ISSN 0000-0000

CBPF - CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro

Monografias – CBPF

CBPF-MO-V.1,N.2

agosto 2015

Neutrinos Massivos

Pedro Igor C. Caneda

GOVERNO FEDERAL

BRASIL

PÁTRIA EDUCADORA

Monografias – CBPF, v. 1, n. 2, p. 1-14, 2015
dx.doi.org/10.7437/MO24471119/2015.02.001

Neutrinos Massivos

Massive Neutrinos

Pedro Igor C. Caneda*
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas – CBPF/MCTI,
Rua Dr. Xavier Sigaud 150, Rio de Janeiro, RJ – 22290-180, Brasil

Resumo: O objetivo deste trabalho é introduzir as principais idéias por trás da física de neutrinos. A proposta é apresentar os fundamentos sobre os quais são construídos todos os modelos e teorias além do Modelo Padrão no setor de neutrinos. Além de uma mínima familiaridade com a equação de Dirac e um primeiro contato com o modelo de Salam-Glashow-Weinberg, nenhum outro conhecimento em física de partículas e TQC é pressuposto do leitor. Com isso visamos ser a porta de entrada para a pesquisa na física de neutrinos. Para isso começaremos com uma revisão do modelo de Salam-Glashow-Weinberg da unificação eletrofraca. Estudaremos então as principais consequências fenomenológicas deste modelo e até onde elas concordam com experimentos, como destaque para a violação de CP. Aprenderemos que uma extensão ao Modelo Padrão, devido às massas não nulas dos neutrinos, é necessária e discutiremos as possibilidades teóricas atualmente permitidas pelas observações. Concentraremos maior atenção em uma possibilidade específica, a de neutrinos serem férmions de Majorana, para construir o popular Mecanismo Seesaw, cuja função será suprimir as massas dos neutrinos em relação aos demais férmions do Modelo Padrão. Encerraremos então deduzindo as principais fórmulas da física de oscilação de neutrinos, pois é este o fenômeno observado experimentalmente, bem como os mais recentes resultados para os ângulos de mistura.

Palavras chave: Neutrinos, Violação de CP, Unificação Eletrofraca, Mecanismo Seesaw, Neutrinos de Majorana, Neutrinos de Dirac, Oscilação de Neutrinos.

Abstract: This work aims to introduce the main ideas behind neutrino physics. The objective is to present the fundamentals upon which are built all models and theories beyond the Standard Model regarding the neutrinos sector. Only a slight familiarity with Dirac's equation and Salam-Glashow-Weinberg model are supposed. Therefore we attempt to be a gateway to neutrinos research. For that purpose we start with a brief revision of SGW model to the electroweak unification. We then discuss in section 2 the main phenomenological consequences of the model and to what extent they agree with experiments, in particular CP violation. We will learn that an extension to the Standard Model is necessary due to the non zero neutrinos masses. We then discuss in section 3 the possible theoretical framework allowed by observation. In section 4 we focus on a specific and popular mechanism, which presupposes Majorana fermions, known as Seesaw Mechanism. It's role is to suppress neutrinos' masses relative to all the other Standard Model fermions. In section 5 we derive the key formulas of neutrino oscillation physics, since this is what we can measure, as well as presenting the most recent results concerning the mixture angles.

Keywords: Neutrinos, CP Violation, Electroweak Unification, Seesaw Mechanism, Majorana Neutrinos, Dirac Neutrinos, Neutrino Oscillation.

*Electronic address: piccaneda@gmail.com

1. MODELO DE SALAM-GLASHOW-WEINBERG (SGW)

O objetivo dessa primeira seção é revisar os principais elementos da teoria eletrofraca no modelo de SGW e fixar a notação que será utilizada no restante desse trabalho. Tendo em vista a questão dos neutrinos massivos, maior foco será dado ao setor leptônico e hadrônico, o segundo por conter diversas similaridades com o primeiro, em especial a violação de CP e matriz CKM, a serem tratados na subseção de fenomelogia de SGW.

O grupo de simetria por trás do modelo é $SU(2)_L \times U(1)_Y$. $SU(2)_L$ se refere às componentes quirais left dos campos fermiônicos, definidas pela atuação do projetor quiral $P_L = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)$ sobre o espinor do campo. Tornar uma simetria $SU(2)$ qualquer local implica na aparição de três bósons de gauge, correspondentes aos três geradores do grupo. Visando uma unificação eletrofraca poder-se-ia tentar associar dois destes bósons às correntes carregadas fracas e o terceiro à corrente neutra eletromagnética. Porém após a descoberta da corrente neutra fraca (em contraposição à corrente neutra eletromagnética) o número total de bósons de gauge subiu para 4. A introdução de mais um bóson de gauge só pode ser feita através de uma simetria $U(1)$. Esta simetria é chamada de simetria $U(1)_Y$ de hipercarga Y, em analogia ao eletromagnetismo.

1.1. Elementos básicos para a construção de SGW

Definimos aqui as principais estruturas para a construção da lagrangeana eletrofraca. Os campos de gauge são descritos de acordo com o grupo de simetria aos quais correspondem. Temos então 3 bósons no setor $SU(2)_L$ que podem ser agrupados em um tri-vetor da álgebra de Lie $su(2)$

$$A^i_\mu = (A^1_\mu, A^2_\mu, A^3_\mu)$$

cujos geradores são $\frac{1}{2}\tau^i$, onde τ^i são as matrizes de Pauli. No setor da simetria $U(1)_Y$ há apenas um bóson de gauge B_μ.

Os campos de matéria fermiônicos se encaixam em representações do grupo de simetria $SU(2)_L$ e são classificados de acordo com o valor da terceira componente de isospin fraco I_3, em analogia com o grupo $SU(2)$ de spin. O setor leptônico apresenta um dublete e um singlete de $SU(2)_L$:

$$l_{aL} = \begin{pmatrix} \nu_{aL} \\ e_{aL} \end{pmatrix}, e_{aR}$$

onde $a = 1,2,3$ são as famílias de léptons: $e_a = (e,\mu,\tau)$ e $\nu_a = (\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau)$. Para o setor hadrônico temos:

$$q_{aL} = \begin{pmatrix} u_{aL} \\ d_{aL} \end{pmatrix}, q_{aR} = \begin{pmatrix} u_{aR} \\ d_{aR} \end{pmatrix}$$

onde $a = 1,2,3$ novamente é o índice de família: u_a são os três quarks tipo up (u,c,t) e d_a são os três quarks tipo down (d,s,b).

Note que há uma assimetria entre léptons e quarks, pois os neutrinos right não estão presentes. A razão histórica para o singlete right no setor leptônico é devida ao experimento proposto por Yang e Lee e realizado pela senhorita Wu, onde verificou-se a existência apenas de neutrinos cujos spins eram anti-alinhados com os momenta. Devido a massa nula dos neutrinos (como se pensava na época) este estado de helicidade coincide com o estado de quiralidade. Ainda mais, o estado de helicidade (quiralidade) left dos neutrinos não poderia ser invertido por um boost de Lorentz (seria necessária velocidade supra-luminal).

O dublete de Higgs é:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}.$$

Este dublete está na representação fundamental **2** de $SU(2)$. Como veremos adiante, para gerar massa para todos os quarks será necessário utilizar a representação complexo conjugado $\mathbf{2}^*$, obtida a partir de **2** por uma transformação unitária (portanto são representações equivalentes[1]):

$$\tilde{\Phi} = i\tau_2\Phi^* = \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ -\phi^{+*} \end{pmatrix}.$$

1.2. A Lagrangeana de SGW

O setor puramente de gauge é dado pelo quadrado do tensor Field-Strength, como no eletromagnetismo. Para os bósons da simetria $SU(2)_L$ há ainda um novo detalhe: o campo A^i_μ é elemento da álgebra de Lie, então $F^i_{\mu\nu}$ também o é. Para construir uma lagrangeana escalar devemos então tomar o traço no espaço da álgebra de Lie, o que corresponde a um produto escalar. O bóson da simetria $U(1)_Y$ procede exatamente como no eletromagnetismo. Temos então

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = \underbrace{-\frac{1}{4}F^i_{\mu\nu}F^{i\mu\nu}}_{\text{Simetria } SU(2)} - \underbrace{\frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}}_{\text{Simetria } U(1)}$$

Para descrever o setor de interação férmion-bóson de gauge é necessário introduzir a derivada covariante $D_\mu = (\partial_\mu - igI_3\tau^i A^i_\mu - ig'\frac{Y}{2}B_\mu)$. Se coletarmos todos os férmions num biespinor $\psi = l_{aL}, e_{aR}, q_{aL}, q_{aR}$ podemos escrever compactamente a lagrangeana das correntes carregadas e neutras como:

$$\mathcal{L}_{\text{corrente}} = i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu \psi.$$

[1] Não é sempre verdade que a representação complexo conjugado é equivalente à representação fundamental, isso é, em geral não é possível encontrar uma matriz unitária que ligue ambas representações. Um exemplo são as representações **3** e $\mathbf{3}^*$ do grupo $SU(3)$.

