CBPF-MO-002/04

Supersimetria: da Mecânica Clássica à Mecânica Quântica*

Rafael de Lima Rodrigues

Departamento de Ciências Exatas e da Natureza, UFCG,
Universidade Federal de Campina Grande, Cajazeiras - PB, 58900-000, Brasil

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas – CBPF,
Rua Dr. Xavier Sigaud, 150, 22290-180, Rio de Janeiro, Brasil

Abstract

O conteúdo destas notas contém uma revisão sobre o método de fatorização em Mecânica Quântica e a construção da Mecânica Clássica Supersimétrica com supersimetria $N = 1$ e $N = 2$, usando o formalismo lagrangiano. Na construção de uma teoria SUSI em Mecânica Clássica, usa-se as variáveis anti-comutantes (cujo quadrado é zero) denominadas de grassmannianas. Após analisarmos as principais características da supersimetria em Mecânica Quântica Não-relativística, contemplando alguns exemplos de supersimetria não-quebrada, consideramos a aplicação do método supersimétrico para deduzirmos um potencial isoespectral com o átomo de hidrogênio não-relativístico.

*Notas publicadas nos *Anais da IV Escola do CBPF*, Rio de Janeiro, 15 a 26 de julho de 2002. Editores: *Ligia M.C.S. Rodrigues, Alberto C. dos Reis, Evaldo M.F. Curado, Joice Terra & Nilton Alves Jr.* Editora Ao Livro Técnico, 2003. Páginas 359 a 389.

1 Introdução

A supersimetria (SUSI) em Teoria de Campos é a única simetria relativística entre bósons e férmions compatível com a Teoria Quântica de Campos. A SUSI nos proporciona novas simetrias (Supergravidade) e uma atenuação das divergências em teorias de campos.

Iniciamos este curso fazendo uma síntese dos principais tipos de partículas. No zoológico da Física de Partículas, a SUSI, em sua versão máxima, propõe a estrutura de: 8 férmions de spin$-\frac{3}{2}$ $\rightarrow$ gravitino (previsto pela SUSI, mas ainda não detectado); 28 bósons de spin 1 $\rightarrow$ fóton, mediador da interação eletromagnética; $W^{\pm}, Z^{0}$, mediadores da interação elétro-fraca e os glúons, mediadores da interação forte; 56 férmions de spin$-\frac{1}{2}$: os quarks e léptons; 70 bósons de Higgs de spin 0, que ainda não foram detectados; 1 gráviton de spin 2, que ainda não foi detectado. As teorias de unificação, como a de Weinberg-Salam e as GUT's, conseguem relacionar algumas partículas de mesmo spin.

A seguir, apresentamos a evolução histórica dos trabalhos que proporcionaram o surgimento da supersimetria em Teoria de Campos. Em 1960, aconteceu a primeira tentativa para relacionar multipletos de bárions e mésons com spins diferentes. Ex: Modelo SU(6) de Gursey-Radicati-Sakita, um modelo não-relativístico. Várias tentativas de covariantizá-lo falharam. Em 1967, tivemos o trabalho "No-go theorem" de Coleman e Mandula: a partir de algumas características da matriz de espalhamento (ou matriz **S**) e do espectro de partículas, eles concluíram que o grupo de simetria do espaço-tempo e da simetria interna, cujos geradores são conservados sob Transformações de Lorentz, é o produto direto $T \otimes G$, onde $T = \{P_\mu, M_\mu\}$ são os geradores do grupo de Lorentz e $G = \{G^1\}$ é um escalar de Lorentz. Em 1971, foram propostos o modelo de strings com partículas de spin semi-inteiro, por Neveu, Schwarz e Ramond e a extensão do grupo de Poincaré por Gel'fand e Likthman. Em 1973, a realização não-linear da álgebra SUSI em Teoria Quântica de Campos foi considerada por Volkov e Akulov. Em 1974, foram propostos os modelos lineares supersimétricos por Wess e Zumino: multipletos (A, B, Ψ), representação off-shell; (A, Ψ), representação on-shell. Este foi o primeiro modelo da Supersimetria em Teoria de Campos no espaço-tempo da Relatividade Restrita.

Salam e Strathdee encontraram as realizações dos geradores da SUSI sobre um superespaço de coordenadas e introduziram um formalismo elegante em termos de supercampos [1].

Realmente, a SUSI surgiu na década de setenta e, logo em seguida, alguns pesquisadores da linha de trabalhos sobre uma descrição unificada das teorias físicas relutaram com a grande ambição de que a mesma fosse a teoria de grande unificação das quatro interações básicas existentes na natureza (forte, fraca, eletromagnética e gravitacional). Mas, após um grande número de trabalhos abordando a SUSI nesse contexto, está faltando uma constatação experimental para que a SUSI se torne uma teoria de unificação a altas energias, ou seja, uma Teoria Quântica de Campos consistente com a descrição da natureza. Não obstante, no momento há uma grande perspectiva da existência da SUSI em Física de Altas Energias.

Nas referências [2, 3, 4, 5] indicamos alguns livros sobre a SUSI em Teoria de Campos. Para uma conexão da abordagem de teoria de grupos e o oscilador isotrópico tridimensional em Mecânica Quântica na descrição de Schrödinger, veja a Ref. [7]. Recentemente, uma generalização da técnica de fatorização em Mecânica Quântica foi aplicada para os seguintes potenciais: oscilador isotrópico tridimensional, potenciais de Morse e Coulomb [8].

Partindo da super-partícula não-relativística construimos a supersimetria em Mecânica Quântica (SUSI MQ). Iniciamos com a supersimetria em Mecânica Clássica (SUSI MC) e implementamos o procedimento de quantização canônica de Dirac [9], no contexto não-relativístico. Tal procedimento de quantização aplica-se a sistemas com vínculos de segunda classe.

Após a formulação da SUSI MQ por Witten [10, 11, 12] e da SUSI MC [13, 14, 15, 16, 17], surgiram algumas evidências fenomenológicas a baixas energias, em Mecânica Quântica Não-relativística Supersimétrica [18]. Na Ref. [17] o leitor pode encontrar a demonstração detalhada de que, no caso da SUSI MC com N=1 (uma variável de Grassmann) e uma única supercoordenada comutante, não podemos introduzir um termo de potencial na super-ação. No entanto, considerando a interação de uma supercoordenada anti-comutante, com uma supercoordenada comutante, podemos construir um modelo SUSI $N = 1$ para um oscilador anarmônico.

Atualmente, existem alguns livros-texto [19] sobre Mecânica Quântica contendo aplicações da SUSI MQ. Já existem também livros exclusivos sobre SUSI em Mecânica Clássica e Mecânica Quântica [20].

A SUSI MQ tem sido aplicada principalmente como técnica de resolução espectral para potenciais invariantes de forma [21] para se construir novos potenciais iso-espectrais em uma dimensão [22] e em três dimensões [23].

Fernandez *et al.*, considerando duas transformações SUSI sucessivas, construiram novos potenciais iso-espectrais análogos ao potencial do átomo de hidrogênio [21]. Recentemente, têm sido construídas novas classes de potenciais iso-espectrais no contexto da Mecânica Quântica unidimensional e da Teoria de Campos em espaço-tempo bidimensional (1+1 dimensões) [24].

Os modelos hamiltonianos da SUSI MC $N = 1$ e $N = 2$ em (0+1) dimensão contêm vínculos, cuja primeira quantização tem sido investigada via o método de Dirac [14, 15, 25].

Outras aplicações da SUSI MQ em conexão com a álgebra de Wigner-Heisenberg, super-realizada por Jayaraman-Rodrigues, para a interação de Calogero associada a duas partículas, em conexão com o oscilador quântico de Wigner, em termos de operadores bosônicos e fermiônicos [26]; a óptica quântica via SUSI [27]; os superpotenciais singulares [28]; os potenciais não polinomiais [29] e com potenciais de fases equivalentes [30]. Há cinco trabalhos de revisão sobre SUSI em Mecânica Quântica [31, 32, 33, 34, 35]

Os trabalhos de revisão mais recentes sobre o caso da Mecância Clássica da super-partícula livre com SUSI $N = 1$ e o caso da SUSI $N = 2$, com a aplicação para o potencial de Pöschl-Teller I e um nêutron em um campo magnético de um condutor linear com corrente [36], são encontrados, respectivamente, em [17] e [37]. O potencial de Pöschl-Teller I com SUSI quebrada tem sido transformado em um potencial que obedece à condição de invariância de forma [38].

Registramos também alguns trabalhos sobre a conexão da SUSI com os estados coerentes para potenciais iso-espectrais [39], potenciais associados a q-álgebras [40], álgebra de Heisenberg não-linear [41], oscilador isotônico SUSI [42], a interação de Calogero para duas partículas [43] e para o modelo de Jaynes-Cummings [44]. Recentemente, Curado e Rego-Monteiro investigaram uma classe de álgebras de Heisenberg generalizadas fornecendo as álgebras tipo Heisenberg deformada e não-deformada [45]; deixamos para fazer uma análise da conexão dessas álgebras com a supersimetria em outra abordagem ao tema.

Interessantes aplicações da SUSI no contexto da bosonização, da SUSI não linear de sistemas parabosônicos e da SUSI associada a monopólos de férmions foram investigadas por Plyushchay [46]. A conexão de potenciais que possuem a condicão de invariância de forma com o método algébrico pode ser encontrada nas referências [38] e [47]. O vetor de Laplace-Runge-Lenz está relacionado com os elementos da álgebra SUSI MQ [48]. Recentemente, tem sido considerado também interessantes aplicações das transformações semi-unitárias em modelos supersimétricos no contexto da Mecâncica Quântica por Zhang *et al.* [49]. Potenciais complexos pseudo-hermitianos com simetria PT tem sido investigados por C.-S. Jia *et al.* [50].

