

CBPF - CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro

Monografia

CBPF-MO-001/10

maio 2010

A Eletrodinâmica de Maxwell-Proca e o Fóton Massivo

Wallace Moreira Herdy

Fundação Técnico Educacional Souza Marques – FTESM
FACULDADE DE FILOSOFIA, CIÊNCIAS E LETRAS

A ELETRODINÂMICA DE MAXWELL-PROCA
E O FÓTON MASSIVO

Wallace Moreira Herdy

Rio de Janeiro
2010

Wallace Moreira Herdy

**A ELETRODINÂMICA DE MAXWELL-PROCA
E O FÓTON MASSIVO**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado à FTESM como requisito parcial
para obtenção do título de Bacharel em Física.

Prof. Orientador: José Abdalla Helayël Neto
Prof. Co-orientador: Elon Martins de Sá

Dedico este trabalho,

Aos meus dedicados pais, Sergio e Cleuza; à minha esposa e companheira Samanta; e ao meu sorridente bebê William; pelo fato de existirem em minha vida.

AGRADECIMENTOS

A Deus, criador de todas as coisas.

Ao professor José Helayël, pesquisador do CBPF, um ser humano especial, que tornou possível este trabalho, e para o qual minhas palavras não são capazes de expressar minha gratidão.

Ao professor Elon Martins, por todo apoio e pelas aulas apaixonadas pela Física.

Ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, pela oportunidade de participar das aulas de Iniciação Científica, e de utilizar sua rica biblioteca.

A Coordenadora do Curso de Física da FTESM, Professora Simone, por todo apoio e compreensão durante nossa jornada.

Aos meus colegas de turma, perseverantes na jornada, Nilton, Pedro e Alfredo.

Aos meus colegas de CBPF, companheiros de Iniciação, Khrissy, Victor e Célio.

“É a teoria que decide o que podemos observar.”

Albert Einstein

RESUMO

O presente trabalho tem como objeto de estudo a interação eletromagnética, tendo como tópico central a discussão de um quantum massivo de radiação. Partindo da possibilidade de um eletromagnetismo no qual a função de Green do campo eletromagnético descreve um fóton massivo, faz-se uma análise da teoria Eletrodinâmica de Maxwell e, comparativamente, da Eletrodinâmica de Maxwell-Proca, abordando com especial destaque a questão da radiação eletromagnética, as leis de conservação e as conseqüências mais imediatas do fóton ter uma massa finita. Exemplifica-se com uma aplicação à supercondutividade, explorando o efeito Meissner. Metodologicamente, a pesquisa baseia-se em pesquisa bibliográfica, e em cursos especiais realizados no CBPF sobre o tratamento matemático dos problemas da propagação de sinais e da radiação emitida por fontes aceleradas. Tem por objetivo servir de base teórica para futuras pesquisas na área, aplicando-o em situações diversas, como por exemplo, na discussão de mecanismos de geração de massa em Teoria Quântica de Campos, e no problema da supercondutividade a altas temperaturas críticas.

Palavras-chave: Teorias eletromagnéticas, Eletrodinâmica de Proca, fóton massivo, supercondutividade, Efeito Meissner.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	A ELETRODINÂMICA DE MAXWELL	12
2.1	As equações de Maxwell	12
2.2	Potenciais e transformações de calibre	14
2.3	Ondas eletromagnéticas no vácuo	17
2.3.1	A equação de onda para o campo \vec{B}	17
2.3.2	A equação de onda para o campo \vec{E}	19
2.3.3	Ondas planas monocromáticas	20
2.4	Leis de conservação	24
2.4.1	Conservação de carga	24
2.4.2	Conservação de energia	26
2.4.3	Conservação de momento	29
2.5	Pressão de radiação	34
2.6	Potencial eletrostático gerado por uma carga pontual	35
3	A ELETRODINÂMICA DE MAXWELL-PROCA	37
3.1	A lei do inverso do quadrado ou a massa do próton	37
3.2	As equações de Maxwell-Proca	38
3.3	Potenciais e a condição subsidiária	40
3.4	Ondas eletromagnéticas no vácuo	41
3.4.1	A equação de onda para o potencial Φ	42
3.4.2	A equação de onda para o potencial \vec{A}	43
3.4.3	Ondas planas monocromáticas	44
3.4.4	O novo parâmetro ξ : interpretação física	46
3.4.5	Relatividade Especial com fóton massivo	47

3.5 Leis de conservação	49
3.5.1 Conservação de carga	49
3.5.2 Conservação de energia	49
3.5.3 Conservação de momento	53
3.6 Pressão de radiação	59
3.7 Potencial eletrostático gerado por uma carga pontual	61
4 APLICAÇÃO DA ELETRODINÂMICA DE MAXWELL-PROCA À SUPERCONDUTIVIDADE	65
4.1 A supercondutividade	65
4.2 Tipos e aplicações	66
4.3 O efeito Meissner	67
4.3.1 A equação de London para o efeito Meissner	68
4.3.2 O efeito Meissner a partir de fótons massivos	70
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	74
REFERÊNCIAS	77

1 INTRODUÇÃO

Uma questão de especial relevância nas teorias físicas é a propagação de perturbações geradas no espaço-tempo por algum tipo de fonte. No caso particular do Eletromagnetismo de Maxwell, um objeto de interesse é o estudo da emissão e propagação dos campos, elétrico e magnético, gerados por cargas, correntes, ou densidades de spin (na verdade momentos magnéticos), e a análise da energia transportada por estes campos.

No entanto, as equações de Maxwell convencionais indicam ser nula a massa do fóton, o quantum portador da interação eletromagnética. Apesar de hoje a Física adotar que a massa de repouso do fóton seja exatamente zero, todos os experimentos realizados para determinar esta massa somente forneceram limites superiores para a mesma. Podem-se indagar, então, quais as evidências existentes para a ausência de massa do fóton, ou, quais as conseqüências decorrentes de uma massa não-nula para esta partícula elementar.

Em 1936, S. J. Plimpton e W. E. Lawton fizeram uma experiência baseada na Lei de Gauss visando determinar se havia um desvio na Lei do inverso do quadrado. Seus dados encontraram um desvio que corresponde a um limite superior para a massa do fóton de $3,5 \cdot 10^{-44} g$ (GONÇALES, 2008, p.35).

Em 1971, E. R. Williams, J. E. Faller e H. A. Hill também fizeram uma experiência de laboratório baseado na Lei de Gauss, e encontraram um limite que

corresponde a um valor limite de $1,6 \cdot 10^{-47} g$ (JACKSON, 1983, p.4). Ou seja, a massa do fóton, em termos de energia, possuindo um limite superior de aproximadamente $1 \cdot 10^{-14} eV$ (PDG, 2008, p. 385).

As medidas do campo magnético da Terra, seja na superfície, ou por observações em satélites, fixam melhores limites para a massa do fóton. Já em 1968, A. S. Goldhaber e M. M. Nieto encontram valores ligeiramente mais precisos, de $2,3 \cdot 10^{-15} eV$ (PDG, 2008, p.385).

Atualmente, considera-se para a massa do fóton o valor limite de $1 \cdot 10^{-18} eV$ (PDG, 2008, p.385), descrito por D. D. Ryutov em 2007, usando um argumento magnetohidrodinâmico relativo ao vento solar para o raio de órbita de Plutão.

Partindo-se, assim, da possibilidade de um eletromagnetismo no qual a radiação esteja associada à existência de um quantum massivo (neste caso, o fóton de massa de repouso não-nula), adota-se como objeto de estudo uma teoria modificada do eletromagnetismo: a teoria de Maxwell-Proca. Para tanto, faz-se uma análise da teoria Eletrodinâmica de Maxwell e, comparativamente, da Eletrodinâmica de Maxwell-Proca, focalizando a atenção na questão da radiação eletromagnética, nas leis de conservação e nas conseqüências mais imediatas do fóton ter uma massa finita.

Para exemplificar o uso da teoria, a aplicação escolhida foi a supercondutividade, pois a eletrodinâmica de Maxwell-Proca tem sido aplicada com sucesso neste objetivo, evitando algumas dificuldades que aparecem na teoria de London (bastante usada no estudo de aspectos macroscópicos da supercondutividade).

A metodologia de trabalho baseia-se em pesquisa bibliográfica, e em cursos especiais realizados no CBPF sobre o tratamento matemático dos problemas da propagação de sinais e da radiação emitida por fontes aceleradas.

O presente estudo tem por objetivo servir de base teórica para futuras pesquisas na área, aplicando-o em situações diversas, como por exemplo, na Teoria Quântica de Campos para descrever bósons vetoriais massivos, na

supercondutividade, na área das interações fracas, ou até mesmo no estudo da esperada partícula de Higgs.

Este trabalho encontra-se organizado como descrito a seguir. No Capítulo 2, procede-se a uma revisão da questão da propagação de ondas eletromagnéticas no vácuo, com a formulação de Maxwell. Em seguida, no Capítulo 3, introduz-se a formulação de Maxwell-Proca para a Eletrodinâmica Clássica, e, se aborda como ponto central, a propagação da radiação eletromagnética livre com fóton massivo. O Capítulo 4 constitui-se numa oportunidade para a aplicação da Eletrodinâmica de Maxwell-Proca na descrição do Efeito Meissner, que ocorre nos materiais supercondutores. As Considerações Finais estão reunidas no Capítulo 5, onde apresentamos alguns pontos finais da comparação entre aspectos das Eletrodinâmicas de Maxwell e Maxwell-Proca.

2 A ELETRODINÂMICA DE MAXWELL

Embora os gregos antigos conhecessem o âmbar e as pedras magnéticas, o desenvolvimento quantitativo da eletrodinâmica data de menos de uma centena de anos. As notáveis experiências de Cavendish sobre eletrostática foram feitas entre 1771 e 1773. As pesquisas monumentais de Coulomb principiaram a ser publicadas em 1785. Estes empreendimentos marcaram o início das experiências quantitativas no terreno da eletricidade e do magnetismo, em escala mundial. Cinquenta anos depois, Faraday estudava os efeitos das correntes elétricas e dos campos magnéticos variáveis. Em 1864, Maxwell publicava o seu famoso artigo sobre a teoria dinâmica do campo eletromagnético (JACKSON, 1983, p.1).

2.1 As equações de Maxwell

James Clerk Maxwell nasceu na Escócia em 1831. De família abastada, formou-se na Universidade de Cambridge, onde teve uma excelente formação matemática.

A leitura das "Pesquisas Experimentais sobre Eletricidade" de Faraday, onde os fenômenos eram descritos na linguagem das linhas de força, inventada por Faraday, impressionou-o fortemente, e ele procurou dar uma formulação matemática às idéias de Faraday desde o seu primeiro trabalho em 1856 (NUSSENZVEIG, 1997, p.263).

Maxwell descreveu sua Teoria Eletromagnética num longo tratado denominado "Treatise on Electricity and Magnetism", publicado em 1873, seis anos antes da sua morte. Em seus trabalhos, Maxwell formulou os resultados em termos dos operadores vetoriais *divergência* e *rotacional*, que haviam sido empregados

anteriormente por Stokes. Segundo HALLIDAY (1994, p.298), este "Tratado de Eletricidade e Magnetismo" é de difícil leitura. Foi Oliver Heaviside (1850-1925), físico inglês, quem muito contribuiu para o esclarecimento da teoria de Maxwell, apresentando-a, na década de 1870, sob a forma das quatro equações conhecidas hoje em dia.

Surgem então as quatro equações que formam a base da teoria eletromagnética, e constituem um conjunto de equações de derivadas parciais que relacionam campos elétricos e magnéticos entre si e suas fontes, densidades de carga e de corrente. Essas equações são válidas para qualquer meio e para campos variáveis no tempo.

Portanto, as equações que governam os fenômenos eletromagnéticos são as equações de Maxwell, que têm a seguinte forma para eventuais fontes no vácuo:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad [\text{lei de Gauss}] \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \quad [\text{lei de Faraday}] \quad (2.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad [\text{sem nome}] \quad (2.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{E} + \mu_0 \vec{j} \quad [\text{lei de Ampère c/ correção}] \quad (2.4)$$

A primeira equação (2.1) é a forma diferencial da lei de Gauss, obtida a partir da lei de Coulomb (onde ρ é a densidade volumétrica de carga e ϵ_0 é a permissividade elétrica do vácuo). A segunda (2.2) é a forma diferencial da lei de indução eletromagnética de Faraday. A terceira (2.3) nos indica que os monopólos magnéticos isolados não são observados na natureza. E a quarta (2.4) é uma extensão da lei de Ampère (onde μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo e \vec{j} é a

densidade de corrente), que inclui o termo $\mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{E}$ como modificação, introduzido por Maxwell e chamado de densidade de corrente de deslocamento.

De acordo com JACKSON (1983, p.169), foi preciso o gênio de J. C. Maxwell, estimulado pelas observações de Faraday, para verificá-las e modificá-las num conjunto coerente que acarretava novos fenômenos físicos, à época desconhecidos, mas que foram subseqüentemente verificados em todos os detalhes pela experimentação. Em virtude deste brilhante feito o conjunto modificado de equações ficou então conhecido, com justeza, como as equações de Maxwell.

Portanto, estas equações não são especulações puramente teóricas, mas foram desenvolvidas para explicar certas experiências cruciais. Todas as conclusões tiradas desse conjunto de quatro equações são verificadas experimentalmente.

Elas, juntamente com a lei da força,

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (2.5)$$

e a equação de continuidade que expressa a conservação da carga elétrica,

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0, \quad (2.6)$$

resumem todo o conteúdo teórico da Eletrodinâmica Clássica.

2.2 Potenciais e transformações de calibre

Muitas vezes, é conveniente introduzir potenciais, obtendo um número menor de equações de segunda ordem, satisfazendo identicamente a alguma das equações de Maxwell. Este conceito é oriundo diretamente da eletrostática e da magnetostática, onde usamos o potencial escalar, Φ , e o potencial vetor, \vec{A} .

Definindo os campos em função dos potenciais:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \partial_t\vec{A} \quad (2.7)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (2.8)$$

A definição de \vec{B} e \vec{E} em função dos potenciais Φ e \vec{A} , satisfaz identicamente às duas equações homogêneas de Maxwell.

No entanto, segundo THIDÉ (1997, p.37), existe uma importante diferença entre as duas aproximações: na Eletrodinâmica Clássica as quantidades observáveis diretamente são somente os próprios campos (e as quantidades derivadas deles) e não os potenciais. Por outro lado, o tratamento torna-se significativamente mais simples se usarmos os potenciais nos nossos cálculos, e então, no estágio final, usarmos as equações acima (2.7 e 2.8) para calcular os campos ou as quantidades físicas expressadas nos campos.

Uma vez que \vec{B} está definido em termos de \vec{A} , o potencial vetor é arbitrário, na medida em que se pode adicionar qualquer campo vetorial cujo rotacional desapareça sem mudar a física. Logo, o vetor potencial é determinado adicionando o gradiente de uma função escalar. Assim, \vec{B} fica invariante sob a transformação

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\Lambda \quad (2.9)$$

Pode-se expressar o campo elétrico em termos da mudança de potencial:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla}\Phi' - \partial_t\vec{A}' = \\ &= -\vec{\nabla}\Phi' - \partial_t(\vec{A} + \nabla\Lambda) = \\ &= -\vec{\nabla}(\Phi' + \partial_t\Lambda) - \partial_t\vec{A} \end{aligned}$$

Logo, para que o campo elétrico permaneça também invariante, o potencial escalar deve ser simultaneamente transformado com a derivada temporal da mesma função, de acordo com:

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi - \frac{1}{c} \partial_t \Lambda \quad (2.10)$$

Essas transformações (Eq. 2.9 e 2.10) são denominadas *transformações de calibre* (ou transformações de gauge). Como são os campos, e não os potenciais, que possuem significado físico, diz-se que os campos vetoriais são invariantes sob as transformações de calibre. Logo, a invariância sob estas transformações é a *invariância de calibre*.