Este setor da lagrangeana acomoda tanto as correntes carregadas quanto as neutras. As correntes carregadas são proporcionais aos geradores não diagonais[2], portanto misturam componentes distintas dos dubletes de $SU(2)_L$, como deveria ser para que haja conservação de carga. Um exemplo no setor leptônico é

$$j_+^\mu = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{l}_{aL} \gamma^\mu \tau_+ l_{aL} = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_{aL} \gamma^\mu e_{aL}. \quad (1)$$

As correntes neutras são proporcionais ao gerador diagonal τ_3, ligando as componentes de mesmo isospin fraco. Um exemplo também no setor leptônico é

$$j_0^\mu = g \bar{l}_{aL} \gamma^\mu \tau_3 l_{aL} = g \bar{\nu}_{aL} \gamma^\mu \nu_{aL} - g \bar{e}_{aL} \gamma^\mu e_{aL}.$$

A segunda contribuição possui a forma da corrente eletromagnética que se acopla ao fóton, porém a primeira não pode ser da mesma natureza, pois os neutrinos são eletricamente neutros. Esta corrente é conhecida como corrente neutra e foi prevista em 1973 por SGW. A descoberta (também em 1973) das correntes neutras no experimento Gargamelle, no CERN, foi um dos maiores propulsores à confirmação do modelo SGW. As correntes de quarks possuem forma similar e serão explicitadas quando discutirmos a violação de CP.

O setor puro de Higgs é simplesmente:

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2.$$

Em sua tese de doutorado, Salam mostrou que o termo quártico é necessário para campos escalares com simetria $U(1)$ para garantir a renormalizabilidade da teoria. O potencial biquadrado, por sua vez, é o que permite a quebra espontânea de simetria, quando o campo Φ assume um vácuo (configuração de mínima energia) possível dentre infinitos outros equivalentes. Um simples cálculo de minimização fornece o valor $v/\sqrt{2} = (\mu^2/\lambda)^{1/2}/\sqrt{2}$. Como o vácuo deve ser eletromagneticamente neutro escolhe-se nula a componente carregada do dublete de Higgs. Temos então

$$\langle 0|\Phi|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}.$$

O campo de Higgs a ser quantizado deve ser então a flutuação em torno deste vácuo $\Phi' = \Phi - \langle 0|\Phi|0\rangle$. Usaremos o gauge unitário, onde escrevemos o campo de Higgs em coordenadas polares (H, ξ) e atuamos uma transformação unitária $U(\xi)$ de forma a eliminar a fase ξ de Φ'. Terminamos com a seguinte expressão para o campo de Higgs que será utilizada no restante do texto:

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

$H(x)$ é o campo da partícula física conhecida como bóson de Higgs.

A Lagrangeana de interação férmion-Higgs é descrita como acoplamentos de Yukawa:

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = f_{ab}^e \bar{l}_{aL} \Phi e_{bR} + f_{ab}^d \bar{q}_{aL} \Phi d_{bR} + f_{ab}^u \bar{q}_{aL} \tilde{\Phi} u_{bR} + h.c.$$

Esse é o setor da lagrangeana de SGW no qual estamos mais interessados, pois é o que irá gerar as massas fermiônicas quando agir o mecanismo de Higgs. Após a substituição de (2) em $\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}$ encontra-se dois tipos de termos:

- acoplamentos com H, portanto termos cúbicos nos campos, que descrevem a interação de férmions com o bóson de Higgs

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}}^{\text{férmion}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (f_{ab}^e \bar{e}_{aL} H e_{bR} + f_{ab}^d \bar{d}_{aL} H d_{bR} + f_{ab}^u \bar{u}_{aL} H u_{bR}) + h.c.$$

- Proporcionais a v, portanto quadráticos nos campos, responsáveis pela geração das massas fermiônicas

$$\mathcal{L}_{\text{massa}} = \frac{v}{\sqrt{2}} (f_{ab}^e \bar{e}_{aL} e_{bR} + f_{ab}^d \bar{d}_{aL} d_{bR} + f_{ab}^u \bar{u}_{aL} u_{bR}) + h.c.$$

Aqui fica clara a necessidade do dublete complexo conjugado de Higgs $\tilde{\Phi}$, sem ele os quarks tipo up não ganhariam massa pelo mecanismo de Higgs. A assimetria lépton-quark neste modelo impede que o neutrino adquira massa através de um termo análogo com $\tilde{\Phi}$ no setor leptônico.

2. FENOMENOLOGIA DE SGW

Discutiremos aqui duas principais consequências do modelo SGW. Primeiramente a conservação de número leptônico. Em seguida apresentaremos a mistura entre famílias de quarks e a violação de CP. Ambos tópicos serão relevantes quando considerarmos mecanismos de massa de neutrinos.

2.1. Conservação de números leptônicos

A idéia de introduzir números quânticos exclusivos aos léptons pode ser entendida a partir da descoberta da partícula μ^-, uma réplica mais pesada do conhecido elétron. O significado do qualificativo réplica se refere ao fato desta partícula possuir exatamente as mesmas interações e com as mesmas intensidades que o elétron, diferindo apenas na massa. Quase 40 anos após a descoberta do múon, outra réplica ainda mais

[2] Ao invés dos geradores originais τ_1 e τ_2 utiliza-se as combinações lineares conhecidas como operadores escada: $\tau_+ = (\tau_1 + i\tau_2)/2$ e $\tau_- = (\tau_1 - i\tau_2)/2$. O gerador diagonal τ_3 permanece intacto.

massiva foi descoberta, a partícula τ^-. A ausência de decaimentos eletromagnéticos entre uma réplica e o elétron (ou entre réplicas), por exemplo $\mu^- \to e^- + \gamma$, elimina a possibilidade das réplicas serem simplesmente estados excitados (em relação a alguma estrutura) do elétron.

A atribuição de números leptônicos e a imposição de sua conservação claramente explicaria a ausência de tais decaimentos. Contudo a criação de uma regra de seleção para esses 2 decaimentos apenas (tau $\to$ muon $\to$ elétron) pareceria uma solução coringa sem alguma física por trás. No entanto diversos outros processos observados (ou ausentes) podem ser compreendidos em termos de uma conservação de número leptônico, incluindo processos que envolvem não apenas elétrons e suas réplicas, mas também os três tipos de neutrinos que os acompanham, por exemplo a ausência do processo[3] $\bar{\nu}_\mu + p \to e^+ + n$. Abaixo mostramos uma tabela com os números leptônicos L_e, L_μ e L_τ que são carregados por cada família de léptons. As antipartículas naturalmente carregam números leptônicos negativos.

	L_e	L_μ	L_τ
e^-, ν_e	1	0	0
μ^-, ν_μ	0	1	0
τ^-, ν_τ	0	0	1

O modelo de SGW incorpora essa lei de conservação na seguinte forma: **cada número leptônico é separadamente conservado**

$$\sum L_e = cte, \quad \sum L_\mu = cte, \quad \sum L_\tau = cte. \tag{3}$$

Isso significa que a Lagrangeana total do modelo de SGW é invariante sobre as três transformações $U(1)$ globais

$$l'_{eL} = l_{eL} e^{iL_e}, \quad l'_{\mu L} = l_{\mu L} e^{iL_\mu}, \quad l'_{\tau L} = l_{\tau L} e^{iL_\tau}.$$

Se cada número leptônico é separadamente conservado, então o número leptônico total, a soma de todos números leptônicos, é também conservada. Para i, j e k léptons eletrônicos, muônicos e tauônicos, respectivamente temos

$$\sum_i L_e^i + \sum_j L_\mu^j + \sum_k L_\tau^k = cte. \tag{4}$$

Neste caso a Lagrangena completa de SGW deve ser invariante por uma única transformação $U(1)$ global sobre as três famílias leptônicas

$$l'_{aL} = l_{aL} e^{i(L_e + L_\mu + L_\tau)}, \qquad a = e, \mu, \tau.$$

Essas duas formulações distintas de uma lei de conservação do número leptônico oferecem previsões diferentes para certos processos. Por exemplo, o decaimento

$$\mu^+ \to e^+ + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$

é probido por (3), mas é permitido por (4).

A lei de conservação (3) é mais restringente que (4), pois não permite a mistura entre famílias leptônicas. Contudo as recentes observações do fenômeno de mistura entre famílias de neutrinos, conhecido como oscilação de neutrinos, implicam em violação da lei de conservação (3), enquanto que ainda há possibilidade de (4) ser satisfeita. A oscilação de neutrinos está ligada à massa não nula dos neutrinos. Estudaremos as consequências de neutrinos massivos mais adiante quando discutirmos a fenomenologia além de SGW. No momento tornamos para a questão da mistura de quarks, já incluso no modelo de SGW, por fornecer paralelos que serão aproveitados no caso da oscilação de neutrinos.

2.2. Mistura de quarks e violação de CP

Inspecionando $\mathcal{L}_{massa}$ notamos a presença de matrizes de massa devido à estrutura de famílias hadrônicas

$$M_{ab} = -\frac{v}{\sqrt{2}} f_{ab}. \tag{5}$$

O fato destas matrizes não possuirem qualquer razão para serem a identidade (nem sequer diagonais) leva ao fenômeno da mistura de quarks. O significado físico dessa mistura é a distinção entre autoestados de gauge e autoestados de massa. Antes da quebra espontânea da simetria todas as partículas possuem massa nula e se encontram no autoestado de gauge. Após a aquisição de massa o autoestado de gauge de um dado campo adquire componentes do autoestado de massa de todos os três campos.

