CBPF-MO-002/07

Formalismo Hamiltoniano e transformações canônicas em mecânica clássica

A. A. Deriglazov[1], e J. G. Filgueiras.

Dept. de Matemática, ICE, Universidade Federal de Juiz de Fora,
MG, Brasil
e
LAFEX - CBPF/MCT, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

[1]alexei.deriglazov@ufjf.edu.br Licenciado do Dept. Math. Phys., Tomsk Polytechnical University, Tomsk, Russia.

Prefácio

O formalismo Hamiltoniano da mecânica clássica forma uma base para vários métodos matemáticos poderosos, os quais são utilizados na física teórica e na física-matemática [1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 13]. Nestas notas colocamos os fatos básicos do formalismo Hamiltoniano, que podem ser úteis para estudantes de graduação que pretendem trabalhar em uma das diversas áreas da física teórica. Na exposição do material tentamos, quando possível, trocar motivações intuitivas e "folclore científico" por provas exatas ou por cálculos diretos. A maior parte dos exemplos e exercícios são uma mera ilustração do formalismo aqui discutido. O material pode ser utilizado como um complemento para os livros-texto padrão de mecânica clássica [14, 15, 16]. O únicos pré-requisitos são conhecimentos básicos em mecânica Lagrangeana e álgebra linear.

No tratamento das teorias clássica e quântica, as formulações Hamiltoniana e Lagrangeana têm suas vantagens e desvantagens. Como nossa ênfase é na mecânica Hamiltoniana, mencionaremos alguns argumentos em seu favor.

• Existe uma certa "democracia" entre as variáveis de posição e velocidade na natureza: para predizermos um estado futuro de um dado sistema clássico, a única coisa que precisamos saber sobre suas partes constituintes são sua velocidade e posição em um instante de tempo inicial, as quais revelam-se completamente *independentes* uma da outra. Na formulação Lagrangeana esta democracia, apesar de ser representada nas condições iniciais, não é explícita na dinâmica do sistema, já que apenas as variáveis de posição são tratadas como independentes nas equações de Lagrange. Formulação Hamiltoniana reestabelece a democracia, tratando as posições e as velocidades como coordenadas independentes do espaço de fase, utilizado para a descrição do sistema.

• De acordo com a quantização canônica, a construção da formulação Hamiltoniana de um dado sistema clássico é o primeiro passo necessário na passagem para a teoria quântica correspondente. É suficiente notarmos que a evolução de um sistema quântico no quadro de Heisenberg é obtida a partir das equações de Hamilton junto com a substituição das variáveis do espaço de fase pelos operadores correspondentes. Assim como os comutadores dos operadores refletem à álgebra dos parênteses de Poisson das variáveis do espaço de fase.

- A forma convencional de se descrever uma teoria relativística é formulá-la em termos de uma Lagrangeana singular (a singularidade é o preço a se pagar pela invariância relativística manifesta da formulação). Isto implica em uma estrutura mais complicada das equações de Lagrange, que podem envolver tanto equações diferenciais de primeira e de segunda ordem, como equações algébricas. Além disso, podem ser presentes identidades entre as equações, o que implica em uma arbitrariedade funcional nas soluções. Deve ser mencionado que atualmente as teorias de campo (eletrodinâmica, teorias de calibre, modelo padrão, teoria de cordas, ...) são todas deste tipo. Neste caso, a formulação Hamiltoniana nos dá uma interpretação geométrica mais clara da dinâmica do sistema [8]: todas as soluções ficam sobre uma superfície no espaço de fase, enquanto a arbitrariedade acima mencionada é removida postulando classes de trajetórias equivalentes. Então os observáveis do sistema são representados por funções definidas sobre as classes. O procedimento para a investigação deste quadro é baseado no uso de coordenadas especiais adaptadas com a superfície, que requerem um desenvolvimento detalhado da teoria das transformações canônicas. Contudo, a formulação Hamiltoniana nos dá uma interpretação física auto-consistente de uma teoria singular, assim como a base para diversas prescrições e métodos para a quantização de teorias particulares [12].

Aproveitamos ainda para agradecer ao Prof. Dr. J. A. Helãyel-Neto pelo apoio, sem o qual este trabalho não seria possível. Os autores agradecem ainda ao CNPq e à FAPERJ pelo apoio.

Sumário

Capítulo 1

Formalismo Hamiltoniano

> A física teórica tipicamente responde a perguntas do tipo: como se chama a fruta de cor laranja? Mas leva um bom tempo para perceber isto.

1.1 Derivação das equações Hamiltonianas

A formulação Lagrangeana da mecânica clássica é baseada nas equações de movimento de Euler-Lagrange. Elas representam um sistema de equações diferenciais de segunda ordem[1], escrito para um conjunto de variáveis que descrevem a *posição* de um sistema físico. A formulação Hamiltoniana sugere uma descrição equivalente em termos de um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, escrito para variáveis que determinam a *posição* e a *velocidade* do sistema. O objetivo desta seção é estabelecer a equivalência entre as duas descrições.

[1] O mesmo é válido na teoria de campos. Em particular, enquanto as equações de Maxwell são equações de primeira ordem, a formulação da eletrodinâmica em termos do 4-potencial A^μ implica em equações de segunda ordem.

1.1.1 Noções preliminares

As equações de Hamilton podem ser obtidas a partir das equações de Lagrange pela aplicação sucessiva de dois procedimentos bem conhecidos da teoria das equações diferenciais: a redução da ordem do sistema e a mudança de variáveis. Ambos procedimentos são utilizados para a obtenção de um sistema de equações equivalente a um dado sistema inicial. Portanto, relembraremos abaixo alguns fatos elementares da teoria das equações diferenciais ordinárias, que serão utilizados adiante.

1) *Redução da ordem de um sistema.* Um sistema de segunda ordem de n equações para n variáveis independentes $q^a(\tau)$ (vamos usar a notação $\dot{q} \equiv \frac{dq}{d\tau}$)

$$F^a(q^a, \dot{q}^b, \ddot{q}^c) = 0, \tag{1.1}$$

é equivalente a um sistema de primeira ordem de $2n$ equações para $2n$ variáveis independentes $q^a,\ v^b$

$$\dot{q}^a = v^a, \qquad F^a(q^a, v^b, \dot{v}^c) = 0, \tag{1.2}$$

no seguinte sentido:

a) Se $q^a(\tau)$ é solução de (1.1), então $q^a(\tau), v^a(\tau) \equiv \dot{q}^a(\tau)$ é solução de (1.2);

b) Se $q^a(\tau), v^a(\tau)$ é solução de (1.2), então $q^a(\tau)$ é solução de (1.1).

Em outras palavras, existe uma correspondência bijetiva entre as soluções dos sistemas. A passagem de (1.1) para (1.2) é dita a redução da ordem do sistema.

2) *Forma normal de um sistema.* Como vamos usar a forma normal somente no caso de um sistema de primeira ordem, consideremos o sistema

$$G^i(z^j, \dot{z}^k) = 0. \tag{1.3}$$

Dizemos que o sistema está na forma normal se todas as equações podem ser resolvidas algebricamente com respeito às derivadas de ordem mais alta, no caso:

$$\dot{z}^i = g^i(z^j). \tag{1.4}$$

De acordo com a teoria das equações diferenciais, um sistema normal possui propriedades bem estabelecidas. Em particular, dadas algumas restrições sobre as funções g^i, o teorema de existência e unicidade de soluções é válido: sejam z_0^i dados números. Então existe uma solução do sistema (1.4), e é única, a qual obedece às condições iniciais: $z^i(0) = z_0^i$. Fisicamente isto implica *a evolução causal do sistema e a possibilidade da interpretação de (1.3) como as equações de movimento para um dado sistema de mecânica clássica.*

3) *Mudança de variáveis.* Sejam $z'^i(z^j)$ um dado conjunto de funções, com a seguinte propriedade

$$\det \frac{\partial z'^i}{\partial z^j} \neq 0. \tag{1.5}$$

Partindo da parametrização original z^i, usada em (1.3), as funções $z'^i(z^j)$ podem ser utilizadas para definirmos uma nova parametrização z'^i, de forma que

$$z'^i = z'^i(z^j). \tag{1.6}$$

Aqui utilizaremos o mesmo símbolo z'^i para denotar a função e a nova coordenada, o que não deve causar confusão. De acordo com a condição (1.5), a *mudança de variáveis* $z^i \longrightarrow z'^i$ é invertível: as expressões (1.6) podem ser resolvidas algebricamente com relação a z^i, com resultado

$$z^i = z^i(z'^j). \tag{1.7}$$

Com as funções $z'^i(z^j)$ escolhidas, podemos usar o novo sistema de coordenadas para analisarmos o sistema (1.3). Ou seja

$$G^i(z^j(z'^k), \dot{z}^j(z'^k)) = 0, \tag{1.8}$$

onde $\dot{z}^j(z'^k) = \frac{\partial z^i}{\partial z'^k}\dot{z}'^k$, é equivalente ao sistema inicial (1.3): se $z^i(\tau)$ obedece ao sistema (1.3), então $z'^i(\tau) \equiv z'^i(z^j(\tau))$ obedece a (1.8), e vice-versa.

Adiante será usada a seguinte notação

$$G^i(z^j, \dot{z}^j)\Big|_{z=z(z')} = 0, \tag{1.9}$$

no lugar de (1.8), já que algum cuidado deve ser tomado no uso da substituição, veja, por exemplo as Eqs. (1.25), (1.26) adiante.

1.1.2 Das equações de Lagrange para as equações Hamiltonianas

Sejam q^a, $a = 1, 2, \ldots, n$ as coordenadas generalizadas no espaço de configurações de um dado sistema mecânico, com função de Lagrange $L(q^a, \dot{q}^a)$, cuja dinâmica é governada pelas equações de Lagrange

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}^a}\right) - \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial q^a} = 0. \tag{1.10}$$

Nesta subseção mostraremos que o sistema de equações de Euler-Lagrange é equivalente a um outro sistema, conhecido como *sistema Hamiltoniano*. Aqui nossa exposição é mais detalhada se comparada com outros livros-texto. Isto é feito por duas razões: em primeiro lugar, a equivalência, que representa um dos fatos básicos mais importantes da mecânica clássica, é explícita em nossa discussão. E, em segundo lugar, nosso tratamento torna-se útil para o caso de Lagrangeanas singulares, revelando a estrutura algébrica do formalismo Hamiltoniano para estes sistemas [27].

Aqui, fazemos a suposição de que a teoria seja não-singular, ou seja, que obedece à condição

$$\det \frac{\partial^2 L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b} \neq 0. \tag{1.11}$$

Calculando a derivada com relação a τ na Eq. (1.10), esta pode ser reescrita na forma

$$M_{ab}\ddot{q}^b = K_a, \tag{1.12}$$

onde[2]

$$M_{ab}(q,\dot{q}) \equiv \frac{\partial^2 L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b}, \quad K_a(q,\dot{q}) \equiv \frac{\partial L}{\partial q^a} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial q^b}\dot{q}^b. \tag{1.13}$$

Nosso objetivo agora é *reescrevermos o sistema (1.12) como um sistema de primeira ordem na forma normal, o qual nos dá basicamente a formulação Hamiltoniana da mecânica.* Começaremos com a discussão do sistema de primeira ordem. Aqui a discussão será pouco formal, se comparada com a da subseção 1.1.1. Introduzamos o *espaço de configurações-velocidades*, parametrizado pelas coordenadas *independentes* q^a, v^b (algumas vezes, as coordenadas v^b são ditas *velocidades generalizadas*). Definindo a evolução do sistema neste espaço por meio das equações

$$M_{ab}\ddot{q}^b = K_a, \qquad v^a = \dot{q}^a, \tag{1.14}$$

onde $M(q,\dot{q})$ e $K(q,\dot{q})$ são dados pela Eq. (1.13). Assim a evolução $q^a(\tau)$ é dada pelas equações de Lagrange (1.12), enquanto $v^a(\tau)$ acompanha $\dot{q}^a(\tau)$: $v^a(\tau)$ é determinada a partir das $q^a(\tau)$ por meio de equações algébricas. Evidentemente, os sistemas (1.12) e (1.14) são equivalentes. Podemos substituir as equações do sistema umas nas outras, de forma a obtermos um sistema equivalente. A substituição da segunda equação de (1.14) na primeira nos dá o sistema de primeira ordem

$$\dot{q}^a = v^a, \qquad \bar{M}_{ab}\dot{v}^b = \bar{K}_a, \tag{1.15}$$

onde $\bar{M}(q,v), \bar{K}(q,v)$ são obtidos a partir de (1.13) trocando-se $\dot{q} \to v$, por exemplo,

$$\bar{M}_{ab} = \bar{M}_{ab}(q,v) \equiv M_{ab}(q,\dot{q})|_{\dot{q}^a \to v^a} = \frac{\partial L(q,v)}{\partial v^a \partial v^b}. \tag{1.16}$$

[2] Em todo o material, a menos de menção em contrário, utilizamos a convenção de soma, ou seja, o sinal de somatório é omitido quando temos dois índices repetidos.

A seguinte notação será utilizada a seguir: quantidades definidas no espaço de configurações indicaremos seus argumentos na forma manifesta: $A(q,\dot{q})$. Onde os argumentos de uma quantidade não são indicados, adotaremos as seguintes convenções: símbolos com barra denotam funções definidas no espaço de configurações-velocidades, $\bar{A} \equiv \bar{A}(q^a, v^b)$. Enquanto símbolos sem a barra indicam funções definidas no espaço de fase (veja adiante):

$$A = A(q^a, p_b) \equiv \bar{A}(q^a, v^b)|_{v^b \to v^b(q^a, p_b)}. \tag{1.17}$$

Exercício. Para evitar confusão, observe que $\frac{\partial A(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}}\Big|_{\dot{q}\to v} = \frac{\partial \bar{A}(q,v)}{\partial v}$, mas $\frac{\partial \bar{A}(q,v)}{\partial v}\Big|_{v\to p} \neq \frac{\partial A(q,p)}{\partial p}$, isto é, $\bar{A}$ e A são funções diferentes de seus argumentos.

O sistema (1.15) ainda não está na forma normal. Podemos procurar uma nova parametrização do espaço de configurações-velocidades $q(q', v')$, $v(q', v')$ tal que o sistema adquira a forma normal[3] para as novas variáveis q', v'. Torna-se suficiente fazermos uma mudança da forma

$$\begin{pmatrix} q^a \\ v^b \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} q'^a \\ p_b \end{pmatrix}, \quad \textit{onde} \quad q'^a \equiv q^a, \quad p_b = p_b(q^a, v^b), \tag{1.18}$$

com funções apropriadas $p_b(q,v)$ tais que $\det \frac{\partial p_b(q,v)}{\partial v^c} \neq 0$, a última condição garante a invertibilidade da transformação. Denotemos a transformação inversa como $v^a = v^a(q,p)$. De acordo com a subseção 1.1.1, a dinâmica para as novas variáveis é obtida de (1.15) pela substituição $v \to v(q,p)$. Temos

$$\begin{aligned} \dot{q}^a &= v^a(q,p), \\ \bar{M}_{ab}\big|_{v(q,p)} \frac{\partial v^b}{\partial p_c}\dot{p}_c &= \bar{K}_a\big|_{v(q,p)} - \bar{M}_{ab}\big|_{v(q,p)} \frac{\partial v^b}{\partial q^c} v^c(q,p). \end{aligned} \tag{1.19}$$

Este sistema estará na forma normal se $v(q,p)$ obedece a

$$\frac{\partial v^b(q,p)}{\partial p_c} = \widetilde{\bar{M}}^{bc}(q,v)\bigg|_{v(q,p)}, \tag{1.20}$$

[3] De fato, a forma normal do sistema pode ser obtida pela contração da segunda equação de (1.15) com a matriz inversa $\widetilde{\bar{M}}$ para $\bar{M}$: $\dot{v}^a = \widetilde{\bar{M}}^{ab}\bar{K}_b$. O problema é que este procedimento não é válido para teorias singulares, onde $\det M = 0$. O método aqui apresentado pode ser diretamente generalizado para sistemas singulares.

onde $\widetilde{\bar{M}}$ é a inversa de $\bar{M}$. Esta equação nos mostra que devemos obter a transformação cuja Jacobiana seja dada por $\tilde{\bar{M}}|$. Seja $p_a = p_a(q,v)$ a transformação inversa. Relembrando que as Jacobianas das transformações direta e inversa são inversa uma da outra[4], assim podemos, de forma equivalente, buscar a solução da equação $\frac{\partial p_a}{\partial v^b} = \bar{M}_{ab}(q,v) = \frac{\partial^2 L}{\partial v^a \partial v^b}$. Isto determina p a menos de uma função arbitrária[5] $b_a(q)$:

$$p_a = \frac{\partial L(q,v)}{\partial v^a} + b_a(q), \tag{1.21}$$

a qual será omitida no que se segue. A ambiguidade do procedimento será discutida na subseção 1.6.1. Assim tomamos

$$p_a = \frac{\partial L(q,v)}{\partial v^a}, \tag{1.22}$$

o que determina as funções $v^a(q,p)$ na forma implícita.

As coordenadas p_a definidas de acordo com a Eq. (1.22) são ditas *momentos canônicos* às coordenadas q^a. O espaço de configurações-velocidades parametrizado pelas coordenadas q^a, p_b é dito o *espaço de fase* do sistema físico em consideração. Cabe mencionar que cada ponto no espaço de fase define um estado do sistema físico, ou seja, todas as propriedades do sistema são determinadas por um ponto no espaço de fase, já que cada ponto do espaço de fase é parametrizado pelas coordenadas generalizadas e os respectivos momentos canônicos. Tal fato não ocorre no espaço de configurações: dado um ponto no espaço de configurações nada podemos afirmar sobre as velocidades $\dot{q}^a$.

Por construção, as equações de movimento para as variáveis do espaço de fase estão na forma normal. A fim de encontrá-las, faremos mudança de variáveis (1.18) e (1.22) na segunda equação do sistema

[4]Da identidade $z^i(z'^j(z^k)) = z^i$ temos $\frac{\partial z^i}{\partial z'^j}\Big|_{z'(z).} \frac{\partial z'^j}{\partial z^k} = \delta^i{}_k$

[5]Para evitar confusão, enfatizamos que a Eq.(1.20) não apresenta esta liberdade.

(1.19). Obtendo, com o uso da Eq. (1.13)

$$\dot{p}_a = \left.\frac{\partial \bar{L}(q,v)}{\partial q^a}\right|_{v(q,p)} - \left(\left.\frac{\partial^2 \bar{L}(q,v)}{\partial q^c \partial v^a}\right| - \left.\frac{\partial^2 \bar{L}(q,v)}{\partial v^a \partial v^b}\right|\frac{\partial v^b}{\partial q^c}\right) v^c(q,p) \quad (1.23)$$

A expressão entre parênteses no último termo anula-se, já que $\frac{\partial}{\partial q^c}\left(\left.\frac{\partial L}{\partial v^a}\right|_{v(q,p)}\right) = \frac{\partial p_a}{\partial q^c} = 0$. Então o sistema (1.15) adquire a forma

$$\dot{q}^a = v^a(q,p), \qquad \dot{p}_a = \left.\frac{\partial \bar{L}(q,v)}{\partial q^a}\right|_{v(q,p)}. \quad (1.24)$$

A fim de substituirmos $v(q,p)$ no termo restante, calculamos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q^a} L(q, v(q,p)) &= \left.\frac{\partial \bar{L}(q,v)}{\partial q^a}\right|_{v(q,p)} + \left.\frac{\partial \bar{L}(q,v)}{\partial v^b}\right|_{v(q,p)} \frac{\partial v^b}{\partial q^a} \\ &= \left.\frac{\partial \bar{L}(q,v)}{\partial q^a}\right|_{v(q,p)} + p_b \frac{\partial v^b}{\partial q^a}, \end{aligned} \quad (1.25)$$

o que implica

$$\left.\frac{\partial \bar{L}(q,v)}{\partial q^a}\right|_{v(q,p)} = -\frac{\partial}{\partial q^a}\left(p_b v^b(q,p) - L(q, v(q,p))\right). \quad (1.26)$$

Denotando

$$H(q,p) = p_b v^b(q,p) - L(q, v(q,p)), \quad (1.27)$$

onde $v(q,p)$ é dado na forma implícita pela Eq. (1.22). Então a Eq. (1.26) assume a forma

$$\left.\frac{\partial \bar{L}(q,v)}{\partial q^a}\right|_{v(q,p)} = -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q^a}. \quad (1.28)$$

A função $H(q,p)$ é dita a *Hamitoniana* do sistema. Para completar a derivação das equações de Hamilton, chamamos a atenção à seguinte propriedade da Hamiltoniana:

$$\frac{\partial H}{\partial p_a} = v^a(q,p) + p_b \frac{\partial v^b}{\partial p_a} - \left.\frac{\partial L(q,v)}{\partial v^b}\right|_{v(q,p)} \frac{\partial v^b}{\partial p_a} = v^a(q,p). \quad (1.29)$$

Utilizando estes resultados, as equações de movimento (1.24) adquirem a forma maravilhosamente simétrica

$$\dot{q}^a = \frac{\partial H}{\partial p_a}, \qquad \dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial q^a}, \tag{1.30}$$

e são conhecidas como as *equações de Hamilton*.

Resumindo, nesta seção demonstramos como as equações de Lagrange, (1.10), podem ser reduzidas a um sistema na forma normal de $2n$ equações de primeira ordem para $2n$ variáveis independentes do espaço de fase q^a, p_b para o caso de uma teoria não-singular. De acordo com nosso procedimento, a formulação Hamiltoniana da mecânica pode ser considerada como uma formulação Lagrangeana de primeira ordem no espaço de configurações-velocidades, utilizando-se as coordenadas especiais q^a, p_b deste espaço. Esquematicamente,

$$q^a \longrightarrow (q^a, v^b) \leftrightarrow (q^a, p_b). \tag{1.31}$$

Exercícios. 1. Verifique que v^a definido pela Eq. (1.20) obedece à Eq. (1.21).

2. Obtenha a identidade $\frac{\partial v^a}{\partial q^c} = -\tilde{M}^{ab} \left. \frac{\partial^2 \bar{L}}{\partial v^b \partial q^c} \right|_{v(q,p)}$.

3. Obtenha as equações de Lagrange (1.14) a partir das equações de Hamilton (1.30), (1.27).

4. Verifique que todos os resutados desta seção permanecem válidos para uma Lagrangeana que dependa explicitamente do tempo $L(q, \dot{q}, \tau)$.

1.1.3 Prescrição para o procedimento de Hamiltonização. Interpretação física da Hamiltoniana

A passagem da descrição Lagrangeana para a Hamiltoniana de um dado sistema é comumente referida como *procedimento de Hamiltonização*. Notemos que as equações de Hamilton resultantes (1.30) não envolvem as velocidades v^a. Então esperamos a existência de uma maneira formal de obtermos a formulação Hamiltoniana que não faça menção às velocidades. Seja

$$S = \int d\tau L(q^a, \dot{q}^a), \tag{1.32}$$

a ação Lagrangeana de um dado sistema não-singular. A análise da última subseção leva-nos a formularmos a seguinte receita:

1) Introduzimos o momento conjugado para as variáveis q^a de acordo com as equações (veja a Eq. (1.22))

$$p_a = \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}^a}. \tag{1.33}$$

2) Resolvemos o sistema (1.33) algebricamente em relação a $\dot{q}^a$: $\dot{q}^a = v^a(q,p)$, e obtemos a Hamiltoniana (veja a Eq. (1.27))

$$H(q,p) = \left(p_b\dot{q}^b - L(q,\dot{q})\right)\Big|_{\dot{q}=v(q,p)}. \tag{1.34}$$

3) Escrevemos as equações de Hamilton (1.30).

De acordo com a subseção anterior, as equações resultantes são *equivalentes* às equações de movimento de Euler-Lagrange para a ação (1.32).

Notamos aqui que a função $H(q,p)$ torna-se o objeto central do formalismo Hamiltoniano. Para revelar a interpretação física da Hamiltoniana, consideremos uma partícula com coordenadas de posição $x^a, a = 1, 2, 3$, na presença de um dado potencial $U(x)$. A ação é

$$S = \int d\tau \left(\frac{1}{2}m(\dot{x}^a)^2 - U(x^a)\right). \tag{1.35}$$

Para construirmos a formulação Hamiltoniana correspondente, temos o momento $p_a = m\dot{x}^a$, o qual implica $\dot{x}^a = \frac{1}{m}p_a$, e temos a Hamiltoniana $H(x,p) = \frac{1}{2m}(p^a)^2 + U(x)$. Tomando a transformação inversa, obtemos a seguinte função de posição e velocidade $E(x,\dot{x}) \equiv H(x,p)|_{p=m\dot{x}} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^a)^2 + U(x^a)$, que representa a energia total da partícula. Esta interpretação é igualmente válida para um sistema de partículas. Assim, a Hamiltoniana (1.34) de uma teoria não-singular em coordenadas Cartesianas representa a energia total de um sistema em termos das variáveis do espaço de fase[6].

Exemplo. Construa a Hamiltoniana de uma partícula carregada na presença de um campo eletromagético externo.

A partir da Lagrangiana em coordenadas cartesianas

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^a)^2 - e\phi(x^b, t) + \frac{e}{c}\dot{x}^a A^a(x^b, \tau), \tag{1.36}$$

obtemos os momentos canônicos

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} = m\dot{x}_a + \frac{e}{c}A_a. \tag{1.37}$$

Resolvendo algebricamente para $\dot{x}^a$, em termos de x^a e p_a, temos

$$\dot{x}^a = \frac{1}{m}(p^a - \frac{e}{c}A^a). \tag{1.38}$$

Aplicando a Eq. (1.27), obtemos a Hamiltoniana

$$H(x,p) = \frac{1}{2m}(p_a - \frac{e}{c}A_a(x,t))^2 + e\phi(x,t). \tag{1.39}$$

As equações de movimento correspondentes são obtidas a partir da Eq. (1.30), e são dadas por

$$\begin{aligned} \dot{x}^a &= \tfrac{H}{\partial p_a} = \tfrac{1}{m}(p_a - \tfrac{e}{c}A_a(x,\tau)) \\ \dot{p}_a &= -\tfrac{H}{\partial x^a} = \tfrac{e}{mc}(p^b - \tfrac{e}{c}A^b)\tfrac{A_b}{\partial x^a} - e\tfrac{\partial \phi}{\partial x^a}. \end{aligned} \tag{1.40}$$

Vamos mencionar o fato da ação Lagrangeana apresentar invariância de calibre, ou seja, a ação não se altera sob substituição do tipo $A_a \to A'_a = A_a + \frac{\partial \alpha}{\partial x^a}$ e $\phi \to \phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \alpha}{\partial \tau}$, onde $\alpha(x,\tau)$ função arbitraria. De fato, a Lagrangeana transforma-se da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} L' = \frac{m}{2}(\dot{x}^a)^2 - e\phi' + \frac{e}{c}\dot{x}^a A'_a = \\ = \frac{m}{2}(\dot{x}^a)^2 - e\phi + \frac{e}{c}\frac{\partial \alpha}{\partial \tau} + \frac{e}{c}\dot{x}^a A_a + \frac{e}{c}\dot{x}^a\frac{\partial \alpha}{\partial x^a} = \\ = L + \frac{d\alpha}{d\tau}. \end{aligned} \tag{1.41}$$

Portanto, as ações com L e L' implicam às mesmas equações de movimento. Isto implica, que os potenciais A_a a A'_a produzem as mesmas consequencias fisicas (em mecânica clássica, veja subseção 1.6.1.) como estas duas Lagrangeanas são equivalentes, a ação Lagrangeana do sistema é invariante sob transformações de calibre, ou

[6] O caso das coordenadas generalizadas será discutido adiante, veja o Exercício 3 na pág. 77.

seja, Logo a *dinâmica* do sistema tem invariância de calibre. Aqui enfatizamos que a Hamiltoniana *não* é invariante de calibre.

Exercícios. 1. Mostre que a Hamiltoniana correspondente à Lagrangiana $L = g_{ab}(q)$ $\dot{q}^a \dot{q}^b$, onde $g_{ab}(q)$ são funções dadas e g é invertível, é dada por $H = \tilde{g}^{ab} p_a p_b$, onde $\tilde{g}$ é a inversa de g. A seguir, obtenha as equações de movimento.

2. Dada a Lagrangiana do oscilador harmônico N-dimensional em coordenadas normais: $L = \sum \frac{1}{2} \left(\left(\dot{Q}_i \right)^2 - w_k^2 Q_k^2 \right)$:

a. Obtenha a Hamiltoniana para o oscilador harmônico N-dimensional.

b. Obter as equações de movimento.

3. Obtenha a Hamiltoniana para uma partícula num campo central em coordenadas a. Esféricas. b. Cilíndricas.

4. Tendo em mente a ambiguidade (1.21), apresentada no procedimento de Hamiltonização, definamos o momento para o modelo (1.35) de acordo com a regra $\dot{x}^a = \frac{1}{m} p_a + b_a(x)$. Escreva as equações de Hamilton e obtenha as condições sobre b_a que implicam sua forma canônica (isto é, a forma (1.30) para alguma função $\tilde{H}$). Escreva a Hamiltoniana correspondente $\tilde{H}$. Ela pode ser interpretada como a energia da partícula? Derive as equações de Lagrange a partir das equações de Hamilton.

1.2 Parêntese de Poisson e matriz simplética

Aqui vamos introduzir notações mais compactas, por isso mais elegantes, e convenções usadas para lidarmos com as equações de Hamilton.

Seja $\{A(q,p), B(q,p)\ldots\}$ o conjunto das funções definidas no espaço de fase.

Definição. O *parêntese de Poisson* é uma aplicação que a quaisquer duas funções do espaço de fase A, B associa uma terceira função, denotada $\{A, B\}$, de acordo com a regra

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial q^a}\frac{\partial B}{\partial p_a} - \frac{\partial B}{\partial q^a}\frac{\partial A}{\partial p_a}. \tag{1.42}$$

A definição implica nas seguintes propriedades do parêntese de Poisson:

A) antissimetria

$$\{A, B\} = -\{\{B, A\}\};\tag{1.43}$$

B) linearidade (com respeito a ambos argumentos, como consequência de (1.43))

$$\{A, \lambda B + \eta C\} = \lambda \{A, B\} + \eta \{A, C\}, \qquad \lambda, \eta = const;\tag{1.44}$$

C) regra de Leibniz

$$\{A, BC\} = \{A, B\} C + B \{A, C\};\tag{1.45}$$

D) identidade de Jacobi

$$\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0.\tag{1.46}$$

Exercício. Verifique (1.46) por meio de cálculos diretos. Sugestão: considere separadamente todos os termos envolvendo, por exemplo, duas derivadas de B.

Os parênteses de Poisson entre as variáveis do espaço de fase são ditos *parênteses fundamentais*, que são dados por:

$$\{q^a, p_b\} = \delta^a{}_b, \qquad \{q^a, q^b\} = 0, \qquad \{p_a, p_b\} = 0.\tag{1.47}$$

Os parênteses de Poisson podem ser utilizados para escrevermos as equações de Hamilton na seguinte forma

$$\dot{q}^a = \{q^a, H\}, \qquad \dot{p}_a = \{p_a, H\}.\tag{1.48}$$

Assim o parêntese de Poisson de $q,\ p$ com a Hamiltoniana determina a taxa de variação temporal de $q,\ p$. Além disso, o mesmo é válido para qualquer função do espaço de fase: se $q^a(\tau), p_b(\tau)$ é solução das equações de Hamilton, a taxa de variação da função $A(q, p)$ pode ser calculada como

$$\dot{A}(q, p) = \frac{\partial A}{\partial q^a}\dot{q}^a + \frac{\partial A}{\partial p_a}\dot{p}_a = \frac{\partial A}{\partial q^a}\{q^a, H\} + \frac{\partial A}{\partial p_a}\{p_a, H\}$$

$$= \{A, H\} \tag{1.49}$$

Portanto $\{A, H\} = 0$ implica que A se conserva, veja tambem a Seção 1.4. Como exemplo, calculemos a taxa de variação temporal da Hamiltoniana: devido a anti-simetria do parêntese de Poisson, $\dot{H} = \{H, H\} = 0$. Logo a Hamiltoniana é uma quantidade conservada, o que nos dá mais um argumento que sustenta nossa interpretação da Hamiltoniana como a energia total do sistema.

Adiante será conveniente trabalharmos com quantidades definidas no espaço de fase utilizando as seguintes notações. Para as coordenadas do espaço de fase utilizaremos um único símbolo: $(q^a, p_b) \equiv z^i$, $i = 1, 2, \ldots, 2n$, ou, equivalentemente, para $a, b = 1, 2, \ldots, n$ temos $z^a = q^a$ e $z^{n+b} = p_b$. Assim os índices latinos tomam $2n$ valores. Introduzamos também a *matriz simplética* $2n \times 2n$ composta por quatro blocos $n \times n$

$$\omega^{ij} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \tag{1.50}$$

Detalhadamente, para $a, b = 1, 2, \ldots, n$ temos $\omega^{ab} = 0$, $\quad \omega^{a,n+b} = \delta^{ab}$, $\quad \omega^{n+a,b} = -\delta^{ab}$, $\omega^{n+a,n+b} = 0$. A matriz simplética é anti-simétrica: $\omega^{ij} = -\omega^{ji}$ e invertível, com matriz inversa

$$\omega_{ij} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \tag{1.51}$$

Nesta notação os parênteses de Poisson (1.42), (1.47) adquirem a forma mais compacta

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial z^i}\omega^{ij}\frac{\partial B}{\partial z^j}, \qquad \{z^i, z^j\} = \omega^{ij}, \tag{1.52}$$

enquanto as equações de Hamilton são dadas por

$$\dot{z}^i = \omega^{ij}\frac{\partial H}{\partial z^j}, \quad ou \quad \dot{z}^i = \{z^i, H\}. \tag{1.53}$$

Exemplo. Obtenha os parênteses de Poisson do momento angular de uma partícula $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ com o seu momento conjugado $\vec{p}$.

O momento angular pode ser escrito na forma

$$L_i = \epsilon_{ijk} r_j p_k \tag{1.54}$$

onde ϵ_{ijk} é o tensor de Levi-Civita[7]. Assim

$$\{p_l, L_i\} = \frac{\partial p_l}{\partial r_m}\frac{\partial L_i}{\partial p_m} - \frac{\partial p_l}{\partial p_m}\frac{\partial L_i}{\partial r_m} = -\delta_{lm}\epsilon_{ijk}\delta_{jm}p_k = \epsilon_{lik}p_k \tag{1.55}$$

Segue das propriedades do tensor de Levi-Civita que os parênteses são nulos quando $l = i$. Os parênteses não nulos são dados por

$$\{p_1, L_2\} = p_3, \qquad \{p_2, L_3\} = p_1, \qquad \{p_3, L_1\} = p_2. \tag{1.56}$$

Exercícios. 1. Demonstre as propriedades do parêntese de Poisson (1.43), (1.44) e (1.45).

2. Verifique a identidade de Jacobi com o uso da representação (1.52).

3. Mostre que $\det\omega = 1$.

4. Calcule os parênteses de Poisson entre as componentes do momento angular, ou seja, calcule $\{L_i, L_j\}$. Mostre também que os parênteses de Poisson entre as componentes do momento angular e as coordenadas x^i, $\{x^i, L_j\}$, são os geradores das rotações infinitesimais em três dimensões.

1.3 Quadro do movimento no espaço de fase

Aqui ilustraremos algumas vantagens de se trabalhar com o forma lismo Hamiltoniano se comparado com o Lagrangeano. Como será discutido, a solução geral das equações Hamiltonianas possui interpretação simples sob os pontos de vista da hidrodinâmica e da geometria diferencial.

Solução geral como um fluxo no espaço de fase. As equa ções de Hamilton (1.53) representam um sistema normal de $2n$ equações diferenciais de primeira ordem para $2n$ variáveis $z^i(\tau)$. De acordo com a teoria das equações diferenciais, o teorema de e xistência e unicidade de uma solução é válido para este caso: dados números

[7]Por definição, temos $\epsilon_{ijk} = 1$, para permutações pares de 123, e $\epsilon_{ijk} = -1$ para permutações ímpares de 123. As demais componentes são nulas.

z_0^i, existe localmente uma única solução $z^i(\tau)$ para o sistema, a qual obedece às *condições iniciais*: $z^i(0) = z_0^i$. Aqui relembramos a definição de solução geral: $2n$ funções para $2n+1$ variáveis $z^i(\tau, c^j)$ são ditas a *solução geral* do sistema(1.53), se a) elas obedecem ao sistema para todo c^j; b) para dadas condições iniciais z_0^i, existe um conjunto de números $\tilde{c}^j$ tal que $z^i(\tau_0, \tilde{c}^j) = z_0^i$.

De acordo com o teorema acima mencionado, a solução geral de um sistema normal contêm todas as soluções particulares (trajetórias) do sistema, as quais aparecem após a fixação das constantes c^i.

Estes resultados implicam em um quadro de movimento interessante no espaço de fase: as trajetórias de um dado sistema Hamiltoniano (1.53) não interceptam-se. Para confirmar este fato, suponhamos que duas trajetórias interceptam-se em um dado ponto z_0^i. Estes números podem ser tomados como as condições iniciais para o problema (1.53), e de acordo com o teorema de existência e unicidade, existe uma única trajetória que passa pelo ponto com coordenadas z_0^i, em contradição com a suposição inicial. Assim, as trajetórias de um sistema Hamiltoniano formam um fluxo, similar ao movimento de um fluido. Mais do que, o "fluido" mostra se incompressivel, veja seção 3.4.1. Note que este fato não é presente no quadro correspondente no espaço de configurações, veja a Fig. 1.1 na página 23.

Interpretação geométrica da matriz simplética. Ao contrário das equações de Lagrange, as equações de Hamilton têm interpretação simples sob o ponto de vista da geometria diferencial. Consideremos a parte direita das equações de Hamilton como as componentes de um campo vetorial no espaço de fase: $H^i(z) \equiv \omega^{ij} \frac{\partial H}{\partial z^j}$. Então as equações de Hamilton $\dot{z}^i = H^i(z)$ afirmam que qualquer solução é uma trajetória deste campo (de acordo com a geometria diferencial, uma curva é a trajetória de um campo vetorial se os vetores de campo são tangentes à curva em todos os pontos da curva).

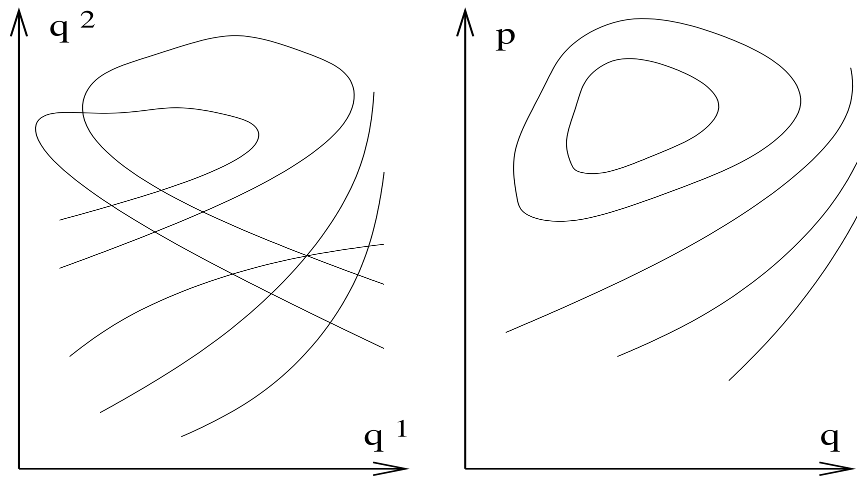

Figura 1.1: Trajetórias nos espaços de configurações e de fase.

Agora discutiremos a interpretação do *campo vetorial Hamiltoniano* H^i. Seja $H(z) = const$ uma superfície na qual a energia constante. Então o campo $H_i \equiv \frac{\partial H}{\partial z^i} = (grad\ H)_i|_{H=const}$ é normal à superfície em cada ponto desta. O produto escalar de H^i com o vetor $grad\ H$ anula-se: $H^i(grad\ H)_i = \partial_j H \omega^{ji} \partial_i H = 0$, isto é, o campo vetorial Hamiltoniano é tangente à superfície. Assim cada uma das trajetórias $z^i(\tau)$ está sobre uma superfície de energia constante, como deveria ser, veja a Fig. 1.2 na pág. 24. Observemos o importante papel desempenhado pela matriz simplética ω^{ij}. Existe um hiperplano de vetores que são normais a $grad\ H$ em um dado ponto. Então, mesmo ω transforma o vetor normal $grad\ H$ em vetor tangente de uma trajetória!

