

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Título: q -generalização da representação da delta de Dirac em ondas planas e da transformada de Fourier inversa

Candidato: Max Jáuregui

Orientado por: Constantino Tsallis

Rio de Janeiro, 4 de março de 2011

*A mi familia,
por todo su apoyo y afecto,
incluso en los tiempos difíciles.*

Agradecimentos

Agradeço a meus pais, Máximo e Rosa, e a minha irmã Karen por todo o apoio e o carinho que me têm dado, e por confiar em mim e no que sou capaz de fazer. Faço extensivo meu agradecimento a todos os integrantes da minha “grande família”, pelas escassas mas saudáveis reuniões.

Ao professor Constantino Tsallis, meu orientador, primeiramente pelo excelente minicurso sobre mecânica estatística não extensiva que deu em Lima–Peru, o qual foi determinante na minha escolha pela área de mecânica estatística, em segundo lugar pela acolhida no seu grupo e pela sua consideração ainda sendo eu um mestrando, e finalmente pela exigência na apresentação de resultados, pois devido a isso, aprendi muitas coisas novas.

Aos professores Fernando Nobre, Ivan de Oliveira, João Sinnecker, pelas boas aulas que fizeram. Agradeço em especial ao professor José Helayel por ser, além de um ótimo professor, um bom exemplo a seguir.

Ao professor Evaldo Curado, por dar-me a oportunidade de ser monitor da cadeira de “mecânica estatística”, da qual aprendi bastante.

Ao professor Rênio Mendes por incentivar-me no estudo formal das q -generalizações de conceitos matemáticos. Infelizmente ainda tenho dúvidas.

Obviamente o fator financeiro foi muito importante para a realização deste trabalho. Por isso agradeço às entidades CNPq e Faperj pelo apoio financeiro ao longo destes dois anos.

Agradeço a todos meus professores na UNI (Universidad Nacional de Ingeniería) por terem contribuído na minha formação em física. Agradeço nesta mesma linha a todos meus amigos da faculdade pelos gratos momentos de conversa e pelo futebol!, entre eles destacam Alexandra Dávila, Carlos Olivares, Cynthia Contre-ras, Daniel Alva, Eduardo Jimenez, Edward Quijada, Elizabeth Pastrana, Enrique Arias, Enrique Mayta, Janeth Valverde, Javier Pachas, José Rabanal, José Truyenque, Luis Durand, Noé Morales, Sara Parraguez e Yesenia Pastrana.

Ao Enrique Arias e ao Martín Aparicio pelas recomendações e pela acolhida no seu apartamento quando cheguei ao Rio. Agradeço nesta mesma linha a meus amigos peruanos do CBPF, especialmente pelos almoços e as comidas peruanas.

Ao Lucas Cardoso pelas discussões e viagens na matemática, as quais me ajudaram em parte na elaboração desta dissertação.

A todos os amigos peruanos, colombianos e brasileiros que fiz nos dois anos que estive no Rio. Entre eles destacam Ada Cueva, Alan Maicá, Alejandro Rios, Ana Paula Lima, Azucena Rivasplata, Bruno Dias, Bruno Gomes, César Raitz, Cinthia Pascueto, Danielle Tostes, Diego González, Edgar Marcelino, Esley Scatena, Fernanda Deus, Guillermo Dueñas, Isabel Souza, Jefferson Morais, Justiniano Quispe, Kim Veiga, Lucas Cardoso, Leonardo Cirto, María Elidaiana, Marília Carneiro, Martha Nogueira, Maurício Ribeiro, Norka Fernandez, Ra-quele Checca, Rodrigo Turcati e Thamys Abrahão.

À Bete e ao Ricardo da CFC, à Elizabeth, ao Almerio e à Claudia como também ao pessoal da biblioteca, o meu “muito obrigado” pela ajuda e a gentileza ao fazerem os pedidos que precisava.

q -generalização da representação da delta de Dirac em ondas planas e da transformada de Fourier inversa

Max Jáuregui

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas e Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia para Sistemas Complexos

RESUMO

Uma q -generalização das ondas planas, chamadas de q -ondas planas, é introduzida a partir da definição da função q -exponencial, a qual é bem conhecida e amplamente estudada na literatura sobre mecânica estatística não extensiva. Resulta que as q -ondas planas são normalizáveis, e que a delta de Dirac pode ser representada por uma combinação linear de q -ondas planas. Por outro lado, mostra-se que é possível determinar a inversa da q -transformada de Fourier, a qual é relevante na prova do teorema central do limite q -generalizado, no espaço de densidades de probabilidade ao considerar certa informação adicional relacionada com o conceito dos q -momentos. Além disso, uma q -generalização da transformada de Fourier inversa é obtida, com a qual uma densidade de probabilidade pode ser determinada a partir da sua q -transformada de Fourier.

ABSTRACT

We introduce a q -generalization of the plane waves, namely the q -plane waves, from the definition of the q -exponential function, which is well-known and widely studied in the literature on nonextensive statistical mechanics. We prove that the q -plane waves are normalizable, and also that Dirac delta can be represented by a linear combination of q -plane waves. On the other hand it is shown that it is possible to determine the inverse of the q -Fourier transform, which is relevant in the proof of the q -generalized central limit theorem, in the space of probability densities by considering some extra information related to the concept of the q -moments. Moreover, we obtain a q -generalization of the inverse Fourier transform, which can be used to determine a probability density from its q -Fourier transform.

Conteúdo

1	Introdução	2
2	As q-ondas planas	5
2.1	Definição	5
2.2	q -seno e q -cosseno	5
2.3	Normalizabilidade das q -ondas planas	5
3	A distribuição $\delta_q(x)$	6
3.1	Introdução	6
3.2	Definição preliminar	7
3.3	A constante de normalização c_q	8
4	A delta de Dirac como combinação linear de q-ondas planas	10
4.1	Introdução	10
4.2	Justificação empírica	10
4.3	Prova rigorosa	12
5	A densidade <i>escort</i> e a unicidade da inversa da q-transformada de Fourier	14
5.1	Introdução	14
5.2	Primeiro exemplo de Hilhorst	14
5.3	Variante do primeiro exemplo de Hilhorst	17
5.4	Segundo exemplo de Hilhorst	19

6 Um método para inverter a q-transformada de Fourier	20
6.1 Descrição do método	20
6.2 Caso particular $q \rightarrow 1$	22
7 Conclusões e perspectivas	22
Apêndice. Algumas propriedades da delta de Dirac	23

1 Introdução

A mecânica estatística é de fato uma das mais importantes áreas da física. Graças a ela, é possível explicar a termodinâmica dos corpos macroscópicos a partir de primeiros princípios, usando modelos para descrever seus componentes microscópicos. Do ponto de vista físico, este é o principal objetivo da mecânica estatística. A termodinâmica é uma teoria fenomenológica cujas leis têm sido amplamente testadas e verificadas experimentalmente.

Ludwig Boltzmann, quem pode ser considerado o pai da mecânica estatística, introduziu uma relação entre uma grandeza da termodinâmica chamada *entropia* e o número possível de *microestados* (arranjos microscópicos). Obviamente, para isto, ele acreditava na hipótese de que a matéria estava formada por átomos e/ou moléculas, assunto que foi duramente criticado nos tempos de Boltzmann.

Depois da morte de Boltzmann, com as contribuições de Willard Gibbs, a mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs estava fazendo sucesso pouco a pouco, pois a teoria explicava satisfatoriamente certos fenômenos conhecidos mas ainda inexplicados. Por exemplo, a radiação de corpo negro e o calor específico dos sólidos.

Devido à mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs funcionar tão bem com certos sistemas “famosos”, os quais atualmente se encontram em qualquer livro de mecânica estatística, considerou-se que a teoria de Boltzmann seria a única teoria da mecânica estatística e que só ela poderia descrever satisfatoriamente qualquer sistema, esquecendo das hipóteses que, com certeza, o mesmo Boltzmann levava em conta ao formular sua teoria. Esta forma de pensar está errada, pois a experiência indica que toda teoria tem uma região limitada de validade.

Uma das hipóteses na formulação da mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs é que os sistemas a serem analisados devem ser *ergódicos*. Um sistema ergódico é tal que, independentemente das condições iniciais, sua evolução temporal faz que todos os pontos do espaço de fase correspondente ao sistema sejam visitados após um tempo suficientemente longo. A mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs não explica, em geral, a termodinâmica de sistemas não ergódicos, pois fornece uma entropia não extensiva, o qual não está permitido segundo a termodinâmica.

Em 1988, Constantino Tsallis propôs em [1] uma generalização da mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs, nomeadamente a chamada *mecânica estatística não extensiva*. Ela descreve satisfatoriamente uma grande variedade de fenômenos físicos, como também é aplicada em outras áreas do conhecimento. Em geral, tratam-se de *sistemas não ergódicos* que apresentam interações de longo alcance e/ou correlações fortes entre seus componentes.

Desde sua criação, a mecânica estatística não extensiva tem sido desenvolvida amplamente por cientistas de diversas partes do mundo [2], sendo aplicada, por exemplo, em átomos frios em redes óticas dissipativas [3, 4], plasmas empoeirados [5], íons aprisionados [6], vidros de spin [7], turbulência na heliósfera [8, 9], criticalidade auto-organizada [10, 11, 12], experimentos em altas energias no LHC/CMS/CERN [13, 14] e no RHIC/PHENIX/Brookhaven [15, 16], mapas dissipativos de baixa dimensão [17, 18, 19, 20, 21], finanças [22, 23, 24], entre outros [25, 26, 27, 28, 29].

A mecânica estatística não extensiva está baseada numa entropia que depende, além das probabilidades dos microestados, de um parâmetro real q [1, 30, 31]. Esta entropia é comumente chamada *entropia não aditiva* ou *entropia de Tsallis* e denotada por S_q . Nos sistemas descritos pela mecânica estatística não extensiva, o parâmetro real q é ‘escolhido’ pelo sistema e faz que sua entropia seja extensiva. A entropia de Tsallis de um sistema discreto de W estados com probabilidades p_1, p_2, \dots, p_W , positivas, está dada por

$$S_q(p_j) = k_B \frac{1 - \sum_{j=1}^W p_j^q}{q-1}. \quad (1)$$

Verifica-se facilmente¹ que a entropia de Tsallis recai na entropia de Boltzmann² no limite $q \rightarrow 1$. Fisicamente, este limite corresponde aos sistemas ergódicos, onde a mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs funciona e a entropia de Boltzmann é extensiva.

Chama-se de *q -generalização* a uma generalização de um conceito mediante o uso do parâmetro real q . Então, a mecânica estatística não extensiva pode ser interpretada como uma *q -generalização* da teoria de Boltzmann-Gibbs, pois a entropia de Tsallis contém a entropia de Boltzmann como caso particular ($q \rightarrow 1$). Assim como a entropia, surgiram

¹Por exemplo, usando a regra de L'Hôpital.

²Refere-se à entropia de Boltzmann-Shannon-Von Neumann.

