

José Monsair de Almeida Martucheli Junior

Processos radiativos de estados  
emaranhados na presença de fronteiras

**Rio de Janeiro**  
**2014**



José Monsair de Almeida Martucheli Junior

Processos radiativos de estados  
emaranhados na presença de fronteiras

Dissertação apresentada ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, para a obtenção de Título de Mestre em Física.

Orientador: Nami Fux Svaiter

**Rio de Janeiro**  
**2014**

José Monsair de Almeida Martucheli Junior.  
Processos radiativos de estados emaranhados na presença de fronteiras.

64 páginas.

Dissertação (Mestrado) - Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas. Coordenação de Física Teórica.

1. Efeito Unruh
2. Detector de Unruh-DeWitt
3. Emaranhamento

I. Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas. Coordenação de Física Teórica.

This is my principal objection to life, I think: It is too easy, when alive, to make perfectly horrible mistakes.

Kurt Vonnegut Jr., in *Deadeye Dick*.

## Agradecimentos

Ao meu orientador Nami, pela seriedade com que guia o grupo de pesquisa e pelo tema proposto.

A CAPES pelo apoio financeiro, e ao CBPF pelas condições de trabalho concedidas.

Aos colegas que foram essenciais para a realização desta dissertação - Enrike, Juan, Máx e Guilherme.

Aos colegas de sala e todos que fizeram parte de um cotidiano amável.

Aos velhos amigos e à minha família.

## *Resumo*

Nesta dissertação consideramos dois detectores de Unruh-DeWitt interagindo com um campo escalar sem massa, preparado inicialmente no estado de vácuo. Assumindo que os detectores percorrem uma trajetória inercial, calculamos a probabilidade por unidade de tempo próprio dos dois detectores decaírem do estado emaranhado simétrico ou anti-simétrico para o estado fundamental. Também consideramos a mudança trazida em tais taxas se introduzirmos espelhos (placas perfeitamente condutoras) no sistema.

**Palavras-chave:** efeito Unruh, emaranhamento, detector de Unruh-DeWitt

## *Abstract*

In this dissertation we consider two Unruh-DeWitt detectors interacting with a massless scalar field, initially in the vacuum state. Assuming that the detectors move in an inertial trajectory, we calculate the probability per unit proper time of the two detectors decaying from the symmetric or anti-symmetric state to the ground state. We also evaluate the change in such rates if we introduce mirrors in the system.

**Keywords:** Unruh effect, entanglement, Unruh-DeWitt detector

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>i</b>
<b>1 Quantização no espaço de Rindler e Efeito Unruh-Davies</b>	<b>1</b>
1.1 Referenciais uniformemente acelerados . . . . .	1
1.1.1 A trajetória de um observador uniformemente acelerado . . . . .	2
1.2 O tensor métrico no espaço de Rindler . . . . .	5
1.3 Quantização no espaço de Rindler . . . . .	8
1.3.1 Quantização de um campo escalar sem massa em um referencial uniformemente acelerado . . . . .	9
1.3.2 Transformações de Bogolyobov . . . . .	11
1.3.3 O efeito Unruh-Davies . . . . .	13
<b>2 Detector de Unruh-DeWitt e Efeito Unruh-Davies</b>	<b>15</b>
2.1 Modelo de Unruh-DeWitt de detector e teoria da perturbação . . . . .	16
2.2 Função resposta para o detector em repouso . . . . .	21
2.3 Detector uniformemente acelerado - O efeito Unruh-Davies . . . . .	26
2.4 Emissão espontânea ou estimulada e absorção de radiação na presença de um espelho . . . . .	27
2.4.1 Caso inercial . . . . .	28
2.4.2 Caso uniformemente acelerado . . . . .	31

2.5	Emissão espontânea na presença de dois espelhos . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Dois detectores de Unruh-DeWitt</b>	<b>34</b>
3.1	Emaranhamento e sistema de dois átomos de dois níveis de energia . . . .	34
3.2	Resolução do caso geral . . . . .	37
3.3	Detectores de posições fixas . . . . .	43
3.4	Emissão espontânea ou estimulada na presença de um espelho . . . . .	47
3.4.1	Detectores com posições fixas na presença de um espelho . . . . .	49
3.5	Emissão espontânea na presença de dois espelhos . . . . .	52
<b>4</b>	<b>Conclusões</b>	<b>55</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>57</b>
<b>A</b>	<b>Partículas quânticas e o Efeito Unruh</b>	<b>60</b>
A.1	O que partículas quânticas não são . . . . .	60
A.2	O que são partículas de Rindler? . . . . .	63

# Introdução

Na década de 1970 descobriu-se que um observador uniformemente acelerado movendo-se através do estado de vácuo no espaço de Minkowski observa uma radiação térmica análoga a radiação de um corpo negro, onde a temperatura é diretamente proporcional a aceleração do observador. Este efeito é comumente chamado de Efeito Unruh-Davies, ou *Efeito Unruh*, e foi descrito por Paul Davies em 1975 (Davies, 1975) e William George Unruh em 1976 (Unruh, 1976). Esses trabalhos se inserem dentro de um programa de investigar efeitos quânticos que ocorrem num espaço-tempo de curvatura zero sem se restringir a observadores inerciais. No primeiro capítulo desta dissertação faremos uma revisão teórica de uma dedução direta deste efeito, ao realizarmos a quantização de um campo escalar no espaço de Rindler e calcularmos o valor médio do operador número de partículas associadas a este campo no estado de vácuo no espaço-tempo de Minkowski.

Outra forma de derivar o efeito Unruh-Davies baseia-se em um modelo de detecção de partículas chamado detector de Unruh-DeWitt (DeWitt, 1975). Neste modelo acoplamos um campo quântico a um sistema de dois níveis que percorre uma trajetória clássica, inicialmente no estado fundamental. Caso o sistema se excite ao estado de maior energia dizemos que uma partícula foi detectada. No segundo capítulo averiguaremos que, para um detector cuja trajetória é uniformemente acelerada, o detector se excita como se estivesse em um banho térmico. Também consideraremos a influência da inclusão de uma ou duas placas infinitas perfeitamente condutoras (espelhos) sobre

as taxas de transição deste modelo.

No capítulo seguinte consideraremos dois detectores de Unruh-DeWitt, de forma que podemos incluir neste modelo um fenômeno que existe apenas para sistemas compostos por mais de uma partícula, o emaranhamento quântico (Schrödinger, 1935). É o objetivo principal desta dissertação calcular a taxa de decaimento de um estado emaranhado para o estado fundamental ou a taxa de excitação de um estado emaranhado para um estado de mais alta energia. Consideraremos mais uma vez a influência da inclusão de um ou dois espelhos no modelo.

Finalizaremos a dissertação com um resumo e contextualização de nossos resultados. Em um apêndice será feita uma revisão sobre o impacto do Efeito Unruh-Davies no entendimento da Teoria Quântica de Campos.

Exceto quando dito o contrário, utilizaremos o valor 1 para as constantes  $c$ ,  $\hbar$  e  $k_B$ . Os gráficos de funções foram feitos no software Wolfram Mathematica 6, enquanto as outras figuras no software Microsoft Paint. A dissertação foi escrita em  $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  com o uso do software  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ maker.

# Capítulo 1

## Quantização no espaço de Rindler e Efeito Unruh-Davies

### 1.1 Referenciais uniformemente acelerados

Nesta seção faremos uma revisão teórica. Quantizaremos um campo escalar no referencial de um observador uniformemente acelerado. Por simplicidade consideraremos um campo escalar sem massa em um espaço-tempo bi-dimensional, isto é, de 1+1 dimensões espaço-temporais. Iniciaremos revisando a importância de um referencial uniformemente acelerado e deduziremos a trajetória que um observador uniformemente acelerado percorre, trajetória esta utilizada ao longo da dissertação. O tratamento deste capítulo segue a referência [Koks \(2006\)](#).

Ao construirmos tanto a mecânica clássica newtoniana quanto a mecânica clássica relativística utilizamos primeiramente os referenciais inerciais, que estão todos movendo-se a velocidade constante em relação uns aos outros, e medidas de um referencial relacionam-se com as medidas de outro através da transformação de Galileu para a mecânica newtoniana ou a transformação de Lorentz para a mecânica relati-

vística. Uma forma de se saber em um referencial inercial é a ausência de forças de inércia, como a força centrífuga ou a força de Coriolis. Nesta dissertação é considerado o domínio relativístico.

Em referenciais inerciais as leis físicas assumem sua forma mais simples. No entanto, nosso referencial na Terra só pode ser considerado inercial para pequenos intervalos de tempo. É necessária, portanto, a construção da física de referenciais não inerciais. O primeiro passo é a construção de um referencial cujo movimento possui aceleração constante, se isto for fisicamente possível. Isto é, queremos descobrir como as medidas realizadas em um referencial se relacionam com as medidas relacionadas em outro.

Além de considerações práticas, referenciais não inerciais possuem interesse físico intrínseco - de acordo com o Princípio da Equivalência de Einstein, quando consideramos uma pequena região no espaço por um pequeno intervalo de tempo, o campo gravitacional presente nesta região leva aos mesmos efeitos físicos do que a presença em um referencial uniformemente acelerado sem a presença da gravitação. Como exemplo, descrever o fenômeno de queda livre na Terra em um referencial inercial é, para todos os efeitos, equivalente a descrever o mesmo fenômeno em um foguete no espaço com aceleração constante. Portanto, o estudo da física em um referencial uniformemente acelerado nos introduz a efeitos da gravitação.

### 1.1.1 A trajetória de um observador uniformemente acelerado

Nesta seção pretendemos obter a trajetória de um observador acelerado conforme visto por um referencial inercial. Para fazermos previsões sobre como se comportam objetos acelerados, precisamos introduzir um terceiro postulado, o Postulado do Relógio. Este postulado afirma que a física observada por um referencial acelerado é a mesma que a observada por um observador inercial naquele instante que compartilha a mesma posição e velocidade, observador este de em um referencial inercial momentaneamente comóvel (que, por brevidade, chamaremos de referencial comóvel a partir de agora). Por

exemplo, a medida de um relógio acelerado seria a mesma de um referencial comóvel a ele.

Uma forma alternativa de enunciar o Postulado do Relógio é dizer que, por um breve momento, o quanto um relógio acelerado se dilata em relação a um relógio parado também é dado pelo fator usual da relatividade restrita  $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$ , onde  $v$  é a velocidade do relógio acelerado medida pelo observador inercial. Em outras palavras, a aceleração ou derivadas superiores da velocidade não precisam ser levados em consideração. Tal postulado já foi verificado experimentalmente até acelerações da ordem  $10^{18}g$  (Bailey et al. (1977)).

Utilizando-se deste postulado podemos encontrar a linha de universo de um observador uniformemente acelerado em um referencial inercial. Na relatividade, naturalmente, um observador inercial não pode medir que um observador está sujeito a uma aceleração constante por todo o tempo - este último ultrapassaria a velocidade da luz. O que nós queremos é que a aceleração conforme medida pelo referencial comóvel seja constante,

$$\frac{d^2 x'}{dt'^2} = a, \quad (1.1)$$

onde o símbolo  $x'(t')$  é a posição do observador comóvel. Podemos expressar  $t'$  e  $x'$  em termos de  $t$  e  $x$  através de uma transformação de Lorentz, uma vez que é uma transformação entre referenciais inerciais, onde tratamos  $v$  e  $\gamma$  como constantes. Temos então

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{\dot{x} - v}{1 - v\dot{x}} \quad (1.2)$$

e

$$\frac{d^2 x'}{dt'^2} = \frac{\ddot{x}}{\gamma^3(1 - v\dot{x})^3}. \quad (1.3)$$

Como o nosso referencial é um referencial momentaneamente comóvel, para incor-

porar as sucessões de referenciais comóveis devemos trocar  $v$  por  $\dot{x}$ . Tendo isto em mente, e substituindo (1.3) em (1.1), temos

$$\frac{\ddot{x}}{(1 - \dot{x}^2)^{\frac{3}{2}}} = a. \quad (1.4)$$

Esta equação tem solução paramétrica em termos de funções hiperbólicas,

$$\begin{aligned} t &= a^{-1} \sinh b\lambda + c, \\ x &= a^{-1} \cosh b\lambda + d, \end{aligned} \quad (1.5)$$

onde  $d$ ,  $c$  e  $d$  são constantes quaisquer e  $\lambda$  algum parâmetro. Um parâmetro natural é o tempo próprio. Para ver isto, utilizaremos a invariância da métrica:

$$d\tau^2 = dt^2 - dx^2 = \frac{b^2}{a^2} d\lambda^2. \quad (1.6)$$

Logo, podemos escolher o parâmetro como  $\lambda = \tau + k$  e  $b = a$ , onde  $k$  é uma constante qualquer. Reescrevendo (1.5) em termos das condições iniciais, e sendo  $(x_0, t_0)$  quando  $\tau = \tau_0$ ,

$$\begin{aligned} t &= a^{-1} \sinh a(\tau + k) + t_0 - a^{-1} \sinh a(\tau_0 + k), \\ x &= a^{-1} \cosh a(\tau + k) + t_0 - a^{-1} \cosh a(\tau_0 + k), \end{aligned} \quad (1.7)$$

onde  $k$  é determinado pela velocidade inicial:  $dx/dt|_{\tau=\tau_0} = \tanh a(\tau_0 + k)$ . Para os propósitos desta dissertação, utilizaremos condições iniciais que simplificam nosso problema. Escolheremos  $t_0 = 0$ , quando também a velocidade e o tempo próprio serão zero, e  $x_0 = 1/a$ . Assim sendo, a trajetória se torna

$$\begin{aligned}t &= a^{-1} \sinh a(\tau), \\x &= a^{-1} \cosh a(\tau).\end{aligned}\tag{1.8}$$

Vemos que a linha de universo de um observador uniformemente acelerado é hiperbólica.

## 1.2 O tensor métrico no espaço de Rindler

Nesta seção será construído o tensor métrico no espaço de Rindler. O tratamento desta apêndice segue a referência [Mukhanov and Winitzki \(2007\)](#). Esta construção será facilitada se, ao invés de coordenadas cartesianas, utilizarmos as coordenadas do cone de luz

$$u \equiv t - x, v \equiv t + x.\tag{1.9}$$

A métrica então se torna

$$ds^2 = dudv = g_{\alpha\beta}^M dx^\alpha x^\beta,\tag{1.10}$$

onde os índices  $\alpha$  e  $\beta$  vão de 0 a 1, e o tensor métrico é dado por

$$g_{\alpha\beta}^M = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}.\tag{1.11}$$

Ao procurarmos a métrica do sistema de coordenadas  $(\xi^0, \xi^1)$ , que se move conjuntamente com o observador uniformemente acelerado, tentaremos obter uma métrica conformalmente plana:

$$ds^2 = \Omega^2(\xi^0, \xi^1) [(d\xi^0)^2 - (d\xi^1)^2], \quad (1.12)$$

onde  $\Omega(\xi^0, \xi^1)$  é uma função a ser determinada. O intuito em procurarmos uma métrica conformalmente plana será explicado na próxima seção. Novamente utilizaremos coordenadas do cone de luz,

$$\tilde{u} \equiv \xi^0 - \xi^1, \quad \tilde{v} \equiv \xi^0 + \xi^1. \quad (1.13)$$

A métrica agora assume a forma

$$ds^2 = \Omega^2(\tilde{u}, \tilde{v}) d\tilde{u}d\tilde{v}. \quad (1.14)$$

Uma vez que a distância ao quadrado é um invariante, temos também

$$ds^2 = dudv. \quad (1.15)$$

Assim sendo, percebemos que as funções  $u(\tilde{u}, \tilde{v})$  e  $v(\tilde{u}, \tilde{v})$  só podem depender de um de seus argumentos,  $\tilde{u}$  ou  $\tilde{v}$ ; de outra forma, surgiriam termos não proporcionais a  $d\tilde{u}d\tilde{v}$ . Como o papel das funções são intercambiáveis, podemos escolher. Façamos uma escolha, então:

$$u = u(\tilde{u}), \quad v = v(\tilde{v}). \quad (1.16)$$

Para determinar tais funções, consideremos a trajetória no sistema de coordenadas cartesiano, e façamos uma regra da cadeia:

$$\frac{du(\tau)}{d\tau} = \frac{du(\tilde{u})}{d\tilde{u}} \frac{d\tilde{u}(\tau)}{d\tau}. \quad (1.17)$$

De nosso resultado da equação de movimento na seção anterior (1.8), podemos

determinar

$$\frac{du(\tau)}{d\tau} = e^{-a\tau} = -au(\tau). \quad (1.18)$$

Para determinar  $\frac{d\tilde{u}(d\tau)}{d\tau}$ , lembremos que, na linha de universo do observador

$$\xi^0(\tau) = \tau. \quad (1.19)$$

e escolheremos o início do movimento na origem ( $\xi^1(\tau) = 0$ ). De onde deduzimos, a partir de (1.13), que  $\tilde{v}(\tau) = \tilde{u}(\tau) = \tau$ . Logo

$$\frac{d\tilde{u}(\tau)}{d\tau} = 1. \quad (1.20)$$

Substituindo (1.20) e (1.18) em (1.17):

$$\frac{du}{d\tilde{u}} = -au. \quad (1.21)$$

Logo

$$u = C_1 e^{-a\tilde{u}}, \quad (1.22)$$

onde  $C_1$  é uma constante de integração. Similarmente nós achamos para  $v(\tilde{v})$ :

$$v = C_2 e^{a\tilde{v}}. \quad (1.23)$$

Para determinarmos as constantes, diferenciamos (1.22) e (1.23) e substituímos em (1.15),

$$ds^2 = -C_1 C_2 a^2 e^{-a(\tilde{u}-\tilde{v})} d\tilde{v} d\tilde{u}. \quad (1.24)$$

Tendo em consideração que a condição  $\tilde{v}(\tau) = \tilde{u}(\tau) = \tau$  implica  $\Omega^2(\tilde{u}(\tau), \tilde{v}(\tau)) = 1$ , obtemos, comparando com (1.13):

$$a^2 C_1 C_2 = -1. \quad (1.25)$$

Escolhendo  $C_2 = -C_1$ , obtemos

$$u = -\frac{e^{-a\tilde{u}}}{a}, \quad v = \frac{e^{a\tilde{v}}}{a}, \quad (1.26)$$

e

$$ds^2 = dudv = e^{a(\tilde{v}-\tilde{u})} d\tilde{u}d\tilde{v}. \quad (1.27)$$

Retornando às variáveis originais, obtemos

$$t(\xi^0, \xi^1) = a^{-1} e^{a\xi^1} \sinh a\xi^0, \quad x(\xi^0, \xi^1) = a^{-1} e^{a\xi^1} \cosh a\xi^0. \quad (1.28)$$

A métrica no referencial acelerado é, finalmente,

$$ds^2 = e^{2a\xi^1} [(d\xi^0)^2 - (d\xi^1)^2]. \quad (1.29)$$

Pode ser conferido diretamente que o espaço-tempo de Rindler tem curvatura zero, o que é esperado, uma vez que este é localmente equivalente ao espaço de Minkowski.