Nos aceleradores são medidas as massas das partículas, logo o que observamos são os autoestados de massa. Por conta disso precisamos diagonalizar M_{ab}. Se u' e d' são agora os autoestados de gauge e u e d os autoestados de massa

$$u_L = S u'_L, \quad d_L = T d'_L$$

então as matrizes de massa M^u dos quarks tipo-up e M^d dos quarks tipo-down são transformadas nas matrizes diagonais

$$D^u = S^\dagger M^u S, \qquad D^d = T^\dagger M^d T.$$

Se agora expressarmos as correntes de quarks carregadas utilizando os autoestados de massa encontramos:

$$\begin{aligned} j_+^\mu &= \bar{q}'_{aL} \gamma^\mu \tau_+ q'_{aL} \\ &= \bar{u}'_{aL} \gamma^\mu d'_{aL} \\ &= \bar{u}_{aL} \gamma^\mu (S^\dagger T)_{ab} d_{bL} \\ &= \bar{u}_{aL} \gamma^\mu V_{ab} d_{bL} \end{aligned}$$

[3] Este processo seria permitido por argumentos de conservação de helicidade, uma alternativa que foi considerada historicamente. Justamente a ausência desses tipos de processos evidenciam fortemente a existência de uma lei de conservação de números leptônicos.

onde definimos a matriz $V \equiv S^\dagger T$. Se escrevermos[4] $d'_L = V d_L$ podemos interpretar esta equação como o acoplamento dos quarks tipo u, no autoestado de massa, com uma mistura dos autoestados de massa apenas dos quarks tipo d.

A matriz V possui 9 parâmetros complexos, ou, equivalentemente, 18 reais. A condição de unitariedade, $V^\dagger V = 1$, impõe 3 condições reais na diagonal e 3 condições complexas, ou 6 condições reais, fora da diagonal. Restam então 9 parâmetros reais. Se os elementos de V forem tomados na forma de números reais multiplicados por fases, podemos parametrizar V como uma matriz ortogonal com fases. Uma matriz ortogonal 3×3 é determinada por 3 ângulos de Euler. Sobram então 6 parâmetros reais na forma de fases. Como temos um total de 6 quarks, podemos ajustar 5 diferenças de fases (apenas diferenças de fase são observáveis), absorvendo assim mais 5 parâmetros. Resta então um único parâmetro real δ na forma de uma fase. Claramente não há uma parametrização única para a matriz V, mas há uma parametrização padrão que escrevemos abaixo

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \tag{6}$$

onde s_{ij} e c_{ij} são abreviações para os senos e cossenos dos três ângulos de Euler θ_{ij}. A matriz V_{CKM}, não importando a parametrização, é conhecida como Matriz CKM, de Cabbibo-Kobayashi-Maskawa. Note que uma matriz unitária em geral não é igual à sua conjugada hermitiana $V^\dagger \neq V$, como pode-se verificar explicitamente em (6). O primeiro significado físico disso é imediato quando notamos que os acoplamentos V_{ab} representam as taxas de transição entre os quarks u_a e d_b. Não há qualquer razão para que $V_{12} = V_{21}$, pois são duas transições envolvendo partículas distintas, a primeira entre os quarks up e strange, a segunda entre charm e down. Há ainda um outro significado mais profundo em $V^\dagger \neq V$. Veremos adiante que esta é precisamente a condição necessária para violação de CP e que tal fenômeno será descrito pela fase δ que não podemos eliminar.

Naturalmente poderíamos nos perguntar por quê introduziríamos violação de CP no modelo. Após a descoberta da violação de P nas interações fracas, acreditava-se que CP fosse a simetria respeitada pelas interações. A invariância sobre CP leva uma partícula em sua antipartícula e implica então que a dinâmica de partícula e antipartícula é a mesma. Contudo, evidências de violação de CP começaram a surgir em 1964 em decaimentos de mésons K neutros. Quase 40 anos mais tarde uma maior violação foi observada em decaimentos raros de mésons B neutros. O resultado encontrado foi que a taxa de decaimento do processo $B^0 \to K^+\pi^-$ é cerca de 20% maior que a do processo CP-conjugado $\bar{B}^0 \to K^-\pi^+$. O significado da violação de CP, como mostram esses experimentos, é a **existência de uma distinção absoluta entre matéria e antimatéria**[5].

Respondida a razão de incluirmos violação de CP no modelo, precisamos agora responder como incluí-la. Veremos que a condição é de fato $V^\dagger \neq V$. Para isso vamos estudar o comportamento das correntes carregadas em $\mathcal{L}_{corrente}$ sobre a atuação de CP[6]

$$V_{ab}\bar{u}_a\gamma^\mu \frac{(1-\gamma^5)}{2} d_b W_\mu + V^*_{ba}\bar{d}_b\gamma^\mu \frac{(1-\gamma^5)}{2} u_a W^\dagger_\mu.$$

Vamos aplicar P. Os produtos vetor.vetor ($\sim \gamma^\mu W_\mu$) são pares, enquanto que os produtos pseudo-vetor.vetor ($\sim \gamma^\mu\gamma^5 W_\mu$) são ímpares, logo

$$V_{ab}\bar{u}_a\gamma^\mu \frac{(1+\gamma^5)}{2} d_b W_\mu + V^*_{ba}\bar{d}_b\gamma^\mu \frac{(1+\gamma^5)}{2} u_a W^\dagger_\mu.$$

Aplicando agora C, temos que $\bar{u}_a\gamma^\mu d_b \to -\bar{d}_b\gamma^\mu u_a$, $\bar{u}_a\gamma^\mu\gamma^5 d_b \to \bar{d}_b\gamma^\mu\gamma^5 u_a$ e $W_\mu \to -W^\dagger_\mu$ (basta pensar em termos de dubletes como no caso do Higgs), portanto:

$$V_{ab}\bar{d}_b\gamma^\mu \frac{(1-\gamma^5)}{2} u_a W^\dagger_\mu + V^*_{ba}\bar{u}_a\gamma^\mu \frac{(1-\gamma^5)}{2} d_b W_\mu.$$

Para que as lagrangeanas original e CP-conjugada sejam diferentes devemos ter

$$V_{ab} \neq V^*_{ba} \quad \text{ou} \quad V^\dagger \neq V,$$

conforme antecipado. Se analisarmos a diagonal particularmente vemos que $V_{aa} \neq V^*_{aa}$: os acoplamentos devem ser complexos[7]. É por esta razão que a violação de CP fica determinada pela fase complexa da matriz CKM.

[5] Inclusive violação de CP é uma das três condições necessárias para que um universo contendo quantidades iguais de matéria e antimatéria evolua para um universo dominado por matéria.

[6] Poderíamos também impor que a lagrangeana difere da lagrangeana após aplicação de T. Pelo Teorema CPT, violação de T implica em violação de CP.

[7] Note que estamos considerando a corrente completa. Pode ser que existam acoplamentos $V^*_{ba} = V_{ab}$ para a e b específicos dependendo da parametrização. Em particular, na parametrização padrão (6), os elementos V_{11} e V_{33} são reais, porém V_{22} é complexo.

Para encerrar esta seção observamos que o mesmo esquema de mistura de quarks que apresentamos acima não está presente no setor leptônico no modelo de SGW. Neste modelo os neutrinos não adquirem massa, portanto são degenerados em massa. Qualquer autoestado pode então ser tomado como um autoestado de massa. Consequentemente nenhum ângulo de mistura de léptons deve ser experimentalmente observado em processos físicos. Concluímos então que não é apenas a estrutura de famílias, mas também a acquisição de massa via Mecanismo de Higgs, que permite o modelo SGW acomodar naturalmente o fenômeno de mistura e violação de CP. Atualmente, contudo, sabe-se que neutrinos possuem massa, embora muito pequenas em comparação com seus parceiros carregados. Tornamo-nos agora justamente à questão dos neutrinos massivos.

3. NEUTRINOS MASSIVOS

A primeira evidência de neutrinos massivos surgiu em 1968, quando Davis *et al* detectaram uma taxa de neutrinos solares, produzidos a partir do decaimento de ^{8}B, igual a $1/3$ do que era previsto. Esse resultado foi reproduzido mais tarde por experimentos maiores como Kamiokande (em Kamioka, Japão) e Homestake Mine (em South Dakota, EUA). Além do problema dos neutrinos solares, também foi observado (Kamiokande) uma anomalia no fluxo de neutrinos atmosféricos, produzidos através de decaimentos de hádrons, que por sua vez são produzidos através das colisões de raios cósmicos com núcleos na camada superior da atmosfera terrestre. A anomalia encontrada era que apenas metade do fluxo esperado de neutrinos muônicos eram detectados. Esse resultado também foi confirmado posteriormente pelo Super-Kamiokande.