Notemos que em termos das coordenadas z^i o campo vetorial H^i tem divergência nula: $\partial_i H^i = 0$. Consideremos o campo $H^i(z^k)$ nas coordenadas: $z_j \equiv z^l \omega_{lj}$. Primeiro, a Hamiltoniana, como função de z_i, é $H(z_i) \equiv H(z^i(z_j))$.

Exercício. Escreva $H(z^i) = q - p^2$ em termos das variáveis z_i.

Além disso, como $\omega^{ik} \frac{\partial}{\partial z^k} z_j = \delta^i{}_j$, a derivada correspondente é $\partial^i =$

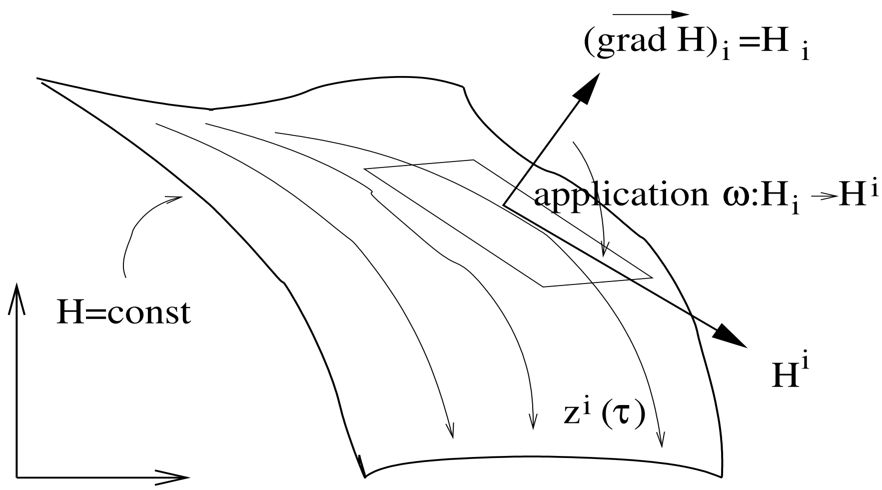

Figura 1.2: As soluções estão sobre as superfícies $H = const$ de energia constante, e são as trajetórias do campo vetorial Hamiltoniano, construído a partir de H: $H^i(z^k) = \omega^{ij}(grad\ H)_j$.

$\frac{\partial}{\partial z_i} \equiv \omega^{ik}\frac{\partial}{\partial z^k}$. O campo vetorial Hamiltoniano $H^i(z^k)$ nestas coordenadas é $H^i(z_k) = \partial^i H(z_k)$, e torna-se um campo *conservativo*: $\partial^j H^i - \partial^i H^j = 0$. Este fato será explorado no Capítulo 3.

1.4 Quantidades conservadas e parêntese de Poisson

Definição. Uma função $Q(z^i, \tau)$ é dita uma *integral do movimento* se para qualquer solução $z^i(\tau)$ das equações de Hamilton, Q mantém um valor constante

$$Q(z(\tau), \tau) = c, \qquad ou \qquad \frac{d}{d\tau}\left(Q|_{on-shell}\right) = 0. \tag{1.57}$$

Aqui *on-shell* indica que estamos tomando Q ao longo das soluções das equações de Hamilton. De fato c pode mudar seu valor quando passamos de uma trajetória para outra. Escrevemos identicamente $\frac{dQ}{d\tau} = \frac{\partial Q}{\partial \tau} + \{Q, H\} + \frac{\partial Q}{\partial z^i}(\dot{z}^i - \{Q, H\})$, assim a condição (1.57) pode ser apresentada na forma equivalente em termos dos parênteses de Poisson

$$\frac{\partial Q}{d\tau} + \{Q, H\} = 0, \qquad on - shell. \tag{1.58}$$

Em particular, a quantidade $Q(z^i)$ (sem dependência explícita em τ) é conservada se e somente se seu parêntese de Poisson com a Hamiltoniana do sistema anula-se: $\{Q, H\} = 0$.

Na literatura as integrais do movimento são conhecidas também como *primeira integral, constante do movimento, quantidade conservada, carga ou invariante dinâmico.* Adiante utilizaremos o termo carga, por ser a menor entre estas expressões. Um exemplo de carga é a Hamiltoniana de um sistema conservativo (veja a pág. 20). A busca pelas cargas de um sistema é uma tarefa de grande importância, já que seu conhecimento permite-nos simplificar, e em alguns casos resolver, as equações de movimento de um sistema. Um exemplo importante é lembrar que a conservação do momento angular permite-nos reduzir o problema de Kepler tridimensional a um problema bidimensional.

O conhecimento das cargas também tem um papel de grande importância na descrição de um sistema quântico, para o qual não temos o conceito de trajetória, e é descrito em um espaço abstrato dos estados associado ao sistema. No entanto, a noção das cargas sobrevive, e elas desempenham um papel central na interpretação do espaço de estados, estabelendo a correspondência entre os vetores de estado do sistema e as partículas.

Um método eficiente para a obtenção das cargas de um sistema com simetrias globais é dado pelo teorema de Noether, a ser discutido na próxima subseção. Aqui descreveremos algumas propriedades gerais de um conjunto de cargas.

Se Q é uma carga, então uma função arbitrária $f(Q)$ também será uma carga. Se Q_1 e Q_2 são duas cargas, então seu produto e as combinações lineares com coeficientes numéricos também representam cargas. Assim torna-se conveniente introduzirmos a noção de cargas independentes como se segue: as cargas $Q_\alpha(z^i, \tau)$, $\alpha = 1, 2, \ldots$, $k \leq 2n$ são ditas *funcionalmente independentes* se

$$rank \frac{\partial Q_\alpha}{\partial z^i} = k = max. \tag{1.59}$$

Isto implica que as expressões $Q_\alpha(z^i, \tau) = c_\alpha$ podem ser resolvidas algebricamente com respeito a k variáveis z^α entre as variáveis z^i:

$$z^\alpha = G^\alpha(z^a, c_\alpha, \tau), \tag{1.60}$$

onde z^a são as variáveis restantes do conjunto z^i. Como será discutido na próxima subseção, o conhecimento de k cargas funcionalmente independentes reduz imediatamente a ordem do sistema das equações de Hamilton por k unidades, ou seja, existe um sistema equivalente cujo número total de derivadas é $2n - k$.

É fácil confirmar a existência de $2n$ cargas independentes para um dado sistema dinâmico com n graus de liberdade. Seja $f^i(\tau, c_j)$ a solução geral das equações de Hamilton. Isto implica, em particular, que $\det \frac{\partial f^i}{\partial c_j} \neq 0$. Se escrevermos as equações $z^i = f^i(\tau, c_j)$, elas podem ser resolvidas com relação a c: $Q_j(z^i, \tau) = c_j$. Por construção, a substituição de qualquer solução $z^i(\tau)$ em Q_j as transformarão em números. Assim obtemos $2n$ combinações de z^i, τ: $Q_j(z^i, \tau)$, que são independentes do tempo para as soluções das equações de Hamilton, ou seja, $Q_j(z^i, \tau)$ são as cargas conservadas.

No entanto, na prática o problema é o oposto: é interessante conhecer o maior número possível de cargas por métodos independentes, e utilizá-las na resolução das equações de movimento. Em particular, a discussão acima implica que o conhecimento de $2n$ cargas independentes é equivalente ao conhecimento da solução geral das equações de Hamilton.

O conjunto das cargas possui uma estrutura algébrica especial com relação aos parênteses de Poisson: o parêntese de duas cargas também é uma carga. Este fato é mostrado por meio de cálculos diretos

$$\frac{d}{d\tau}\{Q_1, Q_2\} = \frac{\partial}{\partial\tau}\{Q_1, Q_2\} + \{\{Q_1, Q_2\}, H\} =$$
$$\{\frac{\partial Q_1}{\partial\tau}, Q_2\} + \{Q_1, \frac{\partial Q_2}{\partial\tau}\} - \{\{Q_2, H\}, Q_1\} - \{\{H, Q_1\}, Q_2\} =$$
$$\{\frac{\partial Q_1}{\partial\tau} + \{Q_1, H\}, Q_2\} + \{Q_1, \frac{\partial Q_2}{\partial\tau} + \{Q_2, H\}\} = 0. \tag{1.61}$$

Aqui a identidade de Jacobi foi utilizada na passagem da primeira para a segunda linha. A expressão da última linha anula-se já que Q_1 e Q_2 obedecem à Eq. (1.58). Assim $Q_3 \equiv \{Q_1, Q_2\}$ é uma carga conservada. De fato, o parêntese pode ser identicamente nulo ou pode ser uma carga funcionalmente dependente de Q_1, Q_2. Se não, o parêntese de Poisson pode ser utilizado para gerar novas cargas a partir de cargas conhecidas. O resultado que acabamos de demonstrar é conhecido como *teorema de Poisson*.

Como um exemplo, consideremos uma partícula livre, com Hamiltoniana $H = \frac{1}{2m}(p^i)^2$, $i = 1, 2, 3$, e as correspondentes equações de Hamilton $\dot{x}^i = \frac{1}{m}p^i$, $\dot{p}^i = 0$. Além da Hamiltoniana, as cargas conservadas são os momentos lineares $p^i = c^i = const$ (como segue das suas equações de movimento), e os momentos angulares $L^i = \epsilon^{ijk}x^j p^k = d^i = const$ (já que $\dot{L}^i = \frac{1}{m}\epsilon^{ijk}p^j p^k = 0$, devido à antissimetria de ϵ^{ijk} em j e k e à simetria de $p^j p^k$ em relação a j e k). É claro que H pode ser omitida, já que ela forma um conjunto funcionalmente dependente com p^i. Das seis cargas restantes, apenas cinco delas são funcionalmente independentes. (Caso tivéssemos as seis cargas independentes, então seria possível resolver as equações $Q_i(z^i) = c_i$, obtendo a solução geral das equações de movimento na forma $z^i = f^i(c_i)$, e chegando ao estranho resultado de que a partícula não poderia se mover! De fato, esta dependência pode ser facilmente verificada pelo cálculo direto do Jacobiano correspondente). Escolhendo p^i e L^2, L^3 como quantidades independentes, encontramos a dinâmica de p^i, x^2, x^3 em termos de x^1: $p^i = c^i$, $x^2 = \frac{c^2}{c^1}x^1 - \frac{d^3}{c^1}$, $x^3 = \frac{c^3}{c^1}x^1 + \frac{d^2}{c^1}$. Assim, para encontrarmos a solução geral das equações de movimento, precisamos resolver apenas uma delas, que é $\dot{x}^1 = \frac{c^1}{2m}$, que nos dá a carga dependente do tempo $x^1 = \frac{c^1}{2m}\tau + b$.

Exercícios. 1. Calcule o número de cargas funcionalmente independentes para o caso de uma partícula livre em um espaço de n dimensões, $n > 3$.

2. Mostre que a álgebra dos parênteses de Poisson para as cargas L é dada por:

$$\{L^i, L^j\} = \epsilon^{ijk} L^k, \qquad \{L^i, p^j\} = \epsilon^{ijk} p^k. \tag{1.62}$$

1.5 Ação Hamiltoniana e a versão Hamiltoniana do teorema de Noether

Semelhante a situação com as equações de Lagrange, as equações de Hamilton (1.30) podem ser obtidas partindo-se de uma escolha apropriada de uma ação funcional, pela aplicação do princípio da ação mínima. Sobre um conjunto de curvas do espaço de fase $z^i(\tau)$, definamos a *ação Hamiltoniana* de acordo com a equação

$$S_H = \int d\tau \left(p_a \dot{q}^a - H(q^a, p_b)\right). \tag{1.63}$$

O problema variacional para este funcional é formulado como se segue. Buscamos pela trajetória com as posições inicial e final fixas $q^a(\tau_1) = q_1^a$, $q^a(\tau_2) = q_2^a$ e momento arbitrário, a qual dá um mínimo para o funcional (veja a Fig. 1.3 na página 29). A variação do funcional é dada por

$$\delta S_H = \int d\tau ((\dot{q}^a - \frac{\partial H}{\partial p_a})\delta p_a - (\dot{p}_a + \frac{\partial H}{\partial q^a})\delta q^a + (p_a \delta q^a)|_{t_1}^{t_2}). \tag{1.64}$$

De acordo com as condições de contorno temos: $\delta q^a(t_1) = \delta q^a(t_2) = 0$, então o último termo anula-se. Portanto $\delta S_H = 0$ implica nas equações de Hamilton (1.30).

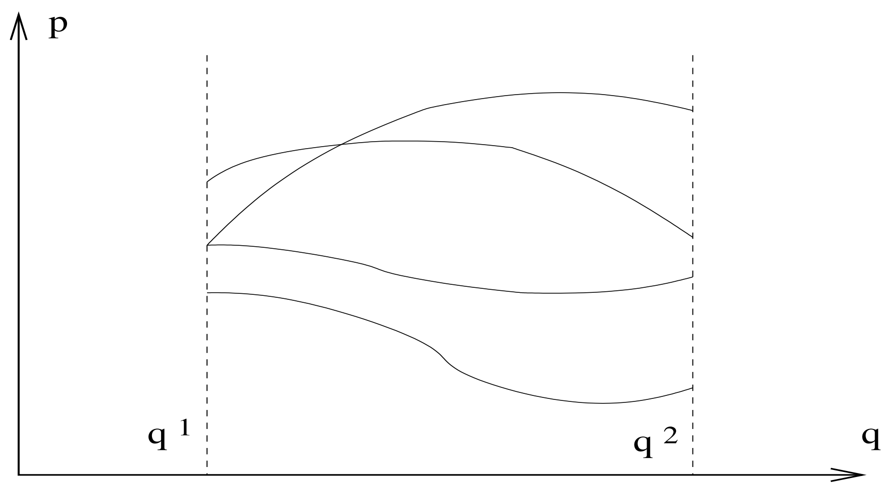

Figura 1.3: Problema variacional para a ação funcional Hamiltoniana.

Comentário. Aqui vale a pena salientar a diferença entre princípios variacionais e as equações de movimento. As equações de movimento, junto com as condições iniciais, nos fornecem propriedades da dinâmica do sistema físico localmente, enquanto os pricípios variacionais caracterizam a dinâmica do sistema globalmente, já que consideram a trajetória toda do sistema em consideração.

O teorema de Noether é discutido em detalhes no apêndice. Ele afirma que existe uma relação entre as propriedades de simetria (invariância) de uma ação e a existência de cargas, associadas às equações de movimento. Mais do que afirmar sobre a existência destas cargas, o teorema de Noether nos dá a expressão exata para as cargas em termos dos geradores da simetria, veja a Eq. (A.62). O teorema de Noether pode ser aplicado a qualquer sistema de equações diferenciais obtido por meio de um problema variacional. Como vimos acima, as equações de Hamilton podem ser obtidas a partir da condição de extremo para a ação funcional (1.63). Assim, todos os resultados obtidos no apêndice permanecem válidos para o caso, com as trocas correspondentes: $q^a \to z^i = (q^a, p_b)$, $L \to p\dot{q} - H(q,p)$. Como o objeto central agora é $H(q,p)$, podemos reescrever todos os resultados em termos da Hamiltoniana. Aqui faremos a exposição do teorema de Noether na forma Hamiltoniana.

No espaço de fase extendido $(\tau, z^i) \equiv (\tau, q^a, p_b)$, consideremos uma família de transformações de coordenadas parametrizada por k parâmetros ω^α, $\alpha = (1, \ldots, k)$

$$\begin{aligned}
\tau \rightarrow \tau' = \tau'(\tau, z^i, \omega^\alpha) = \tau + G_\alpha(\tau, z^i)\omega^\alpha + O(\omega^2), \\
G_\alpha \equiv \left.\frac{\partial \tau'}{\partial \omega^\alpha}\right|_{\omega=0}, \\
z^i \rightarrow z'^i = z'^i(\tau, z^i, \omega^\alpha) = z^i + R^i{}_\alpha(\tau, z^i)\omega^\alpha + O(\omega^2), \\
R^i{}_\alpha \equiv \left.\frac{\partial z'^i}{\partial \omega^\alpha}\right|_{\omega=0}.
\end{aligned} \tag{1.65}$$

As funções de transição τ', z'^i foram expandidas em série de potências, em primeira ordem, na vizinhança do ponto $\omega = 0$. O gerador das transformações infinitesimais R contém dois blocos: $R^i{}_\alpha = (R^a{}_\alpha$ e $T_{b\alpha})$, onde $R^a{}_\alpha$ corresponde a q^a e $T_{a\alpha}$ corresponde a p_a.

As transformações (1.65) representam *uma simetria da ação Hamiltoniana* (1.63) (equivalentemente, a ação é dita *invariante*), se existe uma função $N(q, p, \omega, \tau)$ tal que[8]

$$\begin{aligned}
\int d\tau' \left(p'_a \frac{dq'^a}{d\tau'} - H(q', p', \tau') \right) = \\
= \int d\tau \left(p_a \frac{dq^a}{d\tau} - H(q, p, \tau) + \frac{dN}{d\tau} \right).
\end{aligned} \tag{1.66}$$

No membro esquerdo temos $\frac{dq'^a}{d\tau'} \equiv \left(\frac{d\tau'}{d\tau}\right)^{-1} \frac{dq'^a}{d\tau}$, e τ', q'^a, p'_a devem ser substituídos por suas expressões dadas pela Eq. (1.65). Como é discutido no apêndice, podemos omitir as integrações na expressão (1.66)obtendo

$$p'_a \frac{dq'^a}{d\tau} - \dot{\tau}' H(q', p', \tau') = p_a \dot{q}^a - H(q, p, \tau) + \frac{dN}{d\tau}. \tag{1.67}$$

Agora suponhamos que a família (1.65) seja uma simetria, então temos a identidade (1.67). Os membros direito e esquerdo desta

[8] Para uma definição exata de simetria, veja o apêndice.

equação podem ser expandidos em uma série de potências em torno do ponto $\omega = 0$. Como os ω são parâmetros arbitrários, a identidade (1.67) deve ser satisfeita para cada uma das potências de ω separadamente. Para a parte linear em ω da Eq. (1.67) obtemos

$$\left(R^i{}_\alpha - G_\alpha\{z^i, H\}\right)\omega_{ij}\left(\dot{z}^j - \{z^j, H\}\right) = \frac{d}{d\tau}(-p_a R^a{}_\alpha + G_\alpha H + N_\alpha), \tag{1.68}$$

onde $N_\alpha \equiv \frac{\partial N}{\partial \omega^\alpha}\Big|_{\omega=0}$. É importante frizarmos que a Eq. (1.68) é uma identidade, ou seja, ela é válida para *qualquer* função $q^a(\tau)$. Assim, a invariância da ação implica que algumas combinações das equações de movimento formam derivadas totais de algumas quantidades, como fica claro pela Eq. (1.68). A afirmação principal do teorema de Noether segue imediatamente da Eq. (1.68): se $\dot{z}^j - \{z^j, H\} = 0$, então $\frac{dQ_\alpha}{d\tau} = 0$, onde Q_α denota as quantidades do membro direito da Eq. (1.68). Assim, estas quantidades mantém seu valor constante ao longo de qualquer solução das equações de movimento.

Versão Hamiltoniana do teorema de Noether. Seja a ação Hamiltoniana invariante sob a família de transformações (1.65). Então existem k funções $Q_\alpha(q, p, \tau)$ ditas *cargas de Noether*, dadas por

$$Q_\alpha = -p_a R^a{}_\alpha + G_\alpha H + N_\alpha, \tag{1.69}$$

as quais mantém seu valor constante ao longo de qualquer solução das equações de movimento obtidas a partir da ação:

$$\left.\frac{dQ_\alpha}{d\tau}\right|_{\dot{z}^j = \{z^j, H\}} = 0. \tag{1.70}$$

Notamos que os geradores T não entram na expressão para as cargas.

Exercícios. 1. A adição de uma derivada total à Lagrangeana não altera as equações de Lagrange. O mesmo é válido para a ação Hamiltoniana? Veja tambem a exercício 1 na pagina 77.

2. A menos de um termo de fronteira, a ação Hamiltoniana pode ser escrita na forma

$$S_H = \int d\tau \left(\frac{1}{2} z^i \omega_{ij} \dot{z}^j - H(z^i)\right). \tag{1.71}$$

É posível formularmos um problema variacional consistente para este funcional, o qual deve levar às equações de Hamilton?

1.6 Relações adicionais entre as formulações de Lagrange e de Hamilton

1.6.1 Ambiguidades do procedimento de Hamiltonização. Exemplo de parêntese de Poisson não-canônico.

As equações de Hamilton foram obtidas na subseção 1.1.2 a partir de uma formulação de primeira ordem das equações de Lagrange utilizando uma mudança de variáveis no espaço de configurações-velocidades. A mudança foi feita a partir do requerimento de que as equações de Hamilton adquirissem a forma normal. Como foi observado, a forma normal é garantida pela mudança (1.21) que envolve funções arbitrárias $b_a(q)$. A escolha convencional é tomarmos $b_a = 0$, como foi feito na subseção 1.1.2. É interessante observarmos o que acontece se definirmos o momento de acordo com a Eq. (1.21). Então, partindo das equações de primeira ordem (1.15), façamos a mudança (1.18) com $p'(q, v)$ dada por

$$p'_a = \frac{\partial L(q, v)}{\partial v^a} + b_a(q), \tag{1.72}$$

Repetindo a análise da subseção 1.1.2, chegamos às seguintes equações de Hamilton

$$\begin{aligned} \dot{q}^a &= \frac{\partial H'(q, p')}{\partial p'_a}, \\ \dot{p}'_a &= -\frac{\partial H'(q, p')}{\partial q^a} + \left(\frac{\partial b_a}{\partial q^b} - \frac{\partial b_b}{\partial q^a}\right) v^b, \end{aligned} \tag{1.73}$$

onde $v = v(q, p', b)$ é solução de (1.72), e denotamos

$$H'(q, p') \equiv (p'_a - b_a) v^a - L(q, v). \tag{1.74}$$

O sistema (1.73) tem a foma normal e é equivalente às equações de Euler-Lagrange para qualquer dada $b_a(q)$.

Este sistema também pode ser escrito na forma canônica, similar à Eq. (1.53), com uma escolha apropriada de um parêntese. Introduzamos o parêntese

$$\{A, B\}^{(b)} \equiv \frac{\partial A}{\partial z^i} b^{ij} \frac{\partial B}{\partial z^j}, \tag{1.75}$$

onde a forma simplética agora é dada por

$$b^{ij} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & b_{ab} \end{pmatrix}, \quad b_{ab} \equiv \frac{\partial b_a}{\partial q^b} - \frac{\partial b_b}{\partial q^a}, \tag{1.76}$$

no lugar de (1.50). Isto implica nos parênteses fundamentais

$$\{q^a, q^b\}^{(b)} = 0, \quad \{q^a, p'_b\}^{(b)} = \delta_{ab}, \quad \{p'_a, p'_b\}^{(b)} = b_{ab}(q). \tag{1.77}$$

Assim temos um exemplo de parêntese de Poisson não-canônico. Pode-se mostrar que este parêntese tem as propriedades (1.43)-(1.46). Agora, as equações (1.73) adquirem a forma

$$\dot{z}^i = \{z^i, H'(z)\}^{(b)}, \quad onde \quad z^i = (q^a, p'_b), \tag{1.78}$$

com a Hamiltoniana dada pela Eq. (1.74). Então a ambiguidade na definição do momento manifesta-se na modificação da Hamiltoniana e do parêntese de Poisson.

A partir da definição dos momentos (1.72) e (1.22) concluimos que as duas formulações são relacionadas pela mudança de variáveis: $(q^a, p_b) \leftrightarrow (q'^a = q^a, p'_b = p_b + b_b(q))$. Podemos checar que esta mudança leva às equações (1.73) e (1.78).

O parêntese não-canônico (1.75)-(1.77) aparece naturalmente na descrição de um sistema onde a interação depende da velocidade. Como um exemplo, consideremos a ação

$$S = \int d\tau (\frac{1}{2}(\dot{q}^a)^2 + \dot{q}^a A_a(q)), \tag{1.79}$$

onde $q^a(\tau)$ são as variáveis do espaço de configuração e $A_a(q)$ é uma função dada. Esta ação não-relativística simula uma partícula relativística em um campo eletromagnético de fundo. A definição padrão de momento $p_a = \dot{q}_a + A_a(q)$ leva-nos à Hamiltoniana

$$H(q,p) = \frac{1}{2}(p_a - A_a)^2, \tag{1.80}$$

que implica nas equações de Hamilton

$$\dot{q}^a = p_a - A_a \equiv \{q^a, H\}, \quad \dot{p}_a = (p_b - A_b)\frac{\partial A_b}{\partial q^a} \equiv \{p_a, H\}, \tag{1.81}$$

com o parêntese de Poisson canônico.

Agora, utilizando a Eq. (1.72) como a definição do momento: $p'_a = \dot{q}_a + A_a(q) + b_a(q)$, é natural tomarmos $b_a = -A_a$, a qual leva à expressão $p'_a = \dot{q}_a$ para o momento. Então a Eq. (1.74) nos dá a Hamiltoniana

$$H(q,p) = \frac{1}{2}(p'_a)^2. \tag{1.82}$$

De acordo com a Eq. (1.73) as equações de Hamilton são

$$\dot{q}^a = p_a \equiv \{q^a, H\}', \quad \dot{p}'_a = -F_{ab}p'_b \equiv \{p'_a, H\}', \tag{1.83}$$

com o parêntese de Poisson não-canônico

$$\{q^a, q^b\}' = 0, \quad \{q^a, p'_b\}' = \delta_{ab}, \quad \{p'_a, p'_b\}' = F_{ab}(q). \tag{1.84}$$

Aqui F é uma tensão do potencial vetor: $F_{ab} = \frac{\partial A_a}{\partial q^b} - \frac{\partial A_b}{\partial q^a}$. É fácil notar que ambas (1.81) e (1.83) implicam nas equações de Lagrange $\ddot{q}^a = -F_{ab}\dot{q}^b$.

Notemos que a Hamiltoniana (1.82) formalmente coincide com a de uma partícula livre. Neste sentido, na segunda formulação a interação é codificada em parêntese de Poisson não-canônico[9] A

[9]Enquanto na segunda formulação o potencial vetor A_a não é apresentado explicitamente (as Eqs. (1.82)-(1.84) envolvem apenas componentes de F, que são os campos elétrico E e magnético B), ele reaparece na quantização. De fato, os operadores que reproduzem os

inclusão das interações dependentes da velocidade no parêntese foi sugerida em [6].

Retornemos às equações (1.73). Se insistirmos na forma canônica das equações (com o parêntese canônico), certa ambiguidade permanecerá presente. De fato, estas equações estarão na forma normal se o último termo anula-se.

Exercício. Mostre que $(\frac{\partial b_a}{\partial q^b} - \frac{\partial b_b}{\partial q^a})v^b = 0$ implica $\frac{\partial b_a}{\partial q^b} - \frac{\partial b_b}{\partial q^a} = 0$.

A última equação implica que $b_a = \frac{\partial g}{\partial q^a}$. Assim para uma mudança da forma

$$p'_a = \frac{\partial L(q,v)}{\partial v^a} + \frac{\partial g(q)}{\partial q^a}, \tag{1.85}$$

com uma função dada $g(q)$, obtemos as equações canônicas com Hamiltoniana

$$H' = \left((p'_b - \frac{\partial g}{\partial q^b})v^b - L(q,v) \right) \Bigg|_{v(q,p',b)}. \tag{1.86}$$

Observe, que o mesmo resultado pode ser obtido a partir de (1.30) pela mudança de variáveis $(q^a, p_a) \to (q'^a = q^a, p'_a = p_a + \partial_a g(q))$. De acordo com a terminologia que será introduzida na Seção 1.8, este é um exemplo de transformação canônica.

Exercícios. 1. Mostre que a forma simplética (1.76) é invertível e obtenha a matriz inversa b_{ij}. Mostre que a última obedece à equação

$$\partial_k b_{ij} \equiv \partial_k b_{ij} + \partial_i b_{jk} + \partial_j b_{ki} = 0. \tag{1.87}$$

Uma 2-forma com esta propriedade é dita uma *forma fechada*.

2. Seja $b^{ij}(z)$ uma matriz anti-simétrica invertível, com a inversa obedecendo à Eq. (1.87). Mostre que o parêntese (1.75), construido a partir desta b obedece às propriedades (1.43)-(1.46).

parênteses (1.84) devem envolver A: $q^a \to \hat{q}^a = q^a$ e $p'_a \to \hat{p}_a = \frac{\partial}{\partial q^a} + A_a$. Isto leva à mesma equação de Schrodinger que a formulação inicial, com dependência explícita de A. A dependência da equação de A tem consequências interessantes. Ao contrário das conclusões da mecânica clássica, o potencial vetor pode afetar o movimento de partículas carregadas, mesmo em regiões onde os campos elétrico e magnético são nulos. Este efeito [29, 28], conhecido como efeito Aharonov-Bohm, foi verificado experimentalmente.

1.6.2 Procedimento de Hamiltonização em termos de um funcional de primeira ordem

Uma forma elegante de se obter a formulação Hamiltoniana, baseada em manipulações com a ação Lagrangeana, foi sugerida em [26, 12]. Seja

$$S = \int d\tau L(q^a, \dot{q}^a), \tag{1.88}$$

a ação Lagrangeana de um dado sistema não-singular. Vamos introduzir o *espaço de fase extendido*, parametrizado pelas coordenadas independentes q^a, p_a, v^a. A partir da Lagrangeana (1.88), podemos construir a seguinte *ação de primeira ordem* no espaço de fase extendido

$$S_1 = \int d\tau \left(L(q^a, v^a) + p_a(\dot{q}^a - v^a) \right). \tag{1.89}$$

A qual implica nas equações de movimento

$$\dot{q}^a = v^a, \qquad \dot{p}_a = \frac{\partial L(q,v)}{\partial q^a}, \qquad p_a = \frac{\partial L(q,v)}{\partial v^a}. \tag{1.90}$$

Analizando as equações de movimento, temos: a terceira equação define o momento conjugado (1.22), enquanto as outras duas equações coincidem com as equações de movimento para a ação inicial (1.88), veja a Eq. (1.24). Assim a ação (1.89) nos dá uma formulação equivalente à da teoria com ação (1.88). Nesta formulação, as equações para o momento conjugado aparecem como parte das equações de movimento. A parte restante do procedimento consiste no uso da terceira equação para eliminar v^a das duas primeiras equações. Os cálculos correspondentes coincidem com aqueles feitos na seção 1.1.2, a partir da Eq. (1.24).

Finalizamos esta subseção com um comentário sobre a relação formal entre diferentes ações. Tomemos a ação de primera ordem como um objeto básico. Então a ação Lagrangeana (1.88pode ser obtida a partir da ação de prmeira ordem pela utilização da primeira equação de (1.90). A ação Hamiltoniana (1.63) é obtida a partir da de primeira ordem pelo uso da terceira equação de (1.90).

1.6.3 O problema inverso: da formulação Hamiltoniana para a Lagrangeana

Seja $H(q,p)$ a Hamiltoniana de um dado sistema não-singular. O problema agora é como obtermos a formulação Lagrangeana correspondente. Para este fim, utilizamos a expressão (1.27), a qual determina L como função de q, p: $L(q, v(q,p)) = p_a v^a - H(q,p)$. De acordo com a subseção 1.1.2, as quantidades do espaço de fase e do espaço de configurações-velocidades são relacionadas pela mudança de variáveis (1.18), (1.22). Então L como função de q e v pode ser obtida por meio desta mudança na expressão anterior

$$L(q,v) = \left(p_a v^a - H(q,p)\right)\big|_{p(q,v)} . \tag{1.91}$$

Para encontrar as funções de transição $p(q,v)$ é suficiente relembrarmos a Eq. (1.29), a qual determina as funções inversas: $v^a(q,p) = \frac{\partial H(q,p)}{\partial p^a}$. Assim, resolvendo algebricamente as equações $v^a = \frac{\partial H(q,p)}{\partial q^a}$ com relação a p: $p = p(q,v)$, temos as funções de transição desejadas.

A prescrição formal resultante pode ser formulada sem mencionarmos as velocidades: partindo de uma dada $H(q,p)$, resolvemos a primeira parte das equações de Hamilton: $\dot{q}^a - \frac{\partial H(q,p)}{\partial q^a} = 0$ com respeito a p, $p = p(q,\dot{q})$. Então $L(q,\dot{q}) = \left[p_a \dot{q}^a - H(q,p)\right]\big|_{p(q,\dot{q})}$.

1.7 Transformações no espaço de fase e equações de Hamilton

Em vários casos interessantes as equações de Lagrange podem ser resolvidas com o uso de transformações de coordenadas $q \to q'(q)$

no espaço de configurações. Em particular, se o sistema em questão exibe certas simetrias, elas podem ser utilizadas na busca por coordenadas ajustadas com esta simetria. As vezes a transformação leva ao desacoplamento das equações de Lagrange, então o problema crucialmente será simplificado. Exemplos bem conhecidos são o uso de coordenadas esféricas no problema de Kepler e as variáveis do centro de massa no problema de dois corpos. A formulação Hamiltoniana nos dá possibilidades adicionais devido ao fato do conjunto de transformações no espaço de fase ser muito maior, devido à possibilidade de misturarmos as variáveis de posição e velocidade: $q \to q'(q,p)$, $p \to p'(q,p)$. Nesta seção encontraremos como as equações de Hamilton transformam-se sob transformações de coordenadas no espaço de fase. Como será visto, uma transformação arbitrária não preserva a forma das equações de Hamilton. Então, é razoável trabalharmos apenas com o subconjunto das transformações que mantenham a forma das equações inalterada. As transformações deste subconjunto são ditas transformações canônicas e serão discutidas na próxima seção.

As equações de Hamilton

$$\dot{z}^i = \omega^{ij}\frac{\partial H(z^k)}{\partial z^j}, \qquad i,j = 1,2,\ldots,2n, \tag{1.92}$$

representam um sistema de equações diferenciais de primeira ordem para a determinação de $2n$ funções $z^i(\tau)$. Para resolver o sistema de forma analítica, geralmente precisamos procurar por novas variáveis $z'^i(\tau)$, tais que o sistema adquira a forma mais simples possível para estas variáveis. Aqui começaremos com algumas definições relevantes.

Sejam $\varphi^i(z^j,\tau)$ $2n$ funções dadas de $2n+1$ variáveis, com a seguinte propriedade

$$\det\frac{\partial \varphi^i}{\partial z^j} \neq 0, \quad \forall\tau. \tag{1.93}$$

A partir da parametrização original do espaço de fase, z^i, as funções

φ^i com τ_0 fixo podem ser utilizadas para definirmos uma nova parametrização z'^i

$$z'^i = \varphi^i(z^j, \tau_0). \tag{1.94}$$

De acordo com a condição (1.93), a *transformação de coordenadas*[10] $z^i \longrightarrow z'^i$ é invertível: as expressões (1.94) podem ser resolvidas com relação a z^i, com resultado

$$z^i = \psi^i(z'^j, \tau_0). \tag{1.95}$$

Por construção, existem as identidades

$$\varphi^i(\psi(z', \tau_0), \tau_0) \equiv z'^i, \qquad \psi^i(\varphi(z, \tau_0), \tau_0) \equiv z^i. \tag{1.96}$$

A partir destas obtemos mais algumas identidades

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial \varphi^k(z,\tau)}{\partial z^i}\right|_{z=\psi(z',\tau)} \frac{\partial \psi^i(z',\tau)}{\partial z'^j} &= \delta^k{}_j, \\
\left.\frac{\partial \varphi^i(z,\tau)}{\partial \tau}\right|_{z=\psi(z',\tau)} &= - \left.\frac{\partial \varphi^i(z,\tau)}{\partial z^j}\right|_{z=\psi(z',\tau)} \frac{\partial \psi^j(z',\tau)}{\partial \tau}, \\
\left.\frac{\partial \psi^i(z',\tau)}{\partial \tau}\right|_{z'=\varphi(z,\tau)} &= - \left.\frac{\partial \psi^i(z',\tau)}{\partial z'^j}\right|_{z'=\varphi(z,\tau)} \frac{\partial \varphi^j(z,\tau)}{\partial \tau}.
\end{aligned} \tag{1.97}$$

A primeira identidade relaciona as *matrizes de Jacobi* das transformações inversa e direta: as matrizes são inversa uma da outra. A segunda identidade relaciona a derivada de φ com a derivada da transformação inversa ψ. A terceira identidade difere da segunda pela mudança $\varphi \leftrightarrow \psi$, como deve ser (é problema de conveniência qual das funções será dita a transformação "direta" e qual será dita a transformação "inversa").

As funções $\varphi^i(z^j, \tau)$ podem ser usadas para definir um mapeamento sobre o espaço das funções (trajetórias) $z^i(\tau)$,

$$\varphi^i : \; z^i(\tau) \longrightarrow z'^i(\tau) = \varphi^i(z^j(\tau), \tau). \tag{1.98}$$

[10] No espaço de configurações, transformações do tipo (1.94) com τ variando são conhecidas e têm interpretação física bem conhecida. Por exemplo, uma transformação de Galileu $x^i \rightarrow x'^i = x^i + v^i\tau + a^i$ nos dá a relação entre as coordenadas de dois referenciais inerciais, com velocidade relativa dada por v^i.

Então ψ dá a transformação inversa

$$\psi^i: \ z'^i(\tau) \longrightarrow z^i(\tau) = \psi^i(z'^j(\tau), \tau). \tag{1.99}$$

Temos $\varphi^i(\psi(z'(\tau), \tau), \tau) \equiv z'^i(\tau)$, $\psi^i(\varphi(z(\tau), \tau), \tau) \equiv z^i(\tau)$. Sempre que mudarmos a descrição de um sistema em termos de $z^i(\tau)$ para uma descrição em termos de $z'^i(\tau)$, dizemos que foi feita uma *transformação no espaço de fase*: $z^i \to z'^i$.

Comentário. Como foi mencionado, para τ fixo as expressões (1.94) têm interpretação geométrica como as funções de transição de uma mudança de coordenadas $z^i \to z'^i$. Enquanto não for necessário, é conveniente discutirmos duas interpretações diferentes de (1.94), (1.98) com τ variando.

1. A interpretação geométrica de (1.94) pode ser obtida no espaço de fase extendido $\mathbb{R}^{2n+1} = \mathbb{R}(\tau) \bigotimes \mathbb{R}^{2n}(z^i)$ com coordenadas $(\tau,\ z^i)$. Neste espaço estão definidas as transformações de coordenadas

$$\begin{pmatrix} \tau \\ z^i \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \tau' \\ z'^i \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} \tau' = f(z, \tau) \\ z'^i = \varphi^i(z, \tau). \end{cases} \tag{1.100}$$

Agora, a Eq. (1.94) é um caso particular desta mudança de coordenadas, com $\tau' \equiv \tau$. Sejam $\tau = \tau(s)$, $z^i = z^i(s)$ as equações paramétricas de uma curva no $\mathbb{R}^{2n+1}$. O caso particular é $\tau = s, z^i = z^i(s)$, onde uma das coordenadas, a saber τ, foi escolhida como parâmetro. Neste sentido as funções $z^i(\tau)$ podem ser consideradas como as equações de uma curva em $\mathbb{R}^{2n+1}$. Então $z'^i = \varphi^i(z(\tau), \tau)$ são as coordenadas desta curva no sistema de coordenadas (τ, z'^i).

2. Algumas vezes é conveniente pensar nas funções $\varphi^i(z^j, \tau)$ (1.94) como as componentes de um campo vetorial[11] (dependente do tempo) no espaço de fase z^i. Então as transformações canônicas correspondem aos campos vetoriais conservativos (veja a Eq. (2.14) adiante).

A partir das equações de Hamilton (1.92), uma pergunta natural é a seguinte: qual a forma que as equações de Hamilton adquirem na

[11] De fato, φ^i não se transforma como um vetor.

parametrização (1.94), ou, equivalentemente, se $z^i(\tau)$ obedecem às equações (1.92), então quais são as equações correspondentes para $z'^i(\tau)$? A resposta é dada pelo seguinte teorema

Proposição. Seja $z'^i = \varphi^i(z^a, \tau)$ uma transformação no espaço de fase. Os sistemas (1.92) e

$$\dot{z}'^k = \frac{\partial \varphi^k}{\partial z^i}\omega^{ij}\frac{\partial \varphi^l}{\partial z^j}\frac{\partial H(\psi(z',\tau))}{\partial z'^l} + \frac{\partial \varphi^k}{\partial \tau}\bigg|_{z=\psi(z',\tau)}, \qquad (1.101)$$

são equivalentes no seguinte sentido:

• Se $z^i(\tau)$ obedece a (1.92) então $z'^i(\tau) \equiv \varphi^i(z(\tau), \tau)$ obedece a (1.101).