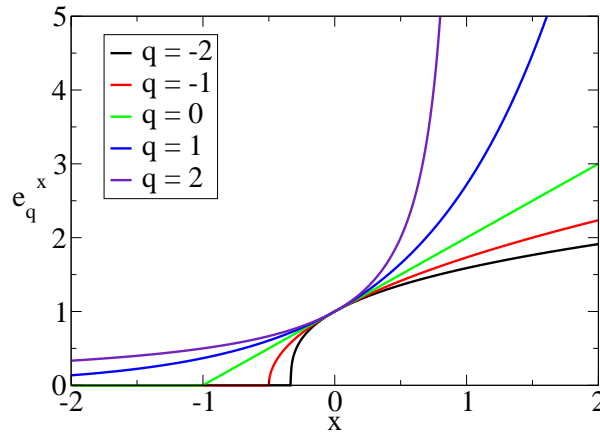


Fig. 1. A q -exponencial para diversos valores de q .

outras q -generalizações no desenvolvimento da mecânica estatística não extensiva [30, 31, 32]. A q -exponencial é uma das mais ressaltantes e está definida como sendo uma função $\exp_q(x)$ da variável complexa x tal que

$$\exp_q(x) = e_q^x = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } q = 1 \\ [1 + (1 - q)x]^{1/(1-q)} & \text{se } q \neq 1, 1 + (1 - q)x > 0 \\ 0 & \text{se } q < 1, 1 + (1 - q)x \leq 0 \\ \text{v. p. } [1 + (1 - q)x]^{1/(1-q)} & \text{se } q \neq 1, \text{Im}(x) \neq 0, \end{cases} \quad (2)$$

onde o operador v. p. indica que se deve considerar o valor principal da expressão à direita (ver Fig. 1). Nota-se que, para $q < 1$, a q -exponencial apresenta um *cut-off*, e quando $q > 1$, a q -exponencial possui um domínio limitado, nomeadamente o intervalo $(-\infty; 1/(q - 1))$.

Na mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs, a função exponencial tem um lugar privilegiado devido principalmente ao chamado fator ou peso de Boltzmann, o qual aparece ao otimizar a entropia de Boltzmann mantendo fixa a energia interna do sistema. Verifica-se que as probabilidades dos microestados que otimizam a entropia de Tsallis de um sistema são proporcionais, em geral, a uma q -exponencial. Assim o peso de Boltzmann fica q -generalizado na mecânica estatística não extensiva [30, 31]. Uma justificativa razoável para o uso da mecânica estatística não extensiva é o fato de aparecerem q -exponenciais na descrição ou nos resultados experimentais de certos fenômenos físicos (em geral sistemas não ergódicos como os mencionados no parágrafo inicial).

Conceitos matemáticos relacionados com a exponencial podem ser q -generalizados mediante o uso da q -exponencial. Por exemplo, as funções trigonométricas, a Gaussiana, a onda plana, a transformada de Fourier, entre outros. Nesta dissertação, introduzir-se-á, na seção 2, uma q -generalização das ondas planas, chamadas de q -ondas planas, as quais resultam ser normalizáveis. Além disso, mostrar-se-á na seção 4 que uma combinação linear de q -ondas planas pode representar a delta de Dirac, obtendo assim uma q -generalização da representação da delta de Dirac em ondas planas.

A q -Gaussiana é outra q -generalização de grande importância. Ela otimiza a entropia de Tsallis quando se mantém fixo o quadrado da energia. Ela está definida para qualquer $q < 3$ como sendo uma função $G_q(\beta; x)$ das variáveis reais $\beta > 0$ e x tal que (ver Fig. 2)

$$G_q(\beta; x) = \frac{\sqrt{\beta}}{C_q} e_q^{-\beta x^2}, \quad (3)$$

onde C_q é uma constante de normalização tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_q(\beta; x) dx = 1, \quad (4)$$

e está dada por

$$C_q = \begin{cases} \frac{2\sqrt{\pi}}{(3-q)\sqrt{1-q}} \Gamma\left(\frac{1}{1-q}\right) \left[\Gamma\left(\frac{3-q}{2(1-q)}\right)\right]^{-1} & \text{se } q < 1 \\ \sqrt{\pi} & \text{se } q = 1 \\ \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{q-1}} \Gamma\left(\frac{3-q}{2(q-1)}\right) \left[\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)\right]^{-1} & \text{se } 1 < q < 3. \end{cases} \quad (5)$$

Segundo o clássico teorema central do limite, se se tem uma sequência de variáveis aleatórias X_1, X_2, \dots, X_n definidas

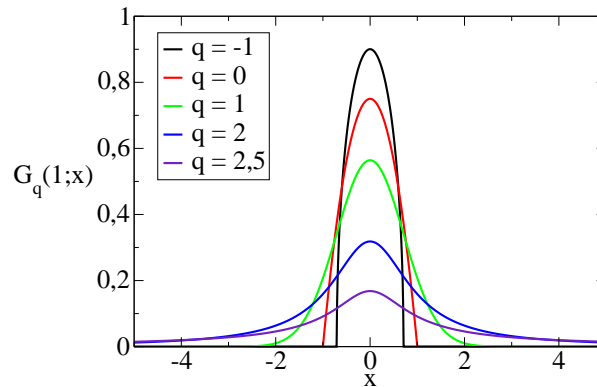


Fig. 2. Representação de $G_q(1;x)$ para diversos valores de q . Nota-se que quando $q < 1$, a q -Gaussiana possui suporte compacto; caso contrário, possui suporte ilimitado.

no mesmo espaço de probabilidade, independentes e de variância finita, então a sequência $(S_n - E S_n) / \sqrt{\text{var } S_n}$, onde $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, e $E S_n$ e $\text{var } S_n$ são a esperança e variância de S_n respectivamente, converge em distribuição para a distribuição normal (Gaussiana) [33]. Aqui se diz também que o atrator é uma Gaussiana. Este teorema justifica por que aparecem tantas Gaussianas na natureza, pois existem em ela sistemas caóticos cujos componentes podem ser considerados como variáveis aleatórias independentes e de variância finita.

Em 2008, Umarov, Tsallis e Steinberg fizeram uma q -generalização do teorema central do limite [32] (ver também [34]), no qual se tem uma sequência de variáveis aleatórias que apresentam determinadas correlações fortes entre elas, e têm uma variância q -generalizada finita. Este teorema estabelece que o atrator neste caso é uma q -Gaussiana com q no intervalo $(1;2)$. Naturalmente, recupera-se o teorema clássico no limite $q \rightarrow 1$, onde as variáveis aleatórias são independentes. Esta q -generalização do teorema central do limite justificaria a aparição de tantas q -Gaussianas com $q \neq 1$ na natureza.

A transformada de Fourier é uma transformada integral que tem grande aplicação na matemática, física e engenharia. Por exemplo, pode ser usada para resolver facilmente equações diferenciais parciais lineares; em teoria de campos e na física da matéria condensada, ela pode ser usada para calcular funções de Green; também é aplicada no processamento de imagens e sinais. Por outro lado, a prova do clássico teorema central do limite pode ser abordada usando a transformada de Fourier, devido principalmente ao fato de transformar uma Gaussiana em outra.

Para provar a q -generalização do teorema central do limite foi conveniente introduzir uma q -generalização da transformada de Fourier tal que transforme uma q -Gaussiana em outra, pois nenhuma das transformações integrais conhecidas e disponíveis na literatura fazia tal coisa. Chama-se de q -transformada de Fourier a esta q -generalização, e está definida para qualquer q no intervalo $[1;3)$ como sendo [32]

$$F_q[f](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e_q^{i\xi x |f(x)|^{q-1}} dx, \quad (6)$$

onde $f(x)$ é qualquer função *somável*³ não negativa da variável real x . Nota-se que se recupera a expressão da transformada de Fourier padrão⁴ no limite $q \rightarrow 1$. Nota-se também que esta transformada integral é não linear quando $q \neq 1$.

Por intermédio da q -transformada de Fourier, consegue-se transformar uma q -Gaussiana em outra (ver detalhes em [32]). No espaço das q -Gaussianas com $q > 1$, a q -transformada de Fourier é inversível e conhece-se a expressão analítica da inversa [35]. Infelizmente, não se tem encontrado até agora uma expressão analítica para sua inversa no espaço de densidades de probabilidade, pior ainda no espaço de funções somáveis.

Recentemente, Hilhorst provou, propondo contraexemplos, que não existiria uma única inversa para a q -transformada de Fourier, implicando que esta não seria inversível no espaço de densidades de probabilidade [36, 37]. As funções propostas por Hilhorst nos seus contraexemplos essencialmente dependem de um certo parâmetro real, além de q e x . Estas funções são tais que para cada uma delas existe um único q_0 no intervalo $(1;3)$ tal que a q_0 -transformada de Fourier independe de tal parâmetro. Mostrar-se-á na seção 5 que é possível determinar o valor do parâmetro adicional destas funções ao considerar certa informação adicional relacionada com o conceito dos q -momentos. Por outro lado,

³Diz-se que uma função $f(x)$ da variável real x é somável se

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty.$$

⁴Na transformada de Fourier, a dimensão da variável conjugada k é a inversa da dimensão de x , porém, na q -transformada de Fourier, a dimensão da variável ξ depende de q e da função considerada. Para evitar esta dificuldade, deveria-se fazer primeiro um rescalamento na função, por exemplo, escrever $f(x)/f(0)$ em lugar de simplesmente $f(x)$.

apresentar-se-á, na seção 6, uma expressão que poderia ser interpretada como uma q -generalização da transformada de Fourier inversa, com a qual uma densidade de probabilidade poderá ser determinada a partir da sua q -transformada de Fourier.

2 As q -ondas planas

2.1 Definição

A equação de onda é um clássico exemplo de uma equação diferencial linear em derivadas parciais com grande uso na física. Numa dimensão ela pode ser escrita como

$$\frac{\partial^2 f(x; t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f(x; t)}{\partial t^2}, \tag{7}$$

onde $f(x; t)$ é uma perturbação, produzida pela onda, sobre um ponto na posição x e no instante t , e v é a velocidade de propagação da onda.

Uma solução particular bem conhecida de (7) é a onda plana, que é uma função das variáveis reais x e t tal que é proporcional a $e^{i(kx \pm \omega t)}$, onde k e ω são parâmetros reais. Por outro lado, a solução geral de (7) é uma função $f(x; t) = F(x - vt) + G(x + vt)$, onde F e G são funções de uma variável real cujas regras de correspondência dependem das condições de contorno.

Seja, para qualquer real q , uma função $\Psi_q(x; t)$ das variáveis reais x e t que seja proporcional a $e_q^{i(\xi x \pm \omega t)}$, onde ξ e ω são parâmetros reais. Devido à grande liberdade que a solução geral tem, $\Psi_q(x; t)$ também será solução de (7) (ver também [38]). Assim chamar-se-á de q -onda plana à função $\Psi_q(x; t)$.