Estes experimentos, entre outros realizados em reatores e aceleradores, estabeleceram a oscilação de neutrinos. Como já discutido, a oscilação implica em uma massa não nula. Portanto é necessário estender o modelo de SGW para incluir neutrinos massivos. Veremos a seguir que essa não é uma tarefa tão simples quanto poder-se-ia esperar, pois não há um modo único de introduzir massa para os neutrinos em particular.

3.1. Neutrinos de Dirac

O modo mais natural de se introduzir massa para os neutrinos seria copiar o mecanismo completo pelo qual os demais férmions adquirem massa. Para isso promovemos o singlete leptônico right a dublete introduzindo o neutrino right

$$e_{aR} \to l_{aR} = \begin{pmatrix} \nu_{aR} \\ e_{aR} \end{pmatrix}.$$

A introdução dos neutrinos right é permitida pelas simetrias do Modelo Padrão, pois é um singlete de $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$, logo os neutrinos right participam apenas da interação gravitacional e por isso são chamados de *estéreis*. Por conta disso é possível introduzir um número arbitrário de neutrinos right, inclusive poderíamos introduzir apenas um. Escolhemos introduzir três (um para cada família), não mais por simplicidade e não menos por analogia com o setor hadrônico.

Prosseguindo com o Mecanismo de Higgs, os neutrinos adquirem massa como um acoplamento da forma[8]

$$\mathcal{L}_D = \frac{1}{2} M_D (\bar{\nu}_L \nu_R + \bar{\nu}_R \nu_L) \tag{7}$$

Neste caso temos um termo de massa de Dirac e os neutrinos são ditos neutrinos de Dirac[9]. O termo de massa de Dirac liga as componentes left e right de um mesmo campo ν. Note que neutrinos de Dirac acomodam a conservação de número leptônico individual (3). Uma transformação de fase global em $\bar{\nu}_{aL}$ é compensada pela outra que ocorre no termo ν_{aR} e similarmente em todos os outros termos da lagrangeana em que aparecerá o campo do neutrino right.

Essa construção impõe uma simetria lépton-quark do ponto de vista da interação eletrofraca. Portanto todos os resultados que apresentamos sobre mistura de quarks e violação de CP são automaticamente válidos. Aqui são as fases da simetria $U(1)$ global de número leptônico as responsáveis pela eliminação de 5 das 6 fases da matriz V. Note, porém, que é a quantidade de parâmetros livres que se mantém e, no caso da mesma parametrização, a forma da matriz. Os valores dos parâmetros para o caso de quarks não possui qualquer relação com o caso de neutrinos. A matriz V para o caso de neutrinos é conhecida como matriz de Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata, ou matriz PMNS, e apenas no caso de neutrinos de Dirac ela se reduz à uma forma similar à matriz CKM.

3.2. Neutrinos de Majorana

Há, contudo, ainda outra forma de introduzir massa para os neutrinos. Devido ao fato de serem eletromagneticamente neutros, neutrinos não possuem a simetria $U(1)$ local de carga elétrica. Na realidade é possível que não possuam simetria $U(1)$ qualquer, mesmo que global. Nesse caso neutrinos são partículas verdadeiramente neutras, isso é, não possuem qualquer número quântico que permita distinguir a partícula de sua antipartícula. No caso de neutrinos de Dirac esse número quântico é o número leptônico advindo da simetria de fase global do campo ν_D. Esse campo claramente não pode descrever uma partícula verdadeiramente neutra. A descrição correta é através do férmion de Majorana, quem originalmente levantou essa possibilidade em 1937[10].

---

[8] Esta equação está escrita em forma matricial, onde os índices de famílias que foram omitidos são os índices matriciais. A partir daqui escreveremos as lagrangeanas de massa nesta forma.

[9] No Modelo Padrão todos os férmions são férmions de Dirac (neutrinos, sem massa, são férmions de Weyl, um caso particular de neutrinos de Dirac).

[10] A discussão a seguir é relevante também fora do domínio da física de partículas. Em matéria condensada já foram observados estados ligados que se comportam como férmions de Majorana.

Um neutrino de Majorana é definido pelo campo auto-conjugado de carga $\nu^c_{ML} \equiv i\gamma_2\nu^*_{ML} = \nu_{ML}$ que depende apenas da componente quiral left χ do espinor geral ν:

$$\nu_{ML} = \begin{pmatrix} i\sigma_2\chi^* \\ \chi \end{pmatrix}. \tag{8}$$

É também possível definir um neutrino de Majorana com a componente quiral right ω de ν, porém isso não é necessário uma vez que apenas neutrinos left são experimentalmente observados. Essa é precisamente a vantagem dos neutrinos de Majorana, não é necessário introduzir no modelo graus de liberdade não observados[11].

Através de simples aplicações dos operadores de projeção quirais P_L e P_R é imediato verificar $\nu_L = P_L\nu_{ML}$ e $(\nu_L)^c = P_R\nu_{ML}$. Note que obtemos um espinor quiral right descrito pela componente quiral left. Precisamente temos que $(\nu_L)^c = (\nu^c)_R$, as operações de conjugação de carga e projeção quiral não comutam! Um termo de massa de Majorana acopla as componentes quirais left e right de campos conjugados de carga:

$$\mathcal{L}_{ML} = \frac{1}{2}M_L(\bar{\nu}_L(\nu_L)^c + (\bar{\nu}_L)^c\nu_L) = M_L\bar{\nu}_{ML}\nu_{ML} \tag{9}$$

Aqui fica explícito que se neutrinos forem férmions de Majorana não é possível encontrar uma transformação $U(1)$, mesmo que global, que deixe a lagrangeana de SGW invariante, pois há duas conjugações complexas por termo devido aos conjugados de Dirac $^-$e carga ^{c}. Portanto a conservação de número leptônico individual é perdida no caso de neutrinos de Majorana, embora a conservação de número leptônico total ainda possa permanecer válida. Por exemplo, o decaimento $\mu^- \to \nu_\mu + e^- + \bar{\nu}_e$ é observado. Neutrinos de Dirac implicam em conservação do número leptônico individual, enquanto que neutrinos de Majorana implicam em sua violação.

Observamos que, mesmo no caso em que temos neutrinos de Majorana right, não há simetria lépton-quark, pois os neutrinos de Majorana não podem carregar qualquer tipo de carga e, consequentemente, não podem absorver transformações de fase. Isso possui uma implicação direta quanto à violação de CP. Se os neutrinos forem férmions de Majorana não é mais possível absorver 5 das 6 fases da matriz V através de diferenças de fases dos campos leptônicos, mas apenas 3: duas diferenças entre os léptons carregados e uma entre estes e os três neutrinos de Majorana. A matriz V possui 3 fases livres, ou seja, três fases de violação de CP. Como no caso da matriz CKM, não há uma parametrização única. A parametrização padrão é feita em termos de uma matriz do tipo CKM, que já inclui uma fase, e uma matriz diagonal de fases

$$V_{PMNS} = V^{\nu}_{CKM}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\theta_{12}} \end{pmatrix}, \tag{10}$$

com a fase $\delta \equiv \theta_{23}$.

A questão que imediatamente surge é 'qual é o modo correto de introduzir massa para os neutrinos?' A resposta depende dos neutrinos serem de Dirac ou Majorana. No caso de Dirac precisamos introduzir neutrinos right, uma partícula ainda não observada. Em contrapartida, neutrinos de Majorana são mais econômicos, pois precisamos apenas da quiralidade left, já presente no modelo de SGW. A resposta definitiva virá apenas experimentalmente. Contudo experimentos de oscilações de neutrinos são incapazes de distinguir entre neutrinos de Dirac e Majorana. Atualmente há uma busca pelo decaimento β duplo sem neutrinos, onde um núcleo atômico A sofre um decaimento β e o neutrino emitido pode causar uma segunda interação fraca transitando em mais um elétron $A \to A' + e^- + e^-$. Esse processo viola tanto a conservação de número leptônico individual quanto total, logo é possível apenas no caso de neutrinos de Majorana. Se esse decaimento for observado, então ficará estabelecido que os neutrinos são férmions de Majorana e devem adquirir massa através de acoplamentos apenas do setor quiral left[12].

Há ainda uma outra característica dos neutrinos que chama a atenção: suas massas são muito menores que as massas dos demais férmions. É possível então encontrar uma razão para esse gap de massas? Essa pergunta nos leva a estudar em mais detalhes o mecanismo de massa de neutrinos, quer sejam de Dirac ou Majorana. Apresentaremos em seguida a versão mais simples do famoso mecanismo Seesaw em resposta a esta questão.

4. MECANISMO SEESAW

Primeiramente notamos que gostaríamos que a massa dos neutrinos fosse da mesma ordem das demais massas fermiônicas. Isso significa que gostaríamos que os neutrinos possuíssem massas da ordem dos léptons carregados, ou pelo menos da ordem dos quarks tipo up. Note, porém, que não há qualquer razão matemática que impede que os acoplamentos de Yukawa possuam valores que difiram por 10^6 na ordem de grandeza (tomando como exemplo a razão entre as massas do elétron e seu neutrino), dado que tais acoplamentos são parâmetros livres no Modelo Padrão. Contudo essa situação é fisicamente insatisfatória. Espera-se que um dado conjunto de parâmetros de mesma natureza[13] estejam todos

[11] Note que, ao contrário de um neutrino de Dirac, um neutrino de Majorana possui apenas dois graus de liberdade, pois é descrito apenas pelo biespinor da componente quiral left.