### 1.3 Quantização no espaço de Rindler

Finalmente, faremos a quantização de um campo escalar sem massa em um espaço-tempo bi-dimensional, isto é, de 1+1 dimensões espaço-temporais. Para realizar esta quantização é necessária a construção do tensor métrico no espaço de Rindler, construção esta feita no apêndice 1.2. De posse da métrica, resolveremos a equação de movimento do campo  $\hat{\phi}(x,t)$  através de uma expansão de ondas planas, para, enfim,

investigarmos se para um observador uniformemente acelerado o vácuo associado ao espaço-tempo de Minkowski também é um estado sem partículas.

O tratamento desta seção seguirá a referência [Mukhanov and Winitzki \(2007\)](#).

### 1.3.1 Quantização de um campo escalar sem massa em um referencial uniformemente acelerado

Para realizarmos a quantização de um campo no espaço de Rindler, reescreveremos sua ação como uma equação válida para todos os sistemas de referência, isto é, com as derivadas ordinárias sendo substituídas por derivadas covariantes e o elemento de volume sendo substituído por um elemento de volume invariante. Realizaremos a quantização de um campo escalar sem massa, cuja ação é

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \int g^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} \sqrt{-g} d^2x. \quad (1.30)$$

Seja  $(\xi^0, \xi^1)$  o sistema de coordenadas do referencial uniformemente acelerado. No apêndice 1.2 é visto que o tensor métrico expresso nestas coordenadas é conformalmente plano. Perante uma transformação conforme,

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = \Omega^2(x^\gamma) g_{\alpha\beta}$$

temos que o determinante  $\sqrt{-g}$  se transforma como  $\sqrt{-\tilde{g}} = \Omega^2 \sqrt{-g}$ , enquanto a métrica contravariante se transforma como  $\tilde{g}^{\alpha\beta} = \Omega^{-2} g^{\alpha\beta}$ . Assim sendo, os fatores  $\Omega$  se cancelam, de forma que as equações nos dois sistemas de coordenadas são similares:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int [(\partial_t \phi)^2 - (\partial_x \phi)^2] dt dx \\ &= \frac{1}{2} \int [(\partial_{\xi^0} \phi)^2 - (\partial_{\xi^1} \phi)^2] d\xi^0 d\xi^1. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Tal fato nos permite afirmar que, se é verdade que se ao realizarmos a quantização canônica no espaço de Minkowski do campo  $\hat{\phi}$  obtemos uma expansão de ondas planas com operadores de criação e destruição, também o é no espaço de Rindler.

Em coordenadas do cone de luz (sendo  $u = t - x$ ,  $v = t + x$ ,  $\tilde{v} = \xi_0 + \xi_1$  e  $\tilde{u} = \xi_0 - \xi_1$ ), a ação se escreve

$$S = 2 \int \partial_u \phi \partial_v \phi du dv = 2 \int \partial_{\tilde{u}} \tilde{u} \phi \partial_{\tilde{v}} \tilde{v} \phi d\tilde{u} d\tilde{v}. \quad (1.32)$$

As equações de campo

$$\partial_u \partial_v \phi = 0, \quad \partial_{\tilde{u}} \partial_{\tilde{v}} \phi = 0 \quad (1.33)$$

tem como soluções

$$\phi(u, v) = A(u) + B(v), \quad \phi(\tilde{u}, \tilde{v}) = \tilde{A}(\tilde{u}) + \tilde{B}(\tilde{v}). \quad (1.34)$$

Uma solução particular desta equação é uma onda plana, sendo  $A(u = t - x)$  e  $\tilde{A}(\tilde{u} = \xi_0 - \xi_1)$  as soluções correspondente a uma onda movendo-se da esquerda para a direita, e  $B(v = t + x)$  e  $\tilde{B}(\tilde{v} = \xi_0 + \xi_1)$  uma onda movendo-se da direita para a esquerda. Já que as soluções tem a forma (1.34), as soluções não afetam uma a outra e podem ser consideradas separadamente. Por simplicidade, a partir de agora escreveremos apenas os modos referentes ao movimento da esquerda para a direita.

Já quantizada, a solução geral é usualmente escrita como

$$\begin{aligned} \hat{\phi} &= \int \frac{dw}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{2w}} \left[ e^{-i\omega u} \hat{a}(w) + e^{+i\omega u} \hat{a}^\dagger(w) \right] \\ &= \int \frac{d\Omega}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} \left[ e^{-i\Omega \tilde{u}} \hat{b}(\Omega) + e^{i\Omega \tilde{u}} \hat{b}^\dagger(\Omega) \right], \end{aligned} \quad (1.35)$$

onde a álgebra dos operadores de criação e destruição é dada por:

$$[\hat{a}(w), \hat{a}^\dagger(w')] = \delta(w - w'), \quad [\hat{b}(\Omega), \hat{b}^\dagger(\Omega')] = \delta(\Omega - \Omega'). \quad (1.36)$$

Ao terminarmos esta quantização, um dilema aparece: o vácuo no referencial inercial é definido como o estado ao qual a aplicação de qualquer operador de destruição, independente de sua frequência, resulta em zero, o que corresponderia ao estado “sem partículas”. Mas também podemos definir um vácuo no referencial de Rindler, onde os seus operadores de destruição que fariam parte da definição de vácuo. Temos, portanto, duas definições de vácuo distintas, uma para cada referencial. Podemos então fazer a seguinte pergunta: será que o vácuo associado ao espaço de Minkowski também é um estado sem partículas para um observador no espaço de Rindler? Isto é, qual será o valor médio do operador número,

$$\langle \hat{N} \rangle = \langle 0_M | \hat{b}^\dagger(\Omega) \hat{b}(\Omega) | 0_M \rangle = ? \quad (1.37)$$

Para responder esta pergunta, precisaremos da relação entre os distintos operadores de criação e destruição.

### 1.3.2 Transformações de Bogolyobov

Os operadores de criação e destruição de ambos os referenciais estão relacionados por transformações lineares, chamadas de transformações de Bogolyobov:

$$\hat{b}(\Omega) = \int_0^\infty dw [\alpha_{\Omega w} a(w) - \beta_{\Omega w} \hat{a}^\dagger(w)]. \quad (1.38)$$

A transformação do operador de criação  $\hat{b}^\dagger(\Omega)$  é dada pelo conjugado complexo da expressão acima.

Substituindo a transformação dos operadores em seu comutador, isto é, substituindo

(1.38) em (1.36), inferimos a condição de normalização

$$\int_0^\infty (\alpha_{\Omega w} \alpha_{\Omega' w}^* - \beta_{\Omega w} \beta_{\Omega' w}^*) = \delta(\Omega - \Omega'). \quad (1.39)$$

Para acharmos os coeficientes  $\alpha_{\Omega w}$  e  $\beta_{\Omega w}$ , substituímos (1.38) em (1.35), e comparando ambos os lados obtemos

$$\frac{e^{-iwu}}{\sqrt{w}} = \int_0^\infty \frac{d\Omega'}{\sqrt{\Omega'}} (\alpha_{\Omega' w} e^{-i\Omega' \tilde{u}} - \beta_{\Omega' w}^* e^{i\Omega' \tilde{u}}). \quad (1.40)$$

Multiplicando ambos os lados por  $e^{\pm i\Omega \tilde{u}}$  e integrando sobre  $\tilde{u}$  obtemos por fim os coeficientes isolados:

$$\alpha_{\Omega w} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\Omega}{w}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iwu+i\Omega \tilde{u}} d\tilde{u}, \quad (1.41)$$

$$\beta_{\Omega w} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\Omega}{w}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+iwu+i\Omega \tilde{u}} d\tilde{u}. \quad (1.42)$$

Deduziremos, agora, uma relação que será utilizada na próxima seção. Substituindo (1.26) em (1.41),

$$\alpha_{\Omega w} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\Omega}{w}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(+i\Omega u + i\frac{w}{a} e^{-au})} du. \quad (1.43)$$

Deslocando o contorno por  $u = -i\pi a^{-1} + t$  obtemos

$$\begin{aligned} \alpha_{\Omega w} &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\Omega}{w}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{(i\Omega t + \frac{\pi w}{a} - \frac{iw}{a} e^{-at})} \\ &= e^{\frac{\pi\Omega}{a}} \beta_{\Omega w}. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Resta justificar se este contorno é permitido. O integrando não tem singularidades, então basta mostrar que o integrando é zero quando  $u \rightarrow \pm\infty - i\alpha$ ,  $0 < \alpha < \pi a^{-1}$ .

Para  $u = t - i\alpha$ ,  $t \rightarrow -\infty$ , temos

$$\lim_{u \rightarrow -\infty - i\alpha} \Re\left(\frac{iw}{a} e^{-au}\right) = - \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{w}{a} e^{-at} \operatorname{sen} \alpha a = -\infty, \quad (1.45)$$

uma vez que  $\operatorname{sen} \alpha$  é negativo para  $0 < \alpha < \pi a^{-1}$ . Para  $u \rightarrow \infty - i\alpha$ , a integral não converge e deve ser regularizada, por exemplo, inserindo um fator  $e^{-bu^2}$  com  $b > 0$ . O resultado é justificado, portanto, no sentido de ser uma distribuição.

### 1.3.3 O efeito Unruh-Davies

Podemos finalmente responder a pergunta: o que um observador uniformemente acelerado com um detector de partículas detecta no vácuo de Minkowski? Calculemos, então, o valor médio do operador número:

$$\langle \hat{N} \rangle = \langle 0_M | \hat{b}^\dagger(\Omega) \hat{b}(\Omega) | 0_M \rangle = \int dw |\beta_{w\Omega}|^2. \quad (1.46)$$

Para  $\Omega' = \Omega$  a condição de normalização se torna

$$\int_0^\infty dw (|\alpha_{\Omega w}|^2 - |\beta_{\Omega w}|^2) = \delta(0), \quad (1.47)$$

e, tendo em consideração a relação (1.44), obtemos

$$\langle \hat{N} \rangle = \left[ e^{\frac{2\pi\Omega}{a}} - 1 \right]^{-1} \delta(0). \quad (1.48)$$

O fator divergente  $\delta(0)$  surgiu devido ao volume infinito do espaço. Se a quantização fosse feita em uma caixa de volume finito  $V$ , os momentos seriam discretizados e  $\delta(0) = V$ . Logo a densidade média de partículas com frequência  $\Omega$  seria

$$n_\Omega = \frac{\hat{N}}{V} = \left[ e^{\frac{2\pi\Omega}{a}} - 1 \right]^{-1}. \quad (1.49)$$

Concluimos, portanto, que um observador uniformemente acelerado no vácuo de Minkowsky detecta um banho térmico de partículas com temperatura  $\frac{a}{2\pi}$  - o chamado Efeito Unruh-Davies. Uma breve discussão sobre as consequências do Efeito Unruh-Davies acerca da interpretação da teoria quântica de campos será dada em um apêndice.

Caso não utilizássemos coordenadas onde  $\hbar = c = k_B = 1$  a temperatura de Unruh seria dada por

$$T = \frac{\hbar a}{2\pi c k_B}. \quad (1.50)$$

Como exemplo, uma água contida em um recipiente seria evaporada se acelerássemos o recipiente; seria necessário uma aceleração da ordem  $|\vec{a}| \approx 10^{22} \frac{m}{s^2}$ , no entanto. A energia necessária para tal viria do que sustenta o movimento uniformemente acelerado.

## Capítulo 2

# Detector de Unruh-DeWitt e Efeito Unruh-Davies

Neste e no próximo capítulo abordaremos a ambiguidade na definição de partícula de uma forma diferente. Ao invés de tentarmos definir o que é uma “partícula”, perguntaremos “o que é um detector de partículas e o que significa detectar uma partícula?”, isto é, tomaremos a visão conceitual de que o conteúdo de partículas de um campo não está bem definido quando o campo está isolado, mas apenas por interações do campo com um detector.

Para responder tais perguntas, utilizaremos um modelo de detector de partículas chamado detector de Unruh-DeWitt. Este detector consiste em um campo escalar acoplado a um sistema de dois níveis através de uma hamiltoniana de interação proporcional ao momento de monopolo do detector e ao próprio campo, onde a trajetória percorrida pelo detector é clássica e dada por uma função  $x(\tau)$  qualquer, e dizemos que o detector detecta uma partícula se houver a transição do estado fundamental ao estado excitado, e que ele emite uma partícula para a transição inversa. De posse deste modelo poderemos responder se tal detector detecta partículas no vácuo de Minkowski.

Ao utilizarmos teoria da perturbação podemos calcular a probabilidade desta tran-

sição por unidade de tempo, inclusive para um observador uniformemente acelerado - e aí podemos averiguar se este observador detecta partículas se o estado inicial for o vácuo. Este é o plano geral deste capítulo, que seguirá as referências [Svaiter et al. \(1994\)](#), [Svaiter and Svaiter \(1992\)](#) e [Schlicht \(2004\)](#).

## 2.1 Modelo de Unruh-DeWitt de detector e teoria da perturbação

Nosso detector será um sistema idealizado de dois níveis, que se move em uma trajetória  $t = t(\tau), x = x(\tau)$ . Chamaremos os estados possíveis ao detector de estado fundamental  $|g\rangle$  e estado excitado  $|e\rangle$ . A hamiltoniana  $H_D$  do detector é diagonal com respeito a base  $|g\rangle$  e  $|e\rangle$ , isto é

$$H_D |g\rangle = w_g |g\rangle, \quad H_D |e\rangle = w_e |e\rangle, \quad (2.1)$$

onde  $w_g$  é a energia do estado fundamental e  $w_e$  a energia do estado excitado.

