

Técnica da Análise de Decaimentos Usando o Formalismo da Helicidade

- Introdução ao formalismo da helicidade
- Estado de helicidade para uma partícula
- Estado de helicidade para duas partículas
- Estado de helicidade para três partículas
- Cálculo da amplitude do decaimento em três corpos
- Transformação dos ângulos medidos no decaimento para os ângulos usados nas amplitudes
- Ajuste com os dados experimentais.

1 Introdução ao formalismo da helicidade

A função de onda que descreve uma partícula é tradicionalmente descrita numa base de autoestados de

$$\vec{J}^2, J_z, \vec{L}^2 \text{ e } \vec{S}^2$$

onde

- $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ é o operador momento angular total da partícula com autovalor j
- J_z é o operador da projeção deste momento angular em algum eixo arbitrário z com autovalor m_j
- \vec{L} é o operador momento angular orbital com autovalor l , sendo L_z o operador da projeção deste momento angular orbital no eixo z com autovalor m_l e
- \vec{S} é o operador de spin intrínscico da partícula com autovalor s .

Nesta base usamos a nomenclatura

$$|J, J_z, L, S \rangle$$

para descrever o autoestado da partícula.

Entretanto, uma nova base conhecida por base da helicidade tem certas vantagens. Nesta base escolhemos autoestados de

$$\vec{J}^2, J_Z, |\vec{p}\rangle \text{ e } \frac{\vec{p} \cdot \vec{S}}{|\vec{p}|}$$

onde $|\vec{p}\rangle$ é o módulo do vetor momento linear da partícula.

A grandeza $\frac{\vec{p} \cdot \vec{S}}{|\vec{p}|}$ é denominada a helicidade da partícula e designada por λ . A helicidade nada mais é que a componente do spin na direção do momento linear da partícula. Uma partícula com massa diferente de zero e spin s tem $2s + 1$ estados de helicidades com λ indo de $+s$ até $-s$. Uma partícula de massa zero tem somente dois estados de helicidade $\lambda = \pm s$

Usar autoestados da helicidade tem vantagens porque os estados de helicidade

- são invariantes em relação a rotações espaciais,
- são invariantes em relação a “boost” na direção do momento da partícula, nos permitindo trabalhar no sistema centro de massa da partícula, e
- é conveniente para descrever partículas com ou sem massa.

Para descrever o autoestado da partícula usamos a nomenclatura

$$|j, m, p, \lambda\rangle$$

e para descreve-la no sistema centro de massa dela, onde $p = 0$ e $j=s$, usamos simplesmente:

$$|j, m\rangle$$

e o estado de helicidade é congruente a este estado com $m = \lambda$, isto é,

$$|s, \lambda\rangle.$$

Mas em muitos casos, uma partícula não está num estado simples de spin descrito por $|j, m\rangle$ e sim num estado de spin que pode ser descrito por combinações de estados $|j, m\rangle$. Nesta descrição, é conveniente usarmos matrizes de rotações e portanto agora vamos estudar um pouco de rotações.

Fixaremos na partícula um sistema de eixos definido através de 3 vetores $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ ortogonais entre si e usaremos os 3 ângulos de Euler α, β, γ para descrever a rotação. Antes da rotação, o sistema de eixos fixo na partícula deve coincidir com o sistema de eixos fixos $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$ de coordenadas. Assim, manteremos o sistema de coordenadas $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$ fixo no espaço e os ângulos de Euler α, β, γ definirão a rotação do sistema de eixos fixo na

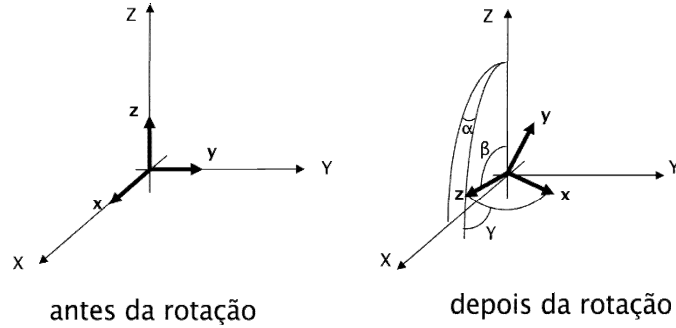


Figure 1: Rotação

partícula em relação aos eixos fixos de coordenadas.

A rotação pode ser considerada como resultado das seguintes 3 rotações sucessivas:

$$R = R_Z(\alpha)R_Y(\beta)R_Z(\gamma)$$

1. $R_Z(\alpha)$ rotação de ângulo α em torno do eixo Z
2. $R_Y(\beta)$ rotação de ângulo β em torno do eixo Y
3. $R_Z(\gamma)$ rotação de ângulo γ em torno do eixo Z.

Os domínios de α, β, γ são $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $0 \leq \beta \leq \pi$ e $0 \leq \gamma \leq 2\pi$.

As rotações podem ser representadas por matrizes chamadas matrizes de rotação. Por exemplo, para uma rotação de um ângulo ϕ em torno do eixo X associamos a matriz $R_X(\phi)$

$$R_X(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\text{sen}\phi \\ 0 & \text{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

Se a rotação é infinitesimal, poderemos escrever para o caso da rotação em torno do eixo X ,

$$R_X(d\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -d\phi \\ 0 & d\phi & 1 \end{pmatrix} = 1 - iJ_X d\phi$$

onde 1 é a matriz identidade e J_X é o gerador J_X .

$$J_X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

Uma rotação finita de um ângulo ϕ pode ser obtida compondo rotações infinitesimais.

$$R_X(\phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_n(1 - iJ_X(\frac{\phi}{n})) = e^{-iJ_X\phi}$$

Analogamente, para uma rotação finita representada pelos ângulos de Euler α, β, γ , teremos

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i\alpha J_z} e^{-i\beta J_y} e^{-i\gamma J_z}$$

Com a observação importante que a rotação de um sistema físico não muda a grandeza do momento angular total (os operadores R de rotação comutam com o operador momento angular J^2), temos como consequência, que a rotação não pode mudar o autovalor j de um estado $|j, m \rangle$.

Então diante de uma rotação $R(\alpha, \beta, \gamma)$

$$|j, m \rangle \rightarrow R(\alpha, \beta, \gamma)|j, m \rangle = \sum_{m'=-j}^{+j} D_{m',m}^j(\alpha, \beta, \gamma)|j, m' \rangle$$

Assim o estado $|j, m \rangle$ é agora descrito por uma combinação de estados $|j, m' \rangle$ e os coeficientes nesta combinação linear são funções de α, β, γ .

Eles formam os elementos da Matriz de Rotação ou matriz-D. Assim a matriz-D descreve, por uma rotação, como o estado $|j, m \rangle$ está distribuido nos j multipletos. A amplitude $D_{m',m}^j(\alpha, \beta, \gamma)$ que é uma função trigonométrica, descreve quanto da amplitude do sistema físico está no estado $|j, m' \rangle$.

A quantidade $D_{m',m}^j(\alpha, \beta, \gamma)$ é conhecida como elemento da matriz-D ou função D. Esta função D tem uma dependência muito simples em α e γ mas uma dependência muito complicada em β .

Se fizermos o produto escalar com $\langle jm' |$ em ambos os lados da equação anterior teremos:

$$D_{m',m}^j(\alpha, \beta, \gamma) = \langle jm' | e^{-i\alpha m'} \langle jm' | e^{-i\beta J_y} | jm \rangle e^{-i\gamma m}$$

Definimos matriz reduzida d de rotação

$$d_{m',m}^j(\beta) = \langle jm' | e^{-i\beta J_y} | jm \rangle$$

tal que

$$D_{m',m}^j(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i\alpha m'} d_{m',m}^j(\beta) e^{-i\gamma m} = e^{-i\alpha m' - i\gamma m} d_{m',m}^j(\beta)$$

Existem expressões que permitem calcular a matriz $d_{m',m}^j(\beta)$ para qualquer j, m e m' mas é muito trabalhoso e o melhor mesmo é se usar as tabelas dos elementos da matriz-D.