[12] Imaginamos que estamos apenas no contexto do Modelo Padrão. Como veremos na seção a seção a seguir, o Mecanismo Seesaw introduz também neutrinos right.

[13] Por natureza aqui entendemos a estrutura de famílias fermiônicas, isso é, esperamos que ao menos os léptons e quarks de uma mesma família possuam acoplamentos de Yukawa próximos, levando a massas próximas.

na mesma ordem de grandeza. Somos motivados por isso a nos perguntar sobre a existência de um possível mecanismo de supressão para as massas dos neutrinos. Nesse cenário teríamos que os acoplamentos de Yukawa seriam próximos (dentro da estrutura de famílias), consequentemente os neutrinos teriam, a priori, massas comparáveis a de seus parceiros carregados. O mecanismo entra em ação e suprime as massas dos neutrinos, sem alterar o valor dos acoplamentos de Yukawa. Essa é a função do Mecanismo Seesaw que discutimos a seguir.

4.1. Seesaw em uma família leptônica

Como desconhecemos a natureza dos neutrinos, iremos construir o termo de massa mais geral possível. Em vista da discussão da seção passada sobre neutrinos de Dirac e Majorana, o termo de massa mais geral será a soma de dois termos de Majorana (left e right) e um termo de Dirac, construídos a partir de um espinor ν

$$\nu = \begin{pmatrix} \omega \\ \chi \end{pmatrix}, \quad \nu^c = \begin{pmatrix} i\sigma^2\chi^* \\ -i\sigma^2\omega^* \end{pmatrix}.$$

Como vimos durante a discussão sobre neutrinos de Majorana, podemos definir os campos auto-conjugados de carga $\nu_{ML} \equiv \nu_L + \nu_L^c$ e $\nu_{MR} \equiv \nu_R + \nu_R^c$. Note que agora admitimos a existência do grau de liberdade quiral right. Com ambas quiralidades presentes é possível escrever um campo de Dirac como dois campos de Majorana $\frac{1}{2}m_D(\bar{\nu}_L\nu_R + \bar{\nu}_R\nu_L) = \frac{1}{2}m_D(\bar{\nu}_{ML}\nu_{MR} + \bar{\nu}_{MR}\nu_{ML})$. Isso leva à lagrangeana de massa mais geral

$$\mathcal{L}_{\mathcal{D}+\mathcal{M}} = \frac{1}{2}m_D(\bar{\nu}_{ML}\nu_{MR} + \bar{\nu}_{MR}\nu_{ML}) + m_L\bar{\nu}_{ML}\nu_{ML} + m_R\bar{\nu}_{MR}\nu_{MR}$$

que pode ser posta sobre a seguinte forma matricial

$$\mathcal{L}_{D+M} = \begin{pmatrix} \bar{\nu}_{ML} & \bar{\nu}_{MR} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} m_L & \frac{1}{2}m_D \\ \frac{1}{2}m_D & m_R \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} \nu_{ML} \\ \nu_{MR} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

O Mecanismo Seesaw corresponde a um caso particular da matriz de massa. Como discutimos na introdução desta seção, se não fosse pelo mecanismo de supressão, os neutrinos deveriam ter massas da ordem de seus companheiros carregados. Os léptons carregados (assim como os quarks) adquirem massas de Dirac via Higgs. Tendo esse fato em vista a discussão feita na introdução refere-se mais precisamente à massa de Dirac, então devemos ter m_D da ordem da massa do lépton carregado da mesma família. Ainda mais, as simetrias do Modelo Padrão não permitem termos de massa de Majorana left, por isso tomamos $m_L = 0$. Por outro lado m_R não possui qualquer restrição, pois neutrinos right são singletes perante às mesmas simetrias, isso é, não interagem dentro do Modelo Padrão. Por esta razão são chamados de **neutrinos estéreis**. Similarmente, os neutrinos do Modelo Padrão são chamados **neutrinos ativos**. A matriz de massa M assume então a forma

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}m_D \\ \frac{1}{2}m_D & m_R \end{pmatrix} \tag{12}$$

Os autovalores de M são facilmente calculados através de uma equação de segundo grau

$$m_{1,2} = \frac{m_R \pm \sqrt{m_R^2 + m_D^2}}{2}.$$

O Mecanismo Seesaw é implementado no caso em que $m_R \gg m_D$, pois então podemos retirar m_R da raiz e expandí-la em torno de zero em termos da grandeza $\frac{m_D}{m_R} \ll 1$. Em primeira ordem encontramos as massas

$$m_{\nu_{MR}} \approx m_R, \qquad m_{\nu_{ML}} \approx -\frac{m_D^2}{m_R} \tag{13}$$

que correspondem respectivamente ao neutrino right e ao neutrino left. Note que como $m_R \gg m_D$, temos que a massa do neutrino right é muito maior do que a massa dos demais férmions elementares do Modelo Padrão. Acredita-se que essa massa esteja relacionada a uma escala de grande unificação. O neutrino left, por outro lado, possui uma massa menor que a dos demais férmions, em acordo qualitativo com o que é observado. Conseguimos, portanto, um mecanismo de supressão para a massa dos neutrinos! Esse mecanismo também implica que os neutrinos são férmions de Majorana, portanto sua validade pode ser testada através do decaimento β sem neutrinos. Se esse processo for observado, então o Mecanismo Seesaw é um bom mecanismo de supressão.

O Mecanismo Seesaw recebe esse nome (gangorra), pois quanto mais pesado for o neutrino right, mais leve será o neutrino left. O ingrediente essencial do Mecanismo Seesaw é a possibilidade de neutrinos terem termos de massa de Majorana. Concluímos então que o mecanismo funciona apenas para neutrinos, uma vez que os demais férmions só podem possuir massas de Dirac. Consequentemente o Mecanismo Seesaw não pode explicar a diferença de 10^2 entre as massas dos quarks top e bottom que, embora não tão grande quanto os 10^6 entre o elétron e seu neutrino, é também um problema em vista da discussão sobre a ordem de grandeza dos acoplamentos de Yukawa[14].

4.2. Mecanismo Seesaw para três famílias

A generalização do mecanismo apresentado para três dimensões é direta até o ponto da construção da lagrangeana

---

[14] A razão entre as massas dos quarks charm e strange é da ordem de 10, enquanto que os quarks up e down possuem a mesma ordem de grandeza. O distanciamento parece aumentar com as famílias. Medições sobre as massas de neutrinos revelarão se o mesmo ocorre no setor leptônico.

de massa. A diferença agora é que os elementos m_R e m_D serão também matrizes, M_R e M_D. Ao invés de termos simplesmente $m_R \gg m_D$, devemos ter que todos os elementos da matriz de massa right sejam muito maiores que os elementos da matriz de massa de Dirac $(M_R)_{ij} \gg (M_D)_{ij}$. Isso garante que os autovalores de M_R sejam muito maiores que os de M_D e o mecanismo de supressão funcione. A principal dificuldade desta generalização é que não podemos mais agora encontrar os autovalores através de uma simples equação de segundo grau, já que os elementos são agora matrizes.

Um ponto que precisa ser esclarecido antes de formularmos matematicamente o mecanismo com a estrutura de famílias é sobre a dimensão das submatrizes de massa citadas acima. Começamos com as submatrizes da diagonal, pois fixadas suas dimensões fixamos M_D por construção. O caso mais simples é o de M_L que deve continuar sendo nula pela mesma razão, termos de massa left não são permitidos sobre as simetrias do Modelo Padrão. Como temos três neutrinos left devemos ter que M_L seja uma matriz nula 3×3. E quanto a M_R? Poder-se-ia pensar que fosse 3×3 correspondendo a um neutrino right super massivo para cada família. Contudo, como argumentamos, neutrinos right não interagem no Modelo Padrão. Portanto podemos incluir um número N arbitrário de neutrinos estéreis, cujo valor só poderá ser fixado através de resultados experimentais. Com isso concluímos que M_R é uma matriz $N\times N$. Notamos que devido ao fato dos neutrinos estéreis não interagirem no Modelo Padrão já podemos considerá-los em seus autoestados de massa, isso é, podemos considerar M_R diagonal. As dimensões de M_L e M_R implicam que M_D é $N\times 3$, se definirmos M_D como o elemento M_{21} da matriz de massa. O elemento M_{12} será claramente o transposto M_D^T de dimensão $3\times N$. Isso significa que os autoestados de massa dos neutrinos ativos recebem contribuições tanto dos autoestados de gauge dos demais neutrinos ativos como também dos neutrinos estéreis.

Estamos finalmente aptos a escrever a matriz de massa M do Mecanismo Seesaw estendido à estrutura de famílias leptônicas

$$M = \begin{pmatrix} 0 & M_D^T \\ M_D & M_R \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Precisamos diagonalizar em blocos esta matriz, isso é, colocá-la na forma

$$M_d = \begin{pmatrix} M_a & 0 \\ 0 & M_e \end{pmatrix} \tag{15}$$

onde adotamos a notação M_a para se referir à matriz de massa dos neutrinos ativos, ou ainda os neutrinos left leves do Modelo Padrão, e M_e para se referir aos neutrinos estéreis, ou ainda os neutrinos right pesados além do Modelo Padrão. Enfatizamos que se conseguirmos colocar a matriz M nesta forma diagonal de blocos não necessariamente teremos que M_a e M_e serão também diagonais.