Consideraremos também um campo escalar sem massa, que será acoplado com o detector e cuja evolução temporal é dada pela expansão do campo em ondas planas ([Greiner et al., 1997](#), p. 77)

$$\phi(\vec{x}, t) = \int d^3p \frac{1}{\sqrt{2w(\vec{p})(2\pi)^3}} (\hat{a}(\vec{p})e^{-ipx} + \hat{a}^\dagger(\vec{p})e^{ipx}), \quad (2.2)$$

onde  $w(\vec{p})$  é a frequência, que, pela relação de Einstein, é igual ao módulo do vetor de onda para um campo sem massa, e  $\hat{a}^\dagger(\vec{p})$  e  $\hat{a}(\vec{p})$  são operadores de criação e destruição, cuja álgebra é dada por

$$[\hat{a}(\vec{p}), \hat{a}^\dagger(\vec{p}')] = \delta(\vec{p} - \vec{p}') \quad \text{e} \quad [\hat{a}(\vec{p}), \hat{a}(\vec{p}')] = [\hat{a}^\dagger(\vec{p}), \hat{a}^\dagger(\vec{p}')] = 0. \quad (2.3)$$

O espaço de Hilbert deste sistema é dado pelo produto tensorial do espaço de Hilbert do campo e o espaço de Hilbert bi-dimensional associado ao detector, isto é,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_D \otimes \mathcal{H}_C. \quad (2.4)$$

A hamiltoniana do sistema por sua vez é dada por

$$H = H_L + H_{int} = H_D \otimes I_C + I_D \otimes H_C + H_{int}, \quad (2.5)$$

onde  $H_L$  é a hamiltoniana do livre do sistema,  $H_C$  a hamiltoniana do campo livre e  $H_{int}$  a hamiltoniana de interação, dada por

$$H_{int} = c_1 m(\tau) \phi(x(\tau), \tau), \quad (2.6)$$

onde  $x(\tau)$  é a trajetória percorrida pelo detector,  $m(\tau)$  é o momento de monopolo do detector e  $c_1$  é uma constante de acoplamento. Esta hamiltoniana de interação é análoga a hamiltoniana de interação entre um átomo e um campo eletromagnético quando realizamos a aproximação de dipolo elétrico (Loudon, 2000, p. 161). No nosso caso, estamos considerando a interação com um campo escalar.

Mostraremos agora quais processos esta interação permite. Escrevendo o momento de monopolo na base dos autoestados da hamiltoniana temos

$$m(\tau) = m_{12}(\tau) S^+ + m_{21}(\tau) S^-, \quad (2.7)$$

onde  $S^+ = |e\rangle \langle g|$  e  $S^- = |g\rangle \langle e|$  são operadores de criação e destruição dos autoestados do detector, respectivamente. Os termos  $m_{ij}$  onde  $i = j$  são naturalmente nulos, uma vez que são elementos de matrizes do operador de paridade ímpar  $m(\tau)$ .

Reescrevendo (2.6) utilizando-se de (2.7) e  $\phi(\tau, \vec{x}) = \phi^+(\tau, \vec{x}) + \phi^-(\tau, \vec{x})$ , onde  $\phi^+$  destrói partículas e  $\phi^-$  cria partículas, temos

$$\begin{aligned}
 H_{int} = c_1 & \left( m_{12}(\tau) S^+ \phi^+(\tau, \vec{x}) + m_{12}(\tau) S^+ \phi^-(\tau, \vec{x}) + \right. \\
 & \left. + m_{21}(\tau) S^- \phi^+(\tau, \vec{x}) + m_{21}(\tau) S^- \phi^-(\tau, \vec{x}) \right). \quad (2.8)
 \end{aligned}$$

Os quatro processos possíveis estão representados na figura abaixo. O primeiro e o quarto processo violam a conservação da energia, e esperamos que eles sejam possíveis apenas para intervalos de tempo que satisfaçam  $\Delta E \Delta \tau < 1$ .

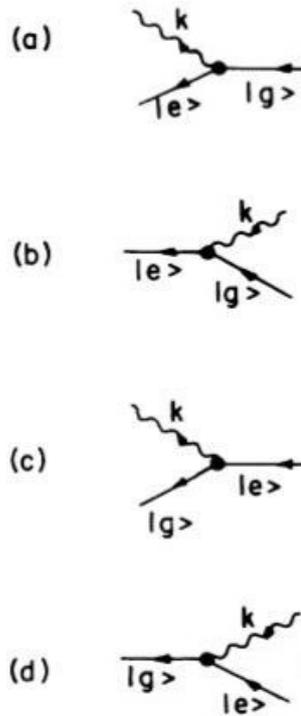


Figura 2.1: Representação por diagramas dos quatro processos possíveis: absorção ou emissão do quantum de um campo com excitação ou decaimento do detector. Figura retirada da referência [Svaiter and Svaiter \(1992\)](#).

Resolveremos agora o problema proposto, utilizando o referencial próprio do detector. Como a dinâmica dos operadores do caso sem interação é bem determinada,

utilizaremos a representação de interação e faremos uma expansão em primeira ordem em teoria da perturbação. Assim sendo,  $c_1$  deve ser pequeno o suficiente para a expansão ser plausível.

Para tal, vamos supor que a interação começa em  $\tau_i$  e termina em  $\tau$ , e queremos determinar o operador de evolução unitária

$$|\tau\rangle = U(\tau, \tau_i) |\tau_i\rangle \quad (2.9)$$

sujeito à condição  $U(\tau_i, \tau_i) = I$ . Na representação de interação, a evolução deste operador é gerada pela hamiltoniana de interação:

$$i \frac{d}{d\tau} U(\tau, \tau_i) = H_{int}(\tau) U(\tau, \tau_i). \quad (2.10)$$

Integrando a equação acima em relação a  $\tau$  chegamos a

$$U(\tau, \tau_i) = 1 - i \int_{\tau_i}^{\tau} H_{int}(\tau') U(\tau', \tau_i) d\tau'. \quad (2.11)$$

Podemos resolver esta equação aproximadamente por iteração:

$$\begin{aligned} U(\tau, \tau_o) = & 1 - i \int_{\tau_i}^{\tau} d\tau' H_{int}(\tau') + (-i)^2 \int_{\tau_i}^{\tau} d\tau' \int_{\tau_i}^{\tau'} d\tau'' H_{int}(\tau') H_{int}(\tau'') \\ & + \dots + (-i)^n \int_{\tau_i}^{\tau} d\tau' \int_{\tau_i}^{\tau'} d\tau'' \dots \int_{\tau_i}^{\tau^{n-1}} d\tau^{(n)} H_{int}(\tau') H_{int}(\tau'') \dots H_{int}(\tau^{(n)}) + \dots \end{aligned} \quad (2.12)$$

Considerando a evolução temporal até o tempo  $\tau_f$  em que a interação é interrompida, o operador de evolução unitária é escrito em primeira ordem na aproximação acima

como

$$U(\tau_f, \tau_i) = 1 - i \int_{\tau_i}^{\tau_f} H_{int}(\tau) d\tau. \quad (2.13)$$

A amplitude de probabilidade para a transição entre o estado inicial  $|g\rangle \otimes |\phi_i\rangle$  para o estado final  $|e\rangle \otimes |\phi_f\rangle$  é

$$\langle e| \otimes \langle \phi_f| U(\tau_i, \tau_f) |g\rangle \otimes |\phi_i\rangle = -ic_1 \int_{\tau_i}^{\tau_f} \langle e| m(\tau) |g\rangle \langle \phi_f| \phi(x, \tau) |\phi_i\rangle d\tau. \quad (2.14)$$

Intencionamos calcular a probabilidade para a transição  $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$  independente de qual seja o estado final do campo. Considerando que a evolução temporal de  $m(\tau)$  na representação de interação é dada por

$$m(\tau) = e^{iH_0\tau} m(0) e^{-iH_0\tau}, \quad (2.15)$$

podemos determinar esta probabilidade realizando o módulo da expressão (2.14), somando sobre todos os campos finais possíveis e utilizando de sua relação de completudeza, encontrando

$$P(E, \tau_i, \tau_f)_{|g\rangle \rightarrow |e\rangle} = c_1^2 |\langle e| m(0) |g\rangle|^2 F(E, \tau_i, \tau_f), \quad (2.16)$$

onde  $c_1^2 |\langle e| m(0) |g\rangle|^2$  é uma constante que depende da estrutura interna do detector chamada de seletividade e  $F(E, \tau_f, \tau_i)$  é a função resposta, dada por

$$F(E, \tau_f, \tau_i) = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau' e^{-iE(\tau-\tau')} \langle \phi_i| \phi(x(\tau)) \phi(x(\tau')) |\phi_i\rangle, \quad (2.17)$$

onde  $E = w_e - w_g$ . No nosso caso, consideraremos como estado inicial do campo o vácuo. A função  $\langle 0| \phi(x(\tau)) \phi(x(\tau')) |0\rangle$  é conhecida como função de Wightman, aqui calculada na trajetória percorrida pelo detector.

Podemos calcular a função de Wightman utilizando-se da expansão do campo em ondas planas (2.2). Considerando esta expansão, chegamos a uma forma integral para a função de Wightman  $G^+(x, x')$ :

$$G^+(x, x') = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ip(x-x')}}{2|\vec{p}|}. \quad (2.18)$$

Como o integrando é oscilatório, esta integral não converge em um sentido clássico. A forma padrão de regularização é realizar a substituição  $t \rightarrow t - i\epsilon$ , ou, equivalentemente, introduzir um cutoff  $e^{-\epsilon|\vec{p}|}$ . Em ambos os casos tomamos o limite  $\epsilon \rightarrow 0$  após a integração realizada na função resposta (2.17).

Utilizando este método, após integrarmos a expressão (2.18) considerando o teorema dos resíduos chegamos a

$$G^+(x, x') = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{(t - t' - i\epsilon)^2 - (|\vec{x} - \vec{x}'|)^2}. \quad (2.19)$$

Esta forma da função de Wightman deve ser entendida como uma distribuição. Na subseção seguinte calcularemos a função resposta para trajetórias específicas percorridas pelo detector, onde mudaremos as coordenadas de (2.19) para o referencial próprio do detector se necessário.

## 2.2 Função resposta para o detector em repouso

Como primeiro exemplo, tratemos de calcular a função de Wightman para um detector em repouso

$$t(\tau) = \tau, \quad x(\tau) = x_0, \quad (2.20)$$

onde  $x_0$  é uma constante. Substituindo (2.20) em (2.19) obtemos

$$G^+(\tau, \tau') = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{(\tau - \tau' - i\epsilon)^2}. \quad (2.21)$$

Substituindo (2.21) em (2.17) obtemos

$$F(E, \tau_f, \tau_i) = -\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau' e^{-iE(\tau - \tau')} \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{(\tau - \tau' - i\epsilon)^2}. \quad (2.22)$$

Realizemos uma mudança de variáveis na integral; de  $\tau$  e  $\tau'$  para  $\sigma = \tau - \tau'$  e  $\lambda = \tau + \tau'$ , onde a antiga e nova região de integração é dada pela figura abaixo.

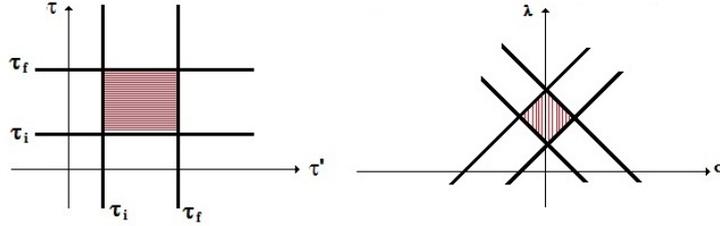


Figura 2.2: Regiões de integração.

Desta forma, a função resposta se escreve

$$F(E, \tau_f, \tau_i) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\Delta\tau}^{\Delta\tau} d\sigma \int_{2\tau_i + |\sigma|}^{2\tau_f - |\sigma|} d\lambda \frac{e^{iE\sigma}}{2(\sigma - i\epsilon)^2}, \quad (2.23)$$

onde  $\Delta\tau = \tau_f - \tau_i$ . Após realizarmos a integral em  $\lambda(\tau, \tau')$  temos

$$F(E, \Delta\tau) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\Delta\tau}^{\Delta\tau} d\sigma (\Delta\tau - |\sigma|) \frac{e^{-iE\sigma}}{(\sigma - i\epsilon)^2}. \quad (2.24)$$

Além de ser mal comportada, esta função pode assumir valores negativos para  $|E|\Delta\tau > 1$  (Svaiter and Svaiter, 1992), o que é sem sentido para probabilidades. Este problema surge do fato da aproximação de primeira ordem ser válida apenas para pequenos valores de  $\Delta\tau$ .

Para obtermos uma função bem comportada, definiremos uma taxa de transição instantânea  $R'(E, \Delta\tau) = \frac{\partial F(E, \Delta\tau)}{\partial \Delta\tau}$ , que é a probabilidade de transição por unidade de

tempo próprio em que o detector opera<sup>1</sup>, a menos de um fator de normalização dado pela seletividade do detector. Nesta dissertação reservaremos a notação  $R$  (isto é, sem o apóstrofo) quando consideramos a taxa normalizada.

Para calcularmos a derivada  $R'(E, \Delta\tau) = \frac{\partial F(E, \Delta\tau)}{\partial \Delta\tau}$ , precisaremos do segundo teorema fundamental do cálculo (Apostol, 1967):

$$\frac{d}{dx} \left( \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt \right) = f(x, b(x)) b'(x) - f(x, a(x)) a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} f_x(x, t) dt. \quad (2.25)$$

Assim sendo,

$$R'(E, \Delta\tau) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\Delta\tau}^{\Delta\tau} d\sigma \frac{e^{-iE\sigma}}{(\sigma - i\epsilon)^2}. \quad (2.26)$$

Ao realizarmos esta integração, separaremos a contribuição de tempo finito utilizando-se de

$$\int_{-\Delta\tau}^{\Delta\tau} = \int_{-\infty}^{\infty} - \int_{\Delta\tau}^{\infty} - \int_{-\infty}^{-\Delta\tau}, \quad (2.27)$$

de onde segue que

$$R'(E, \Delta\tau) = -\frac{1}{4\pi^2} \left( \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \frac{e^{-iE\sigma}}{(\sigma - i\epsilon)^2} - 2 \int_{\Delta\tau}^{\infty} d\sigma \frac{\cos E\sigma}{\sigma^2} \right). \quad (2.28)$$

Utilizando o teorema dos resíduos de acordo com o contorno da figura (2.3) e tomando o limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , obtemos, após um pouco de álgebra,

$$R'(E, \Delta\tau) = \frac{1}{2\pi} \left( -E\Theta(-E) + \frac{\cos E\Delta\tau}{\pi\Delta\tau} + \frac{|E|}{\pi} \left[ -\frac{\pi}{2} + \text{Si}(|E|\Delta\tau) \right] \right), \quad (2.29)$$

---

<sup>1</sup>O significado de dizer a “a probabilidade por unidade de tempo próprio é  $p$ ” é “nos próximos  $d\tau$  segundos, a probabilidade de decaimento ou excitação é  $p d\tau$ ”.

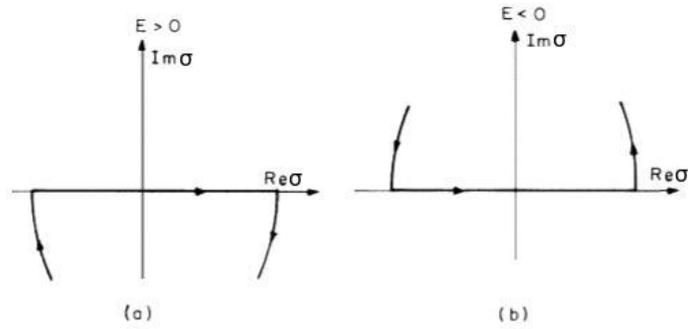


Figura 2.3: Contornos utilizados na integração.

onde  $\text{Si}(x)$  é a função integral seno. Uma representação gráfica é dada na figura (2.4).

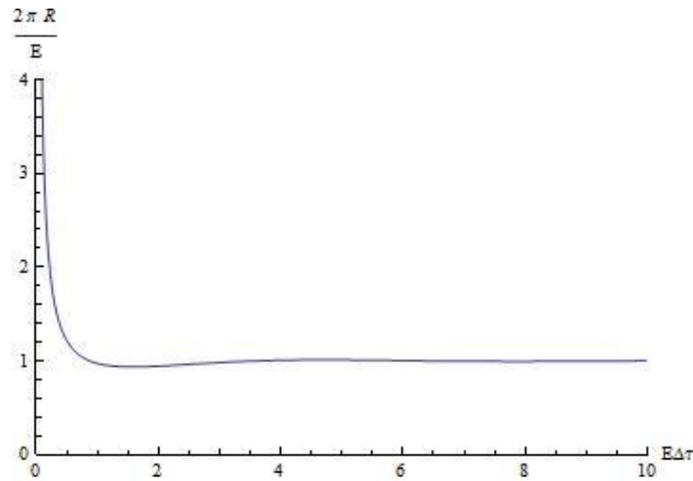


Figura 2.4: Caso de um detector parado onde  $E < 0$ .

No limite de pequeno  $\Delta\tau$  a expressão acima diverge; esta divergência tem origem no fato da interação ter sido ligada bruscamente e logo produzir uma perturbação grande no sistema. Ao longo desta dissertação encontraremos outros problemas também presentes devido ao súbito ligamento e desligamento da interação. Uma construção para se ligar e desligar a interação gradualmente é feita em [Satz \(2007\)](#). No limite  $\Delta\tau \rightarrow \infty$  recuperamos o resultado de [Sciama, Candelas e Deutsch \(Sciama et al., 1981\)](#):

$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow \infty} R'(E, \Delta\tau) = -\frac{1}{2\pi} E \Theta(-E). \quad (2.30)$$

Daqui vemos que só há transição do detector se  $E < 0$ , o que é válido para processos de emissão espontânea, processo que pode ser interpretado como sendo causado pelas flutuações quânticas do vácuo. No mais, não há transição do estado fundamental ao estado excitado; um detector inercial não detecta partículas no vácuo de Minkowski.