Existem várias propriedades das matrizes-d que são boas termos sempre em mente:

$$d_{m',m}^j(-\beta) = d_{mm'}^j(\beta) \quad d_{mm'}^j(\beta) = (-1)^{m'-m} d_{m',m}^j(\beta)$$

2 Estado de helicidade para uma partícula

No formalismo da helicidade, o spin da partícula é quantizado ao longo da direção do trimomento \vec{p} da partícula e como já foi dito, a componente do spin ao longo deste eixo é a helicidade λ da partícula.

Para se construir um estado de helicidade para uma partícula de massa diferente de zero e spin s , vamos ao sistema centro de massa da partícula. Tomamos o eixo $+z$ como o eixo de quantização e fazemos um 'boost' $L(p_z)$ (translação de Lorentz neste eixo $+z$) para a partícula adquirir um momento p_z neste eixo que continua sendo o eixo de quantização do spin. Em seguida, para a partícula adquirir um trimomento em qualquer outra direção definida pelos ângulos θ, ϕ , fazemos uma rotação nestes ângulos tal que no final, a direção de \vec{p} é arbitrária mas com $|\vec{p}| = p_z$. O momento \vec{p} tem coordenadas esféricas θ, ϕ e módulo p

O estado de helicidade é denotado por

$$|\vec{p}, \lambda \rangle$$

E o estado $|\vec{p}\lambda \rangle$ é chamado de estado de helicidade de uma partícula de momento \vec{p} e helicidade λ

Este estado $|\vec{p}\lambda \rangle$ é um auto estado do operador momento tridimensional P tal que $P|\vec{p}\lambda \rangle = p|\vec{p}\lambda \rangle$

Para o operador de rotação $R(\alpha, \beta, \gamma)$ usaremos segundo Jacob e Wick [5] a rotação $R(\phi, \theta, -\phi)$. Esta substituição tem vantagens, pois os ângulos α e γ estão relacionados com questões de fases e quando $\theta = 0$ a fase introduzida pela rotação torna-se zero para qualquer ϕ .

$$|\vec{p}\lambda \rangle = R(\phi, \theta, -\phi)|p_z\lambda \rangle = R(\phi, \theta, -\phi)L(p_z)|0\lambda \rangle,$$

onde $L(p_z)$ é o boost na direção z acima referido.

Qual a relação entre o estado $|\vec{p}\lambda \rangle = |\theta, \phi, p, \lambda \rangle$ e os autoestados $|\vec{J}^2, J_Z, |\vec{p}|, \frac{\vec{p} \cdot \vec{S}}{|\vec{p}|} \rangle = |j, m, p, \lambda \rangle$?

Convém lembrar que $|\theta, \phi, p, \lambda \rangle$ não são autoestados de \vec{J}^2 e J_Z , mas podem ser escritos como uma combinação linear de $|j, m, p, \lambda \rangle$ que são autoestados de \vec{J}^2 e J_Z . A demonstração desta dependência é muito tediosa e complicada. Melhor consultar J. Werle, [6] e A. D. Martin e T. D. Spearman [7].

$$|\theta, \phi, p, \lambda \rangle = \sum_{j,m} \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} D_{m\lambda}^j(\phi, \theta, -\phi) |j, m, p, \lambda \rangle$$

onde D é a matriz de rotação. Vamos usar esta base para descrevermos estados físicos das partículas porque ela proporciona grandes vantagens.

3 Estado de helicidade para duas partículas

Sejam duas partículas B e C , emitidas de um decaimento de uma partícula A , ou seja:

$$A \rightarrow B + C$$

Enquanto A pode ser descrito por $|A \rangle = |\vec{p}_A, \lambda_A \rangle$, como poderíamos descrever o estado das duas partículas B e C ?

No sistema centro de massa das 2 partículas B e C , ou seja, no sistema centro de massa da partícula A , o momento total \vec{P}_{total} das partículas B e C é zero e os momentos de cada uma delas serão \vec{p} e $-\vec{p}$ onde \vec{p} tem módulo p e coordenadas esféricas θ e ϕ .

Assim, no sistema centro de massa das 2 partículas o estado de B e C pode ser descrito por

$$|\vec{p}, \lambda_B \rangle | -\vec{p}, \lambda_C \rangle = |\vec{P}_{total} = 0, \vec{p}, \lambda_B, \lambda_C \rangle = |\theta, \phi, p, \lambda_B, \lambda_C \rangle .$$

Mas p é uma constante da reação $A \rightarrow B + C$, que depende somente das massas das partículas envolvidas M_A, M_B, M_C .

$$p^2 = \frac{[M_A^2 - (M_B + M_C)^2][M_A^2 - (M_B - M_C)^2]}{4M_A^2},$$

Portanto, o estado de helicidade das duas partículas depende somente de θ, ϕ, λ_B and λ_C e podemos escrever para o estado das duas partículas

$$|\theta_B, \phi_B, \lambda_B, \lambda_C \rangle .$$

Qual a relação entre o estado $|\theta_B, \phi_B, \lambda_B, \lambda_C \rangle$ e os autoestados $|J, m, \lambda_B, \lambda_C \rangle$ onde J é o momento angular total do sistema e m é sua projeção?

A demonstração é trabalhosa (vide A. D. Martn e T. D. Spearman, [7])

$$|\theta_B, \phi_B, \lambda_B, \lambda_C \rangle = \sum_{J,m} \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} D_{m, \lambda_B - \lambda_C}^J(\phi_B, \theta_B, -\phi_B) |J, m, \lambda_B, \lambda_C \rangle$$

onde D (matriz de rotação) descreve como o estado $|\theta_B, \phi_B, \lambda_B, \lambda_C \rangle$ está distribuído no multiplete J depois da rotação.

A taxa de decaimento $A \rightarrow B + C$ será proporcional a

$$|T_{if}|^2 \propto | \langle BC|T|A \rangle |^2 .$$

E portanto,

$$T_{if} \propto \sum_{J,m} \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} D_{m, \lambda_1}^{*J}(\phi_B, \theta_B, -\phi_B) \langle J, m, \lambda_B, \lambda_C |T|j_A m_A \rangle ,$$

onde $\lambda_1 = \lambda_B - \lambda_C$.

