

## Sobre o Método de Weizsäcker-Williams e suas Primeiras Aplicações

*F. Caruso*

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas  
Rua Dr. Xavier Sigaud 150, 22290-180, Rio de Janeiro, RJ, Brazil

### **Resumo:**

O Método de Weizsäcker-Williams (ou aproximação dos fótons virtuais) é discutido em detalhes, começando por mostrar suas origens: em especial, as contribuições de Niels Bohr e Enrico Fermi. Segue-se a derivação semi-clássica do método, a discussão de seus limites de aplicação e a determinação do espectro dos fótons equivalentes. Apresentam-se, a seguir, as aplicações estudadas pelos próprios autores do método em questão, além de outras as quais, em última análise, levaram outros físicos a generalizar este método deduzindo sua fórmula básica a partir da Teoria de Campos. Concluindo, apresenta-se, resumidamente, como foram feitas essas generalizações, mostrando algumas de suas aplicações.

### **Abstract:**

The Weizsäcker-Williams method (or the equivalent photon approximation method) is discussed in detail, and we start from its origin: in particular, we comment the contribution from Niels Bohr e Enrico Fermi. A semi-classical derivation of the method follows, where the conditions of applicability are discussed and the equivalent photon spectrum is determined. The original applications of the method by its authors are presented, besides other which led to its generalization and a derivation of the W.W.-formula based on Field Theory. We conclude with a brief presentation of this generalization of the method and a few comments about its uses.

## 1. Introdução

Neste trabalho, procuramos dar uma idéia do que seja o método semi-clássico desenvolvido por C.F. von Weizsäcker e E.J. Williams, no período de 1933-35, com origem no estudo das interações de partículas carregadas com a matéria. Este é conhecido como *Método de Weizsäcker-Williams (W.W.), aproximação dos fótons equivalentes* ou ainda *método dos quanta virtuais*. Nossa principal motivação para abordar esse assunto deve-se ao fato de que, passado muito tempo, o método de W.W. ainda é utilizado.

Do eletromagnetismo clássico, sabemos que existe uma semelhança entre os campos elétrico e magnético de uma partícula carregada, que se move a uma velocidade próxima à da luz, e os campos de um pulso de radiação, como veremos mais adiante. É justamente esta semelhança que é explorada no método de W.W.

Podemos dizer, resumidamente, que esse método consiste em *substituir* a partícula que incide sobre um alvo por um pulso de radiação equivalente, o qual pode ser visto como um *conjunto de fótons virtuais*. Isto nos permite determinar o espectro de radiação equivalente e, a partir daí, podemos calcular os efeitos da interação do alvo com os fótons virtuais. Deste modo, fica determinada a relação entre processos de colisão de partículas carregadas e os efeitos de radiação. Em outras palavras, dado um certo processo  $A$ , devido à interação eletromagnética de uma partícula com um alvo, podemos obter a seção de choque  $\sigma_A$  para o processo a partir da seção de choque de fotoprodução por fótons livres,  $\sigma_\gamma$ , via método de W.W. O procedimento é simples: uma vez conhecida a seção de choque de fotoprodução e a densidade de fótons virtuais equivalentes, basta integrá-la sobre todo o espectro de fótons equivalentes.

Já o procedimento para determinarmos este espectro é resumidamente o seguinte: (i) achamos a transformada de Fourier de cada componente do campo eletromagnético criado pela partícula incidente; (ii) determinamos o espectro de frequência (energia por unidade de área, por intervalo de frequência) do pulso equivalente; (iii) integramos o espectro de frequência em todos os parâmetros de impactos possíveis, obtendo, assim, a distribuição de energia por intervalo de frequência e (iv) determinamos o número de fótons equivalentes.<sup>1</sup>

Inicialmente, procuramos apresentar, na Seção 2, as origens históricas do método de W.W., comentando, em especial, as contribuições de Niels Bohr e de Enrico Fermi para o desenvolvimento do método em questão. Faremos, ainda nesta seção, uma comparação com os primeiros resultados obtidos usando-se a Mecânica Quântica.

Na Seção 3, segue-se uma derivação semi-clássica do método de W.W., na qual procuramos descrever com detalhes o método e seus limites de aplicação, após o que determinamos o espectro de radiação equivalente. Em seguida, discutiremos algumas relações gerais entre fenômenos de colisão entre partículas carregadas e efeitos de radiação, que servirão de base para as aplicações que se seguirão.

Na Seção 4, apresentamos várias aplicações do método de W.W. Além daquelas discutidas pelos autores do método, apresentamos outras que, em última análise, acabaram por levar outros autores a fazer uma generalização deste método e a derivar sua fórmula básica a partir da Teoria de Campos.

Na Seção 5, apresentamos, resumidamente, como foram feitas estas generalizações sem entrarmos no detalhe de suas derivações, pois isto fugiria ao escopo desta monografia. Finalmente, alguns apêndices úteis foram incluídos. Tomamos o cuidado de, sempre que possível, citar as referências originais.

---

<sup>1</sup>Obviamente, este procedimento deve ser coerente com os limites de validade do método aproximativo de W.W., que serão discutidos com detalhes no texto.

Esta monografia foi escrita no CBPF, como parte do meu programa de bolsa de Iniciação Científica do CNPq, sob orientação do Prof. Alberto Santoro, a quem agradeço pela sugestão do tema, por sua paciência durante nossas discussões e pelo constante estímulo durante todo o trabalho. Agradeço também a Arthur Kós Maciel pela leitura crítica do manuscrito, bem como ao Prof. Jayme Tiomno pelo incentivo e ao CNPq, pela concessão da minha bolsa.

Rio de Janeiro, 6 de outubro de 1981

Ao arrumar minha biblioteca recentemente, quando mudei de sala no CBPF, aproveitei a ocasião para vasculhar meus papéis e interesses passados e foi quando encontrei o manuscrito inédito desta monografia, a qual foi preparada como parte de minhas atividades de iniciação científica no CBPF. Na época, após seminário apresentado no extinto DRP – Departamento de Relatividade e Partículas –, tive então a honra de ter meu texto encaminhado pelos Professores Alberto Santoro, Jayme Tiomno e Moacyr Souza para publicação como *Notas de Física*. Por motivos alheios à nossa vontade, que não valem a pena ser lembrados aqui, o texto permaneceu inédito todo este tempo. Relendo-o agora, ele continua me parecendo bastante completo, didático e de interesse atual e, sobretudo, acredito que possa ser útil a quem quiser se familiarizar com o método de Weizsäcker-Williams. O espectro de suas aplicações ampliou-se muito nestes 28 anos, englobando um grande número de processos em Física de Altas Energias, incluindo cálculos em QCD e dissociação difrativa. Sendo assim, decidi publicá-lo como *Monografia* do CBPF. Optei por respeitar as escolhas do jovem aprendiz, limitando-me a corrigir alguns erros e a ortografia embora, é claro, se devesse refazer uma resenha sobre esse assunto, faria algumas coisas diferentes. Quem sabe, desta forma, não me anime a estudar suas aplicações mais recentes e a preparar um novo texto de revisão mais abrangente?

Rio de Janeiro, 21 de maio de 2009

## 2. Origens

### 2.1 Tratamento clássico da interação de partículas carregadas com a matéria

Em 1913, Niels Bohr [1] publicou um artigo no qual discute o decréscimo de velocidade dos raios catódicos  $\alpha$  e  $\beta$  quando estes penetram na matéria. Devemos ter em mente que o modelo atômico válido na época era o de Rutherford e, portanto, neste parágrafo, nossa intenção é apenas comentar em linhas gerais um trabalho que pode ser considerado em retrospectiva como a origem do método de W.W.

A primeira teoria para explicar o fenômeno do decréscimo de velocidade dos raios (ou partículas)  $\alpha$  e  $\beta$  ao passarem pela matéria foi elaborada por J.J. Thomson, na qual ele supôs que a perda de velocidade destas partículas devia-se a choques com elétrons contidos nos átomos da matéria. Thomson admitiu também que os elétrons de um átomo só iriam interferir na velocidade da partícula incidente se a distância entre esta e os elétrons fosse da mesma ordem de grandeza da distância  $d$  entre os elétrons atômicos. Este limite baseia-se na hipótese de que para distâncias  $\ell > d$  haveria uma compensação dos efeitos dos diferentes elétrons sobre a partícula incidente.

Outra teoria para explicar a absorção e o espalhamento de partículas  $\alpha$  foi proposta por Darwin,<sup>2</sup> que supôs que as forças atuantes sobre os elétrons devidas aos átomos poderiam ser desprezadas durante colisões muito próximas e violentas entre o elétron e a partícula  $\alpha$ ; colisões estas que ocorrem quando a partícula incidente passa pelo átomo ao qual o elétron pertence, o que corresponde ao limite efetivo da teoria de Thomson. Por outro lado, a velocidade da partícula  $\alpha$  não seria alterada se ela não passasse pela região atômica. Cabe notar que com esta teoria Darwin obteve valores incorretos para o diâmetro atômico, principalmente para os átomos mais leves e para os mais pesados.

Bohr discordou do fato de Darwin ter tomado a superfície dos átomos como sendo o limite para o efeito dos elétrons sobre as partículas e sugeriu [1] que um limite para este efeito dos elétrons sobre a velocidade das partículas incidentes sobre um alvo deve ser obtido levando-se em consideração as forças que mantêm os elétrons em suas posições nos átomos. Sob a influência destas forças, os elétrons iriam oscilar quando perturbados por forças externas. De fato, seja  $T$  o tempo de vibração e  $T_b$  o tempo de colisão, *i.e.*, o tempo gasto pela partícula incidente para percorrer uma distância da ordem de grandeza do parâmetro de impacto  $b$  da colisão. Como a interação entre o elétron e a partícula incidente é coulombiana, a intensidade da interação entre ambos decresce rapidamente com o aumento da distância entre eles. Assim, o efeito do elétron será muito pequeno, se o parâmetro de impacto for suficientemente grande de modo a termos  $T_b \gg T$  (o que define uma colisão distante). Portanto, se ao invés de considerarmos os elétrons livres nos átomos, levamos em conta forças que tendem a mantê-los em suas posições, estas irão alterar significativamente o movimento dos elétrons, durante a colisão, somente quando  $T_b \simeq T$ . Conseqüentemente, a perda de energia da partícula incidente também só será alterada significativamente quando  $T_b \simeq T$ .

Além disso, nesse artigo, Bohr sugere a existência de uma grande analogia entre a teoria do decréscimo de velocidade de partículas carregadas ao atravessarem a matéria e a teoria eletromagnética da dispersão. Em outras palavras, *deve existir uma analogia entre a passagem de partículas carregadas pela matéria e a passagem de um pulso ou um trem de ondas por um meio dispersivo* (caracterizado por sua constante dielétrica ser dependente da frequência dos campos). Analisemos um pouco esta analogia. Devido à linearidade das equações de Maxwell, podemos obter uma nova solução das mesmas a partir de uma superposição linear de soluções de

<sup>2</sup> *Philosophical Magazine* **23** (1912) 907.

diferentes frequências. Num meio dispersivo, a velocidade de fase de cada componente da onda de frequência diferente não é a mesma; isto implica que componentes do pulso de frequências (ou comprimento de onda) diferentes se deslocam, através de um meio dispersivo, com velocidades diferentes. Conseqüentemente, existe uma tendência para que a forma do pulso não seja mantida durante a sua passagem pelo meio. Por outro lado, partículas que possuem diferentes velocidades interagem de forma diferente com os elétrons da matéria, como já foi visto. Para levarmos em conta a possibilidade de dispersão, devemos tomar a frequência  $\omega$  como função do comprimento de onda (mais comumente do número de onda  $k$ ). Já nos fenômenos de choque, o tempo de colisão é função da velocidade e do parâmetro de impacto. Então, a analogia à qual Bohr se refere não é outra coisa senão a analogia entre as expressões  $\omega = \omega(k)$  do fenômeno de dispersão, e  $\omega_b = \omega_b(v)$  do fenômeno de colisão, onde definimos  $\omega_b = 2\pi/T_b$  como a frequência de colisão.

Para introduzir o efeito produzido pelas forças que atuam sobre os elétrons devido aos átomos, Bohr adotou a seguinte simplificação: admitiu que a frequência de vibração dos elétrons é tão pequena de modo que  $T \gg T_b$ , para colisões onde  $b \simeq \lambda$ .<sup>3</sup> Então, só devemos considerar a influência das forças em questão, para colisões nas quais  $b$  é grande comparado com  $\lambda$ , pois já vimos que a perda de energia da partícula incidente só é alterada significativamente quando  $T_b \simeq T$ . Logo, os cálculos envolvidos aqui são bastante simplificados, pois o deslocamento do elétron é muito pequeno em comparação a  $b$  e, portanto, pode ser desprezado durante o tempo de passagem do projétil. Com essas hipóteses, podemos considerar a trajetória da partícula incidente como aproximadamente uma linha reta, representada por  $\overline{AB}$ , na figura a seguir.

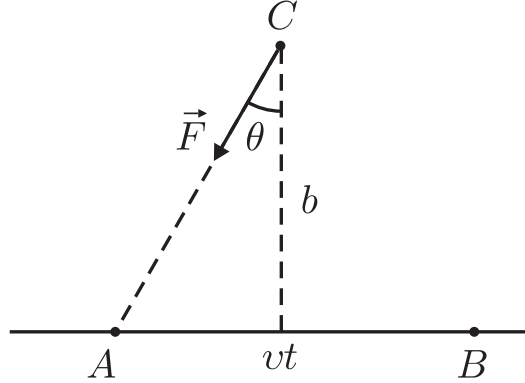


Figura 1

Decompondo o movimento do elétron em duas direções, uma perpendicular e outra paralela à trajetória incidente, Bohr obteve para a força atuante sobre o elétron na direção  $CB$ ,

$$F_{\perp} = \frac{eq_{in}}{AC^2} \cos \theta = \frac{eq_{in}\overline{BC}}{AC^3} = \frac{eq_{in}b}{(v^2t^2 + b^2)^{3/2}} \equiv m\phi_{\perp}(t)$$

Assim, Bohr chegou à seguinte equação para o movimento do elétron na direção perpendicular à trajetória da partícula incidente:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \phi_{\perp}(t)$$

<sup>3</sup>A quantidade

$$\lambda \equiv \frac{eq_{in}(M+m)}{v^2mM} = \frac{eq_{in}}{v^2\mu}$$

é um parâmetro introduzido convenientemente, com dimensão de comprimento que, no caso de forças repulsivas entre as partículas que colidem, representa a distância de máxima aproximação entre elas numa colisão frontal ( $b = 0$ );  $q_{in}$ ,  $e$ ,  $M$  e  $m$  são, respectivamente, as cargas e as massas das partículas incidente e do elétron e  $\mu = mM/(m+M)$ , a massa reduzida do sistema.

onde o ponto denota derivada temporal e  $\omega$  é a frequência correspondente às forças em questão.<sup>4</sup>

De modo análogo, para a direção paralela à trajetória da partícula, temos

$$F_{\parallel} = \frac{eq_{in}\overline{AB}}{AC^3} = \frac{eq_{in}vt}{(v^2t^2 + b^2)^{3/2}} \equiv m\phi_{\parallel}(t)$$

Com estas equações ele vai obter a energia total transferida para o elétron durante a colisão, que será a soma das energias correspondentes a estes dois movimentos. Deste modo, a expressão para a taxa de variação da energia da partícula que passa através da matéria,  $-dT/dx$ , para átomos de um elétron, obtida por Bohr,<sup>5</sup> é:

$$-\frac{dT}{dx} = \frac{4\pi Ne^2q_{in}^2}{mv^2} \log \frac{gmv^3}{2\pi q_{in}e\omega}$$

onde  $g = 1.123$ ,  $m$  e  $e$  são, respectivamente, as massa e carga do elétron e  $q_{in}$  é a carga da partícula que se move com velocidade  $v$ ;  $N$  é a densidade volumétrica de átomos.

Para chegar à expressão anterior, Bohr supôs que:

- (i) A frequência  $\omega$  é pequena comparada com  $v/\lambda$ ;
- (ii) A velocidade  $u$  do elétron em sua órbita não perturbada é pequena comparada com a velocidade  $v$  da partícula incidente;
- (iii) As dimensões lineares  $\ell$  das órbitas são pequenas comparadas com  $v/\omega$ ; deste modo, para (ii) e (iii) serem satisfeitas simultaneamente devemos ter  $u = \omega\ell$ ;
- (iv) O deslocamento dos elétrons causado pelas forças devidas à partícula incidente é pequeno em relação às dimensões da órbita não perturbada para as colisões onde levamos em conta as forças devidas ao átomo. Em outras palavras, processos como o de ionização, por exemplo, nunca ocorrerão em tais colisões.

Voltando às equações

$$F_{\perp} = \frac{eq_{in}b}{(v^2t^2 + b^2)^{3/2}} \tag{1}$$

$$F_{\parallel} = \frac{eq_{in}vt}{(v^2t^2 + b^2)^{3/2}}$$

vemos que elas são os limites das equações (49) do Apêndice A quando  $\gamma = 1$ .<sup>6</sup> Antes de revermos como Bohr tratou o efeito relativístico, gostaríamos de transcrever, a título de curiosidade, a conclusão de seu artigo de 1913:

<sup>4</sup>A solução para esta equação sujeita às condições  $x = 0$  e  $\dot{x} = 0$  para  $t = -\infty$  é [J.W.S. Rayleigh: *The Theory of Sound*, vol. 1, p. 74, New York: Dover (1945)]:

$$x = \frac{1}{\omega} \int_{-\infty}^t \text{sen } \omega(t-t') \phi_{\perp}(t') dt'$$

e

$$\dot{x} = \int_{-\infty}^t \cos \omega(t-t') \phi_{\perp}(t') dt'$$

<sup>5</sup>Na realidade, a fórmula obtida por Bohr [1] abrange o caso geral de  $n$  elétrons com diferentes frequências, mas vamos nos interessar aqui apenas por átomos de 1 elétron.

<sup>6</sup>Lembre que  $F = eE$  e que a diferença de sinal na segunda equação se deve ao fato de na sua dedução no Apêndice A se ter tomado  $z' = -vt'$ .

*Adopting Prof. Rutherford's theory of the constitution of atoms, it seems that it can be concluded with great certainty, from the absorption of  $\alpha$ -rays, that a hydrogen atom contains only 1 electron outside the positively charged nucleus, and that helium atom only contains 2 electrons outside the nucleus (...).*

O limite  $v \rightarrow c$  foi discutido pelo próprio Bohr em um artigo datado de 1915 [2]. Para  $v \simeq c$ , o cálculo da energia transferida torna-se complicado no caso geral. Porém, baseado em dados experimentais, Bohr concluiu que o valor da energia perdida pelas partículas  $\beta$ , ao passarem através da matéria, vai depender somente das colisões nas quais a energia transferida é muito pequena comparada com a energia total da partícula  $\beta$ , *i.e.*, colisões nas quais  $\lambda \ll b$ , o que introduz muitas simplificações. Utilizando a expressão da força elétrica exercida sobre um elétron em repouso por uma partícula de carga  $q_{in}$  e velocidade uniforme  $v = \beta c$ , ele obteve:

$$F_{\perp} = \frac{eq_{in}\gamma b}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} \quad (2)$$

$$F_{\parallel} = \frac{eq_{in}\gamma vt}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}$$

que são as próprias equações (49) do Apêndice A multiplicadas por  $e$ .

Podemos ver que a força em qualquer instante pode ser calculada utilizando a eletrostática se substituirmos  $v \rightarrow \gamma v$  e, ao calcularmos a componente perpendicular à trajetória, substituirmos a carga  $q_{in} \rightarrow \gamma q_{in}$ , embora deixando-a inalterada na componente paralela.

Esperamos que com o que foi visto até aqui o leitor concorde em considerar esses dois artigos de Bohr pelo menos como uma semente importante para o futuro desenvolvimento do método de W.W. Outro artigo importante para o desenvolvimento deste método foi escrito, em 1924, por Fermi [3]. A idéia fundamental contida neste artigo – que descreve a teoria da dissipação de energia por partículas em movimento – é que a perturbação de um átomo em colisões distantes,<sup>7</sup> sob a ação de uma força perturbativa constante sobre o átomo, é obtida corretamente decomposto-se esta em suas componentes de Fourier e admitindo que cada componente se comporta como radiação de frequência igual à da componente de Fourier. Deixaremos para discutir, em detalhes, as relações entre o método em questão e os trabalhos de N. Bohr e E. Fermi na Seção 3, quando ficará mais claro porque nos referimos a estes trabalhos como a origem do método de W.W.

## 2.2. Primeiros tratamentos quânticos da interação de partículas carregadas com a matéria

Em 1927, Gaunt [4] calculou a potência de frenagem,  $-dT/dx$ , do átomo de hidrogênio para partículas  $\alpha$  já utilizando a Mecânica Quântica. O resultado confirma o resultado obtido classicamente por Bohr. Nesse artigo, Gaunt não considera que a partícula  $\alpha$  seja parte do sistema dinâmico, nem a substitui por ondas de de Broglie, representando-a como uma carga pontual movendo-se com velocidade constante em uma linha reta, constituindo-se, assim, no centro de um campo coulombiano. O parâmetro de impacto (em relação ao núcleo considerado fixo) é grande comparado com as dimensões atômicas. Logo, o efeito sobre o átomo pode ser calculado usando-se a teoria de perturbação de segunda ordem, pois a de primeira ordem dá zero como resultado.

<sup>7</sup>Distâncias muito maiores que as dimensões atômicas.

Já sabemos que quando um feixe de partículas carregadas atravessa uma lâmina de matéria, a energia de cada partícula é reduzida. No entanto, a perda de energia não é a mesma para todas as partículas e, portanto, partículas que incidem sobre a lâmina com a mesma energia emergem com energias diferentes. A dispersão da energia causada pela lâmina é conhecida como *straggling*. A teoria para o *straggling* de partículas  $\alpha$  foi desenvolvida por Bohr [2] que também mostrou que sua teoria não era aplicável às partículas  $\beta$ . Em 1929, Williams [6] publicou um trabalho no qual desenvolve uma teoria tentando explicar esse fenômeno e compara seus resultados com os obtidos experimentalmente. Dando continuidade a esse trabalho, Williams e Terroux [6], em 1930, escrevem um artigo no qual investigam a passagem de partículas  $\beta$  rápidas através de gases. Eles utilizaram neste trabalho uma câmara de Wilson<sup>8</sup> para investigar processos relacionados com a perda de energia de partículas  $\beta$ , cujas velocidades estavam compreendidas entre 0.5 e 0.97 vezes a velocidade da luz. Assim, eles conseguiram mostrar que os resultados obtidos classicamente davam apenas a ordem de grandeza dos efeitos observados como, por exemplo, o de ionização primária. Os valores obtidos para este fenômeno são significativamente maiores que os obtidos da teoria clássica, além de dependerem da velocidade das partículas  $\beta$  de modo diferente. No ano seguinte, foi publicado outro artigo por Williams [7] no qual ele afirma que até aquele momento não havia nenhuma evidência apreciável de que os fenômenos envolvidos com perda de energia por partículas  $\beta$  (e também  $\alpha$ ) ao atravessarem a matéria fossem melhor explicados através da Mecânica Quântica. No entanto, ele ressalva que a diferença fundamental entre a Teoria Quântica e a Teoria Clássica não se manifesta na perda real de energia do feixe ao atravessar certa distância e sim na forma de distribuição dessa energia perdida entre diferentes tipos de colisões, que é o tema deste artigo. Nele, Williams baseia-se nos cálculos de Gaunt [4], realizados a partir do tratamento da dispersão e absorção feito por Dirac, que nos levam a um resultado importante: *quando o tempo de colisão é pequeno comparado com o período natural do elétron atômico, a energia média transferida obtida através da Mecânica Quântica coincide com o valor obtido classicamente.*

Para o escopo deste trabalho, não é de nosso interesse entrarmos nos detalhes desses cálculos; desejamos apenas ressaltar um aspecto muito importante para o estudo do Método de W.W., que está implícito nos cálculos de Gaunt, qual seja: *as leis que governam a perturbação de um átomo pela força elétrica em um campo de radiação podem ser aplicadas à sua perturbação pela força elétrica de uma partícula carregada em movimento, se a reação sobre a partícula é pequena.* Em outras palavras, se a reação sobre a partícula for pequena, podemos considerá-la como o centro de um campo coulombiano, que descreve uma trajetória retilínea, e cujo efeito sobre o átomo é equivalente ao provocado por um pulso de radiação. Para estendermos o cálculo de Gaunt para o limite  $v \rightarrow c$ , não é necessário usarmos a Mecânica Quântica Relativística. Na verdade, basta levarmos em conta a transformação do tempo, decorrente da contração de Lorentz-Fitzgerald do campo da partícula em movimento que, conseqüentemente, irá alterar a dependência do potencial  $V(t)$ .