Verificamos também que para  $E > 0$  e tempo finito a taxa não se anula, de forma que o detector transita para o estado excitado. Este processo de simultânea criação de quantum do campo (emissão) e excitação do detector é chamado uma transição virtual porque ocorre apenas para pequenos intervalos de tempo obedecendo  $|E|\Delta\tau < 1$ , com o detector “respondendo” às flutuações quânticas do vácuo, conforme pode ser visto na expressão (2.29) e na figura (2.5). Assim sendo, para intervalos onde  $t \rightarrow \infty$  a conservação da energia é preservada.

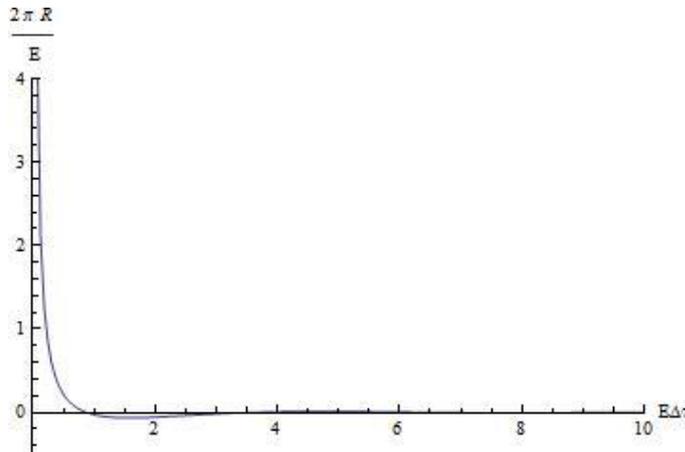


Figura 2.5: Caso de um detector parado onde  $E > 0$ .

## 2.3 Detector uniformemente acelerado - O efeito Unruh-Davies

Para um referencial uniformemente acelerado, onde a mudança de coordenadas é dada por (1.8), temos, após um pouco de álgebra, que

$$G^+(\tau, \tau') = -\frac{a^2}{16\pi^2 \sinh^2\left(\frac{a(\tau-\tau')}{2} - i\epsilon a\right)}, \quad (2.31)$$

onde absorvemos uma função positiva de  $\tau$  e  $\tau'$  em  $\epsilon$ . Utilizando as identidades

$$\begin{aligned} \csc \pi x^2 &= \pi^{-2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (x-k)^{-2} \text{ e} \\ \operatorname{csch} x &= i \csc ix, \end{aligned} \quad (2.32)$$

podemos escrever a equação acima como

$$G^+(\Delta\tau) = -\frac{1}{(4\pi^2)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\Delta\tau - i\epsilon + 2\pi i a^{-1}k)^2}. \quad (2.33)$$

Substituindo este resultado na função resposta, obtemos

$$F(E, \Delta\tau) = -\frac{1}{(4\pi^2)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau' \frac{e^{-iE(\tau-\tau')}}{(\tau - \tau' - i\epsilon + 2\pi i a^{-1}k)^2}. \quad (2.34)$$

Novamente, realizando a mudança de variáveis da integral para  $\sigma = \tau - \tau'$  e  $\lambda = \tau + \tau'$  e realizando a integral em  $\lambda(\tau, \tau')$ , obtemos

$$F(E, \Delta\tau) = -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\Delta\tau}^{\Delta\tau} d\sigma (\Delta\tau - |\sigma|) \frac{e^{-iE\sigma}}{(\sigma - i\epsilon + 2\pi i a^{-1}k)^2}. \quad (2.35)$$

Calcularemos mais uma vez a taxa instantânea  $R'(E, \Delta\tau)$ ,

$$R'(E, \Delta\tau) = -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\Delta\tau}^{\Delta\tau} d\sigma \frac{e^{-iE\sigma}}{(\sigma - i\epsilon + 2\pi i a^{-1}k)^2}. \quad (2.36)$$

Utilizando o teorema dos resíduos, tomando os limites  $\epsilon \rightarrow 0$  e  $\Delta\tau \rightarrow \infty$ , este último para novamente eliminar as contribuições de tempo finito, obtemos

$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow \infty} R'(E, \Delta\tau) = \frac{|E|}{2\pi} \left( \Theta(-E) \left( 1 + \frac{1}{e^{\frac{2\pi|E|}{a}} - 1} \right) + \Theta(E) \frac{1}{e^{\frac{2\pi E}{a}} - 1} \right). \quad (2.37)$$

É fácil verificar que esta expressão tem para o limite  $a \rightarrow \infty$  a probabilidade por unidade de tempo próprio do detector inercial da seção anterior. Para o caso  $E < 0$  temos mais uma vez o termo de emissão espontânea devido às flutuações quânticas do vácuo, adicionado a um termo de emissão estimulada, dado pela distribuição de Planck, com temperatura  $T = a/2\pi$ . O mesmo termo surge para processos de transição do estado fundamental ao estado excitado, onde  $E > 0$ ; ou seja, o observador uniformemente acelerado no vácuo de Minkowski é influenciado por uma radiação análoga a de um corpo negro, um *banho térmico* de partículas. Como a transição do estado fundamental ao estado excitado significa a detecção de uma partícula, vemos que o detector acelerado detecta partículas de acordo com a distribuição de Planck; deduzimos, mais uma vez, o Efeito Unruh-Davies.

## 2.4 Emissão espontânea ou estimulada e absorção de radiação na presença de um espelho

Calcularemos a função resposta se introduzirmos um espelho perfeito no sistema: uma placa perfeitamente refletora situada em  $x = 0$ , onde o campo se anula. Utilizaremos o método das imagens para determinar a função de Wightman, de forma análoga

ao método das imagens como utilizado no eletromagnetismo clássico (Griffiths, 1999). Quando aplicado no eletromagnetismo, este método utiliza-se da unicidade da solução da equação de Poisson, isto é, que, se em uma região temos uma solução que obedece esta equação e as condições de fronteira, ela é única. Podemos, portanto, modificar a distribuição de carga em outras regiões do espaço para facilitar a busca de soluções, desde que a região a qual as procuramos permaneça inalterada e as condições de fronteira sejam obedecidas. Dizemos que criamos “cargas imagens”.

Em nosso caso, a função de Wightman é a função de Green de Feynman para  $t > t'$  para o campo escalar (Greiner et al., 1997, p. 106), isto é, uma função de Green do operador d’alembertiano:

$$\hat{\square}G^+(x - y) = -i\delta(x - y). \quad (2.38)$$

Esta equação diferencial também tem solução única (Barton, 1989, p. 236). Assim, podemos utilizar o método das imagens. Para mais detalhes sobre este método aplicado a funções de Green do campo escalar, veja Lowell and Maclay (1969). Em seguida calcularemos a função resposta para trajetórias específicas do detector.

### 2.4.1 Caso inercial

Seja um detector parado a uma distância  $x = \eta/2$  da placa, isto é, com linha de universo dada por

$$x^\mu(\tau) = (\tau, \eta/2, 0, 0). \quad (2.39)$$

Consideremos uma “carga imagem”<sup>2</sup> em  $-\eta/2$  conforme a figura (2.6) abaixo.

---

<sup>2</sup>A grosso modo, a função de Wightman representa a amplitude de probabilidade de uma partícula ser criada na posição  $y$  em um tempo  $t'$  e ser destruída na posição  $x$  em um tempo  $t$ . No nosso caso, como temos a função de Wightman positiva, tem-se  $t > t'$ . Logo, quando consideramos uma “carga imagem” em nosso problema, consideramos a amplitude de probabilidade de uma partícula ser criada em  $-\eta/2$  e destruída em  $\eta/2$ , além da probabilidade usual de ser criada e destruída no mesmo ponto

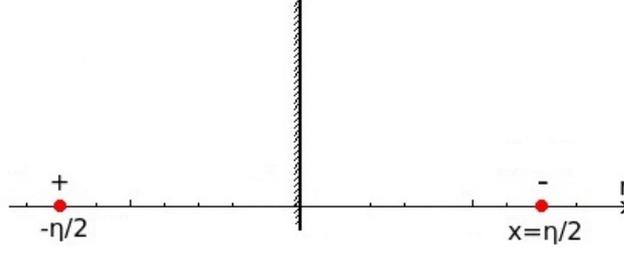


Figura 2.6: Construção da carga imagem para a solução com um espelho na origem. O sinal positivo ou negativo indica a “carga”.

Temos então que a função de Wightman na presença de um espelho é dada por

$$\begin{aligned} G^+(\sigma) &= G_M^+(\sigma) + G_e^+(\sigma) \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{(\sigma - i\epsilon)^2} + \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{(\sigma - i\epsilon)^2 - \eta^2}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

onde  $\sigma = \tau - \tau'$ ,  $G_M^+$  é a contribuição para a função de Wightman dada pelo vácuo de Minkowski, e  $G_e^+$  a contribuição do espelho. Como é facilmente verificado, esta função se anula no espelho. Substituindo (2.40) em (2.17) temos

$$F(E, \Delta\tau, \eta) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\Delta\tau}^{\Delta\tau} d\sigma (\Delta\tau - |\sigma|) e^{-iE\sigma} \left( \frac{1}{(\sigma - i\epsilon)^2} - \frac{1}{(\sigma - i\epsilon)^2 - \eta^2} \right). \quad (2.41)$$

Calculando novamente a taxa instantânea encontramos

$$\begin{aligned} R'(E, \Delta\tau, \eta) &= R'_M(E, \Delta\tau) + R'_e(E, \Delta\tau, \eta) \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\Delta\tau}^{\Delta\tau} d\sigma \left( \frac{e^{-iE\sigma}}{(\sigma - i\epsilon)^2} - \frac{e^{-iE\sigma}}{(\sigma - i\epsilon)^2 - \eta^2} \right), \end{aligned} \quad (2.42)$$

onde  $R'_M$  é a taxa usual do espaço de Minkowski vazio e  $R'_e$  a taxa referente ao espelho.

---

em tempos distintos.

O integrando de  $R'_e$  é analítico exceto nos pontos  $(\eta + i\epsilon, -\eta + i\epsilon)$ .

Para  $0 < \Delta\tau < \eta$ , o limite  $\epsilon \rightarrow 0$  pode ser tomado diretamente, e temos para a taxa relativa ao espelho que

$$R'_e(E, \Delta\tau, \eta) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\Delta\tau} d\sigma \frac{\cos E\sigma}{(\sigma^2 - \eta^2)}. \quad (2.43)$$

Como  $R'_e(E, \Delta\tau, \eta) \neq 0$  aparentemente temos um comportamento acausal, uma vez que um fóton emitido não tem tempo de viajar até o espelho e ser refletido até o detector para  $0 < \Delta\tau < \eta$ . Contudo, a presença da placa modifica o campo quantizado acoplado ao detector, e podemos interpretar esta interação como sendo causada pelas modificadas flutuações quânticas do vácuo deste.

Calculando a taxa de radiação espontânea induzida pela presença do espelho utilizando-se de (2.27) nos leva a

$$R'_e(E, \Delta\tau, \eta) = \frac{1}{2\pi} \Theta(-E) \frac{\text{sen } \eta E}{\eta} + \frac{1}{2\pi^2} \int_{\Delta\tau}^{\infty} d\sigma \frac{\cos E\sigma}{\sigma^2 - \eta^2}. \quad (2.44)$$

Na figura (2.7) é dada uma representação gráfica desta taxa em função de  $E\Delta\tau/2\pi$  para  $E\eta = 10$ . Vemos que há uma divergência nesta expressão para  $\Delta\tau = \eta$ . Esta resposta surge quando o sinal é emitido quando ligamos a interação e absorvido quando desligamos a interação. Esta singularidade não ocorreria caso não tivéssemos feito a aproximação de ligarmos e desligarmos a interação subitamente (Svaiter et al., 1994, p. 1382).

Continuando, no limite em que  $\Delta\tau \rightarrow \infty$  temos para a taxa total

$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow \infty} R'(E, \Delta\tau, \eta) = \frac{|E|}{2\pi} \Theta(-E) \left( 1 - \frac{\text{sen } \eta E}{\eta E} \right). \quad (2.45)$$

Assim, vemos que a presença do espelho pode diminuir ou aumentar a taxa de emissão espontânea. Conforme esperado, a taxa se anula para  $\eta = 0$ .

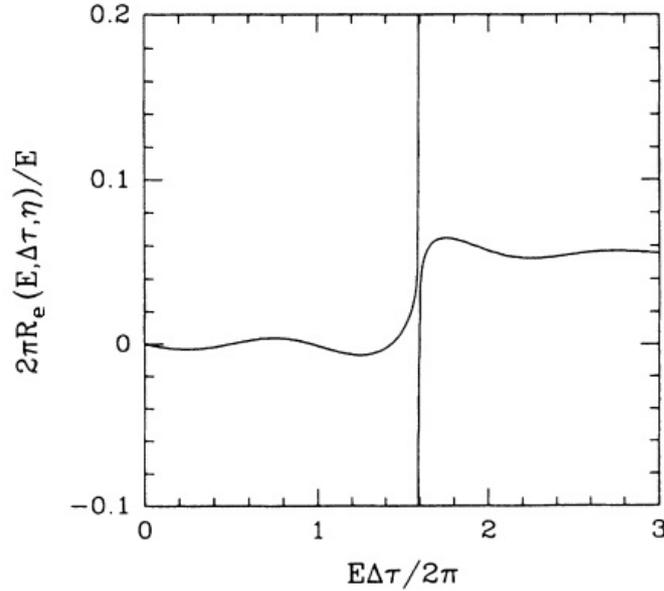


Figura 2.7: A função  $2\pi R'_e/E$  para  $E\eta = 10$ . Figura retirada da referência [Svaiter et al. \(1994\)](#), com autorização do autor.

### 2.4.2 Caso uniformemente acelerado

Estudaremos agora a influência de um espelho na taxa de emissão espontânea para o caso onde o detector está sujeito a um movimento uniformemente acelerado. Para satisfazer a condição de contorno consideraremos novamente uma função de Wightman do tipo

$$G^+(\sigma) = G_M^+(\sigma) + G_e^+(\sigma). \quad (2.46)$$

Lembremos que a função de Wightman do vácuo de Minkowski é dada por

$$G_M^+(\sigma) = -\frac{1}{(4\pi^2)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\sigma - i\epsilon + 2\pi i a^{-1} k)^2}. \quad (2.47)$$

Cada parcela desta soma é uma solução do problema de determinar a função de Green de Wightman; consideraremos uma “carga imagem” para cada termo desta solu-

ção, somando sobre infinitas imagens, isto é

$$G_e^+(\sigma, \eta) = + \frac{1}{(4\pi^2)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\sigma - i\epsilon + 2\pi i a^{-1} k)^2 - \eta^2}. \quad (2.48)$$

Substituindo (2.47) e (2.48) em (2.46) temos

$$G^+(\sigma) = - \frac{1}{(4\pi^2)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\sigma - i\epsilon + 2\pi i a^{-1} k)^2} + \frac{1}{(4\pi^2)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\sigma - i\epsilon + 2\pi i a^{-1} k)^2 - \eta^2}. \quad (2.49)$$

Calculando mais uma vez a taxa temos

$$\begin{aligned} R'(E, \Delta\tau, \eta) &= R'_M(E, \Delta\tau) + R'_e(E, \Delta\tau, \eta) \\ &= - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\Delta\tau}^{\Delta\tau} d\sigma \left( \frac{e^{-iE\sigma}}{(\sigma - i\epsilon + 2\pi i a^{-1} k)^2} - \frac{e^{-iE\sigma}}{(\sigma - i\epsilon + 2\pi i a^{-1} k)^2 - \eta^2} \right), \end{aligned} \quad (2.50)$$

onde  $R'_M$  é a contribuição usual da taxa quando o detector está uniformemente acelerado, e  $R'_e$  a contribuição do espelho. Para o tempo de interação infinito obtemos

$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow \infty} R'(E, \Delta\tau, \eta) = \frac{|E|}{2\pi} \left[ \Theta(-E) \left( 1 + \frac{1}{e^{\frac{2\pi|E|}{a}} - 1} \right) + \Theta(E) \frac{1}{e^{\frac{2\pi E}{a}} - 1} \right] \left( 1 - \frac{\text{sen } E\eta}{E\eta} \right). \quad (2.51)$$

Assim como o caso inercial, o espelho tanto pode aumentar quanto diminuir a taxa de transição, além de anular-se para  $\eta = 0$ .

## 2.5 Emissão espontânea na presença de dois espelhos

Por último, consideremos um sistema de dois níveis confinado entre duas placas perfeitamente condutoras postas em  $x = 0$  e  $x = 2l$ . Seja a posição fixa do detector  $x = \eta/2$ . Utilizando o método das imagens, as funções de Wightman podem ser descobertas na região entre as placas através de uma soma infinita de cargas imagens (Davies and Birrell, 1982). A figura (2.8) demonstra como esta construção é feita.