2.2 q -seno e q -cosseno

Se $q \neq 1$, pode-se verificar facilmente que a q -exponencial de um número imaginário puro, ix com x real, pode ser escrita da seguinte maneira

$$e_q^{ix} = [1 + (1 - q)^2 x^2]^{1/[2(1-q)]} \exp\left(i \frac{\arctan((1 - q)x)}{1 - q}\right), \tag{8}$$

de onde suas partes real e imaginária podem ser separadas. Além disso, podemos identificar estas partes como sendo as q -generalizações do cosseno e do seno de x respectivamente. Então tem-se que

$$\text{sen}_q x = \text{Im}(e_q^{ix}) = [1 + (1 - q)^2 x^2]^{1/[2(1-q)]} \text{sen}\left(\frac{\arctan((1 - q)x)}{1 - q}\right) \tag{9}$$

e

$$\text{cos}_q x = \text{Re}(e_q^{ix}) = [1 + (1 - q)^2 x^2]^{1/[2(1-q)]} \text{cos}\left(\frac{\arctan((1 - q)x)}{1 - q}\right), \tag{10}$$

chamadas de q -seno e q -cosseno respectivamente. Borges estudou em detalhe estas funções e construiu toda uma q -generalização da trigonometria a partir delas (ver [39]). Pode-se notar facilmente de (9) e (10) que tanto o q -seno como o q -cosseno de x tendem a zero no limite $x \rightarrow \pm\infty$ quando $q > 1$ (ver Fig. 3). Se $q < 1$, ambas as funções divergem no infinito.

2.3 Normalizabilidade das q -ondas planas

O fato das funções q -seno e q -cosseno decaírem no infinito quando $q > 1$ sugere que as q -ondas planas com $q > 1$ sejam normalizáveis, ou seja, considerando uma q -onda plana $\Psi_q(x; t) = N e_q^{i(\xi x \pm \omega t)}$ com $q > 1$, tem-se que

$$|N|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[e_q^{i(\xi x \pm \omega t)} \right]^* e_q^{i(\xi x \pm \omega t)} dx = 1. \tag{11}$$

Para provar que as q -ondas planas com $q > 1$ são normalizáveis, basta encontrar uma expressão para a constante de normalização N (ver [40]).

Considerando $\xi \neq 0$ e usando (8) em (11), tem-se que

$$\frac{1}{|N|^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{[1 + |q - 1|^2 |\xi|^2 (x \pm \omega t / \xi)^2]^{1/(q-1)}} dx.$$

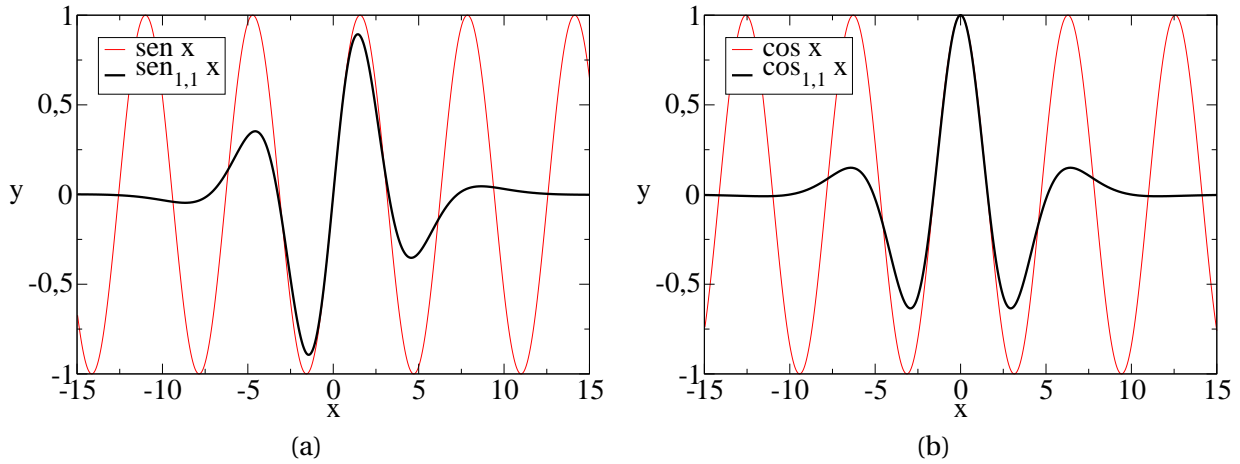


Fig. 3. As funções $\text{sen}_{1,1} x$ e $\text{cos}_{1,1} x$ tendem a zero no limite $x \rightarrow \pm\infty$.

Fazendo a mudança de variáveis $\tan \phi = |q-1||\xi|[x \pm (\omega/\xi)t]$, tem-se que

$$\frac{1}{|N|^2} = \frac{1}{|q-1||\xi|} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos \phi)^{(4-2q)/(q-1)} d\phi. \quad (12)$$

Esta integral é convergente se e somente se

$$\frac{4-2q}{q-1} > -1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{q-1} > 1,$$

o qual acontece se e somente se $q-1 > 0$ e $2 > q-1$, ou seja, q deve ser elemento do intervalo $(1;3)$. Logo, assumindo isto, tem-se de (12) que

$$\frac{1}{|N|^2} = \frac{1}{(q-1)|\xi|} B\left(\frac{3-q}{2(q-1)}; \frac{1}{2}\right), \quad (13)$$

onde

$$B(x; y) = \int_0^{\pi/2} 2(\cos \phi)^{2x-1} (\sin \phi)^{2y-1} d\phi$$

é a *função beta* para quaisquer reais positivos x e y . Esta função relaciona-se com a *função gama* mediante

$$B(x; y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (14)$$

Logo, usando (14) em (13), tem-se que

$$N = \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{(q-1)|\xi|} \Gamma\left(\frac{3-q}{2(q-1)}\right) \left[\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right) \right]^{-1} \right\}^{1/2} e^{i\varphi}, \quad (15)$$

onde φ é uma fase real arbitrária (ver Fig. 4).

3 A distribuição $\delta_q(x)$

3.1 Introdução

Suponha-se que uma força \vec{F} seja aplicada sobre um corpo durante um intervalo de tempo $t-t_0$. Segundo a lei de Newton, gerar-se-á uma variação no momentum, \vec{p} , do corpo, ou seja,

$$\vec{p}(t) - \vec{p}(t_0) = \int_{t_0}^t \vec{F}(t') dt'.$$

Se o intervalo de tempo $t-t_0$ é muito pequeno e \vec{F} é uma função de t , o impulso também será muito pequeno, porém existem sistemas na natureza onde este impulso não é desprezível, por exemplo, quando colidem duas bolinhas de vidro no gude. Para modelar estes impulsos quase instantâneos, faz-se uso de uma distribuição chamada de *delta de Dirac*.

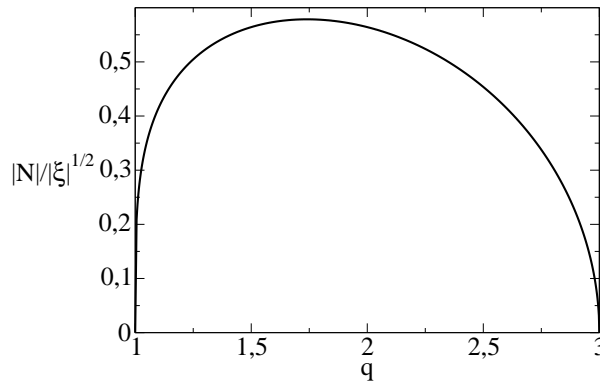


Fig. 4. Representação do módulo da constante de normalização, $|N|$, de uma q -onda plana normalizável $\Psi_q(x; t) = Ne^{i(\xi x \pm \omega t)}$. Nota-se que no limite $q \rightarrow 1, N \rightarrow 0$, o qual está de acordo com o fato das ondas planas não serem normalizáveis.

A delta de Dirac, além do exemplo descrito no exemplo anterior, é uma distribuição que tem aplicação em quase todas as áreas da física. Foi Dirac quem a definiu pela primeira vez ao introduzir seu formalismo da mecânica quântica em 1927, denotando-a pela letra grega δ e chamando-a “função δ ”, sendo ciente de que não se tratava de uma função.

Dirac definiu a “função δ ” como sendo uma quantidade $\delta(x)$ que depende do parâmetro real x tal que [41]

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \\ \delta(x) = 0 \quad \text{para qualquer } x \neq 0, \end{cases} \tag{16}$$

porém resulta mais conveniente definir a delta de Dirac como sendo uma distribuição tal que⁵

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x) dx = f(0) \tag{17}$$

para qualquer função $f(x)$ da variável real x contínua em $x = 0$.

Considerando, em (17), a função constante $f(x) = c \neq 0$ para qualquer real x , obtém-se a condição de normalização da delta de Dirac, ou seja, a primeira equação em (16). Por outro lado, considerando a função $f(x) = e^{ikx}$, onde x e k são reais, obtém-se que a transformada de Fourier da delta de Dirac, $F[\delta](k)$, é igual a 1. Segue de aqui que a delta de Dirac pode ser representada pela seguinte combinação linear de ondas planas:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk, \tag{18}$$

a qual chamar-se-á de *representação da delta de Dirac em ondas planas*. Escrevendo esta integral na forma de limite impróprio, tem-se que

$$\delta(x) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\text{sen}(Lx)}{\pi x}. \tag{19}$$

3.2 Definição preliminar

Segundo (18), a delta de Dirac pode ser representada como uma combinação linear de ondas planas. Na seção 2, viu-se uma q -generalização das ondas planas, nomeadamente as q -ondas planas. Logo, pode-se pensar em fazer uma q -generalização da representação da delta de Dirac em ondas planas considerando uma combinação linear de q -ondas planas sem a restrição $q = 1$. Assim, para cada q no intervalo $[1;2)$, define-se a distribuição $\delta_q(x)$ como sendo uma quantidade que depende do parâmetro real x tal que

$$\delta_q(x) = \frac{1}{c_q} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} d\xi, \tag{20}$$

onde c_q é uma constante de normalização tal que $c_1 = 2\pi$ e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_q(x) dx = 1. \tag{21}$$

⁵Se se quiser definir rigorosamente a delta de Dirac, dever-se-ia usar à teoria da medida ou, mais geralmente, à teoria das distribuições de Schwartz.

Se q é elemento do intervalo $(1;2)$, de (20), tem-se que

$$\delta_q(x) = \frac{1}{c_q} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \text{v.p.} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{1}{[1 - (q-1)i\xi x]^{1/(q-1)}} d\xi.$$

Fazendo a mudança de variáveis $y = 1 + (1-q)i\xi x$, tem-se que

$$\begin{aligned} \delta_q(x) &= -\frac{1}{(q-1)ic_q x} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \text{v.p.} \int_{1+(q-1)i\Lambda x}^{1-(q-1)i\Lambda x} \frac{1}{y^{1/(q-1)}} dy \\ &= \frac{1}{(2-q)ic_q x} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \text{v.p.} \left[(e_q^{i\Lambda x})^{2-q} - (e_q^{-i\Lambda x})^{2-q} \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

Por outro lado, pode-se provar facilmente que

$$\text{v.p.}(e_q^x)^r = e_{(r+q-1)/r}^{rx} \quad (23)$$

para quaisquer reais q e $r > 0$, e x complexo. Logo, como em (22) se tem que $q \neq 2$, então, usando (23) em (22), tem-se que

$$\delta_q(x) = \frac{1}{(2-q)ic_q x} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} [e_{1/(2-q)}^{i(2-q)\Lambda x} - e_{1/(2-q)}^{-i(2-q)\Lambda x}].$$

Logo, segundo (8), a expressão entre colchetes é igual a $2i$ vezes a parte imaginária de $e_{1/(2-q)}^{i(2-q)\Lambda x}$. Além disso, considerando também a definição do q -seno dada em (9), obtém-se que

$$\delta_q(x) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{2 \text{sen}_{1/(2-q)}((2-q)\Lambda x)}{(2-q)c_q x}, \quad (24)$$

o qual é válido mesmo quando $q = 1$.