Em 1932, Williams [8] compara a teoria (não-relativística) da passagem de partículas carregadas pela matéria desenvolvida por Bethe [9], baseada na teoria de colisões de Max Born,<sup>9</sup> com resultados experimentais para alguns processos produzidos pela passagem de partículas  $\alpha$  e  $\beta$  pela matéria. As principais hipóteses de Bethe são:

- (i) A velocidade  $v$  da partícula incidente é grande comparada com a velocidade  $u$  dos elétrons dos átomos atravessados e pequena comparada à velocidade da luz  $c$ ;
- (ii) Termos da ordem de  $(u/v)^2$  e  $(v/c)^2$  são desprezados.

<sup>8</sup> *Proceedings of the Royal Society A* **104** (1923), 1-192.

<sup>9</sup> Na teoria de Born, o efeito da perturbação é obtido por aproximações sucessivas. Veja qualquer livro texto de Mecânica Quântica.



Neste artigo, Williams escreve:

*(...) comparando a fórmula não-relativística de Bethe com resultados experimentais para partículas com velocidades próximas à da luz, podemos deduzir a natureza do efeito relativístico real. Uma aplicação direta da Mecânica Quântica não foi feita para o problema e, portanto, não existe uma fórmula teórica com a mesma generalidade das obtidas por Bethe no caso não-relativístico.*<sup>10</sup>

Uma correção para o efeito relativístico foi feita por Williams [7] para o caso de colisões distantes.

Para nos situarmos melhor, vamos comentar rapidamente a diferença entre a teoria de Bethe e a de Gaunt. No caso de átomos de um elétron, o problema é encontrar a solução para a equação de onda de duas partículas no campo devido a cada uma e no campo do núcleo atômico:

$$\left[ \frac{1}{M} \nabla_R^2 + \frac{1}{m} \nabla_r^2 + \frac{2}{\hbar^2} (E - V) \right] \psi = 0$$

$M$  e  $m$  são, respectivamente, as massas da partícula incidente ( $\alpha$  ou  $\beta$ ) e do elétron atômico;  $R$  e  $r$  são as coordenadas destas duas partículas em relação ao núcleo, que consideramos fixo.  $E = mv^2/2 - E_0$  é a energia total do sistema, onde  $v$  é a velocidade inicial da partícula incidente e  $E_0$  é a energia do átomo não perturbado. Finalmente,  $V$  é a energia potencial do sistema dada por:

$$V = -\frac{Ze^2}{|r|} + \frac{Zeq_{in}}{|R|} - \frac{eq_{in}}{|R-r|}$$

onde  $Ze$  é a carga do núcleo,  $e$ , a carga do elétron e  $q_{in}$ , a carga da partícula incidente. Os termos de perturbação são os dois últimos. Bethe utilizou a teoria de perturbações com uma aproximação de primeira ordem (*i.e.*, fazendo  $\psi = \psi_0 + \psi'_1$  na equação de Schrödinger e desprezando termos contendo o produto de  $\psi'_1$  e o potencial de perturbação). Já o método de Gaunt é radicalmente diferente deste. Conforme já foi visto, ele admite que a partícula incidente praticamente não sofre alteração em sua trajetória; portanto, o parâmetro de impacto não sofre variação. Sua passagem pelo átomo gera um potencial dependente do tempo de modo conhecido [4]. O resultado desta perturbação é encontrado resolvendo-se a equação de onda dependente do tempo para o elétron do átomo.

Sabemos que a dinâmica de uma partícula na Mecânica Quântica não-relativística pode ser expressa pela equação

$$|\alpha, t\rangle = T(t, t_0) |\alpha, t_0\rangle$$

onde  $|\alpha, t\rangle$  representa o estado do sistema num instante  $t$  e  $T(t, t_0)$  é um operador linear que independe do estado inicial  $|\alpha, t_0\rangle$ . Nesta equação, está implícito o princípio da causalidade e o fato de que cada componente de um estado evolui como cada qual o faria independentemente uma das outras. É fácil verificarmos que

$$T(t_2, t_1)T(t_1, t_0) = T(t_2, t_0) \tag{3}$$

$$T(t, t) = 1$$

e

$$i\hbar \frac{dT}{dt} = H(t)T \tag{4}$$

Vamos supor que um certo sistema não perturbado seja descrito por uma hamiltoniana  $H_0$  que se encontre em um auto-estado  $|\alpha, t_0\rangle$ . Em presença de uma perturbação  $V(t)$ , a nova

<sup>10</sup>Identificamos nessas palavras uma motivação para seus artigos seguintes.

hamiltoniana do sistema será  $H_0 + V(t)$ , o que causará uma mudança de estado do sistema. Como já vimos, num instante  $t$ , o estado do sistema será descrito, na visão de Schrödinger,<sup>11</sup> por  $T(t, t_0)|\alpha, t_0\rangle$ . Por comodidade, representemos o estado inicial  $|\alpha, t_0\rangle$  por  $|1\rangle$  e um outro estado arbitrário do sistema por  $|f\rangle$ . Assim, a probabilidade de encontrarmos o sistema no estado  $|f\rangle$  é dada por

$$\mathcal{P}(1 \rightarrow f) = |\langle f|T|1\rangle|^2$$

É conveniente trabalharmos com um novo operador linear

$$\tilde{T} = \exp\left(\frac{iH_0\tau}{\hbar}\right)T$$

onde  $\tau = t - t_0$ . Podemos, assim, reescrever a equação (4) em termos apenas do termo de perturbação  $V$ , *i.e.*,

$$i\hbar\frac{d\tilde{T}}{dt} = \tilde{V}\tilde{T}$$

onde

$$\tilde{V} = \exp\left(\frac{iH_0\tau}{\hbar}\right)V\exp\left(\frac{-iH_0\tau}{\hbar}\right)$$

Logo,

$$\mathcal{P}(1 \rightarrow f) = |\langle f|\tilde{T}|1\rangle|^2$$

o que mostra que os operadores  $T$  e  $\tilde{T}$  são igualmente bons para calcularmos a probabilidade de transição. Se a perturbação  $V(t)$  for pequena, obtemos, em primeira ordem,

$$\mathcal{P}(1 \rightarrow f) = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_{t_0}^t dt' \langle f|V(\tilde{t}')|1\rangle \right|^2$$

Podemos tratar perturbativamente a radiação eletromagnética incidente sobre um sistema. Isto foi feito de fato por Dirac [10], desprezando os efeitos do campo magnético da radiação incidente e admitindo ainda que os comprimentos de onda das componentes harmônicas desta radiação são todos muito maiores que a dimensão característica do sistema atômico. Por simplicidade, ele tratou o caso de uma onda plana polarizada. O resultado encontrado, usando-se a equação anterior, foi o seguinte: *a probabilidade de transição do sistema entre dois estados  $|1\rangle$  e  $|f\rangle$  depende somente das componentes de Fourier da radiação incidente, cuja frequência é dada pela frequência de Bohr  $\nu = |E_f - E_1|/h$ , onde  $E_f$  e  $E_1$  são, respectivamente, as energias destes dois estados. Da Eletrodinâmica Clássica,<sup>12</sup> sabemos que o espectro da radiação incidente (energia que atravessa uma área unitária por intervalo unitário de frequência em torno de uma dada frequência  $\nu$ ) é proporcional ao quadrado da transformada de Fourier do campo elétrico,  $E(\omega)$ . Logo, a probabilidade de transição do sistema é proporcional a  $|E(\omega)|^2$ . Veremos na próxima seção que esta relação simples é importante no contexto do método de W.W. e está relacionada com o método desenvolvido por Fermi para tratar colisões, conforme mencionamos na Seção 2.*

Na conclusão do artigo [8], Williams chama atenção para o fato de que para efeitos como a ionização total de um gás monoatômico, por exemplo, a própria teoria de Bethe não é satisfatória e ressalta a importância de novos cálculos e novas experiências para se vencer essas dificuldades.

<sup>11</sup>Na visão de Schrödinger, os vetores de estado evoluem no tempo e os operadores são fixos, ao contrário da visão de Heisenberg, na qual os vetores de estado são fixos e os operadores evoluem no tempo.

<sup>12</sup>Veja, por exemplo, o livro do Jackson, Cap. 14.

Em especial, o problema da ionização de átomos e a relação entre a perturbação de átomos distantes pelo campo de uma partícula carregada em movimento e a perturbação dos átomos por radiação, baseada no trabalho de Fermi [3] são discutidos no seu artigo de 1933 [13]. Os trabalhos [13-16] tratam da derivação semi-clássica do método de W.W., que será objeto de estudo da próxima seção.

Note que tudo o que discutimos nestas duas primeiras seções está intimamente ligado a fenômenos de espalhamento ou frenagem de partículas carregadas ao passarem pela matéria e efeitos correlacionados. Atualmente, sabemos que o raio atômico é da ordem de  $10^{-8}$  cm e, conseqüentemente, para se chegar a este resultado foi necessário utilizar métodos de observação indireta. Usar partículas carregadas como sondas para compreender a constituição da matéria é um procedimento que herdamos dos trabalhos pioneiros de Thomson e Rutherford e que continua sendo utilizado para obter informações de regiões de dimensões cada vez menores, envolvendo, para isto, energias da sonda cada vez maiores.

N. Bohr e E.T. Williams foram dois físicos que muito contribuíram para o estudo teórico desses fenômenos. O próprio Williams disse uma vez [11] que o seu interesse pelo estudo da teoria de colisões começou ao ler, em 1926, os trabalhos de Bohr [1-2]. Em 1933-34, tiveram a oportunidade de discutir pessoalmente vários aspectos ligados a problemas de colisão e chegaram a fazer, um pouco mais tarde, um plano de trabalho conjunto, o qual não foi levado adiante devido ao isolamento de ambos imposto pela II Guerra Mundial.

Uma discussão detalhada sobre a relação entre a teoria clássica e a aproximação de Born para problemas de colisão pode ser encontrada no artigo de Williams [11], datado de 1945. Outro artigo no qual é discutido o problema da passagem de partículas carregadas pela matéria, dando ênfase à combinação de efeitos clássicos e quânticos, é um artigo de revisão escrito por Bohr em 1948 [12].

Esperamos que com o exposto até aqui tenha ficado claro que dos estudos dos efeitos produzidos por partículas  $\alpha$  e  $\beta$  interagindo com a matéria ficaram lições e idéias que acabaram sendo úteis para o desenvolvimento do método de W.W.

### 3. Derivação semi-clássica do método de W.W.

#### 3.1 Descrição do método

Quando queremos calcular os níveis de energia do átomo de hidrogênio, por exemplo, podemos considerar o núcleo como um centro de força fixo, ou que se move minimamente, devido a sua massa  $M$  ser muito maior que a do elétron,  $m$ ; o erro envolvido nesta aproximação é da ordem de  $\sqrt{m/M}$ . Pelo mesmo motivo, quando estamos tratando de um problema de colisão atômica, podemos também pensar na partícula incidente como um centro de força em movimento, desde que sua massa seja bem maior do que a massa do elétron do átomo. Na verdade, simplificaremos nosso estudo trabalhando apenas com átomos de um elétron. Na maioria das aplicações que se seguem, a partícula perturbada é um elétron e sua massa será sempre menor que a das partículas incidentes. Mesmo no caso de perturbação causada por partículas  $\beta$ , esta condição é satisfeita, pois ela se desloca com velocidade  $v$  para um observador no referencial da partícula perturbada e, portanto, sua massa será aumentada por um fator  $(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ .

Esse foi o procedimento utilizado por Gaunt [4], o primeiro a usar o método do parâmetro de impacto ao mesmo tempo que usava a Mecânica Quântica. Os cálculos de Gaunt são semi-clássicos, pois ainda envolvem o conceito de trajetória e a velocidade da partícula incidente é bem definida, embora ele utilize a Mecânica Quântica, para a qual vale o princípio de incerteza de Heisenberg. Sabemos, no entanto, que existe um limite finito a partir do qual podemos observar um sistema físico sem perturbá-lo; podemos dizer que este é um limite entre as Mecânicas Clássica e Quântica. Assim, quando a reação sobre o sistema estudado for pequena, é lícito utilizar métodos semi-clássicos.

Suponha que um campo perturbador esteja limitado a um volume de dimensão linear  $a$ , onde o potencial é da ordem de  $V$ . Podemos tratar um problema de espalhamento neste campo do ponto de vista clássico, se o comprimento de onda de de Broglie for pequeno comparado com as dimensões do campo espalhador e se a incerteza sobre o momento da partícula,  $h/a$ , for pequena comparada com o momento transferido,  $p \simeq V/v$  [11]. Portanto, um tratamento semi-clássico é válido se

$$\frac{h}{mv} \ll a, \quad \frac{Va}{hv} \gg 1$$

A condição para só podermos utilizar a aproximação de Born é, pelos argumentos apresentados em [11], exatamente oposta:  $Va/hv \ll 1$ . Para o caso do campo coulombiano,  $V = Ze^2/r$ , sendo  $Ze$  a carga nuclear,  $ze$ , a carga da partícula espalhada e  $a \simeq r$ , o que nos leva às seguintes condições:

$$\frac{Va}{hv} = \frac{Zze^2}{hv} \begin{cases} \gg 1, & \text{tratamento clássico} \\ \ll 1, & \text{aproximação de Born} \end{cases}$$

as quais usaremos mais adiante.

É no trabalho clássico de Bohr [1], discutido na Seção 2.1, que conceitos de espaço-tempo ordinário, bem como os conceitos de parâmetro de impacto e tempo de colisão desempenham um papel fundamental no estudo do processo de colisão. Vimos que a principal hipótese de Bohr, nesse artigo, é que o efeito do elétron atômico sobre a partícula incidente deve ser obtido levando-se em conta a força de ligação ao núcleo. Vimos também que o fato de considerarmos esta força só influir na perda de energia da partícula incidente quando  $T_b \gtrsim T$ . Pela definição de tempo de colisão que demos, este é da ordem de  $b/v$ , no caso não-relativístico, onde  $b$  é

o parâmetro de impacto e  $v$ , a velocidade da partícula incidente. Portanto, o elétron pode ser tratado como livre, se o parâmetro de impacto da colisão for da ordem de  $v/\nu \sim (v/u)\ell$ , onde  $\nu$  é a frequência natural do elétron orbital,  $u$ , sua velocidade orbital e  $\ell$ , a dimensão linear da órbita perturbada.<sup>13</sup> Na maioria dos casos práticos, nos quais as partículas incidentes são partículas  $\alpha$  ou  $\beta$ , a velocidade delas é bem maior que a velocidade orbital do elétron e, conseqüentemente, este pode ser considerado como livre até um parâmetro de impacto crítico cuja dimensão é muito maior que a dimensão atômica.

Em 1933, Williams [12] discute a validade e a vantagem do tratamento de colisões entre partículas leves, nas quais o momento transferido é pequeno comparado com o momento da partícula incidente, através do método do parâmetro de impacto. Neste caso, podemos desprezar a variação na trajetória da partícula incidente e, conseqüentemente, considerarmos esta partícula como sendo a origem de um campo de forças coulombiano se movendo numa trajetória retilínea, de acordo com o que discutimos no início desta seção. O parâmetro de impacto é definido em relação ao elétron do átomo. Para obtermos uma determinada probabilidade de excitação do átomo, calculamos, em princípio, a sua perturbação para um certo parâmetro de impacto  $b$  e, então, integramos sobre todos os valores possíveis de  $b$ . A equivalência entre o método do parâmetro de impacto (utilizado por Gaunt) e o método aproximado de Born (Bethe) para calcular a perda de energia em colisões atômicas foi demonstrada matematicamente por Mott [19] e Frame [20]. Mott conseguiu mostrar que se consideramos o elétron no campo do núcleo e no campo de força criado pela partícula perturbadora (problema de um corpo), ou o elétron e a partícula perturbadora no campo do núcleo (problema de dois corpos), obtemos a mesma probabilidade de transição para o elétron, desde que  $m/M \ll 1$ .

Para distâncias muito maiores que as dimensões atômicas (colisões distantes) podemos admitir que a força perturbativa seja uniforme em todo o átomo e podemos decompô-la em uma componente perpendicular  $F_{\perp}$  e outra paralela à direção do movimento  $F_{\parallel}$  da partícula incidente, dadas pelas equações (1), antes de usar a teoria de perturbações. Ao proceder desta maneira, Williams está usando o fato de que se o átomo está sob a influência de duas forças  $F_{\perp}$  e  $F_{\parallel}$ , ambas uniformes sobre ele, a probabilidade de transição total  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\perp} + \mathcal{P}_{\parallel}$ , obtida via teoria de perturbação, é a mesma se o efeito perturbativo é provocado pelo campo de uma partícula carregada, ou se provocado por campo de radiação (no caso, plano-polarizada).

Esse procedimento utilizado por Williams [13] se assemelha bastante ao procedimento de Bohr [1-2] e simplifica muito os cálculos que haviam sido feito por Gaunt [4], no qual ele trabalhava diretamente com a força resultante. Desta forma, Williams reobteve o resultado clássico de Bohr para a potência de frenagem,  $-dT/dx$ , da partícula carregada que passa pela matéria, com a condição  $vh/J\lambda \gg 1$ ,<sup>14</sup> onde  $J$  é o potencial de ionização do elétron. Lembremos que o resultado obtido por Bohr está vinculado à condição de que  $\lambda$  deva ser pequeno comparado a  $v/\nu$  e que a velocidade orbital do elétron é pequena comparada com a velocidade da partícula perturbadora. Ora, o parâmetro  $\lambda$  pode ser tomado da ordem da dimensão atômica  $\ell$ ; pelo princípio da incerteza,  $\ell \simeq h/mu$ , e a energia de ionização  $J \simeq mu^2$ . Isto implica que a condição  $vh/J\lambda \gg 1$  é satisfeita se  $v \gg u$ . Esta condição resulta também do fato de termos considerado pequena a perturbação provocada pela partícula incidente, o que não se verificaria se  $v \gtrsim u$ . A condição  $v \gg u$  assegura também que todas as colisões distantes sejam necessariamente colisões leves, visto que o movimento transferido ao elétron,  $p \simeq (2mJ)^{1/2} \simeq mu$  e, portanto,  $p \ll mv$ , se  $v \gg u$ .

Quando Williams faz a correção relativística para colisões leves, ele reobtem as expressões (2) às quais Bohr havia chegado para as forças  $F_{\perp}$  e  $F_{\parallel}$ . No caso de colisões leves, vimos que a reação sobre a partícula que está se movendo é pequena e consideramos que esta se move

<sup>13</sup>Veja as hipóteses de Bohr (i), (ii) e (iii) na Seção 2.1.

<sup>14</sup>Condição para aplicação da aproximação de Born.

numa trajetória retilínea. Assim, podemos considerar apenas o efeito relativístico da partícula perturbadora, o que implica que a dissipação de energia nessas colisões pode ser obtida usando a Mecânica Quântica não-relativística, enquanto que o efeito relativístico sobre o campo da partícula perturbadora só influi na perturbação exercida por este campo.

Vejam agora a relação entre o presente trabalho de Williams [13] e o de Fermi [3]. Vimos, na Seção 2.2, que Dirac mostrou que a probabilidade de transição de um sistema é proporcional à intensidade da componente harmônica de frequência  $\nu$  do espectro de Fourier da força perturbadora. O coeficiente de proporcionalidade é exatamente igual ao coeficiente de absorção fotoelétrica da radiação de frequência  $\nu$ , que é a frequência de Bohr para a transição. Isto sugere que, em colisões distantes – nas quais a força perturbativa  $F$  é uniforme sobre o átomo – podemos calcular a perturbação sobre ele tomando a transformada de Fourier de  $F$  e supondo que cada componente se comporte como radiação de mesma frequência. Esta é a principal idéia do trabalho de Fermi. Analisemos melhor esta conexão entre a perturbação em colisões distantes e o efeito fotoelétrico da radiação. Neste último efeito, o movimento do fotoelétron é contrabalançado principalmente pelo recuo do núcleo, enquanto que a reação sobre o campo de radiação é pequena. Estudando a distribuição de átomos excitados e ionizados, em relação à trajetória da partícula perturbadora, Williams verificou que, para colisões distantes, acontece basicamente o mesmo, pois a reação sobre a partícula em movimento é pequena. Neste ponto é conveniente introduzirmos um conceito importante: o de *raio de ação* de uma partícula, o qual tem uma relação íntima com a teoria de Fermi, como veremos a seguir.

Em colisões distantes, podemos admitir que a energia transferida na colisão seja aproximadamente igual ao potencial de ionização  $J$  e, assim, a frequência de Bohr para tal transição é  $f \sim J/h$ . Vimos, no Apêndice A, que os campos produzidos por uma partícula carregada em movimento assumiam valores apreciáveis num ponto do espaço durante um intervalo de tempo  $T_b \simeq b/\gamma v$  (no caso relativístico), chamado tempo de colisão. Os casos limites  $T_b \ll 1/f$  e  $T_b \gg 1/f$  correspondem, respectivamente, a  $b \ll \rho$  e  $b \gg \rho$ , onde  $\rho \equiv \gamma v/J$ , e são discutidos em [13]. Só no segundo caso, no qual a perturbação varia pouco num intervalo de tempo da ordem do período  $1/f$ , é que a probabilidade de transição (proporcional a  $|E(\omega)|^2$ ) é praticamente nula. Portanto, vemos que a maior incidência de átomos excitados e íons se dá até uma distância da ordem de  $\rho$ , sendo desprezível para distâncias maiores. Por este motivo,  $\rho$  é chamado *raio de ação* da partícula. Com isso, vemos que o espectro de frequências tende a assumir valores cada vez menores com o crescimento da frequência  $f$ , até um valor limite dado por  $f_{max} \sim \gamma v/b$ , que satisfaz a condição  $T_b \gg 1/f$ , a partir do qual passa a ter valores insignificantes. Portanto, a relação com o trabalho de Fermi pode ser enunciada da seguinte forma: *o limite  $b \gg \rho$  para o parâmetro de impacto da colisão,  $b$ , a partir do qual são desprezíveis os efeitos criados pela partícula incidente, corresponde ao fato de que, para estes valores de  $b$ , não existe, no espectro de Fourier do campo perturbador, uma frequência suficientemente alta para excitar o átomo.*

Há uma classe de fenômenos de radiação onde a fonte do campo é uma carga pontual em movimento. Do ponto de vista da Eletrodinâmica Clássica, é conveniente desenvolvermos um formalismo no qual a intensidade da radiação esteja intimamente ligada à trajetória da partícula (através do parâmetro de impacto) e ao seu tipo de movimento. De um ponto de vista semi-clássico, vimos que também *é possível correlacionar certos problemas de colisão, envolvendo partículas carregadas, com a teoria da radiação, através da decomposição dos campos criados pelas partículas perturbadoras em componentes de Fourier e, então, comparando o efeito destas componentes com o produzido por radiação homogênea de mesma frequência e intensidade.*<sup>15</sup> Assim, este método sugere um novo ponto de vista para tratar um problema de colisão em duas etapas, qual seja: primeiro representar o campo perturbativo por radiação, e depois calcular os

<sup>15</sup>Estas idéias surgiram com o trabalho de Fermi [3] e foram aperfeiçoadas por von Weizsäcker [15] e Williams [16]. Por este motivo já havíamos adiantado que consideramos que o trabalho de Fermi (juntamente com o de Bohr) muito contribuiu para o desenvolvimento do Método de W.W.

efeitos da radiação.<sup>16</sup> Esta relação entre partícula e radiação, estabelecida pelo método de W.W., justifica-se pelo fato de que a Mecânica Quântica não faz nenhuma distinção, *a priori*, entre o efeito de um campo de uma partícula carregada e aquele de um campo de radiação. Em outras palavras, se dentro de uma mesma região ambos possuem a mesma descrição eletromagnética, então eles produzem os mesmos efeitos dentro desta região, contanto que a reação à interação seja pequena. Aqui estão contidas as condições de aplicabilidade do método de W.W., que vamos discutir a seguir com detalhes.

