CBPF-MO-001/04

# Estruturas algébricas na busca da Teoria do Todo: Álgebras de Clifford, espinores e supersimetria.*

*Francesco Toppan*

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas – CBPF/MCT
Rua Dr. Xavier Sigaud 150, Rio de Janeiro, RJ, 22290-180, Brasil

**Resumo**

Estas notas de aula pretendem cobrir uma pequena parte do tema discutido no curso "Estruturas algébricas na busca da Teoria do Todo". As Álgebras de Clifford, necessárias para introduzir as Equações de Dirac para espinores livres em qualquer espaço-tempo de assinatura arbitrária, são totalmente classificadas e explicitamente construídas com a ajuda de simples e poderosos algoritmos aqui apresentados. A noção de supersimetria é introduzida e discutida no contexto das álgebras de Clifford.

*Notas publicadas nos *Anais da IV Escola do CBPF*, Rio de Janeiro, 15 a 26 de julho de 2002. Editores: *Ligia M.C.S. Rodrigues, Alberto C. dos Reis, Evaldo M.F. Curado, Joice Terra & Nilton Alves Jr.* Editora Ao Livro Técnico, 2003. Páginas 69 a 88.

# 1 Introdução

As motivações básicas do curso “Estruturas algébricas na busca da Teoria do Todo” foram familiarizar os estudantes de graduação com algumas das estruturas algébricas que são usualmente pesquisadas por físicos teóricos na tentativa de encontrar uma teoria quântica consistente e unificada das quatro interações conhecidas.

Tanto por considerações estéticas como práticas, a classificação de estruturas matemáticas e algébricas é uma exigência preliminar e necessária. Na verdade, uma esperança muito ambiciosa, mas concebível para uma teoria unificada, é que não haja parâmetros livres (ou, menos ambiciosamente, apenas poucos) a serem fixados, externamente, a partir de exigências fenomenológicas. De preferência, todos os parâmetros possíveis devem ser preditos pelas exigências estritas de consistência impostas sobre tal teoria. Um exemplo pode ser dado imediatamente. Concerne à dimensionalidade do espaço-tempo. Nós observamos quatro dimensões (três espaciais e uma temporal). Entretanto, no presente, somos incapazes de construir uma teoria quântica de gravitação consistente se nos restringirmos a quatro dimensões. Por outro lado, existem fortes evidências teóricas de que uma teoria consistente deveria ser supersimétrica (uma bela simetria descoberta há trinta anos que permite tratar de forma unificada as partículas bosônicas e fermiônicas) e considerar um número total de dez ou, mais provavelmente, onze dimensões (tal teoria, ainda misteriosa, é a chamada “teoria-M”). As dimensões extras, invisíveis para nós, não podem ser observadas pelos aceleradores atuais. A explicação mais natural é que elas são “demasiado pequenas”, isto é, compactadas em uma pequena variedade compacta (Kaluza e Klein foram os primeiros a fazer essa sugestão há aproximadamente oitenta anos atrás, quando mostraram que uma teoria gravitatória em 5 dimensões se reduz a uma teoria gravitatória usual acoplada a uma teoria de Maxwell se a dimensão extra for compactada num círculo $S^1$).

A partir deste único exemplo fica claro que necessitamos investigar de maneira geral espaços-tempo arbitrários (sem por enquanto nos preocuparmos com a sua dimensionalidade ou assinatura, isto é, com o número de dimensões tipo tempo em relação ao do tipo espaço) assim como as estruturas, como os campos espinoriais, que vivem em tais espaços-tempo.

Não são apenas espaço-tempos a serem deixados arbitrários. As álgebras e os grupos de Lie estão completamente classificados (são geralmente apresentados na base de seus diagramas de Dynkin). Em geral, Grupos de Lie compactos são investigados como grupos de unificação que contêm como subgrupo o grupo $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ do modelo padrão. Um destes grupos, $E_8$, é naturalmente associado à corda heterótica, e é um forte candidato para a fenomenologia da grande unificação.

Uma primeira lição a ser tirada é que, sempre que possível, é melhor formular nossas teorias na estrutura matemática mais geral. Então, restringirmos as classes de teorias a serem consideradas, de acordo com as diversas exigências de consistência, tais como a causalidade de Einstein, a unitariedade (isto implica a preservação das probabilidades em uma teoria quântica), etc. As Simetrias têm um papel importante neste assunto. Em muitos casos sua ausência pode arruinar a consistência de uma teoria. As flutuações quânticas podem destruir a simetria original, originando uma anomalia no nível quântico, que pode ser letal à consistência da teoria. É bastante notável, que no modelo padrão das interações eletrofracas, as cargas das partículas sejam combinadas de tal maneira para cada uma das três famílias de partículas que deixe o modelo livre de uma anomalia (a anomalia quiral associada à simetria quiral $U(1)$), cuja presença destruiria a consistência da teoria. A famosa dimensão $d = 10$ para o espaço-tempo, necessária para uma teoria consistente das supercordas, tem uma origem similar. Somente nesta dimensão particular uma simetria da supercorda, a chamada simetria de Weyl, não é anômala.

A partir do que foi dito acima fica claro que na busca de uma "Teoria do Todo" deveríamos nos familiarizar com os métodos matemáticos de classificação das estruturas algébricas. Eles são cruciais para nossos propósitos.

Já que seria impossível dar um curso sobre cordas e Teoria-M em somente 5 aulas, é necessário um programa menos ambicioso. Após breves esplicações das motivações principais, podemos nos concentrar na análise de algumas das estruturas necessárias às teorias acima mencionadas. Os leitores interessados em saber mais sobre a teoria das cordas podem consultar, por exemplo, os três livros mencionados na bibliografia [1], [2], [3].