As transformações são úteis para a reformulação das equações em uma forma mais elegante. Embora muitas escolhas de calibre possam ser feitas, pode-se escolher um conjunto de potenciais de modo que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \partial_t \Phi = 0 \quad (2.11)$$

Essa escolha freqüentemente usada na eletrodinâmica é conhecida como *condição de Lorentz* e especifica o *calibre de Lorentz* dos potenciais. Inserindo estas definições nas equações de Maxwell, produz-se o desacoplamento desejado. Têm-se então duas equações de onda não-homogêneas:

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.12)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \quad (2.13)$$

Essas equações juntamente com a condição de Lorentz (Eq. 2.11), formam um conjunto de equações equivalente às equações de Maxwell. O *calibre de Lorentz* é usado comumente, pois leva às equações de onda que tratam Φ e \vec{A} em pé de igualdade, e porque independe do sistema de coordenadas escolhido enquadrando-se assim naturalmente nas considerações da Relatividade Restrita.

A invariância do eletromagnetismo sob transformações de calibre tem profundas conseqüências na Eletrodinâmica Quântica. Em particular, a *simetria de calibre* permite a existência de um portador de massa zero do campo eletromagnético.

2.3 Ondas eletromagnéticas no vácuo

No vácuo, em cada ponto, a densidade volumétrica de carga é nula, $\rho = 0$. Do mesmo modo, a condutividade é zero, $\sigma = 0$. Como a condutividade é zero, a densidade de corrente também será, visto que $\vec{j} = \sigma \vec{E}$. Desse modo as equações de Maxwell se reduzem a:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (2.14)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \quad (2.15)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.16)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \vec{E} \quad (2.17)$$

2.3.1 A equação de onda para o campo \vec{B}

Objetivando encontrar a equação de onda para o campo \vec{B} , inicialmente arrumando a Eq. 2.17, tem-se:

$$\partial_t \vec{E} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} \quad (2.18)$$

Derivando a Eq. 2.15, encontra-se:

$$\vec{\nabla} \times \partial_t \vec{E} = -\partial_t^2 \vec{B} \quad (2.19)$$

Substituindo-se a Eq. 2.18 em 2.19, obtém-se:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\mu_0 \varepsilon_0 \partial_t^2 \vec{B}$$

Das identidades vetoriais, lembra-se que

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad (2.20)$$

Então, para o campo \vec{B} , fica:

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = -\mu_0 \varepsilon_0 \partial_t^2 \vec{B}$$

Da Eq. 2.16 sabe-se que $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$.

Conclui-se que:

$$\mu_0 \varepsilon_0 \partial_t^2 \vec{B} - \nabla^2 \vec{B} = \vec{0} \quad \rightarrow \quad (\mu_0 \varepsilon_0 \partial_t^2 - \nabla^2) \vec{B} = \vec{0} \quad (2.21)$$

Verifica-se que é uma equação de onda vetorial. O campo magnético \vec{B} satisfaz a equação de onda unidimensional

$$\left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) f = 0$$

Portanto, a velocidade de propagação é $\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$.

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \quad (2.22)$$

Esta grandeza tem as dimensões da velocidade e é a velocidade da luz no vácuo. ε_0 e μ_0 são obtidos por medidas puramente eletromagnéticas (força coulombiana entre cargas e força magnética entre correntes). É uma grandeza fundamental para todos os fenômenos eletromagnéticos e relativísticos. Com as nossas unidades de comprimento e de tempo, definidas hoje separadamente em termos de duas transições atômicas diferentes, este parâmetro tem o valor empírico, $c = 299792458$ m/s (PDG, 2008, p.103).

Desse fato, Maxwell foi levado a concluir que as ondas eletromagnéticas se propagam no vácuo com a velocidade da luz e que a propagação da luz é um caso

particular da propagação das ondas eletromagnéticas. Segundo NUSSENZVEIG, Maxwell escreve que é difícil evitar a inferência de que a luz consiste nas ondulações transversais do mesmo meio que é a causa dos fenômenos elétricos e magnéticos (1997, p.271).

Este foi um dos grandes momentos da história da física. A ótica passava a tornar-se um ramo do eletromagnetismo. Os trabalhos de Maxwell foram confirmados pelas experiências de Hertz (1889).

2.3.2 A equação de onda para o campo \vec{E}

Objetivando encontrar a equação de onda para o campo \vec{E} , inicialmente arrumando a Eq. 2.15, tem-se:

$$\partial_t \vec{B} = -\vec{\nabla} \times \vec{E} \quad (2.23)$$

Derivando a Eq. 2.17, encontra-se:

$$\vec{\nabla} \times \partial_t \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t^2 \vec{E} \quad (2.24)$$

Substituindo a Eq. 2.22 em 2.23, e incluindo c , obtém-se:

$$-\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{E}$$

Usando a mesma identidade vetorial (Eq. 2.20), tem-se para o campo \vec{E} :

$$-\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) + \nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{E}$$

Da Eq. 2.14 sabe-se que $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$.

Conclui-se que:

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{E} - \nabla^2 \vec{E} = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2 \right) \vec{E} = \vec{0} \quad (2.25)$$

Onde também se verifica que o campo elétrico \vec{E} satisfaz uma equação de onda unidimensional, também com velocidade de propagação, c , no vácuo.

Fazendo-se a substituição para utilização do termo d'Alembertiano (\square), pode-se representar de forma simplificada as equações de onda para os campos \vec{E} e \vec{B} .

$$\square \vec{E} = \vec{0} \quad \text{e} \quad \square \vec{B} = \vec{0}$$

2.3.3 Ondas planas monocromáticas

A solução geral de uma equação de onda unidimensional é a combinação de funções arbitrárias de variáveis $(x + ct)$ e $(x - ct)$.

$$f(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct)$$

Fisicamente, F representa um perfil qualquer de onda propagando-se no sentido de x positivo (onda caminhante progressiva) e G uma onda em sentido oposto (onda caminhante regressiva). Considerando-se a solução que se propaga no sentido positivo do eixo x , tem-se que especificar a dependência da variável $(x - ct)$.

De todas as formas de onda possíveis, a forma mais simples é o caso especial de uma variação senoidal com o tempo (mais estritamente co-senoidal). Esta dependência é oscilatória, com uma dada frequência angular, ω . Desde que diferentes frequências na faixa visível correspondem a diferentes cores, essas ondas são chamadas monocromáticas. Supondo que as ondas se propagam na direção x , e não tem nenhuma dependência em y ou z , são chamadas ondas planas.

Então, propondo como solução para a equação de onda do campo \vec{E} as ondas planas monocromáticas, temos que:

$$\vec{E}(t; \vec{x}) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t), \quad (2.26)$$

onde \vec{k} é o vetor de onda ou vetor de propagação.

Sendo periódica no tempo e no espaço, tem-se que o período temporal é $T = \frac{2\pi}{\omega}$, a frequência é $\nu = \frac{1}{T}$, e o período espacial é o comprimento de onda $\lambda = cT$.

Utilizando-se a equação de onda do campo \vec{E} (Eq. 2.25), tem-se que:

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 [\vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)] - \nabla^2 [\vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)] = \vec{0}$$

Resolvendo-se as derivadas,

$$\left(-\frac{\omega^2}{c^2} + \vec{k}^2 \right) [\vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)] = \vec{0}$$

Como o termo $\vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)$ não pode ser zero (0), então:

$$-\frac{\omega^2}{c^2} + \vec{k}^2 = 0$$

Logo, chega-se à chamada relação de dispersão:

$$\omega^2 = \vec{k}^2 c^2 \quad (2.27)$$

Em particular, sendo $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ e $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ (Eq. 2.14 e 2.16) segue que

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot [\vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)] &= 0 \\ \rightarrow (-\vec{E}_0 \cdot \vec{k}) [\sin(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)] &= 0 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\vec{E}_0 \cdot \vec{k} = 0 \quad (2.28)$$

Isto é, o campo elétrico é perpendicular à direção de propagação.

De modo análogo,

$$\vec{B}_0 \cdot \vec{k} = 0 \quad (2.29)$$

Ou seja, as ondas eletromagnéticas planas são ondas transversais. Além de ser transversal à direção de propagação, o campo elétrico nas soluções encontradas permanece sempre num mesmo plano. Diz-se que a onda é *linearmente polarizada*.

Pode-se generalizar a propagação da onda plana monocromática em uma direção arbitrária. A notação é facilitada pelo vetor de propagação \vec{k} , apontando na direção da propagação, cuja magnitude é o número de onda k . O produto escalar $\vec{k} \cdot \vec{x}$ é a apropriada generalização de kx , logo

$$\vec{E}(t; \vec{x}) = E_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t + \delta) \hat{n},$$

onde \hat{n} é o versor de polarização. O parâmetro inserido δ é a constante de fase. Se $\delta = 0$, o pico máximo passa na origem em $t = 0$.

Da lei de Faraday (Eq. 2.15) tem-se $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$.

Isso implica uma relação entre o campo elétrico e o campo magnético.

$$\begin{aligned} \vec{k} \times \vec{E}_0 &= \omega \vec{B}_0 \\ \rightarrow |\vec{k}| \hat{k} \times \vec{E}_0 &= c |\vec{k}| \vec{B}_0 \\ \rightarrow (\hat{k} \times \vec{E}_0) &= c \vec{B}_0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

Evidentemente, \vec{E} e \vec{B} estão em fase e são mutuamente perpendiculares. Suas amplitudes são relacionadas por:

$$|\vec{E}_0| = c |\vec{B}_0| \quad (2.31)$$

Os campos, elétrico e magnético, na onda plana monocromática com vetor de propagação \vec{k} e polarização \hat{n} são:

$$\vec{E}(t; \vec{x}) = E_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t + \delta) \hat{n} \quad (2.32)$$

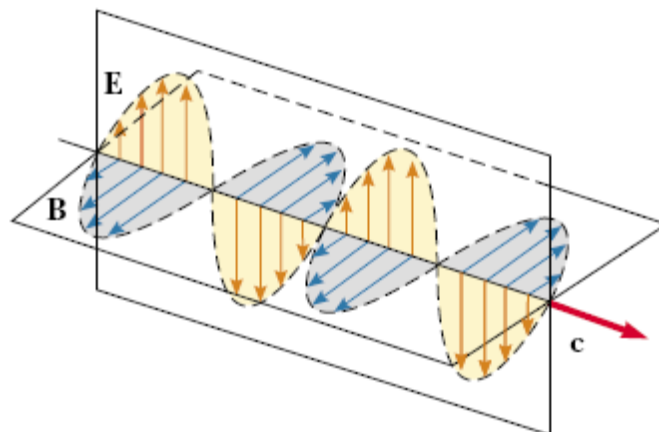
$$\vec{B}(t; \vec{x}) = \frac{1}{c} E_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t + \delta) (\hat{k} \times \hat{n}) \quad (2.33)$$

Relembrando, algumas conclusões importantes são as seguintes:

As ondas eletromagnéticas são ondas planas e propagam-se no vácuo com a velocidade da luz.

Os campos, elétrico e magnético, \vec{E} e \vec{B} são perpendiculares à direção de propagação da onda, e variam senoidalmente. Isso significa que a onda é uma *onda transversal*.

O campo elétrico é perpendicular ao campo magnético.



Representação de uma senoidal, onda eletromagnética plana polarizada linearmente. Um “instantâneo” do campo elétrico e do campo magnético em vários pontos sobre o eixo x , pelos quais a onda passa com velocidade c . (Extraído do livro *Fundamentos de Física: Eletromagnetismo* de Halliday, Resnick, Walker).

2.4 Leis de Conservação

Equações de continuidade descrevem leis de conservação, sempre com a densidade de uma grandeza e o fluxo que descreve o movimento dessa grandeza.

2.4.1 Conservação de carga

A conservação de carga é o paradigma para todas as leis de conservação. Ela pode ser derivada das equações de Maxwell, não sendo uma suposição independente, mas uma consequência das leis da eletrodinâmica.

Deriva-se a Eq. 2.1,

$$\vec{\nabla} \cdot \partial_t \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \partial_t \rho \quad (2.34)$$

E aplica-se o divergente na Eq. 2.4,

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \partial_t \vec{E} + \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j}$$

Das identidades vetoriais, lembra-se que $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$

Portanto:

$$\mu_0 \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \partial_t \vec{E} + \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (2.35)$$

Substituindo a Eq. 2.34 em 2.35, tem-se,

$$\mu_0 \partial_t \rho + \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

E dividindo por μ_0 ,

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (2.36)$$

Esta é a equação de continuidade (2.36) que descreve a conservação da carga elétrica. O que precisamente a conservação de carga nos diz? Que a carga total do universo é constante? Claro que é uma conservação global de carga. Mas a conservação local de carga é uma declaração muito mais interessante.

Considerando um volume:

$$\int_v d^3\vec{x} \partial_t \rho(t; \vec{x}) + \int_v d^3\vec{x} \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(t; \vec{x}) = 0$$

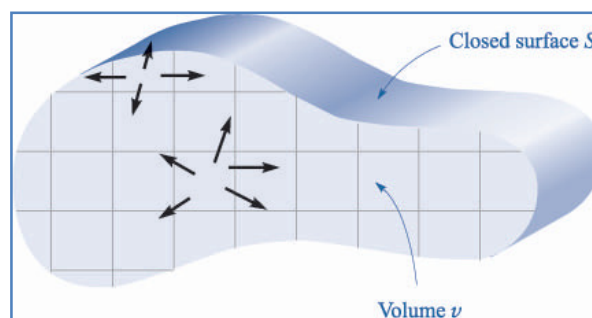
Pode-se retirar a derivada da integral.

$$\frac{d}{dt} \int_v d^3\vec{x} \rho(t; \vec{x}) + \int_v d^3\vec{x} \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(t; \vec{x}) = 0$$

Quando a derivada sai da integral em função de bom comportamento da função, a derivada parcial vira uma derivada comum. Isso porque a integral é no volume, ou seja, como se fosse uma integral definida.

Pela propriedade do divergente

$$\int_{\text{volume interior}} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV = \int_{\text{superfície fechada}} \vec{A} \cdot \vec{n} da$$



O teorema da divergência estabelece que o fluxo total que atravessa uma superfície fechada é igual à integral da divergência da densidade de fluxo por todo um volume fechado. O volume é mostrado aqui em seção transversal (extraído do livro *Eletromagnetismo* de William H. Hayt).

Logo,

$$\frac{d}{dt} \int_v d^3\vec{x} \rho(t; \vec{x}) + \int_s d\vec{\Sigma} \cdot \vec{j}(t; \vec{x}) = 0$$

Ou seja,

$$\frac{d}{dt} Q_v(t) + \int_s d\vec{\Sigma} \cdot \vec{j}(t; \vec{x}) = 0 \quad (2.37)$$

Quando $Q_v(t)$ aumenta (derivada positiva), então a integral de superfície é negativa.

Quando $Q_v(t)$ diminui (derivada negativa), então a integral de superfície é positiva.

Se a carga total no volume muda, então exatamente a mesma quantidade de carga deve passar para dentro ou para fora através da superfície. Portanto a equação de continuidade é uma declaração matematicamente precisa da conservação local de carga.

2.4.2 Conservação de energia

Pode-se construir uma equação correspondente para a conservação de energia.