• Se $z'^i(\tau)$ obedece a (1.101) então $z^i(\tau) \equiv \psi^i(z'(\tau), \tau)$ obedece a (1.92).

Demonstração. Vejamos o significado do item a). De acordo com (1.8), as equações para z' são obtidas após a substituição de z na forma (1.99) em (1.92). O que imediatamente leva à Eq. (1.101). Equivalentemente, tendo em mente a identidade $\dot{z}^i(\tau) \equiv \omega^{ij}\frac{\partial H(z)}{\partial z^j}\Big|_{z(\tau)}$, o mesmo resultado segue por cálculo direto da derivada

$$\begin{aligned}
\dot{z}'^k(\tau) &= (\varphi^k(z(\tau),\tau))^{\cdot} = \frac{\partial \varphi^k(z,\tau)}{\partial z^i}\bigg|_{z(\tau)}\dot{z}^i(\tau) + \frac{\partial \varphi^k(z,\tau)}{\partial \tau}\bigg|_{z(\tau)} = \\
&\left(\frac{\partial \varphi^k(z,\tau)}{\partial z^i}\omega^{ij}\frac{\partial H(\psi(\varphi(z,\tau),\tau))}{\partial z^j} + \frac{\partial \varphi^k(z,\tau)}{\partial \tau}\right)\bigg|_{z(\tau)} = \\
&\left(\frac{\partial \varphi^k(z,\tau)}{\partial z^i}\omega^{ij}\ \frac{\partial H(\psi(z',\tau))}{\partial z'^l}\bigg|_{z'=\varphi(z,\tau)}\frac{\partial \varphi^l(z,\tau)}{\partial z^j} + \right. \\
&\left.\frac{\partial \varphi^k(z,\tau)}{\partial \tau}\right)\bigg|_{z(\tau)} \\
&= \left(\left(\frac{\partial \varphi^k}{\partial z^i}\omega^{ij}\frac{\partial \varphi^l}{\partial z^j}\frac{\partial H(\psi(z',\tau))}{\partial z'^l} + \frac{\partial \varphi^k}{\partial \tau}\right)\bigg|_{z=\psi(z',\tau)}\right)\bigg|_{z'(\tau)}
\end{aligned} \qquad (1.102)$$

donde $z'^k(\tau)$ obedece a Eq. (1.101). Na passagem para a última linha utilizamos as identidades: $z(\tau) = \psi(z'(\tau), \tau) = \psi(z', \tau)|_{z'(\tau)}$. O ítem b) pode ser provado de forma análoga.

Adiante utilizaremos notações simplificadas, semelhantes àquelas utilizadas na geometria diferencial. No lugar de $z'^i = \varphi^i(z^j, \tau)$ assim como de $z^i = \psi^i(z'^j, \tau)$ escreveremos

$$z'^i = z'^i(z^j, \tau), \qquad z'^i = z'^i(z^j, \tau), \tag{1.103}$$

Assim a nova coordenada (valor da função) e a função são denotadas da mesma forma. As notações para as derivadas parciais[12] são

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial z^i} \equiv \partial_i, \qquad \omega^{ij}\frac{\partial}{\partial z^j} \equiv \partial^i, \\
\frac{\partial}{\partial z'^i} \equiv \partial'_i, \qquad \omega^{ij}\frac{\partial}{\partial z'^j} \equiv \partial'^i, \\
\frac{\partial A}{\partial \tau} \equiv \partial_\tau.
\end{gathered} \tag{1.104}$$

Também, algumas vezes, omitiremos a operação de substituição:

$$A(z)|_{z(z')} \longrightarrow A(z) \; ou \; A(z)|. \tag{1.105}$$

Se os lados esquerdo e direito de alguma expressão têm um "balanço" errado de variáveis, precisamos substituir $z(z')$ no lado esquerdo ou direito da equação. Nestas notações podemos escrever, por exemplo

$$z'^i(z(z', \tau_0), \tau_0) \equiv z'^i \qquad ao \quad invés \quad de \; (1.96). \tag{1.106}$$

As identidades (1.97) podem ser escritas agora na forma

$$\begin{gathered}
\frac{\partial z'^k}{\partial z^i}\frac{\partial z^i}{\partial z'^j} = \delta^k{}_j \quad ou \quad \partial_i z'^k \partial_{j'} z^i = \delta^k{}_j, \\
\frac{\partial z'^i(z, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial z'^i}{\partial z^j}\frac{\partial z^j(z', \tau)}{\partial \tau}, \\
\frac{\partial z^i(z', \tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial z^i}{\partial z'^j}\frac{\partial z'^j(z, \tau)}{\partial \tau},
\end{gathered} \tag{1.107}$$

onde, por exemplo, a última equação implica na substituição de $z'(z, \tau)$ no lado esquerdo e no primeiro termo do lado direito. Equivalentemente, podemos substituir $z(z', \tau)$ no último termo do lado

[12] Como $\partial^i(z^k\omega_{kl}) = \delta^i_l$, a derivada parcial com respeito à variável $z_l = z^k\omega_{kl}$ é escrita na forma ∂_l.

direito. As equações de Hamilton para z'^i (1.101) adquirem a forma

$$\dot{z}'^k = \{z'^k,\ z'^l\}_z\Big|_{z(z',\tau)} \frac{\partial H(z(z',\tau))}{\partial z'^l} + \frac{\partial z'^k(z,\tau)}{\partial \tau}\Bigg|_{z(z',\tau)}, \quad (1.108)$$

onde $\{z'^k,\ z'^l\}_z$ é o parêntese de Poisson calculado com relação a z.

1.8 Definição de transformação canônica

Comparando-se as equações (1.92) e (1.101) segue que uma mudança de parametrização geralmente não preserva a forma das equações de Hamilton. Isto justifica a seguinte definição

Definição. Uma transformação $z'^i = \varphi^i(z^j, \tau)$ é dita uma *transformação canônica* se para qualquer sistema Hamiltoniano ela preserva a forma das equações de Hamilton:

$$\dot{z}^i = \omega^{ij}\frac{\partial H}{\partial z^j} \xrightarrow{z \to z'} \dot{z}'^i = \omega^{ij}\frac{\partial \tilde{H}(z',\tau)}{\partial z'^j}, \quad \forall\ H, \quad \textit{alguma}\ \tilde{H}. \quad (1.109)$$

Será visto que $\tilde{H}$ é relacionada à Hamiltoniana original, H, de forma simples (em particular, para o caso das transformações canônicas independentes do tempo , temos $\tilde{H}(z') = cH(z(z')),\ c = const$).

Por construção, a composição de duas transformações canônicas também é uma transformação canônica: se $z \to z' = z'(z,\tau),\ z' \to z'' = z''(z',\tau)$ são as transformações canônicas, então $z \to z'' = z''(z'(z,\tau),\tau)$ é uma transformação canônica. É evidente que o conjunto das transformações canônicas forma um grupo, cujo produto é definido pela lei de composição dada acima.

Das Eqs. (1.108) e (1.109) segue que uma transformação canônica $z'(z,\tau)$ obedece à

$$\begin{aligned}\{z'^k,\ z'^l\}_z\Big|_{z(z',\tau)} \partial_{l'} H(z(z',\tau)) + \partial_\tau z'^k(z,\tau)\Big|_{z(z',\tau)} \\ = \omega^{kl}\partial_{l'}\tilde{H}(z',\tau), \quad \forall\ H\ \textit{e alguma}\ \tilde{H}. \quad (1.110)\end{aligned}$$

A partir desta expressão obtemos imediatamente duas consequências que serão bastante utilizadas. Primeiro, tomando a derivada ∂'_k da Eq. (1.110) temos

$$\partial'_k \left(\{z'^k, z'^l\}_z \Big|_{z(z',\tau)} \right) \partial'_l H(z(z',\tau)+ \\ +\partial'_k(\partial_\tau z'^k(z,\tau)|_{z(z',\tau)}) = 0. \tag{1.111}$$

Como isto é verdadeiro para qualquer H, os primeiro e segundo termos anulam-se separadamente. Em particular, a derivada do parêntese de Poisson deve anular-se, donde $\{z'^k, z'^l\}_z\Big|_{z(z',\tau)} = c^{kl}(\tau)$, onde c^{kl} é independente de z^i. Então podemos omitir a substituição de $z(z',\tau)$, obtendo o resultado

$$\{z'^k, z'^l\}_z = c^{kl}(\tau). \tag{1.112}$$

Segundo, denotando o lado esquerdo da Eq. (1.110) por J'^k, podemos escrevê-lo na forma $J'^k = \partial'^k \tilde{H}$. Como J'^k é a derivada de uma função escalar, obedece à identidade

$$\partial'^i J'^j = \partial'^j J'^i. \tag{1.113}$$

Detalhadamente, a identidade é dada por

$$\partial'^i \left(\partial_\tau z'^j(z,\tau)\Big|_{z(z',\tau)} \right) - (i \leftrightarrow j)+ \\ \left(\partial'^i W^{jl} - (i \leftrightarrow j)\right) \partial'_l H- \\ \left(W^{ik}\omega^{jl} - (i \leftrightarrow j)\right) \partial'^2_{kl} H = 0, \tag{1.114}$$

onde

$$W^{ij} \equiv \{z'^i, z'^j\}_z\Big|_{z(z',\tau)}. \tag{1.115}$$

Como isto é válido para qualquer H, escrevemos separadamente

$$\partial'^i \left(\partial_\tau z'^j(z,\tau)\Big|_{z(z',\tau)} \right) - (i \leftrightarrow j) = 0, \\ \partial'^a W^{bd} - \partial'^b W^{ad} = 0, \\ W^{ik}\omega^{jl} - W^{jk}\omega^{il} + W^{il}\omega^{jk} - W^{jl}\omega^{ik} = 0. \tag{1.116}$$

As expressões (1.112) e (1.116) são válidas para qualquer transformação canônica, e serão o ponto de partida para nossa análise nos capítulos 2 e 3. Em particular, será mostrado no capítulo 3 que o sistema (1.116) é equivalente à afirmação simples de que a matriz simplética é invariante sobre a ação de transformações canônicas:

$$\frac{\partial z'^k}{\partial z^i}\omega^{ij}\frac{\partial z'^l}{\partial z^j} = c\omega^{kl}, \quad c = const, \tag{1.117}$$

a menos de uma constante c. Transformações com $c = 1$ são ditas *transformações canônicas univalentes*.

Exemplos. 1. A transformação

$$q'^a = \alpha q^a, \qquad p'_a = \beta p_a \tag{1.118}$$

é uma transformação canônica. Temos $\dot{q}'^a = \alpha\dot{q}^a$ e $\dot{p}_a = \beta\dot{p}_a$. Utilizando as equações de Hamilton, temos

$$\dot{q}'^a = \alpha\frac{\beta}{\beta}\frac{\partial H}{\partial p_a} = \frac{\partial \alpha\beta H}{\partial p'_a}, \tag{1.119}$$

donde $\tilde{H} = \alpha\beta H$. A equação para $\dot{p}'_a$ mostra-se de forma análoga.

2. A transformação

$$q'^a = \alpha p^a, \qquad p'_a = \beta q_a \tag{1.120}$$

é uma transformação canônica. Neste caso, $\tilde{H} = -\alpha\beta H$. A prova segue a linha da prova do exemplo anterior.

3. A transformação

$$q'^a = p_a \tan t, \qquad p'_a = q^a \cot t \tag{1.121}$$

é uma transformação canônica. Aqui temos $\tilde{H} = -H + \frac{1}{\sin t \cos t}q'^a p'_a$. (A prova é deixada como exercício.)

Capítulo 2

Transformações canônicas no espaço de fase bidimensional

É comum nos livros-texto de mecânica clássica a discussão das transformações canônicas baseada na forma integral das condições de canonicidade e na teoria das integrais invariantes [1, 14, 15]. Esta formulação será apresentada no capítulo 4. Neste capítulo e no próximo iremos deduzir todas as propriedades das transformações canônicas por análise direta das condições de canonicidade dadas pelas Eqs. (1.112) e (1.116).

É instrutivo começarmos nossa discussão analisando as propriedades das transformações canônicas no espaço de fase bidimensional $z^i = (q, p)$, onde as propriedades básicas são obtidas por meio de cálculos elementares. Por conveniência, o material dos capítulos subsequentes é independente da leitura deste capítulo (por esta razão, temos uma certa superposição com o próximo), assim o leitor pode omitir este capítulo e ir diretamente ao próximo.

2.1 Transformações canônicas independentes do tempo

As transformações canônicas independentes do tempo são uma importante ferrramenta para a análise da estrutura de uma teoria singular.

2.1.1 Transformações canônicas independentes do tempo e matriz simplética

Descartando a dependência com τ na Eq.(1.103) obtemos transformações independentes do tempo[1] $z'^i = z'^i(z^j)$ ou, para o caso, $q' = q'(q,p)$, $p' = p'(q,p)$. Em termos das novas coordenadas, as equações de Hamilton adquirem a forma (veja a Eq. (1.108))

$$\dot{z}'^k = \{z'^k,\ z'^l\}_z\Big|_{z(z')} \frac{\partial H(z(z'))}{\partial z'^l}, \tag{2.1}$$

enquanto a definição de transformação canônica (1.109) implica (veja (1.110))

$$\{z'^k,\ z'^l\}_z\Big|_{z(z')} \frac{\partial H(z(z'))}{\partial z'^l} = \omega^{kl}\frac{\partial \tilde{H}(z')}{\partial z'^l}, \quad \forall\ H, \quad alguma\ \tilde{H}. \tag{2.2}$$

Como primeiro resultado básico, mostraremos que o grupo das transformações canônicas pode ser identificado com o grupo de transformações de coordenadas que mantém a matriz simplética, ω^{ij}, invariante a menos de uma constante. Mais exatamente, temos

Proposição. Uma transformação $z'^i = z'^i(z^j)$ é canônica se, e somente se,

$$\frac{\partial z'^k}{\partial z^i}\omega^{ij}\frac{\partial z'^l}{\partial z^j} = c\omega^{kl}, \quad ou \quad \{z'^k, z'^l\}_z = c\omega^{kl}, \quad c = const. \tag{2.3}$$

Demonstração. Dada uma transformação canônica, então esta obedece ao sistema (2.2). Mais detalhadamente,tomando o índice $c =$

[1] algumas vezes ditas *transformações de contato.*

$1, 2$ obtemos o sistema

$$\{q', p'\}| \frac{\partial H}{\partial p'} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p'}, \quad -\{q', p'\}| \frac{\partial H}{\partial q'} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial q'}. \tag{2.4}$$

Calculando a derivada da primeira equação com relação a q' e da segunda com relação a p', e somando as expressões resultantes, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial q'} (\{q', p'\}|) \frac{\partial H}{\partial p'} - \frac{\partial}{\partial q'} (\{q', p'\}|) \frac{\partial H}{\partial q'} = 0. \tag{2.5}$$

Como esta expressão é válida para qualquer H, concluímos que $\frac{\partial}{\partial q'}(\{q', p'\}|) = 0$ e $\frac{\partial}{\partial q'}(\{q', p'\}|) = 0$, o que implica $\{q', p'\} = c = const.$ No espaço de fase bidimensional os parênteses de Poisson restantes são $\{q', q'\} = 0$, $\{p', p'\} = 0$. Combinando os parênteses de Poisson, obtemos o resultado desejado: $\{z'^k, z'^l\}_z = c\omega^{kl}$. Além disso, a substituição da Eq. (2.3) na Eq. (2.2) nos dá a relação entre as Hamiltonianas original e transformada

$$\tilde{H}(z') = cH(z(z')). \tag{2.6}$$

A afirmação inversa é evidente: a Eq. (2.3) implica (2.2) com $\tilde{H}$ dada pela Eq. (2.6).

Comentários.

1. A Eq. (2.3) pode ser reescrita na forma equivalente

$$\left.\frac{\partial z^i}{\partial z'^j}\right|_{z(z')} = c^{-1}\omega^{ik}\frac{\partial z'^l}{\partial z^k}\omega_{lj}, \tag{2.7}$$

que nos mostra como a matriz inversa de $\partial_k z'^l$ pode ser calculada.

2. Definamos o parêntese de Poisson com relação às variáveis z' da seguinte maneira: $\{z'^i, z'^j\}_{z'} = \omega^{ij}$. Para o caso de transformações canônicas univalentes (c=1), a Eq. (2.3) pode ser escrita na forma

$$\{z'^i(z), z'^j(z)\}_z = \{z'^i, z'^j\}_{z'}. \tag{2.8}$$

De acordo com isto, para quaisquer duas funções definidas no espaço de fase obtemos

$$\{A(z), B(z)\}_z|_{z(z')} = \{A(z(z')), B(z(z'))\}_{z'}. \tag{2.9}$$

Estas expressões siginificam que as transformações canônicas univalentes e o cálculo do parêntese de Poisson são operações que comutam. Por esta razão, as Eqs. (2.8) e (2.9) são referidas às vezes como a propriedade de *invariância do parêntese de Poisson* sobre uma transformação canônica.

Exercício. No último parágrafo discutimos a invariância do parêntese de Poisson com relação a transformações canônicas univalentes. O mesmo é válido para transformações que não sejam univalentes?

2.1.2 Função geradora.

Seja $q \to q' = q'(q,p)$, $p \to p' = p'(q,p)$ uma transformação canônica e suponhamos que a segunda equação possa ser resolvida algebricamente com respeito a p: $p' = p'(q,p) \Rightarrow p = p(q,p')$. Transformações com esta propriedade são ditas *transformações canônicas livres*. Usando a última equação, podemos representar as variáveis q', p em termos de q, p':

$$q' = q'(q, p(q,p')) \equiv q'(q,p'), \qquad p = p(q,p'). \tag{2.10}$$

Por construção, estas expressões podem ser resolvidas com relação a q', p'. Podemos portanto trabalhar com a transformação canônica na forma (2.10), onde q, p' são consideradas como as variáveis independentes, no lugar de q, p como foi inicialmente. As identidades (1.107) adquirem a forma

$$\begin{gathered} \left.\frac{\partial q(q',p')}{\partial q'}\right|_{q'(q,p')} \frac{\partial q'(q,p')}{\partial q} = 1, \\ \left.\frac{\partial q(q',p')}{\partial q'}\right|_{q'(q,p')} \frac{\partial q'(q,p')}{\partial p'} = -\frac{\partial q(q,p')}{\partial p'}. \end{gathered} \tag{2.11}$$

Nesta seção mostraremos que existe uma maneira simples de se construir uma transformação canônica livre partindo de uma dada função $S(q,p')$, veja a Eq. (2.15) adiante.

Proposição. Dada uma transformação $z^i \to z'^i(z)$, as seguintes condições são equivalentes:

- a transformação é canônica:
$$\{z^i, z^j\}_{z'} = c^{-1}\omega^{ij}, \quad c = const, \tag{2.12}$$
- existe uma função $F(q', p')$ tal que
$$cp\frac{\partial q}{\partial q'} - p' = \frac{\partial F}{\partial q'}, \qquad cp\frac{\partial q}{\partial p'} = \frac{\partial F}{\partial p'}, \tag{2.13}$$
onde $q = q(q', p')$, $p = p(q', p')$.

Demonstração. Seja dada uma transformação canônica. O sistema (2.12) contém apenas uma equação não trivial: $\{q, p\}_{z'} = c^{-1}$, ou $\frac{\partial q}{\partial q'}\frac{\partial p}{\partial p'} - \frac{\partial q}{\partial p'}\frac{\partial p}{\partial q'} = c^{-1}$, a qual pode ser reescrita na forma

$$\frac{\partial}{\partial p'}(cp\frac{\partial q}{\partial q'} - p') - \frac{\partial}{\partial q'}\left(cp\frac{\partial q}{\partial p'}\right) = 0. \tag{2.14}$$

Isto significa que o campo vetorial com componentes $F_1 = cp\frac{\partial q}{\partial q'} - p'$, $F_2 = cp\frac{\partial q}{\partial p'}$ é conservativo: $\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 = 0$, assim existe uma função escalar $F(q', p')$ a qual obedece a Eq. (2.13). A afirmação inversa também é verdadeira: diferenciando a Eq. (2.13) com respeito a q' e p' e somando as expressões resultantes, obtemos $\{q, p\}_{z'} = c^{-1}$.

Proposição. Seja $z^i \to z'^i(z)$ uma transformação canônica livre, a qual pode ser apresentada na forma (2.10). Então existe uma função $S(q, p')$ tal que $\frac{\partial^2 S}{\partial q \partial p'} \neq 0$, e

$$q'(q, p') = \frac{\partial S}{\partial p'}, \qquad cp(q, p') = \frac{\partial S}{\partial q}. \tag{2.15}$$

Tal função S é dita a *função geradora da transformação canônica.*

Demonstração. A seguinte função

$$S(q, p') = F(q'(q, p'), p') + p'q'(q, p') \tag{2.16}$$

obedece às condições desejadas, como pode ser verificado por meio de cálculos diretos com o uso das Eqs. (2.13) e (2.11). Note que a função geradora S é definida no espaço dos (q, p').

Assim vemos que a uma dada transformação canônica podemos associar sua correspondente função geradora. É natural perguntarmos se uma dada função $S(q, p')$ define uma transformação canônica livre. Tal fato é verdadeiro, e segue do seguinte proposição

Proposição. Seja $S(q, p')$ uma função tal que $\frac{\partial^2 S}{\partial q \partial p'} \neq 0$. Então a solução das equações algébricas $q' = \frac{\partial S(q,p')}{\partial p'}$, $cp = \frac{\partial S(q,p')}{\partial q}$ em relação a q, p

$$q = q(q', p'), \qquad p = c^{-1} \left.\frac{\partial S}{\partial q}\right|_{q(q',p')} \equiv p(q', p'), \tag{2.17}$$

é uma transformação canônica livre.

Demonstração. É suficiente demonstrarmos que $\{q, p\}_{z'} = c^{-1}$, veja a Eq. (2.12). Denotando $q' - \frac{\partial S(q,p')}{\partial p'} \equiv G(q', q, p')$. A partir da identidade $G(q', q(q', p'), p') \equiv 0$ obtemos as consequências

$$\frac{\partial q}{\partial q'} = \frac{1}{S_{qp'}}, \qquad \frac{\partial q}{\partial p'} = -\frac{S_{p'p'}}{S_{qp'}}, \tag{2.18}$$

onde foi denotado $S_{qq} = \left.\frac{\partial^2 S}{\partial^2 q}\right|_{q(q',p')}$ e assim por diante. Além disso, a última equação de (2.17) implica que

$$\begin{gathered}\frac{\partial p}{\partial q'} = c^{-1} S_{qq} \frac{\partial q}{\partial q'} = c^{-1} \frac{S_{qq}}{S_{qp'}}, \\ \frac{\partial p}{\partial p'} = c^{-1}(S_{qp'} + S_{qq} \frac{\partial q}{\partial p'}) = c^{-1}(S_{qp'} - \frac{S_{qq} S_{p'p'}}{S_{qp'}}).\end{gathered} \tag{2.19}$$

Estas expressões permitem-nos calcular o parêntese de Poisson desejado, com resultado $\{q, p\}_{z'} = c^{-1}$.

Exemplos. 1. A transformação $q' = \sqrt{q} \cos 2p$, $p' = \sqrt{q} \sin 2p$ é uma transformação canônica livre com função geradora

$$S = \frac{1}{2} q \arccos \frac{q'}{\sqrt{q}} - \frac{1}{2} q' \sqrt{q - q'^2} \tag{2.20}$$

2. No fim do capítulo anterior demos três exemplos de transformações canônicas. O exemplo (3) é um exemplo de transformação canonica livre independente do tempo. Para o espaço de fase bidimensional, a função geradora é dada por $S = -\beta \sum q^i q'^i$ e a valência da transformação dada por $c = -\alpha\beta$.

Exercícios. 1. Calcule o parêntese de Poisson $\{q, p\}'_z = c^{-1}$ na demonstração do último teorema.

2. Considere a transformação linear no espaço de fase:

$$\begin{aligned} q' &= \alpha q + \beta p, \\ p' &= \alpha_1 q + \beta_1 p, \\ \alpha\beta_1 &- \alpha_1\beta \neq 0. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Mostre que esta transformação é canônica e que para $\beta \neq 0$ esta transformação é uma transformação canônica livre com F dada por

$$F = \frac{1}{2}\alpha\alpha_1 q^2 + \frac{1}{2}\beta\beta_1 p^2 + \alpha_1\beta qp \tag{2.22}$$

2.2 Transformações canônicas com dependência temporal

Aqui repetiremos a análise feita na seção 2.1 para o caso de transformações canônicas dependentes do tempo no espaço de fase bidimensional. Comparando com o caso anterior, a única diferença nos resultados finais é, de fato, a forma não trivial que a Hamiltoniana transformada adquire, veja a Eq. (2.32) adiante. O grande interesse na utilização deste tipo de transformação é para a simplificação das equações de Hamilton e são a base da teoria de Hamilton-Jacobi.

2.2.1 Transformações canônicas e matriz simplética

Para o caso de transformações dependentes do tempo no espaço de fase bidimensional $q' = q'(q, p, \tau)$, $p' = p'(q, p, \tau)$, as equações de Hamilton em termos de q', p' adquirem a forma (1.108)), enquanto a definição de transformação canônica (1.109) implica nas

Eqs. (1.110)-(1.116). Como antes, o conjunto de transformações canônicas pode ser identificado com o conjunto de transformações de coordenadas que mantêm invariante (a menos de uma constante) a matriz simplética ω^{ij}:

Proposição. Uma transformação $z'^i = z'^i(z^b, \tau)$ é canônica se, e somente se,

$$\frac{\partial z'^k}{\partial z^i}\omega^{ij}\frac{\partial z'^l}{\partial z^j} = c\omega^{kl}, \quad ou \quad \{z'^k, z'^l\}_z = c\omega^{kl}, \quad c = const. \qquad (2.23)$$

Demonstração. A) Seja dada uma transformação canônica, por hipótese, ela obedece ao sistema (1.110). Repetindo a análise da subseção (2.1.1) chegamos ao sistema

$$\frac{\partial}{\partial q'}(\{q', p'\}|) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial p'}(\{q', p'\}|) = 0, \qquad (2.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial q'}\left(\left.\frac{\partial q'(z,\tau)}{\partial \tau}\right|_{z(z',\tau)}\right) + \frac{\partial}{\partial p'}\left(\left.\frac{\partial p'(z,\tau)}{\partial \tau}\right|_{z(z',\tau)}\right) = 0. \qquad (2.25)$$

A Eq. (2.24) implica que $\{q', p'\} = c(\tau)$, ou

$$c(\tau) = \frac{\partial q'}{\partial q}\frac{\partial p'}{\partial p} - \frac{\partial p'}{\partial q}\frac{\partial q'}{\partial p}. \qquad (2.26)$$

A Eq. (2.25) afirma que o campo vetorial cujas componentes são $N_1 = \frac{\partial p'}{\partial \tau}|$, $N_2 = -\frac{\partial q'}{\partial \tau}|$ é conservativo, assim existe uma função escalar $N(q', p', \tau)$ tal que

$$\frac{\partial p'}{\partial \tau} = \left.\frac{\partial N}{\partial q'}\right|, \qquad -\frac{\partial q'}{\partial \tau} = \left.\frac{\partial N}{\partial p'}\right|. \qquad (2.27)$$

Demonstremos que isto implica $\frac{\partial c}{\partial \tau} = 0$, então $c = const.$ Diferenciando a Eq. (2.27) obtemos

$$-\frac{\partial^2 q'}{\partial z^j \partial \tau} = \left.\frac{\partial^2 N}{\partial z'^i \partial p'}\right|\frac{\partial z'^i}{\partial z^j}, \quad \frac{\partial^2 p'}{\partial z^j \partial \tau} = \left.\frac{\partial^2 N}{\partial z'^i \partial q'}\right|\frac{\partial z'^i}{\partial z^j}. \qquad (2.28)$$

Com o uso destas igualdades, a derivada da Eq. (2.26) com respeito a τ anula-se, como consequência da Eq. (2.28).

B) Suponhamos que a transformação $z'^i = z'^i(z,\tau)$ obedeça à Eq. (2.23). Primeiramente, notemos que a afirmação na página 50 é válida para o presente caso de transformações dependentes do tempo (já que apenas as derivadas parciais com relação a z'^a foram utilizadas). Assim a Eq. (2.23) implica nas equações (2.13), e diferenciando a última com respeito a τ obtemos

$$c\frac{\partial p}{\partial \tau}\frac{\partial q}{\partial z'^a} + cp\frac{\partial^2 q}{\partial \tau \partial z'^a} = \frac{\partial^2 F(z',\tau)}{\partial z'^a \partial \tau}. \tag{2.29}$$

Depois, sob a condição (2.23), as equações de Hamilton para z' (1.108) adquirem a forma

$$\begin{aligned} \dot{z}'^i = c\omega^{ij}\frac{\partial H(z(z',\tau))}{\partial z'^j} - c\omega^{ij}\frac{\partial z^l}{\partial z'^j}\omega_{lk}\frac{\partial z^k}{\partial \tau} = \\ c\omega^{ij}\frac{\partial H(z(z',\tau))}{\partial z'^j} + \omega_{ij}\frac{\partial}{\partial z'^j}\left(\frac{\partial F}{\partial \tau} - cp\frac{\partial q}{\partial \tau}\right), \end{aligned} \tag{2.30}$$

onde as Eqs. (1.107) e (2.7) foram usadas na primeira linha, e a Eq. (2.29) foi utilizada na passagem da primeira para a segunda linha. Assim a condição (2.23) implica na forma canônica das equações de Hamilton

$$\dot{z}'^i = \omega^{ij}\frac{\partial}{\partial z'^j}\left(cH(z(z',\tau) - cp\frac{\partial q}{\partial \tau} + \frac{\partial F}{\partial \tau}\right), \tag{2.31}$$

o que completa a prova.

Além disso, comparando este resultado com a Eq. (1.109) notamos a relação exata entre as Hamiltonianas original e transformada:

Corolário. Seja $z^a \to z'^i = z'^i(z,\tau)$ uma transformação canônica. Então existe uma função F tal que

$$\tilde{H}(z',\tau) = cH(z(z',\tau)) - cp(z',\tau)\frac{\partial q(z',\tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial F(z',\tau)}{\partial \tau}. \tag{2.32}$$

As propriedades da ação Hamiltoniana sobre as transformações canônicas serão discutidas na seção 3.5.

Comentário. Comparando com as transformações canônicas independentes do tempo, a Hamiltoniana transformada adquire termos extras. Podemos então formular o seguinte problema: encontrar a transformação canônica $z'^i = z'^i(z, \tau)$ tal que a Hamiltoniana transformada seja a mais simples possível, por exemplo[2] $\tilde{H} = 0$ (a transformação canônica desejada pode ser obtida em alguns casos interessantes por meio da equação de Hamilton-Jacobi, veja a seção 3.7 adiante). Isto permita encontrar a solução geral das equações Hamiltonianas. Em novas coordenadas as equações de movimento são triviais: $\dot{z}'^i = 0$, e podem ser resolvidas: $z'^i = C^i$. Depois disto, resolvendo as equações algébricas $z'^i(z, \tau) = C^i$ (onde $z'^i(z^j, \tau)$ são as funções conhecidas que definem a transformação canônica), obtemos a solução geral das equações de movimento na parametrização inicial: $z^i = z^i(\tau, C^j)$.

2.2.2 Função geradora.

Proposição. Seja $q \to q' = q'(q, p, \tau)$, $p \to p' = p'(q, p, \tau)$ uma transformação canônica livre, portanto a partir destas expressões escrevemos

$$q' = q'(q, p', \tau), \qquad p = p(q'(q, p', \tau), p', \tau) \equiv p(q, p', \tau). \tag{2.33}$$

Então

a) existe uma função $S(q, p', \tau)$ com $\frac{\partial S}{\partial q \partial p'} \neq 0$ tal que

$$q'(q, p', \tau) = \frac{\partial S}{\partial p'}, \qquad cp(q, p', \tau) = \frac{\partial S}{\partial q}; \tag{2.34}$$

b) a Hamiltoniana transformada (2.32) em termos das variáveis q, p' adquire a forma

$$\tilde{H}(z', \tau)\Big|_{q'(q,p',\tau)} = cH(q, p(q, p', \tau)) + \frac{\partial S(q, p', \tau)}{\partial \tau}. \tag{2.35}$$

[2]Note que isto não é possível no caso de transformações independentes do tempo: se $H(z)$ depende essencialmente de todas as variáveis, então o mesmo é válido para $\tilde{H}(z(z'))$, veja a Eq. (2.6).

Demonstração. a) A prova é similar àquela feita para a Eq.(2.15), como apenas as derivadas parciais com relação a q, p foram usadas. b) Para substituir $q'(q, p', \tau)$ na Eq. (2.32) precisamos de duas identidades. A primeira, a partir de $q(q'(q, p', \tau), p', \tau) \equiv q$ segue que

$$\left.\frac{\partial q(q', p', \tau)}{\partial \tau}\right|_{q'(q,p',\tau)} = -\left.\frac{\partial q}{\partial q'}\right|_{q'} \frac{\partial q'(q, p', \tau)}{\partial \tau}. \tag{2.36}$$

A segunda, a partir da expressão

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \tau} F(q'(q, p', \tau), p', \tau) = \\ &= \left.\frac{\partial F(z', \tau)}{\partial q'}\right|_{q'(q,p',\tau)} \frac{\partial q'}{\partial \tau} + \left.\frac{\partial F(z', \tau)}{\partial \tau}\right|_{q'(q,p',\tau)} \end{aligned} \tag{2.37}$$

encontramos

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial F(z', \tau)}{\partial \tau}\right|_{q'(q,p',\tau)} = &\left(-cp \left.\frac{\partial q(z', \tau)}{\partial q'}\right|_{q'(q,p',\tau)} + p'\right) \frac{\partial q'(q, p', \tau)}{\partial \tau} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \tau} F(q'(q, p', \tau), p', \tau), \end{aligned} \tag{2.38}$$

onde a Eq. (2.13) foi usada. A Eq. (2.35) segue da Eq. (2.32) utilizando estas igualdades e a forma manifesta de S, veja a Eq. (2.16).

Como antes, o resultado pode ser invertido no seguinte sentido:

Proposição. Seja $S(q, p', \tau)$ uma dada função que obedece à propriedade $\frac{\partial^2 S}{\partial q \partial p'} \neq 0$ para todo τ. Então a solução das equações algébricas $q' = \frac{\partial S(q,p',\tau)}{\partial p'}$, $cp = \frac{\partial S(q,p',\tau)}{\partial q}$ com relação a q, p

$$q = q(q', p', \tau), \qquad p = c^{-1} \left.\frac{\partial S}{\partial q}\right|_{q(q',p',\tau)} \equiv p(q', p', \tau), \tag{2.39}$$

é uma transformação canônica livre.

A demonstração é idêntica ao caso das transformações independentes do tempo, veja a pág. 51, já que apenas as derivadas parciais com relação a q', p' forma utilizadas naquele caso.

Exemplo. No fim do cap.1, foi dado um exemplo de transformação canônica livre dependente do tempo, que no caso bidimensional é dada por $q' = p\tan t$, $p' = q\cot t$. A função geradora é dada por

$$S = -qq'\cot t, \tag{2.40}$$

e a valência dada por $c = -1$.

Capítulo 3

Propriedades das transformações canônicas

Como vimos na seção 1.8, em geral a forma canônica das equações de Hamilton não é preservada por uma transformação no espaço de fase. As transformações com a propriedade de manter a forma das equações foram ditas transformações canônicas. Neste capítulo discutiremos suas propriedades para o caso de um espaço de fase com dimensão arbitrária.

Começaremos mostrando que a equação $\{z'^i, z'^j\}_z = c\{z^i, z^j\}_z$, que representa a invariância do parêntese de Poisson sob uma transformação $z \to z'(z, \tau)$, pode ser reescrita na seguinte *forma equivalente*: $\partial'^i E^j(z') - \partial'^j E^i(z') = 0$. Isto significa que E^i são as componentes de um campo vetorial conservativo, então existe um potencial E, tal que $E^i = \partial'^i E$. Assim, a invariância do parêntese de Poisson é equivalente à afirmação de que as funções de transição $z'^i(z, \tau)$ podem ser utilizadas na construção de um campo conservativo. Este fato permite-nos mostrar dois fatos centrais. Primeiro, que as transformações canônicas são as únicas transformações que mantêm o parêntese de Poisson invariante (a menos de uma constante). Isto nos fornece um jeito simples para verificarmos se uma dada transformação é canônica. Em segundo lugar, a qualquer transformação canônica[1], podemos associar uma função geradora: a função, cujas derivadas parciais nos fornecem as funções de transição da transformação. A função geradora pode ser obtida a partir do potecial acima mencionado de uma maneira simples. Entre outras coisas, ela nos dá uma forma simples de construirmos exemplos de transformações canônicas.

Além disso, mostraremos ainda que a Hamiltoniana tem uma lei de transformação não-trivial sob transformações canônicas dependentes do tempo (ela não se transforma como uma função escalar). Isto implica na possibilidade de buscarmos por uma transformação que deixe a Hamiltoniana trivial ($\tilde{H} = 0$), o que levaria a equações de movimento também triviais no novo sistema de coordenadas. Desta forma, o problema de obtermos a solução geral das equações de Hamilton pode ser trocado pelo problema de encontrarmos a função geradora da transformação. A função geradora obedece à equação de Hamilton-Jacobi, que pode ser resolvida em vários casos.

3.1 Invariância dos parênteses de Poisson

Em geral, uma transformação de coordenadas no espaço de fase altera a forma das equações de Hamilton, de acordo com a Eq. (1.101)

$$\dot{z}'^k = \left(\frac{\partial z'^k}{\partial z^i} \omega^{ij} \frac{\partial z'^l}{\partial z^j} \right)\Bigg|_{z(z',\tau)} \frac{\partial H(z(z',\tau))}{\partial z'^l} + \frac{\partial z'^k}{\partial \tau}\Bigg|_{z(z',\tau)} . \qquad (3.1)$$

A partir desta equação esperamos que a invariância da forma das equações de movimento esteja intimamente ligada com as propriedades de simetria da matriz simplética. De fato, para as transformações independentes do tempo, a invariância de ω: $\partial_i z'^k \, \omega^{ij} \, \partial_j z'^l = \omega^{kl}$ implica na invariância da forma das equações de Hamilton.

[1]Adiante discutiremos apenas as transformações canônicas livres. Para uma transformação canônica arbitrária a situação é análoga, veja [14].

Podemos igualmente falar da invariância do parêntese de Poisson, já que a equação acima também pode ser escrita como $\{z'^k, z'^l\}_z = \{z^k, z^l\}_z$, veja (1.108). Nesta seção estabeleceremos uma relação exata: o conjunto de transformações que preserva a forma canônica das equações de Hamilton coincide com o conjunto que mantém invariante (a menos de uma constante) o parêntese de Poisson.

Proposição. Uma transformação $z^i \to z'^i = z'^i(z^j, \tau)$ é canônica se, e somente se, ela obedece à equação

$$\frac{\partial z'^k}{\partial z^i}\omega^{ij}\frac{\partial z'^l}{\partial z^j} = c\omega^{kl}, \quad ou \quad \{z'^k, z'^l\}_z = c\omega^{kl}, \quad c = const. \tag{3.2}$$

Comentário. Denotemos a matriz de Jacobi $\frac{\partial z'^k}{\partial z^i}$ da transformação como $J^k{}_j$. Então a Eq. (3.2) se escreva $J\ \omega\ J^T = c\ \omega$. Calculando determinante os ambos os lados obtemos, no caso de transformação canonica univalente

$$\det J = \pm 1, \qquad for\ all \qquad z, \tau. \tag{3.3}$$

Demonstração. A) Seja dada uma transformação canônica, a qual obedece, por hipótese, ao sistema (1.116), que é reescrito aqui novamente

$$\partial'^i(\partial_\tau z'^j(z,\tau)\big|_{z(z',\tau)}) - (i \leftrightarrow j) = 0, \tag{3.4}$$

$$\partial'^i W^{jl} - \partial'^j W^{il} = 0, \tag{3.5}$$

$$W^{ik}\omega^{jl} - W^{jk}\omega^{il} + W^{il}\omega^{jk} - W^{jl}\omega^{ik} = 0. \tag{3.6}$$

Aqui foi denotado

$$W^{ij} \equiv \{z'^i, z'^j\}_z\big|_{z(z',\tau)}. \tag{3.7}$$

Portanto, precisamos mostrar que $W^{ij} = c\omega^{ij}$.