A fim de ilustrar através de um exemplo bastante didático (e também visivelmente atraente) a força dos esquemas matemáticos de classificação na física e na geometria, na primeira aula deste curso a fórmula de Euler foi introduzida para ser depois aplicada para derivar a classificação dos sólidos platônicos e também de outros poliedros. Tendo em vista que esse assunto já foi abordado em outra "Notas de aula"e está disponível [4] na Biblioteca do CBPF, não vamos repeti-lo aqui. Similarmente, as notas de aula sobre as álgebras divisionais e as suas conexões com as álgebras de Clifford estão também disponíveis na biblioteca do CBPF [5].

Nestas notas, seguindo o programa do curso, as estruturas matemáticas investigadas são as álgebras de Clifford e os campos espinoriais. A razão dessa escolha será discutida mais detalhadamente na seção seguinte. Aqui deve-se mencionar que uma característica interessante é que as álgebras de Clifford foram classificadas pelos matemáticos (já há algum tempo) e que os físicos podem confiar nestes resultados matemáticos para compreender e classificar várias estruturas adicionais, como as supersimetrias generalizadas, que se encontram na teoria-M (álgebra-M). No presente texto, não só as classificações matemáticas das álgebras de Clifford são revisadas, como as álgebras de Clifford são explicitamente construídas com a ajuda de simples, mas poderosos, algoritmos. Os resultados aqui fornecidos são ferramentas operacionais para aqueles que estão interessados em trabalhar concretamente com cordas e teoria-M. Deve-se acentuar que alguns destes resultados são aqui apresentados pela primeira vez. Na seção que segue, a noção de supersimetria é introduzida, com algumas considerações sobre suas principais propriedades, assim como seu papel no atual entendimento do programa da unificação. A exata conexão entre supersimetria e as álgebras de Clifford será enfatizada.

# 2 As Álgebras de Clifford e a Equação de Dirac

É útil lembrar como Dirac descobriu sua famosa equação. A equação de Klein -Gordon de segunda ordem

$$\partial_\mu \partial^\mu \Phi + m^2 \Phi = 0 \tag{1}$$

que pode ser considerada como o análogo relativístico da equação livre de Schrödinger, falhou em fornecer uma probabilidade definida positiva, ao interpretar o campo $\Phi$ como uma amplitude quântica. Uma das motivações de Dirac foi construir uma equação relativística de primeira-ordem (a equação de Schrödinger é de primeira-ordem no tempo) que, num certo sentido, pode ser considerada como a "raiz quadrada"da equação de Klein-Gordon.

A equação de Dirac

$$i\Gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Psi - m\Psi = 0 \tag{2}$$

é efetivamente a "raiz quadrada"da equação de Klein-Gordon, se é possível achar um conjunto de matrizes $\Gamma^{\mu}$, cujos anticomutadores satisfazem a condição

$$\Gamma^{\mu}\Gamma^{\nu} + \Gamma^{\nu}\Gamma^{\mu} = 2\eta^{\mu\nu} \tag{3}$$

onde $\eta^{\mu\nu}$ denota a métrica plana (+ - - -) do espaço-tempo de Minkowski. O campo $\Psi$ é um vetor coluna.

A equação (3) acima define a álgebra de Clifford (para a assinatura genérica $p, q$, enquanto no caso acima temos $p = 1$, $q = 3$).

Em contraste com o caso de Klein-Gordon, a equação de Dirac admite uma consistente interpretação probabilística, sendo possível considerar $\Psi$ uma amplitude quântica. A existência de uma torre de estados de energia positiva e negativa (uma conseqüência do fato de ser a equação de Dirac uma "raiz quadrada") teve que ser resolvida por Dirac interpretando um "buraco"num mar de elétrons de energia negativa como o pósitron (um vácuo consistente da teoria sendo o preenchimento por elétrons de todos os estados de energia negativa). A consistência deste procedimento implica que o campo $\Psi$ descreva uma partícula fermiônica, isto é, uma partícula que satisfaz o princípio de exclusão de Pauli.

As equações livres de Klein-Gordon e Dirac não descrevem as interações. Por outro lado, equações não-lineares impedem a interpretação dos campos como amplitudes quânticas (o princípio de superposição para amplitudes falha em teorias não-lineares). Para obter-se uma teoria quântica consistente envolvendo equações não-lineares, uma nova receita tem que ser dada. Isto é de fato possível no chamado esquema de "segunda quantização". Nesta interpretação, os campos que entram nas equações de Klein-Gordon e Dirac não são mais considerados amplitudes quânticas. Eles são considerados como operadores atuando num espaço de Hilbert de estados quânticos. Nesta re-interpretação das equações básicas, a equação de Klein-Gordon tem uma coerente interpretação no âmbito mecânico-quântico. Impor a causalidade relativista, ou seja que a velocidade da propagação da informação não ultrapassa a velocidade da luz, faz com que a equação de Klein-Gordon descreva partículas bosônicas, enquanto a equação de Dirac continua a ser aplicável somente para partículas fermiônicas (tudo isto é conseqüência do famoso teorema do spin-estatístico).

Vimos até agora que partículas fundamentais, tais como o elétron, que acoplado a um campo eletromagnético dá lugar à incrivelmente bem sucedida teoria da eletrodinâmica quântica, são descritas pela equação de Dirac, e portanto necessitam da introdução das álgebras de Clifford. Dirac conseguiu achar um conjunto de quatro matrizes que satisfazem (3) (se não, não teria conseguido produzir a equação de Dirac!). Uma lista de perguntas pode ser feita (para as quais, graças aos esforços dos matemáticos, sabemos completamente a resposta): por exemplo, se uma representação matricial das álgebras de Clifford pode sempre ser encontrada, qual o seu tamanho, se são únicas considerando-se a equivalência. Na seção seguinte as respostas a tais perguntas são fornecidas.

Enfatizemos aqui, de acordo com o que foi discutido na introdução, que ter o controle total das álgebras de Clifford é de suprema importância a fim de investigar sistematicamente em qualquer assinatura do espaço-tempo, as propriedades das correspondentes equações de Dirac. Lembramos que álgebras de Clifford sempre estão presentes quando temos partículas espinoriais.