No Anexo A, mostramos que as componentes do campo produzido por uma partícula carregada, que se move uniformemente ao longo do eixo- $x$ , num ponto  $P$  qualquer do espaço, são dadas pelas equações (49), após o que discutimos o comportamento desses campos no limite  $\beta \sim 1$ . Concluimos então que, neste limite, um observador no ponto  $P$  não consegue distinguir o campo criado pela partícula em movimento e o campo de um pulso de radiação plana polarizada que se propaga na mesma direção da partícula (Figura 2).

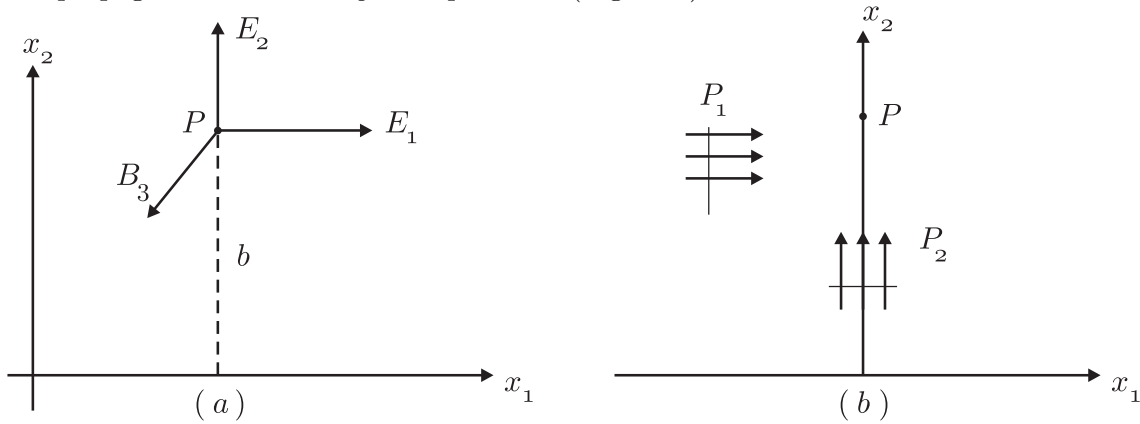


Figura 2

Assim, os campos  $E_2(t)$  e  $B_3(t)$  podem ser representados por um pulso de radiação  $P_1$  que se desloca na direção- $x_1$  (Figura 2b). No entanto, um pulso  $P_2$ , que se desloca segundo a direção- $x_2$ , não reproduz exatamente o campo criado por  $E_1(t)$ , pois não existe nenhuma componente magnética associada a  $E_1(t)$ . Apesar disto, esta é uma boa aproximação na maioria dos problemas de colisão, pois a importância relativa entre o campo magnético e o elétrico, num campo perturbativo de origem eletromagnética, é da ordem de  $(u/c)^2$ , onde  $u$  é a velocidade da partícula perturbadora, que normalmente é pequena em comparação à  $c$ .<sup>17</sup> Para que os pulsos  $P_1$  e  $P_2$  produzam efeitos equivalentes àqueles produzidos pela partícula, já mencionamos anteriormente que a reação sobre a partícula em movimento deve ser pequena, de modo a podermos considerá-la como centro de um campo coulombiano que descreve uma trajetória retilínea.<sup>18</sup> Tiramos daí que a velocidade da partícula perturbadora deve ser bem maior que a velocidade da partícula perturbada; caso contrário, a perturbação não seria pequena. Vimos também que só em colisões distantes a probabilidade de transição do sistema perturbado é a mesma nos casos em que o agente perturbador é uma partícula ou um campo de radiação. Se estas condições são satisfeitas, segue-se que os pulsos  $P_1$  e  $P_2$  representam bem o campo criado pela carga  $q$ , em qualquer ponto do espaço e visto de qualquer outro sistema de referência inercial que se desloque em relação ao sistema no qual a partícula perturbadora está inicialmente em repouso. Logo, são as seguintes as condições para podermos substituir o campo produzido pela partícula por um campo de radiação, sobre a região ocupada pelo sistema perturbado, durante

<sup>16</sup>Somente nesta etapa utiliza-se a Mecânica Quântica.

<sup>17</sup>Estamos supondo aqui que o sistema perturbado esteja em  $P$ .

<sup>18</sup>O efeito do princípio de incerteza é bastante pequeno, porque a incerteza na posição da partícula perturbadora é muito menor que o parâmetro de impacto ( $h/mv \ll b$ ).

um processo de colisão:

- i)  $\ell \ll b$ , onde  $\ell$  é da ordem das dimensões do sistema perturbado;
- ii)  $u(1 - u^2/c^2)^{-1/2} \ll v(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ , onde as velocidades  $u$  e  $v$  são medidas em relação a  $S'$ .

Além das condições (i) e (ii), existe uma terceira (iii) decorrente do fato de que a probabilidade de transição do sistema perturbado depender somente das componentes de Fourier da radiação incidente sobre o sistema,<sup>19</sup> e da linearidade das equações de movimento da Mecânica Quântica. Se existe uma frequência no espectro de Fourier alta o bastante para produzir uma alteração apreciável no estado do sistema perturbado em uma dada colisão, isto irá influir no efeito das demais frequências. Isto só não irá ocorrer se o campo da partícula perturbadora for suficientemente fraco para que, em uma dada colisão, exista somente uma pequena probabilidade  $\mathcal{P}$  do sistema perturbado sofrer uma transição de seu estado inicial. Esta condição,  $\mathcal{P} \ll 1$ , corresponde à condição de aplicabilidade da aproximação de Born para tratar colisões.

Em 1934, Williams [14] comunicou que ele e von Weizsäcker mostraram que a fórmula obtida por Heitler & Sauter [26] para a perda de energia de um elétron em colisões radiativas com um núcleo atômico poderia ser obtida através de um *cálculo relativamente rápido* (método de W.W.). Outras aplicações são discutidas em [16] e envolvem interações entre partículas carregadas e campos eletromagnéticos.

A noção de campo foi introduzida por Faraday<sup>20</sup> e, até então, a interação entre partículas carregadas era entendida com base no conceito de ação à distância, onde a força entre as partículas era concebida como uma interação direta e instantânea entre o par de partículas em interação. Com a introdução do conceito de campo, duas cargas elétricas passam a interagir entre si por intermédio de um campo.<sup>21</sup> Assim, o problema de interação entre dois sistemas de cargas pode ser tratado em duas etapas: primeiro, calculamos o campo produzido por uma das distribuições e, a seguir, calculamos as forças que este campo exerce sobre a outra distribuição de cargas. A diferença fundamental entre os conceitos de ação à distância e de campos está no fato de que neste último a velocidade de propagação da informação levada pelo campo é finita. Tanto o campo elétrico como o magnético satisfazem a equação de uma onda, análoga a de uma corda vibrante, cuja velocidade de propagação da luz no meio em questão, de acordo com a síntese de Maxwell.

Foi tentando explicar o efeito fotoelétrico que Einstein reintroduziu o conceito corpuscular para a luz, mostrando que a própria radiação eletromagnética é quantizada. Esta seria formada de *pequenos pacotes* de energia  $h\nu$  – os *fótons* – onde  $\nu$  é a frequência da radiação. Os fótons se propagam com a velocidade da luz e, de acordo com a Relatividade Especial, devem ter massa de repouso nula. Esse novo conceito deu origem a uma dualidade onda-corpúsculo para a luz, dado que esta deveria ter também um caráter ondulatório que explicasse fenômenos como os de interferência e difração. Esta dualidade só foi compreendida com o advento da Eletrodinâmica Quântica, em 1929. De acordo com esta teoria, a interação entre partículas carregadas é feita através de trocas de fótons, ditos virtuais, pois eles estão fora de suas camadas de massa, *i.e.*, não satisfazem a relação geral da energia relativística  $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$  ( $E = pc$ , no caso dos fótons).

Vimos que, em princípio, o método de W.W. estabelece uma relação entre os efeitos de colisão de uma partícula carregada com um certo sistema e os efeitos produzidos por uma *radiação equivalente* e o mesmo sistema. Podemos associar a cada frequência  $\nu$  do espectro de Fourier do campo criado pela partícula perturbadora um fóton de energia  $h\nu$ . Neste sentido, vemos que o princípio básico deste método é substituir a partícula perturbadora por um espectro de

<sup>19</sup>Veja Seção 2.2.

<sup>20</sup>Um bom resumo sobre a evolução dos conceitos do eletromagnetismo é encontrado em J.M. Bassalo, *Ciência e Cultura* **33**, 1555 (1981).

<sup>21</sup>O conceito de campo é ainda um conceito mais amplo.



fótons virtuais e calcular os efeitos desta *radiação equivalente* sobre o sistema pertrurbado. Por isso, o método de W.W. é também conhecido como *método dos fótons virtuais* ou ainda *método dos quanta equivalentes*. Do ponto de vista das aplicações do método, o que nos interessa mais é a possibilidade de, dado um certo processo  $A$  devido à interação eletromagnética de uma partícula com um alvo, podermos obter a seção de choque  $\sigma_A$  para o processo, a partir da seção de choque de fotoprodução por fótons livres,  $\sigma_{\gamma\gamma}$ , via método de W.W. E o procedimento para isso é simples: basta integrarmos a seção de choque de fotoprodução sobre todo o espectro dos fótons equivalentes, ou seja,

$$\sigma_A = \int_{\hbar\omega_{limiar}}^{\hbar\omega_{max}} \sigma_{\gamma\gamma}(\hbar\omega) N(\hbar\omega) d\hbar\omega \quad (5)$$

onde  $N(\hbar\omega)$  é o número de fótons virtuais por unidade de energia, que determinaremos na próxima seção.

### 3.2 Determinação do espectro de fótons equivalentes

Para determinarmos o espectro de radiação equivalente, vamos calcular a distribuição de energia por unidade de área e por intervalo unitário de frequência – o espectro de frequência  $I(\omega b)$  – dos pulsos  $P_1$  e  $P_2$ , cujos campos são dados pelas equações (49). Sabemos da Eletrodinâmica Clássica que

$$I(\omega, b) = \frac{c}{2\pi} |E(\omega)|^2$$

onde  $E(\omega)$  é a transformada de Fourier do campo elétrico do pulso de radiação

$$E(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} E(t) e^{i\omega t} dt$$

O espectro de frequência  $I_1(\omega, b)$  do pulso  $P_1$  é dado por

$$I_1(\omega, b) = \frac{c}{2\pi} |E_2(\omega)|^2$$

onde

$$E_2(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q\gamma b}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} e^{i\omega t} dt$$

ou, definindo  $\xi = \gamma v t / b$ ,

$$E_2(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{q}{vb} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[i\omega b \xi / \gamma v]}{(1 + \xi^2)^{3/2}} d\xi$$

que é uma integral do tipo calculado no Apêndice B, com  $a = \omega b / \gamma v$ . Logo, em termos da função de Bessel modificada de segunda ordem,  $K_1$ ,

$$E_2(\omega) = \frac{q}{bv} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \left[ \frac{\omega b}{\gamma v} K_1 \left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right) \right]$$

Analogamente, para o pulso  $P_2$ ,

$$I_2(\omega, b) = \frac{c}{2\pi} |E_1(\omega)|^2$$

onde

$$E_1(\omega) = -\frac{q\gamma v}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{te^{i\omega t}}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} dt$$

ou

$$E_1(\omega) = -\frac{q}{\gamma b v} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi \exp[i\omega b \xi / \gamma v]}{(1 + \xi^2)^{3/2}} d\xi$$

cuja solução em termos da função de Bessel modificada,  $K_0$ , obtida de forma análoga, é

$$E_1(\omega) = -\frac{iq}{\gamma b v} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \left[ \frac{\omega b}{\gamma v} K_0\left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right) \right]$$

Obtemos, assim,

$$I_1(\omega, b) = \frac{1}{\pi^2} \frac{q^2}{cb^2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \left[ \left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right)^2 K_1^2\left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right) \right]$$

$$I_2(\omega, b) = \frac{1}{\pi^2} \frac{q^2}{cb^2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \left[ \frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right)^2 K_0^2\left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right) \right]$$
(6)

Para obtermos o comportamento da distribuição espectral dos pulsos  $P_1$  e  $P_2$  que representam o campo da partícula perturbadora numa colisão cujo parâmetro de impacto é  $b$ , analisemos a expressão

$$I_{1,2}(\omega, b) = \frac{c}{2\pi} \left| \int E_{2,1}(t) e^{i\omega t} dt \right|^2$$

No caso de baixas frequências, *i.e.*, frequências muito menores que a *frequência de colisão* –  $\omega \ll \gamma v/b$  – a exponencial na equação acima varia muito pouco durante o intervalo de tempo para o qual os campos  $E_{2,1}(t)$  são apreciáveis. No caso, a quantidade  $I$  será independente de  $\omega$  e a denotaremos por  $I_0$ :

$$I_0 = \frac{c}{2\pi} \left| \int E_{1,2}(t) dt \right|^2$$

Substituindo os valores de  $E_{2,1}(t)$ , encontramos

$$I_0 = \begin{cases} \frac{q^2}{\pi^2 cb^2} \left(\frac{c}{v}\right)^2, & \text{para o pulso } P_1 \\ 0, & \text{para o pulso } P_2 \end{cases}$$
(7)

Lembre-se que, no caso de  $P_2$ ,  $E$  é uma função ímpar do tempo.

Para frequências altas ( $\omega \gg \gamma v/b$ ),  $E_{1,2}(t)$  variam muito pouco num período da exponencial e, portanto,  $I(\omega, b)$  é desprezível tanto para  $P_1$  como para  $P_2$ . Assim, para o pulso  $P_1$ ,  $I_1(\omega, b)$  é constante para  $\omega \ll \gamma v/b$ , caindo rapidamente na região  $\omega \sim \gamma v/b$  e é desprezível em relação a  $I_0$ , para  $\omega \gg \gamma v/b$ . Já o pulso  $P_2$  só é apreciável na região  $\omega \sim \gamma v/b$ , para a qual sua intensidade em relação a  $P_1$  é da ordem de  $\gamma^{-2}$ . Este comportamento para os pulsos  $P_1$  e  $P_2$  é mostrado na Figura 3.

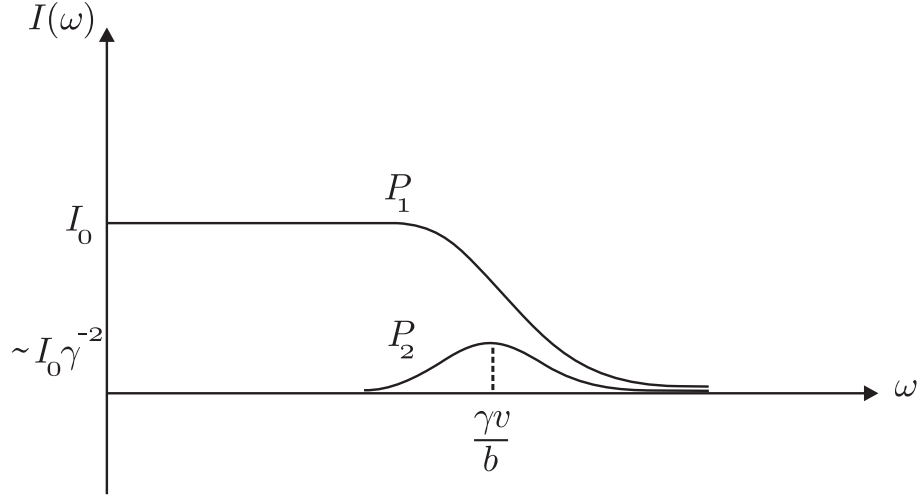


Figura 3

Podemos agora calcular a energia por intervalo de frequência presente no campo de radiação equivalente. Para isto, basta integrarmos o espectro de frequência sobre todos os parâmetros de impacto possíveis:

$$I(\omega) = 2\pi \int_{b_{min}}^{\infty} [I_1(\omega, b) + I_2(\omega, b)] b db \quad (8)$$

A integração, no entanto, não deve se estender até  $b \rightarrow 0$  por imposição da Mecânica Quântica, na qual as partículas são descritas por pacotes de onda. Para podermos falar de um parâmetro de impacto  $b$ , a largura  $\Delta x$  do pacote de onda deve ser menor que  $b$ . Pelo princípio de incerteza, temos que  $\Delta x \gtrsim \hbar/p_{max}$ , onde  $p_{max}$  é o máximo momento transferido na colisão e ao mesmo tempo a relação  $b > \Delta x$  deve ser satisfeita. Isto implica que deva existir um parâmetro de impacto  $b_{min}$  dado por  $b_{min} \sim \hbar/p_{max}$  [46]. Assim, o método de W.W. pode ser utilizado se para valores maiores que  $b_{min}$  os efeitos perturbativos possam ser bem representados por pulsos de radiação equivalente. Já o limite  $b_{max}$  (correspondente a  $p_{min}$ ) não precisa ser discutido, pois vimos que, para distâncias maiores que o raio de ação da partícula, o efeito desta é muito pequeno. Consequentemente, o espectro da radiação equivalente automaticamente incorpora o limiar de corte correspondente a  $p_{max}$ . Por outro lado, devemos poder desprezar os efeitos da partícula perturbadora para  $b < b_{min}$ , ou então utilizar outro método diferente do de W.W.

As integrais que resultam de (8) podem também ser expressas em termos de funções de Bessel modificadas, e o resultado é

$$I(\omega) = \frac{2}{\pi} \frac{q^2}{c} \left(\frac{c}{v}\right)^2 \left[ \xi_{min} K_0(\xi_{min}) K_1(\xi_{min}) - \frac{v^2}{2c^2} \xi_{min}^2 [K_1^2(\xi_{min}) - K_0^2(\xi_{min})] \right] \quad (9)$$

onde  $\xi_{min} \equiv \omega b_{min}/(\gamma v)$ .

Para  $\omega \ll \gamma v/b_{min}$ , ou  $\xi_{min} \ll 1$ , as funções de Bessel modificadas se comportam como<sup>22</sup>

$$K_0(\xi_{min}) \simeq -[\ln(\xi_{min}/2) + 0.5772]$$

e

$$K_1(\xi_{min}) \simeq \frac{1}{\xi_{min}}$$

<sup>22</sup>Veja, por exemplo, Jackson, Cap. 3.

Assim, nesta aproximação, podemos desprezar o termo da  $\mathcal{O}(\xi_{min}^2)$  em (9), pois  $\xi_{min} \ll 1$ , e obtemos

$$\begin{aligned} I(\omega) &\simeq \frac{2q^2}{\pi c} \left(\frac{c}{v}\right)^2 \left[ K_0(\xi_{min}) - \frac{v^2}{2c^2} \right] \\ &\simeq \frac{2q^2}{\pi c} \left(\frac{c}{v}\right)^2 \left[ -\ln(\xi_{min}/2) - 0.5772 - \frac{v^2}{c^2} \right] \\ &\simeq \frac{2q^2}{\pi c} \left(\frac{c}{v}\right)^2 \left[ -\ln(0.8905 \xi_{min}) - \frac{v^2}{2c^2} \right] \end{aligned}$$

que, em termos de  $b_{min}$ , se escreve<sup>23</sup>

$$I(\omega) \simeq \frac{2q^2}{\pi c} \beta^{-2} \left[ \ln \left( \frac{1.123 \gamma v}{\omega b_{min}} \right) - \frac{\beta^2}{2} \right] \quad (10)$$

com a condição  $\omega \ll \gamma v/b_{min}$  e  $\beta \equiv v/c$ .

No limite de altas frequências,  $\omega \gg \gamma v/b_{min}$ , vamos obter

$$I(\omega) \simeq \frac{q^2}{c} \beta^{-2} \left( 1 - \frac{\beta^2}{2} \right) \exp \left( -\frac{2\omega b_{min}}{\gamma v} \right) \quad (11)$$

A Figura 4 mostra o comportamento de  $I(\omega)$ , dado pela equação (9) no limite  $\beta \sim 1$ , assim como a aproximação para baixas frequências, equação (10).

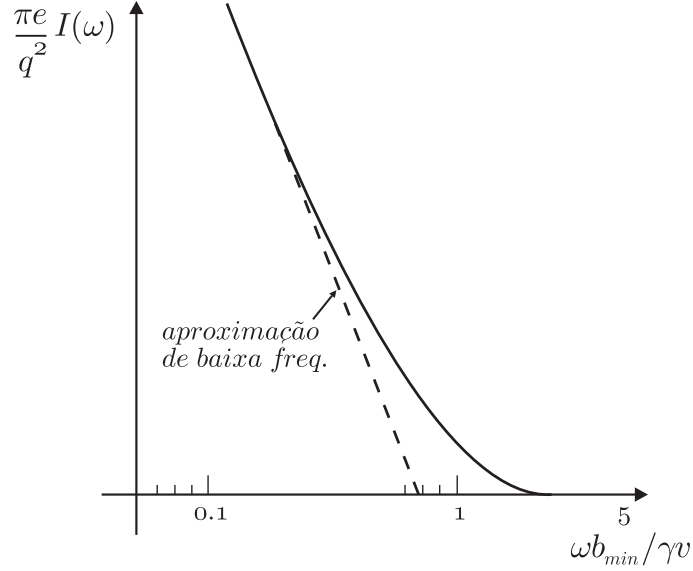


Figura 4

Com uma rápida inspeção da Figura 4, vemos que no limite  $\beta \sim 1$  o espectro de energia da radiação equivalente é constituído predominantemente de fótons de baixas energias, com alguns se estendendo até frequências da ordem de  $2\gamma v/b_{min}$ . Esta distribuição de energia corresponde a um número de fótons virtuais que pode ser obtido através da relação

$$I(\omega)d\omega = \hbar\omega N(\hbar\omega)d(\hbar\omega) \quad (12)$$

<sup>23</sup>Note que a constante 1.123 no argumento do logaritmo já havia aparecido nos cálculos de Bohr.

