-A( i )*A( i )*B( j )*B( j )+
         -e_( i , j )*e_( k , l )*A( i )*B( j )*A( k )*
         *B( l );
sum i, j, k, l;
contract;
print;
.end

phi = - 2*A.A*B.B + A.B^2 + A.B^4;
```

Exercício 2:

$$\Phi = \left(\vec{A} \times \vec{B}\right)\left(\vec{A} \times \vec{C}\right) - \vec{A}^2 \left(\vec{B} \,.\, \vec{C} \right)$$

```
FORM version 2.1 Aug 21 1992

nw stat;
dimension 2;
vectors A, B, C;
indices i, j, k, l;
local phi= e_( i , j )*A( i )*B( j )*e_( k , l )*
         *A( k )*C( l )-A( i )*A( i )*(B( j )*C( j ));
contract;
print;
.end

phi = - A.B*A.C;
```

Exercício 3:

$$\Phi = \left(\vec{A} \times \vec{B}\right)^4 - \left(\vec{A} \,.\, \vec{B}\right)^4$$

```
FORM version 2.1 Aug 21 1992

nw stat;
```

```
dimension 2;
vectors A, B;
indices i, j, k, l;
local phi = (e_( i , j )*A( i )*B( j )*e_( k , l )*
          *A( k )*B( l ))^2-(A( i )*B( i ))^4;
id e_( k , l )*e_( k , l )= 2;
contract;
print;
.end

phi = 4*A.A^2*B.B^2 - A.B^4;
```

Em R^2, é possível converter produto vetorial em produto escalar .

$$\vec{A} \times \vec{B} \equiv \varepsilon_{ij} A_i B_j$$
$$= A_1 B_2 - A_2 B_1$$
$$\vec{A} \times \vec{B} = A_i \tilde{B}_i = \vec{A} \, . \, \tilde{\vec{B}}$$

Dual de um Vetor:

$$\tilde{A}_i \equiv \varepsilon_{ij} A_j$$
$$\tilde{A}_1 \equiv \varepsilon_{12} A_2$$
$$\tilde{A}_2 \equiv -A_1$$

$$\left[\begin{array}{l} \vec{A} \equiv (A_1 ; A_2) \\ \tilde{\vec{A}} \equiv (A_2 ; -A_1) \end{array} \right.$$

$\tilde{\tilde{\vec{A}}}$ (Dual do dual):

$$\tilde{\tilde{\vec{A}}} = \varepsilon_{ij} \tilde{A}_j$$
$$= \varepsilon_{ij} \varepsilon_{jk} A_k$$
$$= \delta_{ik} = -A_i \quad \therefore \quad \tilde{\tilde{\vec{A}}} = -\vec{A}$$

Exercício 4: Checar no FORM:

1) $\Phi = \tilde{\vec{A}} \, . \, \tilde{\vec{B}} \stackrel{?}{=} \vec{A} \, . \, \vec{B}$

```
FORM version 2.1 Aug 21 1992
```

```
nw stat;
dimension 2;
vectors A,B;
indices i, j, l;
local phi = e_( i , j )*e_( i , l )*A( j )*B( l );
contract;
print;
.end

phi = A.B;
```

$$2)\ \Phi = \tilde{\vec{A}} \times \tilde{\vec{B}} \overset{?}{=} \vec{A} \times \vec{B}$$

```
FORM version 2.1 Aug 21 1992

nw stat;
dimension 2;
vectors A, B;
indices i, j, k, l ;
local phi=e_( i , j )*(e_( i , k )*A( k ))*
        *(e_( j , l )*B( l ) );
contract;
print;
.end

phi = e_(A,B);
```

Exercícios Extras:

$$1)\ \Phi = \tilde{\vec{A}} \,.\, \vec{B} \overset{?}{=} \vec{A} \,.\, \tilde{\vec{B}}$$

```
FORM version 2.1 Aug 21 1992

nw stat;
dimension 2;
vectors A,B;
indices i, j;
local phi = (e_( i , j )*A( j ))*B( i );
contract;
print;
.end

phi = - e_(A,B);
```

$$2)\ \Phi = \tilde{\vec{A}} \times \vec{B} \overset{?}{=} \vec{A} \times \tilde{\vec{B}}$$

```
FORM version 2.1 Aug 21 1992

nw stat;
dimension 2;
vectors A,B;
indices i, j,k;
local phi = e_( i , j )*( e_( i , k )*A( k ))*B( j );
contract;
```

```
print;
.end

phi =A.B
```

Produto escalar

Cálculo do produto escalar entre dois vetores **u** e **v** genericos:

```
FORM version 2.1 Aug 21 1992

    nw stat;
    functions u,v;
    indice a;
    local ProdEsc = u(a)*v(a);
    sum a 1,2,3;
    p;
    .end

ProdEsc =
   u(1)*v(1) + u(2)*v(2) + u(3)*v(3);
```

Produto vetorial

Calcule o produto vetorial entre dois vetores **u** e **v**:

```
FORM version 2.1 Aug 21 1992

nw stat;
Cfunction M;
functions u1,u2,u3,v1,v2,v3,i,j,k;
indices a,b,c;
dimension 3;
local ProdVet = e_(1,2,3)*e_(a,b,c)*M(1,a)*M(2,b)*M(3,c);
contract;
id M(1,1)=i;
id M(1,2)=j;
id M(1,3)=k;
id M(2,1)=u1;
id M(2,2)=u2;
id M(2,3)=u3;
id M(3,1)=v1;
id M(3,2)=v2;
id M(3,3)=v3;
bracket i,j,k;
p;
.end

ProdVet =
   + i * ( u2*v3 - u3*v2 )

   + j * ( - u1*v3 + u3*v1 )