# 3 Algebras de Clifford: classificação e construção explícita.

Na seção prévia discutimos a motivação física que nos leva a introduzir e investigar as álgebras de Clifford em espaço-tempos de assinatura arbitrária. Esta seção é muito diferente e um pouco mais técnica. Aqui apresentamos os resultados matemáticos a respeito das álgebras de Clifford. A característica interessante é que estes resultados podem ser apresentados de uma maneira autoconsistente. Uma boa referência para físicos sobre as álgebras de Clifford é encontrada em [6]. As fórmulas abaixo entretanto são mais explícitas do que aquelas fornecidas em [6] e podem ser usadas para trabalhar concretamente e investigar teorias de campos em qualquer assinatura do espaço-tempo.

Duas obsevações podem ser feitas. Primeiro: apesar do fato da teoria quântica ser descrita por números complexos, sem perda de generalidade (números complexos podem ser considerados como pontos no plano real) é preferível trabalhar com as álgebras de Clifford apresentadas por matrizes reais. A estrutura das álgebras de Clifford é muito mais clara em tal contexto (isto é, em conexão com as álgebras divisionais). Um segundo comentário: o algoritmo fornecido abaixo permite individualizar um representante para cada classe irredutível das representações das matrizes Gamma de Clifford.

A construção é dada a seguir. Mostraremos primeiro que uma construção recursiva de uma álgebra de Clifford de um espaço-tempo $D+2$ dimensional é disponível, uma vez conhecida uma representação D-dimensional. De fato, é um exercício simples verificar que, se as $\gamma_i$'s denotam as matrizes Gamma $d$-dimensional de um espaço-tempo $D=p+q$ com assinatura $(p,q)$ (fornecendo uma representação para a álgebra de Clifford $C(p,q)$) então as matrizes Gamma de $2d$-dimensões (denotadas como $\Gamma_j$) de um espaço-tempo $D+2$ são produzidas de acordo com:

$$\begin{aligned} \Gamma_j &\equiv \begin{pmatrix} 0 & \gamma_i \\ \gamma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_d \\ -\mathbf{1}_d & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{1}_d & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_d \end{pmatrix} \\ (p,q) &\mapsto (p+1,q+1). \end{aligned} \tag{4}$$

ou

$$\begin{aligned} \Gamma_j &\equiv \begin{pmatrix} 0 & \gamma_i \\ -\gamma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_d \\ \mathbf{1}_d & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{1}_d & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_d \end{pmatrix} \\ (p,q) &\mapsto (q+2,p). \end{aligned} \tag{5}$$

Algumas observações podem ser feitas. As matrizes de Pauli dois-dimensionais a valores reais $\tau_A$, $\tau_1$, $\tau_2$, as quais satisfazem a álgebra de Clifford $C(2,1)$, são obtidas usando o algoritmo (4) ou (5) aplicado ao número 1, isto é a realização uni-dimensional da álgebra de Clifford $C(1,0)$. Temos de fato

$$\tau_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Todas as álgebras de Clifford são obtidas recursivamente aplicando os algoritmos (4) e (5) à álgebra de Clifford $C(1,0)$ ($\equiv 1$) e às álgebras de Clifford da série $C(0,3+4m)$ ($m$ inteiro não-negativo), que podem ser conhecidas previamente. Isto está de acordo com o esquema ilustrado na tabela da página seguinte.

Tabela com as álgebras de Clifford maximal (ate $d = 256$).

| 1 | * | 2 | * | 4 | * | 8 | * | 16 | * | 32 | * | 64 | * | 128 | * | 256 | * |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\underline{(1,0)}$ | ⇒ | (2,1) | ⇒ | (3,2) | ⇒ | (4,3) | ⇒ | (5,4) | ⇒ | (6,5) | ⇒ | (7,6) | ⇒ | (8,7) | ⇒ | (9,8) | ⇒ |
| | | | | | | (1,4) | → | (2,5) | → | (3,6) | → | (4,7) | → | (5,8) | → | (6,9) | → |
| | | | | | ↗ | | | | | | | | | | | | |
| | | | | $\underline{(0,3)}$ | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | ↘ | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | (5,0) | → | (6,1) | → | (7,2) | → | (8,3) | → | (9,4) | → | (10,5) | → |
| | | | | | | | | (1,8) | → | (2,9) | → | (3,10) | → | (4,11) | → | (5,12) | → |
| | | | | | | | ↗ | | | | | | | | | | |
| | | | | | | $\underline{(0,7)}$ | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | ↘ | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | (9,0) | → | (10,1) | → | (11,2) | → | (12,3) | → | (13,4) | → |
| | | | | | | | | | | | | | | (1,12) | → | (2,13) | → |
| | | | | | | | | | | | | | ↗ | | | | |
| | | | | | | | | | | | | $\underline{(0,11)}$ | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | ↘ | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | (13,0) | → | (14,1) | → |
| | | | | | | | | | | | | | | | | (1,16) | → |
| | | | | | | | | | | | | | | | ↗ | | |
| | | | | | | | | | | | | | | $\underline{(0,15)}$ | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | ↘ | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | (17,0) | → |