Para diagonalizar M empregamos um truque que é mais facilmente verificado do que deduzido. Escrevemos a matriz diagonal em blocos M_d em termos da matriz M como

$$M_d = \begin{pmatrix} 1 & -M_D^T M_R^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & M_D^T \\ M_D & M_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -M_R^{-1} M_D & 1 \end{pmatrix}$$

o que nos conduz à

$$M_d = \begin{pmatrix} -M_D^T M_R^{-1} M_D & 0 \\ 0 & M_R \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Identificamos imediamante $M_a = -M_D^T M_R^{-1} M_D$ e $M_e = M_R$. Como discutimos no início desta subseção M_R pode já ser tomada diagonal, pois os neutrinos estéreis não interagem dentro do Modelo Padrão. Vemos então que neste caso em particular M_e já é diagonal. Porém não podemos afirmar o mesmo sobre M_a.

Para avançarmos, precisamos fazer hipóteses adicionais. Consideramos então dois casos particulares que são frequentemente encontrados na literatura.

- **Seesaw Linear**

  Neste caso supomos que existem 3 neutrinos estéreis na natureza e portanto todas as submatrizes de M são 3×3. Supomos também que $M_e = M_R = \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}_D} M_D$, onde $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}_D$ são as escalas dos elementos de M_R e M_D, respectivamente. Identificamos $\mathcal{M}_D \approx 10^2$ GeV como a escala de energia da quebra da simetria eletrofraca pelo Mecanismo de Higgs, uma vez que está associada com os termos de massa de Dirac. Analogamente identificamos $\mathcal{M}$ como a escala de energia de uma nova física além do Modelo Padrão.

  Podemos calcular M_a, lembrando que neste caso M_D é simétrica e diagonal, pois é proporcional à M_R:

  $$M_a = -\frac{\mathcal{M}_D}{\mathcal{M}} M_D$$

  cujos três autovalores são ($i = 1,2,3$ e m_D são os autovalores de M_D)[15]

  $$(m_a)_i = \frac{\mathcal{M}_D}{\mathcal{M}} (m_D)_i. \tag{17}$$

  Vemos então que neste caso as massas dos neutrinos left leves do Modelo Padrão escalam linearmente com as massas m_D que devem ser da ordem das massas dos léptons carregados. Também reconhecemos imediatamente o fator de supressão $\frac{\mathcal{M}_D}{\mathcal{M}}$. Neste modelo temos que as massas dos neutrinos right pesados seguem a mesma hierarquia das massas dos neutrinos left leves.

- **Seesaw Quadrático**

[15] O sinal negativo aparentemente perdido pode ser absorvido por redefinições nas fases dos campos dos neutrinos, pois é um sinal global.

Neste caso mantemos o número de neutrinos estéreis indeterminado, porém exploramos o fato de M_R ser diagonal e escrevemos aproximadamente

$$M_R = \mathcal{M}I$$

onde $\mathcal{M}$ é o mesmo definido no caso anterior. A aproximação consiste na suposição de que as massas de todos os neutrinos right são iguais a $\mathcal{M}$, enquanto que um caso mais realístico seria tomar as massas como da *ordem* de $\mathcal{M}$. Com esta suposição podemos calcular M_a. Lembrando que, ao contrário do caso anterior, M_D não é simétrica:

$$M_a = -\frac{1}{\mathcal{M}}M_D^T M_D$$

cujos autovalores são dados por

$$(m_a)_i = \frac{(m_D)_i^2}{\mathcal{M}}. \tag{18}$$

Neste caso vemos que as massas dos neutrinos left leves do Modelo Padrão escalam com o quadrado das massas m_D e que o fator de supressão é $\frac{1}{\mathcal{M}}$.

Concluímos esta seção com o fato de que previsões para massas de neutrinos a partir do Mecanismo Seesaw dependem do modelo em que o mecanismo está incluído. Isso pode ser esperado devido ao fator de escala de energia $\mathcal{M}$ que introduzimos para os neutrinos right pesados. Diferentes Teorias de Grande Unificação podem prever diferentes valores para $\mathcal{M}$. Diferentes teorias podem também gerar um Mecanismo Seesaw em diferentes ordens de perturbação, isso é, tree-level ou loop-level. Todos esses fatores, além do modelo específico do Mecanismo Seesaw incluso na dada teoria, afetam as previsões para as massas dos neutrinos. Portanto o Mecanismo Seesaw deve ser encarado como uma espécie de guia para possíveis massas de neutrinos, ao invés de um modelo com rigoroso poder preditivo. O modo mais rigoroso de se falar sobre o valor das massas dos neutrinos é através de previsões feitas a partir dos ângulos de mistura presentes na matriz PMNS. Tornamo-nos agora a esta questão.

5. MISTURA E OSCILAÇÃO DE NEUTRINOS

Iremos retomar a discussão iniciada na seção sobre a fenomenologia de SGW. Estamos mais interessados na oscilação de neutrinos, mas novamente o setor hadrônico oferece um ótimo ponto de partida por possuir muitas semelhanças com a oscilação de neutrinos. Começaremos então pela matriz CKM. Todas as conclusões teóricas alcançadas para quarks são automaticamente válidas para a parte CKM da matriz PMNS. Nosso objetivo será encontrar uma quantidade relacionada à violação de CP que seja independente de redefinições de fases dos campos fermiônicos. Forneceremos então um modo prático e rápido de encontrar tal quantidade.

5.1. Mistura de quarks

Na seção 2, quando discutimos a mistura de famílias, argumentamos que esse fenômeno se devia à arbitrariedade das constantes de Yukawa, levando a matrizes de massa que não são a identidade, portanto à distinção entre autoestados de gauge e massa. Note que se possuíssemos uma matriz de massa igual à identidade, mas a outra arbitrária, não teríamos mais mistura entre famílias, pois poderíamos simplesmente diagonalizar a segunda matriz de massa. Essa mesma transformação de base poderia ser feita nos primeiros quarks sem afetar sua matriz de massa. Por exemplo

$$\begin{aligned} d_a = T_{ab}d'_b &\Rightarrow D^d = TM^dT^\dagger \\ u_a = T_{ab}u'_b &\Rightarrow D^u = TM^UT^\dagger = I. \end{aligned}$$

Substituindo no termo de corrente nada muda

$$\bar{u}_L\gamma^\mu d_L = \bar{u}'_L T^\dagger \gamma^\mu T d'_L = \bar{u}'_L\gamma^\mu d'_L.$$

Vemos com o exemplo acima que a questão de mistura de famílias está relacionada à diagonalização simultânea das matrizes de massa M^u e M^d dos quarks tipo up e down, respectivamente. Somos motivados então a estudar o comutador

$$[M^u, M^d] = iC,$$

onde o fator i foi introduzido meramente por conveniência futura. Se utilizarmos as matrizes diagonais

$$D^u = SM^US^\dagger \quad \text{e} \quad D^d = TM^dT^\dagger$$

chegamos à

$$C = -iS^\dagger[D^u, V_{CKM}D^dV_{CKM}^\dagger]S = -i[M^u, M^d] \tag{19}$$

que nos mostra que, em geral, não é possível diagonalizar simultaneamente as matrizes de massa dos quarks tipo-up e down. Conseguiríamos isso apenas se $V_{CKM}D^dV_{CKM}^\dagger$ for uma matriz diagonal, pois duas matrizes diagonais quaisquer sempre comutam. O que não podemos garantir é que V_{CKM} comuta com D^d. Vamos ver então quais são as condições para que V_{CKM} e D^d comutem. Para isso iremos utilizar a matriz CKM em sua forma geral, independente de parametrização, que escrevemos abaixo para facilitar a visualização:

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}. \tag{20}$$

O comutador entre a matriz CKM e a matriz de massa diagonal dos quarks tipo down é então:

$$[D^d, V_{CKM}] = \begin{pmatrix} 0 & (m_d - m_s)V_{us} & (m_d - m_b)V_{ub} \\ (m_s - m_d)V_{cd} & 0 & (m_s - m_b)V_{cb} \\ (m_b - m_d)V_{td} & (m_b - m_s)V_{ts} & 0 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

As matrizes comutam apenas se os quarks tipo down forem degenerados em massa

$$m_d = m_s = m_b$$

que é justamente o que sabíamos, pois se os todos os 3 quarks forem degenerados em massa, então a matriz de massa é proporcional à identidade. Portanto recuperamos de um modo mais geral a conclusão encontrada no exemplo que motivou essa discussão.