Como o momento angular deve ser conservado, $J = j_A$ e $m = m_A$.

$$T_{if} \propto \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} D_{m_A, \lambda_1}^{*j_A}(\phi_B, \theta_B, -\phi_B) \langle j_A, m_A, \lambda_B, \lambda_C | T | j_A, m_A \rangle,$$

onde $|\lambda_1| \leq |m_A|$ e a matriz de rotação D^* é dada por:

$$D_{m_A, \lambda_1}^{*j_A}(\phi_B, \theta_B, -\phi_B) = e^{im_A\phi_B} d_{m_A, \lambda_1}^{j_A}(\theta_B) e^{-i\lambda_1\phi_B}.$$

Depois da substituição, obtemos para T_{if} :

$$T_{if} \propto \sqrt{\frac{2j_A+1}{4\pi}} e^{i(m_A-\lambda_1)\phi_B} d_{m_A, \lambda_1}^{j_A}(\theta_B) \langle \lambda_B, \lambda_C | T | m_A \rangle.$$

A taxa diferencial de decaimento para todas as combinações das projeções de spin da partícula A para as diferentes helicidades das partículas B and C será dada por:

$$d\Gamma \propto |T_{if}|^2 \propto \sum_{m_A} \sum_{\lambda_B, \lambda_C} |\alpha_{\lambda_B, \lambda_C} e^{i(m_A-\lambda_1)\phi_B} d_{m_A, \lambda_1}^{j_A}(\theta_B)|^2.$$

onde

$$\alpha_{\lambda_B, \lambda_C} \propto \langle \lambda_B, \lambda_C | T | m_A \rangle.$$

3.1 Exemplo 1

Vamos considerar o decaimento $\Lambda_c^+ \rightarrow \bar{K}^{*0} + p$, onde a tabela seguinte dá os spins e paridades das partículas envolvidadas.

particle	Λ_c^+	\bar{K}^{*0}	p
j^p	$\frac{1}{2}^+$	1^-	$\frac{1}{2}^+$
	A	B	C

As amplitudes para as 8 diferentes combinações das helicidades são

Λ_c^+ m_A	p λ_C	\bar{K}^{*0} λ_B	λ_1	Amplitude
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\alpha_{\frac{1}{2}1} e^{i(\frac{1}{2}-\frac{1}{2})\phi_{\bar{K}^{*0}}} d_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\theta_{\bar{K}^{*0}}) = \alpha_{\frac{1}{2}1} d_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\theta_{\bar{K}^{*0}})$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\alpha_{\frac{1}{2}0} e^{i(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})\phi_{\bar{K}^{*0}}} d_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\theta_{\bar{K}^{*0}}) = \alpha_{\frac{1}{2}0} e^{i\phi_{\bar{K}^{*0}}} d_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\theta_{\bar{K}^{*0}})$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$	proibido
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	proibido
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\alpha_{-\frac{1}{2}0} e^{i(\frac{1}{2}-\frac{1}{2})\phi_{\bar{K}^{*0}}} d_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\theta_{\bar{K}^{*0}}) = \alpha_{-\frac{1}{2}0} d_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\theta_{\bar{K}^{*0}})$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$\alpha_{-\frac{1}{2}-1} e^{i(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})\phi_{\bar{K}^{*0}}} d_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\theta_{\bar{K}^{*0}}) = \alpha_{-\frac{1}{2}-1} e^{i\phi_{\bar{K}^{*0}}} d_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\theta_{\bar{K}^{*0}})$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\alpha_{\frac{1}{2}1} e^{i(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2})\phi_{\bar{K}^{*0}}} d_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\theta_{\bar{K}^{*0}}) = \alpha_{\frac{1}{2}1} e^{-i\phi_{\bar{K}^{*0}}} d_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\theta_{\bar{K}^{*0}})$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\alpha_{\frac{1}{2}0} e^{i(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2})\phi_{\bar{K}^{*0}}} d_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\theta_{\bar{K}^{*0}}) = \alpha_{\frac{1}{2}0} d_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\theta_{\bar{K}^{*0}})$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$	proibido
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	proibido
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\alpha_{-\frac{1}{2}0} e^{i(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2})\phi_{\bar{K}^{*0}}} d_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\theta_{\bar{K}^{*0}}) = \alpha_{-\frac{1}{2}0} d_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\theta_{\bar{K}^{*0}})$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$\alpha_{-\frac{1}{2}-1} e^{i(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2})\phi_{\bar{K}^{*0}}} d_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\theta_{\bar{K}^{*0}}) = \alpha_{-\frac{1}{2}-1} d_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\theta_{\bar{K}^{*0}})$

Os estados de spin λ_1 iguais a $\pm\frac{3}{2}$ são proibidos de acontecer num decaimento de uma partícula A de spin $\frac{1}{2}$.

3.2 Exemplo 2

Vamos considerar o decaimento $\Lambda_c^+ \rightarrow \Lambda^0(1407) + \pi^+$, onde a tabela seguinte dá os spins e paridades das partículas envolvidas.

particle	Λ_c^+	$\Lambda^0(1407)$	π^+
j^p	$\frac{1}{2}^+$	$\frac{1}{2}^-$	0^-
	A	B	C

Λ_c^+ m_A	π λ_C	$\Lambda^0(1407)$ λ_B	λ_1	Amplitude
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\alpha_{\frac{1}{2}0} d_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\theta_\Lambda)$
$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\alpha_{-\frac{1}{2}0} e^{i(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})\phi_\Lambda} d_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\theta_\Lambda)$
$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\alpha_{\frac{1}{2}0} e^{i(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2})\phi_\Lambda} d_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\theta_\Lambda)$
$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\alpha_{-\frac{1}{2}0} d_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\theta_\Lambda)$

4 Estado de helicidade para três partícula

Vamos estudar o decaimento de uma partícula em três outras, sendo que duas delas são resultantes de uma ressonância

$$A \rightarrow B(\rightarrow DE) + C.$$

Neste caso, a taxa de decaimento será proporcional a:

$$|T_{if}|^2 \propto | \langle DE|T_2|B \rangle \langle BC|T_1|A \rangle |^2.$$

O termo $\langle BC|T_1|A \rangle$ é calculado no sistema centro de massa da partícula A , como foi feito na seção anterior e o termo $\langle DE|T_2|B \rangle$ é calculado no sistema centro de massa da partícula B com o eixo z na direção de movimento da partícula B relativo ao sistema centro de massa da partícula A (usaremos um apótrofo para indicar ângulos medidos neste sistema, isto é, sistema centro de massa da partícula B com o eixo z na direção de movimento da partícula B relativo ao sistema centro de massa da partícula A)

$$\langle DE|T_2|B \rangle \propto \sqrt{\frac{2j_B + 1}{4\pi}} e^{i(\lambda_B - \lambda_2)\phi'_D} d_{\lambda_B \lambda_2}^{j_B}(\theta'_D) \langle \lambda_D \lambda_E | T_2 | B \rangle,$$

onde $\lambda_B = m_{j_B}$ and $\lambda_2 = \lambda_D - \lambda_E$.

Combinando as expressões para T_2 e T_1 e depois de simplificações obtemos para o decaimento em três corpos:

$$d\Gamma \sim \sum_{m_A} \sum_{\lambda_C \lambda_D \lambda_E} \left| \sum_{\lambda_B} \alpha_{\lambda_B \lambda_C} \alpha_{\lambda_D \lambda_E} e^{i(m_A - \lambda_1)\phi_B} e^{i(\lambda_B - \lambda_2)\phi'_D} d_{m_A \lambda_1}^{j_A}(\theta_B) d_{\lambda_B \lambda_2}^{j_B}(\theta'_D) \right|^2.$$

Esta equação pode ser escrita em uma maneira simplificada por:

$$d\Gamma \sim \sum_{m_A} \sum_{\lambda_C \lambda_D \lambda_E} \left| \sum_{\lambda_B} \zeta_{B, m_A, \lambda_B, \lambda_C, \lambda_D, \lambda_E} \right|^2,$$

onde

$$\zeta_{B,m_A,\lambda_B,\lambda_C,\lambda_D,\lambda_E} = \alpha_{\lambda_B\lambda_C}\alpha_{\lambda_D\lambda_E} e^{i(m_A-\lambda_1)\phi_B} e^{i(\lambda_B-\lambda_2)\phi'_D} d_{m_A\lambda_1}^{j_A}(\theta_B) d_{\lambda_B\lambda_2}^{j_B}(\theta'_D).$$

Para levar em conta a massa da ressonância, uma amplitude descrita por uma função Breit-Wigner relativística BW deve multiplicar cada termo das amplitudes de spin e portanto a equação anterior deve ser escrita por:

$$d\Gamma \sim \sum_{m_A} \sum_{\lambda_C\lambda_D\lambda_E} \left| \sum_{\lambda_B} BW_B(m_B) \zeta_{B,m_A,\lambda_B,\lambda_C,\lambda_D,\lambda_E} \right|^2$$

onde BW_B no decaimento $A \rightarrow B(\rightarrow DE)C$ é dado por

$$BW_B \sim \frac{m_B \Gamma_B}{s_{DE} - m_B^2 + i\sqrt{s_{DE}}\Gamma_B}$$

onde m_B and Γ_B são a massa e largura da ressonância B e s_{DE} é a massa ao quadrado do sistema das 2 partículas D and E .