A respeito desta tabela, algumas observações podem ser feitas. As colunas são rotuladas pelo tamanho da matriz **d** das álgebras de Clifford maximais. As suas assinaturas são denotadas pelo par $(p,q)$. Além disso, as álgebras de Clifford sublinhadas na tabela são chamadas "álgebras de Clifford primitivas maximais". As outras álgebras de Clifford maximais que aparecem na tabela são as "álgebras de Clifford maximais descendentes". Elas são obtidas das álgebras de Clifford maximais primitivas por iteratividade usando os dois algoritmos recursivos (4) e (5). Além disso, qualquer álgebra de Clifford não maximal é obtida de uma álgebra maximal apagando um certo número de matrizes Gamma. Deve-se observar que as álgebras de Clifford em espaços-tempos de dimensão par são sempre não-maximais. Discutiremos concretamente um exemplo dado, isto é, a construção explícita de uma álgebra de Clifford em um espaço-tempo $D = p + q$ dimensional para $D = 11$ (a dimensionalidade da teoria-M). Obtemos

| $(p,q)$ | *type* | $d$ |
|---|---|---|
| (11,0) | $\subset$ (11,2) | 64 |
| (10,1) | **M** | 32 |
| (9,2) | $\subset$ (11,2) | 64 |
| (8,3) | **M** | 64 |
| (7,4) | $\subset$ (7,6) | 64 |
| (6,5) | **M** | 32 |
| (5,6) | $\subset$ (7,6) | 64 |
| (4,7) | **M** | 64 |
| (3,8) | $\subset$ (3,10) | 64 |
| (2,9) | **M** | 32 |
| (1,10) | $\subset$ (3,10) | 64 |
| (0,11) | **M** | 32 |

Onde as álgebras de Clifford maximais são rotuladas por $M$ (as outras álgebras de Clifford não-maximais são obtidas a partir das álgebras maximais dadas na segunda coluna depois de apagar um certo número de matrizes-$\Gamma$). O tamanho da representação matricial é dado pelo número da direita ($d$).

Até aqui ainda não explicamos como construir explicitamente as álgebras de Clifford maximais primitivas das séries $C(0,3+8n)$ (também conhecidas como série quaterniônica devido a sua conexão com as álgebras divisionais), assim como também as da série octoniônica $C(0,7+8n)$. A resposta pode ser fornecida com a ajuda das três matrizes de Pauli (6). Construímos primeiro as matrizes $4\times 4$ que realizam a álgebra de Clifford $C(0,3)$ e as matrizes $8\times 8$ que realizam a álgebra de Clifford $C(0,7)$. Elas são dadas respectivamente por

$$C(0,3) \quad \equiv \quad \begin{array}{l} \tau_A\otimes\tau_1, \\ \tau_A\otimes\tau_2, \\ \mathbf{1}_2\otimes\tau_A. \end{array} \tag{7}$$

e

$$C(0,7) \quad \equiv \quad \begin{array}{l} \tau_A\otimes\tau_1\otimes\mathbf{1}_2, \\ \tau_A\otimes\tau_2\otimes\mathbf{1}_2, \\ \mathbf{1}_2\otimes\tau_A\otimes\tau_1, \\ \mathbf{1}_2\otimes\tau_A\otimes\tau_2, \\ \tau_1\otimes\mathbf{1}_2\otimes\tau_A, \\ \tau_2\otimes\mathbf{1}_2\otimes\tau_A, \\ \tau_A\otimes\tau_A\otimes\tau_A. \end{array} \tag{8}$$

As três matrizes de $C(0,3)$ serão denotadas por $\overline{\tau}_i, =1,2,3$. As sete matrizes de $C(0,7)$ serão denotadas como $\tilde{\tau}_i$, $i=1,2,\ldots,7$.

Para construir as séries restantes da álgebra de Clifford, necessitamos primeiramente aplicar o algoritmo (4) em $C(0,7)$ e construir as matrizes $16\times 16$ realizando $C(1,8)$ (a matriz com assinatura positiva é denotada com $\gamma_9$, ${\gamma_9}^2=\mathbf{1}$, enquanto as oito matrizes com assinatura negativa são denotadas como $\gamma_j$, $j = 1, 2 \ldots, 8$, com ${\gamma_j}^2 = -\mathbf{1}$). Estamos agora em posição para construir explicitamente a totalidade das álgebras de Clifford maximais primitivas $C(0, 3 + 8n)$, $C(0, 7 + 8n)$ através das fórmulas

$$C(0,3+8n) \quad \equiv \quad \begin{array}{lll} \overline{\tau}_i \otimes \gamma_9 \otimes \ldots & \ldots & \ldots \otimes \gamma_9, \\ \mathbf{1}_4 \otimes \gamma_j \otimes \mathbf{1}_{16} \otimes \ldots & \ldots & \ldots \otimes \mathbf{1}_{16}, \\ \mathbf{1}_4 \otimes \gamma_9 \otimes \gamma_j \otimes \mathbf{1}_{16} \otimes \ldots & \ldots & \ldots \otimes \mathbf{1}_{16}, \\ \mathbf{1}_4 \otimes \gamma_9 \otimes \gamma_9 \otimes \gamma_j \otimes \mathbf{1}_{16} \otimes \ldots & \ldots & \ldots \otimes \mathbf{1}_{16}, \\ \ldots & \ldots & \ldots, \\ \mathbf{1}_4 \otimes \gamma_9 \otimes \ldots & \ldots & \otimes \gamma_9 \otimes \gamma_j, \end{array} \tag{9}$$

e similarmente

$$C(0,7+8n) \quad \equiv \quad \begin{array}{lll} \tilde{\tau}_i \otimes \gamma_9 \otimes \ldots & \ldots & \ldots \otimes \gamma_9, \\ \mathbf{1}_8 \otimes \gamma_j \otimes \mathbf{1}_{16} \otimes \ldots & \ldots & \ldots \otimes \mathbf{1}_{16}, \\ \mathbf{1}_8 \otimes \gamma_9 \otimes \gamma_j \otimes \mathbf{1}_{16} \otimes \ldots & \ldots & \ldots \otimes \mathbf{1}_{16}, \\ \mathbf{1}_8 \otimes \gamma_9 \otimes \gamma_9 \otimes \gamma_j \otimes \mathbf{1}_{16} \otimes \ldots & \ldots & \ldots \otimes \mathbf{1}_{16}, \\ \ldots & \ldots & \ldots, \\ \mathbf{1}_8 \otimes \gamma_9 \otimes \ldots & \ldots & \otimes \gamma_9 \otimes \gamma_j, \end{array} \tag{10}$$

É preciso notar que o produto tensorial da representação 16-dimensional é tomado $n$ vezes. O tamanho total da representação matricial (9) é então $4 \times 16^n$, enquanto o tamanho de (10) é $8 \times 16^n$.