Multiplica-se a Eq. 2.2 pelo campo \vec{B}

$$\vec{B} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{B} \cdot \partial_t \vec{B} \quad (2.38)$$

E a Eq. 2.4 pelo campo \vec{E}

$$\vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{E} \cdot \partial_t \vec{E} + \mu_0 \vec{E} \cdot \vec{j} \quad (2.39)$$

Subtraindo a Eq. 2.38 de 2.39, tem-se:

$$\vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} - \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{1}{c^2} \vec{E} \cdot \partial_t \vec{E} + \vec{B} \cdot \partial_t \vec{B} + \mu_0 \vec{E} \cdot \vec{j} \quad (2.40)$$

Resolvendo o lado esquerdo da Eq. 2.40:

$$\begin{aligned} & E_i \varepsilon_{ijk} \partial_j B_k - B_i \varepsilon_{ijk} \partial_j E_k \quad (\text{trocando } i \text{ por } k \text{ no segundo termo}) \\ &= E_i \varepsilon_{ijk} \partial_j B_k - B_k \varepsilon_{kji} \partial_j E_i \quad (\text{transportando os índices}) \\ &= E_i \varepsilon_{ijk} \partial_j B_k + B_k \varepsilon_{ijk} \partial_j E_i = \varepsilon_{ijk} (E_i \partial_j B_k + B_k \partial_j E_i) = \\ &= \varepsilon_{ijk} \partial_j (E_i B_k) = \partial_j (\varepsilon_{ijk} E_i B_k) = -\partial_j (\varepsilon_{jik} E_i B_k) = \\ &= -\partial_j (\vec{E} \times \vec{B})_j = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Para resolver o lado direito da Eq. 2.40, utiliza-se a propriedade da derivada do produto:

$$\partial_t (\vec{v} \cdot \vec{v}) = \partial_t \vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \partial_t \vec{v} = 2\vec{v} \cdot \partial_t \vec{v}$$

De onde se tira que:

$$\vec{v} \cdot \partial_t \vec{v} = \frac{\partial_t (\vec{v} \cdot \vec{v})}{2}$$

Portanto, o termo da direita fica:

$$\frac{1}{c^2} \vec{E} \cdot \partial_t \vec{E} + \vec{B} \cdot \partial_t \vec{B} + \mu_0 \vec{E} \cdot \vec{j} = \partial_t \left(\frac{1}{2c^2} \vec{E} \cdot \vec{E} + \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{B} \right) + \mu_0 \vec{E} \cdot \vec{j} \quad (2.42)$$

Substituindo 2.41 e 2.42 em 2.40, tem-se então toda a equação:

$$-\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \partial_t \left(\frac{1}{2c^2} \vec{E} \cdot \vec{E} + \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{B} \right) + \mu_0 \vec{E} \cdot \vec{j}$$

Arrumando-se os termos, substituindo c e dividindo-se por μ_0 , chega-se a:

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right) + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \right) = -\vec{j} \cdot \vec{E} \quad (2.43)$$

Esta é a equação de conservação de energia. O termo $\frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2$ é a densidade de energia armazenada em um campo elétrico, e o termo $\frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2$ é a densidade de energia armazenada em um campo magnético. Tem-se então a densidade de energia armazenada no campo eletromagnético:

$$U_{em} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \quad (2.44)$$

O termo onde é aplicado o divergente expressa a densidade de fluxo de energia transportada pelo campo eletromagnético, denominado Vetor de Poynting, em homenagem ao físico John Henry Poynting (1852-1914), o primeiro a discutir suas propriedades.

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \quad \text{vetor de Poynting} \quad (2.45)$$

Interessante observar que a direção do vetor de Poynting, \vec{S} , de uma onda eletromagnética em um ponto qualquer indica a direção de propagação da onda e a direção de transporte de energia nesse ponto. O vetor de Poynting tem dimensão de (energia / área.tempo).

O último termo da Eq. 2.43 ($-\vec{j} \cdot \vec{E}$) é a energia dissipada por efeito Joule, referindo-se ao campo realizando trabalho e perdendo sua energia para a matéria.

Tem-se então o teorema de Poynting:

$$\partial_t U_{em} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E} \quad (2.46)$$

De acordo com JACKSON (1983, p.184), o significado físico para toda a equação é o de que a taxa temporal de variação da energia eletromagnética num certo volume, mais a energia que flui através das superfícies fronteiras do volume

por unidade de tempo, é igual ao negativo do trabalho total realizado pelos campos sobre as fontes dentro do volume. Este é o enunciado da conservação de energia.

Portanto, uma onda eletromagnética pode transportar energia de ponto para ponto de uma região do espaço. Vemos também que, para que haja propagação de energia eletromagnética, torna-se necessária a existência dos dois campos \vec{E} e \vec{B} , que não deverão ser paralelos, conforme indicado pelo vetor de Poynting (Eq. 2.45).

No vácuo, tem-se:

$$\partial_t U_{em} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0$$

E, analogamente ao realizado para carga,

$$\frac{d}{dt} E_{em}^v(t) + \oint_S d\vec{\Sigma} \cdot \vec{S} = 0$$

Se uma carga elétrica estiver em repouso, não produzirá um campo magnético e, assim, no caso eletrostático, não há propagação de onda eletromagnética. Se uma carga tiver velocidade constante, os campos elétrico e magnético se moverão conjuntamente com a carga, e a energia eletromagnética armazenada no campo permanecerá sempre a mesma. Podemos concluir então que só quando uma carga estiver acelerada radiará energia.

2.4.3 Conservação de momento

Para obter-se uma equação de conservação para o momento na teoria de Maxwell, procura-se partir da derivada temporal do vetor de Poynting (Eq. 2.45).

$$\partial_t \vec{S} = ?$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \quad \rightarrow \quad S_i = \frac{1}{\mu_0} \varepsilon_{ijk} E_j B_k$$

$$\partial_t S_i = \frac{1}{\mu_0} \varepsilon_{ijk} \partial_t (E_j B_k) = \frac{1}{\mu_0} \varepsilon_{ijk} (\partial_t E_j) B_k + \frac{1}{\mu_0} \varepsilon_{ijk} E_j (\partial_t B_k) \quad (2.47)$$

Da Eq. 2.4 tira-se:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \vec{E} + \mu_0 \vec{j} \quad \rightarrow \quad (\vec{\nabla} \times \vec{B})_j = \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t E_j + \mu_0 j_j$$

$$\varepsilon_{jmn} \partial_m B_n = \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t E_j + \mu_0 j_j \quad \rightarrow \quad \partial_t E_j = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \varepsilon_{jmn} \partial_m B_n - \frac{1}{\varepsilon_0} j_j \quad (2.48)$$

E da Eq. 2.2 tira-se:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \quad \rightarrow \quad (\vec{\nabla} \times \vec{E})_k = -\partial_t B_k$$

$$\varepsilon_{kmn} \partial_m E_n = -\partial_t B_k \quad \rightarrow \quad \partial_t B_k = -\varepsilon_{kmn} \partial_m E_n \quad (2.49)$$

Substituindo 2.47 e 2.48 na Eq. 2.47, tem-se:

$$\partial_t S_i = \frac{1}{\mu_0} \varepsilon_{ijk} \left(\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \varepsilon_{jmn} \partial_m B_n - \frac{1}{\varepsilon_0} j_j \right) B_k + \frac{1}{\mu_0} \varepsilon_{ijk} E_j (-\varepsilon_{kmn} \partial_m E_n) \quad (2.50)$$

Resolvendo o primeiro termo da Eq. 2.50:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} \varepsilon_{ijk} \left(\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \varepsilon_{jmn} \partial_m B_n - \frac{1}{\varepsilon_0} j_j \right) B_k &= \frac{1}{\mu_0^2 \varepsilon_0} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jmn} (\partial_m B_n) B_k - \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \varepsilon_{ijk} j_j B_k \\ &= -\frac{1}{\mu_0^2 \varepsilon_0} \varepsilon_{ikj} \varepsilon_{jmn} (\partial_m B_n) B_k - \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} (\vec{j} \times \vec{B})_i = \\ &= -\frac{1}{\mu_0^2 \varepsilon_0} (\delta_{im} \delta_{kn} - \delta_{in} \delta_{km}) (\partial_m B_n) B_k - \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} (\vec{j} \times \vec{B})_i = \\ &= -\frac{1}{\mu_0^2 \varepsilon_0} (\partial_i B_k) B_k + \frac{1}{\mu_0^2 \varepsilon_0} (\partial_k B_i) B_k - \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} (\vec{j} \times \vec{B})_i \end{aligned} \quad (2.51)$$

Lembrando-se as propriedades das derivadas, sabe-se que,

$$\partial_i B_k^2 = 2B_k (\partial_i B_k) \quad \rightarrow \quad B_k (\partial_i B_k) = \frac{1}{2} \partial_i B_k^2 \quad (2.52)$$

E que,

$$\partial_k (B_i B_k) = (\partial_k B_i) B_k + B_i (\partial_k B_k) \rightarrow$$

$$(\partial_k B_i) B_k = \partial_k (B_i B_k) - B_i (\partial_k B_k) \quad (2.53)$$

Fazem-se então as substituições das Eq. 2.52 e 2.53 em 2.51:

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{\mu_0^2 \varepsilon_0} \frac{1}{2} \partial_i B_k^2 + \frac{1}{\mu_0^2 \varepsilon_0} [\partial_k (B_i B_k) - B_i (\partial_k B_k)] - \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} (\vec{j} \times \vec{B})_i = \\ &= -\frac{1}{\mu_0^2 \varepsilon_0} \partial_i \left(\frac{1}{2} B_k^2 \right) + \frac{1}{\mu_0^2 \varepsilon_0} [\partial_k (B_i B_k) - B_i (\vec{\nabla} \cdot \vec{B})] - \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} (\vec{j} \times \vec{B})_i \end{aligned}$$

Como $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ (Eq. 2.3), o primeiro termo da Eq. 2.50 fica:

$$= -\frac{1}{\mu_0^2 \varepsilon_0} \partial_i \left(\frac{1}{2} B_k^2 \right) + \frac{1}{\mu_0^2 \varepsilon_0} \partial_k (B_i B_k) - \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} (\vec{j} \times \vec{B})_i \quad (2.54)$$

Resolvendo o segundo termo da Eq. 2.50:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\mu_0} \varepsilon_{ijk} E_j (-\varepsilon_{kmn} \partial_m E_n) = -\frac{1}{\mu_0} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} E_j (\partial_m E_n) = \\ &= -\frac{1}{\mu_0} (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) E_j (\partial_m E_n) \\ &= -\frac{1}{\mu_0} E_n (\partial_i E_n) + \frac{1}{\mu_0} E_m (\partial_m E_i) \end{aligned} \quad (2.55)$$

Lembrando-se as propriedades das derivadas, sabe-se que,

$$E_n (\partial_i E_n) = \frac{1}{2} \partial_i E_n^2 \quad (2.56)$$

E que,

$$E_m (\partial_m E_i) = \partial_m (E_m E_i) - (\partial_m E_m) E_i \quad (2.57)$$

Fica, então, inserindo 2.56 e 2.57 em 2.55:

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\mu_0} \partial_i \left(\frac{1}{2} E_n^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} [\partial_m (E_m E_i) - (\partial_m E_m) E_i] = \\
&= -\frac{1}{\mu_0} \partial_i \left(\frac{1}{2} E_n^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} [\partial_m (E_m E_i) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})_m E_i]
\end{aligned}$$

Como $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (Eq. 2.1), e trocando os índices, o segundo termo da Eq.

2.50 fica:

$$= -\frac{1}{\mu_0} \partial_i \left(\frac{1}{2} E_k^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \partial_k (E_k E_i) - \frac{\rho}{\mu_0 \epsilon_0} E_i \quad (2.58)$$

Juntando os termos, as Eq. 2.54 e 2.58 na Eq. 2.50, tem-se:

$$\begin{aligned}
\partial_t S_i &= -\frac{1}{\mu_0^2 \epsilon_0} \partial_i \left(\frac{1}{2} B_k^2 \right) + \frac{1}{\mu_0^2 \epsilon_0} \partial_k (B_i B_k) - \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} (\vec{j} \times \vec{B})_i - \\
&\quad - \frac{1}{\mu_0} \partial_i \left(\frac{1}{2} E_k^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \partial_k (E_k E_i) - \frac{\rho}{\mu_0 \epsilon_0} E_i = \\
&= -\partial_i \left(\frac{1}{2\mu_0^2 \epsilon_0} \vec{B}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{E}^2 \right) + \partial_k \left(\frac{1}{\mu_0^2 \epsilon_0} B_k B_i + \frac{1}{\mu_0} E_k E_i \right) - \\
&\quad - \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} (\vec{j} \times \vec{B})_i - \frac{\rho}{\mu_0 \epsilon_0} E_i
\end{aligned}$$

Ajeitando e dividindo tudo por c^2 , tem-se:

$$\frac{1}{c^2} \partial_t S_i + \partial_i \left(\frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 + \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 \right) + \partial_k \left(-\frac{1}{\mu_0} B_k B_i - \epsilon_0 E_k E_i \right) = -(\vec{j} \times \vec{B})_i - \rho E_i$$

Sabendo-se que $\partial_i = \partial_k \delta_{ki}$

$$\frac{1}{c^2} \partial_t S_i + \partial_k \left(\delta_{ki} U_{em} - \epsilon_0 E_k E_i - \frac{1}{\mu_0} B_k B_i \right) = -\rho E_i - (\vec{j} \times \vec{B})_i \quad (2.59)$$

O termo $\left(\delta_{ki} U_{em} - \epsilon_0 E_k E_i - \frac{1}{\mu_0} B_k B_i \right)$ é um tensor de tensões ou tensor de cisalhamento $T_{ki} = T_{ik}$. É chamado de tensor de tensões de Maxwell. Portanto:

$$\frac{1}{c^2} \partial_t S_i + \partial_k T_{ki} = -(\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B})_i$$

O termo $(\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B})$ é a densidade volumétrica de força eletromagnética (Força de Coulomb – Lorentz).

$$\frac{1}{c^2} \partial_t \vec{S} + \vec{\nabla} \cdot \vec{T} = \vec{F}_{Coulomb-Lorentz} \quad (2.60)$$

O significado para toda a equação é o de que a taxa temporal de variação do momento armazenado num certo volume, mais o fluxo de momento que flui através das superfícies fronteiras do volume por unidade de tempo, é igual à força eletromagnética dos campos. De acordo com a segunda lei de Newton, a força em um objeto é igual à razão de mudança do seu momento. Esta é a equação de conservação de momento na eletrodinâmica.

Segundo GRIFFITHS (1999, p.353), fisicamente, \vec{T} é a força por unidade de área (ou tensão) atuando na superfície. Mais precisamente, T_{ij} é a força (por unidade de área) na (i^a) i -ésima direção atuando em um elemento de superfície orientado na (j^a) j -ésima direção. Elementos diagonais (T_{xx}, T_{yy}, T_{zz}) representam pressões, e elementos não-diagonais (T_{xy}, T_{xz}, etc) são cisalhamentos.

Evidentemente, \vec{T} é a densidade de fluxo de momento, similar à densidade de corrente na conservação de carga (\vec{j}), e à densidade de fluxo de energia (\vec{S}) no teorema de Poynting. Nota-se que o vetor de Poynting aparece em duas diferentes leis: no teorema de Poynting (Eq. 2.46), \vec{S} é a energia por unidade de área, por unidade de tempo, transportado pelo campo eletromagnético; enquanto que aqui (Eq. 2.60) $\frac{1}{c^2} \vec{S}$ é o momento por unidade de volume armazenado no campo. Similarmente, \vec{T} é a tensão eletromagnética (força por unidade de área) atuando na superfície, e descreve o fluxo de momento (a densidade de “corrente” de momento) transportado pelo campo.