Das equações (10) e (12) obtemos o número de fótons virtuais por unidade de energia no limite de baixas frequências:

$$N(\hbar\omega) \simeq \frac{2}{\pi} \frac{q^2}{\hbar c} \frac{\beta^{-2}}{\hbar\omega} \left[ \ln \left( \frac{1.123\gamma v}{\omega b_{min}} \right) - \frac{\beta^2}{2} \right] \quad (13)$$

que pode ser reescrita como:

$$N(\hbar\omega) \simeq \frac{2}{\pi} \frac{\alpha Z^2}{\beta^2} \frac{1}{\hbar\omega} \ln \left( f \frac{\gamma v}{\omega b_{min}} \right) \quad (14)$$

onde  $q = Ze$  é a carga da partícula perturbadora,  $\alpha = e^2/\hbar c \simeq 1/137$  é a constante de estrutura fina e  $f \equiv 1.123 \exp(-0.5\beta^2)$ .

Para o caso ultra-relativístico,  $\beta \sim 1$ ,  $f = 0.681$  e

$$N(\hbar\omega) \simeq \frac{2}{\pi} \frac{\alpha Z^2}{\beta^2} \frac{1}{\hbar\omega} \ln \left( 0.681 \frac{\gamma c}{\omega b_{min}} \right) \quad (15)$$

As duas últimas expressões representam, igualmente, o efeito do campo da partícula que se move com um parâmetro de impacto maior que  $b_{min}$  em relação ao sistema perturbado. Então, recapitulando, a validade da aplicação do método de W.W. a problemas de colisão depende do fato de podermos ou não encontrar um valor  $b_{min}$  de tal modo que o efeito do campo da partícula perturbadora seja bem pequeno, para distâncias menores que  $b_{min}$  e que, ao mesmo tempo, o campo perturbador possa ser “substituído” por um campo de radiação, respeitando as condições (i)-(iii) da Seção 3.1.

Na realidade, como vimos que só podemos determinar a ordem de grandeza  $b_{min}$ , deveríamos ter escrito  $g$  no lugar de  $f$  na equação (14) na qual o valor exato de  $g$  não é conhecido, sabendo-se apenas que é um coeficiente da ordem da unidade. *Esta incerteza sobre o valor do coeficiente  $g$  representa o grau de aproximação envolvido no método de W.W. aplicado a um determinado problema.*

Analisando a equação (14) vemos que os principais fatores envolvidos na relação dos efeitos da partícula carregada, com os da radiação, são a constante de estrutura fina  $\alpha$  e o argumento do logaritmo, pois este depende essencialmente da força coulombiana. O coeficiente  $\gamma v/\omega$  representa a distância máxima, em relação à trajetória da partícula que se move com velocidade  $v$ , até onde encontramos a frequência  $\omega$  no espectro do seu campo (veja Figura 4).

### 3.3 Algumas relações gerais entre fenômenos de colisão e de radiação

Nosso objetivo nesta seção é discutir resumidamente algumas relações gerais entre certos fenômenos de colisão e efeitos de radiação, os quais serão tratados em detalhes na Seção 4.

O exemplo mais simples ao qual podemos aplicar o método de W.W. é o de ionização (ou excitação) de um átomo, causado por uma partícula em movimento. Este efeito é relacionado com o efeito fotoelétrico da radiação e pode ser calculado considerando-se a absorção fotoelétrica da radiação equivalente [13] e [16]. Para melhor compreensão deste e dos outros fenômenos que trataremos a seguir, bem como da notação que utilizaremos, achamos conveniente falar rapidamente sobre a *teoria dos buracos* de Dirac [21]. Em 1930, ele formulou esta teoria buscando explicar as soluções de energia negativa da equação de Dirac. Basicamente, o que ele fez foi supor

que os elétrons ocupavam totalmente os níveis de energia negativa, obedecendo o princípio de exclusão de Pauli.

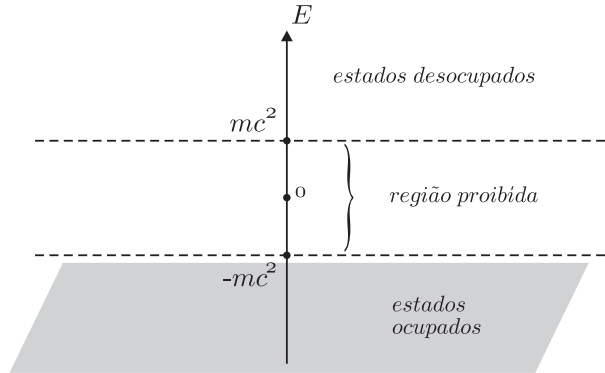


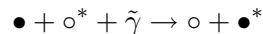
Figura 5

Assim, o vácuo é um estado no qual todos os níveis de energia negativa são ocupados pelos elétrons e todos os níveis de energia positiva estão vazios.<sup>24</sup> É possível que um elétron de energia negativa sofra uma transição para um estado de energia positiva. Caso isto ocorra, vamos observar um elétron de carga  $-|e|$  e energia positiva  $+|e|$ , além de um buraco no mar de elétrons de energia negativa. Este buraco corresponde à ausência de um elétron de carga  $-|e|$  e energia  $-E$ , que, segundo Dirac, pode ser interpretada por um observador externo ao vácuo, com uma partícula de carga  $+|e|$  e energia  $+E$ , o *pósitron*. Esta é a base desta teoria para a interpretação da produção de pares. O processo de aniquilação de pares também pode ser explicado por esta teoria [21].

Agora vamos definir a notação da época que seguiremos para representar os processos que estudaremos. Um estado ocupado por um elétron é denotado por  $\bullet$  e o ocupado por um pósitron por  $\blacksquare$ . Estados de diferentes energias que possam vir a ser ocupados por elétrons ou pósitrons serão representados respectivamente por  $\circ$  e  $\square$ .<sup>25</sup> Um fóton real será representado por  $\gamma$  e o fóton virtual, por  $\tilde{\gamma}$ . O fóton  $\tilde{\gamma}$  possui uma energia  $h\nu_n$  associada a uma frequência  $\nu_n$  do espectro de Fourier do campo criado pela partícula perturbadora em movimento. O fóton real (ou externo) possui uma energia  $h\nu_e$ .

Com isso, estamos aptos a adiantar algumas relações entre fenômenos de colisão e efeitos de radiação para os quais, em quase todos os casos, consideraremos que a partícula perturbadora seja um núcleo atômico e a partícula perturbada, um elétron.

Começemos pelo processo de ionização de um átomo. Como já dissemos, este processo pode ser relacionado com a ação fotoelétrica da radiação, *i.e.*, o sistema ao interagir com esta radiação passa para um estado mais excitado. Esquemáticamente, podemos representá-lo como



o que representa que o estado vazio  $\circ^*$  de energia maior passou a ser ocupado,  $\bullet^*$ , com a absorção do fóton  $\tilde{\gamma}$ . O processo de radiação equivalente é o espalhamento desta radiação.

O processo inverso a este é aquele no qual o átomo excitado perde energia para a partícula perturbadora, o que faz com que ele passe para um estado de energia menor. O processo de radiação equivalente é conhecido como emissão induzida. Como já vimos que o fóton emitido

<sup>24</sup>A região de estados ocupados da Figura 5 é chamada de mar de elétrons com energia negativa.

<sup>25</sup>Quando necessário, denotaremos um estado qualquer excitado por um  $*$  colocado acima e à direita desses símbolos.

pelo átomo deve ser virtual, a representação deste processo é a seguinte:

$$\bullet^* + \circ + N\tilde{\gamma} \rightarrow \circ^* + \bullet + (N + 1)\tilde{\gamma}$$

onde  $N$  é o número de fótons virtuais por intervalo unitário de frequência no campo da partícula perturbadora, cuja frequência corresponde à diferença de energia entre os estados  $\bullet^*$  e  $\circ$ .

O processo de produção de par no vácuo por dois fótons é equivalente ao processo de produção de par tanto por um fóton real num campo de um núcleo como por interação de duas partículas.<sup>26</sup> As representações são

$$\circ + \square + \gamma + \tilde{\gamma} \rightarrow \bullet + \blacksquare$$

Outro processo que também pode ser estudado com o enfoque do método de W.W.<sup>27</sup> é a eletrodesintegração de núcleos, que discutiremos na Seção 4. O processo radiativo associado a este fenômeno é a fotodesintegração dos núcleos por fótons virtuais. Passemos agora às aplicações.

---

<sup>26</sup>Para mais detalhes sobre outros processos veja [16].

<sup>27</sup>Um caso que parece não poder ser tratado através deste método é o espalhamento coerente de radiação no campo de um núcleo. Veja argumentos em [16].

## 4. Aplicações do método de W.W.

### 4.1 Excitação e ionização de átomos

Não podemos fazer um tratamento completo da ionização e da excitação de um átomo produzida por uma partícula carregada usando o método de W.W., pois as condições de aplicabilidade do mesmo (Seção 3.1) não são satisfeitas em colisões para as quais o parâmetro de impacto é menor que as dimensões atômicas ( $b < \ell$ ). Assim, o método só pode ser aplicado quando  $b \gtrsim \ell$ .

Consideremos átomos com apenas um elétron no estado fundamental e que a velocidade  $v$  do elétron incidente é grande comparada com a velocidade orbital do elétron do átomo. A equação (14) nos dá a intensidade da radiação equivalente que representa o campo da partícula incidente para  $b > \ell$ . Podemos tomar a dimensão atômica como o mínimo parâmetro de impacto ( $b_{min} = \ell$ ) que aparece no argumento do logaritmo de (14) e, na verdade, não precisamos do valor exato de  $\ell$ . Podemos tomá-lo como da ordem de grandeza do diâmetro da órbita de Bohr do átomo de hidrogênio. Lembremos que a energia total a ser transferida para o átomo para levar o elétron orbital a uma distância infinita do núcleo (potencial de ionização  $J$ ), deve ser igual à energia cinética do elétron ligado, e que a velocidade do elétron numa órbita, de acordo com o modelo de Bohr, é  $v_n = n\theta\hbar/mr_n$ , onde  $r_n$  é o raio da órbita e  $m$ , a massa do elétron. No estado fundamental,  $n_\theta = n = 1$ , donde

$$J = \frac{1}{2}mv^2 \quad ; \quad v = v_1 = \frac{\hbar}{ma}$$

e, portanto,

$$a = \left( \frac{\hbar^2}{2mJ} \right)^{1/2}$$

onde  $a$  é o raio de Bohr do estado fundamental. Teremos, assim,

$$b_{min} \sim \ell = 2\sqrt{\frac{\hbar^2}{2mJ}}$$

Apesar das condições de aplicabilidade do método de W.W. não serem válidas para  $b < \ell$ , veremos que a contribuição destas colisões é bem pequena. Levando o valor de  $b_{min}$  em (14), obtemos a seguinte distribuição de fótons virtuais:

$$N(\hbar\omega) = \frac{2}{\pi} \alpha Z^2 \frac{\beta^{-2}}{\hbar\omega} \ln \left( \frac{f\gamma v \sqrt{2mJ}}{2h\nu} \right)$$

Em termos da energia transferida,  $Q = h\nu$ ,

$$N(\hbar\omega) = \frac{2}{\pi} \alpha Z^2 \frac{\beta^{-2}}{\hbar\omega} \ln \left( \frac{f\gamma v \sqrt{2mJ}}{2Q} \right)$$

$$= \frac{2}{\pi} \alpha Z^2 \frac{\beta^{-2}}{\hbar\omega} \ln \left( \frac{f^2 \gamma^2 m v^2 J}{2Q^2} \right)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{\pi} \alpha Z^2 \frac{\beta^{-2}}{\hbar\omega} \ln \left( \frac{g m v^2 \gamma^2 J}{Q^2} \right)$$



onde  $g$  é da ordem da unidade.<sup>28</sup> Para  $Z = 1$ ,

$$N(\hbar\omega) = \frac{1}{\pi} \alpha \frac{\beta^{-2}}{\hbar\omega} \ln \left[ \frac{gmv^2 J}{(1 - \beta^2)Q^2} \right] \quad (16)$$

Agora podemos estudar a ionização produzida pelo elétron considerando a absorção fotoelétrica da radiação virtual, cujo espectro é representado por (16). Na realidade, a probabilidade de ionização  $\phi_1(Q)dQ$ , com a energia transferida situando-se entre  $Q$  e  $Q + dQ$ , é o produto da equação (16) pelo coeficiente atômico de absorção,  $\mu$ , da matéria atravessada pela radiação de frequência  $\omega = Q/\hbar$ . Então

$$\phi_1(Q)dQ = \frac{1}{2\pi} N(\omega)\mu(\omega)d\omega \quad (17)$$

Podemos usar uma expressão aproximada para  $\mu$ , no caso de átomos hidrogenóides, qual seja [16]

$$\mu(\nu) = 0.77\pi \left( \frac{e^2}{mc} \right) \left( \frac{J}{h} \right)^{1.8} \nu^{-2.8}$$

Levando este valor em (17) e substituindo  $\nu = Q/h$ , obtemos

$$\phi_1(Q)dQ = 0.77 \left( \frac{2\pi e^4}{mv^2 J^2} \right) \left( \frac{J}{Q} \right)^{3.8} \ln \left[ \frac{gmv^2 J}{(1 - \beta^2)Q^2} \right] dQ \quad (18)$$

Para obtermos o efeito total do elétron incidente sobre o átomo, devemos adicionar à equação (18) o efeito das colisões para  $b < \ell$ . Neste caso, o elétron pode ser considerado livre e a probabilidade de ionização é obtida usando-se a lei do espalhamento de Rutherford. O resultado obtido é [16]

$$\phi_2(Q)dQ = \left( \frac{2\pi e^4}{mv^2} \right) \left( 1 + \frac{4J}{3Q} \right) \frac{dQ}{Q^2} \quad (19)$$

A soma das probabilidades dadas nas equações (18) e (19) está de acordo com a distribuição devida a todos os tipos de colisão, obtida por Bethe [9] usando a teoria de Born. Podemos fazer um gráfico da probabilidade de excitação em função da razão  $Q/J$ , para elétrons com energia  $mv^2/2 = 2.5 \times 10^3$  joule, com as unidades escolhidas de tal maneira que as áreas sob as curvas sejam proporcionais ao número de colisões (Figura 6).

Analizando este gráfico vemos que, embora tanto  $\phi_1(Q)$  como  $\phi_2(Q)$  cresçam muito com o decréscimo de  $Q$ , a maior contribuição para a probabilidade total é devida à curva  $\phi_1(Q)$ . Desta forma, vemos que a grande concentração de perdas de energia próximas ao potencial de ionização, que está de acordo com os cálculos de Bethe, é devida à ação fotoelétrica do campo de partícula perturbadora em colisões distantes.

---

<sup>28</sup>Se  $\beta \sim 1, g \sim 0.5$ .

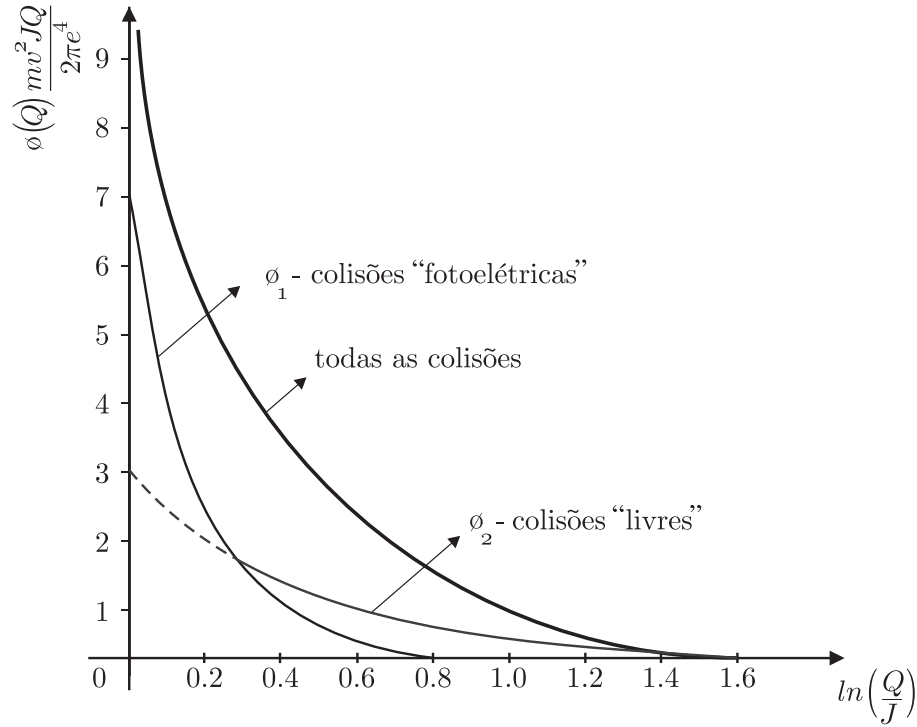


Figura 6

## 4.2 Excitação e desintegração de núcleos atômicos por elétrons

Existem dois processos através dos quais um núcleo atômico pode ser desintegrado pela ação de sua interação com uma partícula que incide sobre ele. O primeiro seria a captura desta partícula (com ou sem emissão de outra partícula pelo núcleo) e, no segundo caso, a partícula incidente perderia apenas parte de sua energia, continuando livre após a colisão. O segundo tipo de desintegração é um processo análogo ao de ionização de átomos, que discutimos na seção anterior.

Supondo que, depois de interagir com uma partícula  $A$ , um núcleo se desintegre emitindo uma partícula  $B$ , podemos considerar dois tipos distintos de efeitos: 1) o núcleo se desintegra pela ação fotoelétrica da partícula  $A$ ; 2) a partícula  $B$  recebe virtualmente a energia necessária para ser emitida pelo núcleo, a partir da colisão com  $A$ . E o que nos permite fazer tal classificação? É exatamente a relação entre as velocidades de  $A$  e  $B$ ,  $v_A \gg v_B$ , que é uma das condições de aplicabilidade do método de W.W. Se  $A$  for uma partícula  $\alpha$  ou um próton, esta condição dificilmente é satisfeita. No entanto, elétrons com energias suficientes para desintegrar o núcleo geralmente satisfazem essa condição, pois, devido a suas pequenas massas, eles atingem facilmente grandes velocidades a altas energias. Desta forma, podemos estimar a probabilidade de eletrodesintegração do núcleo, considerando apenas o efeito da interação fotoelétrica do elétron com o núcleo como um todo, uma vez que o efeito da interação de dois corpos – o elétron e a partícula nuclear – é desprezível em relação ao primeiro, até energias do elétron da ordem de 10 MeV, devido à pequena massa do elétron em relação a das partículas nucleares.

Para determinarmos o espectro de fótons virtuais, utilizemos as equações (13) ou (14), nas quais  $b_{min}$  é dado por  $\hbar/\gamma mc$ , caso este valor seja maior que as dimensões nucleares, o que equivale a energias do elétron menores que 100 MeV. Para energias maiores do elétron, devemos

tomar  $b_{min} \sim R$  (o raio nuclear), em analogia ao processo de ionização de um átomo, onde tomamos  $b_{min}$  da ordem do raio atômico. Assim,

$$b_{min} = \begin{cases} \frac{\hbar}{\gamma mc}, & \text{se } E \lesssim 100 \text{ MeV} \\ R, & \text{se } E > 100 \text{ MeV} \end{cases} \quad (20)$$

Substituindo  $b_{min} \sim \hbar/\gamma mc$  em (14), segue-se

$$N(\hbar\omega) \simeq \frac{2}{\pi} \alpha Z^2 \frac{\beta^{-2}}{\hbar\omega} \ln \left( f \frac{\gamma v}{\frac{\hbar\omega}{\gamma mc}} \right)$$

e, como esta situação corresponde a  $\beta \sim 1$ ,

$$N(\hbar\omega) \simeq \frac{2}{\pi} \alpha Z^2 \frac{1}{\hbar\omega} \ln \left( \frac{f\gamma^2 mc^2}{\hbar\omega} \right) \quad (21)$$

Podemos obter agora uma relação entre a seção de choque de fotodesintegração do núcleo e a seção de choque de eletrodesintegração do mesmo, utilizando o método de W.W., como mostra a equação (5).

Quando discutimos a determinação do espectro dos fótons equivalentes, vimos que, para  $\beta \sim 1$ , o espectro de energia é constituído predominantemente por fótons de baixas energias. É razoável, então, tomarmos como limite superior da energia o valor  $\hbar\omega \simeq \gamma\hbar c/b_{min}$ , que corresponde a  $\omega b_{min}/(\gamma v) \sim 1$  (veja Figura 3). Para optarmos pelos limites da equação (20) é conveniente escrevermos

$$b_{min} \simeq \frac{\hbar}{\gamma mc} = \frac{\hbar c}{\gamma mc^2} \simeq \frac{200}{E} \text{ MeV fermi}$$

onde  $E = \gamma mc^2 \gg mc^2$ .

Lembrando que o raio do núcleo, de acordo com o modelo da gota líquida, pode ser dado por  $R \sim r_0 A^{1/3}$ , na qual  $r_0 \sim 1.4$  fermi e  $A$  é a massa atômica do elemento, temos que, para um certo valor da energia tal que  $b_{min} = \hbar c/E > R$ , o limite superior será da ordem de

$$\omega \simeq \frac{\gamma c}{b_{min}} = \frac{\gamma E}{\hbar}$$

e, portanto, a relação procurada é

$$\sigma_{el}(E) \simeq \frac{2\alpha}{\pi} \int_{\hbar\omega_{limiar}}^{\gamma E} \frac{d\hbar\omega}{\hbar\omega} \sigma_{\gamma\gamma}(\hbar\omega) \ln \left( \frac{f\gamma^2 mc^2}{\hbar\omega} \right) \quad (22)$$

onde  $\hbar\omega_{limiar}$  é a energia limiar do processo. Para prosseguirmos, precisamos conhecer a forma de  $\sigma_{\gamma\gamma}(\hbar\omega)$ . Esta função foi calculada por Bethe e Peierls [22] para o caso do dêuteron e é igual a

$$\sigma(K) = \frac{8\pi}{3} \frac{\alpha}{\delta^2} \frac{(K-1)^{3/2}}{K^3}$$

onde

$$K \equiv \frac{\hbar\omega}{\epsilon}, \quad \delta^2 \equiv \frac{M\epsilon}{\hbar^2}$$

sendo  $\epsilon$  a energia de ligação do  $H^2$ , e  $M$ , a massa do próton.

Fazendo uma estimativa de  $\delta$ , eles obtiveram

$$\sigma(K) \simeq 1.25 \times 10^{-2} (K - 1)^{3/2} K^{-3} \text{ barn}$$

Os valores numéricos estão mostrados na tabela à esquerda da figura abaixo.