As fórmulas dadas acima fornecem o conjunto completo de respostas às perguntas feitas na seção prévia. Elas fornecem um método concreto e operativo para computar a totalidade das álgebras de Clifford.

Deve-se observar que todas as matrizes de Clifford são de dimensão par (potências de 2). Uma sub-classe importante de matrizes Gamma de Clifford é obtido pelas matrizes que são decomponíveis em blocos $2 \times 2$ e são não-nulas somente nos blocos anti-diagonais. Tais matrizes podem ser chamadas matrizes do tipo-Weyl. Um exame das tabelas precedentes mostra que as matrizes de tipo=Weyl se encontram em dimensões de assinaturas especiais. Todas as álgebras de Clifford primitivas são não-Weyl. Entretanto, todas as álgebras de Clifford derivadas, com os dois algoritmos, são do tipo-Weyl, uma vez que suprimimos a matriz $\begin{pmatrix} \mathbf{1}_d & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_d \end{pmatrix}$ para produzir uma álgebra de Clifford não-maximal.

Em um exemplo concreto, o espaço Euclideano bidimensional $(2, 0)$ não é do tipo-Weyl, enquanto o espaço-tempo de Minkowski bidimensional $(1, 1)$ é de tipo-Weyl. O primeiro é obtido da álgebra de Clifford $(2, 1)$ suprimindo uma matriz Gamma do tipo-espaço, enquanto o segundo é obtido da mesma álgebra de Clifford $(2, 1)$ suprimindo uma das duas matrizes tipo-tempo. Sem perda de generalidade esta matriz Gamma pode sempre ser escolhida da forma $\begin{pmatrix} \mathbf{1}_d & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_d \end{pmatrix}$.

Até então tudo bem, porém por que é assim tão importante a realização tipo Weyl das álgebras de Clifford? A razão é a seguinte. O comutador entre as matrizes Gamma, $\Sigma_{\mu\nu} = [\Gamma_\mu, \Gamma_\nu]$ é o gerador do grupo de Lorentz que corresponde à dada assinatura do espaço-tempo. O produto de duas matrizes Gamma, ambas admitindo somente blocos não-nulos na posição antidiagonal, corresponde a uma matriz em blocos $2 \times 2$ com as únicas componentes não-nulas na posição diagonal. Considerando=se que as matrizes Gamma assim como também os geradores de Lorentz $\Sigma_{\mu\nu}$ agem sob espinores, o fato de que os geradores de Lorentz são dados em blocos antidiagonais, significa que podemos consistentemente (sob essas condições) anular a zero metade das componentes do vector coluna do espinor (seja a metade superior ou inferior), para dar origem ao chamado espinor de Weyl que admite metade dos graus de liberdade esperados do espinor de Dirac original. Esta redução das componentes do espinor de Dirac pode ser desenvolvida usando o projetor $P_\pm$ ($P_\pm P_\mp = 0$ e ${P_\pm}^2 = P_\pm$), dado por

$$P_\pm = \frac{1}{2}(\mathbf{1} \pm \overline{\Gamma}) \tag{11}$$

onde $\overline{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_d \\ -\mathbf{1}_d & 0 \end{pmatrix}$.

Em espaços-tempos de dimensão ímpar a matriz $\overline{\Gamma}$ é sempre dada pelo produto de todas as outras matrizes Gamma $\Gamma$. No espaço-tempo 4-dimensional standard tal produto é usualmente denotado por $\Gamma_5$. Um fato importante é que, sob transformações de paridade, as coordenadas espaciais $x_1$, $x_2$, $x_3$ mudam de sinal ($x_i \mapsto -x_1$ para $i = 1, 2, 3$), assim como também todas as quantidades covariantes que dependem dos índices espaciais. Já dissemos que $\Gamma_5$ é obtida tomando o produto de quatro matrizes Gamma do espaço-tempo de Minkowski. Três delas são do tipo espaço e portanto afetadas pela transformação de paridade. Como conseqüência, sob transformações de paridade, $\Gamma_5$ muda de sinal ($\Gamma_5 \mapsto -\Gamma_5$). Então $\Gamma_5$ é uma matriz pseudoscalar (no que se refere ao espaço-tempo standard de Minkowski). Os espinores de Weyl, construídos usando a projeção que envolve $\Gamma_5$, são não invariantes sob paridade: eles são espinores quirais ou antiquirais.

Para construir termos de Lagrangiano, que são escalares de Lorentz e que são produtos bilineares de espinores, necessitamos introduzir a noção de espinores barrados $\overline{\Psi}$, dado por $\Psi^T \cdot A$, onde $T$ denota transposição (lembrar que, de acordo com a nossa convenção, os espinores sem perda de generalidade, são considerados reais) e $A$ é uma matriz dada pelo produto de todas as matrizes gamma temporais .

Os termos cinético e massivo são da forma $\overline{\Psi}\Gamma^\mu\partial_\mu\Psi$ e $\overline{\Psi}\Psi$ respectivamente. Para estar presentes no Lagrangiano essas quantidades, é claro devem ser não nulas. Entretanto, os espinores são descritos por campos de Grassmann (campos anticomutantes) considerando-se o fato já mencionado de que eles obedecem o princípio de exclusão de Pauli. Para um campo de Grassmann $\psi$, $\psi^2 = 0$.

Um breve exame mostra que quando trabalhamos com espinores de Weyl, não podemos ter certeza de que os termos bilineares acima sejam não nulos. Um exercício muito instrutivo que deixo para o leitor consiste em computar quais espaços-tempos permitem a existência de espinores massivos tipo Weyl.

# 4 Supersimetria

Repetimos aqui que na natureza existem dois tipos de partículas, as bosônicas e as fermiônicas. Um dos grandes sucessos da Teoria Quântica de Campos é a correta predição da natureza de uma partícula qualquer associando sua estatística (bosônica ou fermiônica) a sua propriedade espinorial.