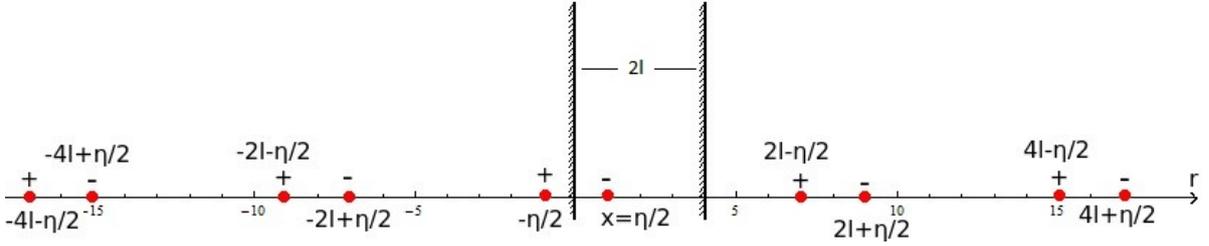


Figura 2.8: Construção das nove primeiras cargas imagens para um detector confinado entre dois espelhos, onde foi assumido  $\eta = 2$  e  $l = 4$ . O sinal positivo ou negativo indica a “carga”.

A função de Wightman então é dada por

$$G^+(x, x') = -\frac{1}{4\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\sigma - i\epsilon)^2 - (2kl)^2} + \frac{1}{4\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\sigma - i\epsilon)^2 - (\eta - 2kl)^2}, \quad (2.52)$$

que por construção se anula para  $\eta = 0$  ou  $\eta = 2l$ . Substituindo (2.52) em (2.17), tomando a derivada em relação ao tempo próprio obtemos para a taxa de emissão espontânea que

$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow \infty} R'(E, \eta, \Delta\tau, l) = \frac{|E|\Theta(-E)}{2\pi} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \frac{\text{sen } 2kEl}{2kEl} - \frac{\text{sen } E(\eta - 2kl)}{E(\eta - 2kl)} \right) \right]. \quad (2.53)$$

Esta taxa é uma função descontínua de  $El$ , que é uma característica geral para processos radiativos dentro de uma cavidade (Svaiter et al., 1994, p. 1384).

## Capítulo 3

# Dois detectores de Unruh-DeWitt

Neste capítulo consideraremos um sistema composto por dois detectores de Unruh-DeWitt acoplados a um campo escalar sem massa, e pretendemos calcular a taxa por unidade de tempo próprio de decaimento ou excitação destes detectores. Iniciaremos revisando a definição de emaranhamento. Em seguida estudaremos o sistema de dois átomos de dois níveis e determinaremos a base que diagonaliza a hamiltoniana deste sistema se incluirmos a interação de dipolo-dipolo.

### 3.1 Emaranhamento e sistema de dois átomos de dois níveis de energia

Um estado quântico é dito possuir dois ou mais sistemas emaranhados quando estes não podem ser decompostos como um produto tensorial dos seus sistemas constituintes ([Shankar, 1994](#)). Isto é, utilizando como exemplo um sistema quântico composto por duas partículas, dizemos que este sistema está emaranhado se se encontra em um estado  $|\Psi\rangle$  que não pode ser escrito como

$$|\Psi\rangle = |\psi\rangle_1 \otimes |\Phi\rangle_2, \quad (3.1)$$

onde  $|\psi\rangle_1$  e  $|\Phi\rangle_2$  são vetores de estado do espaço de Hilbert da primeira e da segunda partícula, respectivamente.

Quando da sua descoberta, o maior interesse em estados emaranhados se devia ao fato destes levarem ao paradoxo EPR, introduzido por Einstein, Podolsky e Rosen ([Einstein et al., 1935](#)) e que indicava um caráter incompleto da mecânica quântica pela aparente violação do princípio da localidade - paradoxo em seguida resolvido por Bohr ([Bohr, 1935](#)). Nas últimas décadas o interesse em estados emaranhados ressurgiu devido a aplicações em computação quântica ([Vedral, 2007](#)).

Consideremos um sistema formado por dois detectores de Unruh-De-Witt, isto é, um sistema de dois átomos de dois níveis. Na ausência de interações, a hamiltoniana é dada por

$$H_L = w_1 S_1^z + w_2 S_2^z, \quad (3.2)$$

onde  $S_i = \frac{1}{2}(|e_i\rangle\langle e_i| - |g_i\rangle\langle g_i|)$ . O espaço quadridimensional deste sistema é gerado por quatro estados,

$$|g_1\rangle|g_2\rangle, |e_1\rangle|g_2\rangle, |g_1\rangle|e_2\rangle, |e_1\rangle|e_2\rangle, \quad (3.3)$$

com energias correspondentes dadas por

$$E_{gg} = -w_0, E_{eg} = -\Delta, E_{ge} = \Delta, E_{ee} = w_0, \quad (3.4)$$

onde  $w_0 = \frac{1}{2}(w_1 + w_2)$  e  $\Delta = \frac{1}{2}(w_2 - w_1)$ .

Nesta dissertação consideraremos o caso onde há uma interação do tipo dipolo-dipolo entre os dois detectores, na qual a hamiltoniana é dada por

$$H = H_L + \Omega_{12} S_1^+ S_2^- + \Omega_{21} S_2^+ S_1^-, \quad (3.5)$$

onde  $S_i^+ = |e_i\rangle\langle g_i|$ ,  $S_i^- = |g_i\rangle\langle e_i|$  são operadores de criação e destruição, para o qual  $i=1$  ou  $2$ . Tais operadores obedecem as bem conhecidas relações de comutação  $[S_i^+, S_j^-] = 2S_i^z \delta_{ij}$ ,  $[S_i^z, S_j^\pm] = \pm S_i^\pm \delta_{ij}$  e  $[S_i^+, S_j^-]_+ = \delta_{ij}$ .

Consideraremos o caso onde os níveis de energia dos átomos são idênticos, isto é,  $\Delta = 0$  e  $\Omega_{12} = \Omega_{21}$ . Por brevidade denotaremos  $\Omega_{12}$  por  $\Omega$ . A representação matricial da hamiltoniana deste sistema é, então,

$$H = \begin{bmatrix} -w_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega & 0 \\ 0 & \Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_0 \end{bmatrix}.$$

Diagonalizando esta matriz, encontramos que os autoestados do sistema e suas respectivas energias são

$$\begin{aligned} E_g &= -w_0, & |g\rangle &= |g_1, g_2\rangle, \\ E_e &= w_0, & |e\rangle &= |e_1, e_2\rangle, \\ E_s &= \Omega, & |s\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|e_1, g_2\rangle + |g_1, e_2\rangle), \\ E_a &= -\Omega, & |a\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|e_1, g_2\rangle - |g_1, e_2\rangle). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Estes estados foram primeiramente introduzidos por Dicke ([Dicke, 1954](#)). Como estes estados são autovetores de um operador hermitiano, eles formam uma base.

Temos portanto que um sistema composto de dois átomos de dois níveis se comporta como um sistema de um átomo de quatro níveis de energia. Assim sendo, vemos que o estado fundamental  $|g\rangle$  e o estado excitado  $|e\rangle$  não tem suas energias afetadas pela interação, enquanto o estado simétrico  $|s\rangle$  e o estado anti-simétrico  $|a\rangle$  tem uma mudança de energia por um fator aditivo de  $+\Omega$  e  $-\Omega$ , respectivamente. Os estados simétrico e

anti-simétrico são estados emaranhados; estes estados não podem ser separados em um produto tensorial entre estados dos espaços de Hilbert associados a cada partícula.

## 3.2 Resolução do caso geral

Em nosso modelo consideraremos um campo escalar sem massa acoplado a dois detectores de partícula, que por sua vez formam um sistemas de dois átomos de dois níveis de energia. Novamente, dizemos que houve detecção de uma partícula associada ao campo se um detector passa de um estado de menor energia para um estado de maior energia, e que houve emissão de uma partícula se um detector passa de um estado de maior para menor energia. A hamiltoniana do sistema é dada por

$$H = H_{dd} \otimes I_C + I_{dd} \otimes H_C + H_{int}, \quad (3.7)$$

onde  $H_{dd}$  é a hamiltoniana livre do sistema formado pelos dois detectores de Unruh-DeWitt, hamiltoniana esta dada pela expressão (3.5),  $H_C$  a hamiltoniana livre do campo, e  $H_{int}$  é a hamiltoniana de interação entre estes dois sistemas, definida como

$$H_{int} = c_1 m_1(\tau) \phi(\vec{r}_1(\tau), \tau) + c_1 m_2(\tau) \phi(\vec{r}_2(\tau), \tau), \quad (3.8)$$

onde  $\vec{r}_1(\tau)$  e  $\vec{r}_2(\tau)$  são as trajetórias percorridas pelo primeiro e segundo detector e  $m_1$  e  $m_2$  os seus respectivos momentos de monopolo. Novamente,  $c_1$  é uma constante pequena o suficiente para garantir a validade da teoria de perturbação.

Supondo que a interação começa em  $\tau_i$ , queremos determinar o operador de evolução unitária

$$|\tau\rangle = U(\tau, \tau_i) |\tau_i\rangle \quad (3.9)$$

sujeito à condição  $U(\tau_i, \tau_i) = I$ . Na representação de interação, a evolução deste operador é gerada pela hamiltoniana de interação:

$$i \frac{d}{d\tau} U(\tau, \tau_i) = H_{int}(\tau) U(\tau, \tau_i). \quad (3.10)$$

Integrando a equação acima em relação a  $\tau$  chegamos a

$$U(\tau, \tau_i) = 1 - i \int_{\tau_i}^{\tau} H_{int}(\tau') U(\tau', \tau_i) d\tau' \quad (3.11)$$

Podemos resolver esta equação por iteração:

$$\begin{aligned} U(\tau, \tau_i) = & 1 - i \int_{\tau_i}^{\tau} d\tau' H_{int}(\tau') + (-i)^2 \int_{\tau_i}^{\tau} d\tau' \int_{\tau_i}^{\tau'} d\tau'' H_{int}(\tau') H_{int}(\tau'') \\ & + \dots + (-i)^n \int_{\tau_i}^{\tau} d\tau' \int_{\tau_i}^{\tau'} d\tau'' \dots \int_{\tau_i}^{\tau^{n-1}} d\tau^{(n)} H_{int}(\tau') H_{int}(\tau'') \dots H_{int}(\tau^{(n)}) + \dots \end{aligned} \quad (3.12)$$

Considerando a evolução temporal até o tempo  $\tau_f$  em que a interação é interrompida, o operador de evolução unitária é escrito até a primeira ordem na solução acima como

$$\begin{aligned} U(\tau_f, \tau_i) &= 1 - i \int_{\tau_i}^{\tau_f} H_{int}(\tau) d\tau \\ &= 1 - ic_1 \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau (m_1(\tau) \phi(\vec{r}_1(\tau), \tau) + m_2(\tau) \phi(\vec{r}_2(\tau), \tau)). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Calcularemos inicialmente a amplitude de probabilidade para a transição entre o estado inicial  $|i\rangle \otimes |0\rangle$  e o estado final  $|f\rangle \otimes |\phi_f\rangle$ , onde  $|i\rangle$  é o estado inicial do sistema composto pelos dois detectores,  $|f\rangle$  é o estado final e  $|\phi_f\rangle$  é um estado arbitrário do campo. Temos portanto para a amplitude de probabilidade que

$$\begin{aligned} & \langle f | \otimes \langle \phi_f | U(\tau_i, \tau_f) | i \rangle \otimes | 0 \rangle \\ &= -ic_1 \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left( \langle f | m_1(\tau) | i \rangle \langle \phi_F | \phi(\vec{r}_1(\tau), \tau) | 0 \rangle + \langle f | m_2(\tau) | i \rangle \langle \phi_F | \phi(\vec{r}_2(\tau), \tau) | 0 \rangle \right). \end{aligned}$$

Consideraremos  $|i\rangle$  e  $|f\rangle$  auto-estados da hamiltoniana livre, de forma que, inserindo a evolução temporal dos operadores  $m_1(\tau)$  e  $m_2(\tau)$ , a amplitude de probabilidade é dada por

$$\begin{aligned} & \langle f | \otimes \langle \phi_f | U(\tau_i, \tau_f) | i \rangle \otimes | 0 \rangle = \\ & -ic_1 \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau e^{i(E_f - E_i)\tau} \left( \langle f | m_1(0) | i \rangle \langle \phi_F | \phi(\vec{r}_1(\tau), \tau) | 0 \rangle + \langle f | m_2(0) | i \rangle \langle \phi_F | \phi(\vec{r}_2(\tau), \tau) | 0 \rangle \right), \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde  $E_f$  e  $E_i$  são as energias dos auto-estados  $|f\rangle$  e  $|i\rangle$ , respectivamente.

Introduzindo a notação

$$\langle f | m_1(0) | i \rangle = m_{fi}^{(1)}, \quad \langle f | m_2(0) | i \rangle = m_{fi}^{(2)}, \quad (3.15)$$

temos que a probabilidade de transição entre os estados  $|i\rangle \otimes |0\rangle$  e  $|f\rangle \otimes |\phi_f\rangle$  é dada por

$$\begin{aligned} P_{|i\rangle|0\rangle \rightarrow |f\rangle|\phi_f\rangle} &= c_1^2 \int_{\tau_i}^{\tau_f} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau d\tau' e^{-i(E_f - E_i)(\tau - \tau')} \left( |m_{fi}^{(1)}|^2 \langle 0 | \phi(\vec{r}_1(\tau), \tau) | \phi_F \rangle \langle \phi_F | \phi(\vec{r}_1(\tau'), \tau') | 0 \rangle + \right. \\ &+ (m_{fi}^{(1)})^* m_{fi}^{(2)} \langle 0 | \phi(\vec{r}_1(\tau), \tau) | \phi_F \rangle \langle \phi_F | \phi(\vec{r}_2(\tau'), \tau') | 0 \rangle + |m_{fi}^{(2)}|^2 \langle 0 | \phi(\vec{r}_2(\tau), \tau) | \phi_F \rangle \langle \phi_F | \phi(\vec{r}_1(\tau'), \tau') | 0 \rangle \\ &\left. + (m_{fi}^{(2)})^* m_{fi}^{(1)} \langle 0 | \phi(\vec{r}_2(\tau), \tau) | \phi_F \rangle \langle \phi_F | \phi(\vec{r}_2(\tau'), \tau') | 0 \rangle \right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Realizando a soma de probabilidades para todos os campos finais possíveis e usando

sua relação de completeza, a probabilidade de transição entre os estados  $|i\rangle$  e  $|f\rangle$  independente do estado final do campo, com o campo preparado inicialmente no estado de vácuo, é

$$\begin{aligned}
P_{|i\rangle \rightarrow |f\rangle} = c_1^2 \int_{\tau_i}^{\tau_f} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau d\tau' e^{-i(E_f - E_i)(\tau - \tau')} & \left( |m_{fi}^{(1)}|^2 \langle 0 | \phi(\vec{r}_1(\tau), \tau) \phi(\vec{r}_1(\tau'), \tau') | 0 \rangle + \right. \\
& + (m_{fi}^{(1)})^* m_{fi}^{(2)} \langle 0 | \phi(\vec{r}_1(\tau), \tau) \phi(\vec{r}_2(\tau'), \tau') | 0 \rangle + |m_{fi}^{(2)}|^2 \langle 0 | \phi(\vec{r}_2(\tau), \tau) \phi(\vec{r}_2(\tau'), \tau') | 0 \rangle \\
& \left. + (m_{fi}^{(2)})^* m_{fi}^{(1)} \langle 0 | \phi(\vec{r}_2(\tau), \tau) \phi(\vec{r}_1(\tau'), \tau') | 0 \rangle \right). \tag{3.17}
\end{aligned}$$

Vemos que a probabilidade de transição é proporcional a quatro funções respostas conforme definidas no capítulo anterior, isto é

$$\begin{aligned}
P_{|i\rangle \rightarrow |f\rangle} = c_1^2 \left( |m_{fi}^{(1)}|^2 F_{(\vec{r}_1, \vec{r}_1)}(E_f, E_i, \tau_f, \tau_i) + |m_{fi}^{(2)}|^2 F_{(\vec{r}_2, \vec{r}_2)}(E_f, E_i, \tau_f, \tau_i) + \right. \\
\left. + (m_{fi}^{(1)})^* m_{fi}^{(2)} F_{(\vec{r}_1, \vec{r}_2)}(E_f, E_i, \tau_f, \tau_i) + (m_{fi}^{(2)})^* m_{fi}^{(1)} F_{(\vec{r}_2, \vec{r}_1)}(E_f, E_i, \tau_f, \tau_i) \right) \tag{3.18}
\end{aligned}$$

onde os subscritos indicam em quais pontos das trajetórias a função de Wightman é calculada. Por exemplo, o subscrito  $(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$  indica que é a função resposta referente a função de Wightman  $G^+(\vec{r}_1(\tau), \vec{r}_2(\tau))$ .