Concentrando-se nos campos \vec{E} e \vec{B} , e deixando explícito todas as cargas e correntes em ρ e \vec{j} , excluímos toda a energia e momento “mecânicos” associados, por exemplo, com movimento ou polarização de átomos ou moléculas ou de suas partes constituintes.

2.5 Pressão de Radiação

Se as ondas eletromagnéticas possuem momento linear, isso significa que podem exercer uma pressão sobre um objeto. Isto é chamado de pressão de radiação.

Partindo-se do vetor de Poynting (Eq. 2.45), chega-se à energia média transportada, ou seja, à média temporal $\langle \vec{S} \rangle$ de \vec{S} , tomada sobre um período (ou, o que é equivalente, um número qualquer de períodos).

Atribuindo-se que,

$$\vec{E}(t; \vec{x}) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) \quad \text{e} \quad \vec{B}(t; \vec{x}) = \vec{B}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)$$

e lembrando-se que,

$$c|\vec{B}_0| = |\vec{E}_0| \quad (\text{Eq. 2.31}) \quad \text{e} \quad \vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \quad (\text{Eq. 2.45})$$

Tem-se que:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} [\vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)] \times [\vec{B}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)]$$

Assim,

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} E_0 B_0 \hat{k} = \frac{1}{2\mu_0 c} E_0^2 \hat{k} \quad (2.61)$$

A intensidade, I , da onda eletromagnética é definida como o valor médio da energia eletromagnética, por unidade de tempo, que atravessa uma área unitária, normal à direção de propagação, \hat{k} .

$$I = \langle \vec{S} \rangle \hat{k} = \frac{1}{2\mu_0 c} E_0^2 \quad (2.62)$$

E a pressão de radiação é $\frac{I}{c}$ para quando a radiação é totalmente absorvida pelo corpo.

$$P_r(abs) = \frac{1}{2\mu_0 c^2} E_0^2 \quad (2.63)$$

Em vez de ser absorvida, a radiação pode ser refletida pelo objeto, ou seja, pode ser emitida novamente. Se a radiação é totalmente refletida e a incidência é perpendicular o módulo da variação do momento é duas vezes maior que no caso anterior. Da mesma forma, um objeto sofre uma variação de momento duas vezes maior quando uma bola de tênis perfeitamente elástica se choca com ele do que quando é atingido por uma bola perfeitamente inelástica (uma bola feita de massa de modelar, digamos) com a mesma massa e velocidade.

A pressão de radiação é $2\frac{I}{c}$ para quando a radiação é totalmente refletida pelo objeto e a incidência é perpendicular.

$$P_r(ref) = \frac{1}{\mu_0 c^2} E_0^2 \quad (2.64)$$

2.6 Potencial eletrostático gerado por uma carga pontual

Tem-se a Eq. 2.1, a lei de Gauss: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

Para uma carga q puntiforme,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0} \delta^3(\vec{x})$$

Como na eletrostática $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$, tem-se

$$-\nabla^2 \Phi = \frac{q}{\epsilon_0} \delta^3(\vec{x})$$

Utilizando-se a função de Green do operador Laplaciano,

$$\nabla^2 \left(-\frac{1}{4\pi|\vec{x}|} \right) = \delta^3(\vec{x})$$

tem-se que:

$$\nabla^2 \left(-\frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{x}|} \right) = \frac{q}{\epsilon_0} \delta^3(\vec{x})$$

Assim, tem-se o potencial eletrostático de uma carga q situada no ponto \vec{x} .

Considerando-se $|\vec{x}| = r$, portanto

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (2.65)$$

Isto representa o trabalho por unidade de carga necessário para trazer uma carga de prova desde uma distância infinita até uma distância r da carga q .

Da eletrostática vê-se que o campo elétrico devido a uma carga puntiforme é:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad (2.66)$$

Note que o potencial eletrostático de uma carga cai com $\frac{1}{r}$, em lugar da conhecida lei do quadrado da distância $\frac{1}{r^2}$, referente ao campo.

3 A ELETRODINÂMICA DE MAXWELL-PROCA

3.1 A lei do inverso do quadrado, ou a massa do fóton

As equações de Maxwell convencionais e a lagrangeana estão baseadas na hipótese de ser nula a massa do fóton. No entanto, podem-se indagar quais as evidências existentes para a ausência de massa do fóton ou, de forma equivalente, para a validade da lei da força de Coulomb do inverso do quadrado, e quais as conseqüências decorrentes de uma massa não-nula.

A dependência entre a força eletrostática e a distância segue uma lei do inverso do quadrado, conforme Cavendish e Coulomb mostraram quantitativamente. Mediante a lei de Gauss e o teorema da divergência, chega-se à primeira das equações de Maxwell. As experiências originais tinham uma precisão de apenas alguns poucos por cento e, além disto, eram feitas em escala de laboratório. Durante anos, realizaram-se experiências de maior precisão, com diferentes escalas de dimensões.

Conforme discussão existente em JACKSON (1983, p.4-7), nas experiências de laboratório e geofísicas, em escalas de 0,1 até $10^9 cm$, a lei do inverso do quadrado se mantém com precisão muito grande. Em distâncias menores, devemos recorrer a evidências indiretas que envolvem, com freqüência, hipóteses adicionais. Todas estas hipóteses podem ser verificadas, e o foram sempre, porém, dentro do

esquema da validade da Mecânica Quântica, da superposição linear e de outras hipóteses (bastante razoáveis). Em distâncias ainda menores é necessária a Mecânica Quântica Relativística, e os efeitos da interação forte entram para obscurecer as questões e também as respostas. Experimentalmente, concluí-se que a massa do fóton pode ser considerada nula (vale, portanto, a lei do inverso do quadrado) sobre todo o domínio de distâncias clássicas e também em grande parte do domínio quântico.

Todos os experimentos realizados para determinar esta massa somente forneceram limites superiores para a mesma. Certamente, se um experimento não é capaz de assinalar uma massa para o fóton, isto não prova que ela é zero; ele meramente mostra que a massa é menor que o limite de precisão do experimento em questão. Por outro lado, um fóton de massa finita não pode ser acomodado na eletrodinâmica convencional, onde esta massa é suposta ser igual a zero. A invariância de gauge encontra-se intimamente ligada ao fato do fóton não possuir massa. No entanto, se a invariância de gauge da teoria for abandonada, um parâmetro de massa pode ser adicionado à densidade Lagrangeana do campo eletromagnético de modo único.

3.2 As equações de Maxwell-Proca

Partindo-se então da possibilidade de um eletromagnetismo no qual o propagador descreva um fóton massivo, tem-se agora uma variação da Eletrodinâmica de Maxwell com novas equações que formam a nova base da teoria eletromagnética, relacionando campos elétricos e magnéticos entre si e suas fontes, densidades de carga e de corrente. Os efeitos de uma massa de repouso não nula podem ser incorporados no eletromagnetismo através das equações de Proca. Essas equações continuam válidas para qualquer meio e para campos variáveis no tempo.

Portanto, as equações de Maxwell-Proca, têm a seguinte forma para eventuais fontes no vácuo:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \xi \Phi = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \quad (3.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} + \xi \vec{A} = \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{E} + \mu_0 \vec{j} \quad (3.4)$$

A teoria Eletrodinâmica de Maxwell-Proca apresenta novos termos em suas equações, quando comparado com Maxwell. As equações de Maxwell sem fonte permanecem inalteradas (Eq. 3.2 e 3.3), enquanto que as com fonte (Eq. 3.1 e 3.4) são alteradas pelo incremento de um parâmetro “massivo”. A primeira equação (lei de Gauss) e a quarta equação (extensão da lei de Ampère) são modificadas com a inserção do parâmetro ξ e os potenciais Φ e \vec{A} .

Observa-se que, nas equações de Proca, aparecem os potenciais, além dos campos. Em contraste com as equações de Maxwell, os potenciais adquirem um significado físico real (observável), mediante o parâmetro de massa.

Além disso, a aparição de termos envolvendo os potenciais vetor e escalar nas equações de Proca quebra a simetria de calibre presente anteriormente em Maxwell. Logo, não se pode mais transformar os potenciais vetor e escalar sem modificar as equações da Eletrodinâmica de Maxwell-Proca. Conforme visto no capítulo anterior, em Maxwell, estas transformações de calibre (Eq. 2.9 e 2.10) eram possíveis, pois não afetavam a intensidade dos campos. Ou seja, os campos eram invariantes sob as transformações. Agora, em Proca, a presença direta dos potenciais nas equações faz com que esta teoria passe a não ser mais invariante de gauge.

3.3 Potenciais e a condição subsidiária

A mesma definição continua servindo com relação aos campos em função dos potenciais (Eq. 2.7 e 2.8):

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \partial_t \vec{A}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Novamente pode-se derivar das equações a conservação da carga.

Deriva-se a Eq. 3.1,

$$\vec{\nabla} \cdot \partial_t \vec{E} + \xi \partial_t \Phi = \frac{1}{\epsilon_0} \partial_t \rho$$

Logo,

$$\vec{\nabla} \cdot \partial_t \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \partial_t \rho - \xi \partial_t \Phi \quad (3.5)$$

Aplica-se o divergente Eq. 3.4,

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \xi \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \mu_0 \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \partial_t \vec{E} + \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j}$$

Das identidades vetoriais, lembra-se que $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$

Portanto:

$$\mu_0 \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \partial_t \vec{E} + \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \xi \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \quad (3.6)$$

Substituindo a Eq. 3.5 em 3.6, tem-se,

$$\begin{aligned} \mu_0 \varepsilon_0 \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \partial_t \rho - \xi \partial_t \Phi \right) + \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} &= \xi \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \\ \rightarrow \mu_0 \partial_t \rho + \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} &= \xi \left(\frac{1}{c^2} \partial_t \Phi + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) \end{aligned}$$

Como $\xi \neq 0$, para manter-se a conservação da carga, pela equação de continuidade,

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (3.7)$$

tem-se agora uma condição subsidiária:

$$\frac{1}{c^2} \partial_t \Phi + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (3.8)$$

Portanto, tem que satisfazer uma relação de dependência entre os potenciais, diferentemente do Eletromagnetismo de Maxwell. Nota-se que a condição subsidiária é similar à condição de Lorentz (Eq. 2.11) escolhida para a transformação de calibre demonstrada em Maxwell. Apesar disso, em Maxwell o calibre de Lorentz era uma escolha que se podia adotar, enquanto que no Eletromagnetismo de Maxwell-Proca é uma condição obrigatória exigida pela conservação de carga, ou seja, uma propriedade inerente ao sistema.

3.4 Ondas eletromagnéticas no vácuo

No vácuo, as equações de Maxwell-Proca se reduzem a:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \xi \Phi = 0 \quad (3.9)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \quad (3.10)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.11)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} + \xi \vec{A} = \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \vec{E} \quad (3.12)$$

3.4.1 A equação de onda para o potencial Φ

Objetivando encontrar a equação de onda para o potencial Φ , inicialmente substitui-se na Eq. 3.9 o campo \vec{E} em função dos potenciais (Eq. 2.7).

$$\vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla}\Phi - \partial_t \vec{A}) + \xi\Phi = 0$$

$$-\nabla^2\Phi - \partial_t \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \xi\Phi = 0$$

Utilizando-se a condição subsidiária (Eq. 3.8),

$$-\nabla^2\Phi + \frac{1}{c^2} \partial_t^2\Phi + \xi\Phi = 0$$

Ajeitando,

$$\left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2 + \xi \right) \Phi = 0 \quad (3.13)$$

Com o d'Alembertiano,

$$(\square + \xi)\Phi = 0$$

Observa-se que essa relação de consistência é similar à equação de Klein-Gordon, para o fóton, na ausência de fontes. O campo de Klein-Gordon é um campo relativístico que descreve um bóson escalar massivo e neutro. Ao se tratar o problema da Mecânica Quântica para partículas relativísticas, pensou-se inicialmente em se adotar a equação de Klein-Gordon como a contrapartida da equação de Schrödinger no caso de se incorporar a Relatividade Especial. Entretanto, a idéia mostrou-se incompatível com dados espectrais referentes ao

espectro de emissão do átomo de hidrogênio. Dirac foi quem, então, resolveu o conflito, propondo uma equação especial – a chamada equação de Dirac – para se tratar a Mecânica Quântica Relativística para partículas fermiônicas de spin $\frac{1}{2}$, como é o caso do elétron, do pósitron e dos quarks.

3.4.2 A equação de onda para o potencial \vec{A}

Objetivando encontrar a equação de onda para o potencial \vec{A} , inicialmente substitui-se na Eq. 3.12 o campo \vec{B} e o campo \vec{E} em função dos potenciais (Eq. 2.7 e 2.8).

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + \xi \vec{A} = \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t (-\vec{\nabla} \Phi - \partial_t \vec{A})$$

Usando a identidade vetorial (Eq. 2.20),

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} + \xi \vec{A} = \frac{1}{c^2} \partial_t (-\vec{\nabla} \Phi - \partial_t \vec{A})$$

Utilizando-se a condição subsidiária (Eq. 3.8),

$$\vec{\nabla} \left(-\frac{1}{c^2} \partial_t \Phi \right) - \nabla^2 \vec{A} + \xi \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \partial_t \vec{\nabla} \Phi - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{A}$$

Cortando e ajeitando,

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} + \xi \vec{A} = 0$$

Logo,

$$\left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2 + \xi \right) \vec{A} = 0 \quad (3.14)$$

Com o d'Alembertiano,

$$(\square + \xi) \vec{A} = 0$$

Onde também se verifica que o potencial \vec{A} satisfaz uma equação de onda unidimensional. Conclui-se que o fóton em Maxwell-Proca propaga-se como uma onda massiva.

3.4.3 Ondas planas monocromáticas

Propondo como solução para a equação de onda do potencial Φ as ondas planas monocromáticas, temos que:

$$\Phi(t; \vec{x}) = \Phi_0 \text{sen}(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) \quad (3.15)$$

Com a equação de onda (Eq. 3.13),

$$\left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2 + \xi \right) [\Phi_0 \text{sen}(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)] = 0$$

Resolvendo-se as derivadas,

$$\left(-\frac{\omega^2}{c^2} + \vec{k}^2 + \xi \right) [\Phi_0 \text{sen}(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)] = 0$$

Como o termo $\Phi_0 \text{sen}(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)$ não pode ser zero (0), então:

$$-\frac{\omega^2}{c^2} + \vec{k}^2 + \xi = 0$$

Logo, chega-se à chamada relação de dispersão:

$$\omega^2 = \vec{k}^2 c^2 + \xi c^2 \quad (3.16)$$

Em particular, desde que $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ (Eq. 3.11), propondo que $\vec{B} = \vec{B}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)$, segue que de modo análogo a Maxwell (Eq. 2.29),

$$\vec{B}_0 \cdot \vec{k} = 0 \quad (3.17)$$

Isto é, o campo magnético continua sendo perpendicular à direção de propagação, conforme acontecia em Maxwell.

No entanto, como $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \xi \Phi = 0$ (Eq. 3.9), tem-se que:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot [\vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)] + \xi [\vec{\Phi}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)] &= 0 \\ \rightarrow [-\vec{E}_0 \cdot \vec{k} + \xi \Phi_0] \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) &= \vec{0} \end{aligned}$$

Sendo assim, conclui-se que:

$$\vec{E}_0 \cdot \vec{k} = \xi \Phi_0 \quad (3.18)$$

Portanto, em Maxwell-Proca o campo elétrico não é perpendicular à direção de propagação.