Do ponto de vista de uma teoria de unificação, é absolutamente natural a procura de uma explicação para ambos os tipos de partículas num único contexto. Diferentes possibilidades estão abertas. Podemos pensar no uso da propriedade que dois férmions se comportam como um bóson (uma conseqüência da propriedade tensorial de espinores, tal como $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 0 \oplus 1$) para tentar interpretar os bósons como estados ligados dos férmions. Esta possibilidade, que recebeu muita atenção, já não é mais considerada atraente.

Outra possibilidade muito mais atraente, consiste em procurar uma simetria que permita acomodar os bósons e os férmions dentro de um mesmo multipleto. Tal simetria é conhecida como "supersimetria".

Nos anos 60 acreditava-se que não era possível achar uma simetria com as partículas de diferente spin no mesmo multipleto. O famoso "no-go theorem"de Coleman-Mandula impedia tal acontecimento.

Entretanto, cada "no-go theorem"é aplicável se todas as suas hipóteses são satisfeitas, flexibilizando algumas hipóteses, podemos contornar o teorema. Na verdade o teorema de Coleman-Mandula não contemplou a extensão das simetrias fornecidas por álgebras graduadas relacionadas com supergrupos (construídos com variáveis comutantes e anticomutantes, variáveis de Grassmann). Tal extensão permite que partículas de spin inteiro e semi-inteiro (chamados bósons e férmions, que são descritas por usuais campos comutantes e campos anticomutantes) sejam acomodadas dentro de um único multipleto de transformações supersimétricas.

Físicos descobriram nos anos 70 a viabilidade teórica da supersimetria (até aqui, nenhuma evidência experimental da supersimetria foi observada). O esquema de Haag-Lopuszanski-Sohnius forneceu a classificação das álgebras da supersimetria, substituindo o teorema de Coleman-Mandula. A história é um pouco estranha devido ao fato de que esta classificação das álgebras supersimétricas fornecida por Haag-Lopuszanski-Sohnius nos anos 70 ainda não estava completa.

Não foi levada em conta, por exemplo, a existência de objetos estendidos que conduzem, em $D = 11$ dimensões, à álgebra-M.

De qualquer forma, nos anos 70 a supersimetria foi descoberta e revelou suas características interessantes. A presença de "milagrosos"(devidos à supersimetria e à contribuição oposta das partículas bosônicas e fermiônicas) cancelamentos das divergências nos gráficos de Feynman apontou para a possibilidade de encontrar uma teoria consistente da gravidade quântica. Sem dúvida, a supergravidade "comporta-se melhor"com relação à gravidade ordinária, mais ainda não é a resposta final (a supergravidade, tanto quanto a gravidade ordinária, é uma teoria não-renormalizável e nem todas as divergéncias dos gráficos de Feynman se cancelam com a supersimetria).

De qualquer forma, a supersimetria é necessária no contexto da teoria das cordas e permite confinar num setor não físico os estados taquiônicos presentes nas teorias de cordas. A teoria ordinária de cordas bosônicas implica a existência do taquion. Entretanto sua presença é problemática, devido à violação do princípio de causalidade de Einstein.

A teoria da supercorda fechada 10 dimensional oferece uma teoria que contém a gravidade e é finita em todas as ordens da sua expansão perturbativa, dada pela soma sobre todos os diferentes tipos de superfícies Riemanianas.

Para tentar explicar o que é a supersimetria, é melhor defini-la primeiro num contexto mais simples, como é o da mecânica quântica supersimétrica. Neste contexto, a supersimetria é caracterizada pela existência do operador $Q$, que é algo assim como a raiz quadrada do operador hamiltoniano $H$, a saber

$$Q^2 = H \tag{12}$$

vamos colocar este operador na forma de matriz hermitiana dada por

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & P \\ P^\dagger & 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

Portanto a hamiltoniana $H$ é dada por

$$Q = \begin{pmatrix} PP^\dagger & 0 \\ 0 & P^\dagger P \end{pmatrix} \tag{14}$$

Um ooperador de número do férmions $F$ pode ser definido de acordo com

$$F = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \tag{15}$$

As seguintes relações de (anti)-comutação são satisfeitas

$$[H, Q] = [H, F] = 0 \tag{16}$$

e

$$\{Q, F\} = 0 \tag{17}$$

(a última equação envolve o anticomutador, sendo ambos $Q$ e $F$ operadores fermiônicos).

Os "estados bosônicos"podem ser definidos como aqueles que admitem o valor próprio $+1$ para o operador de número fermiônico $F$, enquanto os "estados fermiônicos "correspondem ao valor próprio $-1$.

Para tal hamiltoniano supersimétrico $H$ é fácil provar que qualquer valor próprio positivo da energia admite um par de valores próprios degenerados, que estão numa correspondência de um para um; um mora no setor bosônico, e o outro no setor fermiônico. Isto é uma clara conseqüência da propriedade associativa

$$P(P^\dagger P) = (PP^\dagger)P \tag{18}$$

Sem dúvida, se $\Phi_n$ é um valor próprio de $P^\dagger P$ com valor próprio $\lambda_n > 0$, então $\Psi_n = P\Phi_n$ é um valor próprio de $PP^\dagger$ para o mesmo valor próprio $\lambda_n$ (e vice-versa).

Esta correspondência um a um entre um estado "bosônico"e um "fermiônico" é possível que seja quebrada para os autovalores 0 da energia (neste caso de fato $P\Phi_n = 0$). Um índice não trivial $I \neq 0$ pode aparecer sempre que o número de vetores próprios bosônicos que descrevem uma estado de vácuo degenerado é diferente do número de vetores próprios fermiônicos

$$I = dim(KerP) - dim(KerP^\dagger) \tag{19}$$

Os teoremas de índice que surgem de tal construção são muito importantes, tanto na Matemática pura quanto na Física (onde eles estão associados às anomalias, já discutidas na introdução).