4.1 Exemplo 1

Usaremos a continuação do exemplo 1 da seção anterior fazendo \bar{K}^{*0} decair em $\bar{K}^{*0} \rightarrow K^-\pi^+$.

Λ_c^+	\bar{K}^{*0}	K^-	π^+	p
$\frac{1}{2}^+$	1^-	0^-	0^-	$\frac{1}{2}^+$
A	B	D	E	C

Como as partículas K^- e π^+ têm spins zero, não haverá necessidade de se fazer o somatório para os diferentes valores de λ_D e λ_E

Assumimos $\alpha_{\lambda_D\lambda_E} = \alpha_{00}$ e este termo pode ser absorvido em $\alpha_{\lambda_B\lambda_C}$ de modo que teremos somente as seguintes 4 quantidades complexas C_1, C_2, C_3 e C_4 para descrever as amplitudes e portanto teremos 8 parâmetros (2 para cada quantidade complexa) para serem determinadas.

$$C_1 = \alpha_{\frac{1}{2}1} \quad C_2 = \alpha_{\frac{1}{2}0} \quad C_3 = \alpha_{-\frac{1}{2}0} \quad C_4 = \alpha_{-\frac{1}{2}-1}$$

Substituindo os valores da matriz reduzida $d_{m'm}^j$ para diferentes valores de j, m', m , obtemos:

$\Lambda_c^+ \rightarrow (\bar{K}^{*0} \rightarrow K^- \pi^+) p$ $1/2^+ \rightarrow (1^- \rightarrow 0^- 0^-) 1/2^+$		
$m_{\Lambda_c^+}$	λ_p	Amplitude
1/2	1/2	$-C_1 \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\theta_{\bar{K}^{*0}}}{2} \sin \theta'_K e^{i\phi'_K} - C_2 \sin \frac{\theta_{\bar{K}^{*0}}}{2} \cos \theta'_K e^{i\phi_{\bar{K}^{*0}}}$
1/2	-1/2	$C_3 \cos \frac{\theta_{\bar{K}^{*0}}}{2} \cos \theta'_K - C_4 \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\theta_{\bar{K}^{*0}}}{2} \sin \theta'_K e^{i(\phi_{\bar{K}^{*0}} - \phi'_K)}$
-1/2	1/2	$-C_1 \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\theta_{\bar{K}^{*0}}}{2} \sin \theta'_K e^{-i(\phi_{\bar{K}^{*0}} - \phi'_K)} + C_2 \cos \frac{\theta_{\bar{K}^{*0}}}{2} \cos \theta'_K$
-1/2	-1/2	$C_3 \sin \frac{\theta_{\bar{K}^{*0}}}{2} \cos \theta'_K e^{-i\phi_{\bar{K}^{*0}}} + C_4 \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\theta_{\bar{K}^{*0}}}{2} \sin \theta'_K e^{-i\phi'_K}$

Lembramos que os ângulos $\theta_{\bar{K}^{*0}}$ e $\phi_{\bar{K}^{*0}}$ são os ângulos da partícula \bar{K}^{*0} no sistema centro de massa de Λ_c^+ e os ângulos θ'_K e ϕ'_K são os ângulos da partícula K no sistema centro de massa de \bar{K}^{*0} com o eixo z na direção de movimento da partícula \bar{K}^{*0} relativo ao sistema centro de massa da partícula Λ_c^+ .

A amplitude para este decaimento $\Lambda_c^+ \rightarrow \bar{K}^{*0} (K^- \pi^+) + p$ será:

$$\begin{aligned}
d\Gamma \sim & (BW_{\bar{K}^{*0}})^2 (\\
& | -C_1 \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\theta_{\bar{K}^{*0}}}{2} \sin \theta'_K e^{i\phi'_K} - C_2 \sin \frac{\theta_{\bar{K}^{*0}}}{2} \cos \theta'_K e^{i\phi_{\bar{K}^{*0}}} |^2 + \\
& | C_3 \cos \frac{\theta_{\bar{K}^{*0}}}{2} \cos \theta'_K - C_4 \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\theta_{\bar{K}^{*0}}}{2} \sin \theta'_K e^{i(\phi_{\bar{K}^{*0}} - \phi'_K)} |^2 + \\
& | -C_1 \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\theta_{\bar{K}^{*0}}}{2} \sin \theta'_K e^{-i(\phi_{\bar{K}^{*0}} - \phi'_K)} + C_2 \cos \frac{\theta_{\bar{K}^{*0}}}{2} \cos \theta'_K |^2 + \\
& | + C_3 \sin \frac{\theta_{\bar{K}^{*0}}}{2} \cos \theta'_K e^{-i\phi_{\bar{K}^{*0}}} + C_4 \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\theta_{\bar{K}^{*0}}}{2} \sin \theta'_K e^{-i\phi'_K} |^2)
\end{aligned}$$

4.2 Exemplo 2

Usaremos a continuação do exemplo 2 da seção anterior fazendo $\Lambda^0(1407)$ decair em $\Lambda^0(1407) \rightarrow \Sigma^+ \pi^-$.

Λ_c^+	$\Lambda^0(1407)$	Σ^+	π^-	π^+
$\frac{1}{2}^+$	$\frac{1}{2}^-$	$\frac{1}{2}^+$	0^-	0^-
A	B	D	E	C

Λ_c^+ m_A	Λ^0 $\lambda_B = \lambda_1$	Σ $\lambda_D = \lambda_2$	
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\alpha_{\frac{1}{2}}\alpha'_{\frac{1}{2}}d_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\theta_B)d_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\theta'_D)$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\alpha_{\frac{1}{2}}\alpha'_{-\frac{1}{2}}e^{i\phi'_D}d_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\theta_B)d_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\theta'_D)$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\alpha_{-\frac{1}{2}}\alpha'_{\frac{1}{2}}e^{i\phi_B}e^{-i\phi'_D}d_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\theta_B)d_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\theta'_D)$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\alpha_{-\frac{1}{2}}\alpha'_{-\frac{1}{2}}e^{i\phi_B}d_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\theta_B)d_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\theta'_D)$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\alpha_{\frac{1}{2}}\alpha'_{\frac{1}{2}}e^{-i\phi_B}d_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\theta_B)d_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\theta'_D)$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\alpha_{\frac{1}{2}}\alpha'_{-\frac{1}{2}}e^{-i\phi_B}e^{i\phi'_D}d_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\theta_B)d_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\theta'_D)$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\alpha_{-\frac{1}{2}}\alpha'_{\frac{1}{2}}e^{-i\phi'_D}d_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\theta_B)d_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\theta'_D)$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\alpha_{-\frac{1}{2}}\alpha'_{-\frac{1}{2}}d_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\theta_B)d_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\theta'_D)$

No decaimento forte da ressonância $\Lambda^0(1407)$, ($B \rightarrow DE$) há conservação da paridade e a relação entre os coeficientes são expressos por: [2]

$$\alpha_{-\lambda_D-\lambda_E} = (-1)^{S_D+S_E-S_B}\eta_B\eta_D\eta_E\alpha_{\lambda_D\lambda_E},$$

onde η_B , η_D e η_E são as paridades intrínsecas e S_B , S_D e S_E os spins das partículas B , D e E , respectivamente.