Da lei de Faraday tem-se (Eq. 3.10): $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$

Isso implica uma relação entre o campo elétrico e o campo magnético, de modo análogo a Maxwell (Eq. 2.30), onde,

$$(\hat{k} \times \vec{E}_0) = c \vec{B}_0 \quad (3.19)$$

Logo, o campo magnético é perpendicular ao campo elétrico e também à direção de propagação.

Conclui-se, então, que o campo magnético e a direção de propagação não sofrem alterações na comparação entre Proca e Maxwell. A grande diferença está no campo elétrico que, devido à massa, sofre uma inclinação em relação à direção de propagação. Isso faz com que haja uma projeção do vetor campo elétrico na direção de propagação da onda, \hat{k} , o que traz um novo estado de polarização, longitudinal.

Logo, o campo elétrico, \vec{E} , forma com a direção de propagação, \hat{k} , um plano ortogonal ao campo magnético, \vec{B} . Só que, devido à sua não-ortogonalidade ao \hat{k} , não possui mais dois estados de polarização. Na eletrodinâmica massiva o fóton

possui três estados de polarização: dois ortogonais à direção de propagação e um paralelo. Ou seja: dois transversais e um longitudinal.

Uma das conseqüências de se ter uma teoria eletromagnética massiva é o surgimento de fótons polarizados longitudinalmente. Em Maxwell, quando fixamos o calibre, impomos duas condições sobre o campo, restando dois graus de liberdade. No caso de Proca, com somente uma condição imposta sobre o campo, $\frac{1}{c^2} \partial_t \Phi + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ (Eq. 3.8), ficamos com três graus de liberdade.

A interação dos fótons longitudinais torna-se mais fraca à medida que a massa do fóton tende a zero, de modo que, no limite de massa nula, elas efetivamente se desacoplam. Experimentalmente, se existem fótons longitudinais, sua observação, dentro dos limites de precisão dos experimentos atuais, é ainda muito improvável. Por isso, e também pelo fato de estarem associados a partículas cuja função-de-onda tem norma negativa (o que é inconsistente com a interpretação probabilística da Mecânica Quântica), são chamados fótons longitudinais-fantasma.

3.4.4 O novo parâmetro ξ : interpretação física

Para verificar o significado do novo parâmetro encontrado nas equações de Maxwell-Proca, é preciso incluir conceitos oriundos da Mecânica Quântica. Inicialmente, retoma-se a relação de dispersão (Eq. 3.16):

$$\omega^2 = \vec{k}^2 c^2 + \xi c^2 \rightarrow \omega = \sqrt{\vec{k}^2 c^2 + \xi c^2}$$

Multiplicando-se essa relação pela constante relacionada à constante de Planck, fica

$$\hbar\omega = \sqrt{\hbar^2 \vec{k}^2 c^2 + \xi \hbar^2 c^2}$$

Da Mecânica Quântica tem-se a relação de correspondência de De Broglie para onda-partícula. Sabe-se que: $\hbar \vec{k} = \vec{p}$ e $\hbar\omega = E$.

Logo, a relação fica

$$E = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + \xi \hbar^2 c^2}$$

Portanto, $\xi \hbar^2 c^2 \equiv m_\gamma^2 c^4$

Dessa correspondência, chegamos à expressão que retrata o novo parâmetro:

$$\xi = \frac{m_\gamma^2 c^2}{\hbar^2} = \left(\frac{m_\gamma c}{\hbar} \right)^2 \quad (3.20)$$

O comprimento de onda de Compton do fóton é:

$$\lambda_c = \frac{\hbar}{mc}$$

Logo, o novo parâmetro será

$$\xi = (\lambda_c)^{-2} \quad (3.21)$$

Pode observar que o parâmetro ξ tem dimensão de comprimento elevado a menos dois: $[\xi] = L^{-2}$

Logo, vê-se que este novo parâmetro tem relação com o comprimento de onda de Compton do fóton massivo (Eq. 3.21), o que demonstra que este parâmetro é um parâmetro de massa. Pode ser interpretado então como a massa de repouso do fóton. Tem-se, portanto, na Eletrodinâmica de Maxwell-Proca um fóton massivo, massa essa que pode ser mensurada apenas isolando o parâmetro m_γ da Eq. 3.20.

3.4.5 Relatividade Especial com fóton massivo

Um dos postulados da Relatividade Especial se refere ao fato da velocidade da luz ser a mesma em todos os referenciais inerciais. A constante c na Eletrodinâmica de Maxwell representa a velocidade de propagação de ondas

eletromagnéticas no vácuo (Eq. 2.22). Na verdade, a relatividade foi desenvolvida, em parte, como consequência da constância da velocidade da luz.

Contudo, na Eletrodinâmica de Proca, há uma dispersão da velocidade do fóton massivo no vácuo. Relembrando a relação de dispersão (Eq. 3.16),

$$\omega^2 = \vec{k}^2 c^2 + \xi c^2$$

Quando $\frac{\omega^2}{c^2} = \xi$, a onda massiva não se propaga. Quando $\frac{\omega^2}{c^2} < \xi$, \vec{k} se torna uma quantidade imaginária e a amplitude da onda massiva seria atenuada exponencialmente. Quando $\frac{\omega^2}{c^2} > \xi$, as ondas podem se propagar no vácuo sem serem atenuadas. No limite $\omega \rightarrow \infty$, a velocidade se aproxima da constante c , o que é consistente com o pressuposto de Einstein de que há uma única velocidade limite para todos os fenômenos.

Logo, no caso da Eletrodinâmica de Maxwell-Proca, o fóton não possui uma velocidade universal independente do referencial. Uma massa não nula implica que a velocidade da luz não é uma constante única. Tal velocidade depende da massa do fóton e de sua frequência. A velocidade c passa a ser um limite o qual nenhuma partícula pode alcançar. As ondas eletromagnéticas agora viajam a uma velocidade que tende a c , conforme a frequência se aproxima do infinito. Aproximar-se de infinito significa $\hbar\omega \gg mc^2$, sendo m a massa de repouso do fóton de Proca. Mesmo assim a simetria de Lorentz é mantida, e a velocidade que aparece nas transformações de Lorentz seria simplesmente esta velocidade limite, e não a velocidade da luz.

Segundo GONÇALES (2008, p.29), “o pressuposto da constância da velocidade da luz não é necessário para a validade da Relatividade Especial (...) a Relatividade Especial pode se basear na existência de uma única velocidade, c , limite para a qual a velocidade de todos os corpos tende quando sua energia se torna muito maior do que sua massa”.

3.5 Leis de Conservação

3.5.1 Conservação de carga

Conforme visto, a conservação da carga é descrita pela equação de continuidade (Eq. 3.7),

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

Sendo que agora existe uma condição subsidiária (Eq. 3.8),

$$\frac{1}{c^2} \partial_t \Phi + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

expressando a relação obrigatória entre os potenciais.

3.5.2 Conservação de energia

Pode-se construir uma equação correspondente para a conservação de energia no caso da Eletrodinâmica de Maxwell-Proca.

Multiplica-se a Eq. 3.2 pelo campo \vec{B}

$$\vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{B} \cdot \partial_t \vec{B} \quad (3.22)$$

E a Eq. 3.4 pelo campo \vec{E}

$$\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \xi \vec{A} \cdot \vec{E} = \frac{1}{c^2} \vec{E} \cdot \partial_t \vec{E} + \mu_0 \vec{E} \cdot \vec{j} \quad (3.23)$$

Subtraindo a Eq. 3.22 de 3.23, tem-se:

$$\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \xi \vec{A} \cdot \vec{E} = \frac{1}{c^2} \vec{E} \cdot \partial_t \vec{E} + \vec{B} \cdot \partial_t \vec{B} + \mu_0 \vec{E} \cdot \vec{j} \quad (3.24)$$

Resolvendo o lado esquerdo da Eq. 3.24, conforme em Maxwell (Eq. 2.41), tem-se:

$$-\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) + \xi \vec{A} \cdot \vec{E}$$

Desenvolvendo-se com o novo termo,

$$\begin{aligned} & -\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) + \xi \vec{A} \cdot (-\vec{\nabla} \Phi - \partial_t \vec{A}) = \\ & = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) - \xi \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \Phi - \xi \vec{A} \cdot \partial_t \vec{A} = \\ & = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) - \xi \vec{\nabla} \cdot (\Phi \vec{A}) + \xi (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \Phi - \partial_t \left(\frac{\xi}{2} \vec{A}^2 \right) \end{aligned}$$

Utilizando-se a condição subsidiária (Eq. 3.8) e ajeitando-se,

$$-\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B} + \xi \Phi \vec{A}) - \partial_t \left(\frac{\xi}{2c^2} \Phi^2 \right) - \partial_t \left(\frac{\xi}{2} \vec{A}^2 \right) \quad (3.25)$$

O termo da direita fica, como em Maxwell (Eq. 2.42):

$$\partial_t \left(\frac{1}{2c^2} \vec{E} \cdot \vec{E} + \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{B} \right) + \mu_0 \vec{E} \cdot \vec{j}$$

Substituindo 3.25 e 2.42 em 3.24, tem-se então toda a equação:

$$\begin{aligned} & -\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B} + \xi \Phi \vec{A}) - \partial_t \left(\frac{\xi}{2c^2} \Phi^2 \right) - \partial_t \left(\frac{\xi}{2} \vec{A}^2 \right) = \\ & = \partial_t \left(\frac{1}{2c^2} \vec{E} \cdot \vec{E} + \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{B} \right) + \mu_0 \vec{E} \cdot \vec{j} \end{aligned}$$

Arrumando-se os termos, substituindo c e dividindo-se por μ_0 , chega-se a:

$$\begin{aligned} & \partial_t \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 + \frac{\varepsilon_0 \xi}{2} \Phi^2 + \frac{\xi}{2\mu_0} \vec{A}^2 \right) \\ & + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} + \frac{\xi}{\mu_0} \Phi \vec{A} \right) = -\vec{j} \cdot \vec{E} \quad (3.26) \end{aligned}$$

Chega-se então a equação que expressa a conservação da energia. Tem-se agora uma nova densidade de energia armazenada no campo eletromagnético:

$$U_{em} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 + \frac{\varepsilon_0 \xi}{2} \Phi^2 + \frac{\xi}{2\mu_0} \vec{A}^2 \quad (3.27)$$

Vê-se que a energia é uma quantidade positiva definida, como no caso de Maxwell. Percebe-se que o campo de Maxwell-Proca fica mais energético. Logo, o campo de Maxwell-Proca, de uma dada frequência, torna-se mais energético do que o campo de Maxwell, de mesma frequência e com as mesmas amplitudes.

Tem-se também um novo vetor de Poynting:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} + \frac{\xi}{\mu_0} \Phi \vec{A} \quad (3.28)$$

O termo onde é aplicado o divergente expressa a densidade de fluxo de energia transportada pelo campo eletromagnético, que no caso de Maxwell-Proca (Eq. 3.28), é maior que em Maxwell (Eq. 2.45), pelo acréscimo dos termos extras. Avaliando-se a decomposição do campo elétrico em suas componentes transversais e longitudinal, conclui-se que o termo massivo $\frac{\xi}{\mu_0} \Phi \vec{A}$ descreve radiação puramente longitudinal, enquanto que o termo $\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$ descreve radiação puramente transversa.

O último termo da Eq. 3.26 ($-\vec{j} \cdot \vec{E}$) continua expressando a energia dissipada por efeito Joule.

Permanece então o teorema de Poynting (Eq. 2.45), com a nova densidade de energia e vetor de Poynting:

$$\partial_t U_{em} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

Logo, a energia total do campo e da matéria é conservada, de acordo com o enunciado da conservação de energia.

Vemos, porém, que agora, para que haja propagação de energia eletromagnética (Eq. 3.28), torna-se necessária a existência dos dois campos \vec{E} e \vec{B} , e também dos potenciais Φ e \vec{A} .

Todo fenômeno físico que pode ser descrito pela Eletrodinâmica Padrão (Maxwell) deve ter sua descrição correspondente na Eletrodinâmica Massiva (Proca); as duas descrições devem se fundir continuamente no limite em que a massa do fóton se anula. Esta conjectura sobre a transição suave entre as duas citadas eletrodinâmicas é considerada, por alguns físicos, como uma espécie de princípio teórico. Independentemente de ser tal “princípio” verdadeiro ou não, é bastante instrutivo verificar se ele funciona (ou falha) em alguns contextos físicos, pois, deste modo, uma melhor compreensão da situação física pode surgir.

Sendo assim, verifica-se que densidade de energia armazenada no campo eletromagnético em Proca (Eq. 3.27):

$$U_{em} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 + \frac{\varepsilon_0 \xi}{2} \Phi^2 + \frac{\xi}{2\mu_0} \vec{A}^2$$

torna-se igual à densidade em Maxwell (Eq. 2.44),

$$U_{em} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2$$

quando o novo parâmetro ξ é igualado a zero.

Analogamente, o novo vetor de Poynting (Eq. 3.28):

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} + \frac{\xi}{\mu_0} \Phi \vec{A}$$

torna-se (Eq. 2.45):

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

quando $\xi = 0$. Assim, exemplifica-se a concordância entre estes resultados e o princípio de transição suave.

3.5.3 Conservação de momento

Para obter-se uma equação de conservação para o momento na teoria de Maxwell, procura-se partir da derivada temporal do vetor de Poynting.

$$\partial_t \vec{S} = ?$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} + \frac{\xi}{\mu_0} \Phi \vec{A} \quad \rightarrow \quad S_i = \frac{1}{\mu_0} \varepsilon_{ijk} E_j B_k + \frac{\xi}{\mu_0} \Phi A_i$$

$$\partial_t S_i = \frac{1}{\mu_0} \varepsilon_{ijk} \partial_t (E_j B_k) + \frac{\xi}{\mu_0} \partial_t (\Phi A_i) \quad (3.29)$$

Resolve-se esta equação em duas partes, e depois se junta tudo para avaliar os resultados.