Colocando estes resultados num gráfico, obtemos uma curva da seguinte forma:

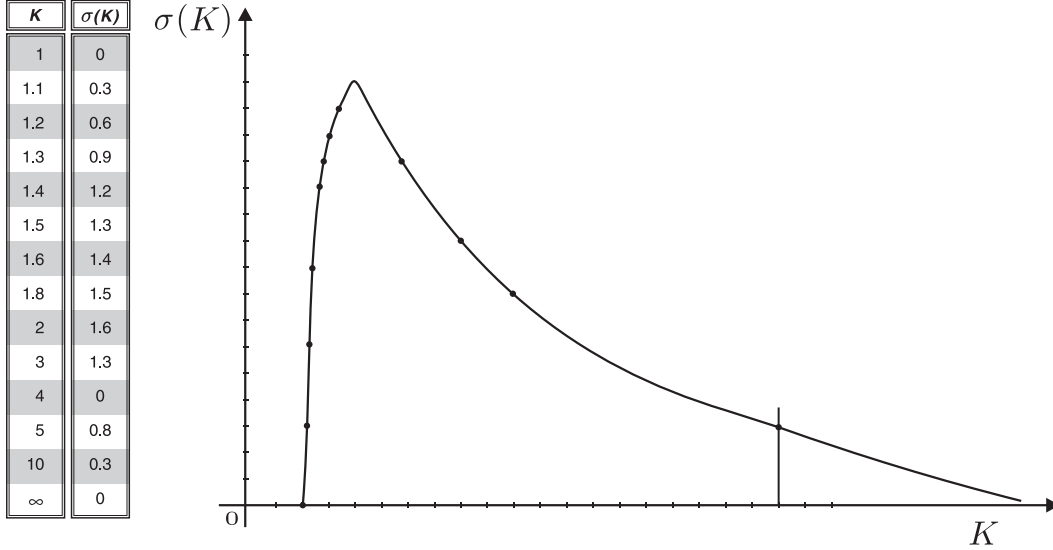


Figura 7

Conhecido  $\sigma(K)$ , podemos obter a seção de choque de eletrodução dada por (22)

$$\sigma_{el} \simeq \frac{16\alpha^2}{3} \left( \frac{\epsilon^3}{\delta^2} \right) \int_{\hbar\omega_0}^{\infty} \frac{d\hbar\omega}{(\hbar\omega)^4} \left( \frac{\hbar\omega}{\epsilon} - 1 \right)^{3/2} \ln \left( \frac{f\gamma^2 mc^2}{\hbar\omega} \right)$$

ou<sup>29</sup>

$$\sigma_{el} \simeq \frac{16}{3} \frac{\alpha^2}{\epsilon \delta^2} \int_{\hbar\omega_0}^{\infty} \frac{d\hbar\omega}{(\hbar\omega/\epsilon)^4} \left( \frac{\hbar\omega}{\epsilon} - 1 \right)^{3/2} \ln \left( \frac{a}{\hbar\omega/\epsilon} \right)$$

onde  $a \equiv f\gamma^2 mc^2 \epsilon^{-1}$ . Definindo  $K = \epsilon x$  ( $K_0 = \epsilon x_0$ ), chegamos a

$$\sigma_{el} \simeq \frac{16}{3} \frac{\alpha^2}{\delta^2} \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{x^4} (x - 1)^{3/2} \ln \frac{a}{x}$$

cujos resultado é

$$\sigma_{el} \simeq \frac{16}{3} \frac{\alpha^2}{\delta^2} \frac{\pi}{16} (\ln a - 1.2)$$

Lembre-se que na solução da integral fizemos uma mudança de variáveis que implicou em  $x_0 \rightarrow 1$  e, portanto, ficamos com  $K_0 = \epsilon = \hbar\omega_0$ , donde

$$a \equiv \frac{f\gamma^2 mc^2}{\hbar\omega_0} \quad , \quad \frac{1}{\delta^2} = \frac{\hbar^2}{M\hbar\omega_0}$$

<sup>29</sup>Podemos estender o limite da integração para infinito sem incorrer em erro pelo próprio comportamento de  $\sigma_{\gamma\gamma}(K)$ .

Temos, assim,

$$\sigma_{el} = \frac{\pi}{3} \frac{\alpha^2 \hbar^2}{M \hbar \omega_0} \left( \ln \frac{f \gamma^2 m c^2}{\hbar \omega_0} - 1.2 \right)$$

Se a energia do elétron for bem maior que a energia limiar  $\hbar \omega_0$ , podemos desprezar o termo 1.2 em relação ao logarítmo, obtendo

$$\sigma_{el} \simeq \frac{\pi}{3} \frac{\alpha e^2}{M c \omega_0} \ln \left( \frac{f \gamma^2 m c^2}{\hbar \omega_0} \right)$$

que está de acordo com a equação (22) de [16].<sup>30</sup> Podemos ainda reescrever a equação anterior explicitando a dependência na energia  $E = \gamma m c^2$  como

$$\sigma_{el}(E) \simeq \frac{\pi}{3} \frac{\alpha e^2}{M c} \frac{1}{\omega_0} \ln \left( \frac{f \gamma E}{\hbar \omega_0} \right), \quad f \sim 1$$

No tratamento clássico da emissão e absorção de luz, podemos ver que existe uma certa largura  $\Gamma$  na linha do espectro emitido por um oscilador, correspondendo a uma intensidade dada por

$$I(\omega) d\omega = \frac{I_0}{2\pi} \frac{\Gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} d\omega$$

onde  $\omega_0$  é a frequência do oscilador não-amortecido. Este resultado se mantém na teoria quântica,<sup>31</sup> sendo  $I_0 = \hbar \omega$  e  $\Gamma$  representa agora a probabilidade de transição por unidade de tempo, o que nos permite admitir que  $\sigma_{\gamma\gamma}$  tenha a forma

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\omega) = \frac{A e^2}{2\pi M c} \frac{\Gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} \quad (23)$$

onde  $\Gamma$  é pequeno comparado com  $\omega_0 - \omega_{limiar}$ . Este resultado pode ser levado em (22) e, por simplicidade, é conveniente notarmos que, como  $E \gg \hbar \omega_0$  e  $\Gamma \ll \omega_0 - \omega_{limiar}$ ,  $\sigma_{\gamma\gamma}$  se comporta aproximadamente como<sup>32</sup>

$$\sigma_{\gamma\gamma} = \frac{A e^2}{M c} \delta(\omega_0 - \omega)$$

Obtemos, assim, de uma forma direta,

$$\sigma_{el}(E) = \frac{2}{\pi} \alpha \frac{A e^2}{M c} \frac{1}{\omega_0} \ln \left( \frac{g \gamma E}{\hbar \omega_0} \right)$$

que está de acordo com a expressão que já obtivemos utilizando o resultado de Bethe e Peierls, desde que  $A \sim 1.6$ .

Vamos agora comparar estes resultados teóricos com o experimental. Em experimentos envolvendo um feixe de elétrons proveniente de um betatron de 22-MeV que incide sobre um sequência de folhas finas e uniformes, Skaggs *et al.*<sup>33</sup> estudaram a reação do tipo

<sup>30</sup>Para uma maior compreensão do argumento utilizado por Williams [16] para chegar a esta equação, veja o livro do Jackson, *op. cit.*, seção 17.8, em especial a p. 805.

<sup>31</sup>Veja, por exemplo, Heitler, W.: *The Quantum Theory of Radiation*, third edition, Oxford (1954), parag. 18.

<sup>32</sup>Veja, por exemplo, Butkov. E.: *Mathematical Physics*, Addison-Wesley (1968), p. 223-4.

<sup>33</sup>*Physical Review* **73**, 420 (1948).

$A^z(e; e', n)(A - 1)^z$ ,<sup>34</sup> e obtiveram a seção de choque de fotoprodução e de eletrodesintegração expressando o resultado como a razão entre elas. Esta razão pode ser obtida usando-se o método de W.W. e a forma ressonante de  $\sigma_{\gamma\gamma}$ .<sup>35</sup> No entanto, já vimos que este método não é válido quando a energia transferida no processo em questão for comparável com a energia do elétron incidente o que, na verdade, ocorre em várias experiências de eletrodesintegração. Por esse motivo, Blair [23] calculou a razão entre as seções de choque de eletrodesintegração. A razão  $R$  entre a seção de choque de fotoprodução e de eletrodesintegração para os isótopos  $Cu^{63}$ ,  $Zn^{64}$ ,  $Ag^{109}$  e  $Ta^{181}$  foi medida por Brown e Wilson [24] para energias do elétron compreendidas entre 24-35 MeV. Com este trabalho, eles mostraram que o método de W.W., apesar de suas restrições de aplicabilidade, fornece um valor constante para  $R$  que é da mesma ordem de grandeza do valor que eles mediram no caso do  $Cu$ ,  $Zn$  e  $Ag$ ,<sup>36</sup> enquanto que para o  $Ta$  o resultado difere<sup>37</sup> de um fator 2. Para obtermos o valor de  $R$  predito pelo método de W.W., é conveniente trabalharmos com uma grandeza definida por Brown & Wilson [24], qual seja  $F_{exp}$ , que tem a vantagem de ser independente de uma particular energia de excitação, ao contrário da expressão  $F_{teo}$  de Blaire, a qual é uma grandeza muito difícil de ser medida experimentalmente,<sup>38</sup> definida como

$$F_{exp} = \frac{1}{Z^2} \left( \frac{mc^2}{e^2} \right)^2 \frac{1}{\sigma_{el}} \int d\omega \sigma_{\gamma\gamma}(\omega) \chi(\omega)$$

onde  $\chi(\omega)$  é dada por (23) com  $z = 1$ . Logo

$$\begin{aligned} \int d\omega \sigma_{\gamma\gamma}(\omega) \chi(\omega) &= \frac{16}{3} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \alpha Z^2 \frac{Ae^2}{2\pi Mc} \times \int \frac{d\omega}{\omega} \frac{\Gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + (\Gamma/2)^2} \times \ln \left( \frac{g\gamma E}{\hbar\omega} \right) \\ &= \frac{16}{3} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\alpha Z^2 Ae^2}{Mc\omega_0} \ln \left( \frac{g\gamma E}{\hbar\omega_0} \right) \end{aligned}$$

onde  $E = \gamma mc^2 \gg mc^2$ . Substituindo este valor e  $\sigma_{el}$  em  $F_{exp}$ , encontramos

$$F_{exp} = \frac{1}{Z^2} \left( \frac{mc^2}{e^2} \right)^2 \frac{\frac{16}{3} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \alpha Z^2 Ae^2 \ln \left( \frac{g\gamma E}{\hbar\omega_0} \right)}{\frac{2}{\pi} \frac{\alpha Ae^2}{Mc\omega_0} \ln \left( \frac{g\gamma E}{\hbar\omega_0} \right)} = \frac{8\pi}{3}$$

que é independente da energia total do elétron incidente, bem como da energia de excitação do núcleo.

### 4.3 “Bremsstrahlung” não-relativístico

A emissão de radiação em uma colisão entre duas partículas carregadas também pode ser estudada através do método de W.W., considerando-se o espalhamento de radiação equivalente.<sup>39</sup>

<sup>34</sup>Isto representa uma reação na qual inicialmente temos um elétron incidindo sobre um elemento de número de massa  $A$ , resultando em um estado de um elétron, um nêutron e um elemento  $(A - 1)$ .

<sup>35</sup>Obteremos este resultado a seguir.

<sup>36</sup>A discrepância envolvida é da ordem de 10-15%.

<sup>37</sup>Experimentalmente eles verificaram que  $R$  decresce com a energia do elétron.

<sup>38</sup>Não entraremos em detalhes com relação ao trabalho de Brown & Wilson, limitando-nos apenas a obter o resultado predito pelo método de W.W.

<sup>39</sup>Esta aplicação foi discutida no Congresso Internacional sobre Física Teórica realizado em Kharkov [25].

Se consideramos o processo de *bremstrahlung*, para o qual a partícula perturbadora é o elétron ( $z = 1$ ) e a partícula perturbada, um núcleo atômico de carga  $Ze$ , as condições (i)-(iii) implicam que: a) numa colisão na qual o parâmetro de impacto seja  $b$ , o elétron perturbado esteja numa região de dimensões muito menores que  $b$ ; b) o momento linear do elétron não se aproxima de  $\gamma mv$ .<sup>40</sup> A primeira condição satisfaz a condição de “colisão distante” e a segunda garante que o momento linear transferido seja pequeno em relação ao momento da partícula incidente. A condição (iii) corresponde ao limite  $Ze^2/hv \ll 1$ .

Lembremos que ao utilizarmos o método de W.W., estamos “substituindo” a partícula perturbadora por um pulso de radiação. Sabemos que se uma onda plana monocromática incide sobre uma partícula de carga  $e$  e massa  $m$ , a partícula é acelerada e, então, de acordo com a Eletrodinâmica Clássica, emite uma radiação, o que provoca um recuo da partícula. Este processo como um todo pode ser descrito como o espalhamento da radiação incidente (espalhamento de radiação de Thomson), pois, para  $\beta \ll 1$ , a radiação emitida tem a mesma frequência da radiação equivalente. Como as frequências envolvidas no espectro da radiação equivalente são muito menores que  $mc^2/h$ , podemos usar a fórmula da seção de choque de Thomson, que é válida quando a energia do fóton  $\hbar\omega$  é muito menor do que  $mc^2$ . Com efeito, já vimos que a incerteza na posição da partícula deve ser bem menor que o parâmetro de impacto, *i.e.*,  $\hbar/mv \ll b$ , e o intervalo de tempo mínimo,  $\Delta t$ , para o qual um fóton é emitido pela partícula perturbadora é da ordem de  $\hbar/mc^2 \ll \hbar/mv^2$ , pois estamos tratando o caso em que  $\beta \ll 1$ . Donde concluímos que  $\hbar/mc^2 \ll b/v$  ou ainda que  $vb \ll mc^2/\hbar$ . Por outro lado, vimos que o limite de baixas frequências (Seção 3.2) é definido por  $\omega \ll \gamma v/b_{min} \sim v/b_{min}$ , donde concluímos que, no caso não-relativístico, todas as frequências são muito menores que  $v/b$ . Isto vai explicar porquê podemos utilizar o método de W.W. também no caso não-relativístico.<sup>41</sup> Poderíamos concluir apressadamente que a aproximação feita ao substituir a componente do campo paralela à direção do movimento,  $E_{\parallel}(t)$ , por um pulso de radiação não seria boa quando  $\beta \ll 1$ , pois  $E_{\parallel}(t)$  passaria a variar bem mais lentamente do que quando  $\beta \sim 1$  (Figura 14). Vimos também, na Seção 3.2, que a intensidade do pulso  $P_2$ , correspondente à componente  $E_{\parallel}(t)$ , só é apreciável para frequências em torno de  $\gamma v/b$  e que sua intensidade, em relação a do pulso  $P_1$ , é da ordem de  $\gamma^2$ . Assim, no caso  $\beta \ll 1$  ( $\gamma \sim 1$ ), a intensidade do pulso  $P_2$  só é apreciável para frequências em torno de  $v/b$  e, conseqüentemente, contribuirá muito pouco para o espectro da radiação equivalente, pois já mostramos que, quando  $\beta \ll 1$ , todas as frequências envolvidas são muito menores que  $v/b$ , o que corresponde apenas à região do patamar da Figura 3.

Para determinarmos o número de fótons equivalentes por unidade de energia, utilizamos a expressão (13), com o limite  $b_{min}$  sendo dado pelo princípio de incerteza,  $b_{min} \sim \hbar/mv$ ; logo,

$$N(\hbar\omega) \simeq \frac{2}{\pi} \alpha Z^2 \frac{\beta^{-2}}{\hbar\omega} \ln \left( \frac{gm\gamma v^2}{\hbar\omega} \right) \quad (24)$$

que, no caso não-relativístico, se reduz a

$$N(\hbar\omega) \simeq \frac{2}{\pi} \alpha Z^2 \frac{\beta^{-2}}{\hbar\omega} \ln \left( \frac{gmv^2}{\hbar\omega} \right)$$

e onde  $v$  é a velocidade relativa entre o elétron e o núcleo.

A seção de choque diferencial  $\chi(\hbar\omega)d\hbar\omega$  para a emissão de um fóton cuja frequência está compreendida no intervalo  $\omega$  e  $\omega + d\omega$  é dada pela equação (22), onde  $\sigma_{\gamma\gamma} \rightarrow \sigma_{Th}$ , que é a seção de choque de Thomson, dada por

<sup>40</sup>Tanto as dimensões do volume quanto o momento linear são medidos em um sistema de referência no qual inicialmente a velocidade média do elétron era nula.

<sup>41</sup>A analogia à qual nos referimos no Anexo A era para o caso relativístico.

$$\sigma_{Th} = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2$$

Logo,

$$\chi(\hbar\omega)d\hbar\omega = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \times \frac{2}{\pi} \alpha Z^2 \frac{\beta^{-2}}{\hbar\omega} \ln \left( \frac{gm\gamma v^2}{\hbar\omega} \right) d\hbar\omega$$

ou

$$\chi(\hbar\omega)d\hbar\omega = \frac{16}{3} \left( \frac{Z^2 e^6}{m^2 v^2 c^3} \right) \frac{1}{\hbar\omega} \ln \left( \frac{gm v^2}{\hbar\omega} \right) d\hbar\omega$$

Podemos expressar este resultado como

$$E(\hbar\omega) = \chi(\hbar\omega) \times \rho \hbar\omega$$

onde  $\rho$  é a densidade volumétrica de núcleos, que vamos supor igual à unidade. Assim,  $E(\hbar\omega)$  expressa a energia da radiação espalhada por intervalo unitário de frequência e por unidade de comprimento da trajetória do elétron, numa região onde  $\rho = 1$ , e é dada por:

$$E(\hbar\omega) = \frac{16}{3} \left( \frac{Z^2 e^6}{m^2 v^2 c^3} \right) \ln \left( \frac{gm v^2}{\hbar\omega} \right) \quad (25)$$

Esta expressão está de acordo com outros resultados teóricos<sup>42</sup> no limite  $\hbar\omega \ll mv^2$ . Note que a dependência de  $E(\hbar\omega)$  em  $\omega$  é apenas no argumento do logaritmo de (25). Este termo pode ser escrito como  $\ln(b_{max}/b_{min})$ , onde  $b_{max} = v/\omega$ , que é a máxima distância da trajetória em relação ao núcleo para a qual um observador, em repouso em relação ao elétron, observa frequências  $\omega$  no campo coulombiano do núcleo;<sup>43</sup>  $b_{min}$  é o mínimo efetivo para o qual o campo do núcleo é importante.

## 4.4 Colisões Radiativas Relativísticas

### 4.4.1 “Bremsstrahlung” relativístico

Como no caso não-relativístico,<sup>44</sup> a emissão de *bremsstrahlung* em uma colisão entre uma partícula relativística de carga  $ze$  e massa  $m$  e um núcleo atômico de carga  $Ze$ , também pode ser vista como o espalhamento de fótons virtuais. Vamos considerar este espalhamento em um sistema de referência  $R'$ , no qual o elétron está inicialmente em repouso, porque as fórmulas de espalhamento usualmente se referem a elétrons estacionários. Em  $R'$  a velocidade relativa do núcleo é  $v$  e como  $\gamma \gg 1$ , o espectro de fótons virtuais  $I(\omega')$  é dado por (24), onde  $b_{min} \simeq \hbar/mv$  e que, no limite  $\beta \sim 1$ , se escreve<sup>45</sup>

$$N(\hbar\omega) \simeq \frac{2}{\pi} \alpha Z^2 \frac{1}{\hbar\omega} \ln \left( \frac{g\gamma mc^2}{\hbar\omega} \right) \quad (26)$$

<sup>42</sup>Veja referências citadas em [16].

<sup>43</sup>Veja Figura 3 para  $\gamma = 1$ .

<sup>44</sup>Em [16], é feito apenas um cálculo aproximado com o objetivo de discutir quais as dependências da fórmula que nos dá a energia total perdida pelo elétron. Esse processo foi discutido em detalhes por von Weizsäcker [15].

<sup>45</sup>Denotaremos as frequências antes do espalhamento por um índice  $a$  e depois do espalhamento por um índice  $d$ .



No caso relativístico, o espectro de Fourier da radiação equivalente compreende uma faixa bem mais extensa do que no caso não-relativístico. Por isso é conveniente considerarmos o espalhamento dos fótons virtuais, representados por (26), em duas partes: frequências  $\omega_a$  menores e maiores que  $mc^2/h$ . Usaremos, em primeira aproximação, a seção de choque de Thomson para baixas energias ( $\hbar\omega_a < mc^2$ ) e a fórmula de Klein-Nishina para fótons com energia  $\hbar\omega_a > \sim mc^2$ , dadas pelas equações a seguir, na qual desprezamos a variação Compton do comprimento de onda, de modo que  $\omega_d = \omega_a$ :

$$\sigma_{th} = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{q^2}{mc^2} \right)^2 \quad (27)$$

e

$$\sigma_{KN} = \left( \frac{q^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\pi mc^2}{\hbar\omega} \left[ \ln \left( \frac{2\hbar\omega}{mc^2} \right) + \frac{1}{2} \right] \quad (28)$$

onde  $q = Ze$ . A equação da seção de choque de Klein-Nishina, obtida da Teoria Quântica, é válida para espalhamento da radiação por elétrons, no limite de altas frequências.

Para frequências pequenas comparadas com  $mc^2/\hbar$ , e para  $\beta \sim 1$ , a seção de choque  $\chi'(\omega_d)$ , no referencial  $R'$ , é

$$\chi'(\omega_d) \simeq \sigma_{th} I(\omega_d) = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{z^2 e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{2}{\pi} \alpha Z^2 \ln \left( \frac{g\gamma mc^2}{\hbar\omega_d} \right)$$

Como fazemos as medidas no sistema do laboratório, é conveniente calcularmos a seção de choque em outro sistema de referência  $R$ . A relação entre  $\omega_d$  em  $R'$  e a frequência  $\omega$  em  $R$  é dada por

$$\omega = \gamma\omega_d(1 - \beta \cos \theta_d) \quad (29)$$

onde  $\theta_d$  é o ângulo entre a direção da velocidade  $v$  e a direção de espalhamento em  $R'$ . Como o espalhamento de Thomson é distribuído simetricamente em torno de  $\theta_d = \pi/2$ , e como, para um dado  $\theta_d$ ,  $d\omega/\omega = d\omega_d/\omega_d$ , segue-se que o número de fótons espalhados no sistema  $R$ , com frequência compreendida em um intervalo  $d\omega$ , é dado pela própria equação para o sistema  $R'$ , bastando mudar  $\omega_d$  por  $\omega$ . Portanto,

$$\chi(\omega)d\omega = \frac{16}{3} \left( \frac{z^2 e^2}{mc^2} \right)^2 \alpha Z^2 \ln \left( \frac{g\gamma mc^2}{\hbar\omega} \right) \frac{d\omega}{\omega} \quad (30)$$

Este resultado está de acordo com o resultado obtido por Heitler & Sauter [26], que usaram a teoria de Dirac para o elétron e o método de transição entre dois estados estacionários, quando admitimos o espalhamento de Thomson numa região onde  $\hbar\omega \ll \gamma mc^2$ .

Vamos obter agora uma expressão para a energia total perdida pelo elétron. Para isto, vamos dividir o espectro em duas partes: uma na qual  $\hbar\omega_a < mc^2$  e outra na qual  $\hbar\omega_a > mc^2$ .