3.3 A constante de normalização c_q

Para a definição da distribuição $\delta_q(x)$ ficar completa, deve-se encontrar a expressão da constante de normalização c_q quando q for elemento do intervalo $(1;2)$. Então, usando (9) e (24) em (21), tem-se que

$$c_q = \frac{2}{2-q} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x[1 + (q-1)^2 \Lambda^2 x^2]^{(2-q)/(2(q-1))}} \text{sen} \left(\frac{2-q}{q-1} \arctan((q-1)\Lambda x) \right) dx.$$

Definindo a quantidade

$$\alpha(q) = \frac{2-q}{2(q-1)} \quad (25)$$

e fazendo a mudança de variáveis $y = (q-1)\Lambda x$, tem-se que

$$c_q = \frac{2}{2-q} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(2\alpha(q) \arctan y)}{y[1+y^2]^{\alpha(q)}} dy. \quad (26)$$

onde o símbolo de limite pôde ser omitido, pois não se tinha mais dependência em Λ . Fazendo a mudança de variáveis $\tan \phi = y$, obtém-se que

$$c_q = \frac{4}{2-q} \int_0^{\pi/2} \frac{\text{sen}(2\alpha(q)\phi) (\cos \phi)^{2\alpha(q)-1}}{\text{sen} \phi} d\phi. \quad (27)$$

Segundo (25), para qualquer valor positivo de $\alpha(q)$, sempre se poderá obter o q correspondente. Em particular, pode-se escolher $\alpha(q)$ tal que a integral em (27) seja fácil de ser calculada.

Exemplo 1. Se $\alpha(q_1) = 1/2$, $q_1 = 3/2$. Logo,

$$c_{q_1} = \frac{4}{2-q_1} \int_0^{\pi/2} d\phi = \frac{2\pi}{2-q_1} = 4\pi.$$

Exemplo 2. Se $\alpha(q_2) = 1$, $q_2 = 4/3$. Logo,

$$c_{q_2} = \frac{4}{2-q_2} \int_0^{\pi/2} \frac{\text{sen}(2\phi) \cos \phi}{\text{sen} \phi} d\phi = \frac{2\pi}{2-q_2} = 3\pi.$$

Nota-se que a expressão $c_q = 2\pi/(2 - q)$ para a constante de normalização é satisfeita em ambos os exemplos. A integral em (27) é difícil de ser calculada analiticamente, porém restringindo o conjunto de valores possíveis de $\alpha(q)$ ao conjunto $\{1/2; 1; 3/2; 2; \dots\}$, pode-se encontrar analiticamente tal integral. Antes de mais nada, é necessário conhecer a seguinte identidade trigonométrica:

Teorema 1. *Sejam n inteiro positivo e ϕ real. Logo,*

$$\text{sen}(n\phi) = \sum_{j=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^j \binom{n}{2j+1} (\cos \phi)^{n-2j-1} (\text{sen } \phi)^{2j+1},$$

onde $\lfloor x \rfloor = m$ é a função chão⁶ para qualquer x real, onde m é um inteiro tal que $m \leq x < m + 1$.

Prova. Partindo da fórmula de Euler e usando o teorema do binômio, tem-se que

$$\text{sen}(n\phi) = \sum_{\substack{j=1 \\ (\text{ímpar})}}^n i^{j-1} \binom{n}{j} (\cos \phi)^{n-j} (\text{sen } \phi)^j,$$

a qual é uma soma sobre todos os índices ímpares entre 1 e n . Se n é ímpar, esta soma pode ser reescrita como

$$\text{sen}(n\phi) = \sum_{j=0}^{(n-1)/2} (-1)^j \binom{n}{2j+1} (\cos \phi)^{n-2j-1} (\text{sen } \phi)^{2j+1};$$

se n é par, então

$$\text{sen}(n\phi) = \sum_{j=0}^{(n-2)/2} (-1)^j \binom{n}{2j+1} (\cos \phi)^{n-2j-1} (\text{sen } \phi)^{2j+1}.$$

Deve-se notar que se n é ímpar, $\lfloor (n-1)/2 \rfloor = (n-1)/2$; e se n é par, $\lfloor (n-1)/2 \rfloor = (n-2)/2$. Isto conclui a prova. □

Como $\alpha(q)$ é elemento de $\{1/2; 1; 3/2; 2; \dots\}$, pelo Teorema 1, tem-se em (27) que

$$c_q = \frac{2}{2-q} \sum_{j=0}^{\lfloor \alpha(q)-1/2 \rfloor} (-1)^j \binom{2\alpha(q)}{2j+1} \int_0^{\pi/2} 2(\cos \phi)^{4\alpha(q)-2j-2} (\text{sen } \phi)^{2j} d\phi.$$

Como $0 \leq j \leq \alpha(q) - 1/2$, as desigualdades $2j > -1$ e $4\alpha(q) - 2j - 2 > -1$ são verdadeiras, então,

$$c_q = \frac{2}{2-q} \sum_{j=0}^{\lfloor \alpha(q)-1/2 \rfloor} (-1)^j \binom{2\alpha(q)}{2j+1} \frac{\Gamma(2\alpha(q) - j - 1/2) \Gamma(j + 1/2)}{\Gamma(2\alpha(q))}.$$

Logo, escrevendo o fator binomial em termos da função gama e usando a propriedade $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$ para qualquer x não negativo, obtém-se que

$$c_q = \frac{4\alpha(q)}{2-q} \sum_{j=0}^{\lfloor \alpha(q)-1/2 \rfloor} (-1)^j \frac{\Gamma(2\alpha(q) - j - 1/2) \Gamma(j + 1/2)}{\Gamma(2j + 2) \Gamma(2\alpha(q) - 2j)}. \tag{28}$$

Exemplo 3. Se $\alpha(q_3) = 3/2$, $q_3 = 5/4$. Logo,

$$c_{q_3} = \frac{6}{2-q_3} \sum_{j=0}^1 (-1)^j \frac{\Gamma(3-j-1/2) \Gamma(j+1/2)}{\Gamma(2j+2) \Gamma(3-2j)} = \frac{6}{2-q_3} \left(\frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{24} \right) = \frac{8\pi}{3}.$$

Exemplo 4. Se $\alpha(q_4) = 2$, $q_4 = 6/5$. Logo,

$$c_{q_4} = \frac{8}{2-q_4} \sum_{j=0}^1 (-1)^j \frac{\Gamma(4-j-1/2) \Gamma(j+1/2)}{\Gamma(2j+2) \Gamma(4-2j)} = \frac{8}{2-q_4} \left(\frac{5\pi}{16} - \frac{\pi}{16} \right) = \frac{5\pi}{2}.$$

Nota-se novamente que em ambos os exemplos, a expressão $c_q = 2\pi/(2 - q)$ para a constante de normalização é satisfeita. Usando um software de computação simbólico, verifica-se que, até para valores de $\alpha(q) = 10000$, a expressão de c_q em (28) se reduz a $c_q = 2\pi/(2 - q)$. Assim é razoável estabelecer o seguinte [40]:

Conjectura 1. *Seja n inteiro positivo. Logo,*

$$\pi = n \sum_{j=0}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} (-1)^j \frac{\Gamma(n-j-1/2) \Gamma(j+1/2)}{\Gamma(2j+2) \Gamma(n-2j)}.$$

⁶Esta função também é conhecida pelo nome de *parte inteira*.

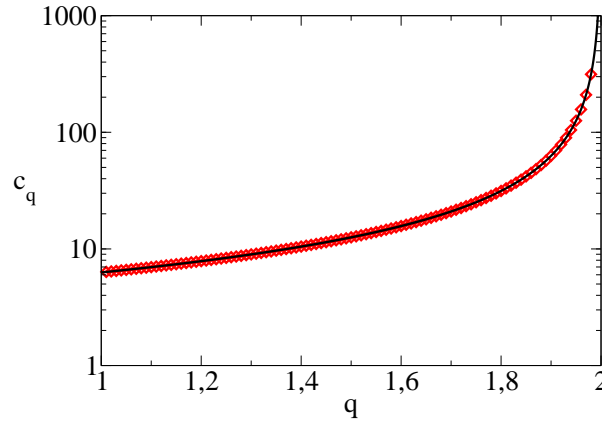


Fig. 5. Os pontos foram obtidos resolvendo numericamente a integral em (26) enquanto que a curva é a representação da expressão da constante de normalização c_q segundo (29).

Além disso, verifica-se numericamente que a expressão $c_q = 2\pi/(2-q)$ para a constante de normalização é válida não somente para certos valores racionais de q no intervalo $(1;2)$, senão para qualquer q no intervalo $(1;2)$ (ver Fig. 5). Por outro lado, Chevreuil, Plastino e Vignat em [42] indicaram que a integral em (27) se encontra na tabela de integrais [43] (p. 3.638.3), e é igual a $\pi/2$ para qualquer valor real de q no intervalo $(1;2)$. Assim fica provada a validade da **Conjectura 1** e conclui-se que

$$c_q = \frac{2\pi}{2-q}. \quad (29)$$

Portanto, usando (29) em (20), obtém-se para cada q no intervalo $[1;2)$ que

$$\delta_q(x) = \frac{2-q}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} d\xi, \quad (30)$$

e (24) pode ser escrita como

$$\delta_q(x) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{\text{sen}_{1/(2-q)}((2-q)\Lambda x)}{\pi x}. \quad (31)$$

4 A delta de Dirac como combinação linear de q -ondas planas

4.1 Introdução

Na seção 3, viu-se que a distribuição $\delta_q(x)$ é uma q -generalização da representação da delta de Dirac em q -ondas planas, porém não se tem provado ainda que a distribuição $\delta_q(x)$ seja uma representação da delta de Dirac quando $q \neq 1$. Nesta seção, justificar-se-á de forma heurística como também de forma rigorosa que a distribuição $\delta_q(x)$ pode de fato representar à delta de Dirac quando $q \neq 1$.

Sejam q no intervalo $(1;2)$ e a função $\Delta_q(x; \Lambda)$ das variáveis reais x e $\Lambda > 0$ tal que

$$\Delta_q(x; \Lambda) = \frac{\text{sen}_{1/(2-q)}((2-q)\Lambda x)}{\pi x}$$

Segundo (31), esta função relaciona-se com a distribuição $\delta_q(x)$ mediante a equação $\delta_q(x) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \Delta_q(x; \Lambda)$. Além disso, infere-se do gráfico da função $\Delta_q(x; \Lambda)$ (ver Fig. 6) que, $\Delta_q(x; \Lambda)$ apresentará uma divergência em $x = 0$ e será igual a zero em qualquer outro ponto no limite $\Lambda \rightarrow \infty$. Esta é uma condição necessária para que a distribuição $\delta_q(x)$ seja uma representação da delta de Dirac.