Tem-se então na primeira parte da Eq. 3.29:

$$\frac{1}{\mu_0} \varepsilon_{ijk} \partial_t (E_j B_k) = \frac{1}{\mu_0} \varepsilon_{ijk} (\partial_t E_j) B_k + \frac{1}{\mu_0} \varepsilon_{ijk} E_j (\partial_t B_k) \quad (3.30)$$

Da Eq. 3.4, tira-se:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B} + \xi \vec{A} &= \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \vec{E} + \mu_0 \vec{j} \quad \rightarrow \quad (\vec{\nabla} \times \vec{B})_j + \xi A_j = \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t E_j + \mu_0 j_j \\ \varepsilon_{jmn} \partial_m B_n + \xi A_j &= \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t E_j + \mu_0 j_j \quad \rightarrow \\ \rightarrow \partial_t E_j &= \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \varepsilon_{jmn} \partial_m B_n + \frac{\xi}{\mu_0 \varepsilon_0} A_j - \frac{1}{\varepsilon_0} j_j \end{aligned} \quad (3.31)$$

E da Eq. 3.2, tira-se:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\partial_t \vec{B} \quad \rightarrow \quad (\vec{\nabla} \times \vec{E})_k = -\partial_t B_k \\ \varepsilon_{kmn} \partial_m E_n &= -\partial_t B_k \quad \rightarrow \quad \partial_t B_k = -\varepsilon_{kmn} \partial_m E_n \end{aligned} \quad (3.32)$$

Substituindo $\partial_t E_j$ (Eq. 3.31) e $\partial_t B_k$ (Eq. 3.32) em 3.30, tem-se:

$$\frac{1}{\mu_0} \varepsilon_{ijk} \left(\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \varepsilon_{jmn} \partial_m B_n + \frac{\xi}{\mu_0 \varepsilon_0} A_j - \frac{1}{\varepsilon_0} j_j \right) B_k + \frac{1}{\mu_0} \varepsilon_{ijk} E_j (-\varepsilon_{kmn} \partial_m E_n) \quad (3.33)$$

Resolvendo o primeiro termo da Eq. 3.33:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu_0} \varepsilon_{ijk} \left(\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \varepsilon_{jmn} \partial_m B_n + \frac{\xi}{\mu_0 \varepsilon_0} A_j - \frac{1}{\varepsilon_0} j_j \right) B_k = \\ &= \frac{1}{\mu_0^2 \varepsilon_0} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jmn} (\partial_m B_n) B_k + \frac{\xi}{\mu_0^2 \varepsilon_0} \varepsilon_{ijk} A_j B_k - \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \varepsilon_{ijk} j_j B_k = \\ &= -\frac{1}{\mu_0^2 \varepsilon_0} \varepsilon_{ikj} \varepsilon_{jmn} (\partial_m B_n) B_k + \frac{\xi}{\mu_0^2 \varepsilon_0} \varepsilon_{ijk} A_j B_k - \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} (\vec{j} \times \vec{B})_i = \\ &= -\frac{1}{\mu_0^2 \varepsilon_0} (\delta_{im} \delta_{kn} - \delta_{in} \delta_{km}) (\partial_m B_n) B_k + \frac{\xi}{\mu_0^2 \varepsilon_0} \varepsilon_{ijk} A_j B_k - \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} (\vec{j} \times \vec{B})_i = \\ &= -\frac{1}{\mu_0^2 \varepsilon_0} (\partial_i B_k) B_k + \frac{1}{\mu_0^2 \varepsilon_0} (\partial_k B_i) B_k + \frac{\xi}{\mu_0^2 \varepsilon_0} \varepsilon_{ijk} A_j B_k - \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} (\vec{j} \times \vec{B})_i \quad (3.34) \end{aligned}$$

Lembrando-se as propriedades das derivadas, e do potencial (Eq. 2.8), sabe-se que,

$$B_k (\partial_i B_k) = \frac{1}{2} \partial_i B_k^2,$$

$$(\partial_k B_i) B_k = \partial_k (B_i B_k) - B_i (\partial_k B_k), \text{ e que}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \rightarrow \quad B_k = \varepsilon_{kmn} \partial_m A_n$$

Fazem-se então as substituições na Eq. 3.34:

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{\mu_0^2 \varepsilon_0} \frac{1}{2} \partial_i B_k^2 + \frac{1}{\mu_0^2 \varepsilon_0} [\partial_k (B_i B_k) - B_i (\partial_k B_k)] + \\ & \quad + \frac{\xi}{\mu_0^2 \varepsilon_0} \varepsilon_{ijk} A_j (\varepsilon_{kmn} \partial_m A_n) - \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} (\vec{j} \times \vec{B})_i = \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{\mu_0^2 \varepsilon_0} \partial_i \left(\frac{1}{2} B_k^2 \right) + \frac{1}{\mu_0^2 \varepsilon_0} \left[\partial_k (B_i B_k) - B_i (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \right] +$$

$$+ \frac{\xi}{\mu_0^2 \varepsilon_0} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} A_j (\partial_m A_n) - \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} (\vec{J} \times \vec{B})_i$$

Como $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ (Eq. 3.3),

$$= -\frac{1}{\mu_0^2 \varepsilon_0} \partial_i \left(\frac{1}{2} B_k^2 \right) + \frac{1}{\mu_0^2 \varepsilon_0} \partial_k (B_i B_k) +$$

$$+ \frac{\xi}{\mu_0^2 \varepsilon_0} (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) A_j (\partial_m A_n) - \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} (\vec{J} \times \vec{B})_i =$$

$$= -\frac{1}{\mu_0^2 \varepsilon_0} \partial_i \left(\frac{1}{2} B_k^2 \right) + \frac{1}{\mu_0^2 \varepsilon_0} \partial_k (B_i B_k) +$$

$$+ \frac{\xi}{\mu_0^2 \varepsilon_0} A_j (\partial_i A_j) - \frac{\xi}{\mu_0^2 \varepsilon_0} A_j (\partial_j A_i) - \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} (\vec{J} \times \vec{B})_i =$$

$$= -\frac{1}{\mu_0^2 \varepsilon_0} \partial_i \left(\frac{1}{2} B_k^2 \right) + \frac{1}{\mu_0^2 \varepsilon_0} \partial_k (B_i B_k) +$$

$$+ \frac{\xi}{\mu_0^2 \varepsilon_0} \partial_i \left(\frac{1}{2} A_j^2 \right) - \frac{\xi}{\mu_0^2 \varepsilon_0} A_j (\partial_j A_i) - \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} (\vec{J} \times \vec{B})_i =$$

$$= -\frac{1}{\mu_0^2 \varepsilon_0} \partial_i \left(\frac{1}{2} B_k^2 \right) + \frac{1}{\mu_0^2 \varepsilon_0} \partial_k (B_i B_k) + \frac{\xi}{\mu_0^2 \varepsilon_0} \partial_i \left(\frac{1}{2} A_j^2 \right) -$$

$$- \frac{\xi}{\mu_0^2 \varepsilon_0} \partial_j (A_j A_i) + \frac{\xi}{\mu_0^2 \varepsilon_0} (\partial_j A_j) A_i - \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} (\vec{J} \times \vec{B})_i \quad (3.35)$$

Como pela condição subsidiária (Eq. 3.8),

$$\frac{1}{c^2} \partial_t \Phi + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad \rightarrow \quad \partial_j A_j = -\frac{1}{c^2} \partial_t \Phi$$

Logo, substituindo em 3.35 e trocando índices, o primeiro termo da Eq. 3.33

fica:

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\mu_0^2 \varepsilon_0} \partial_i \left(\frac{1}{2} B_k^2 \right) + \frac{1}{\mu_0^2 \varepsilon_0} \partial_k (B_i B_k) + \frac{\xi}{\mu_0^2 \varepsilon_0} \partial_i \left(\frac{1}{2} A_k^2 \right) - \\
&\quad - \frac{\xi}{\mu_0^2 \varepsilon_0} \partial_k (A_k A_i) - \frac{\xi}{\mu_0} (\partial_t \Phi) A_i - \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} (\vec{j} \times \vec{B})_i \quad (3.36)
\end{aligned}$$

Resolvendo o segundo termo da Eq. 3.33:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu_0} \varepsilon_{ijk} E_j (-\varepsilon_{kmn} \partial_m E_n) &= -\frac{1}{\mu_0} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} E_j (\partial_m E_n) = \\
&= -\frac{1}{\mu_0} (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) E_j (\partial_m E_n) = -\frac{1}{\mu_0} E_n (\partial_i E_n) + \frac{1}{\mu_0} E_m (\partial_m E_i)
\end{aligned}$$

Lembrando-se as propriedades das derivadas, fica então:

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\mu_0} \partial_i \left(\frac{1}{2} E_n^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} [\partial_m (E_m E_i) - (\partial_m E_m) E_i] = \\
&= -\frac{1}{\mu_0} \partial_i \left(\frac{1}{2} E_n^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} [\partial_m (E_m E_i) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})_m E_i]
\end{aligned}$$

Como $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \xi \Phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (Eq. 3.1), e trocando os índices,

$$= -\frac{1}{\mu_0} \partial_i \left(\frac{1}{2} E_k^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \partial_k (E_k E_i) - \frac{\rho}{\mu_0 \varepsilon_0} E_i + \frac{\xi}{\mu_0} \Phi E_i \quad (3.37)$$

Juntando os termos (Eq. 3.36 e Eq. 3.37) na Eq. 3.33, tem-se então na primeira parte da Eq. 3.29:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu_0} \varepsilon_{ijk} \partial_t (E_j B_k) &= -\frac{1}{\mu_0^2 \varepsilon_0} \partial_i \left(\frac{1}{2} B_k^2 \right) + \frac{1}{\mu_0^2 \varepsilon_0} \partial_k (B_i B_k) + \\
&\quad + \frac{\xi}{\mu_0^2 \varepsilon_0} \partial_i \left(\frac{1}{2} A_k^2 \right) - \frac{\xi}{\mu_0^2 \varepsilon_0} \partial_k (A_k A_i) - \frac{\xi}{\mu_0} (\partial_t \Phi) A_i - \\
&\quad - \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} (\vec{j} \times \vec{B})_i - \frac{1}{\mu_0} \partial_i \left(\frac{1}{2} E_k^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \partial_k (E_k E_i) - \frac{\rho}{\mu_0 \varepsilon_0} E_i + \frac{\xi}{\mu_0} \Phi E_i =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\partial_i \left(\frac{1}{2\mu_0^2 \varepsilon_0} \vec{B}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{E}^2 - \frac{\xi}{2\mu_0^2 \varepsilon_0} \vec{A}^2 \right) + \\
&\quad + \partial_k \left(\frac{1}{\mu_0^2 \varepsilon_0} B_k B_i + \frac{1}{\mu_0} E_k E_i - \frac{\xi}{\mu_0^2 \varepsilon_0} A_k A_i \right) - \\
&\quad - \frac{\xi}{\mu_0} (\partial_t \Phi) A_i - \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} (\vec{j} \times \vec{B})_i - \frac{\rho}{\mu_0 \varepsilon_0} E_i + \frac{\xi}{\mu_0} \Phi E_i \quad (3.38)
\end{aligned}$$

Agora, tem-se na segunda parte da Eq. 3.29:

$$\frac{\xi}{\mu_0} \partial_t (\Phi A_i) = \frac{\xi}{\mu_0} (\partial_t \Phi) A_i + \frac{\xi}{\mu_0} \Phi (\partial_t A_i)$$

Como (Eq. 2.7), $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \partial_t \vec{A} \rightarrow \partial_t A_i = -E_i - \vec{\nabla}\Phi$

Tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{\xi}{\mu_0} (\partial_t \Phi) A_i + \frac{\xi}{\mu_0} \Phi (\partial_t A_i) &= \frac{\xi}{\mu_0} (\partial_t \Phi) A_i - \frac{\xi}{\mu_0} \Phi E_i - \frac{\xi}{\mu_0} \Phi \vec{\nabla}\Phi = \\
&= \frac{\xi}{\mu_0} (\partial_t \Phi) A_i - \frac{\xi}{\mu_0} \Phi E_i - \frac{\xi}{\mu_0} \partial_i \left(\frac{1}{2} \Phi^2 \right) \quad (3.39)
\end{aligned}$$

Juntando as duas partes completas (Eq. 3.38 e 3.39 em 3.29), quatro termos se cancelarão:

$$\begin{aligned}
\rightarrow \partial_t S_i &= -\partial_i \left(\frac{1}{2\mu_0^2 \varepsilon_0} \vec{B}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{E}^2 - \frac{\xi}{2\mu_0^2 \varepsilon_0} \vec{A}^2 \right) + \\
&\quad + \partial_k \left(\frac{1}{\mu_0^2 \varepsilon_0} B_k B_i + \frac{1}{\mu_0} E_k E_i - \frac{\xi}{\mu_0^2 \varepsilon_0} A_k A_i \right) - \\
&\quad - \frac{\xi}{\mu_0} (\partial_t \Phi) A_i - \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} (\vec{j} \times \vec{B})_i - \frac{\rho}{\mu_0 \varepsilon_0} E_i + \frac{\xi}{\mu_0} \Phi E_i + \\
&\quad + \frac{\xi}{\mu_0} (\partial_t \Phi) A_i - \frac{\xi}{\mu_0} \Phi E_i - \frac{\xi}{\mu_0} \partial_i \left(\frac{1}{2} \Phi^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \partial_t S_i &= -\partial_i \left(\frac{1}{2\mu_0^2 \varepsilon_0} \vec{B}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{E}^2 - \frac{\xi}{2\mu_0^2 \varepsilon_0} \vec{A}^2 + \frac{\xi}{2\mu_0} \Phi^2 \right) + \\ &+ \partial_k \left(\frac{1}{\mu_0^2 \varepsilon_0} B_k B_i + \frac{1}{\mu_0} E_k E_i - \frac{\xi}{\mu_0^2 \varepsilon_0} A_k A_i \right) - \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} (\vec{j} \times \vec{B})_i - \frac{\rho}{\mu_0 \varepsilon_0} E_i \end{aligned}$$

Ajeitando e dividindo tudo por c^2 , tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \partial_t S_i + \partial_i \left(\frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 + \frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}^2 - \frac{\xi}{2\mu_0} \vec{A}^2 + \frac{\xi \varepsilon_0}{2} \Phi^2 \right) \\ + \partial_k \left(-\frac{1}{\mu_0} B_k B_i - \varepsilon_0 E_k E_i + \frac{\xi}{\mu_0} A_k A_i \right) = -(\vec{j} \times \vec{B})_i - \rho E_i \end{aligned}$$

Sabendo-se que $\partial_i = \partial_k \delta_{ki}$

$$\frac{1}{c^2} \partial_t S_i + \partial_k \left[\begin{array}{l} \delta_{ki} \left(\frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 + \frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}^2 - \frac{\xi}{2\mu_0} \vec{A}^2 + \frac{\xi \varepsilon_0}{2} \Phi^2 \right) \\ -\varepsilon_0 E_k E_i - \frac{1}{\mu_0} B_k B_i + \frac{\xi}{\mu_0} A_k A_i \end{array} \right] = -\rho E_i - (\vec{j} \times \vec{B})_i \quad (3.40)$$

O termo $\left[\delta_{ki} \left(\frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 + \frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}^2 - \frac{\xi}{2\mu_0} \vec{A}^2 + \frac{\xi \varepsilon_0}{2} \Phi^2 \right) - \varepsilon_0 E_k E_i - \frac{1}{\mu_0} B_k B_i + \frac{\xi}{\mu_0} A_k A_i \right]$ é um tensor de tensões ou tensor de cisalhamento $T_{ki} = T_{ik}$. É o novo tensor de tensões em Maxwell-Proca. Assim como acontece com a energia, o momento transportado é diferente em Proca com relação à Maxwell (Eq. 2.59), devido aos novos termos de acréscimo.

Portanto, tem-se

$$\frac{1}{c^2} \partial_t S_i + \partial_k T_{ki} = -(\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B})_i$$

O termo $(\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B})$ é a densidade volumétrica de força eletromagnética (Força de Coulomb – Lorentz), que descreve a interação do campo com a corrente.

$$\frac{1}{c^2} \partial_t \vec{S} + \vec{\nabla} \cdot \vec{T} = \vec{F}_{Coulomb-Lorentz} \quad (3.41)$$

Esta é a equação de conservação de momento na eletrodinâmica. Logo, o momento total do campo e da matéria também é conservado.

3.6 Pressão de Radiação

Partindo-se do vetor de Poynting (Eq. 3.28), chega-se à energia média transportada, ou seja, à média temporal $\langle \vec{S} \rangle$ de \vec{S} , tomada sobre um período (ou, o que é equivalente, um número qualquer de períodos).