Este curso está organizado da seguinte maneira: na Seção 2, apresentamos uma síntese do método de fatorização em Mecânica Quântica para o oscilador harmônico unidimensional [6]. Na Seção 3, introduzimos algumas propriedades das variáveis de Grassmann[51] e implementamos a SUSI $N = 1$ e $N = 2$ em Mecânica Clássica. Na Seção 4, consideramos a questão do vínculo de segunda classe na quantização da super-partícula, construímos o modelo supersimétrico de Witten em Mecânica Quântica Não-relativística e analisamos a quebra espontânea da SUSI. Na Seção 5, abordamos a resolução espectral via a hierarquia de hamiltonianos e a propriedade de invariância de forma. Na Seção 6, deduzimos o potencial generalizado de Abraham-Moses [52, 53] via o método SUSI MQ, que gera potenciais iso-espectrais. Na seção 7, elaboramos as discussões e conclusões.

Esta nota de aula é baseada no trabalho [12], acrescido de parte dos trabalhos [6], [17] e [37]. Acrescentamos também a nossa aplicação do método de duas transformações supersimétricas sucessivas, para deduzirmos, a partir do potencial do átomo de hidrogênio [54], o potencial generalizado de Abraham-Moses [55, 56].

2 O Método de Fatorização

Nesta seção, consideramos a aplicação do método de fatorização para o oscilador harmônico simples[6]. Vamos introduzir dois operadores não-hermitianos, a^- e a^+, definidos a partir da combinação linear dos operadores de posição e momento linear ($\hat{x} = x$ e $\hat{p}_x = -i\hbar\frac{d}{dx}$), no sistema de unidades em que $m = 1$,

$$a^- = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\hat{x} + i\hat{p}_x), \qquad a^+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\hat{x} - i\hat{p}_x), \tag{1}$$

onde $\hat{p}_x^\dagger = \hat{p}_x \Rightarrow a^+ = (a^-)^\dagger$ e $a^- = (a^+)^\dagger$. Neste caso, diz-se que $a^\pm$ são operadores mutuamente adjuntos. Escrevendo $\hat{x}$ e $\hat{p}_x$ em termos de a^- e a^+, obtemos:

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}(a^+ + a^-), \qquad \hat{p}_x = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}(a^+ - a^-), \tag{2}$$

onde a^- é chamado de operador de abaixamento e a^+, de operador de levantamento dos autovalores de energia do oscilador harmônico simples (OHS).

Em segunda quantização, quando quantizamos o campo eletromagnético surgem operadores análogos aos operadores escada ($a^{\pm}$) do OHS, mas eles fazem parte do campo e não são combinação lineares de $\hat{p}_x$ com $\hat{x}$. Em teorias de campos, os operadores $a^{\pm}$ são denominados operadores de criação e aniquilação.

Os operadores a^- e a^+ não comutam e satisfazem a seguinte relação de comutação:

$$[a^-, a^+] \equiv a^-a^+ - a^+a^- = 1. \tag{3}$$

Essa expressão é bastante evidente a partir do momento que substituirmos as equações (2) e (3) no comutador $[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$ e usarmos o fato de que todo operador comuta com ele mesmo.

Substituindo (2) e (3) no hamiltoniano do OHS, obtemos:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(\hat{p}_x^2 + \omega^2\hat{x}^2) = \frac{\hbar\omega}{2}(a^-a^+ + a^+a^-) \\ &= \hbar\omega(a^+a^- + \frac{1}{2}) = \hbar\omega a^+a^- + E_0, \end{aligned} \tag{4}$$

onde a constante $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$ é chamada de energia do ponto zero do oscilador, isto é, E_0 é a energia associada ao estado fundamental (ou estado de menor energia). Lembre-se que em Mecânica Clássica, a energia mínima do oscilador é zero.

Um bom exercício seria mostrar diretamente, escrevendo os operadores $a^{\pm}$ em termos de x e do operador derivada $\frac{d}{dx}$. Lembrando que os operadores atuam sobre as funções de onda, o leitor deve calcular os produtos dos operadores, aplicando-os neste caso às autofunções unidimensionais. Calcula-se separadamente $a^+a^-\psi_n(x)$ e $a^-a^+\psi_n(x)$; depois faz-se a adição obtendo, então, o hamiltoniano acima. Fazendo a subtração das duas equações resultantes desta operação, obtém-se a relação de comutação canônica acima (3).

3 Supersimetria em Mecânica Clássica

Para a SUSI $N = 1$, com uma única supercoordenada comutante ϕ, não podemos introduzir um potencial $V(\phi)$, pois, entre outros motivos, isto levaria a não consistência da super-ação, tornando-a de dimensão ímpar [17]. Consideramos a análise da superpartícula interagindo com uma energia potencial conservativa $U(\phi)$, a qual, no formalismo lagrangiano, é usual denominar simplesmente de potencial.

3.1 SUSI N=1

Consideramos a supersimetria $N = 1$, isto é, a SUSI com uma única variável anticomutante. A supersimetria em Mecânica Clássica unifica as coordenadas par $q(t)$ e ímpar $\psi(t)$ em um superespaço caracterizado pela introdução de uma variável grassmanniana Θ não mensurável [14, 16, 51],

$$\text{Superespaço} \rightarrow (t; \Theta), \qquad \Theta^2 = 0, \tag{5}$$

onde t e Θ atuam, respectivamente, como elementos par e ímpar da álgebra de Grassmann.

A coordenada anticomutante, Θ, parametriza todos os pontos do superespaço, mas toda a dinâmica será colocada na coordenada temporal, t. A SUSI MC é gerada por uma transformação de translação no superespaço,

$$\Theta \to \Theta' = \Theta + \epsilon, \qquad t \to t' = t + i\epsilon\Theta, \tag{6}$$

onde Θ e ϵ são variáveis grassmannianas reais,

$$[\Theta, \epsilon]_+ = \Theta\epsilon + \epsilon\Theta = 0 \Rightarrow (\Theta\epsilon)^* = (\epsilon^*\Theta^*) = (\epsilon\Theta) = -(\Theta\epsilon). \tag{7}$$

Esta operação asterisco do produto de duas variáveis grassmannianas (anticomutantes) nos assegura que tal produto é um imaginário puro e, por isso, coloca-se $i = \sqrt{-1}$ em (25) para alcançar o caráter real do tempo. A SUSI é implementada de modo a deixar o elemento de linha invariante [1]:

$$dt + i\Theta d\Theta = \text{invariante}, \tag{8}$$

onde mais uma vez introduz-se o i para tornar o elemento de linha real.

Supercoordenada Comutante

A supercoordenada comutante para $N = 1$ é expandida em uma série de Taylor em termos das coordenadas par $q_1(t)$ e ímpar $\psi(t)$:

$$\phi_c \equiv \phi_c(t;\Theta) = q_1(t) + i\Theta\psi(t). \tag{9}$$

Há a necessidade de definirmos a regra de derivação com respeito a uma variável grassmanniana. Aqui, usamos a regra de derivada à direita, ou seja, sendo $f(\Theta_1, \Theta_2)$ uma função de duas variáveis anticomutantes,

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial\Theta_1}\delta\Theta_1 + \frac{\partial f}{\partial\Theta_2}\delta\Theta_2, \tag{10}$$

onde $\delta\Theta_1$ e $\delta\Theta_2$ aparecem do lado direito das derivadas parciais.

Considerando uma transformação infinitesimal da supercoordenada, obtemos:

$$\delta\phi_c(t;\Theta) = i\epsilon[Q, \phi(t;\Theta)]_- = \epsilon Q\phi_c(t;\Theta), \qquad Q = -\partial_\Theta + i\Theta\partial_t. \tag{11}$$

Para encontrarmos a derivada covariante da SUSI MC impomos que $[D_\Theta, Q]_+ = 0$, o que resulta em

$$D_\Theta = -\partial_\Theta - i\Theta\partial_t \Leftrightarrow \delta D_\Theta\phi_c(t;\Theta) = \epsilon Q D_\Theta\phi_c(t;\Theta). \tag{12}$$

Duas variáveis de Grassmann satisfazem as seguintes integrais de Berezin[2]:

[1] Aquelas propriedades das grandezas grassmannianas necessárias para uma melhor compreensão desta seção serão introduzidas gradativamente.

[2] A Eq. (24) da Ref. [12] esta com erro de impressão.

$$\int d\Theta\Theta = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{2} \int d\Theta_i\Theta_i = 2, \qquad \int d\Theta_i = 0 = \partial_{\Theta_i} 1, (i = 1, 2), \tag{13}$$

onde ∂_{Θ_i} é a derivada parcial em relação a Θ_i. Vemos que a integral de Berezin atua como uma derivada.

Uma super-ação para a superpartícula livre com SUSI $N = 1$ pode ser escrita como a seguinte integral dupla[3]:

$$S_c = \frac{i}{2} \int\int dt d\Theta (D_\Theta \phi_c)\dot{\phi}_c = \frac{i}{2} \int\int dt d\Theta \{i\psi\dot{q}_1 + \Theta\psi\dot{\psi} - i\Theta\dot{q}^2\} \equiv \int dt L. \tag{14}$$

Após integrarmos na variável Θ, obtém-se a seguinte lagrangeana da superpartícula:

$$L_c = \frac{1}{2}\dot{q_1}^2 + \frac{i}{2}\psi\dot{\psi}, \tag{15}$$

onde o primeiro termo é a energia cinética associada à coordenada par e o segundo termo é a energia cinética associada à coordenada ímpar, para uma partícula sem energia potencial.