4.2 Justificação empírica

Seja uma função $f(x)$ da variável real x analítica em $x = 0$, ou seja, $f(x)$ é igual a sua série de Taylor em torno da origem. Logo, se a e b são reais com $a < b$, então

$$\int_a^b f(x) \delta_q(x) dx = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} \int_a^b x^j \delta_q(x) dx.$$

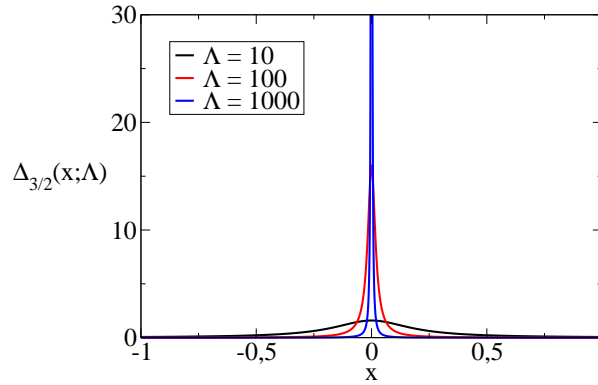


Fig. 6. Gráfico de $\Delta_{3/2}(x; \Lambda)$ para três valores de Λ . Resultados similares são obtidos para diferentes valores de q no intervalo $(1; 2)$.

Considerando q no intervalo $(1; 2)$, tem-se de (31) e (9) que

$$\int_a^b f(x)\delta_q(x) dx = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} \int_a^b \frac{x^{j-1} \text{sen}(2\alpha(q) \arctan((q-1)\Lambda x))}{\pi [1 + (q-1)^2 \Lambda^2 x^2]^{\alpha(q)}} dx,$$

onde $\alpha(q)$ está dado por (25). Deve-se ressaltar que todas as integrais acima são finitas, devido principalmente ao intervalo de integração ser limitado. Fazendo a mudança de variáveis $\tan \phi = (q-1)\Lambda x$, tem-se que

$$\int_a^b f(x)\delta_q(x) dx = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(0)}{\pi (q-1)^j \Lambda^j j!} \int_{\arctan((q-1)\Lambda a)}^{\arctan((q-1)\Lambda b)} \frac{\text{sen}(2\alpha(q)\phi) (\cos \phi)^{2\alpha(q)-1-j}}{(\text{sen} \phi)^{1-j}} d\phi. \tag{32}$$

O primeiro termo do somatório acima é

$$\frac{f(0)}{\pi} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_{\arctan((q-1)\Lambda a)}^{\arctan((q-1)\Lambda b)} \frac{\text{sen}(2\alpha(q)\phi) (\cos \phi)^{2\alpha(q)-1}}{\text{sen} \phi} d\phi. \tag{33}$$

Se $0 < a < b$ ou $a < b < 0$, pode-se notar facilmente que este termo é igual a zero. Se $a < 0 < b$, a integral em (33) é igual a π (ver [43] (p. 3.638.3)), então, (33) é igual a $f(0)$. Se $a = 0 < b$ ou $a < b = 0$, a integral em (33) é igual a $\pi/2$, logo, (33) é igual a $f(0)/2$.

Para os seguintes termos de (32) serem analisados, primeiro serão reescritos na forma $\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} f^{(j)}(0) J_j(q; \Lambda; a; b)$, onde j é inteiro positivo e

$$J_j(q; \Lambda; a; b) = \frac{1}{\pi (q-1)^j \Lambda^j j!} \int_{\arctan((q-1)\Lambda a)}^{\arctan((q-1)\Lambda b)} \frac{\text{sen}(2\alpha(q)\phi) (\cos \phi)^{2\alpha(q)-1-j}}{(\text{sen} \phi)^{1-j}} d\phi.$$

Esta função é decrescente em Λ e j (ver Fig. 7a). Além disso, a razão

$$R_j(q; \Lambda; a; b) = \frac{J_{j+1}(q; \Lambda; a; b)}{J_j(q; \Lambda; a; b)} \rightarrow 0$$

para qualquer real positivo Λ quando $j \rightarrow \infty$ (ver Fig. 7b). Assim a série em (32) é convergente, o qual é consistente com o fato de o intervalo de integração ser limitado; no limite $\Lambda \rightarrow \infty$, todos os termos do somatório em (32) tendem a zero exceto o primeiro. Logo,

$$\int_a^b f(x)\delta_q(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < a \text{ ou } b < 0 \\ f(0) & \text{se } a < 0 < b \\ f(0)/2 & \text{se } a = 0 < b \text{ ou } a < b = 0. \end{cases}$$

A partir destes argumentos, é razoável afirmar que a distribuição $\delta_q(x)$ é de fato uma nova representação da delta de Dirac, ainda com $q \neq 1$ [40], ou seja, trata-se de uma *representação da delta de Dirac em q-ondas planas*.

Conjectura 2. *Seja q no intervalo $[1; 2)$. Existe uma grande família de funções $f(x)$ da variável real x tais que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_q(x) dx = f(0).$$

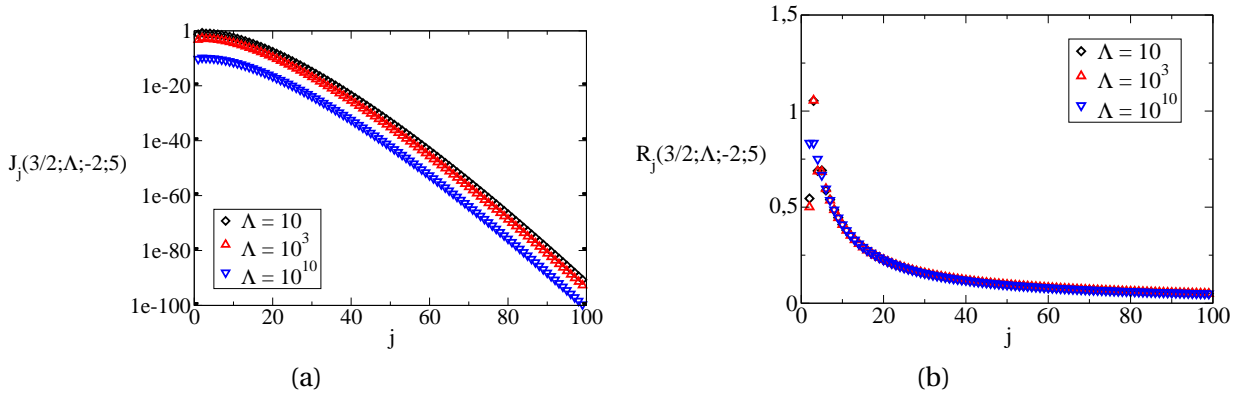


Fig. 7. A dependência em j de (a) $J_j(3/2; \Lambda; -2; 5)$ e (b) $R_j(3/2; \Lambda; -2; 5)$ para três valores de Λ . Nota-se que $J_j(3/2; \Lambda; -2; 5)$ é decrescente em Λ e j , e $R_j(3/2; \Lambda; -2; 5) \rightarrow 0$ quando $j \rightarrow \infty$ para qualquer real positivo Λ .

4.3 Prova rigorosa

Atualmente existem várias provas da [Conjectura 2](#), indicando assim que a delta de Dirac pode de fato ser representada como uma combinação linear de q -ondas planas com q no intervalo $[1; 2)$, nomeadamente mediante a distribuição δ_q , ao menos para certo tipo de funções. Menciona-se a continuação as provas que foram feitas até agora. Chevreuil, Plastino e Vignat provaram em [42] que a distribuição $\delta_q(x)$ se comporta como a delta de Dirac ao considerar funções rapidamente decrescentes, ou seja, funções reais $\varphi(x)$ de classe \mathcal{C}^∞ tais que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^j \varphi^{(l)}(x) = 0$ para quaisquer inteiros positivos j, l . Uma conclusão similar foi obtida por Plastino e Rocca em [44] usando a teoria de ultradistribuições temperadas. Mamode em [45], usando distribuições de Schwartz e ferramentas de análise complexa, provou que a distribuição $\delta_q(x)$ se comporta como a delta de Dirac ao considerar qualquer função real limitada de classe \mathcal{C}^∞ cujas derivadas sejam também limitadas. Por outro lado, tem-se também o seguinte (ver [46]):

Teorema 2. *Seja q no intervalo $[1; 2)$. A distribuição $\delta_q(x)$ comporta-se como a delta de Dirac ao considerar funções somáveis $f(x)$ da variável real x cujas transformadas de Fourier também sejam somáveis.*

Prova. Se $q = 1$, nada se acrescenta a o já disponível na literatura. Se q é elemento do intervalo $(1; 2)$, pode-se usar a “representação gama” da q -exponencial [42]:

$$e_q^{i\xi x} = \frac{1}{\Gamma(2\alpha(q) + 1)} \int_0^\infty e^{-t} t^{2\alpha(q)} e^{i(q-1)\xi x t} dt,$$

onde $\alpha(q)$ está dado por (25). Logo,

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) e_q^{i\xi x} dx = \frac{1}{\Gamma(2\alpha(q) + 1)} \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty f(x) e^{-t} t^{2\alpha(q)} e^{i(q-1)\xi x t} dt dx. \quad (34)$$

Nota-se que

$$\frac{1}{\Gamma(2\alpha(q) + 1)} \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty |f(x) e^{-t} t^{2\alpha(q)} e^{i(q-1)\xi x t}| dt dx \leq \int_{-\infty}^\infty |f(x)| dx < \infty$$

devido à $f(x)$ ser somável. Logo, pelo teorema de Fubini [47], pode-se permutar os operadores de integração em (34). Então,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty f(x) e_q^{i\xi x} dx &= \frac{1}{\Gamma(2\alpha(q) + 1)} \int_0^\infty e^{-t} t^{2\alpha(q)} \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{i(q-1)\xi x t} dx dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(2\alpha(q) + 1)} \int_0^\infty e^{-t} t^{2\alpha(q)} F[f]((q-1)\xi t) dt. \end{aligned} \quad (35)$$

Agora, deve-se provar que

$$\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(x) e_q^{i\xi x} dx d\xi = \frac{2\pi f(0)}{2-q}.$$

Primeiro, deve-se notar que

$$\frac{1}{\Gamma(2\alpha(q) + 1)} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty |e^{-t} t^{2\alpha(q)} F[f]((q-1)\xi t)| d\xi dt < \infty$$

devido à transformada de Fourier de $f(x)$ ser somável. Então, novamente, pelo teorema de Fubini, pode-se permutar os

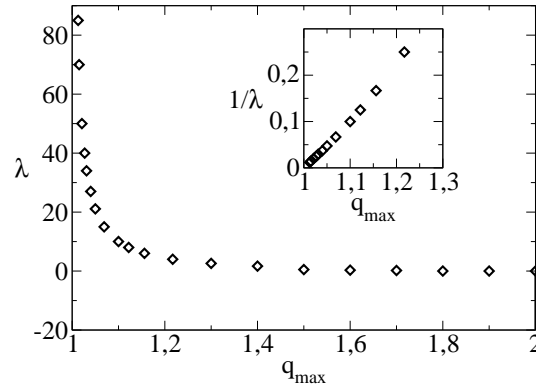


Fig. 8. Para $1 \leq q \leq q_{\max}(\lambda)$, a distribuição $\delta_q(x)$ comporta-se como a delta de Dirac ao considerar as funções $D_{a;b}(x)$ com $\lambda > 0$. Os pontos têm sido encontrados numericamente. O gráfico auxiliar sugere que $q_{\max}(\lambda) \sim 1 + 1/\lambda$ quando λ é muito grande.