A Eq. (3.4) afirma que o campo vetorial com componentes $\partial_\tau z'^k|$ é conservativo. Então ele pode ser representado localmente como o gradiente de um campo escalar N: $\partial_\tau z'^k| = \partial'^k N(z',\tau)$ ou, equivalentemente $\partial_\tau z'^k = \omega^{kl}\frac{\partial N}{\partial z'^l}|$. Nós utilizaremos adiante a derivada desta expressão, isto é

$$\frac{\partial^2 z'^k(z,\tau)}{\partial z^i \partial\tau} = \omega^{kl}\frac{\partial^2 N(z',\tau)}{\partial z'^n \partial z'^l}\bigg|_{z'(z,\tau)}\frac{\partial z'^n}{\partial z^i}. \tag{3.8}$$

Analogamente, a Eq. (3.5) implica $W^{jl} = 2\partial'^j G^l$ para cada l fixo. Além disso, da antissimetria de W: $W^{jl} = -W^{lj}$, segue a seguinte restrição sobre G^l: $\partial'^j G^l = -\partial'^l G^j$ para quaisquer j, l. O que leva-nos a reescrever a expressão para W na forma explicitamente antisimétrica: $W^{jl} = \partial'^j G^l - \partial'^l G^j$. As duas últimas equações implicam que W independe de z'^i. Realmente, a substituição da última equação em (3.5) nos leva à expressão $-\partial'^i\partial'^l G^j + \partial'^j\partial'^l G^i = \partial'^l W^{ji} = 0$, para quaisquer i, j, l. Assim W independe de z' e pode ser apenas função de τ: $W^{ij} = W^{ij}(\tau)$.

Agora, contraindo a Eq. (3.6) com ω_{li} temos imediatamente

$$W^{jk} = c(\tau)\omega^{jk}, \tag{3.9}$$

onde $c(\tau) \equiv \frac{1}{n}W^{il}(\tau)\omega_{li} = \frac{1}{n}\frac{\partial z'^k}{\partial z^i}\omega^{ij}\frac{\partial z'^l}{\partial z^j}\Big|_{z(z',\tau)}\omega_{lk}$ ou, equivalentemente, $c(\tau) = \frac{1}{n}\frac{\partial z'^k}{\partial z^i}\omega^{ij}\frac{\partial z'^l}{\partial z^j}\omega_{lk}$. A derivada desta expressão com relação a τ nos dá, usando a Eq. (3.8)

$$\frac{dc}{d\tau} = \frac{2}{n}\frac{\partial^2 z'^k}{\partial\tau\partial z^i}\omega^{ij}\frac{\partial z'^l}{\partial z^i}\omega_{lk} = \frac{2}{n}\frac{\partial^2 N}{\partial z'^n \partial z'^l}\bigg|\frac{\partial z'^n}{\partial z^i}\omega^{ij}\frac{\partial z'^l}{\partial z^j}. \tag{3.10}$$

Esta expressão é identicamente nula devido à simetria em n, l e à antissimetria em i, j. Assim o coeficiente c na Eq. (3.9) é uma constante, o que completa a primeira parte da prova.

B) Suponhamos que $z'^i(z^j,\tau)$ obedece à Eq. (3.2), que pode ser reeescrita na forma equivalente

$$\frac{\partial z'^i}{\partial z^l}\bigg|_{z(z',\tau)} = c\omega^{ij}\frac{\partial z^k}{\partial z'^j}\omega_{kl}. \tag{3.11}$$

Utilizando as Eqs. (3.2), (1.107) e (3.11), as equações de Hamilton para as variáveis z' (1.108) podem ser escritas na forma

$$\dot{z}'^k = c\omega^{kl}\frac{\partial H(z(z',\tau))}{\partial z'^l} - c\omega^{kl}\frac{\partial z^i}{\partial z'^l}\omega_{ij}\frac{\partial z^j(z',\tau)}{\partial \tau}. \qquad (3.12)$$

Para confirmar que estas equações estão na forma canônica, é suficiente mostrar que o último termo pode ser escrito como $\omega^{kl}\frac{\partial}{\partial z'^l}(\ldots)$. Precisamos do seguinte lema

Lema. Seja $z^i \to z'^i = z'^i(z^j, \tau)$ uma dada transformação. Então as seguintes condições são equivalentes:

- a forma simplética é invariante

$$\frac{\partial z'^k}{\partial z^i}\omega^{ij}\frac{\partial z'^l}{\partial z^j} = c\omega^{kl}, \quad c = const; \qquad (3.13)$$

- existe uma função $E(z', \tau)$ tal que

$$cz^j(z',\tau)\omega_{ji}\frac{\partial z^i(z',\tau)}{\partial z'^l} + \omega_{lj}z'^j = 2\frac{\partial E(z',\tau)}{\partial z'^l}. \qquad (3.14)$$

Demonstração. Suponhamos que a primeira afirmação seja válida. Por meio do uso da Eq. (3.11), ela pode ser reescrita na forma equivalente[2] (aqui relembramos que $\frac{\partial}{\partial z'_k} = \omega^{kl}\frac{\partial}{\partial z'^l}$)

$$c\frac{\partial z^j}{\partial z'_k}\omega_{jn}\frac{\partial z^n}{\partial z'_l} = -\omega^{kl}. \qquad (3.15)$$

Devido a antissimetria em k, l a equação pode ser reescrita na forma

$$c\frac{\partial z^j}{\partial z'_k}\omega_{jn}\frac{\partial z^n}{\partial z'_l} - c\frac{\partial z^j}{\partial z'_l}\omega_{jn}\frac{\partial z^n}{\partial z'_k} = -2\omega^{kl}, \qquad (3.16)$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial z'_k}\left(cz^j\omega_{jn}\frac{\partial z^n}{\partial z'_l} + z'^l\right) - \frac{\partial}{\partial z'_l}\left(cz^j\omega_{jn}\frac{\partial z^n}{\partial z'_k} + z'^k\right) = 0. \qquad (3.17)$$

[2] O lado esquerdo desta expressão é conhecido como *parêntese de Lagrange*.

Isto é, a condição (3.13) de invariância do parêntese de Poisson é reescrita como a condição para que um campo vetorial seja conservativo. Isto implica

$$cz^j\omega_{jn}\frac{\partial z^n}{\partial z'_l} + z'^l = 2\frac{\partial E}{\partial z'_l} \equiv 2\omega^{ln}\frac{\partial E}{\partial z'^m}, \tag{3.18}$$

ou

$$cz^j\omega_{jn}\frac{\partial z^n}{\partial z'^i} + \omega_{in}z'^n = 2\frac{\partial E}{\partial z'^i}, \tag{3.19}$$

como foi afirmado. A partir das equações (3.17) e (3.18) notamos que E é definida a menos de uma função arbitrária $e(\tau)$.

Agora suponhamos que a segunda afirmação seja verdadeira. Isto implica na Eq. (3.17) e, como o cálculo pode ser invertido, obtemos a Eq. (3.15). Equivalentemente a forma desta expressão é $c\frac{\partial z^i}{\partial z'^j} = \omega^{ik}\frac{\partial z'^l}{\partial z^k}\omega_{lj}$. Usando isto na Eq. (3.15) temos o resultado desejado, a Eq. (3.13).

A fim de analizarmos o último termo da Eq. (3.12), precisamos da derivada da Eq. (3.14) com respeito a τ. Obtendo

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial}{\partial z'^l}\frac{\partial E}{\partial \tau} &= c\frac{\partial z^j}{\partial \tau}\omega_{ji}\frac{\partial z^i}{\partial z'^l} + cz^j\omega_{ji}\frac{\partial^2 z^i}{\partial \tau \partial z'^l} = \\ -c\frac{\partial z^i}{\partial z'^l}\omega_{ij}\frac{\partial z^j}{\partial \tau} &+ \frac{\partial}{\partial z'^l}\left(cz^j\omega_{ji}\frac{\partial z^i}{\partial \tau}\right) - c\frac{\partial z^j}{\partial z'^l}\omega_{ji}\frac{\partial z^i}{\partial \tau} = \\ &-2c\frac{\partial z^i}{\partial z'^l}\omega_{ij}\frac{\partial z^j}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial z'^l}\left(cz^j\omega_{ji}\frac{\partial z^i}{\partial \tau}\right), \end{aligned} \tag{3.20}$$

ou

$$-c\frac{\partial z^i}{\partial z'^l}\omega_{ij}\frac{\partial z^j}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial z'^l}\left(\frac{\partial E}{\partial \tau} - \frac{c}{2}z^i\omega_{ij}\frac{\partial z^j}{\partial \tau}\right). \tag{3.21}$$

Usando este resultado na Eq. (3.12), podemos reescrevê-las na forma canônica

$$\dot{z}'^k = \omega^{kl}\frac{\partial}{\partial z'^l}\left(cH(z(z',\tau)) - \frac{c}{2}z^i\omega^{ij}\frac{\partial z^j}{\partial \tau} + \frac{\partial E(z',\tau)}{\partial \tau}\right), \tag{3.22}$$

o que completa a demonstração.

Como foi mencionado anteriormente, a função E é definida a menos de uma função arbitrária $e(\tau)$. Notamos que esta $e(\tau)$ não contribui com as equações de movimento (3.21).

O resultado obtido significa que a invariância (3.2) do parêntese de Poisson pode ser tomada como a definição de transformação canônica.

Comparando nosso resultado (3.22) com a Eq. (1.109), temos a relação exata entre as Hamiltonianas original e transformada

Corolário. Seja $z^i \to z'^i = z'^i(z, \tau)$ uma transformação canônica. Então existe uma função E tal que

$$\tilde{H}(z', \tau) = cH(z(z', \tau)) - \frac{c}{2} z^i \omega_{ij} \frac{\partial z^j}{\partial \tau} + \frac{\partial E(z', \tau)}{\partial \tau}. \tag{3.23}$$

Para transformações canônicas independentes do tempo e univalentes a Hamiltoniana transforma-se como uma função escalar

$$\tilde{H}(z') = H(z(z')). \tag{3.24}$$

Assim, se $H(z)$ representa a energia de um sistema, o mesmo é válido para $\tilde{H}(z')$.

Exemplo. Consideremos a transformação $q^a \to q'^a = q^a, p_a \to p'_a = p_a + A_a(q)$. Temos $\{q'^a, q'^b\}_z = 0$, $\{q'^a, p'_b\}_z = \delta^a{}_b$, $\{p'_a, p'_b\}|_z = -\frac{\partial A_b}{\partial q^a} + \frac{\partial A_a}{\partial q^b}$. Esta expressão anula-se para um campo vetorial conservativo: $A_a = \frac{\partial A}{\partial q^b}$, então $q'^a = q^a$, $p'_a = p_a + \frac{\partial A}{\partial q^a}$ é uma transformação canônica.

Exercício. Obtenha um exemplo de transformação canônica da forma $z^i \to z'^i = z^i + B^i(z^j)$.

3.2 Transformações canônicas infinitesimais. A Hamiltoniana como a geradora da evolução

Intuitivamente, uma transformação canônica infinitesimal é aquela que não é muito diferente da identidade: $z'^i = z^i + \delta z^i$, $\delta z^i \ll 1$. Sua propriedade central é o fato de ser gerada por uma única função junto com o parêntese de Poisson: $\delta z^i = \{z^i, \Phi\}$. Como veremos adiante, as transformações canônicas finitas tem uma estrutura parecida.

Consideremos uma família de transformações canônicas univalentes descrita por um parâmetro λ, a qual inclui a identidade para $\lambda = 0$

$$z^i \to z'^i(z^j, \lambda), \qquad z'^i(z^j, 0) = z^i. \tag{3.25}$$

Podemos utilizar a expansão de Taylor no ponto $\lambda = 0$

$$z'^i(z^j, \lambda) = z^i + G^i(z)\lambda + O(\lambda^2), \qquad \lambda \ll 1, \tag{3.26}$$

onde $O(\lambda^2)$ indica todos os termos de ordem mais alta que a primeira potência de λ. Para pequenos valores de do parâmetro: $\lambda \ll 1$, o segundo termo da expansão é o responsável pela contribuição na transformação. A Eq. (3.26) com os termos $O(\lambda^2)$ desprezados é conhecida como uma *transformação canônica infinitesimal*. A função $G^i = \partial_\lambda z'^i(z, \lambda)|_{\lambda=0}$ determina as propriedades da transformação.

Proposição. Para uma transformação canônica infinitesimal existe um *gerador* $\Phi(z)$, tal que

$$G^i = \{z^i, \Phi\} = \omega^{ij}\partial_j \Phi. \tag{3.27}$$

De acordo com esta equação, qualquer transformação canônica infinitesimal (3.26) possui a forma

$$z'^i(z^j, \lambda) = z^i + \{z^i, \Phi\}\lambda + O(\lambda^2). \tag{3.28}$$

Assim as propriedades de uma transformação canônica infinitesimal são determinadas por uma única função Φ.

Demonstração. Vejamos quais restrições sobre as funções G^i seguem da condição de canonicidade da transformação (3.26). A substituição de (3.26) na Eq. (3.2) nos dá

$$\left(\frac{\partial G^i}{\partial z^k}\omega^{kj} + \omega^{ik}\frac{\partial G^j}{\partial z^k}\right)\lambda + O(\lambda^2) = 0. \tag{3.29}$$

Como isto vale para qualquer λ, o termo entre parênteses anula-se separadamente, ou seja, temos $\frac{\partial G^i}{\partial z^k}\omega^{kj}+\omega^{ik}\frac{\partial G^j}{\partial z^k}=0$. A contração desta expressão com $\omega_{mi}\omega_{jn}$ nos dá a equação $\partial_n(\omega_{mk}G^k)-\partial_m(\omega_{nk}G^k)=0$. Ela afirma que $\omega_{mk}G^k$ são as componentes de um campo conservativo. Então existe um potencial Φ tal que $\omega_{mk}G^k=\partial_m\Phi$, o que completa a prova.

Esta afirmação pode ser invertida no seguinte sentido: qualquer função $\Phi(z)$ determina uma transformação canônica infinitesimal $z^i\rightarrow z'^i=z^i+\{z^i,\Phi\}\lambda$, mesmo

$$\{z'^i,z'^j\}=\omega^{ij}+O(\lambda^2). \tag{3.30}$$

Seja $F=\{A(z^i),B(z^i),\ldots\}$ um conjunto de funções definidas no espaço de fase. As transformações de coordenadas $z\rightarrow z'$ podem ser utilizadas para definirmos a *transformação induzida* no conjunto de acordo com a regra:

$$z\rightarrow z' \quad \Rightarrow \quad A\rightarrow A', \quad \textit{onde} \quad A'(z')=A(z), \tag{3.31}$$

ou seja, o valor da função transformada A' em z' coincide com o valor de A no ponto correspondente z. Então o conjunto F é dito *espaço das funções escalares*. A diferença

$$\delta_f A(z)\equiv A'(z)-A(z), \tag{3.32}$$

é dita a *variação da forma* da função. Para uma transformação canônica infinitesimal a variação é governada pelo gerador:

$$\delta_f A(z)=\{\Phi,A\}\lambda+O(\lambda^2). \tag{3.33}$$

Para confirmar esta afirmação, façamos a substituição da Eq. (3.26) na definição (3.31): $A'(z+\{z^i,\Phi\}\lambda+O(\lambda^2))=A(z)$, ou

$$A'(z)+\partial_i A'(z)\{z^i,\Phi\}\lambda+O(\lambda^2)=A(z), \tag{3.34}$$

o que implica

$$\delta_f A(z)=\{\Phi,A'(z)\}\lambda+O(\lambda^2)=$$

$$\{\Phi, A(z) - O(\lambda)\}\lambda + O(\lambda^2) = \{\Phi, A\}\lambda + O(\lambda^2). \qquad (3.35)$$

Na passagem da primeira para a segunda linha utilizamos a Eq. (3.34) novamente.

Como exemplo, mostremos que a evolução de um sistema físico pode ser considerada como uma sucessão de transformações canônicas infinitesimais. Denotemos a solução geral das equações de Hamilton para algum sistema físico como $z^i(c^j, \tau)$, onde c^j são constantes arbitrárias. Consideremos a trajetória que passa pelo ponto z'^i. As constantes c^i podem ser escolhidas de forma que a trajetória passe pelo ponto z'^i no instante $\tau = 0$: $z^i(c^j, 0) = z'^i$. A última equação pode ser resolvida: $c^j = c^j(z')$. A substituição deste resultado na solução geral nos dá esta em função da posição inicial: $z^i(z'^j, \tau)$, $z^i(z'^j, 0) = z'^i$. Consideremos (z', τ) e (z, τ) como dois sistemas de coordenadas no espaço de fase extendido. Como $z(z', 0) = z'$, a solução geral relaciona as posições inicial z' e final $z(z', \tau)$ do sistema[3].

Podemos expandir a transformação em série de Taylor para $\tau \ll 1$

$$\begin{aligned} z^i(z', \tau) &= z'^i + \partial_\tau z^i|_0 \tau + O(\tau^2) \\ &= z'^i + \{z'^i, H(z')\}\tau + O(\tau^2), \end{aligned} \qquad (3.36)$$

onde as equações de Hamilton foram utilizadas. A comparação desta expressão com a Eq. (3.28) leva-nos à conclusão de que a evolução infinitesimal de um sistema físico é uma transformação canônica infinitesimal. Além disso, temos a Hamiltoniana do sistema como o gerador da transformação.

[3]Se trabalharmos com a forma inicial da solução geral: $z(c, \tau)$, ela é uma transformação entre os sistemas (z^i_0, τ) e (z^i_1, τ), onde as posições inicial e final em τ_0 e τ_1 são $z^i_0 = z^i(c, \tau_0)$, $z^i_1 = z^i(c, \tau_1)$.

3.3 Função geradora

Nesta seção discutiremos a classe suficientemente grande de transformações ditas *transformações canônicas livres*. Elas apresentam a propriedade de serem geradas por funções do espaço de fase (as funções de transição de uma dada transformação canônica livre aparecem como derivadas parciais da função geradora, veja a Eq. (3.43) adiante). Intuitivamente, esta propriedade pode ser esperada a partir da observação de que qualquer transformação canônica é relacionada a um campo vetorial conservativo, veja as Eqs. (3.17)-(3.19). O potencial deste campo é, de fato, a função geradora.

3.3.1 Transformações canônicas e a função $F(z', \tau)$

Seja $q \to q'^a = q'^a(q, p, \tau)$, $p^a \to p'^a = p'^a(q, p, \tau)$ uma transformação canônica tal que as equações que determinam p' possam ser resolvidas algebricamente com respeito a p: $p'^a = p'^a(q, p, \tau) \Rightarrow p^a = p^a(q, p', \tau)$. Transformações com esta propriedade são ditas *transformações canônicas livres*. Usando a última equação, podemos representar as variáveis q' e p em termos de q e p':

$$q'^a = q'^a(q, p(q, p', \tau), \tau) \equiv q'^a(q, p', \tau), \qquad p^a = p^a(q, p', \tau). \quad (3.37)$$

Por construção, estas expressões podem ser resolvidas com respeito a q' e p'. Podemos então trabalhar com a transformação canônica na forma (3.37), onde q e p' são consideradas como variáveis independentes, no lugar da forma original com q e p independentes.

Para utilizarmos mais tarde, reescrevamos o potencial $E(z', \tau)$ definido, pela Eq. (3.14), em uma forma equivalente, porém menos simétrica. Assim escrevamos as partes do sistema (3.14) para q' e p' separadamente

$$-cq^b \frac{\partial p_b}{\partial q'^a} + cp_b \frac{\partial q^b}{\partial q'^a} - p'_a = 2\frac{\partial E(z', \tau)}{\partial q'^a},$$

$$-cq^b\frac{\partial p_b}{\partial p'_a}+cp_b\frac{\partial q^b}{\partial p'_a}+q'^a=2\frac{\partial E(z',\tau)}{\partial p'_a}. \tag{3.38}$$

Imediatamente notamos que para a função

$$F(z',\tau)\equiv E(z',\tau)+\frac{c}{2}q^b(z',\tau)p_b(z',\tau)-\frac{1}{2}q'^bp'_b, \tag{3.39}$$

as equações adquirem a forma

$$cp_b\frac{\partial q^b}{\partial q'^a}-p'_a=\frac{\partial F(z',\tau)}{\partial q'^a}, \qquad cp_b\frac{\partial q^b}{\partial p'_a}=\frac{\partial F(z',\tau)}{\partial p'_a}. \tag{3.40}$$

Portanto o lema à pág. 62 pode ser reformulado em termos de F: a invariância da forma simplética (3.13) sob ação de uma transformação canônica é equivalente à existência do potencial que obedece a Eq. (3.40).

Como será discutido adiante, a solução geral das equaçõs de Hamilton pode ser identificada com uma transformação canônica que relaciona os estados inicial e final. A função F correspondente é dada pela ação Hamiltoniana, veja a seção 3.8.

Exercício. Mostre que sob uma transformação canônica, as Hamiltonianas original e transformada são relacionadas como segue

$$\tilde{H}(z',\tau)=cH(z(z',\tau))-cp_a(z',\tau)\frac{\partial q^a(z',\tau)}{\partial\tau}+\frac{\partial F(z',\tau)}{\partial\tau}. \tag{3.41}$$

3.3.2 A função geradora $S(q,p',\tau)$

Primeiro demonstremos que para uma dada transformação canônica livre existe uma função geradora.

Proposição. Seja $q^a\to q'^a=q'^a(q,p,\tau),\ p_a\to p'_a=p'_a(q,p,\tau)$ uma transformação canônica livre, portanto a partir destas expressões temos

$$q'^a=q'^a(q,p(q,p',\tau),\tau)\equiv q'^a(q,p',\tau), \quad p^a=p^a(q,p',\tau). \tag{3.42}$$

Então

- existe a *função geradora* $S(q,p',\tau)$ que obedece à propriedade $\frac{\partial S}{\partial q^a \partial p'_b} \neq 0$ tal que

$$q'^a(q,p',\tau) = \frac{\partial S}{\partial p'_a}, \qquad cp_a(q,p',\tau) = \frac{\partial S}{\partial q^a}. \tag{3.43}$$

  Se a função $F(z',\tau)$ (3.39) é conhecida, a função geradora pode ser tomada na forma

$$S(q,p',\tau) = F(q'(q,p',\tau),p',\tau) + p'_a q'^a(q,p',\tau), \tag{3.44}$$

- a Hamiltoniana transformada (3.41), apresentada como função de q, p', tem a forma

$$\tilde{H}(z',\tau)\Big|_{q'(q,p',\tau)} = cH(q,p(q,p',\tau)) + \frac{\partial S(q,p',\tau)}{\partial \tau}. \tag{3.45}$$

Demonstração. A partir da identidade $q^a(q'(q,p',\tau),p',\tau) \equiv q^i$ segue que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q^a(q',p',\tau)}{\partial q'^c}\Big|_{q'(q,p',\tau)} \frac{\partial q'^c(q,p',\tau)}{\partial q^b} &= \delta^a{}_b, \\ \frac{\partial q^a(q',p',\tau)}{\partial q'^c}\Big|_{q'(q,p',\tau)} \frac{\partial q'^c(q,p',\tau)}{\partial p'_b} &= -\frac{\partial q^a(q',p',\tau)}{\partial p'_b}\Big|_{q'(q,p',\tau)}, \\ \frac{\partial q^a(q',p',\tau)}{\partial \tau}\Big|_{q'(q,p',\tau)} &= -\frac{\partial q^a(q',p',\tau)}{\partial q'^b}\Big|_{q'(q,p',\tau)} \frac{\partial q'^b(q,p',\tau)}{\partial \tau}. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Usando a última identidade, obtemos, a partir da Eq.(3.39),

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(q',p',\tau)}{\partial \tau}\Big|_{q'(q,p',\tau)} &= cp_b \frac{\partial q^b(q',p',\tau)}{\partial \tau}\Big|_{q'(q,p',\tau)} + \\ & \frac{\partial F(q'(q,p',\tau),p',\tau)}{\partial \tau} + p'_b \frac{\partial q'^b(q,p',\tau)}{\partial \tau}. \end{aligned} \tag{3.47}$$

Utilizando estas identidades, as afirmações do teorema podem ser verificadas por cálculos diretos, começando com Eqs. (3.40), (3.41).

Exercício. Obtenha as afirmações do teorema anterior como sugerido acima.

Este resultado pode ser invertido, fornecendo uma receita simples para a construção de uma transformação canônica livre.

Proposição. Seja $S(q^a, p'_b, \tau)$ uma dada função que satisfaça à propriedade $\frac{\partial^2 S}{\partial q^a \partial p'_b} \neq 0$ para todo τ. Resolvamos as equações algébricas $q'^a = \frac{\partial S(q,p',\tau)}{\partial p'_a}$, $cp_a = \frac{\partial S(q,p',\tau)}{\partial q^a}$ com relação a q, p. Então a solução

$$q^a = q^a(q', p', \tau), \qquad p_a = c^{-1} \left. \frac{\partial S}{\partial q^a} \right|_{q(q',p',\tau)} \equiv p_a(q', p', \tau), \quad (3.48)$$

é uma transformação canônica livre.

Demonstração. Precisamos mostrar que as funções $z^i(z', \tau)$ satisfazem as relações $\frac{\partial z^i}{\partial z'^k} \omega^{kl} \frac{\partial z^j}{\partial z'^l} = c^{-1} \omega^{ij}$. Consideremos, por exemplo

$$\frac{\partial q^a}{\partial q'^c} \frac{\partial p_b}{\partial p'_c} - \frac{\partial p_b}{\partial q'^c} \frac{\partial q^a}{\partial p'_c} = c^{-1} \delta^a{}_b. \quad (3.49)$$

As derivadas presentes nesta expressão podem ser calculadas a partir da identidade $q'^a \equiv \left. \frac{\partial S(q,p',\tau)}{\partial p'_a} \right|_{q(q',p',\tau)}$. Com notações do tipo $\left. \frac{\partial^2 S(q,p',\tau)}{\partial q^d \partial p'_c} \right|_{q(q',p',\tau)} \equiv (S_{qp'})^c_d$ obtemos $\frac{\partial q^a(z',\tau)}{\partial q'^c} = (S^{-1}_{qp'})^a_c$, $\frac{\partial q^a(z',\tau)}{\partial p'_c} = -(S^{-1}_{qp'})^a_b (S_{p'p'})^{bc}$. Além disso, partindo da identidade $cp_a(q', p', \tau) \equiv \left. \frac{\partial S(q,p',\tau)}{\partial q^a} \right|_{q(q',p',\tau)}$ encontramos $\frac{\partial p_a(z',\tau)}{\partial q'^c} = c^{-1} (S^{-1}_{qp'})^b_c (S_{qq})_{ba}$, $\frac{\partial p_a(z',\tau)}{\partial p'_c} = c^{-1} (S_{qp'})^c_a - c^{-1} (S_{qq})_{ab} (S^{-1}_{qp'})^b_d (S_{p'p'})^{dc}$. A substituição destas expressões no lado esquerdo da Eq.(3.49) na última nos dá novamente uma identidade.

Cabe comentar que existem outras representações para a função geradora, que podem depender de outros três pares de variáveis, $S(q^i, q'^i)$, $S(p_i, p'_i)$ e $S(q'^i, p_i)$. Tais funções geradoras são associadas a transformações canônicas que são análogas às transformações canônicas livres, com a diferença de que ao invés de ser possível resolver algebricamente as equações $q' = q'(q,p)$ e $p' = p'(q,p)$ em termos de q e p', estas equações podem ser resolvidas em termos dos pares de variáveis independentes q e q', p e p' e q' e p. Estas funções são ligadas por meio de transformações de Legendre[4], desde que satisfaçam à condição de que a matriz Hessiana associada à respectiva

[4] para um tratamento sistemático de tais funções geradoras, veja [18], onde o autor apresenta "geradores universais" para os quatro tipos de função geradora.

função geradora seja não-singular. Como exemplo de transformação de Legendre consideremos as funções geradoras $S(q^i, q'^i)$ e $S'(q^i, p'_i)$. As funções S e S' são ligadas da seguinte forma

$$S(q^i, q'^i) = q'^j p'_j(q^k, q'^k) - S'(q^i, p'_i(q^k, q'^k)). \tag{3.50}$$

3.3.3 Exemplos de função geradora

1. Consideremos a função $S = f^i(q^j, t)p'_i$, onde as f^i são funções independentes e invertíveis, tais que os q^i possam ser expressos em termos das novas variáveis q'^i. As equações da transformação são dadas por

$$q'^i = \frac{\partial S}{\partial p'_i} = f^i(q^j, t), \qquad p_j = \frac{\partial S}{\partial q^j} = \frac{\partial f^i}{\partial q^j} p'_i, \tag{3.51}$$

tais transformações são canônicas, devido à arbitrariedade das funções $f^i(q^j, t)$. Tais transformações são ditas *transformações de ponto*. Vejamos o significado deste fato: a partir de transformação geral de coordenadas no espaço de configurações, $q^i \to q'^i = f'^i(q, \tau)$, podemos construir uma transformação canônica.

2. Uma transformação que mantém algum par (q, p) inalterado, e troca o restante das variáveis canônicas, com uma troca de sinal, é obviamente uma transformação canônica. Aqui o fato interessante é que esta transformação não pode ser descrita por meio de uma função geradora de uma das quatro formas "puras"discutidas acima, aqui a função geradora é de uma forma "mista". Considerando um sistema com dois graus de liberdade, a transformação dada pelas equações

$$\begin{aligned} q'^1 = q^1, \qquad p'_1 = p_1, \\ q'^2 = p^2, \qquad p'_2 = -q_2, \end{aligned} \tag{3.52}$$

é gerada pela função

$$F = q^1 p'_1 + q^2 q'^2, \tag{3.53}$$

a qual é uma combinação entre dois tipos de função geradora, tal fato é devido às equações da transformação não poderem ser expressas em termos de um dos pares de variáveis (q^i, p'_i), (q^i, q'^i), (q'^i, p_i) ou (p_i, p'_i).

Vamos agora discutir exemplos de aplicações das transformações canônicas à resolução de alguns problemas simples, como o oscilador harmônico, por exemplo.

3. Consideremos a Hamiltoniana do oscilador harmônico unidimensional, $H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}$, que pode ser reescrita na forma $H = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2 q^2)$, onde $\omega^2 = \frac{k}{m}$. Esta forma de Hamiltoniana sugere uma transformação de coordenadas na qual H seja cíclica em uma nova coordenada. Se pudermos obter uma transformação canônica da forma

$$\begin{aligned} p &= f(p')\cos q', \\ q &= \frac{f(p')}{m\omega}\sin q', \end{aligned} \tag{3.54}$$

então a nova Hamiltoniana, como função de q' e p', seria simplesmente

$$\tilde{H} = \frac{f^2(p')}{2m}(\cos^2 q' + \sin^2 p') = \frac{f^2(p')}{2m}, \tag{3.55}$$

donde q' é cíclica. O problema é encontrar a forma da função $f(p')$ tal que a transformação seja canônica. A razão destas equações nos dá a relação

$$p = mq\omega \cot q', \tag{3.56}$$

que é independente de $f(p')$. A última equação pode ser escrita como

$$p = \frac{\partial F(q,q')}{\partial q}, \tag{3.57}$$

onde F é a função geradora. A solução mais simples para F é dada por

$$F = \frac{mq^2\omega}{2}\cot q'. \tag{3.58}$$

Assim a outra equação de transformação é dada por

$$p' = -\frac{\partial F}{\partial Q} = \frac{mq^2\omega}{2\sin^2 q}. \tag{3.59}$$

Resolvendo para q obtemos

$$q = \sqrt{\frac{2p}{m\omega}}\sin' q'. \tag{3.60}$$

Comparando com a Eq.(3.54), temos que a única expressão possível para $f(p')$, de forma que a transformação seja canônica é

$$f(p) = \sqrt{2m\omega p'}. \tag{3.61}$$

Hamiltoniana em termos das novas coordenadas é dada por

$$H = \omega p'. \tag{3.62}$$

Como a Hamiltoniana é cíclica em relação a q', o momento conjugado correspondente é uma constante do movimento. A equação de movimento correspondente para q' é dada por

$$\dot{q}' = \frac{\partial H}{\partial p'} = \omega, \tag{3.63}$$

cuja solução é, evidentemente, $q' = \omega t + \alpha$, onde α é uma constante fixada pelas condições iniciais. Da Eq. (3.60), a solução para q é dada por

$$q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\sin(\omega t + \alpha), \tag{3.64}$$

que é a solução usual para o oscilador harmônico. Cabe mencionar que utilizarmos uma transformação canônica para resolver o problema do oscilador harmônico é "perda de tempo", devido a simplicidade do problema. Este exemplo é apenas para ilustrar como uma transformação canônica pode ser empregada.

4. Uma partícula de massa m move-se sob ação de um campo com simetria cilíndrica. (a) Determine as equações de movimento relativas a eixos girando uniformemente com velocidade angular ω.

(b) Determine a função geradora da transformação canônica para o sistema girante.

(a) Inicialmente, devemos obter as equações de movimento em coordenadas cartesianas e cilíndricas. A ação Lagrangeana para este sistema é dada por

$$S = \int d\tau \{ \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z). \tag{3.65}$$

A partir da ação obtemos a Hamiltoniana do sistema nas coordenadas (x, y, z), que é dada por

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x, y, z). \tag{3.66}$$

As equações relacionando as coordenadas iniciais e as coordenadas que giram em conjunto com os eixos girantes são facilmente obtidas empregando-se a matriz inversa da matriz de rotação

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \tag{3.67}$$

A Lagrangeana nas coordenadas com linha (sistema girante) é dada por

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2 + \omega^2(x'^2 + y'^2) + \\ 2\omega(\dot{y}'^2 x' - \dot{x}'^2 y')) - V(x', y', z'). \tag{3.68}$$

e a Hamiltoniana correspondente é facilmente obtida como

$$H' = (\frac{1}{2m})(p^{2}_{,x} + p'^{2}_{y} + p'^{2}_{z}) - \omega(x'p'_y - y'p'_x) + V(x', y', z') \tag{3.69}$$

Como H' não depende explicitamente do tempo, a Hamiltoniana é uma quantidade conservada. No entanto, neste caso a Hamiltoniana não representa a energia total do sistema, o que pode ser entendido devido à dependência explícita das equações da transformação com o tempo. O segundo termo em H' é exatamente a energia associada com a rotação aparente da partícula quando observada do referencial não-inercial que gira junto com os eixos. As equações de Hamilton são

$$\begin{aligned} \dot{p}'_x &= -\frac{\partial H'}{\partial x'} = \omega p'_y - \frac{\partial V}{\partial x'}, \\ \dot{p}'_y &= -\frac{\partial H'}{\partial y'} = -\omega p'_x - \frac{\partial V}{\partial y'}, \\ \dot{p}'_z &= -\frac{\partial H'}{\partial z'} = -\frac{\partial V}{\partial z'}. \end{aligned} \tag{3.70}$$

Em coordenadas cilíndricas os momentos conjugados são dados por

$$\begin{aligned} p'_\rho &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}'} = p'_x \cos\varphi' + p'_y \sin\varphi' \\ p'_\varphi &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}'} = -p'_x \rho' \sin\varphi' + p'_y \rho' \cos\varphi' \end{aligned} \tag{3.71}$$

ou

$$\begin{aligned} p'_y &= p'_\rho \sin\varphi' + (\frac{1}{\rho'} p'_\varphi \cos\varphi', \\ p'_x &= p'_\rho \cos\varphi' - (\frac{1}{\rho'} p'_\varphi \sin\varphi' \end{aligned} \tag{3.72}$$

E a Hamiltoniana transforma-se em

$$H' = (\frac{1}{2m})(p'^2_\rho + (\frac{1}{\rho'^2} p'^2_\varphi + p'^2_z) - \omega p'_\varphi + V(\rho', z') \tag{3.73}$$

e as equações dinâmicas dadas por

$$\begin{aligned} \dot{p}'_\rho = -\frac{\partial H'}{\partial \rho'} = \frac{1}{m\rho^3} p'^2_\varphi - \frac{\partial V}{\partial \rho'}, \quad \dot{p}'_z = -\frac{\partial V}{\partial z'} \dot{\rho} = \frac{\partial H'}{\partial p'_\rho} = \frac{p'_\rho}{m}, \\ \dot{\varphi}' = \frac{\partial H}{\partial p'_\varphi} = \frac{p'_\varphi}{m\rho'^2} - \omega, \qquad \dot{z}' = \frac{p' z}{m}. \end{aligned} \tag{3.74}$$

O momento angular p'_φ é uma constante do movimento, devido à simetria cilíndrica do potencial, ou seja, H' é cíclica em φ.

(b) Consideremos a função geradora $S = S(x, y, z, p'_x, p'_y, p'_z)$. Então

$$x' = \frac{\partial S}{\partial p'_x} = x \cos\omega t + y \sin\omega t, \tag{3.75}$$

$$y' = \frac{\partial S}{\partial p'_y} = -x \sin \omega t + y \cos \omega t, \tag{3.76}$$

destas equações e do fato de que $z' = z$ segue que a função geradora da transformação pode ser escolhida na forma

$$S = p'_x(x \cos \omega t + y \sin \omega t) + p'_y(y \cos \omega t - x \sin \omega t) + p'_z z. \tag{3.77}$$

Empregando a expressão para a Hamiltoniana transformada, Eq. (3.45), temos

$$H' = H - \omega(x' p'_y - y' p'_x), \tag{3.78}$$

como

$$p_x = \frac{\partial S}{\partial x} = p'_x \cos \omega t - p'_y \sin \omega t, \tag{3.79}$$

$$p_y = \frac{\partial S}{\partial y} = p'_x \sin \omega t + p'_y \cos \omega t, \tag{3.80}$$

$$p_z = p'_z, \tag{3.81}$$

utilizando estas identidades, temos

$$(\frac{1}{2m})(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) = \frac{1}{2m}(p_x'^2 + p_y'^2 + p_z'^2). \tag{3.82}$$

Assim H' obtida por esta técnica está de acordo com aquela obtida em (a).

Exercícios. 1. Encontre a transformação canônica que relaciona duas formulações obtidas a partir de duas Lagrangeanas que diferem por uma derivada total: L and $L + \frac{dN(q)}{d\tau}$.

2. Seja $z^i \rightarrow z'^i(z,\tau)$ uma transformação canônica. Mostre que não existe uma função geradora da seguinte forma: $z'^i = \frac{\partial S(z,\tau)}{\partial z^i}$.

3. Seja $q^a \rightarrow q'^a(q^b)$ uma transformação geral de coordenadas no espaço de configurações. Encontre sua extensão $q'^a(q^b)$, $p'_a(q^b, p_c)$, que represente uma transformação canônica no espaço de fase. Este resultado, junto com a Eq. (3.45), implica que a Hamiltoniana de uma teoria Lagrangeana não-singular em coordenadas generalizadas representa a energia de sistema. *Resposta*: $q'^a = q'^a(q)$, $p'_a = \frac{\partial q^b(q')}{\partial q'^a}\, p_b$. Em outras palavras, p_a se transforma como um vetor sobre a transformação geral de coordenadas q^a.

4. Mostre que a transformação dada por

$$q_1' = q_1^2 + p_1^2, \quad q_2' = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2 + p_1^2 + p_2^2),$$
$$p_1' = \frac{1}{2}\arctan\frac{q_2}{p_2} - \frac{1}{2}\arctan\frac{q_1}{p_1}, \quad p_2' = -\arctan\frac{q_2}{p_2}, \tag{3.83}$$

é uma transformação canônica. Use esta transformação para resolver as equações de movimento para um sistema cuja Hamiltoniana é dada por $H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2)$, e compare esta solução com a solução obtida utilizando-se as variáveis iniciais.