A super-ação tem que ser par e o elemento de linha $dtd\theta$ posto na construção desta é ímpar. Portanto, vemos que não é possível a introdução de uma energia potencial $V(\phi)$ na lagrangeana, pois tal termo de potencial levaria a uma super-ação de dimensão não consistente, ou seja, a super-ação se tornaria também ímpar. Então, quando tivermos uma única supercoordenada comutante ϕ, a SUSY N=1 existirá somente para a superpartícula livre.

Devemos salientar que a super-ação sempre deve ser par, mas a lagrangeana eventualmente pode ser ímpar.

Agora, ainda no caso da SUSI N=1, vamos considerar duas supercoordenadas, uma comutante (par) e a outra anticomutante (ímpar), possibilitando a construção de um oscilador supersimétrico generalizado, contendo termos de potencial não-harmônico.

Supercoordenada Anticomutante

Considere a seguinte supercoordenada anticomutante $\phi_a(t;\Theta)$ em termos das componentes bosônica $q_2(t)$ e fermiônica $\zeta(t)$ com SUSI N =1,

$$\phi_a(t;\Theta) = \zeta(t) + \Theta q_2(t) \Rightarrow \delta\phi_a(t;\Theta) = \delta\zeta(t) + \Theta\delta q_2(t), \tag{16}$$

onde $\phi_a(t;\Theta)$ é a-number, Θ é a-number, $\zeta(t)$ é a-number e $q_2(t)$-c-number.

Fazendo uma variação de $\phi_a(t;\Theta)$, expandindo em série de Taylor, obtemos:

$$\delta\phi_a(t;\Theta) = \phi_a(t';\Theta') - \phi_a(t;\Theta) == i\epsilon\Theta\dot{\zeta}(t) + \epsilon q_2(t). \tag{17}$$

Comparando (16) com (17), obtemos a seguinte lei de transformação para as componentes da supercoordenada anticomutante:

[3] Nesta seção, sobre supersimetria em Mecânica Clássica, usamos o sistema de unidades em que $m = 1 = \omega$, onde m é a massa da partícula e ω é a frequência angular.

$$\delta\zeta(t) = \epsilon q_2(t), \qquad \delta q_2(t) = -\epsilon\dot{\zeta}(t). \tag{18}$$

Note que a componente em Θ nos dá uma derivada total $\dot{\zeta}$ ou $\dot{q}_2$.

De (16) e (17), vemos que a lei de transformação infinitesimal da SUSI pode ser escrita em termos da supercoordenada $\phi_a(t;\Theta)$,

$$\delta\phi_a(t;\Theta) = \epsilon Q\phi_a(t;\Theta), \tag{19}$$

onde o gerador da SUSI N=1 em termos de uma supercoordenada anticomutante é o mesmo para o caso da supercoordenada comutante, dada pela Eq. (11).

No caso da supercoordenada anticomutante, temos a seguinte super-ação:

$$S_a = \frac{im}{2}\int\int dt d\Theta \phi_a (D_\Theta \phi_a) \equiv \int dt L_a \ ; \tag{20}$$

após integrarmos na variável Θ, encontramos a seguinte lagrangeana livre:

$$L_a = \frac{1}{2}(\dot{q}_2^2 + i\zeta\dot{\zeta}). \tag{21}$$

Uma ação total envolvendo ambas supercoordenadas, comutante e anticomutante, incluindo os termos de interação, é dada por:

$$S_T = \int\int dt d\Theta \left(\frac{im}{2}\dot{\phi}_c D_\Theta \phi_c + \frac{im}{2}\phi_a D_\theta \phi_a - \sqrt{k}\phi_c^2\phi_a\right), \tag{22}$$

onde a lagrangeana total, torna-se

$$L_T = L_c + L_a + L_{int}, \tag{23}$$

onde o terceiro termo corresponde à parte de interação.

Após utilizarmos a equação de movimento para a componente par de ϕ_a, obtemos: $q_2 = q_2(q_1)$. Neste caso, vemos que na lagrangeana de interação acima, o acoplamento da componente bosônica q_1 com a componente fermiônica ζ corresponde a um termo de potencial de um oscilador anarmônico com auto-interação de quarta ordem na coordenada bosônica. O leitor interessado em encontrar outros termos de interações possíveis deve introduzir $\phi_c^n\phi_a$, onde $n \geq 1$. Note que $n = 2$ é exatamente o caso considerado aqui.

3.2 SUSI N=2

Assumimos que a SUSI ocorre a $D = 1 = (0+1)$ com supersimetria estendida $N = 2$. Neste caso, temos duas variáveis anticomutantes. Iniciamos com o tratamento clássico e depois efetuamos a primeira quantização, via o método de quantização canônica com vínculos. Em geral, a SUSI com $N > 1$ é denominada supersimetria estendida. No caso $N = 2$, o elemento de linha dado por

$$dt - i\Theta_1 d\Theta_1 - i\Theta_2 d\Theta_2 = \text{ invariante}, (\text{Jacobiano} = 1) \ , \tag{24}$$

é invariante sob as seguintes transformações de translação no super-espaço:

$$\Theta_1 \to \Theta_1' = \Theta_1 + \epsilon_1, \quad \Theta_2 \to \Theta_2' = \Theta_2 + \epsilon_2, \quad t \to t' = t + i\epsilon_1\Theta_1 + i\epsilon_2\Theta_2, \qquad (25)$$

onde ϵ_1 e ϵ_2 são grandezas anticomutantes (grassmannianas) e constantes reais. O "i"em (25) serve para garantir o caráter real do tempo.

As variáveis de Grassmann reais possuem as seguintes propriedades:

$$[\Theta_i, \Theta_j]_+ = \Theta_i\Theta_j + \Theta_j\Theta_i = 0 \Rightarrow (\Theta_1)^2 = 0 = (\Theta_2)^2. \qquad (26)$$

Além do mais, note que a derivada grassmanniana satisfaz a seguinte relação de anti-comutação:

$$[\partial_{\Theta_i}, \Theta_j]_+ = \partial_{\Theta_i}\Theta_j + \Theta_j\partial_{\Theta_i} = \delta_{ij}, \quad (i, j = 1, 2), \qquad (27)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker, isto é, se $i = j \Rightarrow \delta_{ii} = 1$; se $i \neq j \Rightarrow \delta_{ij} = 0$. Neste trabalho, estamos adotando a regra de derivada à direita, ou seja: $\partial_{\Theta_1}(\Theta_2\Theta_1) = \Theta_2, \quad \partial_{\Theta_1}(\Theta_1\Theta_2) = -\Theta_2$.

As variáveis de Grassmann muitas vezes simplificam os cálculos. Por exemplo, a exponencial de Θ_1 resulta exatamente na soma da unidade com Θ_1. Definindo as coordenadas grassmannianas complexas Θ e $\bar{\Theta}$ (o conjugado complexo de Θ) em termos das variáveis anticomutantes reais, $\Theta_i (i = 1, 2)$ e os parâmetros (constantes) grassmannianos ϵ e $\bar{\epsilon}$, vemos que

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\Theta_1 - i\Theta_2), \quad \bar{\Theta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Theta_1 + i\Theta_2), \\ \epsilon &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon_1 - i\epsilon_2), \quad \bar{\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon_1 + i\epsilon_2) \end{aligned} \qquad (28)$$

proporcionam as seguintes transformações SUSI:

$$\Theta \to \Theta' = \Theta + \epsilon, \qquad \bar{\Theta} \to \bar{\Theta}' = \bar{\Theta} + \bar{\epsilon}, \qquad t \to t' = t - i(\bar{\Theta}\epsilon - \bar{\epsilon}\Theta). \qquad (29)$$

Neste caso, obtêm-se as seguintes relações de anti-comutação:

$$[\partial_\Theta, \Theta]_+ = 1, \quad [\partial_{\bar{\Theta}}, \bar{\Theta}]_+ = 1, \quad \Theta^2 = 0. \qquad (30)$$

A expansão de Taylor para a supercoordenada escalar real de natureza comutante, em termos de Θ e $\bar{\Theta}$, pode ser escrita como:

$$\phi(t; \Theta, \bar{\Theta}) = q(t) + i\bar{\Theta}\psi(t) + i\Theta\bar{\psi}(t) + \Theta\bar{\Theta}A(t). \qquad (31)$$

A partir da lei de tranformação infinitesimal desta supercoordenada, a saber,

$$\begin{aligned} \delta\phi &= \phi(t'; \Theta', \bar{\Theta}') - \phi(t; \Theta, \bar{\Theta}) \\ &= \partial_t\phi\delta t + \partial_\Theta\phi\delta\Theta + \partial_{\bar{\Theta}}\phi\delta\bar{\Theta} \\ &= (\bar{\epsilon}Q + \bar{Q}\epsilon)\phi, \end{aligned} \qquad (32)$$

onde os geradores da SUSI são

$$Q \equiv \partial_{\bar{\Theta}} - i\Theta\partial_t, \quad \bar{Q} \equiv -\partial_\Theta + i\bar{\Theta}\partial_t, \tag{33}$$

(a supercarga $\bar{Q}$ não é o complexo conjugado da supercarga Q), obtemos as respectivas leis para as componentes bosônicas (pares) $(q(t); A)$ e fermiônicas (ímpares) $(\psi(t), \bar{\psi}(t))$:

$$\delta q(t) = i\{\epsilon\bar{\psi}(t) + \bar{\epsilon}\psi(t)\}, \qquad \delta A = \epsilon\dot{\bar{\psi}}(t) - \bar{\epsilon}\dot{\psi}(t) = \frac{d}{dt}\{\epsilon\bar{\psi} - \bar{\epsilon}\psi), \tag{34}$$

$$\delta\psi(t) = -\epsilon\{\dot{q}(t) - iA\}, \qquad \delta\bar{\psi}(t) = -\bar{\epsilon}\{\dot{q}(t) + iA\}, \tag{35}$$

as quais misturam-se, como no caso da SUSI N=1 [17].