operadores de integração em (35). Usando a mudança de variáveis $\zeta = (q - 1)\xi t$, tem-se que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\xi x} dx d\xi = \frac{1}{(q-1)\Gamma(2\alpha(q)+1)} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{2\alpha(q)-1} \int_{-\infty}^{\infty} F[f](\zeta) d\zeta dt = \frac{2\pi f(0)}{2-q},$$

o qual conclui a prova. □

Corolário 3. Sejam q no intervalo $[1;2)$, a e b positivos, $\lambda < -1/2$ e uma função $D_{a;b;\lambda}(x) = (ax + b)^\lambda$ da variável real x . Logo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} D_{a;b;\lambda}(x) \delta_q(x) dx = b^\lambda.$$

Prova. Pode-se verificar facilmente que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |D_{a;b;\lambda}(x)| dx$$

é proporcional a

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos \phi)^{-2(\lambda+1)} d\phi < \infty.$$

Por outro lado, tem-se que (ver [43] (p. 3.771.2))

$$F[D_{a;b;\lambda}](k) = 2^{\lambda+1} \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \left(\frac{\sqrt{ab}}{|k|} \right)^{\lambda+1/2} \frac{K_{\lambda+1/2}(\sqrt{b/a}|k|)}{\Gamma(-\lambda)},$$

onde $K_n(x)$ é a função de Bessel do segundo tipo. Além disso, pode-se verificar, usando a expansão assintótica de $K_n(x)$ (ver [43] (p. 8.451.6)), que $F[D_{a;b;\lambda}](k)$ é uma função somável positiva. Portanto, segue do Teorema 2 que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} D_{a;b;\lambda}(x) \delta_q(x) dx = D_{a;b;\lambda}(0) = b^\lambda,$$

o qual conclui a prova. □

Quando $\lambda > 0$, as funções $D_{a;b;\lambda}(x)$ do Corolário 3 são bem comportadas em $x = 0$ e divergem como uma lei de potências quando $|x| \rightarrow \infty$. Numericamente, infere-se a existência de um $q_{\max}(\lambda)$ no intervalo $[1,2)$ tal que a distribuição $\delta_q(x)$ comporta-se como a delta de Dirac ao considerar estas funções divergentes quando $1 \leq q \leq q_{\max}$. O resultado numérico sugere que a distribuição $\delta_q(x)$ pode representar à delta de Dirac até um certo $q_{\max}(\lambda)$ no intervalo $[1;2)$ (ver Fig. 8).

Corolário 4. Seja q no intervalo $[1;2)$. A distribuição $\delta_q(x)$ comporta-se como a delta de Dirac ao considerar q' -Gaussianas com q' no intervalo $[1;3)$.

As propriedades mais ressaltantes da delta de Dirac são apresentadas no Apêndice. Deve-se ter claro que tais propriedades independem da representação com a qual se esteja trabalhando. Portanto, em particular, a representação da delta de Dirac em q -ondas planas obedecerá também essas propriedades.

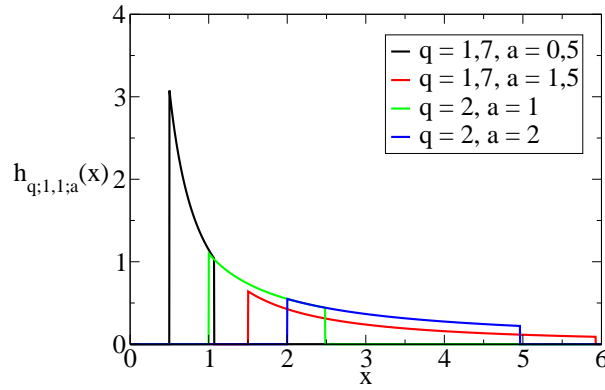


Fig. 9. Representação de $h_{q;1,1;a}(x)$ para diferentes valores de q e a .

5 A densidade escort e a unicidade da inversa da q -transformada de Fourier

5.1 Introdução

Seja uma variável aleatória X definida num certo espaço de probabilidade com uma densidade $f(x)$ normalizada. A função característica de X está dada basicamente pela transformada de Fourier de $f(x)$, $F[f](k)$. É sabido que todos os momentos de $f(x)$ podem ser obtidos a partir das sucessivas derivadas da função característica de X em $k = 0$. Em 2009, Tsallis, Plastino e Alvarez-Estrada mostraram em [48] que as sucessivas derivadas da q -transformada de Fourier de uma densidade de probabilidade $f(x)$, $F_q[f](\xi)$, em $\xi = 0$ estão relacionadas com alguns dos momentos q -generalizados dela (ver também [49]).

Sejam q real e X uma variável aleatória com uma densidade $f(x)$ normalizada, tal que a quantidade

$$v_q[f] = \int_{-\infty}^{\infty} [f(x)]^q dx \quad (36)$$

seja finita. Define-se a *densidade escort*, denotada por $f_q(x)$, como sendo [32, 48]

$$f_q(x) = \frac{[f(x)]^q}{v_q[f]}. \quad (37)$$

A partir desta densidade, define-se o n -ésimo q -momento não normalizado de $f(x)$ como sendo [48]

$$\mu_q^{(n)}[f] = v_q[f] \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_q(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^n [f(x)]^q dx, \quad (38)$$

e o n -ésimo q -momento (normalizado) de $f(x)$ como sendo

$$\Pi_q^{(n)}[f] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_q(x) dx = \frac{\mu_q^{(n)}[f]}{v_q[f]}. \quad (39)$$

Em [48], provou-se a seguinte relação entre a n -ésima derivada de $F_q[f](\xi)$ (ver definição em (6)) em $\xi = 0$ e o n -ésimo $[nq - (n - 1)]$ -momento não normalizado de $f(x)$:

$$\left. \frac{d^n F_q[f](\xi)}{d\xi^n} \right|_{\xi=0} = i^n \left\{ \prod_{j=1}^{n-1} [1 + j(q-1)] \right\} \mu_{nq-(n-1)}^{(n)}[f]. \quad (40)$$

Logo, se a q -transformada de Fourier de uma densidade de probabilidade $f(x)$ independe de certos parâmetros de esta, (40) garante que alguns dos Q -momentos de $f(x)$ também independem desses parâmetros.

5.2 Primeiro exemplo de Hilhorst

Hilhorst propôs a seguinte função como sendo o primeiro dos seus contraexemplos [36]:

$$h_{q;\lambda;a}(x) = \begin{cases} (\lambda/x)^{1/(q-1)} & \text{se } a < x < b \\ 0 & \text{para qualquer outro real } x, \end{cases} \quad (41)$$

onde q é qualquer real distinto de 1, e λ, a e b são positivos (ver Fig. 9). Impõe-se a seguinte condição de normalização sobre esta função:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_{q;\lambda;a}(x) dx = 1.$$

De onde se obtém que

$$\lambda = \begin{cases} \left\{ \frac{q-1}{q-2} [b^{(q-2)/(q-1)} - a^{(q-2)/(q-1)}] \right\}^{1-q} & \text{se } q \neq 2 \\ [\ln(b/a)]^{-1} & \text{se } q = 2. \end{cases}$$

Logo, um dos parâmetros q, λ, a, b não é independente. Escolhendo b como sendo o parâmetro dependente, tem-se que

$$b = \begin{cases} \left[\frac{q-2}{q-1} \lambda^{1/(1-q)} + a^{(q-2)/(q-1)} \right]^{(q-1)/(q-2)} & \text{se } q \neq 2 \\ ae^{1/\lambda} & \text{se } q = 2. \end{cases} \quad (42)$$

A q -transformada de Fourier de $h_{q;\lambda;a}(x)$ está dada por

$$F_q[h_{q;\lambda;a}](\xi) = e_q^{i\xi\lambda} = \text{v. p.} [1 + (1-q)i\xi\lambda]^{1/(1-q)}, \quad (43)$$

a qual independe de a . Então, há infinitas funções $h_{q;\lambda;a}(x)$ com os mesmos q e λ mas distinto a que possuem a mesma q -transformada de Fourier. Portanto, conhecendo só a q -transformada de Fourier de $h_{q;\lambda;a}(x)$, não seria possível obter $h_{q;\lambda;a}(x)$. Contudo, devido à natureza não linear da q -transformada de Fourier, é possível precisar de alguma informação adicional para determinar a função original.

Considerando uma variável aleatória definida num espaço de probabilidade tal que a sua densidade seja a função $h_{q;\lambda;a}(x)$, tem-se para qualquer real Q que

$$\nu_Q[h_{q;\lambda;a}] = \begin{cases} \frac{q-1}{q-1-Q} \lambda^{Q/(q-1)} [b^{1-Q/(q-1)} - a^{1-Q/(q-1)}] & \text{se } Q \neq q-1 \\ \lambda(\ln b - \ln a) & \text{se } Q = q-1. \end{cases} \quad (44)$$

Então, o n -ésimo Q -momento não normalizado de $h_{q;\lambda;a}(x)$ é

$$\mu_Q^{(n)}[h_{q;\lambda;a}] = \begin{cases} \frac{q-1}{(n+1)(q-1)-Q} \lambda^{Q/(q-1)} [b^{n+1-Q/(q-1)} - a^{n+1-Q/(q-1)}] & \text{se } Q \neq (n+1)(q-1) \\ \lambda^{n+1} \ln(b/a) & \text{se } Q = (n+1)(q-1). \end{cases} \quad (45)$$

Portanto, o n -ésimo Q -momento de $h_{q;\lambda;a}(x)$ é

$$\Pi_Q^{(n)}[h_{q;\lambda;a}] = \begin{cases} \frac{(b^n - a^n)}{n \ln(b/a)} & \text{se } Q = q-1 \\ \frac{na^n b^n \ln(b/a)}{b^n - a^n} & \text{se } Q = (n+1)(q-1) \\ \frac{q-1-Q}{(n+1)(q-1)-Q} \left[\frac{b^{n+1-Q/(q-1)} - a^{n+1-Q/(q-1)}}{b^{1-Q/(q-1)} - a^{1-Q/(q-1)}} \right] & \text{para qualquer outro } Q. \end{cases} \quad (46)$$

Como a q -transformada de Fourier de $h_{q;\lambda;a}(x)$ independe de a , de acordo com (40), o seu n -ésimo $[nq - (n-1)]$ -momento não normalizado também deve independe de a para qualquer inteiro positivo n . De fato, se $q \neq 2$, tem-se que

$$\mu_{nq-(n-1)}^{(n)}[h_{q;\lambda;a}] = \frac{q-1}{q-2} [b^{(q-2)/(q-1)} - a^{(q-2)/(q-1)}] \lambda^{[nq-(n-1)]/(q-1)}$$

de onde, usando (42), obtém-se que $\mu_{nq-(n-1)}^{(n)}[h_{q;\lambda;a}] = \lambda^n$. Se $q = 2$, tem-se que

$$\mu_{n+1}^{(n)}[h_{q;\lambda;a}] = \lambda^{n+1} \ln\left(\frac{b}{a}\right),$$

de onde, usando (42), obtém-se que $\mu_{n+1}^{(n)}[h_{q;\lambda;a}] = \lambda^n$. Portanto, tem-se que $\mu_{nq-(n-1)}^{(n)}[h_{q;\lambda;a}] = \lambda^n$ para qualquer n inteiro positivo.