Nota-se de (3.17) que os termos proporcionais a  $\langle 0 | \phi(\vec{r}_1(\tau), \tau) \phi(\vec{r}_1(\tau'), \tau') | 0 \rangle$  e  $\langle 0 | \phi(\vec{r}_2(\tau), \tau) \phi(\vec{r}_2(\tau'), \tau') | 0 \rangle$  são idênticos ao caso estudado na seção anterior, no qual só havia um detector. Além deste termo que surge da interação local do detector com o valor do campo em sua linha de universo, surgem também termos “cruzados”, proporcionais a correlações do campo entre pontos que podem estar separados inclusive por intervalos do tipo espaço (lembramos que a função de Wightman positiva é não nula para tais intervalos (Greiner et al., 1997, p. 115)). A existência de influência entre pontos separados por intervalos do tipo espaço é uma característica do emaranhamento

quântico, e, de fato, conforme mostraremos adiante, tais termos só contribuem se os detectores estiverem emaranhados.

A figura (3.1) ilustra o resultado obtido, considerando o caso onde os dois detectores tem trajetórias unidimensionais.

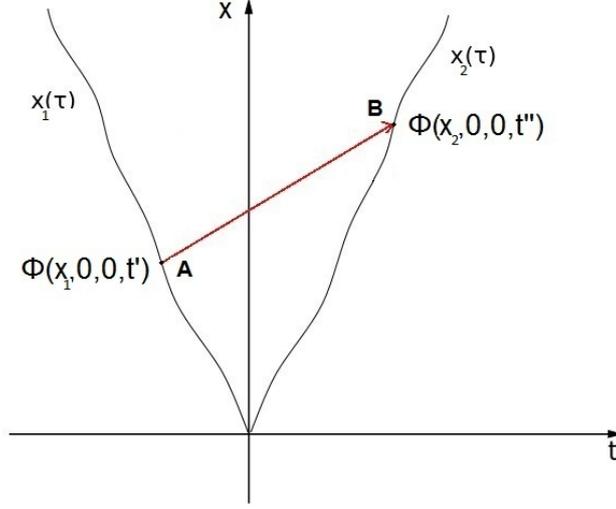


Figura 3.1: Duas trajetórias dos detectores no espaço tempo. O valor do campo em um ponto A da trajetória de um detector influencia na probabilidade de transição do detector localizado no ponto B. Os pontos A e B podem inclusive estar separados por intervalos do tipo espaço, e tal influência é mediada pela função de Wightman positiva.

Sabemos que a forma geral da função de Wightman para um campo escalar sem massa é

$$G^+(r, r') = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{(\tau - \tau' - i\epsilon)^2 - (|\vec{r} - \vec{r}'|)^2}. \quad (3.19)$$

Na próxima seção calcularemos a taxa instantânea da função resposta para trajetórias específicas dos dois detectores. Antes disso, calcularemos os elementos de matrizes de  $m_1(0) \otimes I_2$  e  $I_1 \otimes m_2(0)$  na base formada pelos estados  $|g\rangle$ ,  $|s\rangle$ ,  $|a\rangle$  e  $|e\rangle$ , que será utilizado para o cálculo da probabilidade (3.17) para os casos específicos que nos interessam, isto é, o decaimento do estado simétrico ou anti-simétrico para o fundamental.

No subespaço de Hilbert do primeiro e do segundo detector seus respectivos momento de monopolo são representados genericamente por

$$m_1(0) = \begin{bmatrix} 0 & m_{12}^{(1)} \\ m_{21}^{(1)} & 0 \end{bmatrix}, m_2(0) = \begin{bmatrix} 0 & m_{12}^{(2)} \\ m_{21}^{(2)} & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

onde o índice sobrescrito aos elementos de matrizes indicam se tais elementos pertencem as matrizes  $m_1(0)$  ou  $m_2(0)$ . Por simplicidade, assumiremos que tais matrizes são simétricas, como Loudon, 2000, p. 165. Logo

$$m_1(0) = \begin{bmatrix} 0 & m_{12}^{(1)} \\ m_{12}^{(1)} & 0 \end{bmatrix}, m_2(0) = \begin{bmatrix} 0 & m_{12}^{(2)} \\ m_{12}^{(2)} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Segue que, no espaço de Hilbert gerado pelas duas partículas, seguindo a ordem de representação  $|g\rangle, |s\rangle, |a\rangle$  e  $|e\rangle$ , o operador  $m_1(0) \otimes I_2$  é representado por

$$m_1(0) \otimes I_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & m_{12}^{(1)} & m_{12}^{(1)} & 0 \\ m_{12}^{(1)} & 0 & 0 & m_{12}^{(1)} \\ m_{12}^{(1)} & 0 & 0 & -m_{12}^{(1)} \\ 0 & m_{12}^{(1)} & -m_{12}^{(1)} & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

enquanto o operador  $I_1 \otimes m_2(0)$  é representado por

$$I_1 \otimes m_2(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & m_{12}^{(2)} & -m_{12}^{(2)} & 0 \\ m_{12}^{(2)} & 0 & 0 & m_{12}^{(2)} \\ -m_{12}^{(2)} & 0 & 0 & m_{12}^{(2)} \\ 0 & m_{12}^{(2)} & m_{12}^{(2)} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

Assim sendo, há apenas dois canais de transições -  $|e\rangle \leftrightarrow |s\rangle \leftrightarrow |g\rangle$  ou  $|e\rangle \leftrightarrow |a\rangle \leftrightarrow |g\rangle$ , conforme ilustrado na figura (3.2).

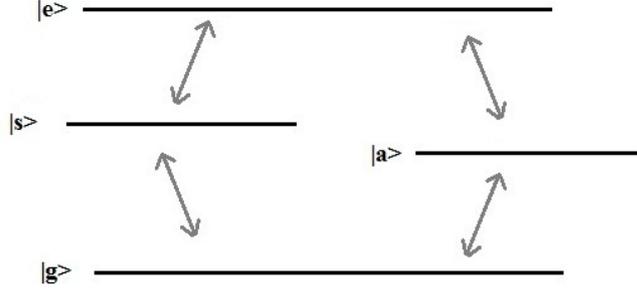


Figura 3.2: Os auto-estados dos dois detectores e suas respectivas transições possíveis, arranjado da maior para menor energia.

### 3.3 Detectores de posições fixas

Como primeiro caso estudemos o caso em que os dois detectores estão parados e separados por uma distância  $\vec{d}$ :

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{d}. \quad (3.24)$$

Para resolvermos este problema, basta calcular o termo da taxa referente a função de Wightman “cruzada”, uma vez que os termos que são referentes a somente uma trajetória foram calculados na seção anterior. Para o termo cruzado  $G^+(\vec{r}_1(\tau), \vec{r}_2(\tau'))$  temos para a função de Wightman que

$$G^+(\vec{r}_1(\tau), \vec{r}_2(\tau')) = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{(\tau - \tau' - i\epsilon)^2 - |\vec{d}|^2}. \quad (3.25)$$

Consideremos que a interação começou no momento  $\tau_i = 0$  e a interrompemos quando  $\tau = \tau_f$ . Logo, considerando a função de Wightman acima e substituindo-a na função resposta referente ao termo cruzado temos que

$$F_{(\vec{r}_1, \vec{r}_2)} = -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\tau_f} d\tau \int_0^{\tau_f} d\tau' \frac{e^{-i(E_f - E_i)(\tau - \tau')}}{(\tau - \tau' - i\epsilon)^2 - d^2}. \quad (3.26)$$

Mudando para as variáveis  $\lambda = \tau + \tau'$  e  $\sigma = \tau - \tau'$  e derivando em relação a  $\tau_f$  para

obtermos a taxa de transição  $R'_{(\vec{r}_1, \vec{r}_2)}$  obtemos

$$\begin{aligned} R'_{(\vec{r}_1, \vec{r}_2)} &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\tau_f}^{\tau_f} d\sigma \frac{e^{-i(E_f - E_i)\sigma}}{(\sigma - i\epsilon)^2 - d^2} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \Theta(E_i - E_f) \frac{\text{sen } d(E_f - E_i)}{d} - \frac{1}{2\pi^2} \int_{\tau_f}^{\infty} d\sigma \frac{\cos(E_f - E_i)\sigma}{\sigma^2 - d^2}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Assim como na seção (2.4.1), onde consideramos a influência na taxa de transição do um detector perante a presença de um espelho, temos uma divergência para  $\Delta\tau = \tau_f - \tau_i = d$ , isto é, uma divergência quando o sinal é emitido quando ligamos a interação e absorvido quando desligamos a interação. Tal similaridade não é inesperada, uma vez que consideramos uma “carga imagem” na construção da função de Wightman.

No limite em que  $\tau_f \rightarrow \infty$  temos para a expressão acima

$$\lim_{\tau_f \rightarrow \infty} R'_{(\vec{r}_1, \vec{r}_2)} = -\frac{1}{2\pi} \Theta(E_i - E_f) \frac{\text{sen } d(E_f - E_i)}{d}. \quad (3.28)$$

Para  $d \rightarrow 0$  temos novamente a contribuição das flutuações quânticas do vácuo usuais do detector de Unruh. Para  $d \rightarrow \infty$ , temos que a taxa se iguala a zero. Este não é um resultado inesperado, já que a função de Wightman se anula para  $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 \rightarrow \infty$ , como pode ser visto na sua forma (2.19).

A taxa  $R'$  referente a função  $G^+(\vec{r}_2(\tau), \vec{r}_1(\tau'))$  não precisa ser calculada, uma vez que  $G^+(\vec{r}_2(\tau), \vec{r}_1(\tau')) = G^+(\vec{r}_1(\tau), \vec{r}_2(\tau'))$ . De posse das taxa instantâneas já então calculadas, podemos agora aplicá-las para transições particulares. De acordo com (3.17), a taxa de transição total, isto é, a probabilidade de transição por unidade de tempo próprio, é dada por

$$\begin{aligned}
\lim_{\tau_f \rightarrow \infty} R(E_f, E_i, \tau_f, d) &= -c_1^2 \left( (m_{fi}^{(1)})^* m_{fi}^{(2)} \frac{E_f - E_i}{2\pi} \Theta(E_i - E_f) \frac{\text{sen}(E_f - E_i)d}{(E_f - E_i)d} + \right. \\
&+ (m_{fi}^{(2)})^* m_{fi}^{(1)} \frac{E_f - E_i}{2\pi} \Theta(E_i - E_f) \frac{\text{sen}(E_f - E_i)d}{(E_f - E_i)d} + \\
&\left. + |m_{fi}^{(1)}|^2 \frac{E_f - E_i}{2\pi} \Theta(E_i - E_f) + |m_{fi}^{(2)}|^2 \frac{E_f - E_i}{2\pi} \Theta(E_i - E_f) \right) \quad (3.29)
\end{aligned}$$

ou como os elementos das matrizes dos operadores de momento de monopolo consideradas são reais

$$\begin{aligned}
\lim_{\tau_f \rightarrow \infty} R(E_f, E_i, \tau_f, d) &= -c_1^2 \Theta(E_i - E_f) \left( m_{fi}^{(1)} m_{fi}^{(2)} \frac{E_f - E_i}{\pi} \frac{\text{sen}(E_f - E_i)d}{(E_f - E_i)d} + \right. \\
&\left. + |m_{fi}^{(1)}|^2 \frac{E_f - E_i}{2\pi} + |m_{fi}^{(2)}|^2 \frac{E_f - E_i}{2\pi} \right). \quad (3.30)
\end{aligned}$$

Verificamos que só há transições caso  $E_i - E_f < 0$ , isto é, só ocorrem processos de emissão espontânea para detectores parados. Para a transição  $|s\rangle \rightarrow |g\rangle$ , onde  $E_f - E_i = -w_0 - \Omega$  e utilizando-se dos elementos de matrizes dados por (3.22) e (3.23), temos

$$\lim_{\tau_f \rightarrow \infty} R(w_0, \Omega, \tau_f, d)_{|s\rangle \rightarrow |g\rangle} = c_1^2 \frac{w_0 + \Omega}{2\pi} \left( \frac{(m_{12}^{(1)})^2}{2} + \frac{(m_{12}^{(2)})^2}{2} + m_{12}^{(1)} m_{12}^{(2)} \frac{\text{sen}(w_0 + \Omega)d}{(w_0 + \Omega)d} \right), \quad (3.31)$$

onde lembramos que o índice sobrescrito aos elementos de matrizes não devem ser confundidos com a operação de potenciação. Para evitar confusão entre as duas operações, colocamos os elementos de matrizes em parênteses quando necessário. Verifica-se facilmente que a taxa acima não admite valores negativos, considerando-se o menor valor de  $\text{sen}(w_0 + \Omega)d / (w_0 + \Omega)d$ .

Analisemos o caso particular onde a distância entre os dois detectores tende a zero. A taxa acima se torna

$$\lim_{\tau_f \rightarrow \infty} R(w_0, \Omega, \tau_f, d)_{|s\rangle \rightarrow |g\rangle} = c_1^2 \frac{w_0 + \Omega}{4\pi} \left( m_{12}^{(1)} + m_{12}^{(2)} \right)^2, \quad (3.32)$$

uma taxa análoga a taxa do caso de um detector apenas.

Consideremos outros exemplos. Para a transição  $|a\rangle \rightarrow |g\rangle$  temos que

$$\lim_{\tau_f \rightarrow \infty} R(w_0, \Omega, \tau_f, d)_{|a\rangle \rightarrow |g\rangle} = c_1^2 \frac{w_0 - \Omega}{2\pi} \left( \frac{(m_{12}^{(1)})^2}{2} + \frac{(m_{12}^{(2)})^2}{2} - m_{12}^{(1)} m_{12}^{(2)} \frac{\text{sen}(w_0 - \Omega)d}{(w_0 - \Omega)d} \right). \quad (3.33)$$

Por sua vez, para a transição  $|e\rangle \rightarrow |s\rangle$  temos que

$$\lim_{\tau_f \rightarrow \infty} R(w_0, \Omega, \tau_f, d)_{|e\rangle \rightarrow |s\rangle} = c_1^2 \frac{w_0 - \Omega}{2\pi} \left( \frac{(m_{12}^{(1)})^2}{2} + \frac{(m_{12}^{(2)})^2}{2} + m_{12}^{(1)} m_{12}^{(2)} \frac{\text{sen}(w_0 - \Omega)d}{(w_0 - \Omega)d} \right). \quad (3.34)$$

Por último, para a transição  $|e\rangle \rightarrow |a\rangle$  temos que

$$\lim_{\tau_f \rightarrow \infty} R(w_0, \Omega, \tau_f, d)_{|e\rangle \rightarrow |a\rangle} = c_1^2 \frac{w_0 + \Omega}{2\pi} \left( \frac{(m_{12}^{(1)})^2}{2} + \frac{(m_{12}^{(2)})^2}{2} - m_{12}^{(1)} m_{12}^{(2)} \frac{\text{sen}(w_0 + \Omega)d}{(w_0 + \Omega)d} \right). \quad (3.35)$$

Deduzimos portanto que, se tivermos um estado inicial emaranhado  $|s\rangle$  ou  $|a\rangle$ , ele se desemaranha com o passar do tempo. Do mesmo modo, se tivermos o estado não emaranhado  $|e\rangle$ , ele se torna emaranhado e em seguida retorna a ser um estado não emaranhado. Esta dinâmica devido às flutuações quânticas do vácuo pode ser uma fonte

de dificuldades para aplicações de estados emaranhados, como a computação quântica, que podem exigir que os estados emaranhados sejam estáveis. Este resultado não é inesperado, no entanto: há muito é conhecido que o acoplamento de um sistema quântico a um ambiente pode levar a perda do emaranhamento devido ao processo conhecido como descoerência (uma discussão aprofundada deste processo é feita na referência [Bacon \(2001\)](#)). Provamos que o mesmo ocorre para dois detectores de Unruh-DeWitt devido às flutuações quânticas do vácuo.

E se o estado inicial fosse  $|e_1, g_2\rangle$  e o estado final  $|g_1, g_2\rangle$ ? Para a transição entre tais estados temos  $\langle e_1, g_2 | m_2(0) | g_1, g_2 \rangle = 0$  e, portanto, só haveria um termo que contribuiria para a taxa de transição: o termo proporcional a  $G^+(\vec{r}_1(\tau), \vec{r}_1(\tau'))$ . Logo não há contribuição dos termos proporcionais a função de correlação entre pontos separados por intervalos do tipo espaço, nem do termo proporcional a  $G^+(\vec{r}_2(\tau), \vec{r}_2(\tau'))$ ; para todos os efeitos, a presença do segundo detector não afeta o primeiro, conforme é esperado.