Uma lição que temos aprendido deste exemplo simples de mecânica quântica unidimensional, é que numa teoria supersimétrica estados bosônicos e fermiônicos são emparelhados (deixando de lado as possíveis anomalias). Além disso, um número igual de estados bosônicos e fermiônicos são encontrados para um dado valor próprio $\lambda > 0$ de energia.

Numa teoria relativista mais elevada, tal resultado encontra uma contraparte. Neste caso não é mais a energia, mas a massa da partícula (uma quantidade invariante de Lorentz) que entra na equação. Numa teoria supersimétrica um igual número de estados bosônicos e fermiônicos são encontrados a cada nível de massa. Dito de outra maneira, partículas bosônicas e fermiônicas estão acopladas. A cada partícula ordinária está associado seu parceiro supersimétrico, de estatística oposta e igual massa (devido ao teorema de connexão spin-estatística os superparceiros diferem de um spin semi-inteiro). Isto certamente levanta uma questão natural. Onde vamos encontrar os parceiros supersimétricos das partículas conhecidas, uma vez que eles até agora nunca foram observados? A explicação usualmente aceita é que a supersimetria é uma simetria espontaneamente quebrada, isto é, esta admite um conjunto de estados de vácuo degenerado que não são mais invariantes por supersimetria. Sob esta condição, os parceiros supersimétricos das partículas ordinárias se tornam mais massivos que seus parceiros ordinários (a diferença de massa sendo relacionada à escala de quebra da supersimetria). Uma supersimetria espontâneamente quebrada pode dar conta do fato de que os parceiros supersimétricos da matéria ordinária ainda não foram observados experimentalmente.

A álgebra das supertranslações relativistas que atenda em dimensões mais altas a relação (12) requer ser formulada na forma covariante relativista. A energia $H$ nesse caso é a componente temporal do momentum $P_\mu$. O índice vetorial $\mu$ deve ser saturado para produzir uma quantidade escalar. Uma óbvia maneira de saturar o índice consiste em multiplicar $P_\mu$ com as matrizes Gamma da álgebra de Clifford $\Gamma^\mu$ (e fazendo a soma sobre índices repetidos de acordo com a convenção de Einstein).

Com relação aos geradores supersimétricos, eles são quantidades espinoriais e carregam os índices espinoriais. Então a álgebra relativista das supertranslações num espaço-tempo arbitrário pode ser postulada como se segue

$$\{Q_a, Q_b\} = (P_\mu \Gamma^\mu)_{ab} \tag{20}$$

Os índices espinoriais $a, b$ tomam valores $a, b = 1, \ldots, d$, onde $d$ é o tamanho da álgebra de Clifford correspondente (facilmente computada com a ajuda dos resultados das seções anteriores). Deve-se observar que enquanto os índices vetoriais $\mu, \nu$ crescem linearmente quando aumentamos a dimensionalidade $D$ do espaço-tempo, $\mu, \nu = 1, \ldots, D$, os índices espinoriais crescem com a potência de $D$, temos aproximadamente $d \sim 2^{\frac{D}{2}}$ (diferentes fatores adicionais são fixados em relação a assinatura do espaço-tempo de acordo com os resultados das seções anteriores, um fator $\frac{1}{2}$ extra está presente para spinores de Weyl, etc.). Se lembrarmos que a supersimetria requer igual número de bósons e férmions, está claro que a supersimetrização de uma dada teoria não é sempre possível, a menos que em algumas dimensões específicas. Em geral, existe uma dimensionalidade maximal que permite a construção de uma teoria supersimétrica. A teoria de superYang-Mills maximal existe em $D = 10$ dimensões, enquanto a supergravidade maximal está permitida para $D = 11$. Pode-se construir a supergravidade em espaços-tempos $D \leq 11$, mas não é possível ter uma supergravidade em $D > 11$. Isto naturalmente é uma forte indicação de que algo especial acontece em $D = 11$, onde a Teoria-M (que admite a supergravidade $D = 11$ no limite de baixa energia) é procurada.

Quando fazemos a redução dimensional das dimensões extras até, por exemplo, $D = 4$, obtemos uma supersimetria $N$-estendida (onde $N$ conta o número de supersimetrias presentes no modelo). A redução dimensional da teoria de superYang-Mills $D = 10$ leva a uma teoria de superYang-Mills $N = 4$ maximamente estendida em $D = 4$ dimensões, enquanto a redução dimensional da supergravidade $D = 10$ conduz a uma teoria de supergravidade $N = 8$ maximamente estendida em $D = 4$.

Se, mais adiante, reduzirmos dimensionalmente três coordenadas espaciais (por exemplo, congelando a dependência sobre elas), terminamos numa mecânica quântica supersimétrica estendida que admite $N = 16$ (para superYang-Mills), $N = 32$ (para supergravidade) respectivamente.

Sistemas mecânicos quânticos com $N$-supersimetrias estendidas são generalizações de (12) (que corresponde a $N = 1$) e satisfazem a álgebra

$$\{Q_i, Q_j\} = \delta_{ij} H \tag{21}$$

Onde $H$ é o hamiltoniano, como antes, e $i, j = 1, \ldots, N$. Em tais teorias temos $N$ geradores supersimétricos $Q_i$.

Tal álgebra lembra bastante a álgebra de Clifford Euclidiana. Realmente, de acordo com os resultados de [7], existe uma correspondência um a um entre as álgebras de Clifford Euclidianas do tipo Weyl (lembramos, os blocos não-nulos são antidiagonais) e os sistemas mecânicos quânticos supersimetricamente estendidos. A correspondência é tal que

$$D = N \tag{22}$$

e

$$d = n \tag{23}$$

Onde, no lado esquerdo, $D$ e $d$ denotam a dimensionalidade do espaço Euclidiano e o tamanho das correspondentes matrizes de Clifford respectivamente, enquanto no lado direito $N$ e $n$ denotam o número de supersimetrias estendidas e o número de estados (bosônicos e fermiônicos) num multipleto irredutível de uma representação da supersimetria estendida.