Enquanto os Q -momentos não normalizados de $h_{q;\lambda;a}(x)$ podem independe de a (ver Fig. 11), pode-se verificar facilmente de (44) que as quantidades $\nu_Q[h_{q;\lambda;a}]$ dependem de a de forma monótona para qualquer $Q \neq 1$ (ver Fig. 10), o mesmo acontece com os Q -momentos normalizados (ver Fig. 12). Devido a isto, basta conhecer a q -transformada de Fourier de $h_{q;\lambda;a}(x)$ e o valor de algum $\nu_Q[h_{q;\lambda;a}]$ com $Q \neq 1$, pois a ele corresponderá um único valor de a , para determinar a função $h_{q;\lambda;a}(x)$. No caso $Q = 1$, $\nu_1[h_{q;\lambda;a}] = 1$ (independe de a), assim a informação adicional no caso da

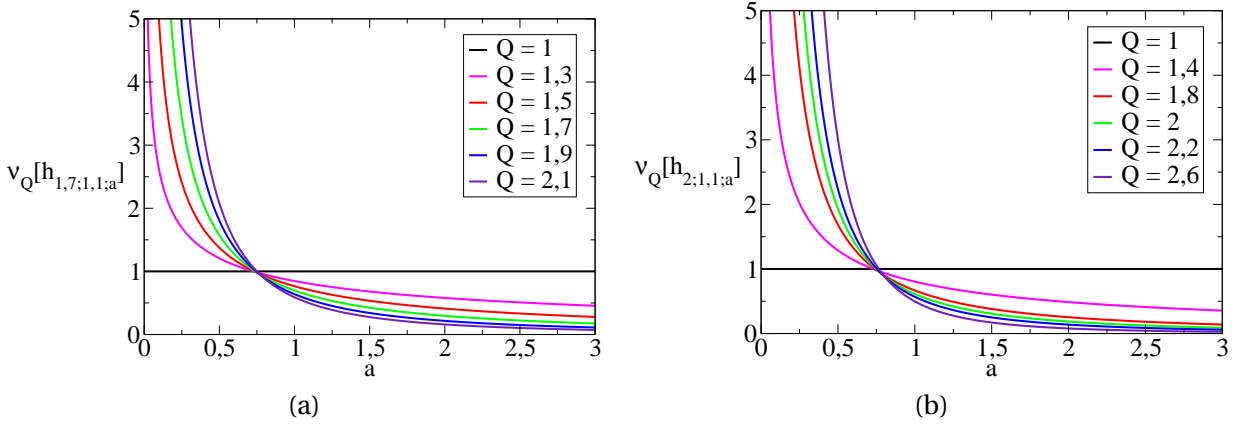


Fig. 10. A dependência em a das quantidades de (a) $v_Q[h_{1,7;1,1;a}]$ e (b) $v_Q[h_{2;1,1;a}]$. Em ambos os casos $v_Q[h_{q;1,1;a}]$ é uma função monótona de a quando $Q \neq 1$.

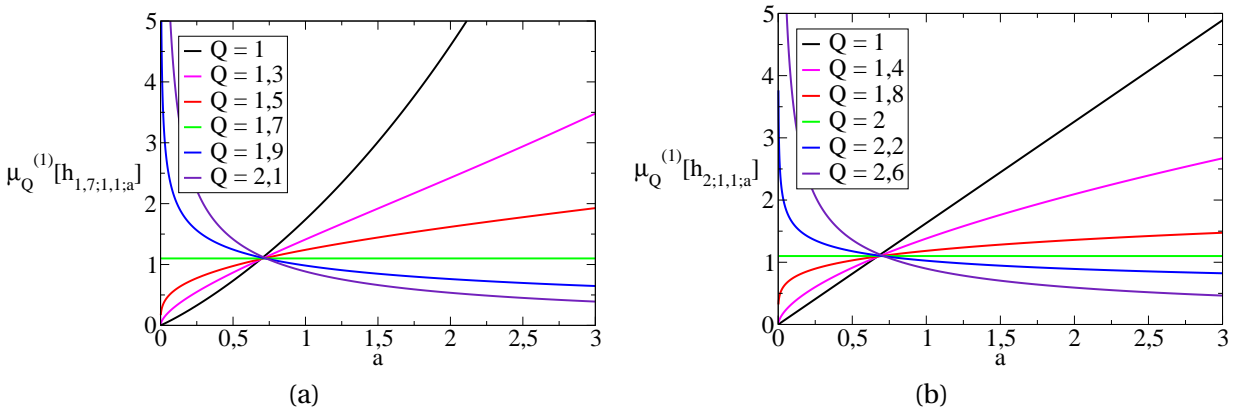


Fig. 11. A dependência em a dos primeiros Q -momentos não normalizados de (a) $h_{1,7;1,1;a}(x)$ e (b) $h_{2;1,1;a}(x)$. Nota-se que quando (a) $Q = 1, 7$, (b) $Q = 2$, $\mu_Q^{(1)}[h_{q;1,1;a}]$ independe de a .

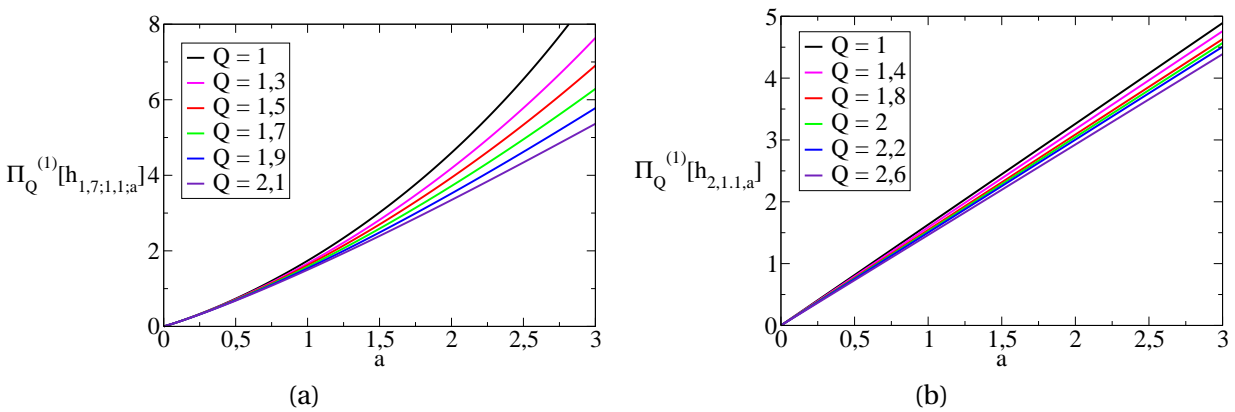


Fig. 12. A dependência em a dos primeiros Q -momentos de (a) $h_{1,7;1,1;a}(x)$ e (b) $h_{2;1,1;a}(x)$.

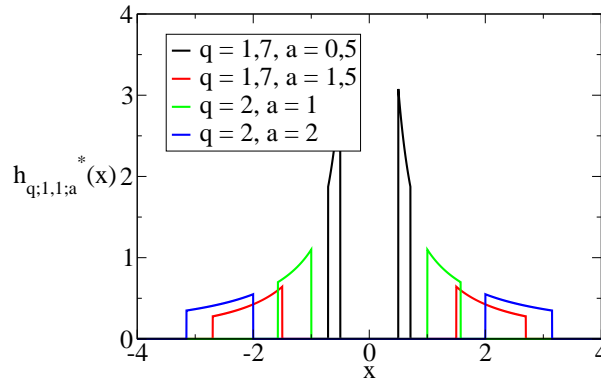


Fig. 13. Representação de $h_{q;1,1;a}^*(x)$ para diferentes valores de q e a .

transformada de Fourier é trivial.

5.3 Variante do primeiro exemplo de Hilhorst

É instrutivo estudar a seguinte variante do primeiro exemplo de Hilhorst:

$$h_{q;\lambda;a}^*(x) = \begin{cases} (\lambda/|x|)^{1/(q-1)} & \text{se } a < |x| < b \\ 0 & \text{para qualquer outro real } x, \end{cases} \quad (47)$$

onde q é qualquer real distinto de 1, e λ, a e b são positivos (ver Fig. 13). Impõe-se a seguinte condição de normalização sobre esta função:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_{q;\lambda;a}^*(x) dx = \int_{-b}^{-a} \left(\frac{\lambda}{-x}\right)^{1/(q-1)} dx + \int_a^b \left(\frac{\lambda}{x}\right)^{1/(q-1)} dx = 1,$$

de onde se obtém que

$$b = \begin{cases} \left[\frac{q-2}{2(q-1)} \lambda^{1/(1-q)} + a^{(q-2)/(q-1)} \right]^{(q-1)/(q-2)} & \text{se } q \neq 2 \\ ae^{1/(2\lambda)} & \text{se } q = 2. \end{cases} \quad (48)$$

Como $h_{q;\lambda;a}^*(x)$ é par, sua q' -transformada de Fourier é real para qualquer q' real, e está dada por

$$F_{q'}[h_{q;\lambda;a}^*](\xi) = 2 \int_a^b \left(\frac{\lambda}{x}\right)^{1/(q-1)} \cos_{q'} \left(\xi x \left(\frac{\lambda}{x}\right)^{(q'-1)/(q-1)} \right) dx, \quad (49)$$

a qual, em geral, depende de a (ver Fig. 14). Se $q' = q$, tem-se que

$$F_q[h_{q;\lambda;a}^*](\xi) = \cos_q(\xi\lambda),$$

a qual independe de a .

Considerando uma variável aleatória definida num espaço de probabilidade tal que a sua densidade seja a função $h_{q;\lambda;a}^*(x)$, tem-se para qualquer Q real que

$$\nu_Q[h_{q;\lambda;a}^*] = 2\nu_Q[h_{q;\lambda;a}] \quad (50)$$

(ver gráfico em Fig. 15), onde $\nu_Q[h_{q;\lambda;a}]$ está dado por (44). Então, o n -ésimo Q -momento não normalizado de $h_{q;\lambda;a}^*(x)$ é

$$\mu_Q^{(n)}[h_{q;\lambda;a}^*] = [1 - (-1)^n] \mu_Q^{(n)}[h_{q;\lambda;a}] \quad (51)$$

(ver gráfico em Fig. 16), onde $\mu_Q^{(n)}[h_{q;\lambda;a}]$ está dado por (45). Portanto, o n -ésimo Q -momento de $h_{q;\lambda;a}(x)$ é

$$\Pi_Q^{(n)}[h_{q;\lambda;a}^*] = \frac{[1 - (-1)^n]}{2} \Pi_Q^{(n)}[h_{q;\lambda;a}] \quad (52)$$

(ver gráfico em Fig. 17), onde $\Pi_Q^{(n)}[h_{q;\lambda;a}]$ está dado por (46).