No caso do decaimento $\Lambda^0(1407) \rightarrow \Sigma^+\pi^-$, temos:

$$\alpha_{-\lambda_D-\lambda_E} = (-1)^{\frac{1}{2}+0-\frac{1}{2}}(-)(+)(-)\alpha_{\lambda_D\lambda_E} = \alpha_{\lambda_D\lambda_E},$$

Tal que

$$\alpha'_{-\frac{1}{2}} = \alpha'_{\frac{1}{2}},$$

Em consequência disto, teremos somente duas quantidades complexas, A_1 e A_2 para descrever as amplitudes, isto é somente 4 parâmetros a serem determinados.

$$A_1 = \alpha''_{\frac{1}{2}} = \alpha_{\frac{1}{2}}\alpha'_{\pm\frac{1}{2}}$$

and

$$A_2 = \alpha''_{-\frac{1}{2}} = \alpha_{-\frac{1}{2}} \alpha'_{\pm\frac{1}{2}}$$

Substituindo os valores da matriz reduzida $d_{m'm}^j$ para diferentes valores de j, m', m , obtemos:

$\Lambda_C^+ \rightarrow (\Lambda_0 \rightarrow \Sigma^+ \pi^-) \pi^+$ $1/2^+ \rightarrow (1/2^- \rightarrow 1/2^+ 0^-) 0^-$		
$m_{\Lambda_C^+}$	λ_{Σ^+}	Amplitude
1/2	1/2	$A_1 \cos \frac{\theta_\Lambda}{2} \cos \frac{\theta'_\Sigma}{2} - A_2 \sin \frac{\theta_\Lambda}{2} \sin \frac{\theta'_\Sigma}{2} e^{i(\phi_\Lambda - \phi'_\Sigma)}$
1/2	-1/2	$-A_1 \cos \frac{\theta_\Lambda}{2} \sin \frac{\theta'_\Sigma}{2} e^{i\phi'_\Sigma} - A_2 \sin \frac{\theta_\Lambda}{2} \cos \frac{\theta'_\Sigma}{2} e^{i\phi_\Lambda}$
-1/2	1/2	$A_1 \sin \frac{\theta_\Lambda}{2} \cos \frac{\theta'_\Sigma}{2} e^{-i\phi_\Lambda} + A_2 \cos \frac{\theta_\Lambda}{2} \sin \frac{\theta'_\Sigma}{2} e^{-i\phi'_\Sigma}$
-1/2	-1/2	$-A_1 \sin \frac{\theta_\Lambda}{2} \sin \frac{\theta'_\Sigma}{2} e^{-i(\phi_\Lambda - \phi'_\Sigma)} + A_2 \cos \frac{\theta_\Lambda}{2} \cos \frac{\theta'_\Sigma}{2}$

A amplitude para este decaimento $\Lambda_C^+ \rightarrow (\Lambda_0 \rightarrow \Sigma^+ \pi^-) \pi^+$ será:

$$\begin{aligned}
d\Gamma \sim & (BW_{\Lambda_0})^2 (\\
& |A_1 \cos \frac{\theta_\Lambda}{2} \cos \frac{\theta'_\Sigma}{2} - A_2 \sin \frac{\theta_\Lambda}{2} \sin \frac{\theta'_\Sigma}{2} e^{i(\phi_\Lambda - \phi'_\Sigma)}|^2 + \\
& | - A_1 \cos \frac{\theta_\Lambda}{2} \sin \frac{\theta'_\Sigma}{2} e^{i\phi'_\Sigma} - A_2 \sin \frac{\theta_\Lambda}{2} \cos \frac{\theta'_\Sigma}{2} e^{i\phi_\Lambda} |^2 + \\
& |A_1 \sin \frac{\theta_\Lambda}{2} \cos \frac{\theta'_\Sigma}{2} e^{-i\phi_\Lambda} + A_2 \cos \frac{\theta_\Lambda}{2} \sin \frac{\theta'_\Sigma}{2} e^{-i\phi'_\Sigma}|^2 + \\
& | - A_1 \sin \frac{\theta_\Lambda}{2} \sin \frac{\theta'_\Sigma}{2} e^{-i(\phi_\Lambda - \phi'_\Sigma)} + A_2 \cos \frac{\theta_\Lambda}{2} \cos \frac{\theta'_\Sigma}{2} |^2)
\end{aligned}$$

5 Cálculo da amplitude do decaimento em três corpos

Quando se estuda o decaimento de uma partícula em três outras partículas, deve-se levar em conta todas as possíveis formações de ressonâncias com as partículas resultantes do decaimento.

5.1 Exemplo 1

Para o decaimento $\Lambda_c^+ \rightarrow p K^- \pi^+$ vamos considerar os seguintes modos de decaimento:

$$\Lambda_c^+ \rightarrow (\bar{K}^{*0}(892) \rightarrow K^- \pi^+) p,$$

$$\begin{aligned}\Lambda_c^+ &\rightarrow (\Lambda^0(1520) \rightarrow pK^-)\pi^+, \\ \Lambda_c^+ &\rightarrow (\Delta^{++}(1232) \rightarrow p\pi^+)K^-.\end{aligned}$$

O primeiro modo de decaimento

$$\Lambda_c^+ \rightarrow (\bar{K}^{*0}(892) \rightarrow K^-\pi^+)p$$

foi estudado no exemplo 1 da seção anterior e vimos que existem 4 quantidades complexas C_1, C_2, C_3 e C_4 que determinam as amplitudes.

Vamos agora, estudar o segundo caso

$$\Lambda_c^+ \rightarrow (\Lambda^0(1520) \rightarrow pK^-)\pi^+$$

Λ_c^+	$\Lambda^0(1520)$	p	K^-	π^+
$\frac{1}{2}^+$	$\frac{3}{2}^-$	$\frac{1}{2}^+$	0^-	0^-
A	B	D	E	C

O estudo da conservação da paridade no decaimento por interação forte $\Lambda^0(1520) \rightarrow pK^-$ resulta, como já foi visto no caso do decaimento $\Lambda^0(1407) \rightarrow \Sigma^+\pi^-$, que somente duas quantidades complexas B_1 e B_2 serão suficientes para descrever as amplitudes. Pela conservação da paridade

$$\alpha'_{\frac{1}{2}} = -\alpha'_{-\frac{1}{2}}$$

$\Lambda_c^+ \rightarrow (\Lambda^0 \rightarrow p + K^-)\pi^-$ $1/2^+ \rightarrow (3/2^- \rightarrow 1/2^+ 0^-)0^-$		
$m_{\Lambda_c^+}$	λ_p	Amplitude
1/2	1/2	$B_1 \cos \frac{\theta_\Lambda}{2} \left(\frac{3 \cos \theta'_p - 1}{2} \right) \cos \frac{\theta'_p}{2} - B_2 \sin \frac{\theta_\Lambda}{2} \left(\frac{3 \cos \theta'_p + 1}{2} \right) \sin \frac{\theta'_p}{2} e^{i(\phi_\Lambda - \phi'_p)}$
1/2	-1/2	$B_1 \cos \frac{\theta_\Lambda}{2} \left(\frac{3 \cos \theta'_p + 1}{2} \right) \sin \frac{\theta'_p}{2} e^{i\phi'_p} + B_2 \sin \frac{\theta_\Lambda}{2} \left(\frac{3 \cos \theta'_p - 1}{2} \right) \cos \frac{\theta'_p}{2} e^{i\phi_\Lambda}$
-1/2	1/2	$B_1 \sin \frac{\theta_\Lambda}{2} \left(\frac{3 \cos \theta'_p - 1}{2} \right) \cos \frac{\theta'_p}{2} e^{-i\phi_\Lambda} + B_2 \cos \frac{\theta_\Lambda}{2} \left(\frac{3 \cos \theta'_p + 1}{2} \right) \sin \frac{\theta'_p}{2} e^{-i\phi'_p}$
-1/2	-1/2	$B_1 \sin \frac{\theta_\Lambda}{2} \left(\frac{3 \cos \theta'_p + 1}{2} \right) \sin \frac{\theta'_p}{2} e^{-i(\phi_\Lambda - \phi'_p)} - B_2 \cos \frac{\theta_\Lambda}{2} \left(\frac{3 \cos \theta'_p - 1}{2} \right) \cos \frac{\theta'_p}{2}$