Atribuindo-se que,

$$\begin{aligned} \vec{E}(t; \vec{x}) &= \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t), & \vec{B}(t; \vec{x}) &= \vec{B}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t), \\ \Phi(t; \vec{x}) &= \Phi_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) & \text{e} & \quad \vec{A}(t; \vec{x}) = \vec{A}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) \end{aligned}$$

e lembrando-se que,

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} + \frac{\xi}{\mu_0} \Phi \vec{A} \quad (\text{Eq. 3.28})$$

Tem-se que:

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \frac{1}{\mu_0} [\vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)] \times [\vec{B}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)] \\ &\quad + \frac{\xi}{\mu_0} \Phi_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) \cdot \vec{A}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) \quad (3.42) \end{aligned}$$

Da Eq. 2.8, sendo, $\vec{B}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) = \nabla \times [\vec{A}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)]$, tem-se:

$$\rightarrow \vec{B}_0 = \vec{k} \times \vec{A}_0$$

Assim, partindo da Eq. 3.42, a média temporal será:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \vec{E}_0 \times (\vec{k} \times \vec{A}_0) + \frac{\xi}{2\mu_0} \Phi_0 \vec{A}_0 \quad (3.43)$$

Pela identidade vetorial, $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$

Portanto, da Eq. 3.43 tira-se que, $\vec{E}_0 \times (\vec{k} \times \vec{A}_0) = \vec{k}(\vec{E}_0 \cdot \vec{A}_0) - \vec{A}_0(\vec{E}_0 \cdot \vec{k})$

Logo,

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \vec{k}(\vec{E}_0 \cdot \vec{A}_0) - \frac{1}{2\mu_0} \vec{A}_0(\vec{E}_0 \cdot \vec{k}) + \frac{\xi}{2\mu_0} \Phi_0 \vec{A}_0$$

Como, $\vec{E}_0 \cdot \vec{k} = \xi \Phi_0$ (Eq. 3.18),

$$\begin{aligned} \langle \vec{S} \rangle &= \frac{1}{2\mu_0} \vec{k}(\vec{E}_0 \cdot \vec{A}_0) - \frac{1}{2\mu_0} \vec{A}_0(\xi \Phi_0) + \frac{\xi}{2\mu_0} \Phi_0 \vec{A}_0 \\ \rightarrow \langle \vec{S} \rangle &= \frac{1}{2\mu_0} \vec{k}(\vec{E}_0 \cdot \vec{A}_0) \end{aligned} \quad (3.44)$$

Da Eq. 2.7, sendo,

$$\vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) = -\nabla[\Phi_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)] - \partial_t[\vec{A}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)]$$

$$\rightarrow \vec{E}_0 = -\vec{k}\Phi_0 + \omega\vec{A}_0$$

A média temporal fica:

$$\begin{aligned} \langle \vec{S} \rangle &= \frac{1}{2\mu_0} [(-\vec{k}\Phi_0 + \omega\vec{A}_0) \cdot \vec{A}_0] \vec{k} \\ \rightarrow \langle \vec{S} \rangle &= \left(\frac{\omega}{2\mu_0} A_0^2 - \frac{1}{2\mu_0} \Phi_0 \vec{k} \vec{A}_0 \right) \vec{k} \end{aligned} \quad (3.45)$$

A intensidade I da onda eletromagnética é, então,

$$I = \langle \vec{S} \rangle \hat{k} = \left(\frac{\omega}{2\mu_0} A_0^2 - \frac{1}{2\mu_0} \Phi_0 \vec{k} A_0 \right) |\vec{k}| \quad (3.46)$$

E a pressão de radiação é $\frac{I}{c}$ para quando a radiação é totalmente absorvida pelo corpo.

$$P_r(abs) = \frac{1}{2\mu_0 c} (\omega A_0^2 - \Phi_0 \vec{k} A_0) |\vec{k}| \quad (3.47)$$

A pressão de radiação é $2\frac{I}{c}$ para quando a radiação é totalmente refletida pelo objeto e a incidência é perpendicular.

$$P_r(ref) = \frac{1}{\mu_0 c} (\omega A_0^2 - \Phi_0 \vec{k} A_0) |\vec{k}| \quad (3.48)$$

3.7 Potencial eletrostático gerado por uma carga pontual

Em Maxwell-Proca, a lei de Gauss é (Eq. 3.1):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \xi \Phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Para uma carga q puntiforme,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \xi \Phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0} \delta^3(\vec{x})$$

Como na eletrostática $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$, tem-se

$$(-\nabla^2 + \xi)\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0} \delta^3(\vec{x})$$

Utilizando-se a função de Green do operador $(-\nabla^2 + \xi)$,

$$(-\nabla^2 + \xi) \frac{e^{-\sqrt{\xi}|\vec{x}|}}{4\pi|\vec{x}|} = \delta^3(\vec{x})$$

tem-se que:

$$(-\nabla^2 + \xi) \frac{qe^{-\sqrt{\xi}|\vec{x}|}}{4\pi\varepsilon_0|\vec{x}|} = \frac{q}{\varepsilon_0} \delta^3(\vec{x})$$

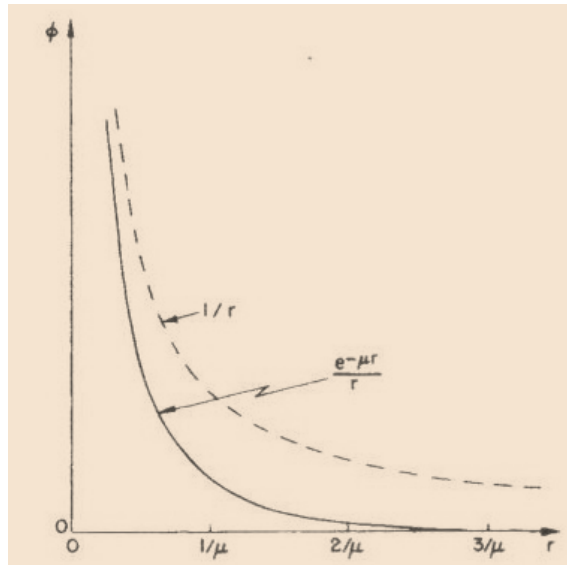
Assim, tem-se o potencial eletrostático de uma carga q situada no ponto \vec{x} .

Considerando-se $|\vec{x}| = r$, portanto

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} e^{-\sqrt{\xi}r} \quad (3.49)$$

Este é o chamado potencial de Yukawa. Assume então a forma de Yukawa, esferossimétrica, que mostra a feição característica da massa do fóton. Há uma diminuição exponencial dos potenciais e campos estáticos, com a distância correspondente a $\sqrt{\xi}^{-1}$.

Portanto o alcance do potencial, neste caso, é definido por $\frac{1}{\sqrt{\xi}} = \lambda_c$ (da Eq. 3.21). O potencial é blindado e possui uma distância crítica, a partir da qual o potencial é praticamente nulo. Ou seja, quando $r \gg \frac{1}{\sqrt{\xi}}$, $\vec{E} \rightarrow \vec{0}$. Pode-se notar que se $r \ll \frac{1}{\sqrt{\xi}}$, a lei do inverso do quadrado é, de fato, uma boa aproximação. Mas se $r \gg \frac{1}{\sqrt{\xi}}$, a lei se diferencia drasticamente das predições feitas pelas equações de Maxwell. Este potencial descreve um decaimento exponencial com o alcance $\sqrt{\xi}^{-1}$.



O potencial de Yukawa $\frac{e^{-\mu r}}{r}$, sendo $\mu = \sqrt{\xi}$, comparado com o potencial Coulombiano $\frac{1}{r}$.
(Extraído do livro *Lições de Física de Feynman: vol. 2* de Feynman, Leighton, Sands).

Para exemplificar, tomamos como valor experimental a massa apresentada em um sistema supercondutor, $m_\gamma \sim 10^{-3} eV/c^2$.

$$\text{Logo, } m_\gamma c^2 = 10^{-3} eV$$

Como, da Eq. 3.20,

$$\xi = \left(\frac{m_\gamma c}{\hbar} \right)^2 = \left(\frac{m_\gamma c^2}{\hbar c} \right)^2$$

e sabendo-se que $\hbar c = 197,3284 \text{ MeV} \cdot \text{Fm}$,

tem-se:

$$\xi = \left(\frac{10^{-3} eV}{197,3284 \cdot 10^6 eV \cdot \text{Fm}} \right)^2 = 2,5682 \cdot 10^{-23} \text{ Fm}^{-2}$$

Portanto, o alcance será aproximadamente $197,3284 \mu m$, ou $1,973284 \cdot 10^6 \text{ \AA}$. Em um supercondutor do tipo planar, a separação típica entre os planos onde se dá a super-condução é na faixa de 10^3 \AA . O alcance, então, equivale a uma distância de aproximadamente 10^3 vezes a separação entre os planos. Portanto, o alcance é suficiente para penetrar vários planos de super-condução.

4 APLICAÇÃO DA ELETRODINÂMICA DE MAXWELL-PROCA À SUPERCONDUTIVIDADE

4.1 A supercondutividade

Supercondutividade (SC) é uma propriedade física, de característica intrínseca de certos materiais quando se esfriam a temperaturas extremamente baixas, para conduzir corrente sem resistência nem perdas, funcionando também como um diamagneto perfeito abaixo de uma temperatura crítica.

Esta propriedade foi descoberta em 1911 pelo físico holandês Heike Kamerlingh Onnes, quando observou que a resistência elétrica do mercúrio desaparecia quando resfriado a 4K (-452°F, -269.15°C).

O recorde atual para a temperatura mais elevada em que um material se comporta como supercondutor é apresentada por um composto cerâmico de mercúrio-cobre; temperatura de transição: 138 K (ou -131° C). Para isso também se usa hélio líquido, material caro e pouco eficiente, o que impede seu uso em tecnologias que procurem explorar o fenômeno.

A supercondutividade pode ser entendida como um fenômeno quântico-macroscópico, ou seja, este estado pode ser descrito por uma única função de onda. O material supercondutor exhibe duas características: resistividade nula, quando resfriado abaixo de certa temperatura crítica, T_c , e diamagnetismo perfeito, ou seja,

exclusão do campo magnético de seu interior. Esta última característica é denominada **Efeito Meissner**.

A aniquilação da fase supercondutora se dá pela ocorrência de um ou mais dos seguintes fatores: a aplicação de campo externo, a elevação da temperatura na região experimental e, por fim, a aplicação de correntes de transporte, \vec{J}_{tr} . Curiosamente acima de T_c (estado normal) os materiais supercondutores não são bons condutores. Materiais como cobre, prata e ouro não exibem o fenômeno da supercondutividade.

Em 1957, John Bardeen, Leon Cooper e J. Robert Schriffer (Phys. Rev. 108, 1175) propuseram uma teoria microscópica que supõe os superelétrons como sendo os portadores de carga do estado supercondutor. Eles são formados por dois elétrons (pares de Cooper) com spins e momentos lineares opostos, atraídos pelos fônons (vibrações) da rede. Essa teoria é conhecida por teoria BCS, que rendeu aos seus autores o Prêmio Nobel de Física de 1972.

4.2 Tipos e aplicações

Durante algum tempo, pensou-se que todos os materiais supercondutores tivessem o mesmo comportamento, mas, hoje, conhecem-se dois tipos de supercondutores: os do tipo I, que abrangem a maior parte dos supercondutores metálicos (elementos puros e ligas), e os do tipo II, abrangendo todos os compostos cerâmicos e algumas ligas metálicas.

Os supercondutores do tipo I e do tipo II têm respostas diferentes quanto à aplicação de campos magnéticos externos. Os supercondutores do tipo I apresentam somente o estado Meissner. Nesse estado, não há penetração de fluxo magnético, então surgem correntes que blindam o material. Já os supercondutores do tipo II apresentam dois valores de campos magnéticos críticos. Um campo

inferior, H_{C1} , geralmente baixo, que limita a região onde a amostra exclui todo fluxo de seu interior (efeito Meissner). Para $H > H_{C1}$, começa a haver penetração de linhas de fluxo magnético no interior da amostra, originando o chamado estado misto.

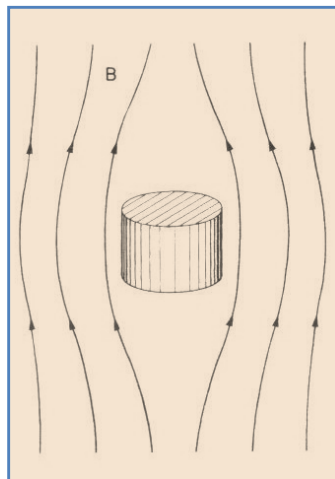
As aplicações são várias, como construção de bobinas com fios supercondutores, que possibilitam gerar campos magnéticos intensos, os quais seriam impraticáveis se fossem utilizados fios comuns, como exemplo, fios de cobre. Essas bobinas podem ser usadas na construção de *Maglev* (trens que levitam); aparelhos de ressonância magnética nuclear, que geram um campo magnético homogêneo na região onde o paciente é colocado e um sensor capta informações que formarão as imagens e, por fim, sensores SQUID (*Superconducting Quantum Interference Device*), que permitem realizar medidas magnéticas extremamente sensíveis. É interessante citar também, a aplicação dos supercondutores no ramo da Física: Óptica Quântica.

O futuro da pesquisa da supercondutividade está em encontrar materiais que possam se tornar supercondutores à temperatura ambiente. Assim que isso acontecer, todo o mundo da eletrônica, da energia elétrica e dos transportes passará por uma revolução.

4.3 O efeito Meissner

O **efeito de Meissner** (também conhecido como o **efeito Meissner-Ochsenfeld**) é a expulsão de um campo magnético de um supercondutor. Walther Meissner e Robert Ochsenfeld descobriram este fenômeno em 1933 pela medição da distribuição do fluxo externo a espécimes condutores aos quais eles resfriaram abaixo de sua temperatura de transição. Os espécimes se tornaram perfeitamente diamagnéticos, cancelando todo o fluxo interno. O experimento forneceu uma definição unificada das propriedades do estado de supercondutividade.

O **efeito Meissner** mostra que um supercondutor não é idêntico a um condutor perfeito que obedece às leis do Eletromagnetismo de Maxwell. Um condutor perfeito só consegue reagir a uma *variação* de fluxo magnético no seu interior. Um supercondutor, por sua vez, reage à variação de fluxo magnético ou simplesmente à presença de um campo magnético estático, excluindo-o de dentro do material se $T \leq T_c$. Assim, se aplicamos um campo magnético a um material supercondutor em seu estado normal ($T > T_c$) e o resfriamos sob a ação deste campo, veremos ocorrer uma exclusão abrupta do fluxo magnético ($\vec{B} \rightarrow 0$) do interior do material quando $T = T_c$. Para mantermos o estado supercondutor é importante que o campo magnético não ultrapasse o valor crítico H_c que destrói a supercondutividade.



Um cilindro supercondutor em um campo magnético. (Extraído do livro *Lições de Física de Feynman: vol. 3* de Feynman, Leighton, Sands).

4.3.1 A equação de London para o efeito Meissner

Se o campo magnético é aplicado depois do material estar superconduzindo, explana-se que ele não penetra na amostra. Na verdade, ele penetra uma distância muito pequena, chamada de profundidade de penetração de London (JACKSON, 1983, p.603).

Para desenvolver o conceito, inicia-se supondo que a densidade de corrente, \vec{J} , dentro de um supercondutor é causada pelo movimento de portadores de densidade de carga, ρ . Se a velocidade de movimento do fluido de elétrons é v , a densidade de corrente será:

$$\vec{J} = \rho \vec{v}$$

Da dinâmica de partículas carregadas em campos eletromagnéticos externos, tem-se o momento canônico conjugado \vec{P} ,

$$\vec{P} = m\vec{v} + q\vec{A} \quad (4.1)$$

Note que existem dois pedaços no momento \vec{P} , um é o momento cinético usual, e o outro é a contribuição do potencial vetor.