Multiplicando a equação (30) por  $\hbar\omega$  e integrando até  $\hbar\omega_a \sim mc^2$ , *i.e.*,  $\hbar\omega \sim \gamma mc^2$ , vamos obter a contribuição para a perda total de energia, para o caso de frequências  $\omega_a < mc^2/\hbar$ , ou seja:

$$\begin{aligned}
W_1 &= \int_{mc^2/\hbar}^{\gamma mc^2/\hbar} \hbar \omega \chi(\omega) d\omega = \frac{16}{3} \alpha Z^2 \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \hbar \int \ln \left( \frac{g\gamma^2 mc^2}{\hbar \omega} \right) d\omega \\
&= \frac{16}{3} \alpha Z^2 \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \hbar \int \left[ \ln(g\gamma) - \ln \frac{\hbar \omega}{\gamma mc^2} \right] d\omega \\
&= \frac{16}{3} \alpha Z^2 \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \hbar \left[ \ln(g\gamma) - \ln \left( \frac{\hbar \omega}{\gamma mc^2} \right) + 1 \right]_{mc^2/\hbar}^{\gamma mc^2/\hbar} \\
&= \frac{16}{3} \alpha Z^2 \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \hbar \left[ \frac{\gamma mc^2}{\hbar} [\ln(g\gamma) - \ln 1 + 1] - \frac{mc^2}{\hbar} \left( \ln(g\gamma) - \ln \frac{1}{\gamma} + 1 \right) \right]
\end{aligned}$$

onde usamos que  $\int \ln ax \, dx = x \ln ax - \int x \frac{1}{x} dx = x(\ln ax - 1)$ . Como  $\gamma \gg 1$ , podemos tomar  $\ln(1/\gamma) \sim 1$  e desprezar o segundo termo da equação acima (correspondente ao limite inferior da integral) comparado com o primeiro termo, além de usar o fato que  $\ln(g\gamma) \gg 1$ , pois vimos que  $g \sim 1$ . Logo,  $W_1$  reduz-se a

$$W_1 \simeq \frac{16}{3} \alpha Z^2 \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \gamma mc^2 \times \ln(g\gamma)$$

ou ainda

$$\boxed{W_1 \simeq \frac{16}{3} \frac{\alpha Z^2 e^4 \gamma}{mc^2} \ln(g\gamma)} \quad (31)$$

Para frequências  $\omega_a > mc^2/\hbar$ , o espalhamento é predominante para uma direção  $\theta_d \sim (mc^2/\hbar\omega_a)^{1/2}$  e a frequência de espalhamento é, aproximadamente,<sup>46</sup>

$$\omega_d = - \frac{\omega_a}{\left[ 1 + \frac{\hbar\omega_a}{mc^2} \theta'^2 \right]} \approx a\omega_a$$

onde  $a$  não difere muito da unidade. Usando a expressão (29), obtém-se

$$\begin{aligned}
\omega &= \gamma a \omega_a (1 - \beta \cos \theta_d) \\
&\simeq \gamma a \omega_a \left[ 1 - \beta + \frac{1}{2} \beta \theta_d^2 + \mathcal{O}(\theta_d^4) \right] \\
&\simeq \gamma a \omega_a \left( 1 - \beta + \frac{1}{2} \frac{\beta mc^2}{\hbar \omega_a} \right) \\
&\simeq \frac{1}{2} \gamma a \left( \frac{mc^2}{\hbar} \right)
\end{aligned}$$

pois estamos estudando o limite  $\beta \sim 1$ .

Como  $a \sim 1$ , isto significa que, para todo *quantum* de radiação do campo do núcleo de energia  $\hbar\omega_a > mc^2$  espalhado em  $R'$ , um *quantum*  $\hbar\omega \sim \gamma mc^2$  é emitido em  $R$ . Em outras

<sup>46</sup>Veja, por exemplo, Jackson, *op. cit.*, p. 681-2.

palavras, a cada fóton espalhado pelo elétron, visto do sistema onde ele estava inicialmente em repouso, corresponde um fóton emitido em outro sistema de referência. Este resultado é bastante importante e, deste modo, podemos obter a energia perdida pelo elétron no sistema  $R$ , na região onde  $\hbar\omega_a > mc^2$ , multiplicando (30) pela energia de um fóton emitido em  $R$  e pela seção de choque de Klein-Nishina (28) e integrando sobre todo o espectro de frequência. Na verdade, vamos aproximar a equação (28) por simplificação de cálculo, escrevendo então

$$W_2 = \int_{mc^2/\hbar}^{\gamma mc^2/\hbar} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \left(\frac{mc^2}{\hbar\omega_a}\right) \ln\left(\frac{\hbar\omega_a}{mc^2}\right) \times \frac{\alpha Z^2}{\omega_a} \ln\left(\frac{g\gamma mc^2}{\hbar\omega_a}\right) \gamma mc^2 d\omega_a$$

ou

$$W_2 = A_2 \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \alpha Z^2 \gamma mc^2 \int_1^{\sim\gamma} \frac{1}{\zeta^2} \ln \zeta \ln\left(\frac{g\gamma}{\zeta}\right) d\zeta$$

onde  $A_2 \sim 1$  e  $\zeta \equiv \hbar\omega_a/(mc^2)$ .

A solução desta integral é

$$\begin{aligned} W_2 &= \frac{K}{\zeta} [\ln^2 \zeta + (2 - \ln(g\gamma))(\ln \zeta + 1)] \Big|_1^\gamma \\ &= K \left\{ \frac{1}{\gamma} [\ln^2 \gamma + (2 - \ln(g\gamma))(\ln \gamma + 1)] - \ln^2 1 - (2 - \ln(g\gamma))(\ln 1 + 1) \right\} \\ &\simeq K \left[ \frac{1}{\gamma} (\ln \gamma + 2) + (\ln(g\gamma) - 2) \right] \end{aligned}$$

ou

$$\boxed{W_2 \simeq K \ln(g\gamma)} \quad (32)$$

pois  $\gamma \gg 1$  e  $g \sim 1$ , onde

$$K = A_2 \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \alpha Z^2 \gamma mc^2$$

Analizando (31) e (32), concluímos que  $W_2$  é da mesma ordem de grandeza de  $W_1$  e, conseqüentemente, a contribuição dos fótons virtuais com energia  $\hbar\omega_a > mc^2$  é da mesma ordem de grandeza daquela para fótons  $\hbar\omega_a < mc^2$ , ao contrário do que se obtém da teoria clássica, para a qual na região de frequências  $\hbar\omega_a > mc^2$  a taxa de perda de energia é proporcional a  $\ln^2 \gamma$ .

Podemos ainda escrever a energia total perdida pelo elétron em termos da seção de choque para a perda de toda sua energia como

$$\boxed{\sigma = \frac{1}{\gamma mc^2} (W_1 + W_2) = A \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \alpha Z^2 \ln(g\gamma)} \quad (33)$$

onde  $a \sim 1$  e  $g \sim 1$ . Esta é a mesma fórmula obtida por Heitler & Sauter, tomando-se  $A = 4$  e  $g = 2.1$ .<sup>47</sup>

<sup>47</sup>No cálculo de von Weizsäcker o valor obtido para  $a$  é exato.

#### 4.4.2 “Bremsstrahlung” de elétrons num cristal

Williams [16] foi o primeiro a mencionar que quando um elétron de energia bem alta atravessa uma rede cristalina pode haver uma contribuição simultânea dos diferentes átomos da rede sobre o *bremsstrahlung*, pois as perturbações devidas a diferentes átomos não serão independentes. Na realidade, Williams faz apenas uma estimativa que o levou a concluir que o *bremsstrahlung* diminuiria para energias muito altas da partícula incidente sobre o cristal e, de acordo com Feinberg & Pomerančuk [28], este resultado está incorreto. Um estudo sobre o fenômeno de interferência devido ao *bremsstrahlung* em cristais foi desenvolvido por Ferretti [27].<sup>48</sup> Neste trabalho, ele começa tratando o caso ideal de um cristal infinito (cúbico, por simplicidade) constituído de átomos infinitamente pesados, no qual ele utiliza o método de W.W. e, em seguida, aborda o caso de um cristal real (onde as dimensões do cristal e a massa dos átomos são finitas). Não entraremos nos detalhes dos cálculos, ressaltando apenas que Ferretti concluiu, utilizando a aproximação de W.W., que a importância do efeito de interferência causada pelo reticulado sobre o *bremsstrahlung* aumenta com o aumento da energia da partícula incidente.

#### 4.5 Produção de par por fótons de alta energia no campo de um núcleo atômico

O que será visto nesta Seção corresponde basicamente ao conteúdo das referências [16] e [29]. Inicialmente, vamos ver que o processo de criação de par do tipo  $\gamma \rightarrow e^+ + e^-$  não pode ocorrer no vácuo por conservação de energia e momento. O argumento é simples: basta considerarmos a reação no sistema do C.M. do par  $e^+ + e^-$ , no qual  $\vec{p}_{tot} = 0$ , para concluirmos que como para o fóton  $E = pc$ , deveríamos ter um fóton com energia e momento nulos! Como isto não ocorre, para que a reação  $\gamma \rightarrow e^+ + e^-$  seja possível, é preciso que de algum modo haja um balanço de energia e momento, o que pode ocorrer na presença de um campo coulombiano de um núcleo.

Como resultado da Teoria de Dirac, tanto a criação de pares quanto a aniquilação são fenômenos que envolvem dois fótons. No entanto, verifica-se, experimentalmente, que basta irradiarmos matéria com apenas um feixe de fótons para obtermos tais processos. Desta forma, a produção de par não é resultado da ação de dois fótons reais, conforme Dirac considerou, mas se deve a um fóton e a um núcleo atômico. Entretanto, se utilizamos o método de W.W., os dois processos acima ficam relacionados, pois o campo do núcleo é substituído pela radiação equivalente.

Na região efetiva para produção de pares ( $b > \hbar/mc$ ), a radiação equivalente ao campo do núcleo é dada pela equação (24) para  $\beta \sim 1$ . O número de fótons por intervalo de energia  $d\hbar\omega$  é

$$N(\hbar\omega)d\hbar\omega = \frac{2}{\pi}\alpha Z^2 \ln\left(\frac{g\gamma mc^2}{\hbar\omega}\right) \frac{d\hbar\omega}{\hbar\omega} \quad (34)$$

Queremos obter a seção de choque  $\sigma$  para a produção de par por um fóton de energia  $\gamma mc^2 \gg mc^2$ , em um sistema de referência no qual o núcleo está em repouso. Para tal, usaremos a relação entre produção de par por um fóton e um núcleo e a produção de para por dois fótons. A relação entre as seções de choque para os dois casos é dada por (22), na qual  $\sigma_{\gamma\gamma}(\hbar\omega)$  é a seção de choque para a produção de pares por um fóton real e outro virtual se movendo em sentidos opostos.<sup>49</sup> Substituindo a expressão de  $\sigma_{\gamma\gamma}(\hbar\omega)$  pela fórmula de Breit & Wheeler [30], vamos obter

<sup>48</sup>Uma discussão mais qualitativa sobre a influência do reticulado cristalino sobre o *bremsstrahlung* pode ser encontrada em [28]. Veja mais detalhes em M.L. Ter-Mikaeljan, *Žu. Éksper. Teor. Fiz.* **25**, 289-296 (1954).

<sup>49</sup>É conveniente escolhermos o sistema de referência  $R'$ , no qual o núcleo se move com velocidade  $v$  em direção ao fóton. Neste sistema, a energia do fóton se reduz a  $mc^2$ .

$$\sigma = \frac{28}{9} \alpha Z^2 \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \ln(g\gamma) \quad (35)$$

A menos do valor numérico de  $g$ , que não pode ser determinado pelo método de W.W., esta fórmula é idêntica à fórmula para produção de par por fótons de grande energia, encontrada por Bethe, Heitler & Sauter [26] e [31], que é

$$\sigma = \frac{Z^2}{137} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \left[ \frac{28}{9} \ln \frac{2h\nu}{mc^2} - \frac{218}{27} \right] \quad (36)$$

Para verificarmos que (35) e (36) possuem a mesma forma, basta reescrever (36) como

$$\sigma = \alpha Z^2 \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \left[ \frac{28}{9} \ln \frac{2h\nu}{mc^2} - \ln \exp \frac{218}{27} \right]$$

na qual o termo entre colchetes é uma expressão do tipo

$$a \ln b - \ln c = \ln \left( \frac{b^a}{c} \right) = \ln \left( \frac{b}{c^{1/a}} \right)^a = a \ln \left( \frac{b}{c^{1/a}} \right)$$

com  $a = 28/9$ ,  $b = 2h\nu/(mc^2)$  e  $c = 3210.15$ . Logo,

$$[\dots] = \frac{28}{9} \ln \left( \frac{2h\nu}{13.4mc^2} \right)$$

e, portanto,

$$\sigma = \alpha Z^2 \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{28}{9} \ln \left( \frac{0.15h\nu}{mc^2} \right)$$

e, para fótons para os quais  $h\nu \sim \gamma mc^2$ ,

$$\sigma = \frac{28}{9} \alpha Z^2 \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \ln(g'\gamma)$$

com  $g' \sim 0.2$ , donde (35) e (36) são equivalentes.

Note que (36) e (32) possuem exatamente a mesma forma. Portanto, ao usarmos o método de W.W. fica evidente uma correspondência entre os processos de *bremstrahlung* e produção de pares. Esta correspondência vem do fato de que para fótons de energia alta comparada com  $mc^2$ , a seção de choque de espalhamento de Klein-Nishina é da mesma ordem de grandeza da seção de choque para a produção de pares por um fóton de energia  $\hbar\omega \gg mc^2$  e um fóton de energia igual a  $mc^2$  movendo-se em sentidos opostos [16]. Por este motivo é que a expressão integral (22) obtida para o processo de produção de pares é idêntica à obtida para o *bremstrahlung*,<sup>50</sup>

$$\sigma(\gamma) \simeq \alpha Z^2 \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \int_1^{\sim\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta} \ln \zeta \ln \left( \frac{g\gamma}{\zeta} \right)$$

<sup>50</sup>Note que a integral converge rapidamente, o que significa dizer que para o processo de produção de pares, bem como para o *bremstrahlung*, só são importantes energias no campo coulombiano do núcleo da ordem de  $mc^2$ .

## 4.6 Produção de par em colisões entre duas partículas com velocidade relativa próxima à da luz

Podemos usar também o método de W.W. para obter a seção de choque para produção de par em colisões entre duas partículas com velocidade relativa próxima à da luz. Basta substituir uma das partículas por radiação equivalente e, a seguir, considerar a produção de pares por esta radiação virtual no campo da outra partícula.

Consideremos duas partículas 1 e 2 de cargas respectivamente iguais a  $z_1 e$  e  $z_2 e$  e seja  $v$  a velocidade relativa entre ambas. Seguindo o procedimento citado acima, tomamos, por exemplo, o sistema de referência  $R'$  onde a partícula 1 está em repouso. Neste caso, a distribuição de fótons que representa o campo da partícula 2 é obtido de (24) tomando  $\beta \sim 1$ . A seção de choque  $\sigma_p(E)dE$  para a criação de par de energia total compreendida entre  $E$  e  $E + dE$  é dada pelo produto da equação (24) por  $\hbar\omega = E$  e pela seção de choque para a produção de par por um fóton de energia  $E$  no campo estacionário da partícula 1, dada por (35), ou seja,

$$\sigma_p(E)dE = \frac{56}{9\pi} \alpha^2 z_1^2 z_2^2 \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \ln \left( \frac{g\gamma mc^2}{E} \right) \ln \left( \frac{0.15E}{mc^2} \right) \frac{dE}{E} \quad (37)$$

Como a máxima frequência no campo de radiação virtual da partícula 2 é da ordem de  $\gamma mc^2/\hbar$ , a seção de choque para a produção de par para qualquer energia é

$$\sigma = \int_{2mc^2}^{\gamma mc^2} \sigma_p(E) dE \quad (38)$$

onde  $2mc^2$  é a energia de repouso das duas partículas. A integral (38), com  $a = 0.15/(mc^2)$  e  $b = g\gamma mc^2$ , tem como solução

$$\sigma = \lambda \left[ \ln a \ln b \ln E + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{b}{a} \right) \ln^2 E - \frac{1}{3} \ln^3 E \right] \Bigg|_{2mc^2}^{\gamma mc^2}$$

com

$$\lambda \equiv \frac{56}{9\pi} \alpha^2 z_1^2 z_2^2 \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2$$

Substituindo os limites da integral, no limite  $\beta \sim 1$ , resulta

$$\boxed{\sigma_p(\gamma) = \frac{28}{27\pi} \alpha^2 z_1^2 z_2^2 \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \ln^3(g\gamma)} \quad (39)$$

Esta expressão ainda é válida para o caso em que uma das partículas ou ambas são elétrons [16]. Vários autores, entre eles Landau & Lifshitz [32], Bhabha [33], Nishina, Tomonaga & Kobayashi [34] e Racah [35] estudaram este processo. Os autores de [32] e [33] calcularam a probabilidade de criação de par, sob ação de um campo coulombiano devido a um núcleo fixo e um outro em movimento, considerando o campo de duas partículas em seu conjunto e usando a teoria dos buracos de Dirac. Já Nishina e colaboradores utilizaram o método de W.W. e, mais tarde, Racah se propôs a aperfeiçoar este trabalho. Os resultados de todos estes trabalhos concordam unanimemente com o que acabamos de derivar.

#### 4.7 Produção de “estrelas” por méson $\mu$

Antes do advento dos aceleradores de partículas, eram feitas experiências que envolviam raios cósmicos e eram realizadas a grandes altitudes. Nesta época ( $\sim 1950$ ) havia grande interesse no estudo dos mésons e suas interações. Uma das primeiras experiências envolvendo produção de “estrelas”<sup>51</sup> por mésons  $\mu$  (Veja esquema na Figura 8) foi feita por George & Evans [36], cujo resultado parece ser bem explicado pelo método de W.W.

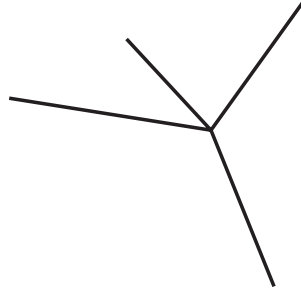


Figura 8

Deste modo, um méson  $\mu$  de energia  $E$  é substituído por um número de fótons virtuais, com energia compreendida entre  $K$  e  $K + dK$ , igual a

$$N(K)dK = \frac{2\alpha}{\pi} \frac{dK}{K} \ln\left(\frac{gE}{K}\right) \quad (40)$$

sendo que os autores de [36] tomaram  $g = 1$ . Usando a equação (22), obtemos a seguinte expressão para a seção de choque de produção de “estrelas” por méson  $\mu$ :

$$\sigma_\mu = \frac{2\alpha}{\pi} \int_{E_{min}}^E \frac{dK}{K} \sigma_{\gamma\gamma} \ln \frac{E}{K} \quad (41)$$

onde  $E_{min} \simeq m_\pi c^2$  é a energia mínima para a produção de “estrelas”. A seção de choque total,  $\sigma_{\gamma\gamma}$ , para a fotoprodução de “estrelas” que eles utilizaram foi  $\sigma_{\gamma\gamma} = 100 \mu\text{b}$ , resultado este que se baseava na experiência realizada por Mc Millan *et al.*<sup>52</sup> O fato de eles terem considerado  $\sigma_{\gamma\gamma}$  como independente de  $K$  não introduz erro apreciável, pois o valor dado já é um valor médio sobre um intervalo de frequência. Assim, fazendo  $u = \ln E/K$  na equação (41), obtemos de modo trivial a seção de choque em  $\mu\text{b}$ ,

$$\sigma_\mu \simeq \frac{200}{\pi} \alpha \ln^2 \left( \frac{E}{m_\pi c^2} \right)$$

Para  $E \sim 10 \text{ GeV}$ , obtemos  $\sigma_\mu \sim 10 \mu\text{b}$ , que é um valor bem próximo do observado.

#### 4.8 Dissociação coulombiana de um feixe de partículas

Estudaremos nesta Seção a possibilidade de dissociação de partículas de um feixe na presença do campo coulombiano de um núcleo, para energias  $\gtrsim 1 - 10^2 \text{ GeV}$  e sua dependência com a

<sup>51</sup>Em emulsão nuclear, “estrela” é um evento onde pelo menos um pión é emitido pelo núcleo. O esquema de um tipo de estrela observado por George & Evans é mostrado na Fig. 8.

<sup>52</sup>*Science* **110**, 579 (1949).

reação e com o tipo de material utilizado como alvo [44]-[45]. A tabela a seguir, extraída de [44], indica 7 reações diferentes.<sup>53</sup>

Fenômeno de Colisão	Efeito de Radiação Correspondente	Eq. do Processo
Colisão radiativa	Espalhamento	$S_{occ}^+ + S_{emp}^+ + h\nu_n \rightarrow S_{emp}^+ + S_{occ}^+ + h\nu_e$
Inverso da colisão radiativa	Espalhamento induzido	$S_{occ}^+ + S_{emp}^+ + h\nu_e + Nh\nu_n \rightarrow S_{emp}^+ + S_{occ}^+ + (N+1)h\nu_n$
Produção de par por fóton, $h\nu_e$ , em presença de um campo nuclear	Produção de par no vácuo por dois fótons	$\bar{S}_{occ}^- + S_{emp}^+ + h\nu_e + h\nu_n \rightarrow \bar{S}_{emp}^- + S_{occ}^+$
Produção de par por duas partículas		$\bar{S}_{occ}^- + S_{emp}^+ + h\nu_n' + h\nu_n'' \rightarrow \bar{S}_{emp}^- + S_{occ}^+$
Aniquilação de pares em um campo nuclear dando 1 fóton	Aniquilação de par induzida por radiação, dando dois fótons (um dos quais sendo idêntico ao da radiação que induziu o processo)	$\bar{S}_{emp}^- + S_{occ}^+ + Nh\nu_n \rightarrow \bar{S}_{occ}^- + S_{emp}^+ + (N+1)h\nu_n + h\nu_e$
Desdobramento de fóton, $h\nu_e$ , em dois fótons, $h\nu_e'$ e $h\nu_e''$ na presença de um campo nuclear		$h\nu_e + h\nu_n \rightarrow h\nu_e' + h\nu_n''$
Colisão radiativa devida à ação simultânea de duas partículas sobre elétrons de estados de energia negativa	Espalhamento simultâneo de dois fótons por elétrons em estado de energia negativa	$h\nu_{n1} + h\nu_{n2} \rightarrow h\nu_e' + h\nu_e''$

Tabela

Para estimarmos a seção de choque de dissociação, utilizaremos o método de W.W. Este processo é análogo aos processos eletromagnéticos de *bremsstrahlung* e produção de pares (veja Figura 9).

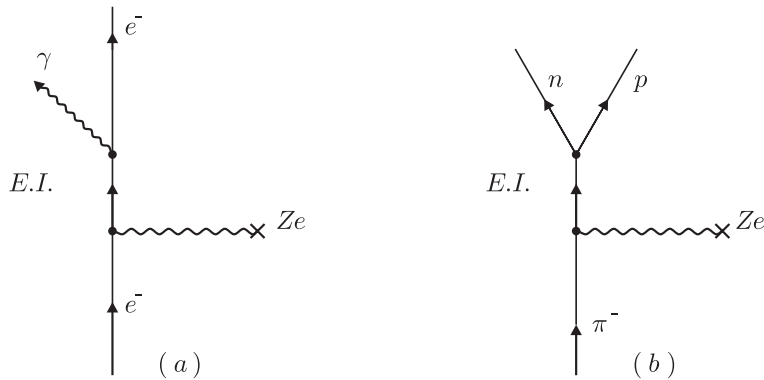


Figura 9

Sabemos que para mudarmos o estado de massa de uma partícula, *i.e.*, tirá-la de sua camada de massa, é preciso que ela interaja com outra(s) partícula(s). A condição de camada de massa é  $p^\mu p_\mu = m^2$ , para  $\mu = 0, 1, 2, 3$ , e não é satisfeita para estados intermediários de curta duração em

<sup>53</sup>Cabe aqui um comentário sobre a notação da Tabela, lembrando que mantivemos como curiosidade a notação original. Por  $\bar{S}$  denota-se um estado de energia negativa de Dirac e por  $S^+$ , um estado ordinário de energia positiva. Assim,  $S_{occ}^+$  é um elétron e  $\bar{S}_{emp}^-$  é um pósitron. Um fóton virtual (no campo de radiação do núcleo) é denotado por sua energia  $h\nu_n$  e um fóton real (externo), por  $h\nu_e$ .