A super-ação mais geral com SUSI $N = 2$, invariante sob estas transformações, no superespaço $(\Theta, \bar{\Theta}; t)$ e de dimensão par, é definida pela seguinte integral tripla:

$$S[\phi] = \int\int\int dtd\bar{\Theta}d\Theta\{\frac{1}{2}(D\phi)(\bar{D}\phi) - U(\phi)\}, \qquad \bar{D} \equiv \partial_\Theta + i\bar{\Theta}\partial_t, \tag{36}$$

onde D é a derivada covariante ($D = -\partial_{\bar{\Theta}} - i\Theta\partial_t$, $\bar{\partial}_{\bar{\Theta}} = -\partial_\Theta$, e $\partial_{\bar{\Theta}} = \frac{\partial}{\partial\bar{\Theta}}$ e $\partial_\Theta = \frac{\partial}{\partial\Theta}$), construída de modo que $[D, Q]_+ = 0 = [\bar{D}, \bar{Q}]_+$ e $U(\phi)$ é uma função polinomial da supercoordenada. A SUSI MC é um jogo de convenções, possibilitando encontrarmos outras representações para seus geradores.

Usando a regra de derivada à direita, obtemos:

$$\begin{aligned} \bar{D}\phi &= (\partial_\Theta + i\bar{\Theta}\partial_t)\phi = -i\bar{\psi} - \bar{\Theta}A + i\bar{\Theta}\partial_t q + \Theta\bar{\Theta}\dot{\bar{\psi}}, \\ D\phi &= (-\partial_{\bar{\Theta}} - i\Theta\partial_t)\phi = i\psi - \Theta A - i\Theta\dot{q} + \Theta\bar{\Theta}\dot{\psi}. \end{aligned} \tag{37}$$

Expandindo em série de Taylor o potencial $U(\phi)$ e mantendo até a primeira ordem em $\Theta\bar{\Theta}$ (porque somente estes termos sobrevivem após integrarmos nas variáveis grassmannianas complexas Θ e $\bar{\Theta}$), obtemos:

$$\begin{aligned} U(\phi) &= \phi U'(\phi) + \frac{\phi^2}{2}U''(\phi) + \cdots \\ &= A\Theta\bar{\Theta}U'(\phi) + \frac{1}{2}\psi\bar{\psi}\bar{\Theta}\Theta U'' + \frac{1}{2}\bar{\psi}\psi\Theta\bar{\Theta}U'' + \cdots \\ &= \Theta\bar{\Theta}\{AU' + \bar{\psi}\psi U''\} + \cdots, \end{aligned} \tag{38}$$

onde as derivadas (U' e U'') são tomadas em $\Theta = 0 = \bar{\Theta}$, de modo que resultam em funções exclusivamente da coordenada par $q(t)$. Substituindo esta expansão de U(ϕ) e as derivadas covariantes $\bar{D}\phi$ e $D\phi$, obtemos a lagrangeana com SUSI N=2 em termos da componente bosônica A. Usando a equação de Euler-Lagrange para A, obtém-se a hamiltoniana canônica da SUSI $N = 2$,

$$H_{can} = \frac{1}{2}\left\{p^2 + \left(U'(q)\right)^2 + U''(q)[\bar{\psi}, \psi]_-\right\}, \tag{39}$$

a qual contém um termo de potencial misto, composto de uma função da variável dinâmica de posição da partícula ($U''(q)$) e de variáveis de Grassmann ($[\bar{\psi}, \psi]_-$). Após a quantização desta hamiltoniana, veremos que este termo de potencial misto nos proporcionará a interação SUSI MQ, envolvendo uma parte bosônica e uma parte fermiônica.

4 Mecânica Quântica Supersimétrica

A supersimetria em Mecânica Quântica, formulada inicialmente por Witten [10], pode ser alcançada pela primeira quantização da hamiltoniana canônica acima.

De acordo com o método de Dirac, os parênteses de Poisson $\{A, B\}$ devem ser substituídos por parênteses de Poisson modificados (denominados de parênteses de Dirac) $\{A, B\}_D$, A e B duas variáveis dinâmicas, que são dados por:

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \{A, \Gamma_i\} C_{ij}^{-1} \{\Gamma_j, B\} \ , \tag{40}$$

onde Γ_i denotam os vínculos de segunda classe. Estes vínculos têm os parênteses de Poisson não-nulos que definem a matriz C,

$$C_{ij} \simeq \{\Gamma_i, \Gamma_j\}, \tag{41}$$

que Dirac mostrou ser anti-simétrica e não-singular e, portanto, inversível. Seguindo esta técnica, obtém-se [25]:

$$\{q, \dot{q}\}_D = 1, \qquad \{\psi, \bar{\psi}\}_D = i \qquad \text{e} \qquad \{A, \dot{q}\}_D = \frac{\partial^2 U(q)}{\partial q^2}. \tag{42}$$

Todos os demais parênteses de Dirac são nulos. Na próxima etapa, implememtaremos o procedimento de quantização canônica. Em tal procedimento, devemos substituir os parênteses de Dirac por comutador ou anticomutador. De acordo com o *teorema de spin-estatística*, os operadores bosônicos satisfazem a relação de comutação e os operadores fermiônicos satisfazem a relação de anticomutação. Conseqüentemente, denotamos $\hat{q}$ e $\hat{\psi}$ como sendo os operadores bosônico e fermiônico, respectivamente, em Mecânica Quântica, correspondentes às variáveis clássicas q e ψ. Neste caso, efetuamos as substituições dos parênteses de Dirac pelos seguintes comutador e anticomutador:

$$\begin{aligned} \{q, \dot{q}\}_D &= 1 \rightarrow \frac{1}{i}[\hat{q}, \dot{\hat{q}}]_- = 1 \quad \Rightarrow [\hat{q}, \dot{\hat{q}}]_- = \hat{q}\dot{\hat{q}} - \dot{\hat{q}}\hat{q} = i, \\ \{\psi, \bar{\psi}\}_D &= i \rightarrow \frac{1}{-i}[\hat{\psi}, \hat{\bar{\psi}}]_+ = i \Rightarrow [\hat{\psi}, \hat{\bar{\psi}}]_+ = \hat{\psi}\hat{\bar{\psi}} + \hat{\bar{\psi}}\hat{\psi} = 1. \end{aligned} \tag{43}$$

Vale a pena salientar que na referência [25] aparece um sinal negativo no parêntese de Dirac para as variáveis fermiônicas, ou seja, $\{\psi, \bar{\psi}\}_D = -i$. Isto acontece porque eles usaram a regra de derivação à esquerda. No caso da referência [25], o parêntese de Dirac deve ser substituído pelo seguinte anticomutador: $\frac{1}{i}[\hat{\psi}, \hat{\bar{\psi}}]_+$. A representação matricial dos operadores fermiônicos será a mesma considerada na próxima subseção.

Agora, vamos considerar o efeito dos vínculos sobre a hamiltoniana canônica na versão quantizada. A representação fundamental dos operadores fermiônicos em $D = 1 = (0+1)$ é dada por:

$$\hat{\psi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\bar{\psi}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow [\hat{\psi}, \hat{\bar{\psi}}]_+ = 1_{2\times 2}, \qquad [\hat{\bar{\psi}}, \hat{\psi}]_- = \sigma_3, \tag{44}$$

onde σ_3 é a matriz diagonal de Pauli com os elementos 1 e -1 na diagonal principal. Por outro lado, na representação de coordenada, os operadores de posição e de momento linear satisfazem a relação de comutação canônica vista na Seção 2.

Substituindo (44) em (39), e definindo $W(x) \equiv U'(x) \equiv \frac{dU}{dx}$, a hamiltoniana canônica torna-se o seguinte operador matricial, denominado modelo hamiltoniano de Witten [10]:

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}\{W^2(x) + W'(x)\sigma_3\} = \begin{pmatrix} H_- & 0 \\ 0 & H_+ \end{pmatrix}, \tag{45}$$

onde os setores de hamiltoniano $(H_\pm)$ podem ser colocados em termos de operadores diferenciais de primeira ordem (mutuamente adjuntos, isto é, $A^+ = (A^-)^\dagger, \quad A^- = (A^+)^\dagger$), a saber,

$$H_- = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + V_- = A^+A^- \ , \tag{46}$$

e o seu companheiro supersimétrico H_+ é definido por

$$\begin{aligned} H_+ &= -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + V_+ = A^-A^+, \\ V_\mp &= \frac{1}{2}\left\{W^2(x) \pm W'(x)\right\}, \quad A^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\pm\frac{d}{dx} + W(x)\right\}. \end{aligned} \tag{47}$$

Considerando as equações de autovalor para $H_\pm$, obtém-se o seguinte mapeamento entre os seus autovalores de energia:

$$E_+^{(n)} = E_-^{(n+1)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{48}$$

Vemos que todos os níveis de energia dos hamiltonianos $H_\pm$ são degenerados, com exceção do estado fundamental não degenerado de H_- associado ao autovalor de energia zero.

Por que a denominação de superpotencial? A função $W(x)$ é chamada de superpotencial, devido às seguintes interpretações: $W^2(x)$ representa a interação bóson-bóson, e $W'(x)\sigma_3$ representa a interação bóson-férmion. Note que no modelo SUSI MQ de Witten não existe o termo de interação férmion-férmion.