3.4 Exemplos de transformações canônicas

3.4.1 Evolução de um sistema físico como transformação canônica. Invariância do volume no espaço de fase

Denotemos a solução geral das equações de Hamilton para um dado sistema dinâmico como $z'^i(c^j, \tau)$, onde c^j são números arbitrários. Para qualquer ponto z^i dado do espaço de fase, os números c^i podem ser escolhidos de tal forma que a trajetória passe pelo ponto em $\tau = 0$: $z'^i(c^j, 0) = z^i$. A última equação pode ser resolvida: $c^j = c^j(z)$. A substituição deste resultado na solução geral nos dá esta como função da posição inicial: $z'^i(z^j, \tau)$, $z'^i(z^j, 0) = z^i$. Por construção, temos a identidade

$$\frac{dz'^i(z^j, \tau)}{d\tau} = \omega^{ij} \left. \frac{\partial H(z')}{\partial z'^j} \right|_{z'(z,\tau)}. \tag{3.84}$$

Consideremos as funções inversas $z'^i = z'^i(z, \tau)$ como um transformação entre os sistemas de coordenadas (z, τ) e (z', τ) (equivalentemente, poderíamos utilizar as funções diretas)

$$z^i \to z'^i = z'^i(z, \tau). \tag{3.85}$$

Demonstraremos agora a validade da equação

$$\{z'^i(z, \tau), z'^j(z, \tau)\}_z = \omega^{ij}. \tag{3.86}$$

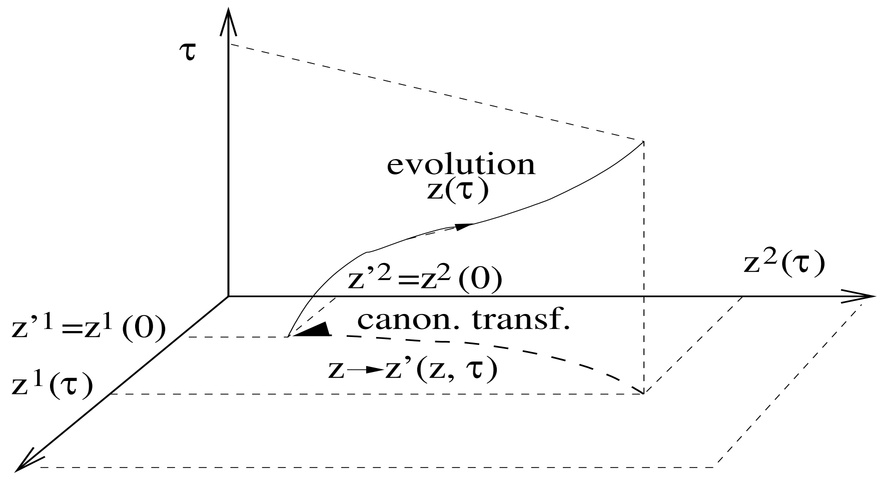

Figura 3.1: A evolução de um sistema gera uma transformação canônica.

Neste sentido *a solução geral das equações de movimento pode ser considerada como uma transformação canônica univalente* (3.85), veja a Figura 3.1 na pág. 79.

Denotemos o membro esquerdo da Eq. (3.86) como W^{ij}. Encontremos a equação diferencial para W como função do tempo. Usando a Eq. (3.84), obtemos imediatamente

$$\frac{\partial}{\partial\tau}W^{ij} = \omega^{ik}H_{kl}W^{lj} - \omega^{jk}H_{kl}W^{li}, \quad \textit{para todo} \quad z'^i, \qquad (3.87)$$

onde $H_{kl} \equiv \partial'_k\partial'_l H(z)$. Além disso, como $z'^i(z,0) = z^i$, temos as condições iniciais: $W^{ij}(0) = \omega^{ij}$. Notemos que $W^{ij}(\tau) = \omega^{ij}$ obedece ao sistema e às condições iniciais. Esta solução é única, já que o sistema normal (3.87) possui uma única solução com dadas condições iniciais.

Exercício. Verifique a validade da Eq.(3.86) até a terceira ordem em τ por meio de cálculos diretos, usando a fórmula de Taylor: $z'^i(z,\tau) = z'^i(z,0) + \partial_\tau z'^i|_0\tau + \frac{1}{2}\partial^2_\tau z'^i|_0\tau^2 + \ldots$.

De acordo com a definição de transformação canônica, o resultado obtido pode também ser formulado como se segue. Considremos algum sistema dinâmico com Hamiltoniana H

$$\frac{dz^i}{d\tau} = \omega^{ij} \frac{\partial H(z)}{\partial z^j}. \tag{3.88}$$

Então a transformação (3.85), gerada pelo fluxo Hamiltoniano de H_0, preserva a forma canônica das equações (3.88): $\frac{dz'^i}{d\tau} = \omega^{ij} \frac{\partial \tilde{H}(z', \tau)}{\partial z'^j}$.

Em particular, a transformação (3.85) leva o sistema (3.84) em um sistema com $\tilde{H}_0 = 0$: $\frac{dz'^i}{d\tau} = 0$. Isto segue da observação que, por construção, $z'^i(z(\tau), \tau) = const$ para qualquer solução $z(\tau)$ da Eq. (3.84).

Exercício. Verifique este fato por meio de cálculos diretos com a utilização das Eqs. (1.108), (1.107) e (3.86).

Então, de acordo com a Eq. (3.45), a função geradora da transformação (3.85) obedece à equação

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} = -H_0. \tag{3.89}$$

Consideremos um domínio D' do espaço de fase com volume dado por $V' = \int_{D'} d^{2n} z'$. Durante a evolução, os pontos z'^i são deslocados para $z^i(z', \tau)$, e formam o domínio D. Calculemos o volume de D. Fazendo uma mudança de variáveis $z^i(z', \tau)$ na integral $2n$-dimensional, obtemos $V = \int_D d^{2n} z = \int_{D'} \det \frac{\partial z^k}{\partial z'^i} \, d^{2n} z' = \int_{D'} d^{2n} z' = V'$. Aqui a Eq. (3.2) foi utilizada. Como o Jacobiano é uma função contínua de τ, e para $\tau = 0$ termos a transformação identidade, temos $\det J = +1$. Assim o volume de um domínio no espaço de fase mantém seu valor constante durante a evolução: $V = V'$.

A invariância do volume no espaço de fase é um exemplo de *integral invariante*. Outros exemplos serão discutidos no Cap. 4.

3.4.2 Transformações canônicas em teoria de perturbações.

Agora, consideremos um sistema cuja Hamitoniana possa ser escrita como a soma de duas Hamiltonianas, com equações de movimento

$$\frac{dz^i}{d\tau} = \omega^{ij} \frac{\partial(H_0(z) + H_1(z))}{\partial z^j}. \tag{3.90}$$

Dizemos que o sistema inicial, descrito por H_0, é "perturbado" por H_1. Suponhamos que a solução geral para o sistema não perturbado H_0 seja conhecida. Então a transformação canônica corrrespondente (3.24) transforma o sistema (3.90) no sistema Hamiltoniano com Hamiltoniana H_1:

$$\frac{dz'^i}{d\tau} = \omega^{ij} \frac{\partial H_1(z(z', \tau))}{\partial z'^j}. \tag{3.91}$$

De fato, como a transformação é canônica, a nova Hamiltoniana é (veja a Eq. (3.45)) $H_0 + H_1 + \partial_\tau S$, mas $\partial_\tau S = -H_0$ devido à Eq. (3.89).

Exercício. Obtenha este resultado por cálculos diretos com o uso das Eqs. (1.108), (1.107) e (3.86).

Se $z'^i(c^j, \tau)$ é a solução geral do problema (3.91), obtemos a solução geral do problema (3.90) tomando a composição com a solução não perturbada, dada por (3.85): $z^i = z^i(z'^j(c^k, \tau), \tau)$.

Assim mostramos, por meio do uso de transformações canônicas, como o problema perturbado (3.90) pode ser tratado utilizando-se o problema não perturbado (3.84). De acordo com a estrutura do resultado final: $z^i = z^i(z'^j(c^k, \tau), \tau)$, a perturbação na energia de um sistema pode ser reformulada como uma perturbação das condições iniciais para o problema inicial. Esta observação torna-se extremamente útil na mecânica quântica e na teoria quântica de campos, onde podemos utilizar os quadros de Schrodinger, Heisenberg ou de interação (de Dirac) no estudo da evolução de um sistema quântico [10].

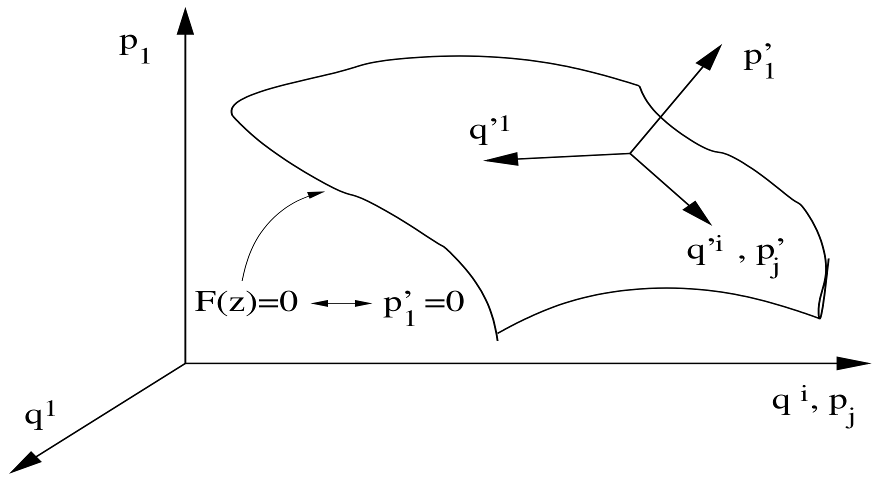

Figura 3.2: As coordenadas z'^i, adaptadas com a superficie, podem ser escolhidas canônicas.

Exercício. Aplique este método para o problema unidimensional com a Hamiltoniana $H_0 + H_1 = \frac{1}{2}p^2 - \frac{e^\tau}{q-\tau p}$.

3.4.3 Coordenadas ajustadas com uma superfície

Consideremos a equação algébrica $F(q^a, p_b) = 0$. Suponhamos que ela possa ser resolvida com respeito a uma das variáveis, digamos p_1: $p_1 = f(q^a, p_2, p_3, \dots, p_n)$. Mostraremos aqui que existe uma transformação canônica tal que nas novas coordenadas a superfície $F = 0$ é descrita pela equação $p'_1 = 0$, veja a Figura 3.2 na pág. 82.

Este resultado é interessante no contexto das teorias singulares. Neste caso o sistema das equações de Hamilton necessariamente contém as equações diferenciais (na forma canônica) e as equações algébricas $F_\alpha = 0$, ditas *vínculos de Dirac*. Assim, buscamos todas as soluções das equações de movimento sobre uma superfície definida pelas equações algébricas. Então é natural escolhermos coordenadas especiais tais que a superfície comporte-se como um plano nestas coordenadas: $z'_\alpha = 0$. Demonstraremos que a transformação correspondente pode ser escolhida como uma transformação canônica, ou seja, a forma canônica das equações de movimento não será destruída nas novas coordenadas. Isto simplifica muito a análise das equações de Hamilton e, além disso, leva-nos a uma interpretação física auto-consistente de uma teoria singular [12].

Será conveniente utilizarmos a seguinte notação: $z^i = (q^1, p_1, z^\alpha)$. Busquemos pelas novas coordenadas na forma

$$q'^1 = q^1, \quad p'^1 = p_1 - f(q^1, z^\alpha), \quad z'^\alpha = z^\alpha + h^\alpha(q^1, z^\alpha), \tag{3.92}$$

com as funções indeterminadas h^α, as quais obedecem à condição

$$h^\alpha(q^1, z^\alpha)\big|_{q^1=0} = 0. \tag{3.93}$$

Escrevendo as condições de canonicidade

$$\{q'^1, q'^1\}_z = \{p'_1, p'_1\}_z = 0, \quad \{q'^1, p'_1\}_z = 1, \quad \{q'^1, z'^\alpha\}_z = 0, \tag{3.94}$$

$$\{p'_1, z'^\alpha\}_z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial h^\alpha}{\partial q^1} = \{z'^\alpha, f\}, \tag{3.95}$$

$$\{z'^\alpha, z'^\beta\}_z = \omega^{\alpha\beta}. \tag{3.96}$$

As equações (3.94) já são satisfeitas. A equação (3.95) é uma equação diferencial parcial de primeira ordem $\frac{\partial h^\alpha}{\partial q^1} + \frac{\partial f}{\partial z^\beta}\,\omega^{\beta\gamma}\,\frac{\partial h^\alpha}{\partial z^\gamma} = \omega^{\alpha\gamma}\,\frac{\partial f}{\partial z^\gamma}$. O problema de Cauchy (3.93) para esta equação tem uma única solução $h^\alpha(q^1, z^\alpha)$, veja, por exemplo, [4].

A solução automaticamente obedece à Eq. (3.96). Para confirmarmos este resultado, escrevemos uma equação para $\{z'^\alpha, z'^\beta\}$ a partir da diferenciação do comutador com respeito a q^1. Utilizando a Eq. (3.95), assim como a identidade de Jacobi, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial q^1}\{z'^\alpha, z'^\beta\} = \{\{z'^\alpha, z'^\beta\}, f\} \quad \textit{para quaisquer } \alpha, \beta \textit{ fixos}. \tag{3.97}$$

enquanto a Eq. (3.93) implica na condição de contorno

$$\{z'^{\alpha}, z'^{\beta}\}\Big|_{q^1=0} = \omega^{\alpha\beta}. \tag{3.98}$$

Notemos que a matriz $\omega^{\alpha\beta}$ obedece às Eqs. (3.97), (3.98). Semelhante o caso anterior, o problema tem uma única solução, e concluímos que a equação (3.24) é válida.

3.5 Transformação da ação Hamiltoniana

De acordo com a subseção 1.5, as equações de Hamilton (1.92) podem ser obtidas pela aplicação do princípio da ação mínima à ação Hamiltoniana

$$S_H = \int d\tau (p_a \dot{q}^a - H(q,p)), \tag{3.99}$$

enquanto que para as variáveis canonicamente transformadas q' e p', as equações correspondentes seguem a partir da expressão similar com a Hamiltoniana dada por (3.41). É interessante ver a deformação do integrando de (3.99) depois da substituição direta de $z(z',\tau)$. Fazendo os cálculos, obtemos

$$(p_a \dot{q}^a - H(z))\big|_{z(z',\tau)} = c^{-1}(p'_a \dot{q}'^a - \left(cH(z(z',\tau)) - cp_a(z',\tau)\frac{\partial q^a(z',\tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial F(z',\tau)}{\partial \tau}\right) + \frac{dF(z',\tau)}{d\tau} \tag{3.100}$$

onde F é exatamente a função especificada na Eq. (3.40). Note também que a Hamiltoniana transformada (3.41) aparece no lado direito do integrando. No caso de transformação univalente, temos

$$p_a \dot{q}^a - H(q,p) = p'_a \dot{q}'^a - \tilde{H}(q',p') + \frac{dF(q',p',\tau)}{d\tau}. \tag{3.101}$$

Exercício. Será que as equações de Hamilton (3.22) podem ser obtidas aplicando-se o princípio da ação mínima à ação Hamiltoniana com integrando dado por (3.100)? Considere também os casos de transformações univalentes e de transformações univalentes independentes do tempo.

3.6 Resumo: definições equivalentes para as transformações canônicas

Na seção 1.8 as transformações canônicas foram definidas como aquelas que mantêm a forma das equações de Hamilton, para qualquer dada Hamiltoniana. Nas seções subsequentes encontramos outras formas de se caracterizar as transformações canônicas, ou seja, podemos definir as transformações canônicas de várias formas equivalentes. Por conveniência, apresentamos aqui a lista destas definições:

Seja $z^i \to z'^i(z^j, \tau)$ uma transformação no espaço de fase. Então as seguintes afirmações são equivalentes, e qualquer uma destas pode ser utilizada como definição de transformação canônica:

1. A transformação preserva a forma canônica das equações de Hamilton para qualquer sistema Hamiltoniano:

$$\dot{z}^i = \omega^{ij}\frac{\partial H}{\partial z^j} \overset{z\to z'}{\longrightarrow} \dot{z}'^i = \omega^{ij}\frac{\partial \tilde{H}(z', \tau)}{\partial z'^j}, \quad \forall\, H, \quad alguma\ \tilde{H}. \tag{3.102}$$

2. A transformação mantém invariante (a menos de uma constante c) a matriz simplética

$$\frac{\partial z'^k}{\partial z^i}\omega^{ij}\frac{\partial z'^l}{\partial z^j} = c\omega^{kl}, \quad ou \quad \{z'^k, z'^l\}_z = c\omega^{kl}, \quad c = const. \tag{3.103}$$

3. Existe uma função $E(z', \tau)$ tal que

$$cz^j(z', \tau)\omega_{ji}\frac{\partial z^i(z', \tau)}{\partial z'^l} + \omega_{lj}z'^j = 2\frac{\partial E(z', \tau)}{\partial z'^l}. \tag{3.104}$$

4. Existe uma função $F(z', \tau)$ tal que

$$cp_b\frac{\partial q^b}{\partial q'^a} - p'_a = \frac{\partial F(z', \tau)}{\partial q'^a}, \qquad cp_b\frac{\partial q^b}{\partial p'_a} = \frac{\partial F(z', \tau)}{\partial p'_a}. \tag{3.105}$$

Se a função $E(z', \tau)$ (3.104) é conhecida, $F(z', \tau)$ pode ser tomada na forma

$$F(z', \tau) \equiv E(z', \tau) + \frac{c}{2}q^b(z', \tau)p_b(z', \tau) - \frac{1}{2}q'^b p'_b, \tag{3.106}$$

5. Para uma transformação livre, existe a *função geradora* $S(q, p', \tau)$ com $\frac{\partial S}{\partial q^a \partial p'_b} \neq 0$ tal que

$$q'^a(q, p', \tau) = \frac{\partial S}{\partial p'_a}, \qquad cp_a(q, p', \tau) = \frac{\partial S}{\partial q^a}. \tag{3.107}$$

Se a função $F(z', \tau)$ (3.105) é conhecida, a função geradora pode ser tomada na forma

$$S(q, p', \tau) = F(q'(q, p', \tau), p', \tau) + p'_a q'^a(q, p', \tau). \tag{3.108}$$

3.7 Equação de Hamilton-Jacobi

De acordo com a Eq. (3.41), a Hamiltoniana possui uma lei de transformação não-trivial sob a ação de transformações canônicas dependentes do tempo. De fato, a Hamiltoniana transformada $\tilde{H}$ contém uma função arbitrária, $F(z', \tau)$, a função geradora, que determina a transformação canônica de acordo com as Eqs. (3.105), (3.107). Este fato pode ser utilizado para encontrar a Hamiltoniana transformada, $\tilde{H}$, na forma mais simples possível, o que implica em um método bastante elegante para a obtenção da solução geral das equações de Hamilton

$$\dot{z}^i = \omega^{ij} \frac{\partial H}{\partial z^j}. \tag{3.109}$$

Tomando uma transformação canônica univalente

$$z^i \to z'^i = z'^i(z, \tau), \tag{3.110}$$

temos as equações para as novas variáveis: $\dot{z}' = \{z', \tilde{H}\}$, a saber

$$\dot{z}'^i = \omega^{ij} \frac{\partial}{\partial z^j} \left(H(z(z', \tau)) - p_a(z', \tau) \frac{\partial q^a(z', \tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial F(z', \tau)}{\partial \tau} \right) \tag{3.111}$$

Buscando a transformação (3.110) tal que $\tilde{H}$ seja identicamente nula, ou seja $\tilde{H} = 0$, temos

$$H(z(z', \tau)) - p_a(z', \tau) \frac{\partial q^a(z', \tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial F(z', \tau)}{\partial \tau} = 0, \tag{3.112}$$

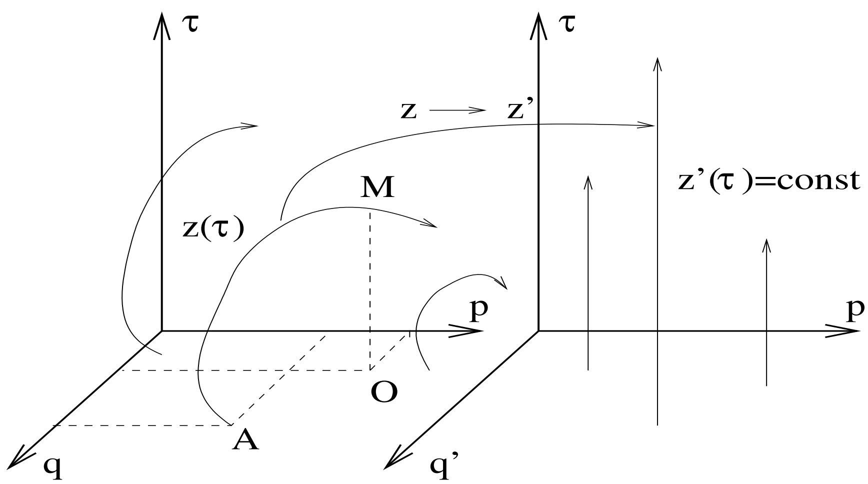

Figura 3.3: Interpretação geométrica do método de Hamilton-Jacobi: enquanto as coordenadas do ponto M no sistema z são definidas pela projeção ao longo de MO, no sistema z' elas são definidas pela projeção ao longo de MA.

assim a Eq. (3.111) adquire a forma $\dot{z}'^i = 0$ e pode ser imediatamente resolvida: $z'^i = c^i = const$. Nas novas coordenadas o sistema está em repouso. Agora retornemos às variáveis iniciais: substituindo este resultado no membro esquerdo da Eq. (3.110) e resolvendo o sistema com relação a z

$$z^i = z^i(\tau, c^j), \tag{3.113}$$

obtemos, por construção, a solução geral das equações de movimento (3.109).

A interpretação geométrica deste procedimento é exremamente simples: buscamos coordenadas especiais (z'^i, τ) no espaço de fase extendido tais que as trajetórias do sistema dinâmico sejam retas verticais nestas coordenadas, veja a figura 3.3.

De acordo com o método, para obtermos a solução das equações de movimento (3.109) precisamos encontrar a solução da Eq. (3.112), que envolve $2n+1$ funções desconhecidas $z^i(z'^j, \tau), F(z'^i, \tau)$. No entanto, por construção elas são relacionadas de acordo com $2n$

equações (3.105). Considerando que a transformação canônica seja livre, o sistema (3.112) e (3.105) pode ser analizado em termos das variáveis independentes q, p' no lugar de q', p'. De acordo com as Eqs. (3.45) e (3.44), nas novas variáveis esta assume a forma

$$\frac{\partial S(q,p',\tau)}{\partial \tau} + H(q, p(q,p',\tau)) = 0, \tag{3.114}$$

$$q'^a(q,p',\tau) = \frac{\partial S(q,p',\tau)}{\partial p'_a}, \qquad p_a(q,p',\tau) = \frac{\partial S(q,p',\tau)}{\partial q^a}. \tag{3.115}$$

Como a solução geral (3.113) é uma transformação canonica, a Eq. (3.115) afirma, que nos estamos procurando a função geradora dela. Utilizando a segunda equação de (3.115) na Eq. (3.114), as variáveis podem ser separadas, o que nos dá a equação para a função $S(q^a, \tau)$

$$\frac{\partial S(q^a,\tau)}{\partial \tau} + H\left(q^a, \frac{\partial S(q^a,\tau)}{\partial q^b}\right) = 0, \tag{3.116}$$

onde p'_b foram omitidos já que entram na equação como parâmetros. Esta equação diferencial parcial é conhecida como *equação de Hamilton-Jacobi*. De acordo com a teoria das equações diferenciais parciais, a solução desta equação geralmente depende de funções arbitrárias. Em particular, podemos buscar aquelas em que a solução depende de n constantes arbitrárias, que são denotadas por p'_b. Tais soluções são ditas *soluções completas* da equação de Hamilton-Jacobi. Seja $S(q^a, p'_b, \tau)$ uma solução completa. Então a Eq. (3.115) determina a transformação canônica livre (3.110) que anula a Hamiltoniana $\tilde{H}$. De acordo com a análise precedente, a solução das equações algébricas (3.110): $z^i = z^i(z'^j, \tau)$ nos dá a solução geral das equações de Hamilton (3.109).

Resumindo, o método de Hamilton-Jacobi para a resolução das equações de Hamilton

$$\dot{z}^i = \omega^{ij}\frac{\partial H}{\partial z^j}. \tag{3.117}$$

pode ser formulado como segue:

1. Encontrar a solução $S(q^a, p'_b, \tau)$, $\det \frac{\partial S}{\partial q^a \partial p'_b} \neq 0$ da equação de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial S(q^a, \tau)}{\partial \tau} + H(q^a, \frac{\partial S(q^a, \tau)}{\partial q^b}) = 0, \tag{3.118}$$

a qual depende de n constantes arbitrárias p'^j.

2. Escrever as expressões para q'^a

$$q'^a = \frac{\partial S(q, p', \tau)}{\partial p'_a}, \qquad p_a = \frac{\partial S(q, p', \tau)}{\partial q^a}, \tag{3.119}$$

e resolvê-las algebricamente com relação a q, p:

$$q^a = q^a(q', p', \tau), \qquad p_a = p_a(q', p', \tau). \tag{3.120}$$

Estas funções representam a solução geral para as equações (3.117) com $2n$ constantes de integraçào q'^a, p'_a.

Portanto, o problema de encontrarmos a solução de $2n$ equações diferenciais ordinárias (3.117) pode ser trocado pelo de encontrarmos a solução S da equação diferencial parcial (3.118) que depende de n constantes arbitrárias.

Exercícios. 1. Mostre que, para um sistema conservativo, a partir da resolução de uma equação diferencial parcial apropriada podemos construir uma transformação canônica tal que a nova Hamiltoniana seja uma função apenas das coordenadas. Mostre como a solução das equações de movimento é dada em termos das novas coordenadas e momentos.

2. A equação de Hamilton-Jacobi é obtida buscando-se uma transformação canônica ligando as coordenadas do espaço de fase q e p às constantes q' e p'. Reciprocamente, se $S(q^a, p'^a, \tau)$ é uma solução completa da equação de Hamilton-Jacobi, mostre que o conjunto de variáveis q^a e p_a, definido pelas equações (3.119) obedece às equações de Hamilton.

3.8 A ação funcional como função geradora da evolução

Na subseção 3.4.1 vimos que a solução geral das equações de Hamilton pode ser identificada com uma transformação canônica. Foi demonstrado na seção 3.2, que a Hamiltoniana representa o gerador desta transformação, determinando sua forma infinitesimal. Aqui discutiremos uma transformação finita, e mostraremos que a função geradora correspondente S é intimamente ligada com a ação Hamiltoniana S_H. Em particular, quando a solução geral das equações de Hamilton é conhecida, S é construída a partir de S_H de acordo com uma regra simples, veja a Eq. (**??**).

Suponhamos que temos a solução $S(q, p', \tau)$ da equação de Hamilton-Jacobi, Eq. (3.116). Então as derivadas de S (3.115) permitem-nos construir a solução geral das equações de Hamilton como uma função dos valores iniciais z' quando $\tau = \tau_0$ (veja a discussão no fim da seção 3.2)

$$z = z(z', \tau), \qquad z(z', \tau_0) = z'. \tag{3.121}$$

Ao mesmo tempo, considerando (z', τ) e (z, τ) como dois sistemas de coordenadas no espaço de fase extendido, a Eq. (3.121) determina a transformação canônica. De acordo com (3.115), S é sua função geradora.

Exercício. Mostre que, a partir de (3.121) e (3.115) segue que

$$S(q, p', \tau_0) = p'_a q^a + c, \qquad c = const. \tag{3.122}$$

Equivalentemente, podemos dizer que a expansão de S em série em torno de τ_0 tem a forma $S = (p'_a q^a + c) + O(\tau - \tau_0)$. Como a função geradora é definida a menos de uma constante, omitiremos c na sequência.

Usando a função geradora S, construamos a função F dos valores iniciais a partir da Eq. (3.108), que será denotada aqui por $S_H(q', p', \tau)$

$$S_H(q', p', \tau) \equiv S(q, p', \tau)|_{q(q', p', \tau)} - p'_a q'^a. \tag{3.123}$$

A Eq. (3.122) implica $S(q,p',\tau)|_{q(q',p',\tau)}|_{\tau_0} = p'_a q'^a$, so

$$S_H(q',p',\tau_0) = 0. \tag{3.124}$$

Calculando a derivada de S_H com respeito a τ

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial S_H(q',p',\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau}\left(S(q,p',\tau)|_{q(q',p',\tau)}\right) \\
&= \left.\frac{\partial S(q,p',\tau)}{\partial \tau}\right|_{q(q',p',\tau)} + \left.\frac{\partial S(q,p',\tau)}{\partial q^a}\right|_{q(q',p',\tau)} \frac{\partial q^a(q',p',\tau)}{\partial \tau} \\
&= \left.(p\dot{q} - H(q,p))\right|_{z(z',\tau)},
\end{aligned} \tag{3.125}$$

onde as Eqs. (3.114), (3.37) foram utilizadas. Assim, o integrando da ação Hamiltoniana, apresentado como função dos valores iniciais obtida com o conhecimento da solução geral, determina a dependência temporal da função geradora (3.123)

$$\frac{\partial S_H(q',p',\tau)}{\partial \tau} = \left.(p\dot{q} - H(q,p))\right|_{z(z',\tau)}. \tag{3.126}$$

Como o lado direito desta equação é uma função conhecida de τ, obtemos imediatamente sua solução sujeita à condição inicial (3.124)

$$S_H(q',p',\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau \left.(p\dot{q} - H(q,p))\right|_{z(z',\tau)}. \tag{3.127}$$

Este resultado pode ser diretamente invertido, permitindo-nos construir a função geradora $S(q,p',\tau)$ partindo da solução geral conhecida: seja $z = z(z',\tau)$, $z(z',\tau_0) = z'$ a solução geral do sistema Hamiltoniano $H(q,p)$. Definimos a função $S_H(q',p',\tau)$ de acordo com a Eq. (3.127), e então escrevemos

$$S(q,p',\tau) \equiv p'q'(q,p',\tau) + \left.\left(\int_{\tau_0}^{\tau} \left.(p\dot{q} - H(q,p)\ )\right|_{z(z',\tau)}\right)\right|_{q'(q,p',\tau)} \tag{3.128}$$

Esta função obedece à equação de Hamilton-Jacobi. Portanto ela representa uma função geradora de uma transformação canônica $z' \to z$ que corresponde à solução geral. Neste sentido, a *ação Hamiltoniana é a função geradora da transformação canônica ao longo* *das soluções das equações de Hamilton: ela transforma as variáveis do sistema de um instante de tempo para outro.*

Exercício. Mostre, por cálculos diretos, que S da Eq. (3.128) obedece à equação de Hamilton-Jacobi.

3.9 Separação de variáveis

Na seção 3.7 demonstramos que resolver um sistema de $2n$ equações diferenciais ordinárias de primeira ordem é equivalente a resolvermos a equação diferencial parcial de Hamilton-Jacobi. No entanto, no caso geral as equações diferenciais parciais são de díficil resolução. Porém, sob certas condições, podemos separar as variáveis na equação de Hamilton-Jacobi, e a solução pode ser obtida por meio de quadraturas. Aqui discutiremos dois casos onde é possível fazermos a separação de variáveis e ilustraremos estes casos com dois exemplos simples e bem conhecidos, o oscilador harmônico e o problema de Kepler.

Nesta seção vai ser conveniente de trabalhar com a função geradora $S(q, q', \tau)$, que é análoga à função $S(q, p', \tau)$. Neste caso, vamos pegar as variáveis q^a e q'^a como variáveis independentes, em vez de q^a e p'_a. Ou seja, podemos resolver $q'^a = q'^a(q, p, \tau)$ e $p'_a = p'_a(q, p, \tau)$ com relação às variáveis q^a e q'^a. Temos então $p_a = p_a(q, q', \tau)$ e $p'_a = p'_a(q, q', \tau)$. Transformações canônicas com esta propriedade também são ditas transformações canônicas livres.

Repetindo a análise da subseção 3.3.2, obtemos os seguintes resultados:

1) O primeiro teorema é formulado da seguinte maneira,

Proposição. Seja $q^a \to q'^a = q'^a(q, p, \tau)$, $p_a \to p'_a = p'_a(q, p, \tau)$ uma transformação canônica livre, portanto a partir dessas expressões temos

$$p'_a = p'_a(q, p(q, q', \tau), \tau) \equiv p'_a(q, q', \tau), \quad p^a = p^a(q, p', \tau). \quad (3.129)$$

Então

• existe uma *função geradora* $S(q, q', \tau)$ que obedece à propriedade $\frac{\partial S}{\partial q^a \partial q'_b} \neq 0$ tal que

$$p_a(q, q', \tau) = c^{-1}\frac{\partial S}{\partial q^a}, \qquad p'_a(q, q', \tau) = -\frac{\partial S}{\partial q'^a}. \tag{3.130}$$

• a Hamiltoniana transformada (3.41), apresentada como função de q e q', tem a forma

$$\tilde{H}(z', \tau)\Big|_{p'(q,q',\tau)} = cH(q, p(q, q', \tau)) + \frac{\partial S(q, q', \tau)}{\partial \tau}. \tag{3.131}$$

Caso a função $F(q', p', \tau)$ seja conhecida, temos a seguinte relação entre as funções $S(q, q', \tau)$ e $F(q', p', \tau)$:

$$S(q, q', \tau) = F(q', p', \tau)|_{p'=p'(q,q',\tau)}. \tag{3.132}$$

2) E o segundo teorema da subseção é dado por

Proposição. Seja $S(q^a, q'^b, \tau)$ uma dada função que satisfaça à propriedade $\frac{\partial^2 S}{\partial q^a \partial q'^b} \neq 0$ para todo τ. Resolvamos as equações algébricas $p_a(q, q', \tau) = c^{-1}\frac{\partial S}{\partial q^a}$, $p'_a(q, q', \tau) = -\frac{\partial S}{\partial q'^a}$ com relação a q, p. Então a solução

$$q^a = q^a(q', p', \tau), \qquad p_a = c^{-1}\left.\frac{\partial S}{\partial q^a}\right|_{q(q',p',\tau)} \equiv p_a(q', p', \tau), \tag{3.133}$$

é uma transformação canônica livre.

A função $S(q, q', \tau)$ também pode ser obtida a partir da função $S(q, p', \tau)$ por meio de uma transformação de Legendre, veja o fim da subseção 3.3.2, Eq. (3.50).

Como sugere a Eq. (3.131), a equação de Hamilton-Jacobi para a função $S(q, q', \tau)$ é dada por

$$\frac{\partial S(q^a, \tau)}{\partial \tau} + H(q^a, \frac{\partial S(q^a, \tau)}{\partial q^b}) = 0. \tag{3.134}$$

Podemos procurar uma solução completa da equação de Hamilton-Jacobi na forma

$$S = -q'^n \tau + V(q^1, \ldots, q^n), \tag{3.135}$$

onde q'^n é uma constante arbitrária. Substituindo esta expressão na equação de Hamilton-Jacobi, temos a seguinte equação para determinarmos V:

$$H\left(q^a, \frac{\partial V}{\partial q^a}\right) = q'^n. \tag{3.136}$$

Obtendo a solução completa desta equação, podemos obter, utilizando as equações (3.130) e (3.135), as equações que nos fornecem p_a e p'_a,

$$\frac{\partial V}{\partial q^a} = p_a, \tag{3.137}$$

$$\frac{\partial V}{\partial q'^\alpha} = p'_\alpha \quad (\alpha = 1, \ldots, n-1), \tag{3.138}$$

$$\frac{\partial V}{\partial q^n} = \tau + \gamma, \tag{3.139}$$

aqui q'^α, p'_α e p'_n são constantes arbitrárias.

Uma coordenada q^a na equação de Hamilton-Jacobi é dita separável se a solução da equação pode ser dividida como uma soma de duas partes, uma que dependa apenas de q^a e a outra completamente independente de q^a. Logo, se q^1 é uma variável separável a Hamiltoniana deve ser tal que a solução da equação de Hamilton-Jacobi possa ser escrita na forma

$$\begin{aligned} S(q^1, \ldots, q^n, \tau) = S_1(q^1, \tau) \\ +S'(q^2, \ldots, q^n, \tau), \end{aligned} \tag{3.140}$$

e a equação de Hamilton-Jacobi é separada em duas equações, uma para S_1 e uma para S'. A equação de Hamilton-Jacobi é dita *separável* se todas as coordenadas no problema são separáveis. Neste caso a solução da equação de Hamilton-Jacobi tem a forma

$$S = \sum_a S_a(q^a, \tau), \tag{3.141}$$

desta forma a equação de Hamilton-Jacobi é separada em n equações do tipo

$$H_a \left(q^a, \frac{\partial S_a}{\partial q^a}, \tau \right) = q'^a. \tag{3.142}$$

As constantes q'^a são ditas constantes de separação. Notamos que as equações (3.142) envolvem apenas uma das variáveis q^a e apenas uma derivada, $\frac{\partial S_a}{\partial q^a}$. Assim elas formam um conjunto de n equações diferenciais ordinárias de primeira ordem e de forma particularmente simples, podendo sempre ser reduzidas por quadraturas: isolamos a derivada e integramos com relação a q^a.

Caso 1. Seja

$$H = G(f_1(q^1, p_1), \ldots, f_n(q^n, p_n)). \tag{3.143}$$

Aqui, as variáveis na expressão para H são separáveis, ou seja, apenas um par de variáveis q^a e p_a entra em cada função f_a. A Eq. (3.136) assume a forma

$$G \left(f_1 \left(q^1, \frac{\partial V}{\partial q^1} \right), \ldots, f_n \left(q^n, \frac{\partial V}{\partial q^n} \right) \right) = q'^n. \tag{3.144}$$

Pondo

$$f_a \left(q^a, \frac{\partial V}{\partial q^a} \right) = q'^a, \tag{3.145}$$

onde os q'^a, são constantes arbitrárias. Podemos então utilizar a Eq. (3.144) para expressarmos a constante q'^n em termos dos q'^a, $q'^n = G(q'^a)$.

Supondo ainda que cada função f_a dependa do respectivo momento p_a, podemos resolver a Eq. (3.145) para $\frac{\partial V}{\partial q^a}$, obtendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial q^a} &= F_a(q^a, q'^a) \Rightarrow \\ \Rightarrow V &= \int dq^a F_a(q^a, q'^a), \end{aligned} \tag{3.146}$$

e a solução da equação de Hamilton-Jacobi assume a forma

$$S = -G(q'^a)\tau + \int dq^a F_a(q^a, q'^a). \tag{3.147}$$

E a condição $\det \frac{\partial^2 S}{\partial q^a \partial q'^b} \neq 0$ resume-se a[5]

$$\prod \frac{\partial F_a}{\partial q'^a} \neq 0. \tag{3.148}$$

Como a relação $f_a(q^a, p_a) = q'^a$ é equivalente à equação $p_a = F_a(q^a, q'^a)$ segue que $\frac{F_a}{\partial q'^a} = (\frac{\partial f_a}{\partial p_a})^{-1} \neq 0$, e a condição $\det \frac{\partial^2 S}{\partial q^a \partial q'^b} \neq 0$ é sempre satisfeita. Portanto a Eq. (3.147) define uma solução completa da equação de Hamilton-Jacobi.

E as equações

$$\frac{\partial S}{\partial q^a} = p_a, \quad \frac{\partial S}{\partial q'^a} = p'_a \tag{3.149}$$

serão escritas na forma

$$-\frac{\partial G}{\partial q'^a}\tau + \int \frac{dq^a}{\frac{\partial f_a}{\partial p_a}\big|_{p_a = F_a(q^a, q'^a)}} = p'_a, \tag{3.150}$$

$$p_a = F_a(q^a, q'^a). \tag{3.151}$$

Exemplo. Consideremos um oscilador harmônico com um grau de liberdade. Sua Hamiltoniana é dada por $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{c}{2}q^2$ e então $f(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{c}{2}q^2$. A Eq. (3.144) assume a forma

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dV}{dq}\right)^2 + \frac{k}{2}q^2 = q'. \tag{3.152}$$

[5]Nesta equação, assim como em equações semelhantes nesta seção, não temos uma soma sobre o índice a.