Mecânica Quântica. Logo, se alterarmos o estado de massa de uma partícula de massa  $M$  para um estado de massa  $M^*$ , podemos determinar a variação de energia envolvida nesta transição partindo da definição do 4-vetor  $P = (E, \vec{p})$ , com  $E = (\vec{p}^2 + M^2)^{1/2}$  e  $E^* = (\vec{p}^2 + M^{*2})^{1/2}$ . Para calcularmos a diferença de energia entre estes dois estados tomemos  $|\vec{p}| \equiv p \gg M, M^*$  (que é uma das condições de aplicabilidade do método de W.W.). Expandindo o binômio temos

$$E = p + \frac{M^2}{2p} \quad ; \quad E^* = p + \frac{M^{*2}}{2p} \Rightarrow \Delta E = E - E^* = \frac{M^{*2} - M^2}{2p}$$

Portanto, uma partícula virtual de massa  $M$  pode, através de uma transição virtual,<sup>54</sup> passar para um estado de massa  $M^*$ , ao experimentar uma variação de energia  $\Delta E$ .

Consideremos que a partícula incidente  $A$ ,<sup>55</sup> de massa  $M$  e quadri-momentum  $P$  se dissocia em  $B + C$ , cuja energia no seu referencial próprio é  $M^*$ . Sendo  $M^* > M$ , podemos ver o estado intermediário se fornecermos à partícula  $A$  um pequeno estímulo longitudinal. O *momentum*  $q_{\parallel}$  que deve ser transferido é exatamente igual à diferença de energia entre o estado inicial e o virtual, ou seja

$$q_{\parallel} = \Delta E = \frac{M^{*2} - M^2}{2p} \quad (42)$$

que deve ser bem menor que a energia no referencial próprio da partícula ( $M^* - M$ ), para que o núcleo não absorva energia virtualmente, mantendo assim sua estrutura. Em outras palavras, quanto maior a energia do feixe incidente, menor o ângulo de divergência das partículas incidentes envolvidas na colisão, o que implica na redução da componente  $q_{\parallel}$  do *momentum* transferido ao núcleo.<sup>56</sup>

Assim, podemos ver o processo de dissociação coulombiana como um processo de foto-dissociação das partículas do feixe, de modo análogo ao que vimos na Seção 4.2. Então, ao usarmos o método de W.W. podemos representar esquematicamente o processo de dissociação como

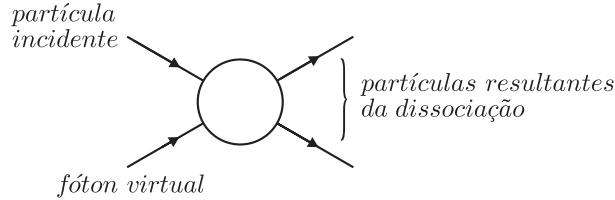


Figura 10

Ao calcularmos a seção de choque, devemos ter em mente que não podemos atribuir a causa do processo ao núcleo como um todo, a menos que  $q_{\parallel}$  não exceda o inverso de  $R$  dado no Apêndice C.<sup>57</sup> De (42),

$$p = \frac{(M^{*2} - M^2)}{2q_{\parallel}}$$

e, portanto, o valor máximo de  $q_{\parallel}$  ( $q_{\parallel} = m_{\pi}/A^{1/3}$ ) nos fornece o valor do momento limiar

$$p_{limiar} = \frac{M^{*2} - M^2}{2m_{\pi}} A^{1/3}$$

<sup>54</sup>Ver Apêndice C.

<sup>55</sup>Vamos supor que o feixe incidente seja formado apenas de partículas do tipo  $A$ .

<sup>56</sup>Esta é a segunda condição para podermos aplicar o método de W.W.

<sup>57</sup>Veja a propósito [43] e [46].

Utilizando (22),

$$\sigma = \int_{K_{limiar}}^{K_{max}} dK \sigma_{\gamma\gamma} N(K)$$

e usando (14), com  $\beta \sim 1$ ,

$$\sigma = \frac{2}{\pi} \alpha Z^2 \int_{K_{limiar}}^{K_{max}} dK \sigma_{\gamma\gamma} \frac{1}{K} \ln \left( \frac{\lambda \gamma c}{\omega b_{min}} \right), \quad \lambda \sim 1$$

onde  $b_{min}$  é dado pelo princípio de incerteza

$$b_{min} \sim \frac{\hbar}{q} = \frac{\hbar A^{1/3}}{m_\pi}$$

donde

$$\sigma = \frac{2}{\pi} \alpha Z^2 \int_{K_{limiar}}^{K_{max}} \frac{dK}{K} \sigma_{\gamma\gamma} \ln \left( \frac{\gamma m_\pi c}{K A^{1/3}} \right)$$

que pode ainda ser escrita, em unidades naturais ( $\hbar = c = 1$ ), como<sup>58</sup>

$$\boxed{\sigma = \frac{2}{\pi} (Ze)^2 \int_{K_{limiar}}^{K_{max}} \frac{dK}{K} \sigma_{\gamma\gamma} \ln \left( \frac{\gamma m_\pi}{K A^{1/3}} \right)} \quad (43)$$

Nesta equação, cabe lembrar,  $K_{limiar}$  é a energia limiar para o processo estudado e  $K_{max}$  é a máxima energia do fóton permitida no campo coulombiano. Cabe ainda ressaltar que este cálculo é aproximado e serve para mostrar que é possível, através de um cálculo rápido, fazermos uma estimativa da energia necessária antes de realizarmos um experimento para obtermos valores mensuráveis para  $\sigma$ . Good & Walker [44] estimaram a seção de choque para qualquer processo que envolva reações fortes, usando  $\sigma_{\gamma\gamma} = e^2/m^2$ , sendo  $m$  a massa do produto mais leve. Note que, para  $\sigma_{\gamma\gamma} = \text{constante}$ , caímos numa integral idêntica a (41), cujo resultado é

$$\frac{1}{2} \left[ \ln \frac{K_{max}}{K_{limiar}} \right]$$

e, portanto, o resultado para  $\sigma$  é

$$\boxed{\sigma = \frac{1}{\pi} \frac{Z^2 e^2}{m^2} \left[ \ln \frac{2m_\pi p}{(M_{min}^{*2} - M^2) A^{1/3}} \right]^2} \quad (44)$$

onde  $M_{min}^*$  é a massa de repouso dos produtos da dissociação. Um cálculo mais detalhado para as reações  $\pi^- \rightarrow \bar{p} + n$  e  $\mu^+ \rightarrow B^+ + \nu$  foi feito por Ebel & Walker [45].

<sup>58</sup>No artigo de Good-Walker, a constante multiplicativa é  $3/2\pi$  ao invés de  $2/\pi$ .

## 5 Sobre a generalização do Método de W.W.

Em 1955-56, Fowler [37] questionou a validade da aproximação do método de W.W. aplicada ao problema de produção de “estrelas” por mésons  $\mu$ . Ele concluiu que, como neste caso  $q\ell \gg \hbar$  (sendo  $q$  o momento transferido e  $\ell$  a dimensão linear do alvo) a expressão semi-clássica de W.W. não seria válida. A partir daí ele deriva uma outra expressão para o espectro de fótons equivalentes, obtendo que o número de fótons por unidade de energia varia como  $K^{-3/2}$  e não como  $K^{-1}$ . Portanto, ao reexaminar os resultados de George & Evans [36] para produção de “estrelas”, ele mostrou que os efeitos fotonucleares não explicavam as seções de choque medidas. Esta discrepância entre os resultados teórico e experimental levou Fowler a propor a existência de um novo tipo de interação entre os mésons e os núcleons ( $n$ ).

Isto motivou os irmãos Kessler [38] a fazerem uma derivação do método de W.W. utilizando a Teoria Quântica de Campos.<sup>59</sup> A restrição ao tratamento de Fowler, segundo eles, vem do fato de este só ser aplicável no caso de espalhamentos elásticos, nos quais a colisão entre o méson  $\mu$  e um próton do núcleo alvo é elástica e, portanto, não se aplica às interações mais complexas que contribuem para a seção de choque total do processo. Além disso, como a energia transferida no processo de produção de “estrelas” é muito maior que a energia de ligação dos nucleons dentro dos núcleos alvo, estes podem ser considerados livres. Assim, se considerarmos somente espalhamentos elásticos, vemos que *a priori* a idéia de se aplicar o método de W.W. já não é válida, haja vista que não existe um processo de fotoprodução para esta interação, uma vez que fótons reais não são absorvidos por prótons livres, em primeira ordem.

Comparando as seções de choque correspondentes aos gráficos de Feynman (a) e (b) da Figura 11, descrevendo a interação fotoelétrica do méson  $\mu$  com o núcleo em primeira ordem (troca de um fóton), e acrescentando à equação (22) a seção de choque elástica (pelos motivos apresentados acima – veja o gráfico (c)), eles mostraram que o espectro de fótons equivalentes, assim obtido, é praticamente o mesmo que o semi-clássico. O resultado obtido por Kessler & Kessler é válido para qualquer interação eletromagnética de um férmion relativístico.

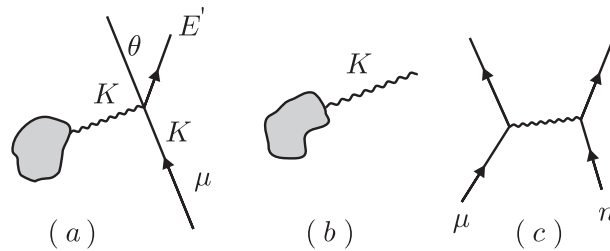


Figura 11

Com o trabalho [38] concluiu-se que a interpretação de George & Evans [36] estava correta e que, portanto, não havia necessidade de se introduzir um novo tipo de interação para explicar a interação  $\mu$ - $n$ .

Outras aplicações do método de W.W. foram feitas a processos que envolvem emissão de nucleons [40-41]. O leitor pode também encontrar outras referências em [39]. Derivações análogas à de Kessler-Kessler foram feitas por Curtis [42] e Dalitz & Yennie [43], que estudaram processos de eletroprodução ao invés de muonprodução. Nestes trabalhos, bem como nos de K.K., estão contidas as origens da generalização do método de W.W.

Inspirado no sucesso obtido pela aproximação semi-clássica de W.W., tanto pelas vantagens de cálculo como pela possibilidade de fornecer uma interpretação satisfatória para as interações

<sup>59</sup>Outras referências e uma discussão em linhas gerais sobre o assunto podem ser encontradas em [39], onde temos também uma rica lista de referências sobre o método de W.W., suas generalizações e aplicações.

do méson  $\mu$  com núcleos, Kessler procurou generalizar o método de W.W. [47], logo após ter mostrado que o espectro de fótons equivalentes obtido via Teoria de Campo concordava com o semi-clássico. A generalização que ele desenvolveu teve seu ponto de partida com a renúncia da condição de que a energia  $E$  do projétil de massa  $m$  fosse muito maior que a energia do fóton virtual trocado na interação com um alvo (uma das condições de aplicabilidade do método semi-clássico de W.W.), mantendo simplesmente a hipótese de que a partícula deva ser relativística, tanto antes quanto depois da interação, *i.e.*,  $E, E' \gg m$ .

Aplicando as regras de Feynman aos diagramas (a) e (b) da Figura 11, Kessler obteve uma equação análoga à equação (22), que lhe permitiu determinar o espectro dos fótons equivalentes, qual seja

$$N(K)dK = \frac{2\alpha}{\pi} \left( \ln \frac{E}{m} \varphi_{max} - \frac{1}{2} \right) \left( 1 - \frac{K}{E} + \frac{K^2}{2E^2} \right) \frac{dK}{K} \quad (45)$$

onde  $\varphi \equiv (2E'/K)\text{sen } \theta/2$ , sendo  $\theta$  o ângulo de difusão da partícula.

Naturalmente, o resultado semi-clássico é reobtido no limite em que  $K \ll E$ . A escolha de  $\varphi_{max}$  depende do processo estudado; no caso das interações de elétrons e mésons  $\mu$  com núcleos, podemos geralmente tomar  $\varphi_{max} \sim 1$  e  $K_{max} \sim E$ .

A principal aproximação feita para a obtenção da equação (45) consiste em não se considerar trocas de fótons “muito virtuais”, o que corresponde a pequenos valores de  $\varphi$ .

Verifica-se que o erro cometido com esta aproximação é pequeno e tanto menor quanto mais relativística for a partícula. Kessler mostrou ainda que se pode atribuir a todo processo virtual elementar, envolvendo um fóton e dois estados de férmions relativísticos (do tipo mostrado na Figura 12),<sup>60</sup> uma probabilidade dada pela equação (45) associada a um processo “quase-real”, desde que a condição  $E, E' \gg m$  seja satisfeita.

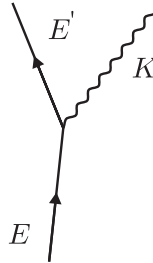


Figura 12

Esse método generalizado foi aplicado aos seguintes casos:

- *bremssstrahlung* de uma partícula em um dado ângulo;
- recuo de núcleo pela criação de par por fótons muito energéticos;
- *bremssstrahlung* interno na desintegração de mésons  $\mu$ , que envolve o estudo de correções radiativas nestas desintegrações.

Há na literatura outros trabalhos que apresentam diferentes versões do método de W.W. na forma covariante<sup>61</sup> que, numa linguagem mais moderna, é às vezes chamada de *aproximação de pólo*.

<sup>60</sup>Este diagrama pode estar ligado por qualquer uma das três pontas a um gráfico de Feynman completo.

<sup>61</sup>Veja, por exemplo, [39], [48], [49] e outras referências lá citadas.

A grande motivação para se continuar a desenvolver a aproximação de W.W. é a considerável dificuldade de natureza matemática que aparece em cálculos de seções de choque em processos de ordem superior em Eletrodinâmica Quântica (QED).

Em 1973, Baier, Fadin e Khoze [50] desenvolveram um método similar ao proposto por Kessler [47], no qual dão atenção a uma outra aproximação: a de *pólo de elétron* (ao contrário da aproximação de *pólo de fóton*, segundo a qual a seção de choque de choque é dominada pelo pólo do fóton).

Uma outra derivação da fórmula de W.W. obtida via Teoria de Campos e utilizando um método de helicidade generalizado para cálculos de diagramas de Feynman desenvolvido por Kessler [51] pode ser encontrada em [39]; primeiramente para problemas que envolvem trocas de um fóton e depois estendido aos fenômenos de troca de dois fótons (colisões fóton-fóton) – veja também [52].

Uma aplicação interessante do método dos fótons equivalentes para processos de troca de dois fótons é ressaltada por Courau [53], no estudo da produção de léptons em colisões  $\gamma\gamma$ . A maior contribuição para a seção de choque deste processo vem da região física na qual ambos os fótons estão próximos de suas camadas de massa (quase-reais); nesta região, os elétrons são espalhados para ângulos muito pequenos e, neste caso, é possível se utilizar a *aproximação de duplo-fóton equivalente*. Neste trabalho, o autor chama atenção de que do estudo das produções de pares de léptons e de  $\mu^+\mu^-$ , principalmente, não se espera ganhar novo conhecimento teórico na QED, mas sim obter alguma intuição para o estudo de processos de produção de quark-antiquark, assim como  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  é o protótipo para a reação  $e^+e^- \rightarrow \bar{q}q$ .<sup>62</sup>

Uma outra aplicação da aproximação de duplo fóton equivalente de W.W. foi feita por Barcelos Neto & Chanda [55] ao estudarem o efeito das massas de quarks pesados em interações  $\gamma\gamma$ , utilizando a generalização do método de W.W. apresentada em [54], [56] e [57].

Em [54] encontramos uma derivação do método de W.W. usando a técnica de teoria de perturbação ordenada no tempo no referencial de momento infinito desenvolvido por Bjorken *et al.* [56] e Brodsky *et al.* [57]. As aplicações do método, em [54], são referentes à aniquilação  $e^+e^-$  e espalhamento inelástico fóton-nucleon e elétron-nucleon a altas energias, para as quais os autores obtêm estimativas de seções de choque em ordens mais altas de QED.

A última aplicação que mencionaremos aparece no artigo de Altarelli & Parisi [59], no qual eles aplicam a generalização do método de W.W. [47], [50] e [54] na Cromodinâmica Quântica (QCD). Esperamos poder, em um futuro próximo, continuar o estudo do método de W.W. dando ênfase a outras possíveis aplicações de suas generalizações à QCD.

---

<sup>62</sup>Sobre a validade da aproximação de fóton equivalente para colisões fóton-fóton veja [58].

## 6 Comentários finais

Podemos dizer que o método de W.W. teve sua origem no estudo da interação de partículas carregadas com a matéria, tendo por base a sugestão de N. Bohr de que deveria haver uma grande analogia entre a teoria do decréscimo de velocidade de partículas carregadas ao passarem pela matéria e a teoria eletromagnética da dispersão, além da proposição de Fermi de que a perturbação de um átomo em colisões distantes pode ser obtida corretamente decompondo-se esta em suas componentes de Fourier e supondo que cada componente se comporta como radiação de frequência igual à da componente de Fourier. Isto vai sugerir uma relação entre os efeitos produzidos por uma partícula carregada, que incide sobre um alvo, e os efeitos de um campo perturbativo de radiação, que constitui a idéia básica do método de W.W. Esta relação se justifica pelo fato de que a Mecânica Quântica não faz nenhuma distinção, *a priori*, entre o efeito de um campo de uma partícula carregada e aquele de um campo de radiação. Sendo  $e$  e  $m$  a energia e a massa da partícula incidente,  $E'$ , sua energia final e  $K = E - E'$ , a energia do fóton trocado na interação, podemos dizer que a condição de aplicabilidade do método é que tenhamos, para o processo dado,  $E \gg m$  e  $E \gg K$ .

Com o grande interesse que surgiu na década de 1950 sobre a *física dos mésons*, em particular a interação do méson  $\mu$ , de natureza cósmica, com a matéria, alguns físicos tentaram estender o limite de aplicabilidade da aproximação semi-clássica de W.W. para entender a interação méson-matéria. Esta aplicação, em particular, motivou outros físicos a buscarem uma derivação mais formal do método via Teoria de Campos, do que resultaram várias generalizações desta aproximação, que encontraram na QED um vasto campo de aplicação. A grande motivação para se continuar aprimorando a aproximação de W.W. é a considerável dificuldade de natureza matemática que aparece nos cálculos de seções de choque em processos de ordem superior em QED.

Atualmente já existem alguns trabalhos que aplicam as generalizações do método de W.W. à QCD e acreditamos que esta aproximação possa vir a ser igualmente útil à compreensão de processos fundamentais da QCD.

## 7 Anexos

### A. Como se transformam os campos eletromagnéticos

Partiremos das equações de Maxwell para um meio qualquer<sup>63</sup>

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 4\pi\rho\end{aligned}$$

Sabemos, da análise vetorial, que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$ , para  $\forall \vec{a}$ . Assim, na segunda das equações acima podemos associar a  $\vec{B}$  um vetor  $\vec{A}$  tal que  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$ . Levando este valor na primeira equação obtemos

$$\vec{\nabla} \times \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

Sabemos ainda que  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \phi = 0$ ,  $\forall \phi$ , donde podemos escrever

$$\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \phi$$

Logo,

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{e} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Com este par de equações, ao definirmos um quadri-vetor  $A^\mu = (\phi, \vec{A})$ , para  $\mu = 0, 1, 2, 3$ , com  $x_0 = ct$ ,  $x_1 = -x$ ,  $x_2 = -y$  e  $x_3 = -z$ , podemos mostrar facilmente que, por exemplo, a componente  $E_1$  é dada por

$$E_1 = -\frac{\partial}{\partial x} A^0 - \frac{\partial}{c \partial t} A^1 = \frac{\partial}{\partial x_1} A^0 - \frac{\partial}{\partial x_0} A^1 \equiv \partial^1 A^0 - \partial^0 A^1$$

e a componente  $B_1$ , por exemplo, é

$$B_1 = \frac{\partial}{\partial y} A^3 - \frac{\partial}{\partial z} A^2 = \partial^3 A^2 - \partial^2 A^3$$

Deste modo, podemos considerar os vetores campo elétrico e fluxo magnético como componentes de um tensor de segunda ordem, dado por

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

Em termos deste tensor, as equações de Maxwell se reduzem a duas equações:

<sup>63</sup>Veja, por exemplo, os livros do Jackson e do Panofsky.

$$\begin{aligned}\partial_\mu F^{\mu\nu} &= \frac{4\pi}{c} j^\nu \\ \partial^\alpha F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\alpha} + \partial^\nu F^{\alpha\mu}\end{aligned}\tag{46}$$

onde definimos  $j^\nu = (c\rho, \vec{j})$ .

Verificamos facilmente que  $F_{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$  e, portanto, o tensor é antissimétrico, e suas componentes determinaremos a seguir. Como o tensor é antissimétrico,  $F^{\mu\mu} = 0$ . Usando a definição de  $F^{\mu\nu}$ , vem que

$$F^{01} = \partial^0 A^1 - \partial^1 A^0 = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A_x + \frac{\partial}{\partial x} \phi = -E_x = -E_1$$

e

$$F^{12} = \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1 = \frac{\partial}{\partial y} A_x - \frac{\partial}{\partial x} A_y = -B_z = -B_3$$

De modo análogo, obtemos todas as outras componentes, que são:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por outro lado, sabemos que um tensor é uma grandeza que se transforma como

$$F^{\mu\nu'} = X^{\mu'} X^{\nu'}$$

Agora estamos aptos a saber como se transformam os campos eletromagnéticos. Pela equação acima, devemos saber como se transforma o quadri-vetor  $X^\mu$ . Este se transforma segundo uma transformação de Lorentz e, por conveniência futura, consideraremos o movimento dos sistemas inerciais paralelo ao eixo  $x_1$ . As transformações de Lorentz para este caso são:

$$\begin{aligned}X'_0 &= \gamma[X^0 - \beta X^1] \\ X'_1 &= \gamma[X^1 - \beta X^0] \\ X'_2 &= X^2 \\ X'_3 &= X^3\end{aligned}$$

onde  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$  e  $\beta = v/c$ .