Dito de outra forma, o fato dos detectores estarem emaranhados permite um campo localizado na trajetória de um átomo influenciar na taxa de decaimento do outro átomo, por mais que isto não estivesse incluso na hamiltoniana. O resultado que esta mesma taxa é nula para grandes distâncias pode soar surpreendente sob esse ponto de vista: o emaranhamento não depende da distância. Contudo, se é verdade que esta interação só é possível para estados emaranhados, também é verdade que esta interação dá-se através da função de Wightman, que tende a 0 para  $d \rightarrow \infty$ , como já discutido.

### 3.4 Emissão espontânea ou estimulada na presença de um espelho

Nesta seção estudaremos como se modifica a taxa instantânea de transição se colocarmos um espelho na origem - isto é, utilizando as coordenadas cartesianas  $(x_1, x_2, x_3)$ , a condição de fronteira  $\phi(x_1, x_2, x_3, t)|_{x_3=0} = 0$  será imposta. O quanto será a taxa de

transição para este detector? Ela será maior ou menor do que a taxa sem o espelho?

A taxa de transição é novamente dada pela expressão (3.17) - a inclusão de um espelho modifica a taxa através de uma nova função de Wightman, que deve obedecer as condições de contorno e se anular na origem. Assim como na seção (2.4) esta função será construída conforme o método das imagens, que será delineado em seguida.

Resolveremos primeiramente o problema para uma trajetória qualquer, para então calcularmos o caso particular de trajetórias inerciais.

Seja  $x$  e  $x'$  pontos quaisquer do espaço-tempo. Sabemos que sem o espelho a solução da função de Wightman positiva para um campo escalar sem massa é

$$G_M^+(x, x') = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{(t - t' - i\epsilon)^2 - (x_1 - x'_1)^2 - (x_2 - x'_2)^2 - (x_3 - x'_3)^2}. \quad (3.36)$$

Esta função determina uma correlação das flutuações de um campo no ponto  $x$  e o ponto  $x'$ . Consideramos aqui o ponto  $x$  a “fonte” e o ponto  $y$  o ponto de influência ou sorvedouro, em uma analogia ao caso eletromagnético, onde temos uma carga e o ponto onde queremos calcular o campo. Considerando a contribuição do espelho - uma “carga imagem” situada em  $(x_1, x_2, -x_3)$  - teríamos para a função de Wightman

$$\begin{aligned} G^+(x, x') &= G_M^+ + G_e^+ \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{(t - t' - i\epsilon)^2 - (x_1 - x'_1)^2 - (x_2 - x'_2)^2 - (x_3 - x'_3)^2} + \\ &\quad + \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{(t - t' - i\epsilon)^2 - (x_1 - x'_1)^2 - (x_2 - x'_2)^2 - (x_3 + x'_3)^2}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

o que satisfaz as condições de contorno desejadas: ela se anula tanto para  $x_3 = 0$  quanto para  $x'_3 = 0$ , ou seja, não há comunicação entre quaisquer dos pontos se um deles está situado na origem, já que o campo na origem é zero. Determinamos portanto a função

de Wightman para um campo escalar na presença de um espelho. Nesta expressão vemos que a introdução de um espelho quebra a simetria de translação, conforme é esperado.

### 3.4.1 Detectores com posições fixas na presença de um espelho

Estudaremos nesta seção a taxa de transição para dois detectores parados com um espelho presente na origem.

Fixemos o detector de momento de monopolo  $m_1$  na posição  $\vec{r}_1 = (0,0,\eta/2)$ , onde  $\eta/2$  é a distância deste detector até o espelho, e consideremos o outro detector parado na posição  $\vec{r}_2 = (0,0,\eta/2+d)$ , onde  $d$  é a distância entre o segundo e o primeiro detector (podendo inclusive ser negativa, se o segundo detector estiver à esquerda do primeiro; consideramos  $\eta$  sempre positivo).

Fora a contribuição usual para os detectores parados, estudados na seção (3.3), há contribuições de quatro cargas imagens, uma para cada função de Wightman, cargas estas localizadas conforme a figura (3.3). As contribuições dos termos proporcionais a  $G^+(\vec{r}_1(\tau),\vec{r}_1(\tau'))$  e  $G^+(\vec{r}_2(\tau),\vec{r}_2(\tau'))$  já foram estudados na seção (2.4). A única diferença que deve ser considerada é que o detector percorrendo a trajetória  $\vec{r}_2$  está a uma distância  $\eta/2 + d$  do espelho. Para as funções de Wightman restantes, seguindo (3.37), temos

$$\begin{aligned} G^+(\vec{r}_1(\tau),\vec{r}_2(\tau')) &= G^+(\vec{r}_2(\tau),\vec{r}_1(\tau')) \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{(t-t'-i\epsilon)^2 - d^2} + \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{(t-t'-i\epsilon)^2 - (\eta+d)^2}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

que por construção se anula para  $\eta = 0$  ou  $d = -\eta/2$ .

O resultado total da taxa relativa às quatro contribuições destas cargas imagens é então

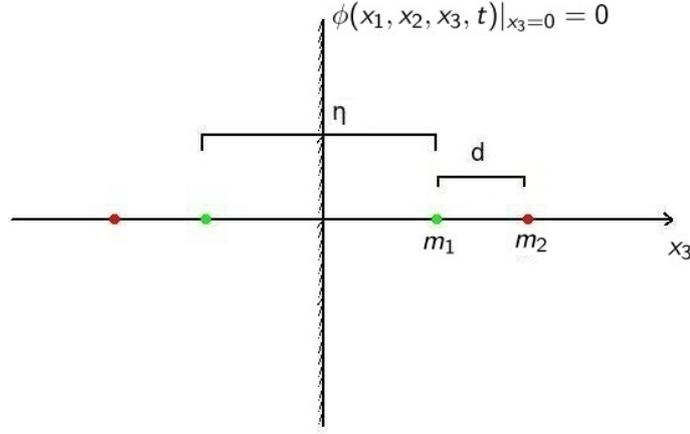


Figura 3.3: Distribuição de “cargas imagens”.

$$\begin{aligned}
 \lim_{\tau_f \rightarrow \infty} R_e(E_f, E_i, \eta, d) &= c_1^2 \left( |m_{fi}^{(1)}|^2 \frac{E_f - E_i}{2\pi} \Theta(E_i - E_f) \frac{\text{sen}(E_f - E_i)\eta}{(E_f - E_i)\eta} + \right. \\
 &\quad + |m_{fi}^{(2)}|^2 \frac{E_f - E_i}{2\pi} \Theta(E_i - E_f) \frac{\text{sen}(E_f - E_i)(\eta + 2d)}{(E_f - E_i)(\eta + 2d)} + \\
 &\quad \left. + m_{fi}^{(1)} m_{fi}^{(2)} \frac{E_f - E_i}{\pi} \Theta(E_i - E_f) \frac{\text{sen}(E_f - E_i)(\eta + d)}{(E_f - E_i)(\eta + d)} \right). \quad (3.39)
 \end{aligned}$$

Para a taxa total do espelho relativa a transição  $|s\rangle \rightarrow |g\rangle$  temos para a expressão acima

$$\begin{aligned}
 \lim_{\tau_f \rightarrow \infty} R_e(w_0, \Omega, d, \eta)_{|s\rangle \rightarrow |g\rangle} &= -c_1^2 \frac{w_0 + \Omega}{2\pi} \left( \frac{(m_{12}^{(1)})^2}{2} \frac{\text{sen}(w_0 + \Omega)\eta}{(w_0 + \Omega)\eta} + \frac{(m_{12}^{(2)})^2}{2} \frac{\text{sen}(w_0 + \Omega)(\eta + 2d)}{(w_0 + \Omega)(\eta + 2d)} + \right. \\
 &\quad \left. + m_{12}^{(1)} m_{12}^{(2)} \frac{\text{sen}(w_0 + \Omega)(\eta + d)}{(w_0 + \Omega)(\eta + d)} \right). \quad (3.40)
 \end{aligned}$$

Somando (3.40) e (3.31) temos que a taxa total é portanto

$$\begin{aligned}
\lim_{\tau_f \rightarrow \infty} R(w_0, \Omega, d, \eta)_{|s\rangle \rightarrow |g\rangle} = & c_1^2 \frac{w_0 + \Omega}{2\pi} \left( \frac{(m_{12}^{(1)})^2}{2} \left( 1 - \frac{\text{sen}(w_0 + \Omega)\eta}{(w_0 + \Omega)\eta} \right) + \right. \\
& + \frac{(m_{12}^{(2)})^2}{2} \left( 1 - \frac{\text{sen}(w_0 + \Omega)(\eta + 2d)}{(w_0 + \Omega)(\eta + 2d)} \right) + \\
& \left. + m_{12}^{(1)} m_{12}^{(2)} \left( \frac{\text{sen}(w_0 + \Omega)d}{(w_0 + \Omega)d} - \frac{\text{sen}(w_0 + \Omega)(\eta + d)}{(w_0 + \Omega)(\eta + d)} \right) \right). \tag{3.41}
\end{aligned}$$

Esta taxa pode ser maior ou menor do que a taxa de transição sem o espelho, dependendo das distâncias  $\eta/2$  e  $d$  e os respectivos sinais das funções seno. Consideremos um caso particular: calculemos a taxa para a transição  $|s\rangle \rightarrow |g\rangle$  quando o detector que percorre a trajetória  $\vec{r}_2(\tau)$  está parado na origem, o que implica  $d = -\eta/2$  na expressão acima. Temos portanto

$$\lim_{\tau_f \rightarrow \infty} R(w_0, \Omega, d)_{|s\rangle \rightarrow |g\rangle} = c_1^2 \frac{w_0 + \Omega}{2\pi} \frac{(m_{12}^{(1)})^2}{2} \left( 1 - \frac{\text{sen}(w_0 + \Omega)\eta}{(w_0 + \Omega)\eta} \right). \tag{3.42}$$

Provamos então que, mesmo se um detector estiver na origem em uma superposição dos estados  $|g_1\rangle$  e  $|e_1\rangle$ , origem onde o campo é nulo devido à presença de um espelho, o detector ainda será encontrado depois de um tempo longo o suficiente apenas no estado  $|g_1\rangle$ : o detector decairá por estar emaranhado ao detector na posição  $x_3 \neq 0$ , com a taxa de transição acima.

No mais, para a transição  $|a\rangle \rightarrow |g\rangle$  temos que a taxa de transição é

$$\begin{aligned}
 \lim_{\tau_f \rightarrow \infty} R(w_0, \Omega, d, \eta)_{|s\rangle \rightarrow |g\rangle} = & c_1^2 \frac{w_0 - \Omega}{2\pi} \left( \frac{(m_{12}^{(1)})^2}{2} \left( 1 - \frac{\text{sen}(w_0 - \Omega)\eta}{(w_0 - \Omega)\eta} \right) + \right. \\
 & + \frac{(m_{12}^{(2)})^2}{2} \left( 1 - \frac{\text{sen}(w_0 - \Omega)(\eta + 2d)}{(w_0 - \Omega)(\eta + 2d)} \right) + \\
 & \left. - m_{12}^{(1)} m_{12}^{(2)} \left( \frac{\text{sen}(w_0 - \Omega)d}{(w_0 - \Omega)d} - \frac{\text{sen}(w_0 - \Omega)(\eta + d)}{(w_0 - \Omega)(\eta + d)} \right) \right). \tag{3.43}
 \end{aligned}$$

Para esta transição, se o detector que percorre a trajetória  $\vec{r}_2(\tau)$  está parado na origem, isto é, se  $d = -\eta/2$ , temos

$$\lim_{\tau_f \rightarrow \infty} R(w_0, \Omega, d)_{|a\rangle \rightarrow |g\rangle} = c_1^2 \frac{w_0 - \Omega}{2\pi} \frac{(m_{12}^{(2)})^2}{2} \left( 1 - \frac{\text{sen}(w_0 - \Omega)\eta}{(w_0 - \Omega)\eta} \right). \tag{3.44}$$

Os cálculos para as transições  $|e\rangle \rightarrow |a\rangle$  e  $|e\rangle \rightarrow |s\rangle$  são análogos.

### 3.5 Emissão espontânea na presença de dois espelhos

Sejam dois detectores em posições fixas, confinados entre dois espelhos colocados nos planos  $z = 0$  e  $z = 2l$ . Fixemos o detector de momento de monopolo  $m_1$  na posição  $\vec{r}_1 = (0, 0, z_1)$ , e fixemos o outro detector na posição  $\vec{r}_2 = (0, 0, z_2)$ .

Como na seção anterior, temos que as contribuições dos termos proporcionais a  $G^+(\vec{r}_1(\tau), \vec{r}_1(\tau'))$  e  $G^+(\vec{r}_2(\tau), \vec{r}_2(\tau'))$  já foram estudadas no segundo capítulo - em específico, na seção (2.5). Portanto, resta determinar as contribuições referentes aos termos  $G^+(\vec{r}_1(\tau), \vec{r}_2(\tau'))$  e  $G^+(\vec{r}_2(\tau), \vec{r}_1(\tau'))$ .

Utilizando-se do método das imagens, a construção geral da função de Wightman dentro do espelho para dois pontos  $x$  e  $x'$  quaisquer do espaço tempo é

$$G^+(x, x') = -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{(t-t'-i\epsilon)^2 - (z-z'-2lk)^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2} + \right. \\ \left. - \frac{1}{(t-t'-i\epsilon)^2 - (z+z'-2lk)^2 - (x-x')^2 - (y-y')^2} \right). \quad (3.45)$$

Para a função de Green  $G^+(\vec{r}_1(\tau), \vec{r}_2(\tau'))$  temos

$$\lim_{\tau_f \rightarrow \infty} R'_{(\vec{r}_1, \vec{r}_2)} = -\frac{1}{2\pi^2} \Theta(E_i - E_f) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \frac{\text{sen}(E_f - E_i)(z_1 - z_2 - 2lk)}{z_1 - z_2 - 2lk} + \right. \\ \left. - \frac{\text{sen}(E_f - E_i)(z_1 + z_2 - 2lk)}{z_1 + z_2 - 2lk} \right). \quad (3.46)$$

Para a função de Green  $G^+(\vec{r}_2(\tau), \vec{r}_1(\tau'))$  temos

$$\lim_{\tau_f \rightarrow \infty} R'_{(\vec{r}_1, \vec{r}_2)} = -\frac{1}{2\pi^2} \Theta(E_i - E_f) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \frac{\text{sen}(E_f - E_i)(z_2 - z_1 - 2lk)}{z_2 - z_1 - 2lk} + \right. \\ \left. - \frac{\text{sen}(E_f - E_i)(z_2 + z_1 - 2lk)}{z_2 + z_1 - 2lk} \right). \quad (3.47)$$

Uma vez que

$$\frac{\text{sen}(E_f - E_i)(z_2 - z_1 - 2lk)}{z_2 - z_1 - 2lk} = \frac{\text{sen}(E_f - E_i)(z_1 - z_2 + 2lk)}{z_1 - z_2 + 2lk} \quad (3.48)$$

e podemos no somatório realizar a substituição  $k' = -k$  sem modificar o resultado, temos que  $G^+(\vec{r}_1(\tau), \vec{r}_2(\tau')) = G^+(\vec{r}_2(\tau), \vec{r}_1(\tau'))$ .

Por fim, temos para a taxa de transição total que

$$\begin{aligned}
 \lim_{\tau_f \rightarrow \infty} R &= c_1^2 \frac{|(E_f - E_i)| \Theta(E_i - E_f)}{2\pi} \left( |m_{fi}^{(1)}|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \frac{\text{sen } 2k(E_f - E_i)l}{2k(E_f - E_i)l} - \frac{\text{sen } (E_f - E_i)(2z_1 - 2kl)}{(E_f - E_i)(2z_1 - 2kl)} \right) + \right. \\
 &+ |m_{fi}^{(2)}|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \frac{\text{sen } 2k(E_f - E_i)l}{2k(E_f - E_i)l} - \frac{\text{sen } (E_f - E_i)(2z_2 - 2kl)}{(E_f - E_i)(2z_2 - 2kl)} \right) + \\
 &\left. + 2m_{fi}^{(1)} m_{fi}^{(2)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\text{sen } (E_f - E_i)(z_1 - z_2 - 2lk)}{(z_1 - z_2 - 2lk)|(E_f - E_i)|} - \frac{\text{sen } (E_f - E_i)(z_1 + z_2 - 2lk)}{(z_1 + z_2 - 2lk)|(E_f - E_i)|} \right] \right). \tag{3.49}
 \end{aligned}$$

Para a transição do estado simétrico ao estado fundamental, onde  $E_f - E_i = -w_0 - \Omega$ , temos que

$$\begin{aligned}
 \lim_{\tau_f \rightarrow \infty} R &= c_1^2 \frac{w_0 + \Omega}{2\pi} \left( \frac{(m_{12}^{(1)})^2}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \frac{\text{sen } 2kw_0l(w_0 + \Omega)}{2kw_0l} - \frac{\text{sen } (w_0 + \Omega)(2z_1 - 2kl)}{(w_0 + \Omega)(2z_1 - 2kl)} \right) + \right. \\
 &+ \frac{(m_{12}^{(2)})^2}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \frac{\text{sen } 2kl(w_0 + \Omega)}{2kl(w_0 + \Omega)} - \frac{\text{sen } (w_0 + \Omega)(2z_2 - 2kl)}{(w_0 + \Omega)(2z_2 - 2kl)} \right) + \\
 &\left. + m_{12}^{(1)} m_{12}^{(2)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\text{sen } (w_0 + \Omega)(z_1 - z_2 - 2lk)}{(w_0 + \Omega)(z_1 - z_2 - 2lk)} - \frac{\text{sen } (w_0 + \Omega)(z_1 + z_2 - 2lk)}{(w_0 + \Omega)(z_1 + z_2 - 2lk)} \right] \right). \tag{3.50}
 \end{aligned}$$

Esta taxa de transição resulta zero se  $z_1 = 0$  e  $z_2 = 2l$ , isto é, não haverá decaimento se cada um dos detectores estiverem localizados em um espelho. A taxa para as outras transições são construídas analogamente.