A álgebra graduada de Lie associada à SUSI MQ $N = 2$, em termos das supercargas $Q_\pm$, envolvendo comutador $[A, B]_- = AB - BA$ e anticomutador $[A, B]_+ = AB + BA$, é:

$$[Q_-, Q_+]_+ = H_{SUSI}, \quad Q_+ = Q_-^\dagger, \quad Q_- = Q_+^\dagger, \tag{49}$$

$$[H_{SUSI}, Q_-]_- = 0 = [H_{SUSI}, Q_+]_-, \qquad Q_+^2 = Q_-^2 = 0. \tag{50}$$

Os elementos desta super-álgebra podem ser representados em termos dos operadores diferenciais de primeira ordem $A^\pm$. Neste caso, temos:

$$H_{SUSI} = \hat{H} = \begin{pmatrix} H_- & 0 \\ 0 & H_+ \end{pmatrix}, \quad Q_- = \sigma_- A^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A^- & 0 \end{pmatrix}, \tag{51}$$

onde $\sqrt{2}\sigma_- = \sigma_1 - i\sigma_2$, com σ_1 e σ_2 sendo as matrizes de Pauli. A energia do estado fundamental do setor bosônico H_- é zero, ou seja, $E_-^{(0)} = 0 = E_{SUSI}^{(0)}$. A equação de Schrödinger para a função de onda que descreve um estado quântico SUSI na representação abstrata,

$$\hat{H} \mid \Psi >_{SUSI}= E \mid \Psi >_{SUSI}, \quad \mid \Psi >_{SUSI}= \begin{pmatrix} \mid \psi >_- \\ \mid \psi >_+ \end{pmatrix}, \quad E \equiv E_{SUSI} \geq 0, \tag{52}$$

nos fornece as seguintes relações entrelaçadas entre as autofunções dos setores bosônico, $\mid \psi >_-$, e fermiônico, $\mid \psi >_+$:

$$\mid \psi >_+= \frac{1}{\sqrt{E}} A^- \mid \psi >_-, \qquad \mid \psi >_-= \frac{1}{\sqrt{E}} A^+ \mid \psi >_+ . \tag{53}$$

Por conseguinte, vemos que os operadores $A^{\pm}$ não são os operadores de simetria, mas eles graduam os dois subespaços de Hilbert da SUSI MQ, levando o setor bosônico no setor fermiônico e vice-versa. Os operadores de simetria são as supercargas $Q_{\pm}$. Na descrição de Schrödinger, a função de onda depende de x e está relacionada com a representação abstrata, através do seguinte produto escalar: $\Psi_{SUSI}(x) =< x \mid \Psi >_{SUSI}$. Justifica-se esta denominação de setores bosônico e fermiônico, devido ao fato de que o operador de número fermiônico, $N_f = (1 - \sigma_3)/2$, $N_f N_f = N_f$, possui o auto-espinor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ associado ao autovalor $n_f = 0$ (nenhum férmion) e o auto-espinor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ com $n_f = 1$ (um férmion). Lembre-se que, pelo *teorema de spin-estatística*, cada estado quântico só pode ser ocupado por no máximo um férmion ou um número inteiro de bósons.

Abordamos agora a quebra espontânea da SUSI em Mecânica Quântica. Quando o vácuo deixa de ser invariante SUSI, diz-se que há uma quebra espontânea da SUSI. Isto se dá precisamente quando $E_{SUSI}^{(0)} \neq 0$. Note que, de acordo com a equação (32), a supercarga clássica Q corresponde ao operador Q_- da versão quântica. Dado uma curva de potencial, se ocorrer pelo menos um mínimo com valor zero, o potencial não apresenta quebra espontânea de SUSI. Obviamente, estamos considerando o caso em que o potencial é uma função positiva dependente exclusivamente da posição da partícula.

Agora, assumindo que $|\Psi_{SUSI}^{(0)} >$ é invariante SUSI e $Q_{\pm}$ são os operadores de supercargas mutuamente adjuntos, temos:

$$E_{SUSI}^{(0)} =< \Psi_{SUSI}^{(0)}|H_{SUSI}|\Psi_{SUSI}^{(0)} >= 0 \Leftrightarrow Q_{\pm}|\Psi_{SUSI}^{(0)} >= 0, \tag{54}$$

ou seja, se $E_{SUSI}^{(0)} = 0$, dizemos que não há quebra espontânea de supersimetria e, portanto, a SUSI é uma simetria exata sempre que existir uma solução normalizável da equação de Schrödinger associada à energia zero. Podemos implementar uma análise precisa da normalizabilidade da função de onda, $\Psi_{SUSI}^{(0)}(x)$, que descreve o estado fundamental, em termos da topologia do superpotencial $W(x)$. De fato, considerando que em uma dimensão $\Psi^{(0)}_{SUSI}(x)$ é aniquilada pela supercarga matricial Q_-, dada pela equação (51), obtemos:

$$Q_-\Psi^{(0)}_{SUSI}(x) = 0 \Rightarrow \Psi^{(0)}_{SUSI}(x) = \begin{pmatrix} \psi^{(0)}_-(x) \\ 0 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} exp\left(-\int_0^x W(y)dy\right) \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{55}$$

a qual é normalizável quando $\int_0^x W(y)dy \to \infty, \quad x \to \pm\infty$. Neste caso, N é a constante de normalização. Um aspecto bastante importante é a impossibilidade do nível de energia do estado fundamental ser degenerado quando não há quebra espontânea da SUSI. Da definição de $A^\pm$ em (47), obtém-se a seguinte relação entre as soluções de $A^-\psi^{(0)}_-(x) = 0$ e $A^+\psi^{(0)}_+(x) = 0$:

$$\psi^{(0)}_-(x)\psi^{(0)}_+(x) = C, \tag{56}$$

onde C é uma constante real. Note que $\psi^{(0)}_-(x)$ normalizável implica em $\psi^{(0)}_+(x)$ não-normalizável e, portanto, a energia zero de H_- não será permitida para H_+. Neste caso, $\psi^{(0)}_+(x)$ é uma solução da equação de Schrödinger, mas não é aceitável fisicamente.

Três aplicações da SUSI MQ: A seguir, para cada sistema quântico apresentamos o superpotencial, o par de hamiltonianos companheiros supersimétricos e as autofunções dos estados fundamentais.

a) Oscilador Harmônico Unidimensional.

$$\begin{aligned} W(x) &= -\omega x, \quad H_- = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\omega^2 x^2}{2} - \frac{\omega}{2} \\ H_+ &= -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\omega}{2}, \quad \Psi^{(0)}_- \propto e^{-\frac{\omega x^2}{2}} \end{aligned} \tag{57}$$

b) Potencial de Pöschl-Teller, o qual tem aplicação em teoria molecular.

$$\begin{aligned} W(\theta) &= \frac{k}{2}ctg\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{\lambda}{2}tg\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad k > 1, \lambda > 1, \\ H_- &= -\frac{d^2}{d\theta^2} + \frac{1}{4}\left\{\frac{k(k-1)}{sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right\} - \frac{1}{4}(k+\lambda)^2 \\ H_+ &= -\frac{d^2}{d\theta^2} + \frac{1}{4}\left\{\frac{k(k+1)}{sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} + \frac{\lambda(\lambda+1)}{cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right\} - \frac{1}{4}(k+\lambda)^2 \\ \psi^{(0)}_- &\propto sen^k\left(\frac{\theta}{2}\right)cos^\lambda\left(\frac{\theta}{2}\right). \end{aligned} \tag{58}$$

c) O átomo de hidrogênio: o problema de Coulomb tridimensional.

$$W(\rho) = \frac{\ell+1}{\rho} - \frac{1}{\ell+1}$$

$$H_- = -\frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{2}{\rho} - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2}\right] + \frac{1}{2(\ell+1)^2}$$
$$H_+ = -\frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{2}{\rho} + \frac{(\ell+1)(\ell+2)}{\rho^2}\right] + \frac{1}{2(\ell+1)^2}$$
$$\Psi_-^{(0)} \propto \rho^\ell e^{-\frac{\rho}{\ell+1}}. \tag{59}$$

Nestes três casos a SUSI é não-quebrada, pois a energia do estado fundamental de cada caso é nula. A seguir, vamos considerar o tratamento geral da resolução espectral via a hierarquia de hamiltonianos.

5 Hierarquia de Hamiltonianos Supersimétricos

O método SUSI nos fornece uma hierarquia de Hamiltonianos que permite calcularmos as autofunões e autovalores de energia de um hamiltoninano H_1. A seguir, apresentaremos o método desenvolvido por Sukumar [22].

Considerando $H_1 = H_- + E_1^{(0)}$ e $H_2 = H_+ + E_1^{(0)}$, temos:

$$H_1 = A_1^+ A_1^- + E_1^{(0)}, \quad A_1^{(-)} = \psi_1^{(0)}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{d}{dx}\right)\frac{1}{\psi_1^{(0)}} = (A_1^+)^\dagger, \tag{60}$$

com o seu "companheiro supersimétrico"dado por

$$H_2 = A_1^- A_1^+ + E_1^{(0)}, \qquad V_2(x) = V_1(x) - \frac{d^2}{dx^2}\ell n\psi_1^{(0)}. \tag{61}$$

O espectro H_1 e H_2 satisfaz

$$E_2^{(n)} = E_1^{(n+1)}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{62}$$

com suas autofunções relacionadas por

$$\psi_1^{(n+1)} \propto A_1^+ \psi_2^{(n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{63}$$

Fatorizando H_2 em termos de sua função de onda do estado fundamental $\psi_2^{(0)}$, obtém-se

$$H_2 = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x) = A_2^+ A_2^- + E_2^{(0)}, \quad A_2^- = \psi_2^{(0)}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{d}{dx}\right)\frac{1}{\psi_2^{(0)}}. \tag{64}$$

O companheiro SUSI de H_2 é dado por

$$H_3 = A_2^- A_2^+ + E_2^{(0)}, \quad V_3(x) = V_2(x) - \frac{d^2}{dx^2}\ell n\psi_1^{(0)}. \tag{65}$$

O espectro de H_2 e H_3 satisfaz a condição

$$E_3^{(n)} = E_2^{(n+1)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{66}$$

com suas autofunções relacionadas por

$$\psi_2^{(n+1)} \propto A_2^+ \psi_3^{(n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{67}$$