Então a solução da equação de Hamilton-Jacobi é

$$S = -q'\tau + \int dq\sqrt{2mq' - mkq^2}, \tag{3.153}$$

e a partir das equações (3.149) encontramos a expressão para o momento $p = \sqrt{2mq' - mcq^2}$ e a equação de movimento para q será

$$-\tau + \frac{1}{\omega}\int \frac{dq}{\sqrt{A^2 - q^2}} = p', \tag{3.154}$$

onde $A^2 = \frac{2q'}{k}$ e $\omega^2 = \frac{k}{m}$. A integral da última equação é igual a arcsin $\frac{q}{A}$. Então temos a solução da equação de movimento da forma

$$q = A\sin\omega(\tau + p'). \tag{3.155}$$

Caso 2. Consideremos uma Hamiltoniana da forma

$$H = g_n\left(\ldots g_2\left(g_1\left(q^1, \frac{\partial V}{\partial q^1}\right), q^2, \frac{\partial V}{\partial q^2}\right)\ldots, q^n, \frac{\partial V}{\partial q^n}\right). \tag{3.156}$$

Logo a equação que determina V é dada por

$$g_n\left(\ldots g_2\left(g_1\left(q^1, \frac{\partial V}{\partial q^1}\right), q^2, \frac{\partial V}{\partial q^2}\right)\ldots, q^n, \frac{\partial V}{\partial q^n}\right) = q'^n. \tag{3.157}$$

Vamos introduzir as constantes arbitrárias q'^a por meio das relações

$$g_1\left(q^1, \frac{\partial V}{\partial q^1}\right) = q'^1, \tag{3.158}$$

$$g_2\left(q'^1, q^2, \frac{\partial V}{\partial q^2}\right) = q'^2, \tag{3.159}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$g_n\left(q'^{n-1}, q^n, \frac{\partial V}{\partial q^n}\right) = q'^n. \tag{3.160}$$

A partir destas relações podemos determinar as derivadas parciais[6], que fornecem as relações

$$\frac{\partial V}{\partial q^1} = G_1(q^1, q'^1), \tag{3.161}$$

$$\frac{\partial V}{\partial q^2} = G_2(q^2, q'^1, q'^2), \tag{3.162}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

[6]Como no caso anterior, aqui admitiremos que as funções $g_a(q^a, p_a)$ dependem explicitamente de p_a.

$$\frac{\partial V}{\partial q^n} = G_n(q^n, q'^{n-1}, q'^n). \tag{3.163}$$

Aqui notamos que nestas equações as funções g_a dependem apenas da variável q^a, da respectiva derivada parcial de V e da constante q'^{a-1}, logo a função V pode apresentar a forma

$$V = \int dq^a G_a(q^a, q'^{a-1}, q'^a), \tag{3.164}$$

e uma solução possível da equação de Hamilton-Jacobi possui a forma

$$S = -q'^n \tau + \int dq^a G_a(q^a, q'^{a-1}, q'^a). \tag{3.165}$$

A partir da última equação temos $\frac{\partial^2 S}{\partial q^a \partial q'^a} = \frac{\partial G_a}{\partial q'^a}$ e $\frac{\partial^2 S}{\partial q_a \partial q'^b} = 0.$ para a menor que b. Desta forma a condição det $\frac{\partial^2 S}{\partial q^a \partial q'^b} \neq 0$ reduz-se a

$$\prod \frac{\partial G_a}{\partial q'^a} \neq 0, \tag{3.166}$$

que sempre é verdadeira, devido à equivalência entre as equações

$$g_a(q'^{a-1}, q^a, p_a) = q'^a \tag{3.167}$$

e

$$p_a = G_a(q^a, q'^{a-1}, q'^a). \tag{3.168}$$

Por esta razão temos

$$\frac{\partial G_a}{\partial q'^a} = \left(\frac{\partial g_a}{\partial p_a}\right)^{-1}\Bigg|_{p_a = G_a(q^a, q'^{a-1}, q'^a)} \neq 0. \tag{3.169}$$

Precisamos agora obter a expressão para a derivada $\frac{\partial G_a}{\partial q'^{a-1}}$ para que possamos obter as equações para as variáveis q^a e sua relação com τ. Podemos obter a expressão desejada por meio da aplicação da regra da cadeia à Eq. (3.168), e utilizando a relação equivalente (3.167), ou seja,

$$\frac{\partial G_a}{\partial q'^{a-1}} = -\left(\frac{\frac{\partial g_a}{\partial q'^{a-1}}}{\frac{\partial g_a}{\partial p_a}}\right)\Bigg|_{p_a = G_a(q^a, q'^{a-1}, q'^a)}. \tag{3.170}$$

Substituindo a Eq. (3.165) na Eq. (3.149), e utilizando a última equação junto com a relação (3.169), obtemos as equações para p'_a e p_a

$$\int \frac{dq^\alpha}{\left(\frac{\partial g_\alpha}{\partial p_\alpha}\right)}\Bigg|_{p_\alpha=G_\alpha(q^\alpha,q'^{\alpha-1},q'^\alpha)} -$$
$$-\int dq^{\alpha+1}\left(\frac{\frac{\partial g_{\alpha+1}}{\partial q'^\alpha}}{\frac{\partial g_{\alpha+1}}{\partial p_{\alpha+1}}}\right)\Bigg|_{p_{\alpha+1}=G_{\alpha+1}(q^{\alpha+1},q'^\alpha,q'^{\alpha+1})} = p'_\alpha,$$
$$(\alpha = 1,\ldots,n-1),$$
$$-\tau + \int \frac{dq^n}{\left(\frac{\partial g_n}{\partial p_n}\right)}\Bigg|_{p_n=G_n(q^n,q'^{n-1},q'^n)} = p'_n \qquad (3.171)$$

e

$$p_a = G_a(q^a, q'^{a-1}, q'^a). \qquad (3.172)$$

As primeiras $n-1$ equações de (3.171) determinam implicitamente as funções q^α. Estas equações contêm ainda $2n-1$ constantes arbitrárias $q'^1,\ldots,q'^n,p'_1,\ldots,p'_{n-1}$. A última equação de (3.171) contém uma constante arbitrária p'_n e conecta as coordenadas com o tempo τ. A equação (3.172) obviamente determina os momentos p_a, após a substituição das funções $q^a(\tau, q'^a, p'_a)$ encontradas em (3.171), como funções de τ e de todas as constantes arbitrárias q'^a e p'_a.

Exemplo. *Problema de Kepler.* O problema de Kepler consiste na descrição do movimento de uma partícula de massa m em um potencial central atrativo inversamente proporcional à distância do centro de atração.

Em coordenadas esféricas, a Hamiltoniana é dada pela expressão

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right) - \frac{\gamma}{r}. \qquad (3.173)$$

e a equação que determina V é da forma

$$\frac{1}{2m}\{\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2\right]\} - \frac{\gamma}{r} = h. \qquad (3.174)$$

Pondo

$$g_1 \equiv p_\varphi = q'^1, \qquad (3.175)$$

$$g_2 \equiv p_\theta^2 + \frac{(q'^1)^2}{\sin^2\theta} = q'^2, \tag{3.176}$$

$$g_3 \equiv \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{q'^2}{r^2}\right) - \frac{\gamma}{r} = q'^3 = h \tag{3.177}$$

Então, utilizando as equações (3.171), obtemos

$$\varphi - q'^1 \int \frac{d\theta}{\sin^2\theta\sqrt{q'^2 - \frac{(q'^1)^2}{\sin^2\theta}}} = p_1', \tag{3.178}$$

$$\int \frac{d\theta}{2\sqrt{q'^2 - \frac{(q'^1)^2}{\sin^2\theta}}} - \int \frac{\frac{1}{r^2}dr}{2\sqrt{2mq'^3 + \frac{2m\gamma}{r} - \frac{q'^2}{r^2}}} = p_2', \tag{3.179}$$

$$-\tau + \int \frac{mdr}{\sqrt{2mq'^3 + \frac{2m\gamma}{r} - \frac{q'^2}{r^2}}} = p_3'. \tag{3.180}$$

Desta forma obtemos a solução das equações de movimento para o problema de Kepler.

No estudo deste movimento podemos tomar, sem perda de generalidade, que a velocidade inicial esteja no plano $\varphi = const$. Então no instante inicial temos, $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = 0$ e de (3.178) temos

$$q'^1 = 0, \tag{3.181}$$

e $\varphi = p_1' = const$, ou seja, o movimento ocorre em um plano. Diferenciando as equações (3.179) e (3.180), encontramos que a velocidade setorial, ou seja, a derivada temporal da área descrita pelo raio vetor a partir do centro, é

$$\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{\sqrt{q'^2}}{2m} = const, \tag{3.182}$$

o que significa que o raio vetor cobre áreas iguais em intervalos de tempo iguais.

Finalmente, a fim de obtermos a trajetória da partícula, fazemos a substituição $\frac{1}{r} = x$ e a partir de (3.179) e levando a Eq. (3.181) em consideração, obtemos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{c + 2kx - x^2}} = \beta - \theta, \tag{3.183}$$

onde $c = \frac{2mq'^3}{q'^2}$, $k = \frac{m\gamma}{q'^2}$ e $\beta = 2p_2'\sqrt{q'^2}$. Calculando esta integral temos

$$\arccos\frac{x-k}{\sqrt{k^2 - c}} = \theta - \beta, \tag{3.184}$$

que levam à equação para a trajetória na forma

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon\cos(\theta - \beta)}. \tag{3.185}$$

Esta é a equação de uma seção cônica, com um dos focos no centro da atração. Na Eq. (3.185) temos $p = \frac{q'^2}{m\gamma}$ e a excentricidade dada por $\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2q'^2q'^3}{m\gamma^2}}$.

Se a partícula descreve uma órbita fechada, por exemplo, como um planeta, a órbita será elíptica e o sol estará em um dos focos da elipse.

Denotemos por F e a, b (b é menor que a) a área e os semi-eixos da elipse, encontramos (sabemos que $p = \frac{b^2}{a}$)

$$\frac{F^2}{a^3} = \frac{\pi^2 a^2 b^2}{a^3} = \pi^2 p. \tag{3.186}$$

Seja T o período de revolução, $T = \frac{2mF}{\sqrt{q'^2}}$. Então, a partir das expressões para p e ϵ, obtemos a relação $\frac{1}{4}\frac{T^2}{a^3} = \frac{m\pi^2}{\gamma}$. Como a razão $\frac{\gamma}{m}$ depende apenas do centro de atração, ou seja, do sol, esta relação é independente do planeta em consideração. Logo obtivemos as três leis de Kepler: 1) os planetas varrem áreas iguais em períodos iguais e em órbitas planas, 2) as órbitas são elipses com o sol em um dos focos e 3) a razão entre o quadrado do período com o cubo do eixo maior das órbitas é a mesma para todos os planetas.

Capítulo 4

Integrais Invariantes

Neste capítulo discutiremos as integrais invariantes de Poincaré e de Poincaré-Cartan, que são integrais de linha de um campo vetorial no espaço de fase extendido. As integrais são calculadas sobre um contorno de um tubo formado por uma família de soluções das equações Hamiltonianas. Estas integrais apresentam o mesmo valor, independente do contorno tomado sobre o tubo. Como vamos ver na subseção 4.1.3, esta propriedade poderia ser tomada como um princípio basico da mecânica, no lugar do princípio da ação mínima. Apesar das aplicações na mecânica, as integrais invariantes são usadas, em particular, na desenvolvimento da teoria geral das equações diferenciais [1, 4]. Como exemplo de aplicação, obteremos, no fim do capítulo, a condição necessária de canonicidade de uma transformação de variaveis via integrais invariantes, que é a forma mais encontrada nos livros-texto padrão [14, 15, 16].

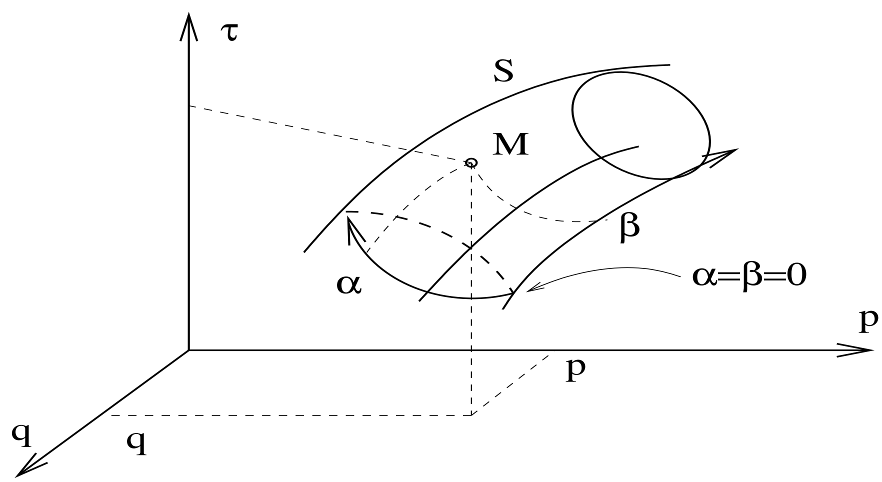

Figura 4.1: O ponto $M(\tau, z^i)$ sobre o tubo tem as coordenadas β, α. Isto implica nas equações paramétricas do tubo $z^i = z^i(\beta, \alpha)$, $\tau = \tau(\beta, \alpha)$. Se τ é tomado como uma das coordenadas: $\beta = \tau$, temos as equações paramétricas $z^i = z^i(\tau, \alpha)$, $\tau = \tau$

4.1 Integral invariante de Poincaré-Cartan

4.1.1 Noções preliminares

Aqui relembraremos alguns fatos relacionados com a descrição de uma superfície e de uma curva em um espaço Euclidiano. Consideremos o espaço $\mathbb{R}^{2n+1}$ parametrizado pelas coordenadas $(z^i, \tau) \equiv (q^a, p_b, \tau)$, $i = 1, 2, \ldots, 2n$, $a, b = 1, 2, \ldots n$. Seja S uma superfície bidimensional (do tipo cilíndro, veja a Fig. 4.1 na página 103), imersa em $\mathbb{R}^{2n+1}$. Esta superfície é dita um *tubo*. Sejam β, α, $\alpha \subset [0, l]$ as coordenadas de algum sistema de coordenadas sobre S. Então os pontos $M(\tau, z^i)$ da superfície têm as coordenadas correspondentes β, α. Isto implica nas equações paramétricas, que descrevem a imersão da superfície em $\mathbb{R}^{2n+1}$

$$S : \quad \begin{cases} z^i = z^i(\beta, \alpha), \\ \tau = \tau(\beta, \alpha). \end{cases} \tag{4.1}$$

Por construção, temos $\tau(\beta, 0) = \tau(\beta, l)$, $z^i(\beta, 0) = z^i(\beta, l)$.

Seja C é uma curva sobre S que possa ser descrita pela equação $\beta = \beta(\alpha)$. Então as equações paramétricas

$$C: \quad \begin{cases} z^i = z^i(\beta(\alpha), \alpha) \equiv z^i(\alpha), \\ \tau = \tau(\beta(\alpha), \alpha) \equiv \tau(\alpha), \end{cases} \tag{4.2}$$

descrevem sua imersão em $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Estaremos interessados nas superfícies formadas por uma dada família uniparamétrica $z^i(\tau, \alpha)$ de soluções (trajetórias) do sistema de primeira ordem[1]

$$\dot{q}^a = Q^a(q, p), \qquad \dot{p}_a = P_a(q, p), \tag{4.3}$$

onde Q, P são funções dadas. O sistema Hamiltoniano é um caso particular de (4.3), quando existe a função $H(q, p)$, tal que

$$Q^a = \frac{\partial H}{\partial p_a}, \qquad P_a = -\frac{\partial H}{\partial q^a}. \tag{4.4}$$

Comentário. Para construirmos um exemplo de família, suponhamos que a solução geral $z^i(\tau, c^j)$, $z^i(0, c^j) = c^j$ de (4.3) é conhecida. Sejam $c^i = f^i(\alpha)$, $\tau = 0$ as equações paramétricas de alguma curva fechada em $\mathbb{R}^{2n+1}$. Então $z^i(\tau, \alpha) \equiv z^i(\tau, f^j(\alpha))$ é um exemplo de uma família uniparamétrica, veja a Fig. 4.2 na página 105.

Para o tubo formado pelas soluções da Eq. (4.3), podemos tomar τ como uma das coordenadas da superfície. Ou seja, o sistema de coordenadas sobre S é agora τ, α, $\alpha \in [0, l]$. Então as equações paramétricas da superfície são

$$S: \quad \begin{cases} z^i = z^i(\tau, \alpha), \\ \tau = \tau. \end{cases} \tag{4.5}$$

Por construção

$$z^i(\tau, 0) = z^i(\tau, l), \tag{4.6}$$

[1] Todos os resultados desta seção continuam válidos para Q e P com dependência explícita do tempo.

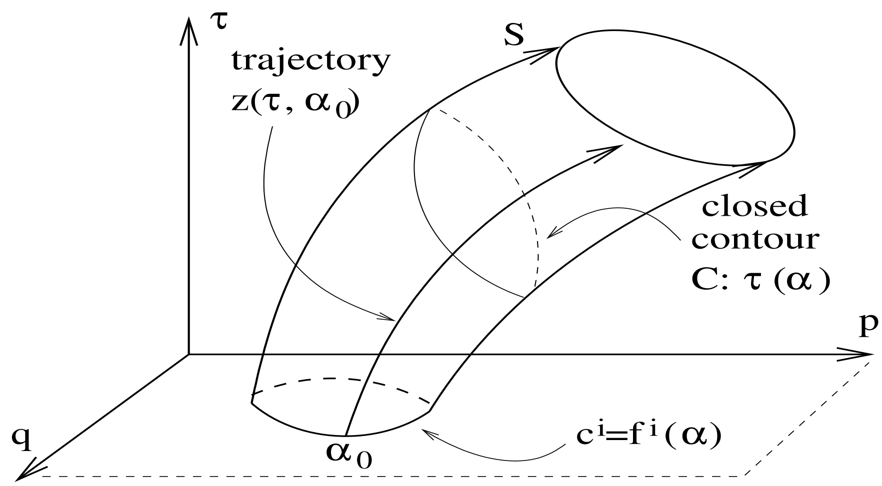

Figura 4.2: O tubo de trajetórias pode ser construído partindo da curva de "valor inicial"$c^i = f^i(\alpha)$. A integral invariante de Poincaré-Cartan é definida utilizando um contorno fechado arbitrário $C \subset S$.

e para qualquer $\alpha = \alpha_0$ fixo, a curva $z^i(\tau, \alpha_0)$ é uma solução da Eq. (4.3).

Supomos que a curva C sobre S pode ser descrita pela equação $\tau = \tau(\alpha)$. Então as equações paramétricas correspondentes que a imergem em $\mathbb{R}^{2n+1}$ são

$$C: \quad \begin{cases} z^i = z^i(\tau(\alpha), \alpha) \equiv z^i(\alpha), \\ \tau = \tau(\alpha). \end{cases} \tag{4.7}$$

4.1.2 Integral de linha de um campo vetorial, ação Hamiltoniana, integrais invariantes de Poincaré-Cartan e de Poincaré

Consideremos o campo vetorial $\vec{V}(z^i, \tau)=(\, v_a(z^i, \tau), u^b(z^i, \tau), v(z^i, \tau)\,)$ definido no espaço de fase extendido $\mathbb{R}^{2n+1}$. Então, pode ser definida *integral de linha do campo vetorial* ao longo de uma curva orientada $C_{M\tilde{M}}$ (veja a Fig. 4.3, na página 106

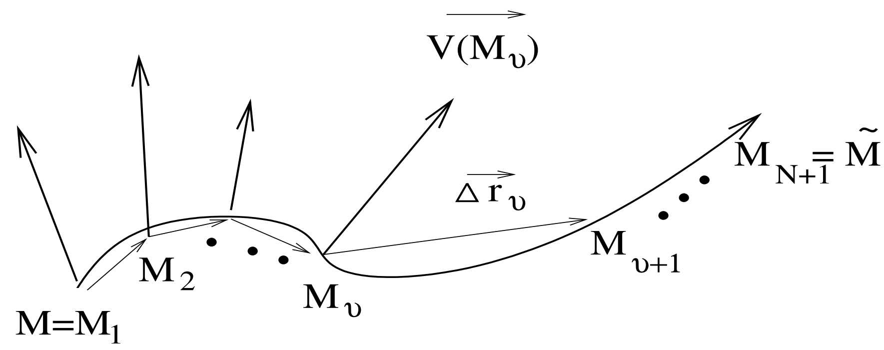

Figura 4.3: Para definirmos uma integral de linha do campo vetorial $\vec{V}$, trocamos uma curva orientada por uma seqüência de vetores deslocamento: $C_{M\tilde{M}} \to \bigcup_{\nu=1}^{N} \triangle\vec{r}_\nu$

$$\int_C \vec{V} d\vec{r} = \int_C v_a dq^a + u^b dp_b + v d\tau$$
$$\equiv \lim_{N\to\infty} \sum_{\nu=1}^{N} (\overrightarrow{V(M_\nu)}, \overrightarrow{\triangle r_\nu}), \qquad (4.8)$$

onde $(\vec{V}, \overrightarrow{\triangle r_\nu})$ é um produto escalar $v_a \triangle q^a + u^b \triangle p_b + v \triangle \tau$. Se C é dada na forma paamétrica $z^i = z^i(\gamma)$, $\tau = \tau(\gamma)$, a integral de linha pode ser apresentada em termos de um integral definida da seguinte maneira

$$\int_C \vec{V} d\vec{r} = \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} (\; v_a(\gamma)\frac{dq^a}{d\gamma} + u^b(\gamma)\frac{dp_b}{d\gamma} + v(\gamma)\frac{d\tau}{d\gamma} \;)d\gamma, \qquad (4.9)$$

onde $\vec{V}\ (\gamma) \equiv \vec{V}(z^i(\gamma), \tau(\gamma))$.

Seja C: $\tau(\alpha)$ um contorno fechado sobre o tubo (4.5) das soluções. A integral de linha (4.8) é dita uma *integral invariante* se seu valor é independente da escolha do contorno do tubo. Se C: $\tau = const$ é um contorno fechado composto por estados simultâneos do tubo, a integral anterior se reduz a

$$\oint_C V_i dz^i = \oint_C v_a dq^a + u^b dp_b, \tag{4.10}$$

e é dita uma *integral invariante universal*.

Estaremos interessados principalmente no caso particular em que o campo vetorial é ortogonal a todos os eixos p, e dado pela expressão

$$\vec{V}(q^a, p_b, \tau) = (\ p_a, 0, -H(q^a, p_b)\ ), \tag{4.11}$$

onde H é a Hamiltoniana do sistema (4.3) e (4.4). A integral de linha então adquire a forma

$$\int_C p_a dq^a - H d\tau. \tag{4.12}$$

Para uma curva que seja uma trajetória do sistema (4.3) e (4.4), a integral de linha (4.12) pode ser identificada com a ação Hamiltoniana. De fato, consideremos uma curva que possa ser descrita na forma paramétrica como segue: $z^i = z^i(\tau)$, $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$. Então a Eq. (4.12) adquire a forma

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau (p_a \dot{q}^a - H) \equiv S_H. \tag{4.13}$$

Agora consideremos uma curva que seja um contorno fechado. A integral de linha (4.12) ao longo do contorno fechado é dita a *integral (invariante) de Poincaré-Cartan*

$$I = \oint_C p_a dq^a - H d\tau. \tag{4.14}$$

Notemos que, ao contrário do caso anerior, o contorno fechado não é uma trajetória permitida para o sistema (4.3) e (4.4). Para o contorno C: $\tau = const$, a integral se reduz a $I_1 = \oint_C p_a dq^a$ e é dita a *integral (invariante universal) de Poincaré*.

Especificaremos a expressão da integral de Poincaré-Cartan para um contorno fechado que esteja sobre um tubo de trajetórias S (4.5).

Seja C: $\tau(\alpha)$ a equação do contorno no sistema de coordenadas estabelecido sobre S. As equações paaramétricas correspondentes então são (4.7), e a integral de Poincaré-Cartan é representada por uma integral definida

$$I = \int_0^l d\alpha \left(p(\tau(\alpha), \alpha) \frac{dq(\tau(\alpha), \alpha)}{d\alpha} - H(z(\tau(\alpha), \alpha)\ ) \frac{d\tau}{d\alpha} \right). \quad (4.15)$$

Resumindo, vimos que uma *integral de linha de um campo vetorial (4.11), calculada ao longo de diferentes classes de curvas, se reduz à ação Hamiltoniana, ou à integral de Poincaré-Cartan, ou à integral de Poincaré.*

Por construção, a integral de Poincaré-Cartan pode depender da escolha do contorno C: $I = I_C$. No entanto, ela se mostra independente da escolha do contorno: I não muda seu valor no caso de um deslocamento arbitrário (com deformação) do contorno ao longo do tubo. Este é um dos resultados que será discutido na próxima subseção.

4.1.3 Invariância da integral de Poincaré-Cartan

Aqui demonstraremos, que I é independente do contorno tomado sobre um tubo de trajetórias do sistema Hamiltoniano correspondente, e, inversamente, se I (construída com a ajuda de alguma função H) tem mesmo valor para cado contorno tomado sobre um tubo de trajetórias do sistema (4.3), então o sistema em consideração é Hamiltoniano. Mais exatamente, temos

Proposição. Para o sistema

$$\dot{q}^a = Q^a(q, p), \qquad \dot{p}_a = P_a(q, p), \quad (4.16)$$

seja $z^i(\tau, \alpha)$, $\alpha \subset [0, l]$ uma família uniparamétrica de soluções, que forma um tubo: $z^i(\tau, 0) = z^i(\tau, l)$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

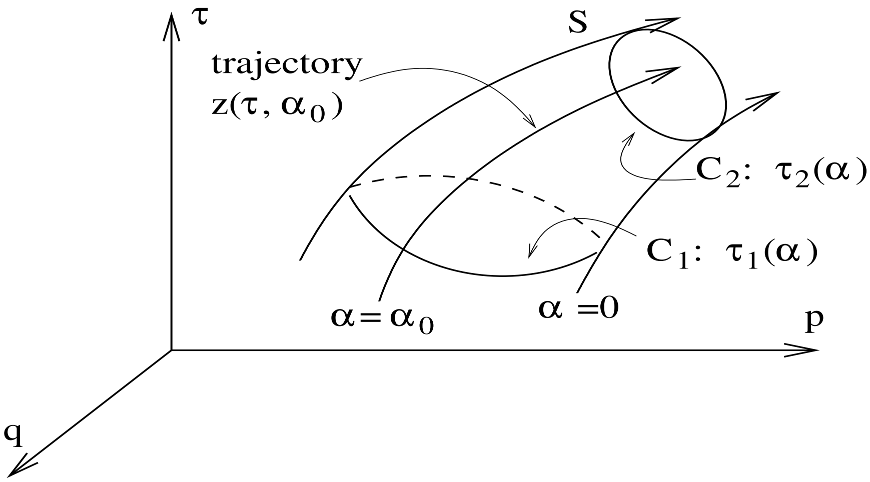

Figura 4.4: Para qualquer $\alpha = \alpha_0$ fixado, a função $S_H(\alpha_0)$ é a ação Hailtoniana calculada ao longo da solução $z(\tau, \alpha_0)$ da Eq. (4.16) entre os pontos $\alpha_1(\tau_0)$ e $\alpha_2(\tau_0)$. A integral de Poincaré-Cartan tem a seguinte propriedade: $I_{C_1} = I_{C_2}$

a) O sistema é Hamiltoniano: existe uma função $H(z)$ tal que

$$Q^a = \frac{\partial H}{\partial p_a}, \qquad P_a = -\frac{\partial H}{\partial q^a}. \tag{4.17}$$

b) Existe uma função $H(z)$ tal que o valor da integral de Poincaré-Cartan

$$I = \oint_C p_a dq^a - H d\tau. \tag{4.18}$$

não depende da escolha do contorno fechado C sobre o tubo.

Demonstração. Abaixo, utilizaremos as seguintes notações: z^i significa $z^i(\tau, \alpha)$, então $\dot{z} \equiv \frac{\partial z(\tau,\alpha)}{\partial \tau}$, $z' \equiv \frac{\partial z(\tau,\alpha)}{\partial \alpha}$.

A) Seja (4.16) um sistema Hamiltoniano. A invariância de I mostra-se intimamente ligada com as propriedades da ação Hamiltoniana na passagem de uma trajetória para outra. Consideremos dois contornos fechados C_1: $\tau_1(\alpha)$ e C_2: $\tau_2(\alpha)$ sobre o tubo S, veja a Fig. 4.4 na página 109. Para qualquer α dado, escrevemos a integral de linha (4.12) ao longo da solução $z^i(\tau,\alpha)$ do sistema (4.16)

$$S_H(\alpha) = \int_{\tau_1(\alpha)}^{\tau_2(\alpha)} \left(p_a(\tau,\alpha)\frac{\partial q^a(\tau,\alpha)}{\partial \tau} - H(\ z(\tau,\alpha)\ )\right) d\tau. \quad (4.19)$$

A função $S_H(\alpha)$ descreva a variação da ação Hamiltoniana no passagem de uma trajetória para outra. Como os valores $\alpha = 0, l$ correspondem à mesma trajetória, temos

$$S_H(l) = S_H(0), \quad (4.20)$$

a partir deste fato segue que

$$\int_0^l \frac{dS_H(\alpha)}{d\alpha} d\alpha = 0. \quad (4.21)$$

Calculemos a taxa de variação

$$\begin{aligned} \frac{dS_H(\alpha)}{d\alpha} = \left(p\frac{\partial q}{d\tau} - H \right)\Bigg|_{\tau_2(\alpha)} \frac{d\tau_2}{d\alpha} - (\tau_2 \to \tau_1) + \\ \int_{\tau_1(\alpha)}^{\tau_2(\alpha)} \left(p'\dot{q} + p\frac{\partial}{\partial \tau}q' - \frac{\partial H}{\partial p}p' - \frac{\partial H}{\partial q}q' \right) d\tau. \end{aligned} \quad (4.22)$$

A integração por partes do segundo termo da integral nos dá

$$pq'|_{\tau_1(\alpha)}^{\tau_2(\alpha)} - \int_{\tau_1(\alpha)}^{\tau_2(\alpha)} q'\dot{p} d\tau. \quad (4.23)$$

Juntando esssas duas expressões obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dS_H(\alpha)}{d\alpha} = p(\tau_2(\alpha),\alpha) \left(\dot{q}|_{\tau_2(\alpha)} \frac{d\tau_2}{d\alpha} + q'|_{\tau_2(\alpha)} \right) \\ -H(z(\tau_2(\alpha),\alpha)\ )\frac{d\tau_2}{d\alpha} - (\tau_2 \to \tau_1) \\ + \int_{\tau_1(\alpha)}^{\tau_2(\alpha)} \left(p'\left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) - q'\left(\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \right) \right) d\tau. \end{aligned} \quad (4.24)$$

A expressão na última linha se anula devido às Eqs. (4.16) e (4.17), enquanto a expressão da primeira linha é igual a $p\ \frac{dq}{d\alpha}$. Assim temos

$$\frac{dS_H(\alpha)}{d\alpha} = p(\tau_2(\alpha),\alpha)\frac{dq(\tau_2(\alpha),\alpha)}{d\alpha} - H(z(\tau_2(\alpha),\alpha)\ )\frac{d\tau_2}{d\alpha}$$

$$-(\tau_2 \to \tau_1). \tag{4.25}$$

Notemos que o membro direito de (4.25) coincide com o integrando da integral de Poincaré-Cartan (4.15). A substituição deste resultado na Eq. (4.21) nos dá o resultado desejado: $I_{C_1} = I_{C_2}$, para qualquer contorno fechado C_i sobre S.

B) Suponhamos que a integral (4.18) com alguma função H seja independente do contorno sobre o tubo do sistema (4.16). Seja C': $\tau'(\alpha)$ um contorno fechado arbitrário na vizinhança de C: $\tau(\alpha)$, e denotemos $\tau'(\alpha) - \tau(\alpha) \equiv \delta\tau(\alpha)$. Devido a independência do contorno, temos $I_{C'} - I_C = 0$. Em particular, a variação se anula: $\delta I = (I_{C'} - I_C)|_{linear\ part\ on\ \delta\tau} = 0$. Por outro lado, a variação pode ser calculada diretamente, fazendo uma expansão de $I_{C'}$ em torno do ponto $\tau(\alpha)$ (abaixo, a notação $|$ significa a substituição de $\tau(\alpha)$). Usando $z(\tau(\alpha)+\delta\tau, \alpha) = z(\tau(\alpha), \alpha) + \left.\frac{\partial z(\tau,\alpha)}{\partial\tau}\right| \delta\tau + O^2(\delta\tau)$, obtemos

$$\begin{aligned}\delta I = \int_0^l d\alpha \Bigg(& \dot{p}| \, \frac{dq(\tau(\alpha), \alpha)}{d\alpha}\delta\tau + \\ & p(\tau(\alpha), \alpha)\frac{d}{d\alpha}\left(\dot{q}|\,\delta\tau\right) - H\frac{d\delta\tau}{d\alpha} - \\ & \frac{\partial H}{\partial q}\dot{q}\bigg| \, \frac{d\tau}{d\alpha}\delta\tau - \frac{\partial H}{\partial p}\dot{p}\bigg| \, \frac{d\tau}{d\alpha}\delta\tau \Bigg).\end{aligned} \tag{4.26}$$

A expressão na primeira linha pode ser apresentada como

$$\dot{p}q'|\,\delta\tau + \dot{p}\dot{q}|\,\frac{d\tau}{d\alpha}\delta\tau, \tag{4.27}$$

enquanto a integração por partes na segunda linha leva às expressões

$$\int_0^l \left(- p'\dot{q}|\,\delta\tau - \dot{p}\dot{q}|\,\frac{d\tau}{d\alpha}\delta\tau \right) d\alpha + \left. p\dot{q}|\,\delta\tau\right|_0^l, \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned}\int_0^l \Bigg(& \frac{\partial H}{\partial q}\left(\dot{q}\frac{d\tau}{d\alpha} + q'\right)\bigg|\,\delta\tau + \\ & \frac{\partial H}{\partial p}\left(\dot{p}\frac{d\tau}{d\alpha} + p'\right)\bigg|\,\delta\tau \Bigg) d\alpha - \left. H\delta\tau\right|_0^l.\end{aligned} \tag{4.29}$$

Como os valores $\alpha = 0, l$ correspondem ao mesmo ponto do tubo, os últimos termos nas Eqs. (4.28) e (4.29) se anulam. Juntando com termos restantes, temos

$$\delta I = \int_0^l d\alpha \left[q' \left(\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \right) \Big| - p' \left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) \Big| \right] \delta\tau(\alpha) \qquad (4.30)$$

De acordo com (4.16) e com a independência do contorno $\delta I = 0$, temos

$$\int_0^l d\alpha \left[q'| \left(P + \frac{\partial H}{\partial q} \right) \Big|_{z(\tau(\alpha),\alpha)} - p'| \left(Q - \frac{\partial H}{\partial p} \right) \Big|_{z(\tau(\alpha),\alpha)} \right] \delta\tau(\alpha) = 0. \qquad (4.31)$$

Como isto é válido para qualquer $\delta\tau(\alpha)$ e para qualquer contorno $\tau(\alpha)$, esta igualdade implica na Eq. (4.17). O que completa a demonstração.

Esta afirmação significa, em particular, que para uma dada integral de Poincaré-Cartan existe um único sistema de equações diferenciais que admite esta integral como uma integral invariante. Este fato poderia ser tomado como o princípio básico da mecânica, no lugar do princípio da ação mínima.

4.2 Integral invariante de Poincaré.

Consideremos o caso particular da integral de Poincare-Cartan $I = \oint p_a dq^a - H d\tau$, mesmo, ao longo dos contornos fechados C consistindo de estados *simultâneos* de um sistema[2]. Tal contorno aparece, quando um tubo de trajetórias de sistema é cortado por um hiperplano $\tau = \tau_0 = const$, veja a Fig. 4.5 na página 113. Para tal contorno, $d\tau = 0$ e a integral de Poincaré-Cartan toma a forma

$$I_1 = \oint_C p_a dq^a, \qquad (4.32)$$

[2]Neste caso, a palavra "estado"é utilizada para um ponto do espaço de fase extendido.

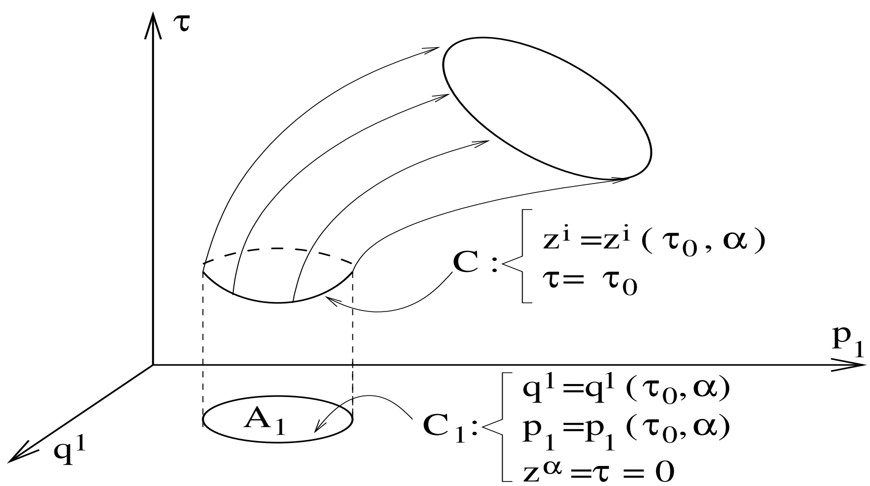

Figura 4.5: Contorno fechado de estados simultâneos C e suas projeção C_1 no plano (q^1, p_1).

e é chamada *integral (invariante universal) de Poincaré*. A equação do contorno C tem a forma $\tau = \tau_0$, portanto, as equações paramétricas correspondentes são $\tau = \tau_0$, $z^i = z^i(\tau_0, \alpha)$. Isto implica na seguinte expressão para I_1, em termos da integral definida

$$I_1 = \int_0^l p_a(\tau_0, \alpha) \frac{\partial q^a(\tau_0, \alpha)}{\partial \alpha} d\alpha. \tag{4.33}$$

Como trata-se de um caso particular da integral de Poincaré-Cartan, I_1 possui propriedades similares às propriedades da integral de Poincaré-Cartan. Em particular, a afirmação da subseção precedente pode ser reformulada para I_1 como segue

Proposição. Para o sistema

$$\dot{q}^a = Q^a(q, p), \qquad \dot{p}_a = P_a(q, p), \tag{4.34}$$

seja $z^i(\tau, \alpha)$, $\alpha \subset [0, l]$ uma família uniparamétrica de soluções, que formam um tubo: $z^i(\tau, 0) = z^i(\tau, l)$. Então as seguintes condições são equivalentes:

a) O sistema é Hamiltoniano: existe uma função $H(z)$ tal que

$$Q^a = \frac{\partial H}{\partial p_a}, \qquad P_a = -\frac{\partial H}{\partial q^a}. \tag{4.35}$$

b) O valor da integral universal de Poincaré

$$I = \oint_C p_a dq^a. \tag{4.36}$$

é independente da escolha do contorno C: $\tau = \tau_0$, sobre o tubo.

Como H não aparece na expressão para I_1, a integral de Poincaré I_1 é invariante com respeito a qualquer sistema Hamiltoniano. Esse fato justifica porque I_1 é dita *universal*.

Deve ser enfatizado que a integral (4.32) é invariante se o contorno C é deslocado ao longo do tubo para um contorno C': $\tau = \tau'$, que também é constituído de estados simultâneos. De acordo com a Eq. (4.33), a invariância de I_1 implica, em particular, em $I_1(\tau_0) = I_1(\tau')$. Desta forma, a integral invariante universal não depende do tempo.

Também pode ser dada uma interpretação geométrica da integral universal. Relembremos que a seguinte integral de linha em um plano parametrizado por q e p

$$A = \oint_D pdq, \tag{4.37}$$

nos dá a área da região que delimita o contorno fechado D. Agora, no espaço de fase extendido, consideremos o contorno C_1: $q^1 = q^1(\tau_0, \alpha)$, $p^1 = p^1(\tau_0, \alpha)$, $z^\alpha = 0$, $\tau = 0$. Esse contorno encontra-se no plano (q^1, p_1), sendo a projeção ortogonal do contorno de integração C: $z^i = z^i(\tau_0, \alpha)$, $\tau = \tau_0$ da integral universal (4.32) (veja a Fig. 4.5 na página 113). De acordo com (4.37), a área do interior de C_1 pode ser calculada como

$$A_1 = \oint_{C_1} p_1 dq^1 = \int_0^l p_1(\tau_0, \alpha) \frac{\partial q^1(\tau_0, \alpha)}{\partial \alpha} d\alpha. \tag{4.38}$$

Comparando as expressões (4.33) e (4.38), concluímos que a integral universal I_1 representa a soma das áreas A_a

$$I_1 = \oint_C p_a dq^a = \sum A_a. \tag{4.39}$$

Assim, os contornos C e C_a variam no decorrer do movimento do sistema, e as áreas corespondentes também variam, mas a soma algébrica (4.39) das áreas, ja que é igual a I_1, permanece constante. Esta é a interpretação geométrica da invariância da integral de Poincaré.