A correspondência é explícita se partindo de uma representação tipo Weyl da álgebra de Clifford como segue

$$\Gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \tilde{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix} \tag{24}$$

representamos os $N$ geradores supersimétricos da mecânica quântica supersimétrica como

$$Q_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \tilde{\sigma}_i H & 0 \end{pmatrix} \tag{25}$$

Pode-se verificar imediatamente que os geradores acima satisfazem a álgebra supersimétrica $N$-estendida.

O inverso também ocorre. A partir dos geradores supersimétricos chegamos a uma representação tipo Weyl da álgebra de Clifford correspondente.

Vamos terminar esta seção em relação à supersimetria com um último tópico, a introdução da $M$-álgebra em $D = 11$ dimensões. No espaço-tempo Minkowskiano de $D = 11$ ( com assinatura $(10, 1)$) e dos resultados das seções prévias, os espinores têm 32 componentes.

Quando tomamos os anticomutadores de dois espinores reais, como em (20), o resultado mais geral que podemos esperar consiste de uma matriz simétrica $32 \times 32$, que admite $32 + \frac{32 \cdot 31}{2} = 528$ componentes. Por outro lado, o lado direito de (20) é dado por somente 11 componentes e de nenhuma maneira satura o número 528. Onde seria possível acomodar os geradores extras que deveriam ser esperados no lado direito? Tomando o produto totalmente antisimetrizado das $k$ matrizes Gamma (há um total de $\left( \begin{array}{c} D \\ k \end{array} \right)$ de tais objetos) podemos construir a matriz $d \times d$ mais geral. A condição de que a matriz seja simétrica implica que o número total 528 é obtido fazendo a soma nos setores $k = 1$, $k = 2$ e $k = 5$, de forma que $528 = 11 + 55 + 462$. A álgebra supersimétrica em $D = 11$ mais geral pode então ser apresentada como

$$\{Q_a, Q_b\} = (C\Gamma_\mu)_{ab} P^\mu + (C\Gamma_{[\mu\nu]})_{ab} Z^{[\mu\nu]} + (C\Gamma_{[\mu_1 \dots \mu_5]})_{ab} Z^{[\mu_1 \dots \mu_5]} \qquad (26)$$

(onde $C = A$ é a matriz de carga).

$Z^{[\mu\nu]}$ e $Z^{[\mu_1 \dots \mu_5]}$ são cargas centrais tensoriais, de categoria 2 e 5 respectivamente. Cada termo central no lado direito corresponde a objetos estendidos, a P-brana. A álgebra (26) é também chamada álgebra-$M$, fornecendo uma generalização da álgebra supersimétrica ordinária (20).

# 5 Conclusão

Neste mini-curso introduzimos algumas estruturas matemáticas necessárias para investigar o programa da unificação das interações até agora conhecidas.

As estruturas aqui analisadas incluem as álgebras de Clifford, os espinores e a supersimetria. No caso das álgebras de Clifford, apresentamos uma análise completa, fornecendo um algoritmo que permite uma construção explícita das álgebras de Clifford para qualquer assinatura do espaço-tempo. A seguir mostramos como as propriedades das álgebras de Clifford refletem-se nas propriedades dos campos espinoriais que satisfazem a equação de Dirac generalizada ( em qualquer espaço-tempo). A noção de espinor de Weyl também foi introduzida e algumas das suas propriedades básicas foram analisadas.

Depois de ter introduzido os espinores, pudemos introduzir a noção de supersimetria. No início isto foi feito no contexto da mecânica quântica unidimensional, e depois no caso relativista, para um espaço-tempo arbitrário. A noção de supersimetria estendida foi introduzida e a conexão entre supersimetrias estendidas e as álgebras de Clifford (no caso Weyl) foi apontada. Como resultado final, apresentamos uma álgebra $D = 11$ dimensional de supersimetria generalizada, conhecida como álgebra-$M$, admitindo a presença de cargas centrais tensoriais associadas a objetos estendidos.

Precisaria salientar que um importante tópico discutido durante este mini-curso, não foi tratado aqui. Concerne à conexão entre as álgebras de Clifford e as supersimetrias estendidas com a álgebra divisionária dos números reais, complexos, quaternionicos e ainda dos números octoniônicos. Este tópico não foi inserido neste texto, tendo já sido discutido pelo autor em uma monografia (Notas de aula) ([5]). A referência fundamental referente à conexão entre álgebras divisionárias e supersimetrias estendidas é dada por ([8])

# 6 Agradecimentos

Agradeço aos estudantes de doutorado H.L. Carrion e M. Rojas por terem traduzido este texto da versão original em inglês para o português. Agradeço a Rosângela Castro por terem revisado essa versão.

# Referências

[1] M.B. Green, J.H. Schwarz, E. Witten, Superstring theory (2 volumes), Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1987).

[2] J. Polchinski, String Theory (2 volumes), Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1998).

[3] M. Kaku, Introduction to Superstrings and M-theory, (Springer, New York, 1998).

[4] F. Toppan, Elementary Topology, Monografia (notas de aula) CBPF-MO-004/02 (Rio de Janeiro, RJ, 2002).

[5] F. Toppan, Division Algebras and Physics, Monografia (notas de aula) CBPF-MO-002/01, (Rio de Janeiro, RJ, 2001).

[6] S. Okubo, Real representations of finite Clifford algebras.I. Classification, J. Math. Phys. **32**, 1657 (1991); II. Explicit construction and pseudo-octonion, *ibid.*, 1669.

[7] A. Pashnev, F. Toppan, On the Classification of N-Extended Supersymmetric Quantum Mechanical Systems, J. Math. Phys. **42**, 5257 (2001).

[8] T. Kugo, P. Townsend, Supersymmetry and the Division Algebras, Nucl. Phys. **B 221**, 357 (1983).