   + k * ( u1*v2 - u2*v1 );
```

Operadores Vetoriais

As propriedades características de campos escalares e vetoriais são estudadas através de 3 operadores diferentes: gradiente, rotacional e divergência.

Um quarto operador é estudado por aparecer nas equações de campo em casos de interesse, como o caso dos campos de gravitação e eletrostático; é o Laplaceano e, como será visto, pode ser expresso em termos dos 3 operadores mencionados previamente.

A interpretação física destes operadores não será discutida aqui. Para tal propósito, podemo-nos referir a material excelente existente na literatura [ ] . É nosso interesse ser operacionais, e apresentar aplicações do cálculo com estes operadores em expressões que são frequentes no tratamento de problemas de Eletromagnetismo, sobretudo.

Gradiente $\left(\vec{\nabla}\right)$:

Definido para campos escalares, fornece como resposta um campo vetorial.

$\Phi = \Phi(\vec{r})$

$$\vec{\nabla}\,\Phi = \hat{x}\,\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \hat{y}\,\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \hat{z}\,\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

$\vec{\nabla}_i\,\Phi = \partial_i\Phi$, onde $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$

Rotacional $\left(\vec{\nabla}\times\right)$:

Definido para campos vetoriais, fornece como resposta um outro campo vetorial.

$\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}) = A_x\,\hat{x} + A_y\,\hat{y} + A_z\,\hat{z}$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial y}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_y\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial}{\partial z}A_x - \frac{\partial}{\partial y}A_z\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial}{\partial y}A_z - \frac{\partial}{\partial y}A_x\right)\hat{k}$$

Pode-se reformular a expressão acima em termos de um determinante:

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)_i = \varepsilon_{ijk}\,\partial_j A_k$$

Divergente $\left(\vec{\nabla}\right)$:

Definida para campos vetoriais, fornece como resposta um campo escalar.

$$\vec{\nabla}\bullet\vec{A} = \frac{\partial}{\partial x}A_x + \frac{\partial}{\partial y}A_y + \frac{\partial}{\partial z}A_z$$

Na eletrostática, dada uma densidade, ρ, de cargas elétricas, as equações que fixam o campo elétrico, $\vec{E}$, gerado pela distribuição ρ são expressas como se segue:

$\vec{\nabla}.\vec{E} = \rho(\vec{r})$ (Lei de Gauss da Eletrostática)

$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{0}$

No estudo de campos magnéticos gerados por correntes elétricas estacionárias (isto é, não-variáveis no

tempo), as equações para o campo magnético, $\vec{\beta}$, gerado por uma densidade de corrente, $\vec{j}$, são os seguintes:

$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$ (Lei de Gauss do Magnetismo)

$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{j}$ (Lei de Ampère)

Comentadas estas ilustrações, voltemos à discussão dos operadores diferenciais. Primeiramente, deveremos derivar expressões para a aplicação destes ooperadores sobre produtos de campos.

Sejam φ e Ψ campos escalares, e $\vec{A}$ e $\vec{B}$ campos vetoriais. São úteis as seguintes expressões abaixo:

$$\vec{\nabla}(\varphi\,\Psi) = \left(\vec{\nabla}\varphi\right)\Psi + \varphi\left(\vec{\nabla}\Psi\right),$$

$$\vec{\nabla}(\vec{A}.\vec{B}) = \left(\vec{A}.\vec{\nabla}\right)\vec{B} + \left(\vec{B}.\vec{\nabla}\right)\vec{A} + \vec{A}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right) - \vec{B}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)$$

$$\vec{\nabla}\times(\varphi\vec{A}) = \left(\vec{\nabla}\varphi\right)\times\vec{A} + \varphi\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{A}-(\vec{A}.\vec{\nabla})\vec{B}-(\vec{\nabla}.\vec{A})\vec{B}+\vec{A}(\vec{\nabla}.\vec{B})$$

$$\vec{\nabla}.(\varphi\vec{A}) = (\vec{\nabla}\varphi).\vec{A}+\varphi(\vec{\nabla}.\vec{A})$$

$$\vec{\nabla}.(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{\nabla}\times\vec{A}).\vec{B}-\vec{A}.(\vec{\nabla}\times\vec{B})$$

$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\varphi = 0$, se φ tiver derivadas segundas contínuas.

$\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = 0$, se $\vec{A}$ tiver derivadas segundas contínuas.

Exercício de Verificação:

(i): Dado o campo escalar:

$\varphi = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, obter $\vec{\nabla}\varphi$ e checar que $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\varphi = 0$

(ii) Considerar o campo vetorial:

$\vec{B} = -\frac{y}{x^2+y^2}\hat{x} + \frac{x}{x^2+y^2}\hat{y}$

Verificar que existe um campo vetorial, $\vec{A}$, tal que:

$\vec{B} = \vec{\nabla}x\vec{A}$ e, portanto, $\vec{\nabla}.\vec{B} = \vec{\nabla}.\vec{\nabla}x\vec{A} = 0$

(iii)Usando o pacote dos operadores diferenciais em coordenadas esféricas, adotar o campo vetorial:

$\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\hat{\varphi}$, e obter $\vec{B} = \vec{\nabla}x\vec{A}$.

Mostrar que $\vec{\nabla}.\vec{B} = \vec{\nabla}.(\vec{\nabla}x\vec{A}) \neq 0$.

Desenvolvimento de expressões envolvendo os operadores diferenciais .

$\varphi, \Psi \rightarrow$ campos escalares

$\vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \rightarrow$ campos vetoriais

O objetivo é formular as expressões abaixo em termos de operadores diferentes atuando em cada campo isoladamente.

$\vec{\nabla}[\varphi\vec{\nabla}.(\Psi\vec{A}x\vec{B})] = ?$

$\vec{\nabla}[\varphi\vec{A}.\vec{\nabla}x(\vec{B}x\vec{C})] = ?$

$\vec{\nabla}x[\vec{\nabla}\varphi\, x\, \vec{\nabla}\,(\vec{A}x\vec{B}x\vec{C})] = ?$

$\vec{\nabla}\left\{[\varphi\vec{\nabla}.\,(\vec{A}x\vec{B}\,)]\vec{A}x\vec{C}\right\} = ?$

O Operador Laplaceano:

É um operador diferencial de 2ª ordem definido tanto para campos escalares (com resultado escalar) quanto para campos vetoriais (com resultado vetotial).

Para escalares:

$\nabla^2\Phi = \vec{\nabla}.\vec{\nabla}\Phi$

Em coordenadas cartesianas:

$$\nabla^2\Phi = \vec{\nabla}.\vec{\nabla}\Phi$$
$$= \vec{\nabla}\left(\hat{x}\ \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \hat{y}\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} + \hat{z}\ \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)$$
$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

Aplicação Imediata:

Recorrer ao pacote 'linalg' para escrever as expressões do Laplaceano em diferentes sistemas de coordenadas p.ex., cilíndricas, esféricas e elípticas.

Há uma certa sutileza na definiçãodo Laplaceano para campos vetoriais. Seria errôneo estendermos a expressão de ∇^2 para escalares diretamente para campos vetoriais. Para sermos mais concretos dizer que $\nabla^2\vec{A} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\vec{A} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\vec{A} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\vec{A}$ é verdade, porém, vale apenas no caso muito particular das coordenadas cartesianas. Em outros sistemas de coordenadas não é correto transpormos para campos vetoriais a expressão do ∇^2 válida para campos escalares.

Como resolver a questão?

A maneira genérica de se expressar o ∇^2 de um campo vetorial, é válida em qualquer que seja a situação, consiste no uso do rotacional duplo:

$$\nabla^2\vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{A}) - \vec{\nabla}x\vec{\nabla}x\vec{A}.$$

No caso particular das coordenadas cartesianas:

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{\partial}{\partial x}A_x + \frac{\partial}{\partial y}A_y + \frac{\partial}{\partial z}A_z$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{A}) = \hat{x}\ & \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial}{\partial x}A_x + \frac{\partial}{\partial y}A_y + \frac{\partial}{\partial z}A_z) + \\ \hat{y}\ & \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial}{\partial x}A_x + \frac{\partial}{\partial y}A_y + \frac{\partial}{\partial z}A_z) + \\ \hat{z}\ & \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial}{\partial x}A_x + \frac{\partial}{\partial y}A_y + \frac{\partial}{\partial z}A_z).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}x\vec{A} = \hat{x}\ & (\frac{\partial}{\partial y}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_y) + \\ \hat{y}\ & (\frac{\partial}{\partial z}A_x - \frac{\partial}{\partial x}A_z) + \\ \hat{z}\ & (\frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x).\end{aligned}$$

$$\vec{\nabla}x\vec{\nabla}x\vec{A} = \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_y & \frac{\partial}{\partial z}A_x - \frac{\partial}{\partial x}A_z & \frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}x(\vec{\nabla}x\vec{A}) = & \hat{x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial z}A_x - \frac{\partial}{\partial x}A_z\right)\right] + \\ & - \hat{y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial y}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_y\right)\right] + \\ & + \hat{z}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial z}A_x - \frac{\partial}{\partial x}A_z\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_y\right)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 \vec{A} &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{A}) - \vec{\nabla}x\vec{\nabla}x\vec{A} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}(A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}) + \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial y^2}(A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}) + \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial z^2}(A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}) \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\nabla^2 \vec{A} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\vec{A} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\vec{A} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\vec{A}.$$

Aplicação Imediata:

Com o pacote 'linalg', expressar o ∇^2 de um campo vetorial, $\vec{A}$, nos casos de coordenadas cilíndricas e esféricas.

Informação:

O operador Laplaceano aparece em equações básicas da Mecânica Clássica e da Eletrodinâmica Clássica, atráves da chamada de Poisson.

No caso da Gravitação Newtoniana, o campo de gravidade gerado para uma certa massa (descrita para uma densidade de matéria, ρ) é calculável mediante a equação de Poisson.

$\nabla^2\Phi = -4\Pi G\rho$,

sendo Φ o potencial gravitacional e G a constante de gravitação de Newton.

No caso da Eletrostática, a determinação do potencial (Φ) e do campo elétrico ($\vec{E}$) gerados para uma certa densidade de cargas elétricas, ρ, é feita pela equação de Poisson

$\nabla^2\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$, $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$,

onde ε_0 é a constante dielétrica do vácuo.

Laplaciano (∇^2) :

É definido por :

$$\vec{\nabla} \bullet (\nabla\varphi) \equiv \nabla^2\varphi$$

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\varphi + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\varphi$$

Identidades Vetoriais

Cálculo de algumas identidades vetorias:

1 - $[\text{ va } \times (\text{ vb } \times \text{ vc })]_i = (\text{ va } \bullet \text{ vc })B_i - (\text{ va } \bullet \text{ vb })C_i$

2 - $[(\text{ va } \times \text{ vb }) \times \text{ vc }]_i = B_i(\text{ va } \bullet \text{ vc }) - A_i(\text{ vb } \bullet \text{ vc })$

3 - $(\text{ va } \times \text{ vb }) \bullet (\text{ vc } \times \text{ vd }) = (\text{ va } \bullet \text{ vc })(\text{ vb } \bullet \text{ vd }) - (\text{ va } \bullet \text{ vd })(\text{ vb } \bullet \text{ vc })$

4 - $[\vec{\nabla} \times (\psi \text{ va })]_i = [(\vec{\nabla}\psi) \times \text{ va }]_i + \psi(\vec{\nabla} \times \text{ va })_i$

5 - $\vec{\nabla} \bullet (\psi \text{ va }) = \vec{\nabla}\psi \bullet \text{ va } + \psi\vec{\nabla} \text{ va }$

6 - $[\vec{\nabla}(\text{ va } \bullet \text{ vb })]_i = B_j(D_i A_j - D_j A_i) + A_j(D_i B_j - D_j B_i) + B_j D_j A_i + A_j D_j B_i)$

7 - $[\text{ va } \times (\vec{\nabla} \times \text{ vb })]_i = A_j D_i B_j - A_j D_j B_i$

8 - $[\vec{\nabla} \times (\text{ va } \times \text{ vb })]_i = (\text{ vb } \bullet \vec{\nabla})A_i - B_i(\vec{\nabla} \bullet \text{ va }) + A_i(\vec{\nabla} \bullet \text{ vb }) - (\text{ va } \bullet \vec{\nabla})B_i$

9 - $[\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \text{ va })]_i = D_i(\vec{\nabla} \bullet \text{ va }) - \nabla^2 A_i$

Para Calcular essas identidades fizemos os seguintes programas em FORM