## Capítulo 4

# Conclusões

Nesta dissertação deduzimos e discutimos o Efeito Unruh através da quantização no espaço de Rindler (capítulo 1.3) e do modelo de detector de partículas chamado detector de Unruh-DeWitt (capítulo 2). Em um apêndice, discutimos as consequências deste efeito no entendimento da teoria quântica de campos (apêndice A).

Nosso principal foco, contudo, foi considerar um sistema composto por dois detectores de Unruh-DeWitt, sistema que admite estados quânticos emaranhados. Consideramos dois estados quânticos emaranhados, o estado simétrico e o estado anti-simétrico.

Utilizando-se de teoria da perturbação até a primeira ordem, resolvemos o problema geral de determinar a probabilidade de transição. Da solução geral vimos que, se os detectores estiverem emaranhados, há correlações do campo entre pontos cujo intervalo é do tipo espaço que contribuem para a taxa de transição dos detectores. Em outras palavras, a presença de um detector emaranhado a outro influencia na taxa de transição deste.

Especificamos então transições e trajetórias particulares.

Examinando trajetórias inertes para os átomos, deduzimos que só ocorrem processos de emissão espontânea. Em particular, calculamos a taxa de transição referente as transições dos estados emaranhados anti-simétrico e simétrico para o estado fundamen-

tal. Deduzimos, portanto, que o estado se desemaranha devido às flutuações quânticas do vácuo, desemaranhamento este que, de forma não restrita a interação específica que estudamos, pode vir a dificultar aplicações que exigem estados emaranhados estáveis, como a realização de um computador quântico.

Por último, consideramos a inclusão de espelhos para este detector de Unruh-DeWitt modificado. Considerando um espelho, mostramos que um átomo localizado na mesma posição que um espelho e no estado excitado  $|e_1\rangle$  irá decair ao estado fundamental  $|g_1\rangle$  devido a correlação com as flutuações quânticas do vácuo presentes na linha de universo da outra partícula. Considerando dois espelhos, mostramos que se cada partícula está localizada em um espelho, os estados emaranhados simétricos e anti-simétricos são estáveis.

Possíveis trabalhos futuros que seguem esta linha de pesquisa podem incluir a generalização para modelos de detector de Unruh-DeWitt mais realistas, como os que incluem um detector rígido de extensão finita ([Schlicht, 2004](#)), detectores cuja interação não é ligada ou desligada de forma brusca ([Satz, 2007](#)), detectores que são compostos apenas por campos ([Thoma, 2013](#)) ([Brown et al., 2013](#)), e inclusão de trajetórias não inerciais.

# Referências Bibliográficas

- Apostol, T. M. (1967). *Calculus, Vol. 1: One-Variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra*. John Wiley and Sons Inc.
- Bacon, D. M. (2001). Decoherence, Control, and Symmetry in Quantum Computers. Tese de doutorado, University of California, Berkeley.
- Bailey, J., Borer, K., Combley, F., Drumm, H., Krienen, F., Lange, F., Picasso, E., von Ruden, W., Farley, F. J. M., Field, J. H., Flegel, W., and Hattersley, P. M. (1977). Measurements of relativistic time dilatation for positive and negative muons in a circular orbit. *Nature*, 268:301 – 305.
- Barton, G. (1989). *Elements of Green's Functions and Propagation: Potentials, Diffusion, and Waves*. Oxford University Press.
- Bohr, N. (1935). Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? *Physical Review*, 48:696–702.
- Bremm, G. N. (2014). Efeitos de uma Eletrodinâmica Não-Local na Radiação de Corpo Negro. Dissertação de mestrado, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro.
- Brown, E., Martinez, E., Menicucci, N., and Mann, R. (2013). Detectors for probing relativistic quantum physics beyond perturbation theory. *Phys. Rev. D*, 87:084062.

- Davies, P. and Birrell, N. (1982). *Quantum fields in curved space*. Cambridge University Press.
- Davies, P. C. W. (1975). Scalar production in schwarzschild and rindler metrics. *Journal of Physics A*, 8:609–616.
- DeWitt, B. (1975). Quantum Field Theory in Curved Spacetime. *Physics Reports C*, 19:295–357.
- Dicke, R. (1954). Coherence in Spontaneous Radiation Processes. *Physics Review*, 93:99–110.
- Einstein, A., Podolsky, B., and Rosen, N. (1935). Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? *Physical Review*, 47:777–180.
- Fulling, S. (1973). Nonuniqueness of Canonical Field Quantization in Riemannian Space-Time. *Physics Review D*, 7:2850–2862.
- Greiner, W., Reinhardt, J., and Bromley, D. (1997). *Field Quantization*. Springer.
- Griffiths, D. (1999). *Introduction to electrodynamics*. Addison Wesley.
- Koks, D. (2006). *Explorations in mathematical physics*. Springer.
- Loudon, R. (2000). *The Quantum Theory of Light*. Oxford University Press.
- Lowell, B. and Maclay, J. G. (1969). Vacuum stress between conducting plates: An image solution. *Phys. Rev.*, 184:1272–1279.
- Mukhanov, V. and Winitzki, S. (2007). *Introduction to quantum effects in gravity*. Cambridge University Press.
- Satz, A. (2007). Then again, how often does the unruh–dewitt detector click if we switch it carefully? *Classical and Quantum Gravity*, 24(7):1719–1736.

- Schlicht, S. (2004). Considerations on the Unruh effect: causality and regularization. *Class. Quantum Grav.*, 21:4647–4664.
- Schrödinger, E. (1935). Discussion of probability relations between separated systems. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 31:555–563.
- Sciama, D., Candelas, P., and Deutsch, D. (1981). Quantum field theory, horizons and thermodynamics. *Advances in Physics*, 30:328–366.
- Segal, I. E. (1991). Is the physical vacuum really lorentz-invariant? 379:137–143.
- Shankar, R. (1994). *Principles of quantum mechanics*. Plenum Press.
- Svaiter, N., Ford, L., and Lyra, M. (1994). Radiative properties of a two-level system in the presence of mirrors. *Physics Review A*, 49:1378–1386.
- Svaiter, N. and Svaiter, B. F. (1992). Inertial and noninertial particle detectors and vacuum fluctuations. *Physics Review D*, 46:5267–5277.
- Teller, P. (1997). *An Interpretive Introduction to Quantum Field Theory*. Princeton University Press.
- Thoma, F. (2013). A quantum field theoretical detector model for probing the unruh effect. *ArXiv e-prints*.
- Unruh, W. (1976). Notes on black-hole evaporation. *Phys. Rev. D*, 14:870–892.
- Vedral, V. (2007). *Introduction to quantum information*. Oxford University Press.

## Apêndice A

# Partículas quânticas e o Efeito

## Unruh

Neste apêndice discutiremos as consequências provocadas pelo Efeito Unruh para o entendimento do conceito de “partícula” em Teoria Quântica de Campos. Antes disso, mostraremos como esta teoria abarca características de partículas em sua descrição do mundo, para termos como referência para qual conceito o Efeito Unruh impõe uma modificação. O tratamento dado neste apêndice seguirá a referência [Teller \(1997\)](#).

### A.1 O que partículas quânticas não são

Desde o seu surgimento, teorias quânticas provocaram revisões no conceito de partícula. Na mecânica quântica<sup>1</sup>, o Princípio da Incerteza de Heisenberg já nos obriga a abandonar trajetórias bem definidas no espaço-tempo como atributos de uma partícula. Além disto, esta partícula comporta-se também como uma onda; para ela é válido o princípio da superposição, isto é, se a partícula possui um estado correspondente a um

---

<sup>1</sup>Por “mecânica quântica” aqui nos referimos a teoria quântica onde os graus de liberdade quantizados são os de uma partícula (isto é, o momento linear generalizado  $p$  e a posição  $q$ ) e não os infinitos graus de liberdade associados a um campo.

determinado valor de uma propriedade física (spin up na direção  $z$  de um eixo cartesiano, por exemplo) e outro estado para outro valor da mesma propriedade física (spin down na mesma direção, continuando o exemplo), qualquer combinação linear destes estados também será um estado da partícula (neste exemplo, um spin bem definido em alguma outra direção que não  $z$ ), fenômeno este que é típico de ondas.

Teller (Teller, 1997, p. 8) entende propriedades de estados superpostos em termos de *propensividades*, isto é, uma propriedade exibida quando determinadas condições de ativação estão presentes. Teller escreve que “se a propriedade  $Q$  é a superposição das propriedades  $P_1$  e  $P_2$ , então  $Q$  é uma propriedade, mas também inclui a propensividade de em um processo de medida exibir as propriedades  $P_1$  ou  $P_2$ ”.

A teoria quântica de campos provoca mais uma revisão no conceito de partícula, já indicada na mecânica quântica através do fenômeno de *partículas idênticas*. Como exemplo deste fenômeno, estados como  $|+\rangle_1 \otimes |-\rangle_2$  e  $|-\rangle_1 \otimes |+\rangle_2$ , onde a partícula 1 está em estado de spin up e a partícula 2 em um estado de spin down e onde partícula 1 está em estado de spin down e a partícula 2 em um estado de spin up<sup>2</sup>, respectivamente, nunca ocorrem no mundo físico: apenas combinações simétricas ou anti-simétricas destes estados, a saber,  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_1 \otimes |-\rangle_2 + |-\rangle_1 \otimes |+\rangle_2)$  e  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_1 \otimes |-\rangle_2 - |-\rangle_1 \otimes |+\rangle_2)$ . Para todos os efeitos, tais partículas são portanto indistinguíveis, e a mecânica quântica falha em apresentar motivos para elas o serem: é um fato empírico que deve ser acrescentado para que as previsões experimentais da teoria estejam corretas.

A teoria quântica de campos, no entanto, descreve “partículas quânticas” que necessariamente são indistinguíveis. Podermos ver isto através dos estados desta teoria, definidos no espaço de Fock. O campo quantizado pode ser decomposto em ondas planas (como a expressão (2.2)), cuja expressão contém operadores de criação e destruição. Destes operadores podemos construir o operador número  $\hat{n}(\vec{p}) = \hat{a}(\vec{p})\hat{a}^\dagger(\vec{p})$ . Os operadores  $\hat{n}(\vec{p})$  e  $\hat{n}(\vec{p}')$  comutam entre si. Podemos portanto encontrar um conjunto comum

---

<sup>2</sup>A notação utilizada é a presente no livro Quantum Mechanics, de Cohen-Tannoudji, Bernard Diu e Frank Laloe.

de autoestados para estes operadores. Estes autoestados formam uma base para o espaço de Hilbert da segunda quantização, o chamado espaço de Fock, e o operador  $\hat{n}(\vec{p})$  nos diz quantas partículas o estado contém com momento bem definido  $\vec{p}$ .

Estes estados automaticamente descrevem “partículas idênticas”. Como exemplo, um estado  $|4\vec{p}_1, 2\vec{p}_2\rangle$  pode especificar quatro ocorrências de momento  $\vec{p}_1$  e duas ocorrências de momento  $\vec{p}_2$ , mas a descrição não diferencia as partículas com um momento específico, de forma que diferenciá-las não é mais possível.

Esta é a diferença para o conceito de “partícula” que a teoria quântica de campos impõe. Partículas costumavam poder ser contadas, ordenadas e trocadas. Ao contar partículas, em princípio poderíamos contar em uma ordem diferente. Da mesma forma, é possível pensar nas partículas com todas suas propriedades trocadas. Vemos agora que em uma teoria quântica de campos isto não é mais possível. Teller (Teller, 1997, p. 28) escreve que *partículas quânticas são meramente agregadas*. Pode-se agregar partículas sem, contudo, existir qualquer diferença de ordenamento neste agregamento.

Utilizando-se de uma terminologia da filosofia, podemos dizer que partículas não mais possuem *primitive thisness*<sup>3</sup>, isto é, que um objeto possui identidade independente de suas propriedades, que existe neste objeto um substrato, uma substância que herda propriedades. Se um objeto possui *primitive thisness*, seria possível trocar todas as suas propriedades e ainda falar sobre o mesmo objeto. Conforme demonstrado, isto não é possível em uma teoria quântica de campos.

Uma boa pergunta a ser feita agora é porquê ainda utilizamos o termo “partícula”, se mostramos seguidamente que as partículas existentes descritas em uma teoria quântica não obedecem diversas propriedades esperadas de uma partícula. A esse fato deve-se duas características: as partículas só podem ser agregadas em unidades discretas, e manifestam-se de forma bem localizada (embora nunca com uma posição exatamente definida). Nenhuma dessas características é típica de um campo clássico ou ondas.

---

<sup>3</sup>Esta é a terminologia utilizada por Teller. Também é comum referir-se a *primitive thisness* como *ecceidade*.

Por último, salientamos que o espaço de Fock contém sobretudo estados de número de partículas indefinido, isto é, em um estado de superposição. Esta é outra característica que argumenta contra partículas quânticas possuírem *primitive thisness*. Por exemplo, poderíamos ter um estado em uma superposição de ter uma partícula com momento  $\vec{p}$  e duas partículas com momento  $\vec{p}$ .

## A.2 O que são partículas de Rindler?

O estado de vácuo de Minkowski é um estado em que observadores iniciais concordam não possuir nenhuma partícula quântica. No entanto, como vimos no segundo capítulo desta dissertação, um detector de partículas interagindo com um campo no estado  $|0\rangle_M$  registrará partículas como se estivesse em um banho térmico de partículas, chamadas partículas de Rindler.

À primeira vista este fato pode causar consternação. Se o estado  $|0\rangle_M$  é um estado em que nenhuma partícula ocorre, como pode um detector detectá-las, independente de como se move? Além disto, o vácuo supostamente é um estado ausente de qualquer coisa, então como poderia uma quantidade exibir um valor não-nulo no vácuo? Para um valor não-nulo ocorrer, deveria existir algo para ter este valor?

Estas questões possuem uma leitura errada do significado de um estado quântico.  $|0\rangle_M$  é o vácuo, um estado em que não ocorre partículas para um referencial inercial. Mas também é um estado que pode ser escrito como uma combinação linear de auto-estados de operadores que não comutam com o operador número, isto é, observáveis complementares a este. Neste sentido, é um estado com propensividade para exibir diversos valores de outras quantidades físicas, e, sem qualquer privilégio em relação a outros observáveis, o operador número que define o conteúdo de partículas para um observador no espaço de Rindler, construído como no primeiro capítulo desta dissertação.

Se pensarmos em partículas como possuindo *primitive thisness*, como possuindo um

substrato que herda propriedades, não aceitaríamos a possibilidade do Efeito Unruh-Davies: o que há para herdar características no vácuo? No entanto, se entendermos o estado quântico como um estado com propensividades de exibir diferentes conteúdos de partículas - como o usual em uma teoria quântica de campos -, o Efeito Unruh pode ser surpreendente, mas é consistente com a teoria como um todo.

Para exemplificarmos, um estado como  $|1_{\vec{p}}, 0, 0, \dots\rangle_M$  há exatamente uma partícula para um observador no espaço de Minkowski, e propensividades para manifestar diversos tipos de partículas para um observador no espaço de Rindler. Em  $|1_{\vec{p}}, 0, 0, \dots\rangle_R$  o mesmo comentário se aplica, com o papel dos observadores no espaço de Minkowski e no espaço de Rindler trocados. Novamente, surpreendente, mas coerente.

Na seção anterior, vimos que a teoria quântica modifica nosso conceito de partícula. Abandonamos as trajetórias bem definidas e a possibilidade de distingui-las, mantendo a manifestação de forma bem localizada das partículas e o fato delas serem agregadas em unidades discretas. O Efeito Unruh-Davies causa mais uma modificação: descobrimos que há diversos “tipos” de partícula, cada um relativo ao movimento de um observador.