A repetição deste procedimento resulta na seguinte generalização:

$$H_n = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + V_n(x) = A_n^+ A_n^- + E_n^{(0)} = A_{n-1}^- A_{n-1}^+ + E_{n-1}^{(0)}, \tag{68}$$

$$A_n^- = \psi_n^{(0)} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d}{dx} \right) \frac{1}{\psi_n^{(0)}} = \left(A_n^+ \right)^\dagger, \tag{69}$$

$$\begin{aligned} V_n(x) \qquad &= V_{n-1}(x) - \frac{d^2}{dx^2} \ell n \psi_{n-1}^{(0)} \\ &= V_1(x) - \frac{d^2}{dx^2} \ell n (\psi_1^{(0)} \psi_2^{(0)} \ldots \psi_{n-1}^{(0)}), \quad n = 2, 3, \ldots, M, \end{aligned} \tag{70}$$

cujos espectros satisfazem o mapeamento

$$E_1^{n-1} = E_2^{n-2} = \ldots = E_n^{(0)}, \qquad n = 2, 3, \ldots, M, \tag{71}$$

onde M é o número de estados ligados de H_1. Portanto, a autofunção do $n-1-$ésimo estado excitado de H_1 é dada por

$$\psi_1^n \propto A_1^+ A_2^+ \ldots A_n^+ \psi_{n+1}^{(0)}. \tag{72}$$

Podemos resumir o processo desenvolvido por Sukumar através do seguinte mapeamento:

$$\begin{array}{cccccccccc}
E_1^{(n)} & __ & E_2^{(n)} & __ & E_3^{(n)} & __ & E_4^{(n)} & __ & E_{n+1}^{(0)} & ____ \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
E_1^{(4)} & __ & E_2^{(3)} & __ & E_3^{(2)} & __ & E_4^{(1)} & __ & \cdots & \cdots \\
E_1^{(3)} & __ & E_2^{(2)} & __ & E_3^{(1)} & __ & E_4^{(0)} & __ & \cdots & \cdots \\
E_1^{(2)} & __ & E_2^{(1)} & __ & E_3^{(0)} & __ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
E_1^{(1)} & __ & E_2^{(0)} & __ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
E_1^{(0)} & __ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & H_1 & & H_2 & & H_3 & & H_4 & \cdots & H_{n+1}
\end{array}$$

Note que o nível de energia do estado fundamental do (n+1)ésimo-membro da hierarquia (H_{n+1})é degenerado com o nível de energia do n-ésimo estado excitado do primeiro membro da hierarquia (H_1).

Potenciais Invariantes de Forma: São aqueles potenciais SUSI que satisfazem uma condição específica entre seus parceiros,

$$V_+(x; a_1) = V_-(x; a_2) + R(a_2), \quad a_2 = f(a_1), \tag{73}$$

onde a_1 é um conjunto de parâmetros, a_2 uma função dos parâmetros a_1 e $R(a_2)$ é a parte restante, independente de x.

Para o potencial de Pöschl-Teller (58), obtém-se a seguinte condição de invariância de forma:

$$V_+(x;k,\lambda) = V_-(x;k \to k+1, \lambda \to \lambda+1) + R(k,\lambda) \ , \tag{74}$$

onde $a_1 = (k,\lambda), \quad a_2 = (k+1,\lambda+1), \quad R = -(k+\lambda+1)$, com $E_-^{(0)} = 0$, o que nos garante que a SUSI é não-quebrada. A condição de invariância de forma é uma condição suficiente para podermos resolver algebricamente a equação de autovalor de energia via o método SUSI desenvolvido por Gendenshtein [11]. No entanto, no caso da quebra espontânea da SUSI, podemos aplicar o método SUSI desenvolvido por Sukumar [22] ou fazendo transformações adequadas, restaurando o caso da SUSI não-quebrada [38].

O caso mais simples de potenciais invariantes [11] de forma é o oscilador SUSI em uma dimensão, onde $c_1 = c_2 = R = \omega$ e $E_-^{(0)} = 0$.

Portanto, a partir da análise da hierarquia de hamiltonianos SUSI, vemos que se a condição de invariância de forma for satisfeita os níveis de energia do n-ésimo estado excitado do primeiro membro da hierarquia tornam-se:

$$E_1^n = E_2^{n-1} = \ldots = E_{n+1}^{(0)} = \sum_{s=2}^{n+1} R(a_s), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

onde o índice superior indica o nível de energia e o índice inferior indica o membro da hierarquia. Neste caso, a energia do estado fundamental do n-ésimo membro da hierarquia é dada por $E_n^{(0)} = \sum_{s=2}^{n} R(a_s)$.

6 Novos Potenciais Iso-Espectrais

Nesta seção, apresentamos alguns resultados da nossa aplicação do método SUSI para se construir o potencial generalizado de Abraham e Moses [52] associado ao hamiltoniano radial do átomo de hidrogênio. Neste caso, considerando duas transformações SUSI sucessivas, os resultados são equivalentes ao método de espalhamento inverso [55].

Iniciamos com a equação radial para o átomo de hidrogênio, (59), colocando-se o número atômico $Z = 1$, na representação $-\chi, \chi(r) = rR(r)$, onde ℓ representa o número quântico de momento angular:

$$\chi_\ell^{(0)}(r) = rR_\ell^{(0)}(r) \propto r^{\ell+1} \exp\left(-\frac{r}{\ell+1}\right), \tag{75}$$

onde $\rho = \alpha r = \frac{2r}{N}, \quad \alpha^2 = -8E_N = \frac{4Z^2}{N^2} = \frac{4}{N^2}$.

Construimos, sob duas transformações SUSI sucessivas, uma corrente de hamiltonianos SUSI, $H_1(\ell) \to H_2(\ell) = \tilde{H}_2(\ell) \to \tilde{H}_1(\ell,\alpha)$, onde

$$H_1(\ell) = A_1^+(\ell)A_1^-(\ell) - \frac{1}{2(\ell+1)^2}, \quad V_1(r) = -\frac{1}{r} + \frac{\ell(\ell+1)}{2r^2} \tag{76}$$

$$A_1^\pm(\ell) = [\chi_\ell^{(0)}(r)]^{\mp 1}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{d}{dr}\right)[\chi_\ell^{(0)}(r)]^{\pm 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\pm\frac{d}{dr} + W(r)\right\}. \tag{77}$$

O companheiro SUSI de H_1 é $H_2(\ell) = A_1^-(\ell)A_1^+(\ell) - \frac{1}{2(\ell+1)^2}$, onde

$$V_2(r) = V_1(r) - \frac{d^2}{dr^2}\ell n\chi_\ell^{(0)}(r) = -\frac{1}{r} + \frac{(\ell+1)(\ell+2)}{2r^2}. \tag{78}$$

Em virtude das equações (75) e (77), é visto que $[X_\ell^{(0)}(r)]^{-1}$ é uma solução formal e não normalizável de H_2 para sua energia não física, $-\frac{1}{2}(\ell+1)^2$. A solução geral correspondente, a qual, por sua vez, também é formal e não normalizável, é dada por

$$\left\{\left[\chi_\ell^{(0)}(r)\right]^{-1}\right\}_G = \left[\chi_\ell^{(0)}(r)\right]^{-1}\left\{\alpha + \int_0^r \left[\chi_\ell^{(0)}(\tilde{r})\right]^2 d\tilde{r}\right\}. \tag{79}$$

Agora, explorando a solução geral (79) para fatorizar H_2 no estado não físico com energia $-\frac{1}{2(\ell+1)^2}$, obtemos:

$$\tilde{H}_2 = H_2 = B^-(\ell)B^+(\ell) - \frac{1}{2(\ell+1)^2}, \quad \tilde{V}_2(r) = V_2(r), \tag{80}$$

onde $B^+ = (B^-)^\dagger$, e, por sua vez, em analogia com (77), o operador B^- é definido por

$$B^-(\ell) = \left[\left\{\left[\chi_\ell^{(0)}(r)\right]^{-1}\right\}_G\right]^{-1}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{d}{dr}\right)\left[\left\{\left[\chi_\ell^{(0)}(r)\right]^{-1}\right\}_G\right]^{-1}. \tag{81}$$

Portanto, a construção da segunda transformação SUSY, $\tilde{H}_2 \to \tilde{H}_1(\ell;\alpha)$,

$$\tilde{H}_1(\ell;\alpha) = B^+(\ell)B^-(\ell) - \frac{1}{2(\ell+1)^2} = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dr^2} + \tilde{V}_1(r), \tag{82}$$

nos proporciona o seguinte potencial iso-espectral:

$$\tilde{V}_1 = -\frac{1}{r} + \frac{\ell(\ell+1)}{2r^2} - \frac{d^2}{dr^2}\ell n\left[\sum_{s=0}^{2\ell+2}\frac{(2\ell+2)!}{(2\ell+2-s)!}\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^s r^{(2\ell+2-s)}\right]. \tag{83}$$

A Eq. (83) é nossa expressão para o potencial generalizado de Abraham-Moses, obtido através da aplicação do método SUSI para o hamiltoniano radial do átomo de hidrogênio com momento angular ℓ arbitrário.

No caso particular $\ell = 0$, o novo potencial torna-se

$$\tilde{V}_1(r;0) = -\frac{1}{r} + \frac{8r(r+1)}{(2r^2+2r+1)^2}, \tag{84}$$

que coincide com aquele de Abraham e Moses [52]. Porém, esses autores têm adotado o método de espalhamento inverso do formalismo de Gelfand e Levitan em sua dedução associada ao momento angular, $\ell = 0$.