```
FORM version 2.1 Aug 21 1992

nw stat;
dimension 3;
vectors A,B,C,D;
indices i,k,j,l,m,n;
local [1] = e_(i,j,k) * A(j) * e_(k,l,m) * B(l) * C(m);
local [2] = e_(i,j,k) *e_(j,m,l)* A(m) * B(l) * C(k);
local [3] = e_(i,j,k) * A(j) *B(k)* e_(i,l,m) * C(l) * D(m);
contract;
sum j,k,l,m,n;
print;
.end

[1] =
   B(i)*A.C - C(i)*A.B;

[2] =
    - A(i)*B.C + B(i)*A.C;

[3] =
   A.C*B.D - A.D*B.C;

FORM version 2.1 Aug 21 1992

nw stat;
dimension 3;
ntensor Na,psi,xi,A,B,C,D;
indices i,k,j,l,m,n;
local [4] = e_(i,j,k) * D(j) * (psi * A(k));
local [5] = D(i) * (psi * A(i));
local [6] = D(i) * (A(j)* B(j));
local [7] = e_(i,j,k) * A(j) * (e_(k,l,m) * D(l) * B(m));
local [8] = e_(i,j,k) * D(j) * e_(k,l,m) * A(l) * B(m);
local [9] = e_(i,j,k) * D(j) * e_(k,l,m) * D(l) * A(m);
contract;
id D(j?)*(psi*A(k?)) = psi*D(j)*A(k) + A(k)*D(j)*psi;
id D(j?)*(A(i?)*B(l?)) = A(i)*D(j)*B(l) + B(l)*D(j)*A(i);
sum j,k,l,m,n;
print;
.end

[4] =
   psi*D(N1_?)*A(N2_?)*e_(i,N1_?,N2_?) - A(N1_?)*

[5]=
   psi*D(i)*A(i) + A(i)*D(i)*psi;

[6] =
   A(N1_?)*D(i)*B(N1_?) + B(N1_?)*D(i)*A(N1_?);

[7] =
   A(N1_?)*D(i)*B(N1_?) - A(N1_?)*D(N1_?)*B(i);

[8] =
   A(i)*D(N1_?)*B(N1_?) - A(N1_?)*D(N1_?)*B(i)+
 - B(i)*D(N1_?)*A(N1_?) + B(N1_?)*D(N1_?)*A(i);

[9] =
   D(N1_?)*D(i)*A(N1_?) - D(N1_?)*D(N1_?)*A(i);
```

OBS: Podemos perceber, no entanto, que algumas respostas não nos são fornecidas de imediato, já que o computador não pode fazer tudo por voçe. Logo, respostas como as das expressões 4, 6, 8 e outras devem ser interpretadas de acordo com a sua necessidade.

Formalismo Tensorial no espaço de Minkowski

Um modo lógico e conciso de descrevermos a física contida nas Teorias de Gauge é através do formalismo de Minkowski. Baseia-se na introdução do conceito de quadri-vetores.

Quadrivetor do espaço-tempo: x_μ

No espaço de Minkowski os índices chamados de contravariantes são aqueles que seguem na formação do 4-vetor x^μ, e, analogamente, os índices chamados de covariantes são aqueles que seguem na formação do 4-vetor x_μ.

Vamos iniciar nossa discussão com o 4-Vetor contravariante definido como:

$$x^\mu = (x^0;x^1,x^2,x^3) \equiv (ct;\ \vec{x})$$

A partir de qualquer vetor do tipo x^μ define-se um novo vetor covariante (índices inferiores) do seguinte modo:

$$\eta_{\mu\nu}x^\nu \equiv x_\mu$$

onde η é chamado de tensor métrico e definido como:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Observe as seguintes propriedades do tensor métrico:

1)

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2)

$$\eta_{\mu\nu}\eta^{\kappa\nu} = \delta^{\nu}_{\kappa}$$

logo temos:

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu}\, x^\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$

$$x^\mu = (ct; x,y,z) = (ct; x)$$

$$x_\mu = (ct; -x, -y, -z) = (ct; -\vec{x})$$

o vetor em forma covariante tem sinal oposto das componentes espaciais.

Para um 4-vetor genérico, vale que $v_\mu = \eta_{\mu\nu} v^\nu$

$$\eta^{\mu\kappa} v_\kappa = \eta^{\mu\kappa}\,\eta_{\kappa\nu} v^\nu \Longrightarrow \eta^{\mu\kappa}\, v_\kappa = \delta^\mu_\nu\, v^\nu = v^\mu$$

$$v^\mu = \eta^{\mu\kappa} v_\kappa$$

$$v_\mu = \eta_{\mu\nu}\; v^\nu$$

Estas duas relações fazem a passagem entre vetores covariantes e contravariantes. Em palavras simbólicas o tensor métrico executa a tarefa de levantar e abaixar índices vetoriais.

Derivadas : Analogamente ao 4-vetor definido acima, podemos definir as derivadas(∂_μ)como se segue abaixo:

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_0 = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\ ;\ \partial_i = \vec{\nabla})$$

Seguindo o mesmo raciocícnio para trasnformar o ∂^μ (contravariante) em ∂_μ (covariante) teremos, por definição:

$$\partial^{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} = (\partial^{0};\partial^{i}), \text{ logo} : \partial^{0} = \partial_{0}$$

Produtos escalares usuais:

Vejamos agora produtos escalares usuais utilizando o FORM:

```
FORM version 2.1 Aug 21 1992

NW stat;
nfunction x,eta;
symbols c,t,vecx;
indices mu,nu,i;
local [xmu*xmu] = x(mu)*x(mu);
id once x(mu)=eta(mu,nu)*x(mu);
sum mu 0,1;
sum nu 0,1;
repeat;
id x?(?,1,??) = x(.,i,..);
endrepeat;
id eta(0,0)=1;
id eta (i?,i?)=-1;
id eta(?)=0;
id x(0)=c*t;
id x(i)=vecx;
print;
.end

[xmu*xmu] =
   c^2*t^2 - vecx^2;
```

$$x^{\mu}x_{\mu} = x^{\mu}\eta_{\mu\nu}x^{\nu} = (x^{0})^{2} - (x^{i})^{2} = c^{2}t^{2} - \vec{x}^{2}$$

```
FORM version 2.1 Aug 21 1992

NW stat;
nfunction a,b,eta;
indices mu,nu,i;
local [amu*bmu] = a(mu)*b(mu);
id b(mu)=eta(mu,nu)*b(mu);
sum mu 0,1;
sum nu 0,1;
repeat;
id a?(?,1,??) = a(.,i,..);
endrepeat;
id eta(0,0)=1;
```

```
id eta (i?,i?)=-1;
id eta(?)=0;
print;
.end

[amu*bmu] =
    - a(i)*b(i) + a(0)*b(0);
```

$$a^\mu b_\mu = a^\mu \eta_{\mu\nu} b^\nu = a^0 b^0 - a^i b^i = a^0 b^0 - \vec{a}.\vec{b}$$