Tendo obtido a condição para a mistura de famílias a partir do estudo do comutador $[M^u, M^d]$, é natural nos perguntarmos se também podemos obter a condição para violação de CP. Como já vimos na seção 2, a violação de CP só é possível se a matriz V_{CKM} possuir uma fase e não for hermitiana. Podemos imaginar então que a violação de CP está embutida na parte imaginária de alguma grandeza relacionada à V_{CKM}. Como desejamos quantificar a violação de CP (isso é, obter um número) e fazê-lo independente de parametrização, calculamos o determinante do comutador $[M^u, M^d]$. Isso é mais facilmente realizado utilizando a expressão do meio da equação da (19). Após algum trabalho encontramos:

$$\det C = -2FF'\,\mathrm{Im}[V_{ij}V_{kl}V^*_{kj}V^*_{il}], \tag{22}$$

onde

$$F = \frac{1}{m_t^3}(m_t - m_u)(m_t - m_c)(m_c - m_u) \tag{23}$$

e

$$F' = \frac{1}{m_b^3}(m_b - m_d)(m_b - m_s)(m_s - m_d). \tag{24}$$

A grandeza

$$J = \mathrm{Im}[V_{ij}V_{kl}V^*_{kj}V^*_{il}]. \tag{25}$$

é conhecida como **Invariante de Jarlskog** e é precisamente a quantificação da violação de CP invariante por redefinições de fase que buscávamos. *Importante*: na equação (25) acima não está em vigor a convenção da soma! Se não vale a convenção da soma, vemos que existem 9 maneiras diferentes de calcular J, porém a unitariedade da matriz CKM garante que os resultados diferem apenas por um sinal. Podemos *construir* J facilmente seguindo os seguintes passos: (*i*) escolha um elemento V_{ij} e elimine da matriz sua linha i e coluna j, (*ii*) tome o complexo conjugado dos elementos fora da diagonal da matriz 2×2 que resta, (*iii*) multiplique os quatro elementos e tome sua parte imaginária. O resultado será uma quantidade invariante por redefinições de fases. Por exemplo, se eliminarmos a terceira linha e terceira coluna, obtemos:

$$\begin{pmatrix} V_{ud} & V^*_{us} \\ V^*_{cd} & V_{cs} \end{pmatrix} \Longrightarrow J = \mathrm{Im}(V_{ud}V_{cs}V^*_{us}V^*_{cd}).$$

Na parametrização padrão de (6) temos para o exemplo acima:

$$J = s_{12}c_{12}s_{23}c_{23}s_{13}c^2_{13}\sin\delta. \tag{26}$$

Enfatizamos que a utilidade de J é que seu módulo nos possibilita quantificar a violação de CP independentemente de convenção. A forma de J pode depender da parametrização utilizada para a matriz CKM, porém as conclusões são independentes. Por isso podemos utilizar a expressão obtida acima na parametrização padrão para estudar casos especiais. Apresentamos a seguir algumas formas particulares de mistura.

5.1.1. *Tipos especiais de mistura*

Começamos notando que a violação de CP desaparece se $\theta_{ij} = 0, \frac{\pi}{2}$, ou se $\delta = 0, \pi$. As condições sobre os ângulos de Euler implicam que ao menos 1 elemento da matriz CKM se anula, enquanto que as condições para a fase de violação eliminam completamente a parte imaginária da matriz CKM. Se imaginarmos que um dos ângulos de oscilação é muito pequeno se comparado aos outros dois, então podemos desprezá-lo e escrever a matriz CKM em função apenas dos outros dois ângulos e a fase. Se tivermos $\theta_{13} = 0$, por exemplo, temos:

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12}c_{23} & c_{12}c_{23} & s_{23} \\ s_{12}s_{23} & -c_{12}s_{23} & c_{23} \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Este esquema de mistura é conhecido como **bilarge mixing**.

Do mesmo modo que minimizamos a violação de CP podemos maximizá-la através de (26), o resultado é

$$J = \frac{1}{6\sqrt{3}} \tag{28}$$

que corresponde a $\theta_{12} = \theta_{23} = \pi/4$, $\theta_{13} = \arcsin(1/\sqrt{3})$ e $\delta = \pi/2$. Com esses parâmetros a matriz CKM assume a forma

$$U_{CKM} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^{\pm i2\pi/3} & e^{\mp i2\pi/3} & 1 \\ e^{\mp i2\pi/3} & e^{\pm i2\pi/3} & 1 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Note que todos os coeficientes possuem módulo $1/3$, portanto há uma mistura máxima de todas as três famílias. Este esquema de mistura é conhecido como **trimaximal mixing**.

Encerramos com o esquema conhecido como **tribimax-**

imal mixing. Se trata de uma combinação dos dois casos vistos acima, com $\theta_{13} = 0$, levando à matriz em (27). Além disso há uma mistura trimáxima do autoestado de gauge ν_2 e uma mistura bimáxima do autoestado de gauge ν_3:

$$|V_{CKM}|^2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Como consequência de $\theta_{13} = 0$ enfatizamos que não temos violação de CP nesse esquema de mistura. Este tipo de mistura foi bastante considerado como a possível forma da parte de CKM da matriz PMNS. Porém recentemente com as medições de θ_{13} este esquema foi descartado.

Terminamos enfatizando o que toda a análise sobre violação de CP feita até aqui, nesta seção, se refere apenas à fase de violação de CP de Dirac presente na matriz CKM. A observação de violação de CP em processos hadrônicos descarta qualquer modelo de CKM com $J = 0$. Contudo neutrinos podem ser férmions de Majorana e, neste caso, como vimos na seção 3, a matriz PMNS é da forma $V_{PMNS} = V^{\nu}_{CKM}P$, onde P é a matriz diagonal de fases de Majorana. Todas as conclusões sobre violação de CP para neutrinos são válidas apenas para a parte V^{ν}_{CKM} de V_{PMNS}.

5.2. Oscilação de neutrinos

Vamos encerrar este trabalho apresentando os principais resultados teóricos e experimentais da oscilação de neutrinos. Primeiramente desenvolveremos a teoria de oscilações no vácuo e ao final apresentaremos os resultados experimentais que temos atualmente.

5.2.1. *Teoria de oscilação de neutrinos no vácuo*

Iremos apresentar a dedução padrão das probabilidades de oscilação de neutrinos. Os resultados podem ser obtidos mais rigorosamente através de outros métodos, como o de pacote de ondas, ao custo de maiores complicações técnicas que podem obscurecer a compreensão em uma primeira abordagem. Veremos adiante que algumas suposições precisarão ser feitas no método aqui apresentado que não são necessárias em uma abordagem mais rigorosa. Os resultados finais são os mesmos.

A oscilação de neutrinos significa que um dado autoestado de sabor de neutrino ν_α, produzido em algum processo de corrente carregada, ao viajar ao longo de uma distância L entre a fonte e detector, pode ser detectado em outro autoestado de sabor ν_β. O que buscamos calcular são as probabilidades de detecção de cada um dos três sabores, dado um sabor inicial. Trabalharemos no referencial onde o detector está em repouso. Podemos expandir o autoestado de sabor ν_α na base dos autoestados de massa como

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_i U^*_{\alpha i}\,|\nu_i, p_i\rangle, \tag{31}$$

onde $U \equiv V_{PMNS} = V^{\nu}_{CKM}P$ por simplicidade de notação. A amplitude de probabilidade de detecção de um estado de sabor ν_β é simplesmente

$$\langle \nu_\beta|\nu_\alpha\rangle = \sum_i U^*_{\alpha i}U_{\beta i}e^{-iE_it+ip_iL}, \tag{32}$$

onde usamos a expansão (31). A exponencial representa uma propagação de onda plana dos autoestados de massa no vácuo. Antes de prosseguirmos, notamos que as fases de Majorana são canceladas na equação (32). Esta é a razão pela qual experimentos de oscilação não são capazes de determinar a natureza dos neutrinos. Por conta disso iremos substituir U por V no desenvolvimento a seguir para frisar que os resultados se referem à parte CKM da matriz PMNS.

Para avançarmos faremos uma suposição, consideraremos neutrinos ultra relativísticos. Podemos fazer isso, pois este é o caso de todos os experimentos de oscilação[16]. Neste caso podemos fazer

$$\begin{aligned} m_i^2 &= E_i^2 - p_i^2 \\ &= (E_i + p_i)(E_i - p_i) \\ &\approx 2E(E_i - p_i), \end{aligned}$$

logo a diferença entre a energia e momento é aproximadamente

$$E_i - p_i \approx \frac{m_i^2}{2E}. \tag{33}$$

Substituindo este resultado em (32) encontramos

$$\langle \nu_\beta|\nu_\alpha\rangle = \sum_i V^*_{\alpha i}V_{\beta i}\exp\left[-iE_it + iE_iL - i\frac{m_i^2}{2E}L\right].$$

Outra consequência da aproximação ultra relativística é que podemos escrever $t \approx L$. Isso é particularmente conveniente, pois o que é experimentalmente medido é a distância percorrida pelo neutrino. Com isso vemos que os dois primeiros termos da exponencial se cancelam

$$\langle \nu_\beta|\nu_\alpha\rangle = \sum_i V^*_{\alpha i}V_{\beta i}\exp\left[-i\frac{m_i^2}{2E}L\right]. \tag{34}$$

A probabilidade é dada pelo módulo quadrado de (34). Teremos um termo diagonal e um termo de interferência para $i \neq j$, responsável pela oscilação

$$|\langle \nu_\beta|\nu_\alpha\rangle|^2 = \sum_i |V_{\alpha i}|^2|V_{\beta i}|^2 + 2\sum_{i>j} V_{\alpha j}V^*_{\beta j}V^*_{\alpha i}V_{\beta i}\exp\left[-i\frac{\Delta m^2_{ij}}{2E}L\right], \tag{35}$$

[16] No formalismo de pacotes de ondas é possível mostrar que a velocidade de grupo é próxima de c.

onde $\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$. Vemos finalmente neste resultado como que o fenômeno de oscilação depende das massas dos neutrinos.