Logo, na presença de campos eletromagnéticos a corrente pode ser expressa em termos desse momento:

$$\vec{J} = \frac{\rho \vec{P}}{m} - \frac{\rho q \vec{A}}{m}$$

O estado supercondutor é um estado coerente dos portadores de carga com desaparecimento do momento canônico conjugado. $\vec{P} = 0$ foi uma suposição por parte de London, mas agora tem uma base firme na Mecânica Quântica. Isso significa que não existe nenhuma contribuição a \vec{J} pelo momento. A densidade de corrente efetiva dentro de um supercondutor é, portanto

$$\vec{J} = -\frac{\rho q \vec{A}}{m} \quad (4.2)$$

Ou seja, em toda a parte de uma amostra de material supercondutor a corrente é necessariamente proporcional ao potencial vetor. Essa equação foi originalmente proposta por London e London (LONDON apud FEYNMAN, 2008, p.21-10) para explicar as observações experimentais da supercondutividade – muito antes da origem quântica dos efeitos ser entendida.

Das equações do Eletromagnetismo de Maxwell, tem-se que o potencial vetor está relacionado com a densidade de corrente através do calibre de Lorentz (Eq. 2.13), no limite estático.

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

Utilizando-se a proposta de London obtém-se:

$$\nabla^2 \vec{A} = \frac{\mu_0 \rho q}{m} \vec{A}, \quad \text{ou,} \quad \nabla^2 \vec{A} = \xi \vec{A}, \quad (4.3)$$

onde ξ é simplesmente uma nova constante $\xi = \frac{\mu_0 \rho q}{m}$.

4.3.2 O efeito Meissner a partir de fótons massivos

A supercondutividade foi descrita durante muito tempo pela teoria dos irmãos London (H. London e F. London). Contudo, alguns pesquisadores têm explicado os fenômenos relativos à supercondutividade por meio de fótons massivos, como no caso do efeito Meissner.

Os fótons massivos, como de costume, ganharam massa a partir do mecanismo de Higgs quebrando a simetria de calibre. Partindo das equações de Maxwell-Proca (Eq. 3.1 a 3.4), tem-se:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \xi \Phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} + \xi \vec{A} = \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{E} + \mu_0 \vec{j}$$

Tirando-se o rotacional da Eq. 3.4, e desprezando o termo de radiação, obtém-se:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \xi \vec{\nabla} \times \vec{A} = \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{j}$$

Usando a identidade vetorial (Eq. 2.20) e sendo $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ (Eq. 2.8),

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} + \xi \vec{B} = \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{j}$$

Como $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ (Eq. 3.3),

$$\nabla^2 \vec{B} = \xi \vec{B} - \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{j}$$

Na ausência de correntes,

$$\nabla^2 \vec{B} = \xi \vec{B} \quad (4.4)$$

De maneira análoga, aplicando-se o gradiente na Eq. 3.1,

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) + \xi \vec{\nabla} \Phi = \vec{\nabla} \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Usando a identidade vetorial (Eq. 2.20) e $\vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi$ (estático),

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \nabla^2 \vec{E} - \xi \vec{E} = \vec{\nabla} \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$-\vec{\nabla} \times (\partial_t \vec{B}) + \nabla^2 \vec{E} - \xi \vec{E} = \vec{\nabla} \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Na ausência de correntes e desprezando o termo de radiação,

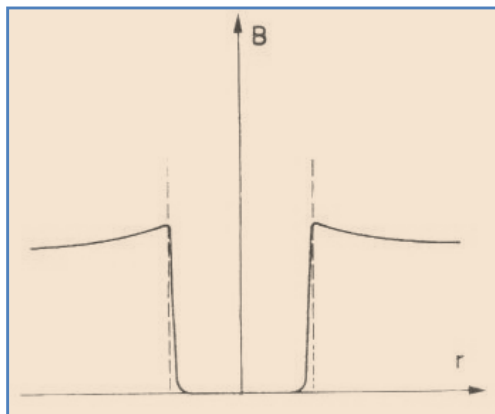
$$\nabla^2 \vec{E} = \xi \vec{E} \quad (4.5)$$

Portanto, a partir de fótons massivos tem-se:

$$\nabla^2 \vec{B} = \xi \vec{B} \quad \text{e} \quad \nabla^2 \vec{E} = \xi \vec{E},$$

que representa o efeito Meissner, o qual foi obtido anteriormente pelo acréscimo de um termo na densidade de corrente das equações de Maxwell com fótons não massivos.

Isso evidencia que o campo no interior do supercondutor é limitado por um comprimento de penetração. Pode-se agora tentar resolver essa equação para \vec{B} (Eq. 4.4) ou \vec{E} (Eq. 4.5). Por exemplo, em uma dimensão ela possui soluções exponenciais da forma $e^{-\sqrt{\xi}r}$ e $e^{\sqrt{\xi}r}$. Essas soluções significam que o campo deve decrescer exponencialmente à medida que “caminha-se” da superfície para dentro do material. Se o pedaço de metal é grande comparado com $\frac{1}{\sqrt{\xi}}$, o campo somente irá penetrar em uma pequena camada da superfície – uma camada com espessura aproximadamente $\frac{1}{\sqrt{\xi}}$. Todo o restante da parte interna do metal estará livre do campo. Logo, o campo eletromagnético só penetra no supercondutor até certa profundidade, que por sua vez está associada à massa do fóton, com um comportamento exponencial. Essa é a explicação para o efeito Meissner.



Campo magnético \vec{B} como função de r . (Extraído do livro *Lições de Física de Feynman: vol. 3* de Feynman, Leighton, Sands).

Esta profundidade está presente na teoria de London pela chamada profundidade de penetração de London é $\lambda_l = \frac{1}{\sqrt{\xi}}$. De um modo geral os resultados importantes que eram obtidos com a teoria de London para supercondutores são também obtidos pela teoria de Maxwell-Proca, geralmente de maneira mais consistente.

E, quão grande é a distância $\frac{1}{\sqrt{\xi}}$?

Para exemplificar, lembrando-se que o “raio eletromagnético” do elétron de valor $2,8 \cdot 10^{-13} \text{cm}$, é dado por

$$mc^2 = \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Lembrando-se da equação $\xi = \frac{\mu_0 \rho q}{m}$ (Eq. 4.3), onde q é duas vezes a carga de um elétron devido aos pares de Cooper, tem-se

$$\frac{q_e}{\epsilon_0 mc^2} = \frac{8\pi r}{q_e}$$

Escrevendo-se ρ como $q_e N$, onde N é o número de elétrons por centímetro cúbico, tem-se

$$\xi = 8\pi N r$$

Para um metal como chumbo, por exemplo, existem cerca de $3 \cdot 10^{22}$ átomos por cm^3 , então se cada um contribuir com somente um elétron de condução, $\frac{1}{\sqrt{\xi}}$ será em torno de $2 \cdot 10^{-5} \text{cm}$. Assim, tem-se um exemplo da ordem de grandeza.

E de quanto seria a massa do fóton associado a essa distância?

Trazendo a Eq. 3.20:

$$\xi = \left(\frac{m_\gamma c^2}{\hbar c} \right)^2,$$

e sabendo-se que $\hbar c = 197,3284 \text{MeV} \cdot \text{Fm}$,

encontra-se uma massa, m_γ , de aproximadamente $0,98 \text{eV}/c^2$.

Para fins de comparação, a massa de um elétron é de aproximadamente $5,11 \cdot 10^5 \text{eV}/c^2$.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A invariância do Eletromagnetismo de Maxwell sob as transformações de calibre tem profundas conseqüências nas Eletrodinâmicas Clássica e Quântica. Em particular, a simetria de calibre justifica a existência de um portador de massa zero do campo eletromagnético.

Ao se fazer uma análise da teoria Eletrodinâmica de Maxwell e, comparativamente, da Eletrodinâmica de Maxwell-Proca, verifica-se que as equações de movimento têm a mesma estrutura formal. A diferenciação fica por conta de termos extras envolvendo o parâmetro ξ (associado à massa do fóton) e os potenciais elétrico e magnético. Atesta-se que o efeito destes termos extras é mais profundo, pois envolve quebra de simetria de calibre, levando à aparição de comportamentos e propriedades bem distintas das propriedades do Eletromagnetismo usual.

Primeiramente, vê-se que a aparição de termos envolvendo os potenciais nas equações de movimento quebra a simetria de calibre presente no Eletromagnetismo usual, ou seja, esta teoria não é mais invariante de “gauge”. Assim, em contraste com as equações de Maxwell, os potenciais adquirem um significado físico real (observável), mediante o novo parâmetro.

Além disso, em Maxwell, o calibre de Lorentz era uma escolha que se podia adotar, enquanto que no Eletromagnetismo de Maxwell-Proca é uma condição obrigatória exigida pela conservação de carga, ou seja, uma propriedade inerente ao sistema, que expressa a relação obrigatória entre os potenciais.

As soluções livres do campo de Maxwell explicitam apenas dois modos independentes de polarização da onda eletromagnética, que, por sua vez, são ortogonais à direção de propagação da onda. Já as soluções livres do campo de Proca possuem três modos de polarização: dois modos transversais e um longitudinal.

Vê-se que o novo parâmetro, ξ , tem relação com o comprimento de onda de Compton do fóton, o que demonstra que este parâmetro é um parâmetro de massa. Pode ser interpretado, então, como a massa de repouso do fóton. Tem-se, portanto, na Eletrodinâmica de Maxwell-Proca um fóton massivo.

A velocidade da luz no vácuo é um limite que nenhuma partícula massiva pode alcançar. As ondas eletromagnéticas de Proca, agora, viajam a uma velocidade que tende a c , conforme a frequência se aproxima do infinito. Aproximar-se de infinito significa $E \gg mc^2$, sendo m a massa de repouso do fóton de Proca.

A carga, a energia e o momento total são conservados na Eletrodinâmica de Maxwell-Proca, conforme acontecia em Maxwell. No entanto, a energia transportada pelo campo, em Maxwell-Proca, é igual ao de Maxwell, somado a termos adicionais devido ao parâmetro de massa. Logo, o campo de Maxwell-Proca, de uma dada frequência, torna-se mais energético do que o campo de Maxwell, de mesma frequência e com as mesmas amplitudes.

É importante notar que existe uma concordância entre os fenômenos físicos descritos pela Eletrodinâmica Padrão (Maxwell) e pela Eletrodinâmica Massiva (Proca); as duas descrições fundem-se continuamente no limite em que a massa do fóton se anula, o que afirma o princípio de transição suave entre as duas eletrodinâmicas.

Na exemplificação do potencial eletrostático gerado por uma carga pontual, surge uma diferenciação drástica: Maxwell descreve o potencial Coulombiano, e Maxwell-Proca descreve o potencial de Yukawa. Devido ao decaimento exponencial, em Maxwell-Proca, o potencial é blindado e possui uma distância crítica, a partir da qual o potencial é praticamente nulo. Assim, assume a forma de Yukawa, esferossimétrica, que mostra a feição característica da massa do fóton.

Na aplicação da Eletrodinâmica de Maxwell-Proca à supercondutividade, vê-se que o efeito Meissner surge de maneira natural e consistente. O campo magnético só penetra no supercondutor até certa profundidade (similar à profundidade de penetração de London) que, por sua vez, está associada com a massa do fóton; e o decaimento da amplitude do campo se dá por um comportamento exponencial. Portanto, de um modo geral, os resultados importantes que eram obtidos com a teoria de London para supercondutores são também obtidos pela teoria de Maxwell-Proca.

A grande conclusão é que a Eletrodinâmica de Maxwell-Proca é uma teoria bastante versátil, passível de ser aplicada em situações diversas, dependendo das características físicas do particular sistema estudado. Como exemplo de aplicações tem-se: a Teoria Quântica de Campos para descrever bósons vetoriais massivos, a supercondutividade, a área das interações fracas, na qual interfere o estudo da procurada partícula escalar de Higgs; aliás, é a partícula de Higgs a responsável pela geração de massa dos bósons vetoriais massivos, entre os quais, no caso da supercondutividade, aparece o fóton.

REFERÊNCIAS

CARVALHO NETO, Edgar Marcelino de. **Eletrodinâmica de Maxwell-Proca**. 2009. 24f. Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro, 2009.

FEYNMAN, Richard P. **Lições de Física de Feynman, volume 2: Eletromagnetismo e Matéria**. ed.def. Porto Alegre: Bookman, 2008.

FEYNMAN, Richard P. **Lições de Física de Feynman, volume 3: Mecânica Quântica**. ed.def. Porto Alegre: Bookman, 2008.

FLEMING, Henrique. **Supercondutividade**. Disponível em: <<http://www.fma.if.usp.br/~fleming/super/super.html>>. Acesso em: 23 nov. 2009.

GASIOROWICZ, Stephen. **Física Quântica**. Rio de Janeiro: Editora Guanabara Dois, 1979, 480p.

GOLDHABER, A. S.; NIETO, M.M. **Terrestrial and Extraterrestrial Limits on the Photon Mass**. Rev. Mod. Phys. 43, 277. New York: APS, 1971.

GONÇALES, Esley Scatena. **A Massa do Fóton e a Eletrodinâmica de Proca**. 2008. 54f. Dissertação de Mestrado – Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 2008.

GRIFFITHS, David J. **Introduction to Electrodynamics**. 3. ed. New Jersey: Prentice-Hall, 1999, 596p.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert. **Fundamentos de Física, volume 3: Eletromagnetismo**. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1994, 334.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jean. **Fundamentos de Física, volume 4: Óptica e Física Moderna**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009, 416.

HAYT, William H., Jr. **Eletromagnetismo**. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1983, 403p.

HELAYËL-NETO, José Abdalla. **Notas do Curso: Introdução à Relatividade Especial em Espaço de Minkowski**. Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro, 2008.

HELAYËL-NETO, José Abdalla. **Notas do Curso: Teorias Eletromagnéticas**. Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro, 2009.

JACKSON, John David. **Eletrodinâmica Clássica**. 2. ed. Rio de Janeiro: Editora Guanabara Dois, 1983, 648p.

LANDAU, L. D.; LIFSHITS, E. M. **The Classical Theory of Fields**. 3. ed. Oxford: Pergamon Press, 1971, 374p.

MARION, Jerry B. **Classical Electromagnetic Radiation**. New York: Academic Press, 1965, 479p.

MARTINS, Nelson. **Introdução à Teoria da Eletricidade e do Magnetismo**. 2. ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1975, 468p.

NUSSENZVEIG, H. Moisés. **Curso de Física Básica – vol. 3: Eletromagnetismo**. São Paulo: Editora Blücher, 1997, 323p.

PARTICLE DATA GROUP (PDG). **Review of Particle Physics**. Physics Letters B 667. Netherlands: Elsevier B. V., 2008, 1340p.

PROCA, Alexandre. **Alexandre Proca, 1897-1955: oeuvre scientifique publiée**. Paris: Georges A. Proca, 1988, 730p.

POENARU, Dorin N. **Proca Equations of a Massive Vector Boson Field**. Disponível em: <http://www.theory.nipne.ro/~poenaru/PROCA/proca_rila06.pdf>. Acesso em: 02 ago. 2009.

SLATER, John C.; FRANK, Nathaniel H. **Eletromagnetism**. New York: McGraw-Hill Book Company, 1947, 240p.

THIDÉ, Bo. **Eletromagnetic Field Theory**. Sweden: Upsilon Books, 1997, 207p.

TURCATI, Rodrigo. **Aspectos do Eletromagnetismo de Partículas Elementares Neutras na Mecânica Quântica Relativística**. 2008. 52f. Dissertação de Mestrado – Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro, 2008.

VANDERLINDE, Jack. **Classical Electromagnetic Theory**. New York: John Wiley & Sons, 1993, 384p.