```
FORM version 2.1 Aug 21 1992

NW stat;
nfunction a,p,eta,nabla,veca;
symbol c,t;
indices mu,nu,i;
local [pmu*amu] = p(mu)*a(mu);
id a(mu)=eta(mu,nu)*a(mu);
sum mu 0,1;
sum nu 0,1;
repeat;
id a?(?,1,??) = a(.,i,..);
endrepeat;

id eta(0,0)=1;
id eta (i?,i?)=-1;
id eta(?,0,??)=0;
id p(i)=-nabla;
id a(i)=veca;
id p?(0)*a?(0)=1/c * p(t)*a(0);

print;
.end

[pmu*amu] =
   p(t)*a(0)*c^-1 + nabla*veca;
```

$$\partial^\mu a_\mu = \partial^\mu \eta_{\mu\nu} a^\nu = \partial^0 a^0 - (-\vec{\nabla} \bullet)\vec{a} = \frac{1}{c}\frac{\partial a^0}{\partial t} + \vec{\nabla} \bullet \vec{a}$$

```
FORM version 2.1 Aug 21 1992

NW stat;
nfunction a,p,eta,nabla,veca;
symbol c,t;
indices mu,nu,i;
local [pmu*amu] = p(mu)*a(mu);
id a(mu)=eta(mu,nu)*a(mu);
sum mu 0,1;
sum nu 0,1;
repeat;
id a?(?,1,??) = a(.,i,..);
endrepeat;

id a(i)=-a(i);
```

```
id eta(0,0)=1;
id eta (i?,i?)=-1;
id eta(?,0,??)=0;

id a(i)=veca;
id p?(0)*a?(0)=1/c * p(t)*a(0);

print;
.end

[pmu*amu] =
   p(t)*a(0)*c^-1 + p(i)*veca;
```

$$\partial_\mu a^\mu = \partial^\mu \eta^\nu_\mu a_\nu = \partial_0 a_0 - (\vec{\nabla}\bullet)(-\vec{a}) = \frac{1}{c}\frac{\partial a_0}{\partial t} + \vec{\nabla}\bullet\vec{a}$$

Podemos notar que: $a^0 = a_0$. E que numa derivada de um campo ao tracarmos os índices de ambos temos que : $\partial^\mu a_\mu = \partial_\mu a^\mu$.

Equações de Maxwell

Maxwell chegou a um conjunto de equações que descrevem , com notável grau de percepção, os fenômenos elétricos e magnéticos que ocorrem na natureza em uma escala que vai do mícrom (10^{-6}m), ao astronômico (ano-luz), isto é, em escala macroscópica. As leis obtidas foram as seguintes:

$$\begin{array}{llll} \vec{\nabla} \bullet \vec{E} & = \rho & & \text{(Lei de Gauss)} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} & = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} & & \text{(Lei de Faraday)} \\ \vec{\nabla} \bullet \vec{B} & = 0 & & \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} & = \frac{\partial}{\partial t}\vec{E} + \vec{J} & & \text{(Lei de Ampére)} \end{array}$$

Observe que todas as variáveis acima envolvidas são funções do espaço e do tempo. Por exemplo:

$$\vec{E} = \vec{E}(t;\vec{x})$$

O sistema de equações acima representa uma síntese da Física do século XIX e a pedra fundamental para a Física do século XX. Três foram as maiores consequências das equações de

Maxwell a interpretação da luz como onda eletromagnética, a teoria da relatividade e a teoria de gauge. Essa conjuntura de acontecimentos eleva as equações de Maxwell a algo ímpar na história da Física. Contudo quando Maxwell juntou esse grupo de equações entre 1860-1870 a sua preocupação maior estava na conservação da carga elétrica. Por isto efetua-se a seguinte operação :

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) = \vec{\nabla}.\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + J\right)$$

o que resulta,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.J = 0$$

A equação acima é denominada por equação da continuidade, e expressa o fluxo de carga.

Estabelecidas as equações de Maxwell verificou-se que os campos elétricos $\vec{E}$ e magnéticos $\vec{B}$ poderiam ser descritos em termos de outros campos mais primitivos. Seriam os potenciais de campo $(\Phi ; \vec{A})$. A seguinte expressão os relacionaria:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A},$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Estudemos agora a consistência das equações acima as leis de Maxwell:

$(i) \nabla \bullet \vec{B} = 0$, resulta $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

Verificação: $\nabla \bullet \left(\nabla \times \vec{A}\right) = 0$

$(ii) \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$, resulta $\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$

verificação: $\underbrace{\nabla \times (-\nabla\Phi)}_{=0} + \nabla \times \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \vec{A}$

(iii) Vejamos se o resultado acima é compatível com a lei de Ampére:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(-\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\right) + \vec{J}$$

Desta forma através de $(\Phi ; \vec{A})$ surgem novas variáveis mais fundamentais para descreverem as perspectivas das equações de Maxwell. Não existe nenhum impedimento contra a expressão de $\vec{E}$ ou $\vec{B}$.

Princípio de Gauge

Uma fundamental consequência das equações de Maxwell foi o surgimento das teorias de gauge. Significam escrever a física através de instruções obtidas a partir de um certo parâmetro $\alpha(\vec{x};t)$. Sútil é o Senhor mas também o parâmetro α de gauge. Antecede ao espaço-tempo e é a fonte de criação de todo o universo de equações da Física. Iniciemos por explorar dependências dos campos fundamentais $(\Phi;\vec{A})$ em termos do parâmetro de gauge.

Observa-se que os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são invariantes se os potenciais Φ e $\vec{A}$ sofrem simultaneamente as seguintes transformações:

$$\Phi' = \Phi + \frac{\partial}{\partial t}\alpha$$

$$\vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla}\alpha$$

Substituindo em:

$$\vec{E}' = -\vec{\nabla}\Phi' - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}' = \vec{E}$$

$$\vec{B}' = \nabla \times \vec{A}' = \vec{B}$$

Nota-se que existem diferentes potenciais escalares e vetoriais para um único campo $\vec{E}$ / $\vec{B}$. Esses potenciais diferem entre si por termos que são derivadas de uma função escalar $\alpha(\vec{x})$.O que significa que os campos medíveis são invariantes de gauge. Desta forma existem diferentes famílias de potenciais $\vec{\Phi}$ e $\vec{A}$ dando os mesmos valores para os campos elétricos e magnéticos $\vec{E}$ e $\vec{B}$.

```
FORM version 2.1 Aug 21 1992
nw stat;
ntensor E,E1,B1,B,Phi, A,nabla,D;
symbol al;
indices i,j,k;
local [E] = -nabla(i)*Phi-D*A(i);
local [E1] = -nabla(i)*(Phi+D*al)-D*(A(i)-nabla(i)*al);
local [B] = -nabla(i)*A;
local [B1] = -nabla(i)*(A-nabla(j)*al);
id nabla(i)*D=D*nabla(i);
id nabla(?)*nabla(??) = e_(i,j,k)*nabla(j)*nabla(k);
id nabla(?)*nabla(??) = 1/2*nabla(.)*nabla(..) +
                        +1/2*nabla(..)*nabla(.);
sum j,k;
local [E-E1] = [E]-[E1];
local [B-B1] = [B]-[B1];
print [E-E1];
```