Em virtude de (75) e (79), explicitamente obtemos

$$B_1^+\left\{\left[\chi_{\ell=0}^{(0)}(r)\right]^{-1}\right\}_G = 0 \Rightarrow \left\{\left[\chi_{\ell=0}^{(0)}(r)\right]^{-1}\right\}_G = -\frac{1}{2}e^{-r}\left(r+1+\frac{1}{2r}\right), \tag{85}$$

uma solução não normalizável, confirmando que $-\frac{1}{2(\ell+1)^2}$ não é um autovalor $\tilde{H}_2 = H_2$ fisicamente aceitável. Portanto, os níveis de $\tilde{H}_2$ são os mesmos de H_2, isto é, $\tilde{E}_2^{(m)} = E_2^{(m)}, \quad (m = 0, 1, 2, \ldots)$. Além do mais, $\tilde{H}_1$, o companheiro SUSI de $\tilde{H}_2$, também não possui o nível $-\frac{1}{2(\ell+1)^2}$, pois $E_1^{(m)} = E^{(m+1)}(m = 0, 1, 2, \cdots)$.

O potencial $\tilde{V}_1(r; 0)$ de (84) elimina o estado fundamental do hamiltoniano da equação radial do átomo de hidrogênio, mas mantém o restante do espectro de energia. Analogamente, resultado semelhante segue-se para ℓ arbitrário. Nosso resultado, obtido para $\tilde{V}_1(r; 0)$, é equivalente à seguinte expressão para o potencial $[\tilde{V}_1(r; \ell)]_{\rm KN}$, dada por Kostelecky e Nieto [18], via seus estudos do formalismo de Gelfand e Levitan [53],

$$[\tilde{V}_1(r; \ell)]_{\rm KN} = 4\phi(\ell) \left\{ \phi(\ell) + \frac{\ell + 1}{r} - \frac{1}{\ell + 1} \right\} , \tag{86}$$

onde

$$\phi(\ell) = (2r)^{2\ell+2} \left\{ (2\ell + 2)! \sum_{k=0}^{2\ell+2} \frac{(2r)^k (\ell + 1)^{2\ell+3-k}}{k!} \right\}^{-1} . \tag{87}$$

A seguir, apresentamos as conclusões.

7 Conclusão

A Mecânica Quântica supersimétrica tem sido uma técnica algébrica bastante usada em resoluções espectrais e para se construir novos potenciais iso-espectrais em Mecânica Quântica [22] e com fases equivalentes [30]. Recentemente, foram construídas novas classes de potenciais iso-espectrais em Mecânica Quântica e em Teoria de Campos bidimensionais (1+1 dimensões) [24]. Neste curso, investigamos a lagrangeana com supersimetria (SUSI) $N = 1$ e $N = 2$. Evidenciamos o fato de que a SUSI $N = 1$ em termos de duas super-coordenadas, uma comutante e a outra anti-comutante, proporciona termos de potenciais de osciladores anarmônicos [17].

Consideramos uma síntese do procedimentos de quantização canônica de Dirac [9], devido à presença de vínculos inerentes à hamiltoniana SUSI, cujos detalhes o leitor pode encontrar nas referências [14, 25].

Por outro lado, quando já se conhece o hamiltoniano da SUSI em Mecânica Quântica, a SUSI $N = 2$ pode ser construída seguindo o tratamento de Witten [10, 12, 37]. Analisamos a energia do estado fundamental e vimos que se ela for positiva ocorre quebra espontânea da supersimetria em Mecânica Quântica. Portanto, a SUSI é uma simetria exata quando a função de onda que descreve o estado quântico fundamental estiver associada à energia zero.

Nesta introdução à supersimetria, ilustramos o poder do método SUSI para construir novos potenciais para o caso exemplar do hamiltoniano radial do átomo de hidrogênio. Os espectros idênticos ao da Eq. radial do átomo de hidrogênio, com exceção apenas das perdas dos níveis de energia associados aos estados fundamentais para o momento angular orbital ℓ fixo. Com nossa análise SUSI, de fato, restauramos o famoso potencial de Abraham e Moses [52] para $\ell = 0$, e, também, o potencial deduzido por Kostelecky e

Nieto [18] para ℓ arbitrário. Realmente, na última seção, vimos a equivalência do método SUSI [55, 56] com o método da teoria de espalhamento inverso de Gelfand e Levitan [53], aplicado por esses autores.

Registramos também que o método de duas transformações SUSI sucessivas, visto na última seção, nos proporciona dois potenciais de fases equivalentes e, portanto, com mesma matriz de espalhamento.

Baseando-se em nossa análise, podemos dizer que o método SUSI oferece uma ferramenta algébrica poderosa, especialmente na construção de novos potenciais iso-espectrais, aumentando o número de potenciais exatamente solúveis. Algumas propriedades físicas de potenciais de fases equivalentes têm aplicações em Física Nuclear [57].

Em síntese, no caso da resolução espectral, a elegância do método de hierarquia de hamiltonianos está no seguinte: o problema da dinâmica da Eq. de Schrödinger associado a uma Eq. diferencial de segunda ordem na coordenada de posição se converte em um problema de cinemática que envolve operadores diferenciais de primeira ordem, que fornecem os n-ésimos estados quânticos. Finalizamos indicando para consulta algumas teses de doutorado e dissertações de mestrado [54].

8 Acknowledgements

O autor agradece ao comitê organizador da IV Escola do CBPF e aos estudantes que assistiram suas aulas. Agradece também ao *Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico Tecnológico (CNPq)* pelo auxílio financeiro parcial, através de uma bolsa de estudos de Pós-doutorado. Um agradecimento especial aos Professores Jambunatha Jayaraman (aposentado da UFPB-João Pessoa) e Arvind Narayan Vaidya (UFRJ) pelos incentivos e, principalmente, por terem sido meus orientadores nas teses de mestrado (1988) e doutorado (1992), respectivamente. Os agradecimentos vão também para o Prof. José Abdalla Helayël Neto, pelas discussões esclarecedoras sobre modelos supersimétricos e pela excelente hospitalidade no CBPF durante o meu estágio de Pós-doutorado.

Referências

[1] A. Salam e J. Strathdee, *Nucl. Phys.*, **B76**, 477, (1974); A. Salam e J. Strathdee, *Phys. Rev.* **D11**, 1521, (1975).

[2] S. J. Gates Jr, M. Grisaru, M. Rocek e W. Siegel, "Superspace or one Thousand and one Lessons in Supersymmetry", Benjamen/Cummings, Reading, Mass. (1983), hep-th/0108200.

[3] P. G. O. Freund, "Introduction to supersymmetry", Cambridge Monographs on Mathemaical Physics, Cambridge University Press, Cambridge (1986).

[4] P. West, "Introduction to supersymmetry and supergravity", World scientific, Singapore (1986).

[5] P. P. Srivastava, "Supersymmetry, superfield and supergravitation", Adam-Hilger, London (1986).

[6] R. de Lima Rodrigues, *Rev. Bras. de Ens. de Fis.* **19**, 374, (1997).

[7] D. J. Fernandez, J. Negro e M. A. del Olmo, *Ann. Phys. N.Y.* **252**, 386, (1996).

[8] J. Negro, L. M. Nieto e O. Rosas-Ortiz, *J. Phys. A: Math. Gen.* **33**, 7207, (2000).

[9] P. A. M. Dirac, *Can. J. Math.* **2**, 129, (1950); P. A. M. Dirac, "Lectures on Quantum Mechanics", (Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, N. Y.), (1964); A. Hanson, T. Regge e C. Teitelboim, "Constrained Hamiltonian Systems", (Accademia Nazionale dei Lincei, Rome, 1976).

[10] E. Witten, *Nucl. Phys.* **B185**, 513, (1981); A. A. Andrianov, N. V. Borisov e M. V. Ioffe, *Sov. Phys. JETP Lett.* **39**, 93, (1984); A. A. Andrianov, N. V. Borisov e M. V. Ioffe, *Phys. Lett.* **A105**, 19, (1984).

[11] L. Gendenshtein, *JETP Lett.* **38**, 356, (1983); R. Dutt, A. Khave e U. P. Sukhatme, *Am. J. Phys.* **56**, 163, (1988).

[12] R. de Lima Rodrigues e A. N. Vaidya, *Rev. Bras. de Ens. de Fis.* **19**, 374, (1997).

[13] V.G. Lima, "Novas Propostas de Potenciais Escalares Supersimétricos em 2 Dimensões", Tese de Mestrado, CBPF, 2001.

[14] C. A. P. Galvão e C. Teitelboim, *J. Math. Phys.* **21**, 1863, (1980); E. Corrigan e Cosmas K. Zachos, *Phys. Lett.* **B88**, 273, (1979).

[15] J. A. de Azcárraga, J. Lukierski e P. Vindel, "Covariant quantization of $D = 1N = 1$ supersymmetric oscillator, Field and Geometry", *Proceedings of XXIInd Winter School and Workshop of Theorecal Physics*, Karpas, Poland, 17 February - 1 March 1986, edited by Arkadiusz Jadcyk, Institute of Theoretical Physics, University of Wroclaw.

[16] P. Salomonson e J. W. van Holten, *Nucl. Phys.* **B196**, 509, (1982); F. Cooper e B. Freedman, *Ann. Phys.* (N. Y.) **146**, 262, (1983); F. Ravndal, *Proc. CERN School of Physics*, (Geneva: CERN) página 300, (1984); E. D'Hoker e L. Vinet, *Lett. Math. Phys.* **8**, 439, (1984); E. D'Hoker e L. Vinet, *Phys. Lett.* **B137**, 72, (1984); G. S. Dias e J. A. Helayel-Neto, "N=2-supersymmetric dynamics of a spin$-\frac{1}{2}$ particle in an extended external field," hep-th/0204220.