O outro decaimento $\Lambda_c^+ \rightarrow (\Delta^{++}(1232) \rightarrow p\pi^+)K^-$ é análogo à este último com a diferença que a paridade da partícula B agora é positiva e portanto, $\alpha'_{\frac{1}{2}} = \alpha'_{-\frac{1}{2}}$ e chamaremos de D_1 e D_2 as duas quantidades complexas que serão suficientes para descrever as

amplitudes.

Λ_c^+	$\Delta^{++}(1232)$	p	π^+	K^-
$\frac{1}{2}^+$	$\frac{3}{2}^+$	$\frac{1}{2}^+$	0^-	0^-
A	B	D	E	C

$\Lambda_c^+ \rightarrow (\Delta^{++} \rightarrow p + \pi^+)K^-$ $1/2^+ \rightarrow (3/2^+ \rightarrow 1/2^+ 0^-)0^-$		
$m_{\Lambda_c^+}$	λ_p	Amplitude
1/2	1/2	$D_1 \cos \frac{\theta_\Delta}{2} \left(\frac{3 \cos \theta'_p - 1}{2} \right) \cos \frac{\theta'_p}{2} - D_2 \sin \frac{\theta_\Delta}{2} \left(\frac{3 \cos \theta'_p + 1}{2} \right) \sin \frac{\theta'_p}{2} e^{i(\phi_\Delta - \phi'_p)}$
1/2	-1/2	$-D_1 \cos \frac{\theta_\Delta}{2} \left(\frac{3 \cos \theta'_p + 1}{2} \right) \sin \frac{\theta'_p}{2} e^{i\phi'_p} - D_2 \sin \frac{\theta_\Delta}{2} \left(\frac{3 \cos \theta'_p - 1}{2} \right) \cos \frac{\theta'_p}{2} e^{i\phi_\Delta}$
-1/2	1/2	$D_1 \sin \frac{\theta_\Delta}{2} \left(\frac{3 \cos \theta'_p - 1}{2} \right) \cos \frac{\theta'_p}{2} e^{-i\phi_\Delta} + D_2 \cos \frac{\theta_\Delta}{2} \left(\frac{3 \cos \theta'_p + 1}{2} \right) \sin \frac{\theta'_p}{2} e^{-i\phi'_p}$
-1/2	-1/2	$-D_1 \sin \frac{\theta_\Delta}{2} \left(\frac{3 \cos \theta'_p + 1}{2} \right) \sin \frac{\theta'_p}{2} e^{-i(\phi_\Delta - \phi'_p)} + D_2 \cos \frac{\theta_\Delta}{2} \left(\frac{3 \cos \theta'_p - 1}{2} \right) \cos \frac{\theta'_p}{2}$

Reunindo, estes resultados das três modalidades de decaimento da reação $\Lambda_c^+ \rightarrow pK^- \pi^+$ podemos escrever para a sua amplitude:

$d\Gamma \sim$

$$\begin{aligned}
& |BW_{\bar{K}^*0} \left(-C_1 \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\theta_{\bar{K}^*0}}{2} \sin \theta'_K e^{i\phi'_K} - C_2 \sin \frac{\theta_{\bar{K}^*0}}{2} \cos \theta'_K e^{i\phi_{\bar{K}^*0}} \right) + \\
& BW_\Lambda \left(B_1 \cos \frac{\theta_\Lambda}{2} \left(\frac{3 \cos \theta'_p - 1}{2} \right) \cos \frac{\theta'_p}{2} - B_2 \sin \frac{\theta_\Lambda}{2} \left(\frac{3 \cos \theta'_p + 1}{2} \right) \sin \frac{\theta'_p}{2} e^{i(\phi_\Lambda - \phi'_p)} \right) + \\
& BW_\Delta \left(D_1 \cos \frac{\theta_\Delta}{2} \left(\frac{3 \cos \theta'_p - 1}{2} \right) \cos \frac{\theta'_p}{2} - D_2 \sin \frac{\theta_\Delta}{2} \left(\frac{3 \cos \theta'_p + 1}{2} \right) \sin \frac{\theta'_p}{2} e^{i(\phi_\Delta - \phi'_p)} \right) |^2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& |BW_{\bar{K}^*0}(C_3 \cos \frac{\theta_{\bar{K}^*0}}{2} \cos \theta'_K - C_4 \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\theta_{\bar{K}^*0}}{2} \sin \theta'_K e^{i(\phi_{\bar{K}^*0} - \phi'_K)} + \\
& BW_\Lambda(B_1 \cos \frac{\theta_\Lambda}{2} (\frac{3 \cos \theta'_p + 1}{2}) \sin \frac{\theta'_p}{2} e^{i\phi'_p} + B_2 \sin \frac{\theta_\Lambda}{2} (\frac{3 \cos \theta'_p - 1}{2}) \cos \frac{\theta'_p}{2} e^{i\phi_\Lambda}) + \\
& BW_\Delta(-D_1 \cos \frac{\theta_\Delta}{2} (\frac{3 \cos \theta'_p + 1}{2}) \sin \frac{\theta'_p}{2} e^{i\phi'_p} - D_2 \sin \frac{\theta_\Delta}{2} (\frac{3 \cos \theta'_p - 1}{2}) \cos \frac{\theta'_p}{2} e^{i\phi_\Delta})|^2 + \\
& |BW_{\bar{K}^*0}(-C_1 \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\theta_{\bar{K}^*0}}{2} \sin \theta'_K e^{-i(\phi_{\bar{K}^*0} - \phi'_K)} + C_2 \cos \frac{\theta_{\bar{K}^*0}}{2} \cos \theta'_K) + \\
& BW_\Lambda(B_1 \sin \frac{\theta_\Lambda}{2} (\frac{3 \cos \theta'_p - 1}{2}) \cos \frac{\theta'_p}{2} e^{-i\phi_\Lambda} + B_2 \cos \frac{\theta_\Lambda}{2} (\frac{3 \cos \theta'_p + 1}{2}) \sin \frac{\theta'_p}{2} e^{-i\phi'_p}) + \\
& BW_\Delta(D_1 \sin \frac{\theta_\Delta}{2} (\frac{3 \cos \theta'_p - 1}{2}) \cos \frac{\theta'_p}{2} e^{-i\phi_\Delta} + D_2 \cos \frac{\theta_\Delta}{2} (\frac{3 \cos \theta'_p + 1}{2}) \sin \frac{\theta'_p}{2} e^{-i\phi'_p})|^2 + \\
& |BW_{\bar{K}^*0}(+C_3 \sin \frac{\theta_{\bar{K}^*0}}{2} \cos \theta'_K e^{-i\phi_{\bar{K}^*0}} + C_4 \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\theta_{\bar{K}^*0}}{2} \sin \theta'_K e^{-i\phi'_K}) + \\
& BW_\Lambda(B_1 \sin \frac{\theta_\Lambda}{2} (\frac{3 \cos \theta'_p + 1}{2}) \sin \frac{\theta'_p}{2} e^{-i(\phi_\Lambda - \phi'_p)} - B_2 \cos \frac{\theta_\Lambda}{2} (\frac{3 \cos \theta'_p - 1}{2}) \cos \frac{\theta'_p}{2}) + \\
& BW_\Delta(-D_1 \sin \frac{\theta_\Delta}{2} (\frac{3 \cos \theta'_p + 1}{2}) \sin \frac{\theta'_p}{2} e^{-i(\phi_\Delta - \phi'_p)} + D_2 \cos \frac{\theta_\Delta}{2} (\frac{3 \cos \theta'_p - 1}{2}) \cos \frac{\theta'_p}{2})|^2
\end{aligned}$$