```
 print [B-B1];
 .end
[E-E1] = 0;
[B-B1] = 0;
```

Pelo programa FORM acima notamos que : $\vec{E}' = \vec{E}$ e $\vec{B}' = \vec{B}$.

A existência do parâmetro α de gauge mostra que existem diferentes potenciais vetoriais para um único campo $\vec{E}$ ou $\vec{B}$. A consequência desta situação é o surgimento de vínculos na teoria. São chamadas vínculos de gauge de Lorentz dado, no caso do gauge,por:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi + \vec{\nabla} \bullet \vec{A} = 0$$

Tal expressão representa que no momento em que fixarmos a relaçào entre Φ e $\vec{A}$, significa que se está tomando um potencial $\vec{A}$ dentre todos os possíveis conjuntos $\{\Phi;\vec{A}\}$, $\{\Phi;\vec{A}'\}$, $\{\Phi';\vec{A}'\}$,etc, que dão os mesmos valores para $\vec{E}$ e $\vec{B}$.

Podemos concluir que a invariância de Gauge do Eletromagnetismo consiste no fato de existirem diferentes famílias de potenciais Φ e $\vec{A}$ dando os mesmos valores para $\vec{E}$ e $\vec{B}$.

Potencial quadrivetorial: A_μ

Dentro do formalismo de Minkowski construiu-se um tensor A^μ, chamado de potencial quadri-vetor, onde:

$$A^\mu \equiv \left(A^0 = \Phi; A^i = \vec{A}\right)$$

onde: A^0 →é o potencial eletrostático, e $\vec{A}$ →é o potencial vetor. A componente covariante é dada por:

$$A_\mu = \eta_{\mu\nu}A^\nu \text{, onde } A_\mu \equiv \left(\Phi;\ -\vec{A}\right).$$

A partir deste campo fundamental A_μ construiu-se a grandeza $F_{\mu\nu}$ chamada potencidade de campo:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Observando a definição podemos dizer que $F_{\mu\nu}$ é anti-simétrico pois se trocarmos os índices μ e ν obteremos a expressão original com sinais trocados (multiplicada por -1). logo, $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ é um tensor totalmente anti-simétrico e é também definido como tensor do campo eletromagnático.

Construiremos agora as definições dos campos: elétrico e magnético apartir de $F_{\mu\nu}$.

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Calculando as componentes de $F_{\mu\nu}$, onde $F_{\mu\nu}$ é anti-simétrico, $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$, então $F_{\mu\mu} = -F_{\mu\mu}$ significam que todos os elementos da diagonal principal são zero. Além disso, existirão anti-simetrias de reflexão em torno dos elementos pertencentes à diagonal.

Os elementos a serem calculados serão:

$$\begin{cases} F_{01} = \partial_0 A_1 - \partial_1(A_0) = \frac{1}{c}\frac{\partial(-A^1)}{\partial t} - \frac{\partial\Phi}{\partial x} = E_1 \\ F_{02} = \partial_0 A_2 - \partial_2(A_0) = \frac{1}{c}\frac{\partial(-A^2)}{\partial t} - \frac{\partial\Phi}{\partial x} = E_2 \\ F_{03} = \partial_3 A_0 - \partial_0(A_3) = \frac{1}{c}\frac{\partial(-A^3)}{\partial t} - \frac{\partial\Phi}{\partial x} = E_3 \end{cases}$$

onde:

$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$, já foi usado.

$$\begin{cases} F_{12} = \partial_2(-A_1) - \partial_1(-A_2) = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = B_3 \\ F_{13} = \partial_3(-A_1) - \partial_1(-A_3) = -[\partial_3 A_1 - \partial_1 A_3] = -B_2 \\ F_{23} = \partial_3(-A_2) - \partial_2(-A_3) = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 = B_1 \end{cases}$$

onde:

$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ ou $B_i = \epsilon_{ijk}\partial_j A_k$, já foi usado e $F_{\mu\nu} = \epsilon_{ijk} B_k$

Logo, a matriz de representação de $F_{\mu\nu}$ é:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

O programa em FORM que realiza esses cálculos é:

```
FORM version 2.1 Aug 21 1992

NW stat;
nfunction F,B,E;
indices i,j,k;
#do I = 0, 3
#do J = 'I'+1, 3
local [F('I','J')]=F('I','J');
#enddo
#enddo
id F(0,i?) = E(i);
id F(i?,j?) = e_(j,i,k)*B(k);
sum k, 1, 2, 3;
id e_(1,2,3) = 1;
print;
.end

[F(0,1)] =
   E(1);

[F(0,2)] =
   E(2);

[F(0,3)] =
   E(3);

[F(1,2)] =
    - B(3);
```

```
[F(1,3)] =
   B(2);

[F(2,3)] =
    - B(1);
```

Exercícios:

1) dado:

$$\nabla \bullet \vec{E} = 0 \qquad \nabla \bullet \vec{B} = 0$$

e

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Equações de Maxwell no Vácuo sem densidades de carga e de corrente $(\rho \text{ e } \vec{J} \text{ iguais a } 0)$.

Obter as seguintes equações de onda:

$$(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2})\vec{E} = 0$$

e

$$(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2})\vec{B} = 0$$

```
FORM version 2.1 Aug 21 1992

Nw stat;
dimension 3;
ntensor E,B,nab, P;
indices i,j,k,l,m,n,x,y;
local zeroE = e_(i,j,k)*nab(j)*e_(k,l,m)*nab(l)*
            *E(m) - P(i)*nab(j)*B(k);
local zeroB = e_(i,j,k)*nab(j)*e_(k,l,m)*nab(l)*
            *B(m) - P(i)*nab(j)*E(k);
contract;
id nab(i?)*nab(i?)*E?(j?) = 0;
.sort

skip zeroB;
id nab(i?)*B(j?) = P(i)*E(j);
bracket E;
.sort

skip zeroE;
id nab(i?)*E(j?) = P(i)*B(j);
bracket B;
.sort
```

```
 print;
 .end

zeroE =
   nab(m)*nab(i)*E(m) - P(i)*P(j)*E(k);

zeroB =
   nab(m)*nab(i)*B(m) - P(i)*P(j)*B(k);\bigskip
```

Relações úteis para o tensor de Levi-Civita no espaço de Minkowski

$$\varepsilon^{0123} = +1$$

$$\varepsilon_{0123} = -1$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\lambda}\ \varepsilon^{\mu\nu k\lambda} = \delta^{\mu}_{\alpha}\delta^{\nu}_{\beta}\delta^{k}_{\gamma} + \delta^{\mu}_{\beta}\delta^{\nu}_{\gamma}\delta^{k}_{\alpha} + \delta^{\mu}_{\gamma}\delta^{\nu}_{\alpha}\delta^{k}_{\beta} - \delta^{\mu}_{\beta}\delta^{\nu}_{\alpha}\delta^{k}_{\gamma} - \delta^{\mu}_{\alpha}\delta^{\nu}_{\gamma}\delta^{k}_{\beta} - \delta^{\mu}_{\gamma}\delta^{\nu}_{\beta}\delta^{k}_{\alpha}$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta\lambda\rho}\ \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} = -2(\delta^{\mu}_{\alpha}\delta^{\nu}_{\beta} - \delta^{\mu}_{\beta}\delta^{\nu}_{\alpha})$$

$$\varepsilon_{\alpha\lambda\rho\sigma}\ \varepsilon^{\mu\lambda\rho\sigma} = -6\,\delta^{\mu}_{\alpha}$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\ \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = -24$$

2) Considerando as quações acima e a condição de Lorentz: $\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \vec{\nabla}\bullet\vec{A} = 0$, obter as seguintes equações de onda:

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi = 0$$

$$e$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A} = 0$$

3) Dado o tensor Field-Strenght do eletromagnetismo:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular: $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$

Resposta:

```
FORM version 2.1 Aug 21 1992

     NW stat;
     nfunction F,B,E;
     indices i,j,k,ro,si;
     #do I = 0, 3
     #do J = 'I'+1, 3
     local [Ft('I','J')]=1/2 * e_('I','J',ro,si)*F(ro,si);
     #enddo
     #enddo
     sum ro 0,1,2,3;
     sum si 0,1,2,3;
     anti F;
     id F(0,i?) = E(i);
     id F(i?,j?) = e_(j,i,k)*B(k);
     sum k, 1, 2, 3;
     id e_(1,2,3) = 1;
     id e_(0,1,2,3) = 1;
     print;
     .end

[Ft(0,1)] =
     - B(1);

[Ft(0,2)] =
     - B(2);

[Ft(0,3)] =
     - B(3);

[Ft(1,2)] =
   E(3);

[Ft(1,3)] =
     - E(2);

[Ft(2,3)] =
   E(1);
```

Pela Resposta em FORM podemos notar que :

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_1 & 0 & E_3 & -E_2 \\ B_2 & -E_3 & 0 & E_1 \\ B_3 & E_2 & -E_1 & 0 \end{pmatrix}$$

OBS: Podemos, e por vezes precissamos, também usar o MAPLE V para resolver ou ajudar a resolver determinado problema. a fim de exemplificar vamos resolver o exercício acima no MAPLE V.