Notamos a presença do invariante de Jarlskog nas equações acima. Como sabemos ele está relacionado à violação de CP. Podemos obter este resultado também aqui se calcularmos a probabilidade de oscilação para os anti-neutrinos. O cálculo é exatamente o mesmo, a menos de conjugações de carga. O resultado encontrado é

$$|\langle\bar{\nu}_\beta|\bar{\nu}_\alpha\rangle|^2 = \sum_i |V_{\alpha i}|^2|V_{\beta i}|^2 + 2\sum_{i>j} V_{\alpha j}^* V_{\beta j} V_{\alpha i} V_{\beta i}^* \exp\left[i\frac{\Delta m_{ij}^2}{2E}L\right]. \tag{36}$$

A diferença $\mathcal{A}_{CP}^{\beta\alpha}$ entre (36) e (35) fornece uma medida de violação de CP entre os sabores β e α. Basta notar que esta é a diferença entre um número e seu complexo conjugado, portanto é igual ao dobro de sua parte imaginária

$$\mathcal{A}_{CP}^{\beta\alpha} = 4\sum_{i>j} \mathrm{Im}[V_{\alpha i}V_{\beta j}V_{\alpha j}^*V_{\beta i}^*]\sin\left(\frac{\Delta m_{ij}^2}{2E}L\right). \tag{37}$$

Portanto, se o Invariante de Jarlskog for nulo, não há violação de CP no processo. A outra possibilidade é caso os neutrinos em questão sejam degenerados em massa.

5.2.2. *Resultados experimentais*

Abaixo listamos as medidas experimentais mais recentes sobre os ângulos de oscilação e massa de neutrinos. Estas medidas podem ser encontradas no PDG e no *Review of Particle Physics, Nakamura et al. 2010.*

- $\sin^2(2\theta_{12}) = 0,846 \pm 0,021$. Esta medida corresponde às observações solares.
- $\sin^2(2\theta_{23}) > 0,92$ com 90% de confiança. Esta medida corresponde às observações atmosféricas.
- $\sin^2(2\theta_{13}) = 0,092 \pm 0,016$. Esta medida foi realizada pelo Daya Bay[17] em 2012. Esta medida descartou o esquema de mistura tribimáxima.
- $\Delta m_{21}^2 \equiv \Delta m_{SOL}^2 = (7,53 \pm 0,18) \times 10^{-5}\mathrm{eV}^2$.
- $|\Delta m_{32}^2| \approx |\Delta m_{13}^2| \equiv \Delta m_{atm}^2 = (2,44 \pm 0,06) \times 10^{-3}\mathrm{eV}^2$. O sinal destas diferenças de massa não é conhecido.

Faremos agora alguns comentários sobre estas medidas. Primeiramente com a exclusão do esquema de mistura tribimáximo é possível que haja violação de CP a lá Dirac no setor leptônico. Para confirmar isso é necessário uma medida da fase δ da parte CKM da matriz PMNS. Lembramos que se $\delta = 0, \pi$ então não há violação de CP através da fase de Dirac, embora seja ainda possível através das fases de Majorana, caso tal seja a natureza dos neutrinos.

Em segundo lugar observamos que apenas duas diferenças entre quadrados de massa são independentes, pois $\Delta m_{21}^2 + \Delta m_{32}^2 + \Delta m_{13}^2 = 0$. Sabemos que a primeira diferença possui sinal positivo, portanto $m_2 > m_1$. Porém não sabemos o sinal de Δm_{13}^2, sabemos apenas que $|\Delta m_{13}^2| > |\Delta m_{21}^2|$. Temos então duas possibilidades: (*i*) $\Delta m_{13}^2 < 0 \Rightarrow m_3 > m_1$, o que nos leva à hierarquia de massa $m_3 > m_2 > m_1$, ou (*ii*) $\Delta m_{13}^2 > 0 \Rightarrow m_1 > m_3$, que leva à hierarquia $m_2 > m_1 > m_3$. A primeira possibilidade é chamada de **hierarquia normal** e é aquela que ocorre com os quarks, enquanto que a segunda é conhecida como **hierarquia invertida**.

Concluímos enfatizando que estes resultados são referentes apenas à matriz V_{CKM}^{ν} que compõe U_{PMNS} e que os experimentos de oscilação são insensíveis à natureza dos neutrinos. Isso poderia ser determinado através do famoso *neutrinoless double* β *decay*. A observação deste decaimento permitiria concluir definitivamente que os neutrinos são férmions de Majorana, porém é um processo altamente suprimido, caso exista.

6. COMENTÁRIOS FINAIS

Neutrinos oferecem desafios teóricos e experimentais que podem avançar nossa compreensão sobre o universo. Neutrinos são relevantes para o entendimento da unificação das interações, evolução do universo e astrofísica das estrelas. A partir do que foi aqui discutido, o leitor deverá estar pronto para compreender boa parte dos trabalhos atuais em física de neutrinos no domínio da física de partículas e interações fundamentais, em especial model-building. Frequentemente são propostos modelos de extenção do MP envolvendo simetrias discretas, afim de deduzir a forma das matrizes de mistura, ou acomodar um tipo mais refinado de Mecanismo Seesaw, ou relacionar a estrutura de sabores de ambos setores leptônico e hadrônico. Estes modelos naturalmente devem ser renormalizáveis e unitários. Estas características estão presentes no modelo SGW, mas devem ser verificadas para cada proposta de extensão. Essa tarefa envolveria ferramentas mais avançadas de TQC e por isso não foram discutidas aqui, mas estão presentes em livros textos padrões sobre o assunto. Outro tópico relevante que não foi abordado aqui é a oscilação de neutrinos na matéria. Este é um estudo importante, pois em muitos experimentos o neutrino é detectado após viajar através da matéria. A matéria também pode ser usada para amplificar as amplitudes de oscilação de neutrinos e por isso muitos experimentos são realizados no subterrâneo. Uma introdução aos efeitos da interação neutrino-matéria nas oscilações de neutrinos pode ser encontrado na referência [3].

Atualmente é previsto, no Japão, o ínicio da construção do Hyper-Kamiokande em 2018, com início dos experimentos para 2025. Hyper-Kamiokande será um experimento 10 vezes maior que o atual Super-Kamiokande e nos fornecerá resultados importantes e mais precisos sobre a oscilação de neutrinos. Outros futuros experimentos, como LBNE (Long-Baseline Neutrino Experiment) no Fermilab, previsto para começar em 2022, visam também determinar a hierarquia das massas de neutrinos. Resultados do novo LHC a 14 TeV poderão favorecer certos modelos a outros, caso no-

[17] medidas também foram feitas pelo RENO e Double Chooz

vas partículas previstas por teorias de unificação sejam observadas, como supersimetria, por exemplo. Diversos experimentos, como o COBRA na Itália, buscam especificamente o neutrinoless double β decay, cuja observação garantiria a natureza de Majorana aos neutrinos e favoreceria extensões com See-Saw, que só é possível se neutrinos forem férmions de Majorana. O resultado importante mais recente sobre neutrinos já foi incluído no texto, a medição do ângulo de mistura θ_{13}, que descartou o esquema de mistura tribimáxima no setor leptônico. Devemos então aguardar novos resultados de todos os experimentos em construção e que estão atualmente em tomada de dados para que possamos decidir qual caminho tomar na construção de modelos e teorias.

[1] *Gauge Theories in Particle Physics, vol 2*, Aitchison & Hey

[2] *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*, Cheng & Li

[3] *Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics*, Giunti & Kim

[4] *Review of Modern Physics* **59**, 671, Bilenky, S. M. & Petcov, S. T.

[5] *Physical Review Letters* **55** (10), Cecilia Jarlskog

[6] *Journal of Physics G* **37** 7A, Nakamura et al.

[7] *2014 Review of Particle Physics*, Olive et al. (Particle Data Group).

Pedidos de cópias desta publicação devem ser enviados aos autores ou ao:

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Área de Publicações
Rua Dr. Xavier Sigaud, 150 – $4^{\underline{o}}$ andar
22290-180 – Rio de Janeiro, RJ
Brasil
E-mail: alinecd@cbpf.br/valeria@cbpf.br
http://portal.cbpf.br/publicacoes-do-cbpf

Requests for copies of these reports should be addressed to:

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Área de Publicações
Rua Dr. Xavier Sigaud, 150 – $4^{\underline{o}}$ andar
22290-180 – Rio de Janeiro, RJ
Brazil
E-mail: alinecd@cbpf.br/valeria@cbpf.br
http://portal.cbpf.br/publicacoes-do-cbpf