5.2 Exemplo 2

Para o decaimento Λ_c^+ decay $\Lambda_c^+ \rightarrow \Sigma^+ \pi^- \pi^+$ vamos considerar os seguintes modos de decaimento:

$$\begin{aligned}
\Lambda_c^+ & \rightarrow (\rho(770) \rightarrow \pi^- \pi^+) \Sigma^+, \\
\Lambda_c^+ & \rightarrow (\Lambda^0(1405) \rightarrow \Sigma^+ \pi^-) \pi^+, \\
\Lambda_c^+ & \rightarrow (\Lambda^0(1520) \rightarrow \Sigma^+ \pi^-) \pi^+.
\end{aligned}$$

E para as amplitudes parciais obtemos:

$\Lambda_c^+ \rightarrow (\rho \rightarrow \pi^- \pi^+) \Sigma$ $1/2^+ \rightarrow (1^- \rightarrow 0^- 0^-) 1/2^+$		
$m_{\Lambda_c^+}$	λ_Σ	Amplitude
1/2	1/2	$-C_1 \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\theta_\rho}{2} \sin \theta'_\pi e^{i\phi'_\pi} - C_2 \sin \frac{\theta_\rho}{2} \cos \theta'_\pi e^{i\phi_\rho}$
1/2	-1/2	$C_3 \cos \frac{\theta_\rho}{2} \cos \theta'_\pi - C_4 \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\theta_\rho}{2} \sin \theta'_\pi e^{i(\phi_\rho - \phi'_\pi)}$
-1/2	1/2	$-C_1 \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\theta_\rho}{2} \sin \theta'_\pi e^{-i(\phi_\rho - \phi'_\pi)} + C_2 \cos \frac{\theta_\rho}{2} \cos \theta'_\pi$
-1/2	-1/2	$+C_3 \sin \frac{\theta_\rho}{2} \cos \theta'_\pi e^{-i\phi_\rho} + C_4 \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\theta_\rho}{2} \sin \theta'_\pi e^{-i\phi'_\pi}$

$\Lambda_C \rightarrow (\Lambda^0 \rightarrow \Sigma^+ \pi^-) \pi^+$ $1/2^+ \rightarrow (1/2^- \rightarrow 1/2^+ 0^-) 0^-$		
$m_{\Lambda_c^+}$	λ_Σ	Amplitude
1/2	1/2	$A_1 \cos \frac{\theta_\Lambda}{2} \cos \frac{\theta'_\Sigma}{2} - A_2 \sin \frac{\theta_\Lambda}{2} \sin \frac{\theta'_\Sigma}{2} e^{i(\phi_\Lambda - \phi'_\Sigma)}$
1/2	-1/2	$-A_1 \cos \frac{\theta_\Lambda}{2} \sin \frac{\theta'_\Sigma}{2} e^{i\phi'_\Sigma} - A_2 \sin \frac{\theta_\Lambda}{2} \cos \frac{\theta'_\Sigma}{2} e^{i\phi_\Lambda}$
-1/2	1/2	$A_1 \sin \frac{\theta_\Lambda}{2} \cos \frac{\theta'_\Sigma}{2} e^{-i\phi_\Lambda} + A_2 \cos \frac{\theta_\Lambda}{2} \sin \frac{\theta'_\Sigma}{2} e^{-i\phi'_\Sigma}$
-1/2	-1/2	$-A_1 \sin \frac{\theta_\Lambda}{2} \sin \frac{\theta'_\Sigma}{2} e^{-i(\phi_\Lambda - \phi'_\Sigma)} + A_2 \cos \frac{\theta_\Lambda}{2} \cos \frac{\theta'_\Sigma}{2}$

$\Lambda_c^+ \rightarrow (\Lambda^0 \rightarrow \Sigma^+ \pi^-) \pi^+$ $1/2^+ \rightarrow (3/2^- \rightarrow 1/2^+ 0^-) 0^-$		
$m_{\Lambda_c^+}$	λ_Σ	Amplitude
1/2	1/2	$B_1 \cos \frac{\theta_\Lambda}{2} \left(\frac{3\cos\theta'_\Sigma - 1}{2} \right) \cos \frac{\theta'_\Sigma}{2} - B_2 \sin \frac{\theta_\Lambda}{2} \left(\frac{3\cos\theta'_\Sigma + 1}{2} \right) \sin \frac{\theta'_\Sigma}{2} e^{i(\phi_\Lambda - \phi'_\Sigma)}$
1/2	-1/2	$B_1 \cos \frac{\theta_\Lambda}{2} \left(\frac{3\cos\theta'_\Sigma + 1}{2} \right) \sin \frac{\theta'_\Sigma}{2} e^{i\phi'_\Sigma} + B_2 \sin \frac{\theta_\Lambda}{2} \left(\frac{3\cos\theta'_\Sigma - 1}{2} \right) \cos \frac{\theta'_\Sigma}{2} e^{i\phi_\Lambda}$
-1/2	1/2	$B_1 \sin \frac{\theta_\Lambda}{2} \left(\frac{3\cos\theta'_\Sigma - 1}{2} \right) \cos \frac{\theta'_\Sigma}{2} e^{-i\phi_\Lambda} + B_2 \cos \frac{\theta_\Lambda}{2} \left(\frac{3\cos\theta'_\Sigma + 1}{2} \right) \sin \frac{\theta'_\Sigma}{2} e^{-i\phi'_\Sigma}$
-1/2	-1/2	$B_1 \sin \frac{\theta_\Lambda}{2} \left(\frac{3\cos\theta'_\Sigma + 1}{2} \right) \sin \frac{\theta'_\Sigma}{2} e^{-i(\phi_\Lambda - \phi'_\Sigma)} - B_2 \cos \frac{\theta_\Lambda}{2} \left(\frac{3\cos\theta'_\Sigma - 1}{2} \right) \cos \frac{\theta'_\Sigma}{2}$

Agora temos que compor todas as amplitudes destes três canais como foi feito no exemplo anterior.

6 Transformação dos ângulos medidos no decaimento para os ângulos usados nas amplitudes

Em geral, temos os dados do decaimento da partícula A expressos relativamente ao sistema de laboratório através dos quadri-vetores energia-momentum das partículas envolvidas. Seja o decaimento

$$A \rightarrow B(\rightarrow D + E) + C$$

Convém lembrar que se a partícula A tem spin, a polarização será orientada perpendicularmente a um plano, conhecido como plano de produção, formado pela direção do movimento do feixe e da partícula A e que no sistema centro de massa de A o decaimento acontece num plano, conhecido como o plano do decaimento.