Agora investiguemos a estrutura da integral invariante universal de uma forma geral (4.10). Em outras palavras, estamos interessados na forma do campo vetorial que implica na invariância da integral.

Proposição. Seja a integral de linha $\tilde{I}_1$ do campo vetorial $V_i(z^j, \tau) = (v_a, u^a)$ uma integral invariante universal. Então

1. O campo tem a forma

$$V_i = \frac{1}{2} c z^j \omega_{ji} + \partial_i \Phi(z^i, \tau), \quad ou \quad \begin{cases} v^a = \frac{1}{2} c p_a + \frac{\partial \Phi}{\partial q^a}, \\ u_a = -\frac{1}{2} c q^a + \frac{\partial \Phi}{\partial p_a}, \end{cases} \tag{4.40}$$

onde ω_{ij} é a matriz simplética e Φ é alguma função.

2. A integral $\tilde{I}_1$ coincide, a menos de uma constante c, com a integral invariante de Poincaré

$$\tilde{I}_1 \equiv \oint_C v_a dq^a + u^b dp_b = c I_1 \equiv c \oint_C p_a dq^a. \tag{4.41}$$

A última afirmação significa que a integral de Poincaré é, essencialmente, a única integral invariante (de primeira ordem, veja abaixo).

Demonstração. Consideremos um contorno fechado, formado por estados simultâneos C: $\tau = const$ sobre o tubo (4.5) das soluções de algum sistema Hamiltoniano, com Hamiltoniana H. Utilizando as equações paramétricas (com o parâmetro α) do contorno: $z^i =$

$z^i(\tau, \alpha)$, $\tau = const$, $\tilde{I}_1$ pode ser apresentada como a integral definida

$$\tilde{I}_1(\tau) = \int_0^l (v_a(z(\tau,\alpha),\tau)q'^a(\tau,\alpha) + u^a(z(\tau,\alpha)p'_a(\tau,\alpha))\, d\alpha$$
$$\equiv \int_0^l V_i(z(\tau, alpha), \tau)z'^i d\alpha \qquad (4.42)$$

Devido à invariância, $\tilde{I}_1(\tau) = \tilde{I}_1(\tau')$, temos $\frac{d\tilde{I}_1}{d\tau} = 0$. O cálculo direto da derivada leva-nos à uma expressão, que corresponde à integral de linha seguinte

$$\oint_C G_i(z,\tau)dz^i = 0, \qquad (4.43)$$

onde

$$G_i \equiv -W_{ij}\omega^{jk}\partial_k H + \frac{\partial V_i}{\partial \tau},$$
$$W_{ij} \equiv \partial_i V_j - \partial_j V_i. \qquad (4.44)$$

Como a análise precedente foi feita para um tubo arbitrário, a integral de linha (4.43) se anula ao longo de qualquer contorno que esteja sobre o hiperplano $\tau = const$. Isto implica que o campo G_i é conservativo, ou, de forma equivalente, ele obedece a $\partial_l G_i - \partial_i G_l = 0$. A forma explícita desta expressão é dada da seguinte forma

$$(\partial_j W_{li})\omega^{jk}\partial_k H + \frac{\partial}{\partial \tau}W_{li} + W_{lj}\omega^{jk}\partial_k\partial_i H - W_{ij}\omega^{jk}\partial_k\partial_l H = 0 (4.45)$$

Devido a universalidade de $\tilde{I}_1$, Eq. (4.45) é válido para qualquer H, portanto

$$\partial_j W_{li} = \frac{\partial}{\partial \tau}W_{li} = 0,$$
$$W_{lj}\omega^{jk}\partial_k\partial_i H - W_{ij}\omega^{jk}\partial_k\partial_l H = 0. \qquad (4.46)$$

A primeira linha implica que W é uma matriz numérica.

Exercício. Mostre que a segunda linha implica em $W_{ij} = c\omega_{ij}$, onde $c = const$.

De acordo com esse fato, temos $\partial_i V_j - \partial_j V_i = c\omega_{ij}$, ou, de forma equivalente, $\partial_i(V_j - \frac{1}{2}cz^k\omega_{kj}) - \partial_j(V_i - \frac{1}{2}cz^k\omega_{ki}) = 0$. Isto implica que o campo vetorial tem um potencial: $V_i - \frac{1}{2}cz^k\omega_{ki} = \partial_i\Phi$, ou seja, V_i tem a forma $V_i = \frac{1}{2}cz^k\omega_{ki} + \partial_i\Phi$, como queríamos demonstrar.

Tomando a integral de linha do campo, obtemos $\tilde{I}_1 = \oint_C V_i dz^i = \frac{1}{2}c\oint_C p_a dq^a - q^a dp_a + \oint_C \partial_i\Phi dz^i = c\oint_C p_a dq^a$. Aqui todos os termos integrados se anulam devido ao contorno ser fechado. Então, qualquer integral invariante difere da integral de Poincaré por um fator numérico.

Agora que já caracterizamos as integrais invariantes de Poincaré-Cartan, I, e a de Poincaré, I_1, vamos introduzir alguns termos utilizados para ilustrar algumas de suas propriedades. Estas integrais são ditas *relativas* devido ao domínio de integração ser uma curva fechada, e são ditas de *primeira ordem* devido às diferenciais entrarem linearmente sob o sinal da integral. Vale mencionar que I_1 pode ser escrita, via teorema de Stokes, na forma

$$I_1 = \int dp_i dq^i. \tag{4.47}$$

No espaço de fase existem ainda diversas outras integrais invariantes universais[3] de ordem superior,

$$I_1 = \oint p_i dq^i = J_2 = \int dp_i dq^i \tag{4.48}$$

$$I_3 = \oint p_i dq^i dp_k dq^k = J_4 = \int dp_i dq^i dp_k d^k \tag{4.49}$$

$$\begin{aligned} & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ I_{2n-1} = & \oint p_{i_1} dq^{i_1} \cdots dp_{i_n} dq^{i_n} = \\ & = J_{2n} = \int dp_{i_1} dq^{i_1} \cdots dp_{i_n} dq^{i_n} \end{aligned} \tag{4.50}$$

Agora, surge o interesse sobre a unicidade ou não das integrais invariantes universais de ordem superior. No trabalho [30] foi demonstrado que qualquer integral invariante difere por uma constante multiplicativa das integrais listadas acima.

[3] A última destas integrais representa o volume de uma região no espaço de fase e foi discutida na subseção 3.4.1.

4.3 Transformações canônicas e integrais invariantes

Nesta seção, como um exemplo de aplicação do formalismo, derivaremos a condição necessária de canonicidade de uma transformação de coordenadas com o uso das integrais de Poincaré-Cartan e de Poincaré, que é a forma mais encontrada nos livros-texto padrão. Inicialmente relembraremos a definição de transformação canônica: uma transformação de coordenadas $z^i \to z'^i$ é uma transformação canônica se, e somente se, essa transformação mantém a forma canônica das equações de Hamilton, para qualquer Hamiltoniana H.

Consideremos um contorno fechado C: $\tau = const$, e um contorno fechado de estados simultâneos C_0: $\tau = const$ sobre o tubo (4.5) das soluções de um sistema Hamiltoniano H. De acordo com a afirmação demonstrada na subseção 4.1.3, a integral de Poincaré-Cartan possui o mesmo valor para os contornos, temos então

$$\oint_C (p_a dq^a - H d\tau) = \oint_{C_0} p_a dq^a. \tag{4.51}$$

Aqui, como C_0 é um contorno simultâneo, a integral de Poincaré-Cartan se reduz à integral de Poincaré.

Agora, seja (q'^a, p'_a, τ) uma outra parametrização do espaço de fase extendido. Suponhamos que as coordenadas iniciais e finais são relacionadas por uma transformação canônica, então as equações de movimento para o sistema mantêm sua forma canônica nas novas coordenadas. Repetindo a análise precedente, obtemos a expressão similar à Eq. (4.51) nas novas coordenadas

$$\oint_{C'} (p'_a dq'^a - H' d\tau) = \oint_{C'_0} p'_a dq'^a. \tag{4.52}$$

Aqui C' e C'_0 representam os contornos C e C_0 nas novas coordenadas, veja a Fig. 4.6. Notemos que C'_0 é simultâneo, já que o tempo

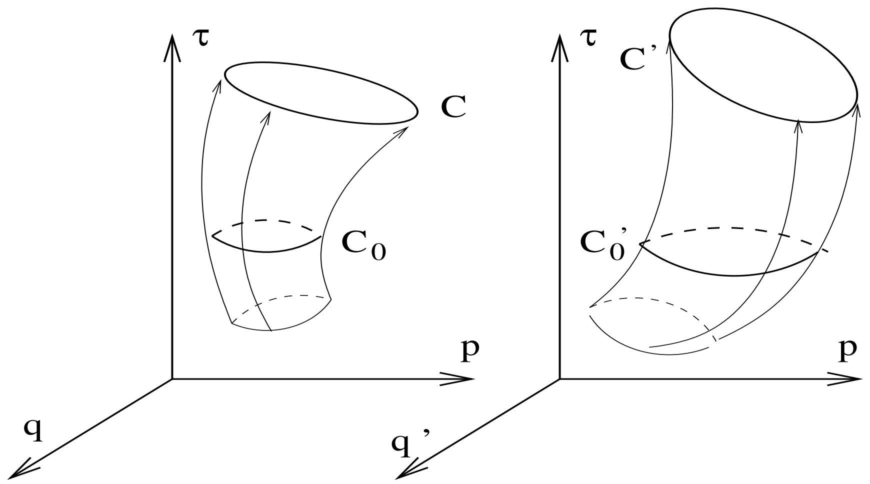

Figura 4.6: Dois tubos formados pelas trajetórias de um sistema Hamiltoniano em coordenatas z e z'.

τ não é alterado na transformação canônica.

Se na integral invariante universal $\oint_{C_0'} p_a' dq'^a$ passamos para as variáveis q^a, p_a por meio da transformação canônica, então esta integral certamente se transformará numa integral invariante de primeira ordem no espaço de fase $2n$-dimensional, parametrizado por (q^a, p_a). Pelo teorema da seção anterior, a integral invariante difere de $\oint_{C_0} p_a dq^a$ somente por um fator constante c. Portanto,

$$\oint_{C_0'} p_a' dq'^a = c \oint_{C_0} p_a dq^a \tag{4.53}$$

e, utilizando as equações (4.51), (4.52) segue que

$$\oint_{C'} (p_a' dq'^a - H' d\tau) = c \oint_{C} (p_a dq^a - H d\tau). \tag{4.54}$$

Expressando as variáveis (q'^a, p_a') na primeira integral em termos das variáveis (q^a, p_a) (aqui o caminho de integração C' é trocado pelo caminho C), então

$$\oint_{C} (p_a' dq'^a - H' d\tau) - c \oint_{C} (p_a dq^a - H d\tau) = 0. \tag{4.55}$$

O contorno C é completamente arbitrário no espaço de fase extendido $2n+1$-dimensional. Então, pelo teorema do gradiente, a expressão sob o sinal da integral na última equação deve ser uma diferencial total de alguma função dos $2n+1$ argumentos q^a, p_a, τ. Denotemos esta função por $-F(q^a, p_a, \tau)$. Então[4]

$$p'_a dq'^a - H' d\tau = c(p_a dq^a - H d\tau) - dF. \tag{4.56}$$

Aqui fica claro porque c sempre é uma constante não nula, já que a expressão $p'_a dq'^a - H' d\tau$ não é uma diferencial total, de forma que não pode ser igual à diferencial $-dF$. O resultado (4.56) foi obtido antes na seção 3.5.

A função F é a função geradora da transformação canônica e c é a valência da transformação, já discutidos no capítulo 3. Então nesta seção demonstramos, que se uma transformação no espaço de fase é uma transformação canônica, então existe uma função geradora F e uma constante c, tais que a Eq. (4.56) seja identicamente satisfeita. No capítulo 3 foi mostrado, de forma puramente algébrica, que a existência da função geradora é uma condição necessária e suficiente para a canonicidade da transformação, além do fato de que a função geradora é independente do sistema Hamiltoniano em consideração.

[4]Temos $dF = \frac{\partial F}{\partial q^a} dq^a + \frac{\partial F}{\partial p_a} dp_a + \frac{\partial F}{\partial \tau} d\tau$.

Apêndice A

Transformações, mudança de variáveis, simetrias e teorema de Noether

Foi mencionado na seção 1.4 que as leis de conservação desempenham um papel importante na análise de sistemas clássicos e quânticos. Este apêndice é dedicado à discussão do teorema de Noether, que nos dá uma relação entre a existência de leis de conservação para um sistema e as simetrias da ação funcional associada. As simetrias usualmente têm certa interpretação física. Em particular, elas podem estar associadas a algumas propriedades fundamentais assumidas para o nosso espaço-tempo, como homogeneidade, isotropia, etc. O teorema de Noether afirma que as leis de conservação tornam-se consequências destas propriedades. Por exemplo, a simetria de translações espaciais implica conservação do momento total do sistema.

Para demonstrar a idéia do teorema de Noether, consideremos a seguinte situação especial: partindo de uma dada trajetória $q^a(\tau)$, seja $q'^a(\tau) = q^a(\tau) + R^a(q(\tau))\omega$ uma família de trajetórias, parametrizada pelo parâmetro ω. Aqui $R^a(q)$ dada função. Suponhamos que a ação seja invariante sob a substituição $q \to q'$: $S[q'] = S[q]$, para qualquer dada trajetória $q(\tau)$ e para qualquer ω. Em particular, a variação da ação deve ser nula, $\delta S = (S[q'] - S[q])|_{parte\ linear\ em\ \omega}$ $= 0$. Por outro lado, a variação é dada pela formula bem conhecida $\delta S = \frac{\delta S}{\delta q}R + (\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}R)^{\cdot}$. Devido à invariância, obtemos a identidade $(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}R)^{\cdot} = -\frac{\delta S}{\delta q}R$, valida para qualquer trajetória $q(\tau)$. Em particular, se $q(\tau)$ é uma solução das equações de movimento: $\frac{\delta S}{\delta q} = 0$, a identidade implica que $(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}R)^{\cdot} = 0$. Ou seja, a quantidade $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}R^a$ é constante ao longo de qualquer solução.

Além do teorema de Noether, discutiremos também outros tópicos: a noção de simetria para as equações de movimento, sua relação com as simetrias da ação, mudança de variáveis, os grupos de simetria de Galileu e Poincaré. O leitor interessado apenas no teorema de Noether pode passar diretamente à subseção correspondente após a leitura da primeira subseção.

A.1 Transformações de coordenadas e simetrias de uma ação (simetrias variacionais)

Aqui discutiremos a noção de invariância (ou, equivalentemente, de simetria) de uma ação funcional sobre a atuação de uma família de transformações de coordenadas. A definição exata é um pouco diferente da receita formal, que é utilizada na pratica para checar a invariância. Daremos a definição exata de simetria e então obteremos a receita. Deve ser mencionado que o teorema de Noether é válido para qualquer sistema de equações diferenciais obtido a partir de um princípio variacional para um dado funcional. Este pode ser Lagrangeano ou Hamiltoniano, ou ainda algum diferente. Para fixar as idéias, utilizaremos aqui as equações de Euler-Lagrange, especialmente quando discutirmos exemplos e aplicações do formalismo aqui apresentado. A versão Hamiltoniana do teorema de Noether é discutida na seção 1.5.

Consideremos um sistema dinâmico descrito pelas equações de movimento obtidas a partir da ação

$$S[q] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau L(q^a, \dot{q}^a, \tau), \qquad \text{(A.1)}$$

definida no espaço das funções $q^a = f^a(\tau)$, $\tau \subset [\tau_1, \tau_2]$. Nesta seção será conveniente utilizar notações diferentes para as coordenadas do espaço de configurações: q^a, e para as trajetórias: $q^a = f^a(\tau)$, ou seja, para os mapeamentos $f : \mathbb{R} = \{\tau\} \longrightarrow \mathbb{R}^n = \{q^a\}$.

Será conveniente trabalharmos no espaço de configurações extendido, parametrizado pelas coordenadas τ, q^a: $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \{(\tau, q^a)\}$. No espaço extendido são definidas *transformações de coordenadas* da forma[1]

$$g : (\tau, q^a) \longrightarrow (\ \tau', q'^a) = (\alpha(\tau, q^a), \psi^a(\tau, q^a)\ ), \qquad \text{(A.2)}$$

onde α, ψ^a funções dadas. Suponhamos que elas sejam invertíveis, ou seja, que

$$\det \frac{\partial(\alpha, \psi^a)}{\partial(\tau, q^b)} \neq 0. \qquad \text{(A.3)}$$

O conjunto de transformações invertíveis forma um grupo. Na discussão do teorema de Noether usualmente lidamos com apenas um subconjunto do grupo, que representa uma *família de transformações G*, parametrizado por k parâmetros ω^α, $\alpha = 1, 2, \ldots, k$

$$G = \{g(\omega^\alpha)\}, \qquad \text{(A.4)}$$

ou seja, de acordo com a Eq. (A.2), temos um conjunto de funções suaves $\alpha(\tau, q^a, \omega^\alpha)$, $\psi^a(\tau, q^a, \omega^\alpha)$. Suponhamos também, que a transformação coorespondente ao $\omega^\alpha = 0$ é a identidade

$$\alpha(\tau, q^a, 0) = \tau, \qquad \psi^a(\tau, q^a, 0) = q^a. \qquad \text{(A.5)}$$

[1] aqui adotaremos um ponto de vista "ativo", onde a transformação leva um ponto com coordenadas (τ, q) em outro ponto, com coordenadas (τ', q')

Abaixo vamos omitir os parâmetros, assim como os indíces das coordenadas $q^a \to q$, $\psi^a \to \psi$ e assim por diante, o que não deve causar confusão. Devemos mencionar ainda que a transformação inversa pode não ser um elemento da família, já que a família pode não ser um subgrupo do grupo das transformações de coordenadas. Em exemplos concretos, normalmente a família representa uma realização de algum grupo de Lie k-dimensional no espaço $\mathbb{R}^{n+1}$. Por exemplo, ela pode ser o grupo das rotações no espaço tridimensional, com os elementos do grupo parametrizados pelos ângulos de Euler ω^α. Então os ângulos de Euler podem ser tomados como os parâmetros desta família.

O tempo transformado, τ' na Eq. (A.2) geralmente depende das demais coordenadas q^a. Tais tipos de transformação aparecem, em particular, em teorias relativísticas descritas em termos de variáveis físicas, veja o exemplo da partícula relativística na subseção A.3. Exemplos de transformação onde q' depende de τ são os boosts de Galileu. Chamamos à atenção ao fato de que a forma típica das transformações em mecânica clássica (não relativística) são de uma das formas: $\tau' = \alpha(\tau)$, $q' = q$; ou $\tau' = \tau$, $q' = \psi(\tau, q)$. Ou seja, τ ou q permanecem inalterados. Por outro lado, transformações da forma (A.2) são típicas para transformações de simetria em teorias de campo (com as substituições correspondentes $\tau \to x^\mu$, $q^a \to \varphi^a(x^\mu)$).

Como a ação funcional (A.1) envolve funções $q^a = f^a(\tau)$ ao invés de coordenadas, precisamos definir como uma transformação g atua sobre as funções $f(\tau)$. Identificando a função com seu gráfico (veja a Fig. A.1 na página 125)

$$\Gamma_f = \{(\tau, f^a(\tau)), \tau \subset [\tau_1, \tau_2]\}. \tag{A.6}$$

A imagem do conjunto dos pontos Γ_f sob a transformação (A.2) é dada por

$$g \cdot \Gamma_f = \{\, [g \cdot (\tau, q^a)]\big|_{q=f(\tau)} = (\ \alpha(\tau, f(\tau)), \psi^a(\tau, f(\tau))\ )\}. \tag{A.7}$$

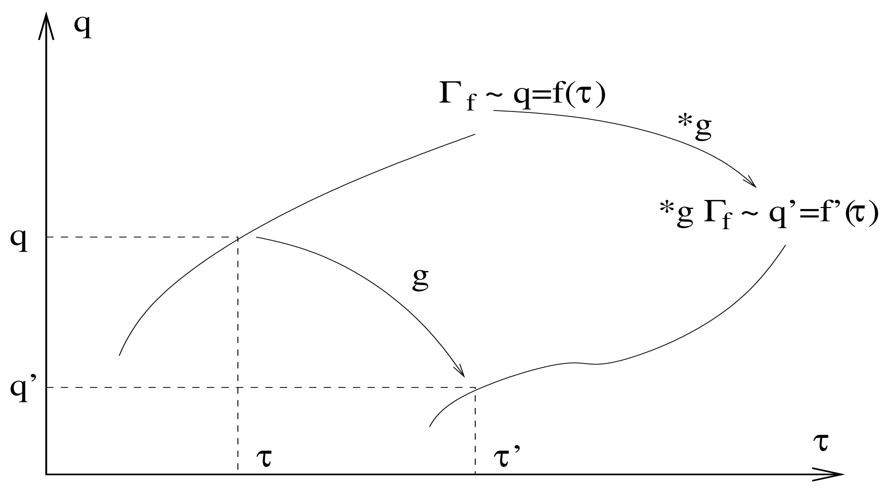

Figura A.1: A transformação de coordenadas g induz o mapeamento $*g : f \to f'$ no espaço das funções.

Localmente, e para $g \approx 1$, a imagem é o gráfico de alguma função $q'^a = f'^a(\tau')$. Por construção, a dependência de τ' em q'^a é dada na forma paramétrica por

$$\begin{aligned} \tau' &= \alpha(\tau, f(\tau)), \\ q'^a &= \psi^a(\tau, f(\tau)). \end{aligned} \tag{A.8}$$

Eliminando τ nestas expressões, obteremos as funções q'^a na forma explícita $q'^a = f'^a(\tau')$. Detalhadamente, suponhamos que a primeira equação possa ser resolvida como

$$\tau = \tilde{\alpha}_f(\tau'). \tag{A.9}$$

Então a função transformada tem a representação

$$q'^a = f'^a(\tau') = \psi^a(\tau, f(\tau))\big|_{\tau=\tilde{\alpha}_f(\tau')} . \tag{A.10}$$

Notemos que $\tilde{\alpha}$ depende da função f, assim a representação obtida é formal. Mencionemos ainda as identidades

$$\tilde{\alpha}_f(\tau')\big|_{\tau'=\alpha(\tau,f(\tau))} \equiv \tau, \qquad\qquad \alpha(\tau, f(\tau))\big|_{\tau=\tilde{\alpha}_f(\tau')} \equiv \tau'. \tag{A.11}$$

De acordo com esta construção, a transformação de coordenadas g *induz* o mapeamento $*g$ no espaço das funções, que é dado pelas equações (A.8) e (A.10). A função f' é dita a *imagem* de f sob a transformação $*g$. Se f foi definida no intervalo $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$, o intervalo correspondente para f' é

$$\tau' \subset [\tau'_1, \tau'_2], \qquad \tau'_i = \alpha(\tau_i, f(\tau_i)). \tag{A.12}$$

Agora, dada uma função $f(\tau)$, construamos a imagem $f'(\tau')$, e calculemos o *mesmo* funcional (A.1) para f'

$$S[f'] = \int_{\tau'_1}^{\tau'_2} d\tau' L\left(f'^a, \frac{df'^a}{d\tau'}, \tau'\right). \tag{A.13}$$

Definição 1. As transformações de coordenadas (A.2) são uma *simetria da ação* (A.1) (ou uma *simetria variacional*) se, para quaisquer $f(\tau)$ e ω^α, existir uma função $N(f, \dot{f}, \tau, \omega)$ tal que

$$\int_{\tau'_1}^{\tau'_2} d\tau' L(f'^a, \frac{df'^a}{d\tau'}, \tau') = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[L(f^a, \frac{df^a}{d\tau}, \tau) + \frac{dN}{d\tau}\right]. \tag{A.14}$$

Aqui chamamos a atenção ao fato de que a Eq. (A.14) representa a igualdade de dois *números*. Em particular, em vários casos de interesse prático temos $N = 0$. Então para qualquer f e a correspondente f', o valor do funcional para f e f' devem ser iguais, ou seja, $S[f'] = S[f]$. Assim, a condição de invariância é representada em termos do mesmo funcional calculado para duas funções diferentes, a função inicial e a transformada. Agora retornaremos à função inicial no membro esquerdo da Eq. (A.14) para obtermos a condição de invariância em termos da ação inicial e de alguma *ação transformada*, ambas calculadas para a *mesma* função. A fim de obter esta condição, faremos uma mudança de variáveis na integral definida. A mudança é escolhida a partir da condição de que os limites de integração nos membros esquerdo e direito coincidam na expressão final. Mantendo a Eq. (A.12), faremos a mudança $\tau' =$

$\alpha(\tau, f(\tau))$. Utilizando a identidade $\frac{df'(\tau')}{d\tau'}\Big|_{\tau'=\alpha(\tau,f(\tau))} = \left(\frac{d\alpha}{d\tau}\right)^{-1} \frac{df'(\alpha)}{d\tau}$, a Eq. (A.14) adquire a forma

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau\dot{\alpha}L(f'(\tau'), (\dot{\alpha})^{-1}\frac{df'(\tau')}{d\tau}, \alpha) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[L(f(\tau), \dot{f}, \tau) + \frac{dN}{d\tau}\right], \tag{A.15}$$

onde agora temos $f'(\tau') \equiv f'(\tau')|_{\tau'=\alpha(\tau,f(\tau))} = \psi(\tau, f(\tau))$, a última igualdade segue da representação (A.10) e da identidade (A.11). Assim, na Eq. (A.15), ao invés de termos a função transformada temos a transformação de coordenadas (A.2). Contrastando com a Eq. (A.14), ambos os lados da Eq. (A.15) são calculados para a mesma função $q = f(\tau)$. Podemos dizer então que sob a transformação (A.2) a ação inicial transforma-se em outra ação, dada pelo lado esquerdo da última equação.

Isto permite-nos reescrever a condição de invariância de uma ação funcional da seguinte maneira, que é comumente usada na prática

Definição 2. A ação

$$S'[q] \equiv \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau\dot{\alpha}L(\ \psi(\tau, q), (\dot{\alpha})^{-1}\dot{\psi}(\tau, q), \alpha\ ), \tag{A.16}$$

é dita uma *transformação da ação* (A.1) sob a transformação de coordenadas

$$\begin{aligned} \tau \to \tau' &= \alpha(\tau, q^a), \\ q^a \to q'^a &= \psi^a(\tau, q^a). \end{aligned} \tag{A.17}$$

A ação (A.1) é invariante se, a menos de uma derivada total, a ação transformada coincide com ação inicial

$$\int d\tau' L(q', \frac{dq'}{d\tau'}, \tau') = \int d\tau \left[L(q, \frac{dq}{d\tau}, \tau) + \frac{dN}{d\tau}\right]. \tag{A.18}$$

Aqui no membro esquerdo está implícito que $\frac{dq'}{d\tau'} \equiv \left(\frac{d\alpha}{d\tau}\right)^{-1} \frac{dq'}{d\tau}$, e τ', q' a partir da Eq. (A.17) devem ser substituídos, o que reproduz a expressão (A.16) exatamente.

Como esta igualdade deve ser satisfeita para qualquer intervalo de integração, as integrais podem ser omitidas. Para completar, escrevamos a forma explícita da Eq. (A.18), com as integrais omitidas

$$\dot{\alpha}L(\ \psi(\tau,q),(\dot{\alpha})^{-1}\dot{\psi}(\tau,q),\alpha\ ) = L(q,\dot{q},\tau) + \frac{dN}{d\tau}. \qquad (A.19)$$

Comentário. Suponhamos que a família de transformações seja um grupo de Lie de transformações. Então, ao invés de utilizar a Eq. (A.17), podemos utilizar a inversa para verificar a invariância (já que g^{-1} pertence à família, é uma questão de conveniência a utilização de "transformação"ou "transformação inversa"). Isto equivale a uma "mudança de variáveis" na ação (A.1), como será discutido na subseção A.4.

A.2 Exemplos de ações invariantes, grupo de Galileu

Exemplo 1. Consideremos as rotações no espaço bidimensional (τ, q)

$$\theta : (\tau, q) \to (\tau', q') = (\tau\cos\theta - q\sin\theta, \tau\sin\theta + q\cos\theta). \qquad (A.20)$$

Encontremos a imagem da função linear $q = f(\tau) = a\tau + b$. De acordo com as Eqs. (A.8) e (A.10), precisamos eliminar τ das equações $\tau' = \tau\cos\theta - (a\tau + b)\sin\theta$, $q' = \tau\sin\theta + (a\tau + b)\cos\theta$, que fornecem novamente funções lineares (ou seja, retas são transformadas em outras retas)

$$q' = f'(\tau') = \frac{\sin\theta + a\cos\theta}{\cos\theta - a\sin\theta}\tau' + \frac{b}{\cos\theta - a\sin\theta}. \qquad (A.21)$$

Exemplo 2. Consideremos as translações do parâmetro de evolução, dadas por

$$a : (\tau, q^a) \to (\tau', q'^a) = (\tau + a, q^a), \qquad a = const, \qquad (A.22)$$

A imagem da função $f(\tau)$ é obtida a partir das equações paramétricas $\tau' = \tau + a$ e $q'^a = f^a(\tau)$. Obtemos então

$$q'^a = f'^a(\tau') = f^a(\tau - a). \tag{A.23}$$

As translações tornam-se uma simetria de qualquer ação que não apresente dependência explícita de τ: $S[q] = \int d\tau L(q, \dot{q})$. O funcional transformado é obtido de acordo com a Eq. (A.13), e coincide com o inicial após a mudança de variáveis $\tau' = \tau + a$

$$\int_{\tau_1+a}^{\tau_2+a} d\tau' L(f(\tau' - a), \frac{d}{d\tau'} f(\tau' - a)) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau L(f(\tau), \dot{f}(\tau)) \tag{A.24}$$

Assim a condição (A.14) é satisfeita com $N = 0$.

Intuitivamente, a interpretação física das translações temporais é a de que um experimento feito durante um intervalo de tempo $[\tau_1, \tau_2]$ pode ser repetido em um período de tempo distinto, $[\tau_1 + a, \tau_2 + a]$. A invariância da ação implica que o mesmo experimento feito "hoje" e "amanhã" fornece o mesmo resultado experimental, já que em ambos os casos a mesma trajetória é um extremo do funcional, veja a Fig. A.2 na página 130).

As Eqs. (A.22), (A.24) podem ser encaradas como a formulação matemática do princípio da *homogeneidade do tempo*: as propriedades de um sistema físico em diferentes instantes de tempo são as mesmas. Como será visto adiante, a simetria das translações temporais implica na conservação da energia. Assim, a conservação da energia é uma consequência da homogeneidade do tempo.

Como uma generalização, consideremos as *reparametrizações do tempo* definidas pela família de funções $\alpha(\tau, \omega^\alpha)$

$$\tau \to \tau' = \alpha(\tau), \qquad q^a \to q'^a = q^a. \tag{A.25}$$

A transformação induzida $*g$ é

$$f^a(\tau) \to f'^a(\tau') = f^a(\tilde{\alpha}(\tau')), \tag{A.26}$$

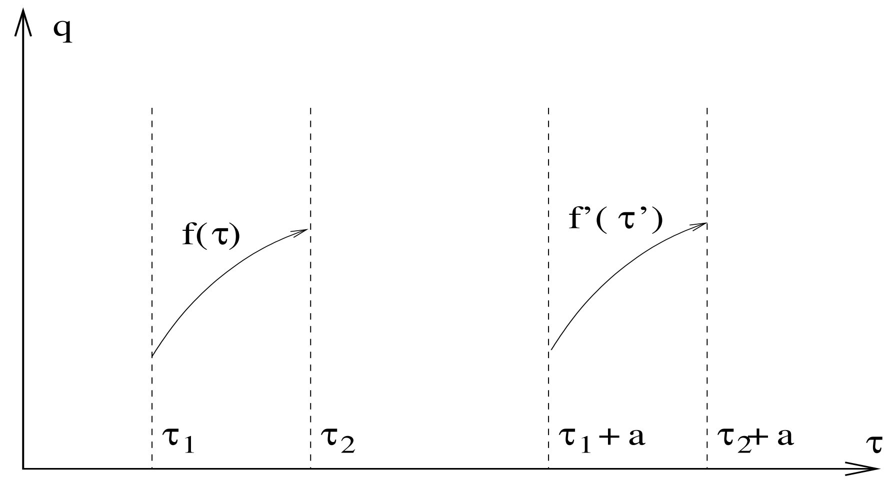

Figura A.2: Translação temporal: a mesma trajetória é um extremo de funcional em diferentes intervalos de tempo.

onde $\tilde{\alpha}(\alpha(\tau)) = \tau$, isto é, $\tilde{\alpha}$ é a função inversa de α.

Exemplo 3. Consideremos os *boosts de Galileu*, que são dados pela seguinte família de transformações com três parâmetros, em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$

$$v : \tau \to \tau' = \tau, \qquad x^i \to x'^i = x^i + v^i\tau, \qquad v^i = const. \tag{A.27}$$

No espaço Euclidiano tridimensional, estas equações podem ser pensadas como uma relação entre as coordenadas de dois observadores O and O', com O' movendo-se com velocidade v^i em relação a O, passando pelo ponto $(0, 0, 0)$ em $\tau = 0$. Como o tempo não é afetado, a transformação induzida das funções coincide com a transformação das coordenadas

$$*v : f^i(\tau) \to f'^i(\tau) = f^i(\tau) + v^i\tau. \tag{A.28}$$

A ação de uma partícula livre é invariante sob a ação de boosts. Neste caso, a Eq. (A.18) é dada por

$$\int d\tau \frac{1}{2} m[(x^i + v^i\tau)^{\cdot}]^2 = \int d\tau \left(\frac{1}{2} m(\dot{x}^i)^2 + \frac{dN}{d\tau} \right), \tag{A.29}$$

com a função não-trivial $N(x,\tau,v) = x^i v^i + \frac{m}{2}(v^i)^2\tau$. O mesmo é válido para um sistema de partículas sujeito a um potencial que dependa apenas das distâncias relativas entre as partículas. A simetria (A.27) é a formulação matemática para o *princípio de relatividade de Galileu*: as propriedades de um dado sistema são as mesmas em O e O'.

Exemplo 4. Problema de Kepler. Consideremos a ação de uma partícula em um campo central, com o centro escolhido no ponto $r = 0$

$$\int d\tau(\ \frac{1}{2}m(\dot{x}^i)^2 - U(r) \ ), \qquad onde \quad r = (x^i)^2. \tag{A.30}$$

Além das translações temporais, esta ação também tem simetria sob ação das transformações geradas pelas matrizes ortogonais

$$R : \tau \to \tau' = \tau, \quad x^i \to x'^i = R^{ij}x^j, \quad onde \quad R^T = R^{-1}. \tag{A.31}$$

Elas têm a interpretação de rotações em $\mathbb{R}^3$ (notemos que as transformações mantêm o ponto $(0,0,0)$ invariante e não alteram as distâncias entre os pontos do espaço, em particular, $r' = r$). As rotações formam um grupo de Lie tridimensional. Intuitivamente, qualquer rotação pode ser especificada unicamente por um vetor $\vec{\omega} = (\omega^1, \omega^2, \omega^3)$ cuja direção é ao longo do eixo de rotação, com comprimento igual ao ângulo de rotação.

Uma parametrização comumente utilizada do grupo de rotações pode ser construída da seguinte maneira. Buscando representar a matriz R na forma de uma exponencial de alguma outra matriz[2]: $R = e^\omega$. A condição de ortogonalidade de R agora é dada por $(e^\omega)^T = (e^\omega)^{-1}$, ou $e^{\omega^T} = e^{-\omega}$, ou seja, a matriz ω deve ser anti-simétrica.

[2]De fato, esta não é uma tentativa acidental. É fato conhecido que a exponencial é um isomorfismo das vizinhanças do elemento identidade de um grupo de Lie e o vetor nulo da correspondente álgebra de Lie. Escrevemos $R = e^{\omega^\alpha T_\alpha}$, onde o vetor da álgebra de Lie ω é escrito em termos dos vetores básicos T_α. Devido ao isomorfismo, as coordenadas ω^α do vetor ω podem ser utilizadas como as coordenadas do elemento correspondente do grupo.

Reciprocamente, qualquer matriz anti-simétrica gera uma matriz ortogonal por um mapeamento exponencial. Pode ainda ser demonstrado que o mapeamento exponencial é uma aplicação bijetiva entre a vizinhança da matriz identidade do conjunto de R e a vizinhança da matriz nula do conjunto de ω. Os elementos de matriz de ω são $\omega^{12} = -\omega^{12}$, $\omega^{13} = -\omega^{31}$, $\omega^{23} = -\omega^{32}$, $\omega^{ii} = 0$. Apenas três deles são independentes, ω^{12}, ω^{13}, ω^{23}. Devido à correspondência bijetiva, eles podem ser tomados como os parâmetros[3] que especificam a correspondente matriz ortogonal R. Em termos destes parâmetros, o vetor acima mencionado ao longo do eixo de rotação é dado por $\omega^i = \epsilon^{ijk}\omega^{jk}$.

Retornando à ação, sua invariância pode ser verificada imediatamente, de acordo com a Eq. (A.18), por meio de substituição x'^i ao invés de x^i na Eq. (A.30).

Exerciçio. Confirme, que os boosts de Galileu representam uma simetria da ação (A.31).

Exemplo 5. Um sistema de duas partículas em coordenadas cartesianas $x^i_{(1)}$, $x^i_{(2)}$, com um potencial que dependa da velocidade relativa entre elas é descrito pela ação

$$\int d\tau(\ \frac{1}{2}m_1(\dot{x}^i_{(1)})^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}^i_{(2)})^2 - U(r_{12}\ ), \tag{A.32}$$

onde $(r_{12})^2 = \sum_{i=1}^{3}(x^i_{(2)} - x^i_{(1)})^2$. Além das translações temporais, rotações e dos boosts de Galileu, existe uma simetria sob translações espaciais com parâmetros c^i

$$c : \tau \to \tau' = \tau, \quad x^i_{(a)} \to x'^i_{(a)} = x^i_{(a)} + c^i, \quad a = 1, 2. \tag{A.33}$$

Generalizando, escrevamos a ação

$$\int d\tau \left(\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{l} m_{(a)}(\dot{x}^i_{(a)})^2 - U(r_{ab}) \right), \tag{A.34}$$

[3]Notemos a vantagem da representação exponencial: a resolução das equações $\omega^T = -\omega$ é uma tarefa mais simples que a resolução de $R^T = R^{-1}$.

onde $(r_{ab})^2 = \sum_{i=1}^{3}(x^i_{(b)} - x^i_{(a)})^2$. Ela descreve um sistema de l partículas, onde $x^1_{(a)}$, $x^2_{(a)}$, $x^3_{(a)}$ são as coordenadas cartesianas de uma partícula com número a, $a = 1, 2, \ldots, l$. Elas estão sob um potencial $U(r_{ab})$, que é função das variáveis r_{ab}, $a, b = 1, 2, \ldots, l$. A ação é invariante sob o grupo de transformações conhecido como *grupo de Galileu*, que depende de 10 parâmetros.

$$\begin{aligned} \tau &\rightarrow \tau' = \tau + a, \\ x^i_{(a)} &\rightarrow x'^i_{(a)} = R^{ij}x^j_{(a)} + v^i\tau + c^i. \end{aligned} \tag{A.35}$$

Na mecânica clássica é postulado que as tranformações do grupo de Galileu relacionam dois referenciais inerciais diferentes. A invariância pode ser verificada, de acordo com a Eq. (A.18), pela substituição de τ', x'^i no lugar de τ, x^i na Eq. (A.34).

A invariância de uma ação sob o grupo de Galileu pode ser considerada como (uma das possíveis) formulações matemáticas do *Princípio de Relatividade de Galileu.* Intuitivamente, ele afirma que o mesmo experimento realizado em dois *referenciais inerciais* distintos devem apresentar os mesmos resultados.