```
rotex:=proc(L);
```

```
L_T:=L:
if nargs>1 then ERROR
('n\UNICODE{0xfa}mero de argumentos inv\UNICODE{0xe1}lidos') fi:
if type(L,list)=false then ERROR
('o argumento deve ser uma lista') fi:
L_T:=[op(2..nops(L_T),L_T),op(1,L_T)]:
RETURN(L_T)
end:

epsilon:=proc();
Ltmp:=[]:
notacao:=1:
for i_temp  to nargs do
   Ltmp:=[op(Ltmp),args[i_temp]]:
   if args[i_temp]=0 then notacao:=0 fi:
od:
for i_temp to nargs-1 do
  for j_temp from i_temp+1 to nargs do
      if args[i_temp]=args[j_temp] then RETURN(0) fi:
od:
od:
for i_temp to nargs do
   if type(args[i_temp],integer)=false then
RETURN('epsilon(args)')fi:
od:
T:=[]:
if notacao = 0 then step_s:=nargs-1 else step_s:=nargs fi:
for i_temp from notacao to step_s do
T:=[op(T),i_temp]:
od:
for i_temp to nargs do
if T=Ltmp then RETURN(1) fi:
Ltmp:=rotex(Ltmp):
od:
RETURN(-1):
end:

F:=proc(x,y,L);
  with(linalg,matrix);
  RETURN(matrix(x,y,L));
end;

Fmunu:=F(4,4,[0,E1,E2,E3,-E1,0,-B3,B2,-E2,B3,0,-B1,-E3,-B2,B1,0]);

L:=linalg[matrix](4,4,[0$16]):
for k to 4 do
for m to 4 do
S:=0:
for i to 4 do
  for j from i+1 to 4 do
    S:=S+ epsilon(k,m,i,j) *Fmunu[i,j];
    L[k,m]:=S;
od;od;od;od;
for m from 3 to 4 do
for k to 4 do
  L[m,k]:=-L[k,m];
od;od;
print(L);
```

A resposta Obtida em MapleV foi:

$$\begin{pmatrix} 0 & -B1 & -B2 & B3 \\ B1 & 0 & -E3 & -E2 \\ B2 & E3 & 0 & E1 \\ -B3 & E2 & -E1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pode ser que, na primeira impressão, tenhamos a impressão de que é mais trabalhoso usar o Maple V, porém muitos do procedimentos e funções usadas nesse exemplo podem ser eles que seguem na formação do 4-vetor x_μ.

Vamos iniciar nossa discussão com o 4-Vetor contravariante definido como:

$$x^\mu = (x^0; x^1, x^2, x^3) \equiv (ct; \vec{x})$$

A partir de qualquer vetor do tipo x^μ define-se um novo vetor covariante (índices inferiores) do seguinte modo:

$$\eta_{\mu\nu} x^\nu \equiv x_\mu$$

onde η é chamado de tensor métrico e definido como:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Observe as seguintes propriedades do tensor métrico:

1)

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2)

$$\eta_{\mu\nu} \eta^{\kappa\nu} = \delta_\kappa^\nu$$

logo temos:

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu}\, x^\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$

$$x^\mu = (ct; x,y,z) = (ct; x\,)$$

$$x_\mu = (ct; -x, -y, -z) = (ct; -\vec{x})$$

o vetor em forma covariante tem sinal oposto das componentes espaciais.

Para um 4-vetor genérico, vale que $v_\mu = \eta_{\mu\nu} v^\nu$

$$\eta^{\mu\kappa} v_\kappa = \eta^{\mu\kappa}\eta_{\kappa\nu} v^\nu \implies \eta^{\mu\kappa} v_\kappa = \delta^\mu_\nu v^\nu = v^\mu$$

$$v^\mu = \eta^{\mu\kappa} v_\kappa$$

$$v_\mu = \eta_{\mu\nu}\, v^\nu$$

Estas duas relações fazem a passagem entre vetores covariantes e contravariantes. Em palavras simbólicas o tensor métrico executa a tarefa de levantar e abaixar índices vetoriais.

Derivadas : Analogamente ao 4-vetor definido acima, podemos definir as derivadas (∂_μ)como se segue abaixo:

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_0 = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\; ; \; \partial_i = \vec{\nabla})$$

Seguindo o mesmo raciocícnio para trasnformar o ∂^μ (contravariante) em ∂_μ (covariante) teremos, por definição:

$$\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = (\partial^0; \partial^i), \text{ logo : } \partial^0 = \partial_0$$

Produtos escalares usuais:

Vejamos agora produtos escalares usuais utilizando o FORM:

```
\bigskip\    FORM version 2.1 Aug 21 1992
```

```
NW stat;
nfunction x,eta;
symbols c,t,vecx;
indices mu,nu,i;
local [xmu*xmu] = x(mu)*x(mu);
id once x(mu)=eta(mu,nu)*x(mu);
sum mu 0,1;
sum nu 0,1;
repeat;
id x?(?,1,??) = x(.,i,..);
endrepeat;
id eta(0,0)=1;
id eta (i?,i?)=-1;
id eta(?)=0;
id x(0)=c*t;
id x(i)=vecx;
print;
.end

[xmu*xmu] =
   c^2*t^2 - vecx^2;
```

$$x^{\mu}x_{\mu} = x^{\mu}\,\eta_{\mu\nu}x^{\nu} = (x^0)^2 - (x^i)^2 = c^2t^2 - \vec{x}^2$$

```
FORM version 2.1 Aug 21 1992

NW stat;
nfunction a,b,eta;
indices mu,nu,i;
local [amu*bmu] = a(mu)*b(mu);
id b(mu)=eta(mu,nu)*b(mu);
sum mu 0,1;
sum nu 0,1;
repeat;
id a?(?,1,??) = a(.,i,..);
endrepeat;
id eta(0,0)=1;
id eta (i?,i?)=-1;
id eta(?)=0;
print;
.end

[amu*bmu] =
   - a(i)*b(i) + a(0)*b(0);
```

$$a^{\mu}b_{\mu} = a^{\mu}\,\eta_{\mu\nu}b^{\nu} = a^0b^0 - a^ib^i = a^0b^0 - \vec{a}.\vec{b}$$

```
FORM version 2.1 Aug 21 1992

NW stat;
nfunction a,p,eta,nabla,veca;
symbol c,t;
indices mu,nu,i;
local [pmu*amu] = p(mu)*a(mu);
id a(mu)=eta(mu,nu)*a(mu);
sum mu 0,1;
sum nu 0,1;
```

```
repeat;
id a?(?,1,??) = a(.,i,..);
endrepeat;

id eta(0,0)=1;
id eta (i?,i?)=-1;
id eta(?,0,??)=0;
id p(i)=-nabla;
id a(i)=veca;
id p?(0)*a?(0)=1/c * p(t)*a(0);

print;
.end

[pmu*amu] =
  p(t)*a(0)*c^-1 + nabla*veca;
```

$$\partial^\mu a_\mu = \partial^\mu \eta_{\mu\nu} a^\nu = \partial^0 a^0 - (-\vec{\nabla} \bullet)\vec{a} = \frac{1}{c}\frac{\partial a^0}{\partial t} + \vec{\nabla} \bullet \vec{a}$$

```
FORM version 2.1 Aug 21 1992

NW stat;
nfunction a,p,eta,nabla,veca;
symbol c,t;
indices mu,nu,i;
local [pmu*amu] = p(mu)*a(mu);
id a(mu)=eta(mu,nu)*a(mu);
sum mu 0,1;
sum nu 0,1;
repeat;
id a?(?,1,??) = a(.,i,..);
endrepeat;

id a(i)=-a(i);
id eta(0,0)=1;
id eta (i?,i?)=-1;
id eta(?,0,??)=0;

id a(i)=veca;
id p?(0)*a?(0)=1/c * p(t)*a(0);