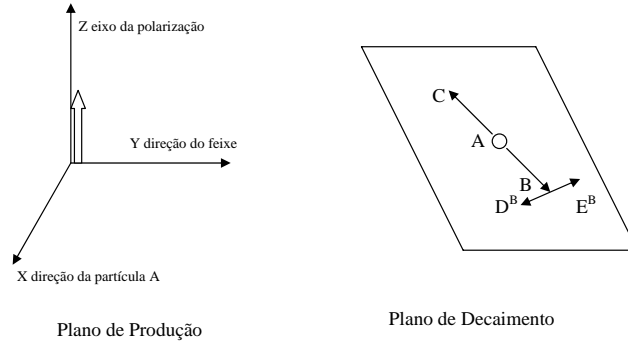


Figure 2: Planos de Produção e Decaimento

Conhecidos os quadri-momentos $\bar{P} = (E, \vec{P})$ das partículas C , D e E é fácil obter os quadri-momentos das partículas A e B

$$\begin{aligned}\bar{P}_A &= \bar{P}_C + \bar{P}_D + \bar{P}_E \\ \bar{P}_B &= \bar{P}_D + \bar{P}_E\end{aligned}$$

Queremos saber como calcular os ângulos θ_B^A e ϕ_B^A que aparecem nas amplitudes e que são os ângulos que a partícula B faz com a direção da partícula A no sistema centro de massa de A .

Estes ângulos serão relativos ao sistema centro de massa da partícula A que decai e portanto teremos que fazer uma transformação de Lorentz do sistema de laboratório (onde os quadrimomentos das partículas são em geral medidos) para o sistema centro de massa de A .

Na biblioteca do Cern (GENLIB) [3] existe uma subrotina LORTR4 que faz esta transformação. Como input damos o quadri-momento $\bar{P}_A = (E_A, \vec{P}_A)$ de A relativo ao qual será feita a transformação e o quadrimomento $\bar{P}_B = (E_B, \vec{P}_B)$ de B que foram medidos. Como output recebemos o quadri-momento \bar{P}_B^A de B no sistema centro de massa de A . Com os vetores momentos \vec{P}_A e \vec{P}_B^A obtem-se facilmente os ângulos θ_B^A e ϕ_B^A

$$\cos\theta_B^A = \frac{\vec{P}_B^A \cdot \vec{P}_A}{|\vec{P}_B^A| \cdot |\vec{P}_A|}$$

$$\phi_B^A = \arctan \frac{P_{BY}^A}{P_{BX}^A}$$

Para se calcular os ângulos θ_D^B e ϕ_D^B da partícula D que aparecem nas amplitudes procedemos da mesma maneira transformando o quadri-vetor energia momento de D para

o sistema centro de massa de B

Faremos uma transformação de Lorentz do sistema centro de massa de A para o sistema centro de massa de B . Com a subrotina LORTR4 fazemos esta transformação. Como input damos o quadri-momento $\bar{P}_B^A = (E_B^A, \vec{P}_B^A)$ de B no sistema centro de massa de A relativo ao qual será feita a transformação e o quadrimomento $\bar{P}_D^A = (E_D^A, \vec{P}_D^A)$ de D relativos ao sistema centro de massa de A . Como output recebemos o quadri-momento \bar{P}_D^B de D no sistema centro de massa de B .

Com os vetores momentos \vec{P}_B^A e \vec{P}_D^B obtem-se da mesma maneira que anteriormente os ângulos θ_D^B e ϕ_D^B .

7 Ajuste com os dados experimentais

O conjunto dos dados experimentais da massa da partícula A , depois de se fazer os cortes necessários, quando distribuídos um gráfico de frequência, resulta num sinal de forma gaussiana sobreposto à um fundo de background. Com estes dados, procuramos fazer um ajuste com uma função que represente esta frequência usando o método do Maximum Likelihood [8].

Vamos começar por um exemplo simples.

Suponhamos que temos um conjunto de dados experimentais de valores de massa m_i que queremos ajustar à uma função que representa uma ressonância Breit-Wigner adicionada a um background.

Com o ajuste tentaremos encontrar a melhor estimativa da massa M_0 e largura Γ da ressonância.

Escolhemos a forma da função a ser ajustada como:

$$f(m) = BW(m) + BG(m)$$

onde tomaremos $BW(m)$ como

$$BW(m) = \frac{\Gamma/2}{(m - M_0)^2 + (\Gamma/2)^2}$$

e para o background uma função

$$BG(m) = a(1 + b(m - \bar{M}) + c(m - \bar{M})^2)$$

Os parâmetros a serem determinados são os da BW, M_0 e Γ , a massa e a largura da ressonância e os parâmetros da BG, a , b e c que descrevem a quantidade do background, sua inclinação e curvatura.

Usaremos os dados experimentais num intervalo entre M_1 e M_2 cujo valor médio é \overline{M} .

O método do maximum likelihood é o mais poderoso dos métodos para se encontrar valores de parâmetros desconhecidos.

Para cada evento i calculamos

$$y_i = \frac{f(m_i)}{\int_{M_1}^{M_2} f(m)dm}$$

y_i é a densidade de probabilidade de se observar este evento i e é uma função dos parâmetros, M_0, Γ, a, b e c

Definimos likelihood \mathcal{L}' como o produto dos y_i para todos os eventos dentro do intervalo M_1 e M_2 .

$$\mathcal{L}' = \prod_{\text{eventos}} y_i$$

ou usando logaritmos,

$$\mathcal{L} = \sum_{\text{eventos}} \log(y_i)$$

Para encontrar os melhores valores dos parâmetros, vamos varia-los de modo a maximizar \mathcal{L} .

O programa MINUIT [3] da livreria do Cern faz esta variação dos parâmetros para se obter a maximização.

O nosso caso é mais complicado pois não se trata de uma simples Breit-Wigner mas o princípio é o mesmo.

Usando as amplitudes que deduzimos na seção 4 levando em consideração os spin das partículas, obteremos pelo método do maximum likelihood, os parâmetros (quantidades complexas) determinando assim as amplitudes dos decaimentos.

Convém lembrar que devemos levar em conta a aceitação do dispositivo experimental usado para se obter os eventos (decaimentos).

References

- [1] M.L. Perl, "High Energy hadron Physics", Chapter 10, John Wiley and Sons, 1974
- [2] G. Otter and A.M.F. Endler, "Formalismo da helicidade e suas aplicações", CBPF-MO-002/81
- [3] CERN Program Library

- [4] G.F. Fox, PHD thesis, " Multidimensional Resonance Analysis of $\Lambda_c^+ \rightarrow pK^-\pi^+$ ", Univ. Of South Carolina, 1996 , E791 collaboration, Phys. Lett. B471, 449-459, 2000
- [5] Jacob e Wick, " Ann Phys. (N.Y.) 7,404 1959
- [6] J. Werle, "Relativistic theory of Reactions", North-Holland, 1966
- [7] A.D. Martin and T.D. Spearman, "Elementary Particle Physics", North-Holland, 1970
- [8] Louis Lyons "Statistics for Nuclear and Particle Physics", Cambridge Univ. Press 1986
- [9] R.M. Barnet et all, " Particle Data Group", 2000
- [10] R. Hagedorn, "Relativistic Kinematics", W. a. Benjamin,Inc 1964
- [11] A.J. Slaughter and H.W. Siebert, "Charm Baryons: Theory and experiment", Annu. Rev. Nucl. Sci. 41, 511-545, 1991
- [12] E. Byckling and K. Kajantie, "Particle Kinematics", John Wiley and Sons, 1972