Assim, cada componente se transforma como

$$\begin{aligned}F^{10'} &= E'_1 = X^{1'} X^{0'} = \gamma[X^1 - \beta X^0] \gamma[X^0 - \beta X^1] \\ &= \gamma^2 [X^1 X^0 - \beta X^0 X^0 + \beta^2 X^0 X^1 - \beta X^1 X^1] \\ &= \gamma^2 [F^{10} (1 - \beta^2)] = F^{10} = E_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F^{20'} &= E'_2 = X^{2'} X^{0'} = \gamma X^2 [X^0 - \beta X^1] \\ &= \gamma [X^2 X^0 - \beta X^2 X^1] = \gamma [F^{20} - \beta F^{21}] \\ &= \gamma [E_2 - \beta B_3]\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
F^{30'} &= E'_3 = X^{3'}X^{0'} = \gamma X^3[X^0 - \beta X^1] \\
&= \gamma[X^3X^0 - \beta X^3X^1] = \gamma[F^{30} - \beta F^{31}] \\
&= \gamma[E_3 + \beta B_2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F^{12'} &= -B'_3 = X^{1'}X^{2'} = \gamma[X^1 - \beta X^0]X^2 \\
&= \gamma[X^2X^0 - \beta X^2X^1] \\
&= \gamma[-B_3 + \beta E_2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F^{13'} &= -B'_2 = X^{1'}X^{3'} = \gamma[X^1 - \beta X^0]X^3 \\
&= \gamma[X^1X^3 - \beta X^0X^3] \\
&= \gamma[B_2 + \beta E_3]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F^{32'} &= -X^{3'}X^{2'} \\
&= F^{32} \\
&= B_1
\end{aligned}$$

Grupando as equações de transformação

$$\begin{aligned}
E'_1 &= E_1 \\
E'_2 &= \gamma[E_2 - \beta B_3] \\
E'_3 &= \gamma[E_3 + \beta B_2] \\
B'_1 &= B_1 \\
B'_2 &= \gamma[B_2 + \beta E_3] \\
B'_3 &= \gamma[B_3 - \beta E_2]
\end{aligned} \tag{47}$$

As transformadas inversas de (47) são obtidas trocando-se as quantidades com linha e sem linha e fazendo  $\beta \rightarrow -\beta$ , ou seja,

$$\begin{aligned}
E_1 &= E'_1 \\
E_2 &= \gamma[E'_2 + \beta B'_3] \\
E_3 &= \gamma[E'_3 - \beta B'_2] \\
B_1 &= B'_1 \\
B_2 &= \gamma[B'_2 - \beta E'_3] \\
B_3 &= \gamma[B'_3 + \beta E'_2]
\end{aligned} \tag{48}$$

Discutiremos a seguir como um observador “vê” o campo eletromagnético criado por uma partícula carregada que se move com velocidade constante em relação a ele. Em outras palavras, conhecidos os campos elétrico e magnético no referencial de repouso da partícula, vamos obter os valores correspondentes em outro referencial inercial  $R$ , que se desloca em relação ao referencial

de repouso  $R'$ .<sup>64</sup> Consideremos uma carga  $q$  que se move com velocidade  $\vec{v}$  constante e paralela ao eixo- $x_1$ , como mostra a Figura 13.

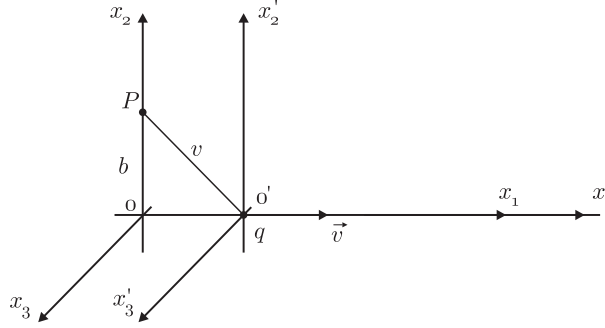


Figura 13

No ponto  $P$ , os campos elétrico e magnético valem

$$\begin{aligned} \vec{B}' &= 0 \quad \text{ou} \quad B'_1 = B'_2 = B'_3 = 0 \\ \vec{E} &= \frac{q\vec{r}'}{(r')^3} \quad \text{ou} \quad E_1 = -\frac{qv't'}{(r')^3}; \quad E_2 = \frac{qb}{(r')^3}; \quad E_3 = 0 \end{aligned}$$

vistos do referencial de repouso da partícula, no qual o ponto  $P$  tem coordenadas  $x_1 = -vt'$ ,  $x_2 = b$  e  $x_3 = 0$ . A distância  $r' = \sqrt{b^2 + (vt')^2}$  deve ser expressa em termos das coordenadas de  $R$ . Pela transformação de Lorentz para o tempo, temos

$$t' = \gamma \left[ t - \frac{\beta}{c} x_1 \right] = \gamma t$$

pois a coordenada  $x_1$  do ponto  $P$  em  $R$  é nula.

Obtemos, assim,

$$B'_1 = B'_2 = B'_3 = 0$$

e

$$E'_1 = -\frac{q\gamma vt}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}; \quad E'_2 = \frac{qb}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}; \quad E'_3 = 0$$

e usando as transformações (47) encontramos o que desejamos:

$$\begin{aligned} E_1 &= -\frac{q\gamma vt}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} \\ E_2 = \gamma E'_2 &= \frac{\gamma qb}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} \\ B_3 &= \gamma\beta E'_2 = \beta E_2 \end{aligned} \tag{49}$$

sendo nulas as demais componentes.

Os campos dados pelas equações (49) possuem um comportamento interessante no limite  $v \rightarrow c$  ( $\beta \rightarrow 1$ ). De imediato vemos que existe uma indução magnética na direção  $x_3$ , cujo valor se reduz ao mesmo do campo elétrico transversal  $E_2$ , quando  $\beta \rightarrow 1$ . A altas energias,  $\gamma \gg 1$ , vemos que o valor de pico para  $E_2$  é  $E_2 = \gamma q/b^2$ , obtido em  $t = 0$ . O intervalo de tempo  $\Delta t$

<sup>64</sup>Por conveniência, fizemos a origem do sistema,  $O'$ , coincidir com a própria carga elétrica.

para o qual os campos assumem valores apreciáveis em  $P$  deve ser tal que o denominador das equações (49) mantenha a mesma ordem de grandeza. Isto implica que  $\gamma^2 v^2 (\Delta t)^2 \simeq b^2$ , ou

$$\Delta t \simeq \frac{b}{\gamma v}$$

Logo, se  $\gamma$  cresce, o valor de pico de  $E_2$  cresce, enquanto o intervalo de tempo de sua duração decresce. No limite  $\gamma \rightarrow \infty$  teríamos um comportamento tipo função  $\delta$  de Dirac. Se calcularmos a integral  $\int E(y)dy$ , com  $y = vt$ , veremos que o resultado independe da velocidade. A figura a seguir mostra o comportamento dos campos (49) em função de  $y$ , na qual representamos, por exemplo, seus comportamentos para  $\beta \simeq 1$ .

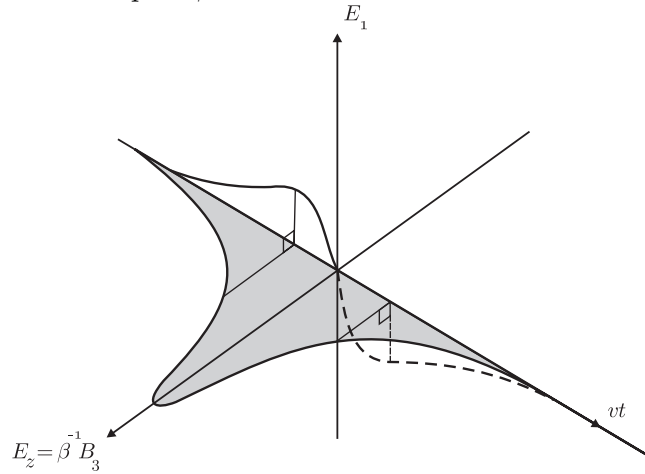


Figura 14

Agora é fácil de vermos que, para valores de  $\beta$  menores, as curvas serão mais suaves, porém permanecendo constantes as áreas sob as mesmas. Se  $\beta \simeq 1$ ,  $B_3 = E_2$  e, portanto, para um observador em  $P$ , os campos parecem transversais e mutuamente perpendiculares. Ocorre então que este mesmo observador não consegue fazer uma distinção entre o campo criado por uma partícula carregada se movendo com velocidade próxima a da luz, e o campo de um pulso de radiação plana polarizada que se propaga na mesma direção da partícula (Figura 15).

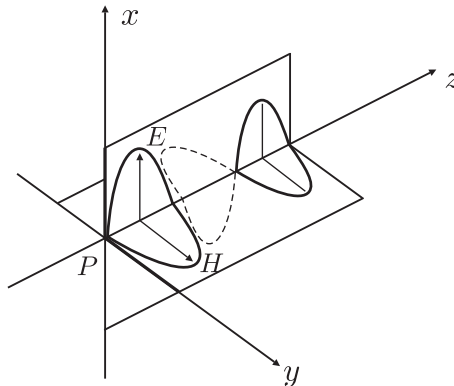


Figura 15

É esta a equivalência à qual nos referimos na introdução e que será explorada no método de W.W. Como a componente longitudinal do campo elétrico,  $E_1$ , possui uma integral temporal nula (Figura 14) e passa de positivo a negativo muito rapidamente, na prática consideramos apenas os campos transversais  $E_2$  e  $B_3$ .

## B. Cálculo de uma integral

A integral que aparece no texto é do tipo

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{(1+x^2)^{3/2}} dx$$

com  $a = \omega b/(\gamma v)$ . Esta integral pode ser escrita de acordo com a fórmula de Euler como

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{(1+x^2)^{3/2}} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} ax}{(1+x^2)^{3/2}} dx$$

onde a segunda integral é nula pois o integrando é uma função ímpar da variável e a integral é entre limites simétricos. Para o primeiro termo (par), podemos escrever

$$J = 2 \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{(1+x^2)^{3/2}} dx$$

Sabemos que<sup>65</sup>

$$K_{\nu}(az) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2z}{a}\right)^{\nu} \Gamma\left(\frac{1}{2} + \nu\right) \int_0^{\infty} (t^2 + z^2)^{-\nu-1/2} \cos at dt$$

onde  $K$  é uma função de Bessel modificada. Para  $\nu = z = 1$ ,

$$K_1(a) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{a}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \int_0^{\infty} (t^2 + 1)^{-3/2} \cos at dt$$

e como  $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$ ,

$$K_1(a) = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} \frac{\cos at}{(t^2 + 1)^{3/2}} dt$$

donde

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos at}{(t^2 + 1)^{3/2}} dt = aK_1(a) = \frac{J}{2}$$

ou, finalmente,

$$J = 2 \left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right) K_1\left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right)$$

## C. O modelo da gota líquida

Este modelo,<sup>66</sup> proposto inicialmente por Bohr, faz um paralelismo entre o núcleo e uma gota de líquido incompressível. Apesar de sua simplicidade, este modelo permitiu que se chegasse a resultados importantes, apesar de, do ponto de vista da pesquisa nuclear, já ter sido abandonado.

São as seguintes as hipóteses básicas deste modelo:

<sup>65</sup>Veja, por exemplo, W. Magnus, F. Oberhettinger & R.P. Soni, *Formulas and Theorems for the Special Functions of mathematical Physics*, New York: Springer-Verlag (1966).

<sup>66</sup>Veja, por exemplo, Daniel Blanc, *Physique Nucléaire*, Masson et Cie., 1973.

- ( 1) A densidade volumétrica da massa da matéria nuclear é a mesma qualquer que seja a massa atômica. Seu valor é aproximadamente  $1.45 \times 10^{14}$  g/cm<sup>3</sup>;
- ( 2) O núcleo é uma esfera de raio  $R$ , que de acordo com o item (1) é da forma:

$$R = r_0 A^{1/3} \quad (50)$$

com  $r_0$  constante;

- ( 3) a densidade volumétrica de cargas dentro do núcleo é constante, *i.e.*, os prótons são distribuídos de maneira uniforme dentro do volume do núcleo;
- ( 4) a força nuclear é idêntica para cada nucleon e, em particular, não depende da sua natureza (se próton ou nêutron);
- ( 5) as forças nucleares tem curto raio de ação (da ordem do fermi).

Aproveitamos para estabelecer a relação entre o alcance das forças nucleares e a massa do méson  $\pi$ . Yukawa, em 1935, sugeriu que a interação nuclear fosse feita por intermédio da troca de mésons. Usando o princípio de incerteza, derivamos uma expressão para essa relação. Antes, porém, consideremos um sistema constituído de um hidrogênio ( $H$ ) e um próton ( $p$ ). As transformações do tipo  $(H, p) \rightleftharpoons (p, H)$  são possíveis e dizemos que transições deste tipo são virtuais, no sentido de que não conseguimos detectar o elétron que é trocado entre  $H$  e  $p$ .

Voltando a Yukawa, ele propôs um mecanismo semelhante a este para explicar as forças nucleares, sendo que neste caso não eram elétrons que efetuavam a transição virtual e sim partículas bem mais pesadas, que hoje conhecemos como píons ou mésons  $\pi$ . Assim, analogamente ao processo  $H^0 \rightarrow p + e$ , deveríamos ter  $p^+ \rightarrow n^0 + \pi^+$ . Considerando-se uma incerteza máxima no momento do  $\pi$  da ordem de  $\Delta p = m_\pi c$ , temos, pelo princípio de incerteza, que  $\Delta x = \hbar/m_\pi c$ , que é o comprimento de onda Compton do pión ( $\sim 1.34 F$ ). Este valor é aproximadamente igual ao valor  $r_0$  que aparece na equação (50). Assim, no sistema de unidades natural ( $\hbar = c = 1$ ) podemos escrever esta equação como

$$R = \frac{1}{m_\pi} A^{1/3}$$

## Referências

- [ 1] Bohr, N.: “On the theory of the decrease of velocity of moving electrified particles on passing through matter”, *Philosophical Magazine* **25**, 10 (1913).
- [ 2] Bohr, N.: “On the theory of the decrease of velocity of swiftly moving electrified particles in passing through matter”, *Philosophical Magazine* **30**, 581 (1915).
- [ 3] Fermi, E.: “On the Theory of Collisions Between Atoms and Elastically Charged Particles”, *Zeitschrift für Physik* **29**, 315 (1924).
- [ 4] Gaunt, J.A.: “The Stopping Power of Hydrogen Atoms for  $\alpha$ -particles according the New Quantum Theory”, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **23**, 732 (1927).
- [ 5] Williams, E.J.: “The straggling of  $\beta$ -particles”, *Proceedings of the Royal Society A* **125**, 420 (1929).
- [ 6] Williams, E.J. & Terroux, F.R.: “Investigation of the Passage of “fast”  $\beta$ -particles through Gases”, *Proceedings of the Royal Society A* **126**, 289 (1930).
- [ 7] Williams, E.J.: “The loss of energy by  $\beta$ -particles and its distribution between different kinds of collisions”, *Proceedings of the Royal Society A* **130**, 328 (1931).
- [ 8] Williams, E.J.: “The passage of  $\alpha$ - and  $\beta$ -particles through Matter and Born’s theory of Collisions”, *Proceedings of the Royal Society A* **135**, 108 (1932).
- [ 9] Bethe, H.: “Zur Theorie des Durchgangs schneller Korpuskularstrahlen durch. Materie”, *Annalen der Physik* **5**, 325 (1930).
- [10] Dirac, P.A.M.: “On the Theory of Quantum Mechanics”, *Proceedings of the Royal Society A* **112** (1926) 661-677. Veja também *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford, quarta edição (1958).
- [11] Williams, E.J.: “Applications of Ordinary Space-Time Concepts in Collision Problems and Relation of Classical Theory to Born’s Approximation”, *Review of Modern Physics* **17**, 217 (1945).
- [12] Bohr, N.: “Penetration of Atomic Particles through Matter”, *Kgl. Danske Videnskab. Selskab. Mat.-fys. Medd.* **XVIII**, n. 8 (1948).
- [13] Williams, E.J.: “Applications of the Method of Impact Parameter in Collisions”, *Proceedings of the Royal Society A* **139**, 163 (1933).
- [14] Williams, E.J.: “Nature of the High Energy Particles of Penetrating Radiation and Status of Ionization and Radiation Formulae”, *Physical Review* **45**, 729 (1934).
- [15] Weizsäcker, C.F. v.: “Radiation emitted in collisions with very fast electrons”, *Z. Phys.* **88**, 612 (1934).
- [16] Williams, E.J.: “Correlation of Certain Collision Problems with Radiation Theory”, *Mat.-Fys. Meddel.* **13**, 4 (1935).
- [17] Panofsky, W.K.H. & Phillips, M.: *Classical Electricity and Magnetism*, second edition, Addison-Wesley (1962), Section 19.5.
- [18] Jackson, J.D.: *Classical Electrodynamics*, second edition, John-Wiley (1975), Section 15.4.

- [19] Mott, N.F.: “On the Theory of Excitation by Collision with Heavy Particles”, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **27**, 553 (1931).
- [20] Frame, J.W.: “On the Mathematical Equivalence of two ways of regarding the Excitation of an Atom by a Fast Moving  $\alpha$ -Particle”, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **27**, 511 (1931).
- [21] Bjorken, J.D. & Drell, S.D.: *Relativistic Quantum Mechanics*, McGraw-Hill (1964), Cap. 5.
- [22] Bethe, H. & Peierls, R.: “Quantum Theory of Dipion”, *Proc. Roy. Soc.* **148**, 146 (1935).
- [23] Blair, J.S.: “Electro-Disintegration of Nuclei”, *Physical Review* **75**, 907 (1949).
- [24] Brown, K.L. & Wilson, R.: “Electrodisintegration of  $\text{Cu}^{63}$ ,  $\text{Zn}^{64}$ ,  $\text{Ag}^{109}$ ,  $\text{Ta}^{181}$ ”, *Physical Review* **93**, 443 (1954).
- [25] International Congress on Theoretical Physics at Karkov, *Nature* **134**, 109 (1934).
- [26] Heitler, W. & Sauter, F.: “Stopping of Fast Particles with Emission of radiation and the Birth of Positive Electrons”, *Nature* **132**, 892 (1933).
- [27] Ferretti, B.: “Sulla ‘Bremsstrahlung nei cristalli’”, *Nuovo Cimento* **7**, 118 (1950).
- [28] Feinberg, E.L. & Pomerančuk, I.: “High Energy Inelastic Diffraction Phenomena”, *Suppl. Nuovo Cimento* **3**, 652 (1956).
- [29] Williams, E.J.: “Production of Electron-Positron Pairs”, *Nature* **135**, 66 (1935).
- [30] Breit, G. & Wheeler, J.A.: “Collision of Two Light Quanta”, *Physical Review* **45**, 766 (1934).
- [31] Bethe, H. & Heitler, W.: “On the Stopping of Fast Particles and on the Creation of Positive Electrons”, *Proc. Roy. Soc.* **146**, 83 (1934).
- [32] Landau, L. & Lifshitz, E.: “On the Production of Electrons and Positrons by a Collision of two Particles”, *Phys. Zs. Sov. Union* **6**, 244 (1934).
- [33] Bhabha, H.J.: “The Creation of Electron Pairs by Fast Charged Particles”, *Proc. Roy. Soc.* **152**, 559 (1935); “On the Calculation of Pair Creation by Fast Charged Particles and the Effect of Screening”, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **31**, 394 (1935).
- [34] Nishina, Y.; Tomonaga, S. & Kobayasi, M.: “On the Creation of Positive and Negative Electrons by Heavy Charged Particles”, *Scient. Papers Jap. Inst. Phys. Chem. Res.* **27**, 137 (1935).
- [35] Racah, G.: “Sulla nascita di coppie per urti di particelle elettrizzate”, *Nuovo Cimento* **13**, 66 (1936).
- [36] George, E.P. & Evans, J.: “Observations of Cosmic-Ray Events in Nuclear Emulsions Exposed below Ground”, *Proc. Phys. Soc.* **A63**, 1248 (1950).
- [37] Fowler, G.N.: “On Star Production by  $\mu$ -Mesons underground”, *Proc. Phys. Soc.* **A68**, 482 (1955); “On the anomalous scattering of  $\mu$ -mesons”, *Nuclear Physics* **1**, 119 (1956).
- [38] Kessler, D. & Kessler, P.: “On the validity of the Williams-Weizsäcker Method and the problem of the nuclear interaction of relativistic  $\mu$ -mesons”, *Nuovo Cimento* **4**, 601 (1956).

- [39] Kessler, P.: “The equivalent photon approximation in one- and two- photon exchange process”, *Talk given at Int. Coll. on Photon-Photon Coll. in Electron-Positron Ftor. Rings*, Collège de France, (1973).
- [40] Annis, M.; Wilkins, C. & Miller, J.D.: “Nuclear Interaction of Fast  $\mu$ -Mesons”, *Physical Review* **94**, 1038 (1951).
- [41] de Pagter, J. & Sard, R.D.: “Interaction of Fast  $\mu$ -meson in head with small-energy transfer”, *Physical Review* **118**, 1353 (1951).
- [42] Curtis, R.B.: “Meson Production by Electrons”, *Physical Review* **104**, 211 (1956).
- [43] Dalitz, R.H. & Yennie, D.R.: “Pion Production in  $e^-p$  Collisions”, *Physical Review* **105**, 1598 (1957).
- [44] Good, M.L. & Walker, W.D.: “Coulomb Dissociation of Beam Particles”, *Physical Review* **120**, 1855 (1960).
- [45] Ebel, M.E. & Walker, W.D.: “Photodissociation of  $\mu$ -Meson”, *Physical Review* **122**, 1639 (1961).
- [46] Nordheim, G. *et al.*: “The desintegration of High Energy Protons”, *Physical Review* **51**, 1037 (1937).
- [47] Kessler, P.: “Sur une méthode simplifiée de calcul pour le processus relativistes en électrodynamique quantique”, *Nuovo Cimento* **17**, 809 (1960).
- [48] Gorgé, V. *et al.*: “One-Photon Exchange Processes and Radiative Corrections”, *Nuovo Cimento* **27**, 928 (1963).
- [49] Gorgé, V.: “The Photon-Pole Approximation in Pair Production Processes”, *Nuovo Cimento* **35**, 545 (1965).
- [50] Baier, V.N. *et al.*: “Quasi-Real Electron Method in High Energy Quantum Electrodynamics”, *Nuclear Physics* **B65**, 381 (1973).
- [51] Kessler, P.: “Une Nouvelle Méthode de Calcul des Diagrammes de Feynman”, *Cahiers de Physique* **20**, 55 (1966); “A Generalized Helicity Method for Feynman Diagram Calculations”, *Nuclear Physics* **B15**, 253 (1970).
- [52] Terazawa, H.: “Two-Photon Processes for Particle Production at High Energies”, *Review of Modern Physics* **45**, 615 (1973).
- [53] Courau, A.: “Production of Lepton pairs in  $\gamma\gamma$  collisions”, LAL 81/14 (maio 1981), Invited talk at the 4th Int. Colloq. Photn-Photon Interactions, Paris, France, Apr. 6-9 (1981); “Experimental hadronic results on  $\gamma\gamma$  processes”, LAL 82/01 (janeiro 1982), presented at  $\gamma\gamma$  Seminar, Orsay, France, Oct. 7-8 (1981).
- [54] Chen, M.-S. & Zerwas, P.: “Equivalent-particle approximations in electron and photon processes of higher-order QED”, *Physical Review* **D12**, 187 (1975).
- [55] Barcelos Neto, J. & Chanda, R.: “Effect of heavy-quark masses in photon-photon interactions”, *Physical Review* **D24**, 647 (1981).
- [56] Bjorken, J.D., Kout, J.B. & Soper, D.E.: “Quantum Electrodynamics at Infinite Momentum: Scattering from an external Field”, *Physical Review* **D3**, 1382 (1971).



- [57] Brodsky, S.J., Roskies, R. & Suaya, R.: “Quantum Electrodynamics and renormalization Theory in the Infinite Momentum Frame”, *Physical Review* **D8**, 4574 (1973).
- [58] Carimalo, C., Kessler, P. & Parisi, J.: “Validity of the equivalent-photon approximation for virtual photon-photon collisions”, *Physical Review* **D20**, 1057 (1979); “Interpretation of single-tagged events in  $\gamma\gamma$  experiments”, *Physical Review* **D21**, 669 (1980).
- [59] Altarelli, G. & Parisi, G.: “Asymptotic freedom in parton language”, *Nuclear Physics* **B126**, 298 (1977).