print;
.end

[pmu*amu] =
  p(t)*a(0)*c^-1 + p(i)*veca;
```

$$\partial_\mu a^\mu = \partial^\mu \eta_\mu^\nu a_\nu = \partial_0 a_0 - (\vec{\nabla} \bullet)(-\vec{a}) = \frac{1}{c}\frac{\partial a_0}{\partial t} + \vec{\nabla} \bullet \vec{a}$$

Podemos notar que: $a^0 = a_0$. E que numa derivada de um campo ao tracarmos os índices de ambos temos que : $\partial^\mu a_\mu = \partial_\mu a^\mu$.

Campo-de-gauge Tensorial Anti-Simétrico

Como exemplo ilustrativo final,propomos o tratamento de um campo-de-gauge de caráter tensorial:um potencial de rank-2 anti-simétrico,

$$T_{\mu\nu} = -T_{\nu\mu},$$

sujeito à transformação Abeliana

$$T'_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu,$$

sendo ξ^μ um 4-vetor arbitrário, que desempenha o papel de um parâmetro de Gauge, como o α do caso anterior.

O análogo do field-strength $F_{\mu\nu}$será um tensor completamente anti-simétrico de rank-3,

$$G_{\mu\nu k} \equiv \partial_\mu T_{\nu k} + \partial_\nu T_{k\mu} + \partial_k T_{\mu\nu},$$

$$G_{\mu\nu k} = G_{\nu k\mu} = G_{k\mu\nu} = -G_{\nu\mu k} = -G_{\mu k\nu} = -G_{k\nu\mu}$$

$G_{\mu\nu k}$é invariante de gauge:

de fato,

$$G'_{\mu\nu k} \equiv \partial_\mu T'_{\nu k} + \partial_\nu T'_{k\mu} + \partial_k T'_{\mu\nu} = G_{\mu\nu k}.$$

Analogamente ao caso de Maxwell,é proposta a equação de campo

$$\partial_\mu G^{\mu\nu k} = j^{\nu k}$$

como a lei de Gauss descrevendo como cargas e/ou correntes externas geram configurações de campo.

Tal equação provém, através do princípio variacional, da densidade de Lagrangeano $L = \frac{1}{6} G^2_{\mu\nu k} + j_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$.

$j^{\nu k} = -j^{k\nu}$desempenha o papel de corrente tensorial externa, sujeita à lei-de-conservação $\partial_\mu j^{\mu\nu} = 0$, em analogia à equação de continuidade descrevendo a conservação da carga elétrica $\partial_\mu J^\mu = 0$,

no caso do campo de Maxwell.

No caso do eletromagnetismo, vimos que as equações de Maxwell sem fontes (ou homogêneas) escreviam-se em termos do tensor dual do field-strength, $\tilde{F}_{\mu\nu}$, de acordo com

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0.$$

Neste caso, o dual do field-strength,$G_{\mu\nu k}$, será um 4-vetor, $\tilde{G}_\mu$:

$$\tilde{G}_\mu \equiv \frac{1}{3!} \varepsilon_{\mu\nu k\lambda} G^{\nu k\lambda}$$

Assim, a equação proposta para substituir, neste caso, as equações homogêneas de Maxwell, lê-se como segue:

$$\partial_\mu \tilde{G}^\mu = 0.$$

Resumindo os novos resultados do potencial tensorial, $T_{\mu\nu}$, contrói-se o field-strength, $G_{\mu\nu k}$, para o qual as equações do tipo Maxwell lêem-se:

$$\partial_\mu G^{\mu\nu k} = j^{\nu k},$$

$$\partial_\mu \tilde{G}^\mu = 0.$$

Considerando o sistema no vácuo ($j^{\nu k} = 0$), vamos mostrar que $G^{\mu\nu k}$ satisfaz à equação de tipo Klein-Gordon,

$$\Box G^{\mu\nu k} = 0,$$

o que garante que $G^{\mu\nu k}$ descreve, no vácuo, uma onda que se propaga com a velocidade da luz (como o fóton, o quantum desta radiação apresenta massa de repouso nula).

Para isto, teremos as 2 equações acima (no vácuo).

$$\partial_\mu G^{\mu\nu k} = 0$$

$$\partial_\mu \varepsilon^{\mu\nu k\lambda} \tilde{G}_\lambda = 0$$

$$\varepsilon^{\nu k\mu\lambda} \partial_\mu \tilde{G}_\lambda = 0$$

Aplicando-se a esta equação o operador $\varepsilon_{\nu k\gamma\delta}$, e utilizando a relação de contração para 2 tensores de Livi-Civita, chega-se a

$$\Box \tilde{G}_\mu = 0,$$

que equivale, claramente, à equação

$$\Box G_{\mu\nu k} = 0.$$

Prosseguindo com a nossa analogia ao caso da Eletrodinâmica de Maxwell, deveremos, agora, expressar os tensores$T_{\mu\nu}$, $G_{\mu\nu k}$e$\tilde{G}_\mu$, e as correntes $j_{\mu\nu}$ em termos de escalares e 3- vetores do espaço 3-dimensional Euclidiano. Com isto, apresentamos as equações de Maxwell deste sistema em sua forma com opradores diferenciais ($\vec{\nabla}$, $\vec{\nabla} x$ e $\vec{\nabla}.$)

As componentes dos tensores são definidas como segue abaixo:

$$T^{\mu\nu} \begin{cases} T^{0i} = -T_{0i} \equiv \vec{a}_i, \\ \\ T^{ij} = T_{ij} \equiv \varepsilon_{ijk} \vec{\chi}_k \end{cases}$$

$\vec{a}$ e $\vec{\chi}$ agem como potenciais-vetoriais. Diferentemente do caso de Maxwell, não há aqui potencial de natureza escalar.

$$j^{\mu\nu}\begin{cases} j^{0i} = -j_{0i} \equiv \mathcal{J}_i, \\ j^{ij} = j_{ij} \equiv \varepsilon_{ijk}\mathcal{K}_k; \end{cases}$$

$$G^{\mu\nu k}\begin{cases} G^{0ij} = G_{0ij} \equiv \varepsilon_{ijk}\vec{e}_k, \\ G^{ijk} = -G_{ijk} \equiv \varepsilon_{ijk}b; \end{cases}$$

onde $\vec{e}$ e b designam, respectivamente, os campos tipo-elétrico (3-vetores) e tipo-magnético (escalar).

Passando ao dual do field-strength, $\tilde{\mathcal{G}}^{\mu}$, as suas componentes em termos dos campos $\vec{e}$ e b são dadas a seguir.

$$\tilde{\mathcal{G}}^{0} = \tfrac{1}{6}\varepsilon^{0\nu k\lambda}G_{\nu k\lambda} = G_{123} = -\varepsilon_{123}b = -b$$

$$\tilde{\mathcal{G}}^{i} = \tfrac{1}{6}\varepsilon^{i\nu k\lambda}G_{\nu k\lambda} = \tfrac{1}{2}\varepsilon^{i0jk}G_{0jk} = -\tfrac{1}{2}\varepsilon^{0ijk}G_{0jk}$$

$\varepsilon^{0ijk} \equiv \varepsilon_{ijk}$, pois, em nossas convenções,

$\varepsilon^{0123} = +1$

e

$\varepsilon_{123} = +1$

$$\tilde{\mathcal{G}}^{i} = -\tfrac{1}{2}\varepsilon_{ijk}G_{0jk} = -\tfrac{1}{2}\underbrace{\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jkm}}_{2\delta_{im}}\vec{e}_m = -\vec{e}_i,$$

$$\tilde{\mathcal{G}}^{i} = -\vec{e}_i.$$

Portanto:

$$\tilde{\mathcal{G}}^{\mu} = (-b;-\vec{e}).$$

Deveremos, agora, expressar os campos $\vec{e}$ e b em termos dos potenciais-vetoriais, $\vec{\chi}$ e $\vec{a}$.

$$G_{0ij} = \partial_0 T_{ij} + \partial_i T_{j0} + \partial_j T_{0i}$$

$$\varepsilon_{ijk}\vec{e}_k = \varepsilon_{ijk}\partial_0\vec{\chi}_k + \partial_i\vec{a}_j - \partial_j\vec{\chi}_i$$

$$\varepsilon_{ijk}\vec{e}_k = \varepsilon_{ijk}\partial_0\vec{\chi}_k + \varepsilon_{ijk}(\vec{\nabla}\times\vec{a})_k$$

$$\boxed{\vec{e} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{\chi} + \vec{\nabla}\times\vec{a}}$$

$$G_{ijk} = \partial_i T_{jk} + \partial_j T_{ki} + \partial_k T_{ij}$$

$$-\varepsilon_{ijk}b = \varepsilon_{jkm}\partial_i\vec{\chi}_m + \varepsilon_{kim}\partial_j\vec{\chi}_m + \varepsilon_{ijm}\partial_k\vec{\chi}_m$$

Contraindo-se a expressão acima com ε_{ijk} , chega-se a:

$$-6b = 6\,\partial_m\vec{e}_m$$

$$\boxed{b = -\vec{\nabla}.\vec{e}}$$

Em analogia ao caso de Maxwell, os campos $\vec{e}$ e b são, também, expressos como derivadas dos 2 potenciais-vetoriais.

Antes de escrevermos as equações de Maxwell, ilustraremos, de modo explícito, a simetria de gauge do sistema em questão.

Em forma 4-dimensional covariante, a simetria de gauge lê-se