A.3 Grupo de Poincaré, partícula relativística

Como um exemplo de transformação de coordenadas de uma forma geral (A.2) (quando τ' depende de q^a), discutiremos aqui uma partícula livre relativística em termos de coordenadas físicas. Neste caso, é conveniente unificarmos as coordenadas temporal, t, e espaciais, x^i, introduzindo um único símbolo: $x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$, onde $x^0 \equiv ct$, $c = const$. Assim, qualquer quantidade com índice grego tem quatro componentes. De acordo com a *Teoria da Relatividade Especial*, as transformações relacionando as coordenadas de dois observadores em referenciais inerciais são distintas das transformações de Galileu, e adquirem a forma

$$P_{(\Lambda,a)} : x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu, \tag{A.36}$$

onde $a^\mu = const$, e Λ representa uma matriz 4×4 que satisfaça às condições

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta = \eta_{\alpha\beta}, \tag{A.37}$$

onde η é a matriz dada por

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{A.38}$$

Para uma discussão detalhada da teoria da relatividade especial, veja, por exemplo, [19, 21, 22, 23, 24].

O conjunto (A.36) é dito o *grupo de Poincaré* de transformações, enquanto o subconjunto (A.37) é conhecido como o *grupo de Lorentz*. O grupo de Poincaré é um grupo 10-dimensional. Para termos uma idéia da estrutura do grupo de Poincaré, comparemos este grupo com o grupo de Galileu. Temos quatro parâmetros a^μ, representando translações, estas coincidido com as translações de Galileu do espaço e tempo. Mais seis parâmetros são necessários para descrever os elementos do grupo de Lorentz $\Lambda^\mu{}_\nu$. As Eqs. (A.37) e (A.38) implicam que as matrizes da forma $\Lambda^\mu{}_\nu = (\Lambda^0{}_0 = 1, \Lambda^i{}_0 = \Lambda^0{}_i = 0, \Lambda^i{}_j)$ são ortogonais e representam rotações no espaço, exatamente como para o caso do grupo de Galileu. As matrizes com $\Lambda^0{}_i$, $\Lambda^i{}_0 \neq 0$ misturam as coordenadas espaciais e temporais e representam transformações que envolvem os boosts no espaço: $x'^i \sim x^0$. Como, ao mesmo tempo, $x'^0 \sim x^i$, esta transformação implica também um boost no tempo, ao contrário do grupo de Galileu. A interpretação fisica deste fato é que a medição de intervalos de tempo feitas por observadores inerciais em movimento relativo apresentam resultados diferentes.

Desta forma, os grupos de Galileu e Poincaré diferem apenas quanto aos boosts, ou seja, a parte ligada aos *boosts de Lorentz* do grupo de Poincaré é a responsável pela diferença com o grupo de Galileu. O *Princípio da Relatividade Especial* afirma que as leis que governam o movimento de *qualquer* sistema físico são invariantes sob a ação do grupo de Poincaré. Em relatividade especial, ele fica no lugar de Princípio de Galileo de macânica clássica. Notemos que as ações Lagrangianas dos exemplos anteriores não são invariantes sob as transformações de Lorentz.

Consideremos a ação funcional

$$S = -mc\int dx^0\sqrt{1-\left(\frac{dx^i}{dx^0}\right)^2}, \tag{A.39}$$

no espaço das funções $x^i = f^i(x^0)$. Uma análise detalhada mostra que ela descreve uma partícula movendo-se ao longo de uma reta com velocidade constante $(\frac{dx^i}{dt})^2 < c^2$ (notemos a raiz quadrada na ação). Confirmemos que este sistema obedece ao princípio da relatividade especial. Precisamos mostrar que esta ação admite o grupo de Poincaré como um grupo de simetria. A invariância sob translações é evidente, assim, vamos discutir as transformações de Lorentz dadas por

$$\begin{aligned} x^0 \rightarrow x'^0 &= \Lambda^0{}_0 x^0 + \Lambda^0{}_i x^i, \\ x^i \rightarrow x'^i &= \Lambda^i{}_0 x^0 + \Lambda^i{}_j x^j. \end{aligned} \tag{A.40}$$

Notemos que elas são um exemplo de transformação onde o tempo transformado x'^0 depende das coordenadas x^i. Partindo de alguma função $x^i = f^i(x^0)$, a função transformada $x'^i = f'^i(x'^0)$ pode ser obtida na forma paramétrica

$$\begin{aligned} x^0 \rightarrow x'^0 &= \Lambda^0{}_0 x^0 + \Lambda^0{}_i f^i(x^0), \\ x^i \rightarrow x'^i &= \Lambda^i{}_0 x^0 + \Lambda^i{}_j f^j(x^0). \end{aligned} \tag{A.41}$$

No caso geral, o parâmetro x^0 não pode ser eliminado destas equações por métodos analíticos, e não estamos aptos a obter uma expressão exata para $f'^i(x'^0)$. Equivalentemente, podemos dizer que o *grupo* *de Lorentz atua nas variáveis dinâmicas físicas* $f^i(x^0)$ *de forma não-linear, em contradição com sua realização linear no espaço das coordenadas* (A.40). Isto implica em sérias dificuldades na investigação das teorias relativísticas em termos das variáveis físicas, já que a invariância relativística torna-se "fora de controle"[4]. Entretanto, felizmente não precisamos conhecer as funções f' para checarmos a invariância da ação. De acordo com a Eq. (A.16), é suficiente trocarmos x^μ na Eq. (A.39) por x'^μ dada na Eq. (A.40), e confirmar a validade da condição (A.18).

Exercício. Verifique a invariância.

A realização não linear das transformações de Lorentz nas variáveis dinâmicas físicas representa uma propriedade geral das teorias relativísticas (do Univérso?). Por esta razão, a descrição baseada nestas variáveis revela-se não muito conveniente. Utilizaremos o exemplo presente para vermos o que acontece quando tentamos evitar este problema. Consideremos a ação

$$S = -mc \int d\tau \sqrt{\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}, \qquad \textit{onde} \quad \dot{x}^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}, \tag{A.42}$$

definida no espaço de funções $x^\mu = f^\mu(\tau)$. Agora o parâmetro de evolução é τ, enquanto x^0 e x^i são coordenadas do espaço de configurações. As transformações de Lorentz são definidas no espaço extendido (τ, x^μ) de acordo com

$$\begin{aligned} &\tau \to \tau' = \tau, \\ &x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \end{aligned} \tag{A.43}$$

e representam uma simetria da ação. A análise detalhada mostra que a ação pode ser utilizada para a descrição de uma partícula relativística. Comparando com o caso anterior, as vantagens são

A) A invariância da ação é evidente, já que $\eta_{\mu\nu}\, \dot{x}^\mu\, \dot{x}^\nu$ é uma função escalar com respeito a estas transformações.

[4]Para uma partícula livre, as soluções das equações de movimento são funções lineares, e a Eq. (A.41) pode ser resolvida, veja o exemplo 1. Os problemas começam a aparecer quando temos teorias com interação, sejam estas teorias para partículas ou campos.

B) Como o parâmetro de evolução τ não é afetado pelas transformações, *a lei de transformação para as variáveis dinâmicas* $x^\mu = f^\mu(\tau)$ *coincide com a lei de transformação das coordenadas* x^μ: $f'^\mu(\tau) = \Lambda^\mu{}_\nu \, f^\nu(\tau)$.

De fato, existe um preço a ser pago. Primeiro, a formulação envolve variáveis adicionais: temos dois tempos τ e x^0 presentes! E a teoria é singular: $det\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}^\mu\partial\dot{x}^\nu} = 0$. Então a formulação de uma teoria relativística invariante de Lorentz na forma manifesta (ou seja, com a realização linear das transformações de Lorentz nas variáveis dinâmicas), implica em uma teoria singular e variáveis extras têm de ser adicionadas. Devemos mencionar ainda que, atualmente, todas as teorias relativísticas populares (eletrodinâmica, teorias de calibre, modelo padrão, teoria de cordas, etc.) são formuladas desta maneira.

A.4 Mudança de variáveis na ação funcional

Nesta subseção e na próxima as transformações de coordenadas não são necessariamente simetrias de uma ação funcional. Na primeira subseção vimos que uma transformação de coordenadas g, (A.2), induz uma transformação no espaço das funções: $f^a \to f'^a$ de acordo com as Eqs. (A.8), (A.10). Suponhamos que f^a seja extremo do funcional (A.1). Seria interessante obtermos a resposta à seguinte pergunta: qual o funcional que tem f'^a como extremo?

Por hipótese, as transformações (A.2) são invertíveis, veja a Eq. (A.3). Denotemos a transformação inversa como $\tilde{g}$. Aplicando $\tilde{g}$ á τ, q^a, temos

$$\tilde{g} : \tau \to \tau' = \tilde{\alpha}(\tau, q^a), \qquad q^a \to q'^a = \tilde{\psi}^a(\tau, q^a). \tag{A.44}$$

Como sempre, temos as identidades

$$\tilde{\alpha}(\alpha(\tau, q), \psi(\tau, q) \equiv \tau, \qquad \tilde{\psi}^a(\alpha(\tau, q), \psi(\tau, q) \equiv q^a. \tag{A.45}$$

Partindo da ação (A.1), a transformação inversa pode igualmente ser utilizada para construirmos uma ação funcional de acordo com a Eq. (A.16), então

$$\tilde{S}[q] = \int d\tau \tilde{L}(q, \dot{q}, \tau) \equiv \int d\tau \dot{\tilde{\alpha}} L(\ \tilde{\psi}(\tau, q), (\dot{\tilde{\alpha}})^{-1} \dot{\tilde{\psi}}(\tau, q), \tilde{\alpha} \ ). \quad \text{(A.46)}$$

Algumas vezes esta substituição é dita a *mudança de variáveis* na ação[5], correspondente à transformação (A.2).

Aqui devemos frizar que, para um $g \in G$, a transformação inversa geralmente não é um elemento da família. Entretanto, se g é uma simetria do funcional (A.1), então a transformação inversa também será uma simetria do funcional (mostre este fato usando a definição 1 da subseção A.1!). Se a família for um grupo de Lie de transformações, a transformação inversa será um elemento do grupo. Suponhamos que a transformação (A.2) seja parametrizada por ω^α, e $\tilde{\omega}^\alpha$ são os parâmetros correspondentes à transformação inversa. Então, por construção, as funções $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\psi}$ são as funções do grupo: $\tilde{\alpha}(\omega) = \alpha(\tilde{\omega})$ e $\tilde{\psi}(\omega) = \psi(\tilde{\omega})$. A ação (A.46) então simplesmente coincide com (A.16), onde $\omega \to \tilde{\omega}$.

Agora demonstraremos o seguinte

Proposição. Se f' é a imagem de uma função f sob a transformação (A.2), então

$$S[f] = \tilde{S}[f']. \quad \text{(A.47)}$$

Notemos que os limites de integração nos lados direito e esquerdo desta expressão são diferentes, veja a Eq. (A.12). Este teorema resolve o problema formulado no início da seção: como a Eq. (A.47) é válida para qualquer f, se f é um extremo de S, então f' será extremo de $\tilde{S}$. Equivalentemente, se f é uma solução das equações de movimento obtidas a partir de S, então f' obedece às equações de movimento obtidas a partir de $\tilde{S}$. Este resultado será utilizado na subseção A.6.

[5]Os parâmetros ω são fixos, por hipótese.

Demonstração. Intuitivamente, a Eq. (A.47) representa uma identidade, já que $\tilde{S}[f'] = S[\tilde{g}\cdot f'] = S[\tilde{g}\cdot g\cdot f] = S[f]$. A fim de verificarmos este fato, calculemos S para uma função $f(\tau)$, $\tau \subset [\tau_1, \tau_2]$

$$S[f] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau L(f, \dot{f}, \tau) \equiv$$
$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau L\left(\tilde{\psi}(\alpha(\tau,f), \psi(\tau,f)), \frac{d\tilde{\psi}(\ldots)}{d\tau}, \tilde{\alpha}(\alpha(\tau,f), \psi(\tau,f)) \right). \quad (A.48)$$

Aqui usamos as identidades (A.45). Escrevamos o integrando em termos da função transformada $f'(\tau') = \psi(\tau, f(\tau))|_{\tau=\tilde{\alpha}_f(\tau')}$. A partir desta expressão, e das identidades (A.45), temos

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(\alpha(\tau, f(\tau)), \psi(\tau, f(\tau)) &\equiv \tilde{\psi}(\tau', f'(\tau'))\Big|_{\tau'=\alpha(\tau,f(\tau))}, \\ \tau &\equiv \tilde{\alpha}(\tau', f'(\tau'))|_{\tau'=\alpha(\tau,f(\tau))} \Rightarrow \\ \frac{d\alpha(\tau, f(\tau))}{d\tau} &= \left(\frac{d\tilde{\alpha}(\tau', f'(\tau'))}{d\tau'}\right)^{-1}\Bigg|_{\tau'=\alpha(\tau,f(\tau))}. \end{aligned} \quad (A.49)$$

De forma que

$$\frac{d\tilde{\psi}}{d\tau} = \left[\left(\frac{d\tilde{\alpha}(\tau', f'(\tau'))}{d\tau'}\right)^{-1} \frac{d\tilde{\psi}(\tau', f'(\tau'))}{d\tau'}\right]\Bigg|_{\tau'=\alpha(\tau,f(\tau))}. \quad (A.50)$$

Empregando estas identidades, a Eq. (A.48) pode ser reescrita como

$$S[f] =$$
$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau\, L\left(\tilde{\psi}(\tau', f'), (\frac{d\tilde{\alpha}(\tau', f')}{d\tau'})^{-1} \frac{\tilde{\psi}(\tau', f')}{d\tau'}, \tilde{\alpha}(\tau', f')\right)\Bigg|_{\tau'=\alpha(\tau,f)} \quad (A.51)$$

E a segunda equação de (A.49) implica $\alpha(\tau, f(\tau))|_{\tau=\tilde{\alpha}(\tau', f'(\tau'))} \equiv \tau'$. O que sugere a mudança de variáveis $\tau = \tilde{\alpha}(\tau', f'(\tau'))$ na integral. Então a Eq. (A.51) adquire a forma (os limites de integração são $\alpha(\tau_a, f(\tau_a))$)

$$S[f] =$$
$$\int d\tau' \frac{d\tilde{\alpha}(\tau', f')}{d\tau'} L\left(\tilde{\psi}(\tau', f'), (\frac{d\tilde{\alpha}(\tau', f')}{d\tau'})^{-1} \frac{\tilde{\psi}(\tau', f')}{d\tau'}, \tilde{\alpha}(\tau, f')\right)$$

$$= \tilde{S}[f'], \tag{A.52}$$

o que completa a demonstração.

A.5 Simetrias das equações de movimento

Como antes, seja g uma transformação da família G, dada por (A.4), e $*g$ a transformação induzida (A.8) e (A.10). Além disso, consideremos as equações de movimento $F_a(q^a, \dot{q}^a, \ddot{q}^a, \tau) = 0$, obtidas a partir da ação (A.1)

Definição. A família G é dita uma simetria das equações de movimento se a imagem f' da solução f sob $*g$ é um elemento do espaço das soluções das equações de movimento. Ou seja, as transformações g levam qualquer solução em uma outra solução das equações de movimento

$$F_a(f(\tau), \ldots) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_a(f'(\tau), \ldots) = 0. \tag{A.53}$$

Sob um ponto de vista pragmático, a existência de simetrias facilita a procura pela solução geral das equações de movimento. A partir de uma solução particular conhecida $q^a = f^a(\tau)$, podemos obter imediatamente uma família de soluções aplicando a transformação $*g$: $q^a = (*g \cdot f^a(\tau))|_{\tau' \to \tau} = f'^a(\tau, \omega^\alpha)$. A qual depende de k constantes arbitrárias. Algumas vezes é suficiente conhecermos apenas uma solução particular, quando a família é suficientemente grande, para gerarmos a solução geral.

Como ilustração, consideremos uma partícula livre $\ddot{x}^i = 0$. As transformações $g(\vec{v}, \vec{a}) : \tau \to \tau' = \tau$, $x^i \to x'^i = x^i + v^i\tau + a^i$, que dependem de seis parâmetros v^i e a^i, formam o grupo de simetria. Neste caso, as transformações induzidas coincidem com as tranformações de coordenadas. Notemos que $x^i(\tau) = 0$ é uma solução das equações de movimento, então $x'^i = 0 + v^i\tau + a^i$ é a solução geral. Intuitivamente, a solução para uma partícula livre pode ser obtida a partir da solução para uma partícula em repouso por meio de uma transformação de Galileu.

Como um exemplo adicional, consideremos o sistema $\ddot{x}^i + x^i = 0$, $i = 1, 2$, o qual admite a simetria gerada por matrizes não-degeneradas arbitrárias

$$a : \tau \to \tau' = \tau, \quad x^i \to x'^i = a^i{}_j x^j, \quad onde \quad \det a \neq 0. \quad \text{(A.54)}$$

A solução geral $x^1 = A\cos(t+\alpha)$, $x^2 = B\sin(t+\beta)$ pode ser gerada a partir da solução particular $x^1 = \cos t$, $x^2 = \sin t$ pela aplicação de uma transformação de simetria da forma

$$a = \begin{pmatrix} A\cos\alpha & -A\sin\alpha \\ B\cos\beta & -B\sin\beta \end{pmatrix}. \quad \text{(A.55)}$$

Existem aplicações não-triviais deste truque. Por exemplo, o conjunto completo das soluções da equação de Dirac, que descreve um elétron em uma teoria relativística de campo, pode ser obtida exatamente deste jeito, veja, por exemplo [11].

Exercício. Para o segundo exemplo, obtenha uma transformação de simetria invertível tal que $(\cos t, 0) \to (0, \sin t)$.

A.6 Relação entre simetrias da ação e as equações de movimento

Aqui demonstraremos o seguinte fato: as simetrias da ação são simetrias das equações de movimento. Devemos mencionar ainda que a recíproca *não* é verdadeira, ou seja, existem simetrias das equações de movimento que não são, necessariamente, simetrias da ação. Portanto, o conjunto das simetrias das equações de movimento é "maior" que o conjunto das simetrias da ação.

Proposição. Se a família G representa uma simetria da ação $S[q] = \int d\tau L(q^a, \dot{q}^a, \tau)$, então G também é simetria das equações de movimento.

Demonstração. Seja f^a uma solução das equações de Euler-Lagrange para a ação, e f'^a a função transformada. Escrevamos a condição de invariância (A.19) da ação para a transformação inversa[6] (A.44) ao invés de (A.2)

$$\dot{\tilde{\alpha}}L(\ \tilde{\psi}(\tau,q),(\dot{\tilde{\alpha}})^{-1}\dot{\tilde{\psi}}(\tau,q),\tilde{\alpha}\ ) = L(q,\dot{q},\tau) + \frac{dN}{d\tau}. \qquad (A.56)$$

De acordo com a Eqs. (A.46), (A.47), f'^a é solução das equações de movimento obtidas a partir da Lagrangeana na parte esquerda. Mas, de acordo com a Eq. (A.56), elas simplesmente coincidem com aquelas obtidas a partir de $L(q,\dot{q},\tau)$. Assim f e f' obedecem à mesma equação.

Para mostrar que a recíproca não é verdadeira, é suficiente retornarmos ao segundo exemplo da subseção anterior. As equações $\ddot{x}^i + x^i = 0$ seguem da seguinte ação $S = \int d\tau((\dot{x}^i)^2 - (x^i)^2)$. A simetria (A.54) das equações não é uma simetria da ação, a menos que a matriz a seja ortogonal.

A.7 Teorema de Noether

Aqui apresentaremos o teorema de Noether na forma comumente utilizada na Física[7]. Seja G uma família k-paramétrica de transformações de coordenadas (A.2)

$$\begin{gathered}\tau \rightarrow \tau' = \alpha(\tau,q^a,\omega^\alpha) = \tau + G_\alpha(\tau,q^a)\omega^\alpha + O(\omega^2),\\ G_\alpha \equiv \left.\frac{\partial\alpha}{\partial\omega^\alpha}\right|_{\omega=0},\\ q^a \rightarrow q'^a = \psi^a(\tau,q^a,\omega^\alpha) = q^a + R^a{}_\alpha(\tau,q^a)\omega^\alpha + O(\omega^2),\\ R^a{}_\alpha \equiv \left.\frac{\partial\psi^a}{\partial\omega^\alpha}\right|_{\omega=0}. \end{gathered} \qquad (A.57)$$

Aqui, com o uso da Eq. (A.5), as funções de transição foram expandidas em série de potências até a primeira ordem, em torno do ponto

[6] Veja a discussão após a Eq. (A.46).

[7] Veja [25] para a discussão da forma mais geral do teorema de Noether.

$\omega = 0$. Assim, as *transformações infinitesimais* ($\omega \ll 1$) são caracterizadas pelas funções G R, ditas as *geradoras das transformações*. Para uma dada função f, a função transformada f' pode ser obtida a partir da Eq. (A.10), até a primeira ordem em ω,

$$f'^a(\tau') = f^a(\tau') + [R^a{}_\alpha - \dot{f}^a(\tau')G_\alpha]\omega^\alpha + O(\omega^2). \tag{A.58}$$

Notemos que, de acordo com a Eq. (A.57), temos $R(\tau', f(\tau')) = R(\tau, f(\tau)) + O(\omega)$, e igualdades análogas para G_α e f. Aqui adicionamos a restrição técnica sobre a matriz, que aparece na Eq. (A.58)

$$D^a{}_\alpha \equiv R^a{}_\alpha - \dot{q}^a G_\alpha, \tag{A.59}$$

mesmo

$$rank D^a{}_\alpha = max = [\alpha] \equiv k. \tag{A.60}$$

A família das transformações com esta propriedade é dita uma *família com k parâmetros essenciais*.

Teorema de Noether. Seja a ação (A.1) é invariante sob a família de transfomações (A.57) com k parâmetros essenciais

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \dot{\alpha} L(\ \psi(\tau, q), (\dot{\alpha})^{-1}\dot{\psi}(\tau, q), \alpha\ )$$
$$= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left(L(q, \dot{q}, \tau) + \frac{N(q, \dot{q}, \tau)}{d\tau} \right). \tag{A.61}$$

Então existem k funções $Q_\alpha(q, \dot{q}, \tau)$ ditas *cargas de Noether*

$$Q_\alpha = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}(R^a{}_\alpha - \dot{q}^a G_\alpha) - L G_\alpha + N_\alpha, \quad N_\alpha \equiv \left.\frac{\partial N}{\partial \omega^\alpha}\right|_{\omega=0}, \tag{A.62}$$

as quais são constantes ao longo de qualquer solução das equações de movimento

$$\left.\frac{dQ_\alpha}{d\tau}\right|_{\frac{\delta S}{\delta q}=0} = 0. \tag{A.63}$$

Para o caso de uma teoria não-singular, $Q_\alpha \neq 0$ identicamente e, além disso, elas são funcionalmente independentes: $rank \frac{\partial Q}{\partial(q, \dot{q})} = max = k$.

Demonstração. Como foi discutido na primeira subseção, as integrais na Eq. (A.61) podem ser omitidas. Além disso, os integrandos podem ser expandidos em série de potências de ω. Como os ω são parâmetros arbitrários, a identidade (A.61) deve ser satisfeita para cada potência de ω separadamente. O resultado no qual estamos interessados aparece na ordem linear em ω. Seja $A(\omega) = B(\omega)$ uma notação simbólica para a Eq. (A.61). Então a parte linear em ω é $\frac{\partial A}{\partial \omega^\alpha}\Big|_{\omega=0} = \frac{\partial B}{\partial \omega^\alpha}\Big|_{\omega=0}$. Escrevamos esta expressão na forma manifesta. O membro direito é

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial N}{\partial \omega^\alpha}\bigg|_{\omega=0} \equiv \frac{d}{d\tau}N_\alpha, \tag{A.64}$$

com as funções conhecidas N_α. Com o uso das Eqs. (A.57) e (A.5), as derivadas do lado esquerdo são

$$\begin{aligned}\frac{\partial(l.h.s.)}{\partial \omega^\alpha}\bigg|_{\omega=0} &= L\dot{G}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial q^a}R^a{}_\alpha - \\ &\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\dot{G}_\alpha \dot{q}^a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\dot{R}^a{}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \tau}G_\alpha \end{aligned}\tag{A.65}$$

Aqui $L \equiv L(q, \dot{q}, \tau)$. Formando as derivadas totais no primeiro e quarto termos temos a expressão

$$\left(LG_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}R^a{}_\alpha\right)^{\cdot} - \frac{\partial L}{\partial q^a}G_\alpha \dot{q}^a - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}(G_\alpha \dot{q}^a)^{\cdot} + R^a{}_\alpha \frac{\delta S}{\delta q^a}. \tag{A.66}$$

E o mesmo para o terceiro termo nos dá

$$\left(LG_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}(R^a{}_\alpha - \dot{q}^a G_\alpha)\right)^{\cdot} + (R^a{}_\alpha - \dot{q}^a G_\alpha)\frac{\delta S}{\delta q^a}. \tag{A.67}$$

A partir da expressão (A.64) e da última, a parte linear em ω da equação (A.61) tem a forma

$$(R^a{}_\alpha - \dot{q}^a G_\alpha)\frac{\delta S}{\delta q^a} = \frac{dQ_\alpha}{d\tau}, \quad \forall q^a(\tau), \tag{A.68}$$

com Q dadas pela Eq. (A.62). Aqui chamamos a atenção ao fato de que esta igualdade é uma identidade, ou seja, ela é válida para qualquer função $q^a(\tau)$. Então, a invariância da ação implica que algumas combinações das equações de movimento representam derivadas totais das cargas Q_α. Na próxima subseção discutiremos como a Eq. (A.68) pode simplificar as equações de movimento.

O teorema de Noether segue imediatamente da Eq. (A.68): sobre as equações de movimento $\frac{\delta S}{\delta q^a} = 0$, temos $\frac{dQ_\alpha}{d\tau} = 0$. As funções $\dot{Q}^\alpha$ não anulam-se identicamente, além disso, elas são linearmente independentes. Por absurdo, suponhamos que $\dot{Q}_1 = 0$ para qualquer $q(\tau)$. Então a identidade (A.68) adquire a forma (veja Eq. (1.12)) $D_1^a\left(M_{ab}\ddot{q}^b - K_a\right) = 0$. Isto implica, que a matriz M possue o vetor nulo D, uma contradição com o caráter não-singular da teoria[8]. Analogamente, a dependência linear de $\dot{Q}_\alpha$ seria um contradição com a condição (A.60). A independência funcional das cargas será demonstrada na próxima subseção.

Exercícios. 1. Comfirme que $N|_{\omega=0} = 0$.

2. Obtenha a parte de segunda ordem em ω da Eq. (A.61). Qual a informação contida nela?

A.8 Uso das cargas de Noether na redução da ordem das equações de movimento

Como vimos, a invariância da ação funcional implica em uma estrutura especial das equações de movimento correspondentes, que é dada pela equação (A.68). Como algumas combinações das equações de movimento são derivadas totais, elas podem ser integradas imediatamente, o que simplifica (em alguns casos, resolve) o problema da obtenção da solução geral. Discutiremos este ponto detalhadamente. Demonstraremos que o conhecimento de k cargas de Noether

[8]Notemos que em uma teoria singular podemos ter $Q \equiv 0$, o que implica identidades entre as equações de movimento. Este fato é intimamente ligado à presença de simetrias locais (calibre), veja [12].

leva-nos a trocarmos o sistema inicial de n equações de segunda ordem por um sistema equivalente, a ultima envolve somente $n-k$ equações de segunda ordem.

De acordo com o teorema de Noether, as equações $\dot{Q}_\alpha = 0$ são consequência das equações de movimento. Assim elas podem ser adicionadas ao sistema, levando ao sistema equivalente

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta q^a} &= 0, \\ \dot{Q}_\alpha &= 0. \end{aligned} \tag{A.69}$$

No sistema resultante, k das equações de Euler-Lagrange tornam-se consequência de outras equações do sistema, e podem ser omitidas. Realmente, a Eq. (A.68) afirma que existem identidades entre as equações do sistema (A.69). Suponhamos que o "rank minor"da matriz D esteja localizado nas k linhas superiores[9]. Logo: $D^a_\alpha = (D^\beta_\alpha, D^i_\alpha)$, $\det D^\beta_\alpha|_{\frac{\delta S}{\delta q}=0} \neq 0$. Então a identidade (A.68) pode ser escrita na forma

$$\frac{\delta S}{\delta q^\alpha} = \tilde{D}^\gamma_\alpha(\dot{Q}_\gamma - D^i_\gamma \frac{\delta S}{\delta q^i}), \tag{A.70}$$

onde $\tilde{D}$ é a inversa de D^γ_α. Ou seja, as equações $\frac{\delta S}{\delta q^\alpha} = 0$ são consequências das outras equações do sistema (A.69). Então o sistema inicial é equivalente ao sistema

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta q^i} &= 0, & i &= 1, 2, \ldots, n-k, \\ Q_\alpha(q, \dot{q}) &= c_\alpha = const, & \alpha &= 1, 2, \ldots, k. \end{aligned} \tag{A.71}$$

Este sistema contém $n-k$ equações de segunda ordem e k equações de primeira ordem, ou seja, a ordem do sistema foi baixada em k unidades. Os Q_α são funcionalmente independentes. Se não o fossem, alguns deles poderiam ser omitidos do sistema (A.71). Então devemos ter um sistema com o número de equações menor que o

[9]Caso não esteja, podemos reordenar as variáveis iniciais q^a de forma que tenhamos esta propriedade.

número de variáveis. Mas isto seria uma contradição com o teorema de existência e unicidade da solução de um sistema não-singular de equações diferenciais.

A.9 Exemplos

Como foi discutido na subseção A.2, a ação Lagrangeana de um sistema de l partículas sujeito a interações dependentes das distâncias entre as partículas é invariante sob a ação do grupo de Galileu, o qual inclui translações, rotações e boosts. Escreveremos agora as cargas de Noether correspondentes. Consideraremos o caso de duas partículas com coordenadas cartesianas $x^i_{(1)}$, $x^i_{(2)}$, $i = 1, 2, 3$, cuja ação é dada por

$$S = \int d\tau(\ \frac{1}{2}m_1(\dot{x}^i_{(1)})^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}^i_{(2)})^2 - U(r_{12}) \ ). \tag{A.72}$$

Neste caso, a expressão para as cargas de Noether (A.62) é

$$Q_\alpha = -m_1\dot{x}^i_{(a)}\left[R^i_{(a)\alpha} - \dot{x}^i_{(a)}G_\alpha\right] - LG_\alpha + N_\alpha. \tag{A.73}$$

Exemplo 1. Para translações temporais $\tau' = \tau + a$, $x'^i_{(a)} = x^i_{(a)}$, temos $G = 1$, $R^i_{(a)} = 0$, $N = 0$, e a carga é a *energia total* do sistema

$$E = \frac{1}{2}m_a(\dot{x}^i_{(a)})^2 + U(r_{12}). \tag{A.74}$$

Intuitivamente, a homogeneidade do tempo implica na conservação da energia total de um sistema fechado[10].

Exemplo 2. Para as translações espaciais $\tau' = \tau$, $x'^i_{(a)} = x^i_{(a)} - c^i$, temos $G = 0$, $R^i_{(a)j} = \delta^i{}_j$, $N_i = 0$, o que leva à conservação do *momento total*

$$P^i = m_1\dot{x}^i_{(1)} + m_2\dot{x}^i_{(2)} = p^i_{(1)} + p^i_{(2)}. \tag{A.75}$$

[10]Notemos que a energia total das partículas interagentes não é a soma das energias de cada uma das partículas separadamente. Como uma consequência, o espaço de estados em uma teoria quântica não é a soma direta dos espaços para cada uma das partículas [20].

Assim a conservação do momento total é uma consequência da homogeneidade do espaço. Notemos que o momento total no caso é a soma dos momentos conjugados das partículas. Notemos também que os momentos individuais não são conservados durante a evolução, já que $\dot{p}^i_{(a)} = \frac{\partial U}{\partial x^i_{(a)}} \neq 0$.

Exemplo 3. Para os boosts de Galileu $\tau' = \tau$, $x'^i_{(a)} = x^i_{(a)} + v^i\tau$, temos $G = 0$, $R^i_{(a)j} = \tau\delta^i{}_j$, $N = (m_1 x^i_{(1)} + m_2 x^i_{(2)})v^i + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)(v^i)^2\tau$, $N_i = m_1 x^i_{(1)} + m_2 x^i_{(2)}$, os quais levam às cargas conservadas

$$-(m_1\dot{x}^i_{(1)} + m_2\dot{x}^i_{(2)})\tau + m_1 x^i_{(1)} + m_2 x^i_{(2)} = D^i = const. \quad \text{(A.76)}$$

Escrevamos esta expressão na forma

$$m_1 x^i_{(1)} + m_2 x^i_{(2)} = D^i + P^i\tau. \quad \text{(A.77)}$$

Assim concluímos que, durante a evolução de duas partículas, o ponto[11] $X^i = \frac{1}{m_1+m_2}(m_1 x^i_{(1)} + m_2 x^i_{(2)})$ move-se ao longo de uma reta com velocidade proporcional ao momento total. Em outras palavras, a partir do teorema de Noether descobrimos o conceito de *centro de massa de um sistema*. Como a dinâmica de X^i é conhecida, é claro que as coordenadas convenientes para a descrição de um sistema de várias partículas são X^i e, por exemplo, $Y^i = \frac{1}{m_1+m_2}(m_1 x^i_{(1)} - m_2 x^i_{(2)})$.

Exemplo 4. Para as rotações (veja o exemplo 4 na pág. 131)

$$\begin{aligned} &\tau' = \tau, \\ x'^i_{(a)} = (e^{\omega})^{ij}\, &x^j_{(a)} = x^i_{(a)} + \omega^{ij} x^j_{(a)} + O(\omega^2), \end{aligned} \quad \text{(A.78)}$$

onde $\omega^{ij} = -\omega^{ji}$ são três parâmetros independentes. Temos $G = 0$ e $N_\alpha = 0$. Para obtermos os geradores R, precisamos representar a Eq. (A.78) na forma $x'^i_{(a)} = x^i_{(a)} + R^i_{12}\omega^{12} + R^i_{13}\omega^{13} + R^i_{23}\omega^{23}$, e então tentarmos obter a forma explícita destas nove quantidades

[11] É razoável dividir por $m_1 + m_2$, de forma que X tenha a mesma dimensão que as coordenadas x^i.

R^i_{jk}. A fim de evitar o problema[12], procuramos por uma soma de cargas, e depois vamos separá-las

$$Q_\alpha\omega^\alpha = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}R^a{}_\alpha\omega^\alpha = -\sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i_{(1)}}\omega^{ij}x^j_{(1)} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i_{(2)}}\omega^{ij}x^j_{(2)}\right) =$$
$$\sum_{a=1}^{2}[\ (x^1_{(a)}p^2_{(a)} - x^2_{(a)}p^1_{(a)})\omega^{12} + (x^2_{(a)}p^3_{(a)} - x^3_{(a)}p^2_{(a)})\omega^{23} +$$
$$(x^1_{(a)}p^3_{(a)} - x^3_{(a)}p^1_{(a)})\omega^{13}\ ]. \tag{A.79}$$

Assim, a isotropia do espaço implica na conservação de três cargas, ditas as componentes do vetor de *momento angular total* do sistema

$$L^i = \sum_{a=1}^{2}\epsilon^{ijk}x^j_{(a)}p^k_{(a)}. \tag{A.80}$$

Resumindo, vemos que as três leis de conservação fundamentais, energia, momento e momento angular, decorrem da assumpção da homogeneidade e isotropia do espaço e da homogeneidade do tempo.

Exercícios. 1. Verifique, por cálculos diretos, que a ação (A.72) é invariante, a menos de termos de ordem $O(\omega^2)$, sob a parte linearizada das transformações (A.78): $x'^i_{(a)} = x^i_{(a)} + \omega^{ij}x^j_{(a)}$. Esta situação é dita uma *simetria infinitesimal*.

2. Verifique a conservação das cargas obtidas nesta subseção por cálculos diretos.

3. Verifique se o momento angular de cada partícula separadamente é uma quantidade conservada.

noindent 4. Warning exercise. Tente obter as cargas (A.79) diretamente, repetindo o cálculo feito na demonstração do teorema de Noether, ou seja, extraindo os termos da parte linear em ω^{ij} a partir da ação transformada.

5. Obtenha as cargas de Noether para uma partícula relativística nas formulações (A.39) e (A.42).

6. Verifique que a ação $S = \int d\tau \frac{1}{2}g_{ab}\dot{y}^a\dot{y}^b$, $a = 1, 2$, onde $g_{ab} \equiv \delta_{ab} + (l^2 - y^2)^{-1}y^a y^b$, $l = const$, tem simetria infinitesimal com os parâmetros ϵ^{ab}, c^a

$$y'^a = y^a + \epsilon^{ab}y^b + (l^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}c^a, \tag{A.81}$$

onde $\epsilon^{12} = -\epsilon^{21}$, $\epsilon^{aa} = 0$. Obtenha as cargas de Noether correpondentes. Verifique, por meio de cálculos diretos, que elas realmente são conservadas.

[12] De fato, o problema pode ser facilmente solucionado. Escrevendo $\omega^{ij}x^j \equiv \frac{1}{2}(\delta^{ik}x^j - \delta^{ij}x^k)\omega^{kj}$. Então as quantidades $R^i_{kj} = \frac{1}{2}(\delta^{ik}x^j - \delta^{ij}x^k)$ com $k < j$ representam os geradores.

Referências Bibliográficas

[1] E. Cartan, Leçons sur les Invariants Intégraux (Hermann, Paris, 1922).

[2] V. I. Arnold, Mathematical Methods of Classical Mechanics, (2nd ed., Springer-Verlag, 1989).

[3] A. A. Kirillov, Elements of the Theory of Representations (Springer-Verlag, 1976).

[4] V. P. Maslov and M. V. Fedoruk, Semiclassical Approximation in Quantum Mechanics (D. Reidel Publishing Company, 1981).

[5] A. T. Fomenko, Symplectic Geometry (Gordon and Breach, 1988).

[6] J. M. Souriau, Structure des systemes dynamiques (Dund, Paris, 1970).

[7] J. E. Marsden e R. H. Abraham, Foundations of Mechanics (2nd ed., Benjamin-Cummings Publishing Company, Inc., 1978).

[8] P.A.M. Dirac, Can. J. Math. **2** (1950) 129; Lectures on Quantum Mechanics (Yeshiva Univ., New York, 1964).

[9] A. A. Slavnov e L. D. Faddeev, Introduction into Quantum Theory of Gauge Fields (Nauka, Moscow, 1978).

[10] F. Mandl, Introduction to Quantum Field Theory (Interscience Publishers Inc., NY, 1959).

[11] M. E. Peskin and D. V. Shroeder, An Introduction to Quantum Field Theory (Addison-Wesley Publishing Company, 1995).

[12] D. M. Gitman e I. V. Tyutin, Quantization of Fields with Constraints (Berlin: Springer-Verlag, 1990).

[13] M. Henneaux e C. Teitelboim, Quantization of Gauge Systems (Princeton: Princeton Univ. Press, 1992).

[14] F. R. Gantmacher, Lectures on Analytical Mechanics (Moscow: MIR, 1970).

[15] H. Goldstein, Classical Mechanics (2nd ed., Addison-Wesley, Reading, Mass., 1980).

[16] L. D. Landau e E. M. Lifshits, Mechanics (Oxford: Pergamon Press, 1976).

[17] L. Meirovitch, Methods of analytical dynamics, (McGraw-Hill 1970).

[18] C. W. Kilmister e J. E. Reeve, Hamiltonian Dynamics, (New York: Wiley, 1964).

[19] S. Weinberg, Gravitation and Cosmology (Willey, NY, 1972).

[20] S. Weinberg, The Quantum Theory of Fields, vol. 1 (Cambridge University Press, 1995).

[21] L. D. Landau e E. M. Lifshits, The Classical Theory of Fields (Oxford: Pergamon Press, 1980).

[22] V. A. Ugarov, Special Theory of Relativity, (Mir Publishers, Moscow, 1979).

[23] W. Pauli, Theory of Relativity (Pergamon Press, Oxford, 1958).

[24] P. G. Bergmann, Introduction to the Theory of Relativity (Academic Press, NY, 1967).

[25] P. J. Olver, Applications of Lie Groups to Differential Equations, (NY: Springer-Verlag, 1986).

[26] H. von Helmholtz, J. fur Math., Vol C (1886) 151.

[27] A. A. Deriglazov, Phys. Lett. **B 626** (2005) 243-248.

[28] Y. Aharonov e D. Bohm, Phys. Rev. **115** (1959) 485.

[29] W. Ehrenberg e R. E. Siday, Proc. Roy. Soc. (London) **B 62** (1949) 8.

[30] Hwa-Chung Lee, Proc. Roy Soc. Edinburg, **A LXII** (1947) 237.