[17] R. de Lima Rodrigues, Wendel Pires de Almeida e Israel Fonseca Neto, "Supersymmetric classical mechanics: free case", *Notas de Física* CBPF-039-01, e-print hep-th/0201242.

[18] M. Bernstein e L. S. Brown, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1933, (1984); V. A. Kostelecky e M. M. Nieto, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 2285, (1984); V. A. Kostelecky e M. M. Nieto, *Phys. Rev.* **A32**, 1293, (1985); V. A. Kostelecky e M. M. Nieto, *Phys. Rev.* **A32**, 3243, (1985).

[19] O. L. de Lange e R. E. Raab, "Operator methods in quantum mechanics", Oxford University Press, New York, páginas 109-122, 179-181 e 354 (1991); Richard W. Robinett, "Quantum Mechanics, classical results, modern systems, and vizualized examples", Oxford University Press, New York, páginas 229-303 (1997); Richard L. Liboff, "Introductory Quantum Mechanics", third edition, Addison Wesley Longaman, páginas 343, (1998).

[20] F. Cooper, A. Khare e U. Sukhatme, "Supersymmetry in quantum mechanics," World Scientific, Singapure, 2001; B. Bagchi, "Supersymmetry in quantum and classical mechanics", published by Chapman and Hall, Florida (USA), (2000); G. Junker, "Supersymmetric methods in quantum mechanics and statistical physics", Springer, Berlin (1996); A. Das, "Field theory: a path integral approach", World Scientific, Singapure, Cap. 6 (1993).

[21] D. J. Fernandez, *Lett. Math. Phys.* **8**, 337, (1984), quant-ph/0006119.

[22] C. Sukumar, *J. Phys. A: Math. Gen.* **18**, L57, (1985); C. Sukumar, *J. Phys. A: Math. Gen.* **18**, 2917, (1985).

[23] A. Lahiri, P. K. Roy e B. Bagchi, *J. Phys. A: Math. Gen.* **20**, 3825, (1987).

[24] R. de Lima Rodrigues, *Mod. Phys. Lett.* **10A**, 1309, (1995); V. Gomes Lima, V. Silva Santos e R. de Lima Rodrigues, *Phys. Lett.* **A298**, 91, (2002), hep-th/0204175.

[25] J. Barcelos-Neto e Ashok Das, *Phys. Rev.* **D33**, 2863, (1986); J. Barcelos-Neto, Ashok Das e W. Scherer, *Acta Phys. Pol.* **B18**, 267, (1987).

[26] J. Jayaraman e R. de Lima Rodrigues, *J. Phys. Math. Gen.* **A23**, 3123, (1990); J. Jayaraman e R. de Lima Rodrigues, *Mod. Phys. Lett.* **A9**, 1047, (1994).

[27] C. J. Lee, *Phys. Lett.* **A145**, 177, (1990); H. A. Schmitt e A. Mufti, *Can J. Phys.* **68**, 1454, (1990); Yin-Sheng Ling e Wei Zhang, *Phys. Lett.* **A193**, 47, (1994); Sergey M. Chumacov e Kurt Bernardo Wolf, *Phys. Lett.* **A193**, 51, (1994).

[28] J. Casahorran e S. Nam, *Int. J. Mod. Phys.* **A6**, 2729, (1991); A. Jevicki e J. P. Rodrigues, *Phys. Lett.* **146B**, 55, (1984).

[29] E. Drigo Filho e R. M. Ricota, *Mod. Phys. Lett.* **A6**, 2137, (1991).

[30] R. D. Amado, *Phys. Rev.* **37A**, 2277, (1988); B. Talukdar, U. Das, C. Bhattacharyya e P. K. Bera, *J. Phys. A: Math. Gen.* **25**, 4073, (1992); G. Lévai, D. Bye e J.-M. Sparenberg, *J. Phys. A: Math. Gen.* **30**, 8257, (1997).

[31] L. E. Gendenshtein e I. V. Krive, *Sov. Phys. Usp* **28**, 645, (1985).

[32] A. Lahiri, P. K. Roy e B. Bagchi, *Int. J. Mod. Phys.* **A5**, 1383, (1990).

[33] Luc Vinet, *Proceedings da V Escola de Verão Jorge André Swieca, seção Teoria de Campos e Partículas*, página 291, realizada em Campos do Jordão-SP, (1989).

[34] R. W. Haymaker e A. R. P. Rau, *Am. J. Phys.* **54**, 928, (1986).

[35] F. Cooper, A. Khare e U. Sukhatme, *Phys. Rep.* **251**, 267, (1995).

[36] R. de Lima Rodrigues, V. B. Bezerra e A. N. Vaidya, *Phys. Lett.* **A287**, 45, (2001), hep-th/0201208; L. Vestergaard Hau, J. A. Golovchenko e Michael M. Burns, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 3138, (1995); I. Voronin, *Phys. Rev.* **A43**, 29, (1991).

[37] R. de Lima Rodrigues, "The Quantum Mechanics SUSY Algebra: an Introductory Review," Monografia CBPF-MO-03-01, hep-th/0205017.

[38] A. Gangopadhyaya, J. V. Mallow e U. P. Sukhatme, *Phys. Lett.* **A283**, 279, (2001), hep-th/0103054.

[39] D. J. Fernandez, V. Hussin e L. M. Nieto, *J. Phys. A: Math. Gen.* **27**, 3547, (1994).

[40] T. Fukui, *Phys. Lett.* **A189**, 7, (1994); A. B. Balantekin, M. A. Cândido Ribeiro e A. N. F. Aleixo, *J. Phys. A: Math. Gen.* **32**, 2785, (1999).

[41] D. J. Fernandez e V. Hussin, *J. Phys. A: Math. Gen.* **32**, 3603, (1999).

[42] J. Jayaraman, R. de Lima Rodrigues e A. N. Vaidya, *J. Phys. A: Math. Gen.* **32**, 6643, (1999).

[43] R. de Lima Rodrigues, A. F. de Lima, K. de Araújo Ferreira e A. N. Vaidya, "Quantum oscillators in the canonical coherent states", hep-th/0205175.

[44] M. Daoud e V. Hussin, *J. Phys. A: Math. Gen.* **35**, 7381, (2002).

[45] E. M. Curado e M. A. Rego-Monteiro, *J. Phys. A: Math. Gen.* **34**, 3253, (2001), hep-th/0011126; E. M. Curado e M. A. Rego-Monteiro, *Phys. Rev.* **E61**, 6255, (2001).

[46] S. M. Plyushchay, *Mod. Phys. Lett.* **A11**, 397, (1996); S. M. Plyushchay, *Int. J. Mod. Phys.* **A15**, 3679, (2000); M. S. Plyushchay, *Phys. Lett.* **B485**, 187, (2000), hep-th/0005122.

[47] A. B. Balantekin, *Phys. Rev.* **A57**, 4188, (1998), quant-ph/9712018; A. N. F. Aleixo, A. B. Balantekin e M. A. Cândido Ribeiro, *J. Phys. A: Math. Gen.* **33**, 3173, (2000); A. N. F. Aleixo, A. B. Balantekin e M. A. Cândido Ribeiro, *J. Phys. A: Math. Gen.* **34**, 1109, (2001), quant-ph/0101024.

[48] R. D. Mota, J. García and V. D. Granados, *J. Phys. A: Math. Gen.* **34**, 2041, (2001).

[49] Jian-Zu Zhang, Qiang Xu e H. J. W. Müller-Kirstein, *Phys. Lett.* **A258**, 1, (1999); Jian-zu Zhang, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 44, (1996); Jian-zu Zhang, X. z. Li e Z. x. Ni, *Phys. Lett.* **A214**, 107, (1996); Jian-zu Zhang, *Phys. Lett.* **A236**, 270, (1997); Jian-zu Zhang e Q. Xu, *Phys. Lett.* **A75**, 350, (2000).

[50] C.-S. Jia, P.-y. Lin e L.-T. Sun, *Phys. Lett.* **A298**, 98, (2002) e referências contidas nesse trabalho.

[51] F. Berezin, "The Method of Second Quantization"(Academic Press, New York, 1966); C. E. I. Carneiro e M. T. Thomaz, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, **22**, 474, (2000).

[52] P. B. Abraham e H. E. Moses, *Phys. Rev.* **A22**, 1333, (1980).

[53] M. Gelfand e B. M. Levitan, *Am. Math. Soc. Transl.* **1**, 153, (1955).

[54] Gláucia R. P. Borges e Elso Drigo Filho, *Rev. Bras. de Ensino de Física,* **21**, 233, (1999). Este trabalho fez parte da tese de mestrado da primeira autora desta Ref., sob a orientação do segundo autor. Existe mais 4 teses de mestrado e 2 de doutorado sobre SUSI MQ, que podem ser encontradas em algumas bibliotecas de Física no Brasil. Uma dissertação de mestrado na UFPB (1988) por Rafael de Lima Rodrigues; 2 dissertações de mestrado no IFT (1989 e 2001) por Elso Drigo Filho e José Lauro Strapasson, respectivamente; 1 dissertação de mestrado no CBPF (2001) por Valter Gomes Lima; duas teses de doutorado, 1 no IFT(1992) por Elso Drigo Filho e 1 na UFRJ (1992) por Rafael de Lima Rodrigues.

[55] W. Kwong e J. L. Rosner, *Prog. of Theor. Phys. Suppl.* **No. 86**, 366, (1986); C. Sukumar, *J. Phys. A: Math. Gen.* **18**, 2937, (1985); A. Khare e U. Sukhatme, *J. Phys. A: Math. Gen.* **22**, 2847, (1989).

[56] R. de Lima Rodrigues, "Abraham-Moses generalized potential via SUSY method", redação final em preparação.

[57] Q. K. K. Liu, *Nucl. Phys.* **A550**, 263, (1992); L. F. Urrutia e E. Hernandez, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 755, (1983).