$$T'_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu \quad ,$$

onde

$$\xi^\mu \equiv (\xi^0 = \alpha ; \vec{\xi})$$

é o parâmetro arbitrário das transformações-de-gauge. Tomemos, então, componente a componente:

$$T'_{0i} = T_{0i} + \partial_0 \xi_i - \partial_i \xi_0$$

é equivalente a

$$\boxed{\vec{a}' = \vec{a} + \tfrac{\partial}{\partial t}\vec{\xi} + \vec{\nabla}\alpha} \ ;$$

$$T'_{ij} = T_{ij} + \partial_i \xi_j - \partial_j \xi_i \quad ,$$

$$\varepsilon_{ijk}\vec{\chi}'_k = \varepsilon_{ijk}\vec{\chi}_k - \partial_i \vec{\xi}_j + \partial_j \vec{\xi}_i \ ,$$

$$\varepsilon_{ijk}\vec{\chi}'_k = \varepsilon_{ijk}\vec{\chi}_k - \varepsilon_{ijk}(\vec{\nabla} \times \vec{\xi})_k \ ,$$

do que decorre

$$\boxed{\vec{\chi}' = \vec{\chi} - \vec{\nabla} \times \vec{\xi}}$$

Em forma 3-dimensional, estas são as transformações-de-gauge dos potenciais vetoriais $\vec{a}$ e $\vec{\chi}$. Resta-nos verificar que, em analogia com o caso do eletromagnetismo, os campos $\vec{e}$ e b, componentes do field-strength do campo tensorial, são ambos invariantes frente as transformações-de-gauge acima.

$$\begin{aligned}\vec{e}\,' &= \tfrac{\partial}{\partial t}\vec{\chi}\,' + \vec{\nabla} \times \vec{a}\,' = \\ &= \tfrac{\partial}{\partial t}(\vec{\chi} - \vec{\nabla} \times \vec{\xi}) + \vec{\nabla} \times (\vec{a} + \tfrac{\partial}{\partial t}\vec{\xi} + \vec{\nabla}\alpha) = \\ &= \vec{e}\,.\end{aligned}$$

$$b' = -\vec{\nabla} \bullet \vec{\chi}\,' =$$

$$= -\vec{\nabla} \bullet (\vec{\chi}' - \vec{\nabla} \times \vec{\xi}) =$$
$$= b \,.$$

Com isto, fica estabelecida a invariância de gauge dos campos $\vec{e}$ e b .

Podemos, finalmente, escrever as equações-de-campo(análogas às equações de Maxwell) para os campos $\vec{e}$ e b .

$$\partial_\mu G^{\mu\nu k} = j^{\nu k}$$

Componente-0i :

$$\partial_\mu G^{\mu 0 i} = j^{oi} = \mathcal{J}_i$$

$$\partial_j G^{joi} = \mathcal{J}_i$$

$$\partial_j G_{joi} = \mathcal{J}_i$$

$$\partial_j G_{oij} = \mathcal{J}_i$$

$$\varepsilon_{ijk}\, \partial_j \vec{e}_k = \mathcal{J}_i$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{e} = \vec{\mathcal{J}}} \,.$$

Componente-i j:

$$\partial_\mu G^{\mu ij} = j^{ij} = \varepsilon_{ijk} \mathcal{K}_k$$

$$\partial_0 G^{0ij} + \partial_k G^{kij} = \varepsilon_{ijk} \mathcal{K}_k$$

$$\varepsilon_{ijk} \tfrac{\partial}{\partial t}\, \vec{e}_k + \varepsilon_{kij}\, \partial_k b = \varepsilon_{ijk} \mathcal{K}_k$$

do que segue

$$\boxed{\vec{\nabla} b = -\tfrac{\partial}{\partial t}\, \vec{e} + \vec{\mathcal{K}}} \,.$$

Estas são as 2 equações do tipo-Maxwell com fontes externas, $\vec{\mathcal{J}}$ e $\vec{\mathcal{K}}$.

$$\partial_\mu \mathcal{G}^\mu = 0 \,.$$

$$\partial_0\tilde{G}^0 + \partial_i\tilde{G}^i = 0$$

$$\partial_0\tilde{G}_0 - \partial_i\tilde{G}_i = 0$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}b - \vec{\nabla}\bullet\vec{e} = 0$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\bullet\vec{e} = -\frac{\partial}{\partial t}b},$$

que é a equação análoga à lei de Faraday.

Resumindo, as equações-de-campo para $\vec{e}$ e b são dadas a seguir:

$$\left[\begin{array}{l} \vec{\nabla}\times\vec{e} = \vec{J}\,, \\ \vec{\nabla}\bullet\vec{e} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{b}\,, \\ \vec{\nabla}b = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{e} + \vec{K}\,. \end{array}\right.$$

As correntes externas, $\vec{J}$ e $\vec{K}$, satisfazem às leis de conservação:

$$\vec{\nabla}\bullet\vec{J} = 0$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{J} - \vec{\nabla}\times\vec{K} = 0\,,$$

em vista de se ter

$$\partial_\mu j^{\mu\nu} = 0$$

$$(\partial_\mu G^{\mu\nu k} = j^{\nu k} \Rightarrow \partial_\nu j^{\nu k} = 0)\,.$$

Mostremos, para finalizar, que ambos os campos satisfazem a uma equação-de-onda, o que assegura que o tipo de radiação descrito pelo campo $T_{\mu\nu}$propaga-se, no vácuo ($\vec{J} = \vec{K} = \vec{0}$), com a velocidade da luz.

Tomando-se o rotacional de

$$\vec{\nabla}\times\vec{e} = \vec{0}$$

e a derivada temporal de

$$\vec{\nabla}b = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{e}\,,$$

chega-se a:

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{e} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\bullet\vec{e}\right) - \nabla^2\vec{e} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}b = \nabla^2\vec{e}\,;$$

$\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} b = -\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{e}$

Portanto:

$\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} b = -\nabla^2\vec{e} = -\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{e}\,,$

do que se obtém

$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{e} = \Box\vec{e} = \vec{0}\,.$

A seguir, tomando-se a derivada temporal de

$\vec{\nabla} \bullet \vec{e} = -\frac{\partial}{\partial t} b$

e a divergência de

$\vec{\nabla} b = -\frac{\partial \vec{e}}{\partial t}\,,$

$\vec{\nabla}\frac{\partial \vec{e}}{\partial t} = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} b$

e

$\vec{\nabla} \bullet \vec{\nabla} b = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} \bullet \vec{e}\,,$

do que decorre

$\vec{\nabla} b = -\vec{\nabla} \bullet \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} b\,,$

ou melhor,

$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}\right) b = \Box b = 0$

A conclusão é que a radiação associada à interação descrita pelo potencial tensorial anti-simétrico, $T_{\mu\nu}$, descreve alguma excitação que se propaga longitudinalmente no vácuo, com velocidade igual à da luz. Tal radiação não pode descrever o fóton tal qual o concebemos, visto que este apresenta propagação transversal. O fóton é uma excitação vetorial, ao passo que o campo $T_{\mu\nu}$ descreve alguma excitação de natureza escalar.

Conclusões Gerais:

O objetivo deste material foi apresentar, de modo prático e direto, a idéia do uso de grandezas tensoriais em teorias físicas. Procuramos desenvolver o tratamento de tensores em diferentes tipos de espaços, com a finalidade de proporcionar um certo desembaraço ao leitor que se introduz ao assunto. As potencialidades dos softwares FORM e MAPLE são exploradas para a realização de cálculos algébricos. De fato, a proposta é que os exercícios sejam trabalhados diretamente com estes softwares. O nível do material é de graduação, devendo o mesmo ser complementado por algum curso ou livro de maior alcance formal.

Agradecimentos:

As autoras agradecem ao Prof. J. A. Helayel - Neto pelo curso que as introduziu ao assunto e pelas inúmeras discussões na realização destas notas-de-curso.

O CNPq é especialmente agradecido pelas nossas bolsas de Iniciação Científica.