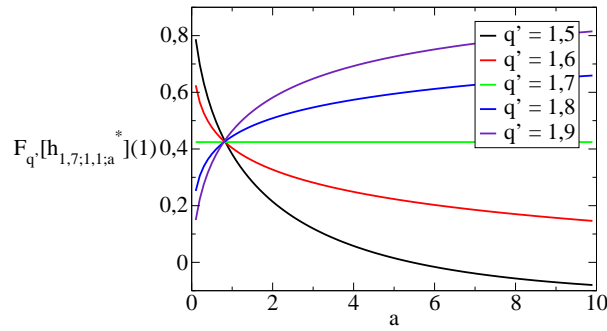


Fig. 14. A dependência em a de $F_{q'}[h_{1,7;1,1;a}^*](1)$ para diferentes valores de q' .

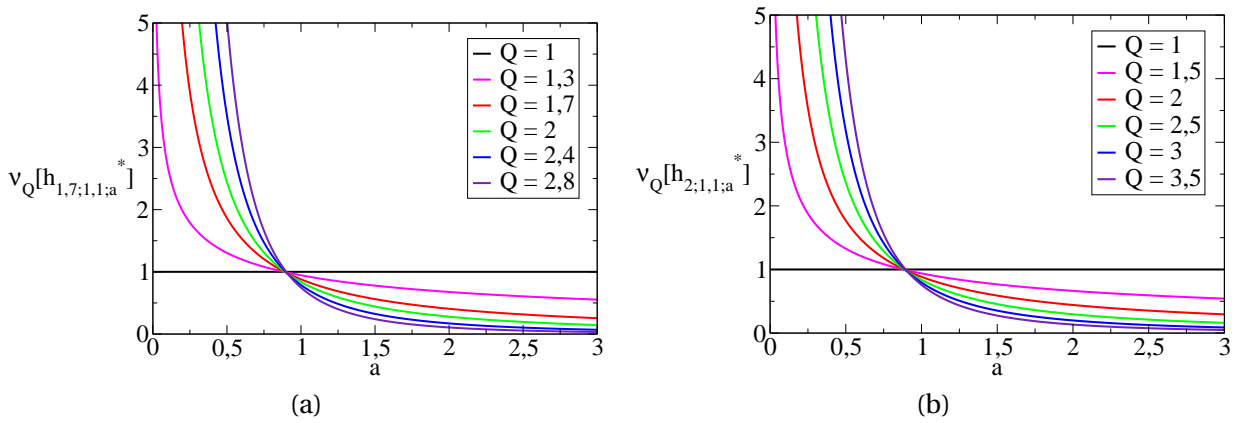


Fig. 15. A dependência em a das quantidades (a) $v_Q[h_{1,7;1,1;a}^*]$ e (b) $v_Q[h_{2;1,1;a}^*]$. Em ambos os casos $v_Q[h_{q;1,1;a}^*]$ é uma função monótona de a quando $Q \neq 1$.

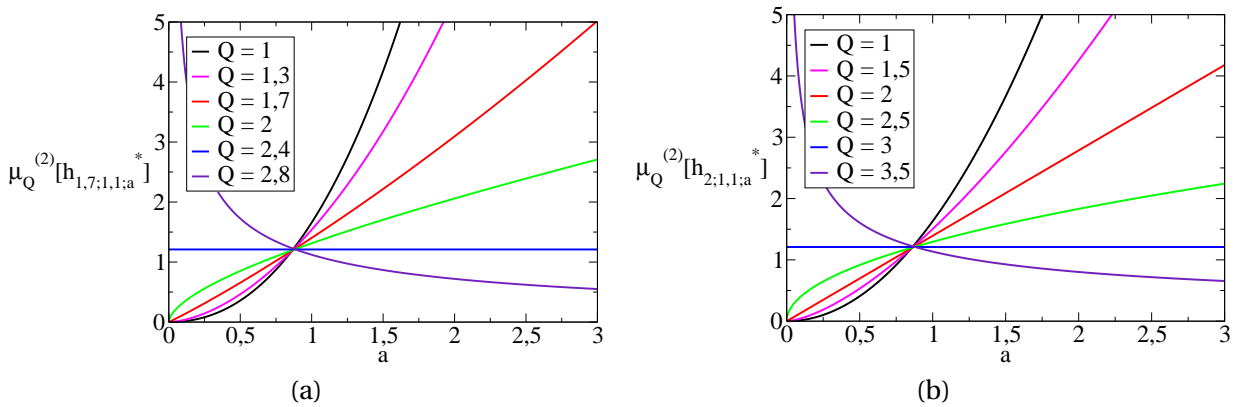


Fig. 16. A dependência em a dos segundos Q -momentos não normalizados de (a) $h_{1,7;1,1;a}^*(x)$ e (b) $h_{2;1,1;a}^*(x)$. Nota-se que quando (a) $Q = 2, 4$, (b) $Q = 3$, $\mu_Q^{(1)}[h_{q;1,1;a}^*]$ independe de a .

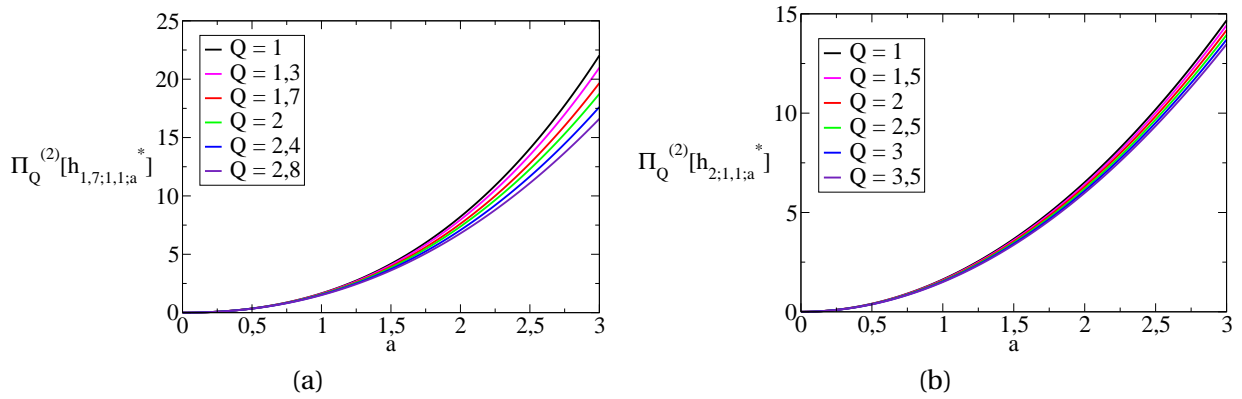


Fig. 17. A dependência em a dos segundos Q -momentos de (a) $h_{1,7;1,1;a}^*(x)$ e (b) $h_{2;1,1;a}^*(x)$.

5.4 Segundo exemplo de Hilhorst

Hilhorst propôs também a seguinte função, a qual foi construída a partir da definição da q -Gaussiana (ver [36]):

$$f_{q;A}(x) = \begin{cases} \frac{[1-A|x|^{2\alpha(q)}]^{1/(q-2)}}{C_q \{1+(q-1)x^2[1-A|x|^{2\alpha(q)}]^{-1/\alpha(q)}\}^{1/(q-1)}} & \text{se } A \leq |x|^{-\alpha(q)} \\ 0 & \text{para qualquer outro real } x, \end{cases} \quad (53)$$

onde q é elemento do intervalo $(1;2)$, A é não negativo, C_q é a constante de normalização da q -Gaussiana dada por (5) e $\alpha(q)$ está dado por (25). Nota-se que quando $A = 0$, $f_{q;A}(x)$ é igual a uma q -Gaussiana $G_q(1; x)$ (ver Fig. 18).

Se $A > 0$, então a q -transformada de Fourier de $f_{q;A}$, $F_q[f_{q;A}]$, é igual a

$$\frac{1}{C_q} \int_{-A^{-1/2\alpha(q)}}^{A^{-1/2\alpha(q)}} \frac{[1-A|x|^{2\alpha(q)}]^{1/(q-2)}}{\text{v.p.} \left\{ 1 + (1-q) \left\{ -[1-A|x|^{2\alpha(q)}]^{-1/\alpha(q)} x^2 + i[1-A|x|^{2\alpha(q)}]^{-1/2\alpha(q)} C_q^{1-q} \xi x \right\} \right\}^{1/(q-1)}} dx.$$

O termo entre chaves no denominador, em geral, é um número complexo, porém se sua parte imaginária é nula, dito termo é positivo. Portanto, ele pode ser expressado como uma q -exponencial, logo,

$$F_q[f_{q;A}](\xi) = \frac{1}{C_q} \int_{-A^{-1/2\alpha(q)}}^{A^{-1/2\alpha(q)}} [1-A|x|^{2\alpha(q)}]^{1/(q-2)} \exp_q \left(- \left\{ \frac{x}{[1-A|x|^{2\alpha(q)}]^{1/2\alpha(q)}} - \frac{i C_q^{1-q} \xi^2}{2} \right\}^2 + \frac{C_q^{2(1-q)} \xi^2}{4} \right) dx.$$

Fazendo a mudança de variáveis $y = x/[1-A|x|^{2\alpha(q)}]^{1/2\alpha(q)}$ tem-se que

$$F_q[f_{q;A}](\xi) = \frac{1}{C_q} \int_{-i C_q^{1-q} \xi/2}^{\infty - i C_q^{1-q} \xi/2} e_q^{-y^2 - C_q^{2(1-q)} \xi^2/4} dy,$$

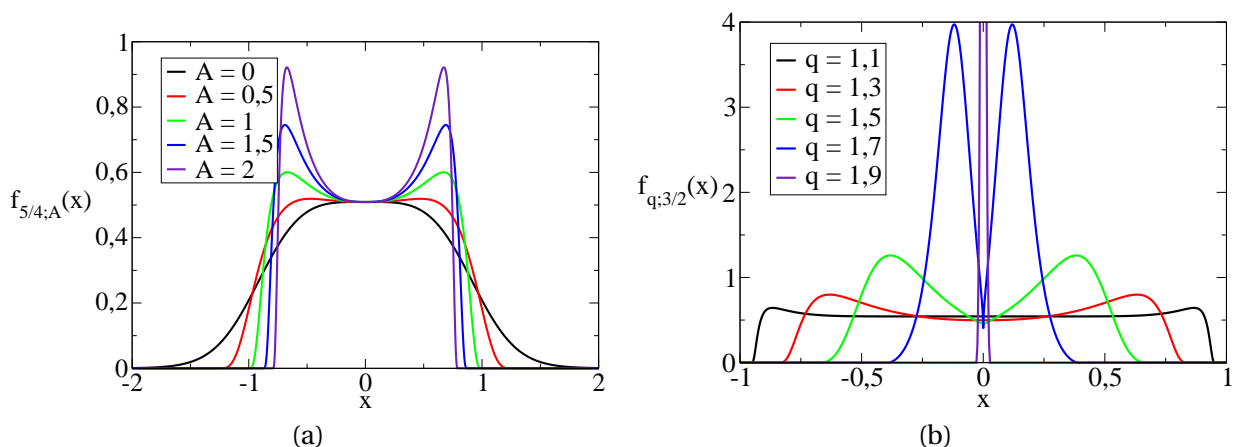


Fig. 18. Representações de (a) $f_{5/4;A}(x)$ para diferentes valores de A , e (b) $f_{q;3/2}(x)$ para diferentes valores de q .

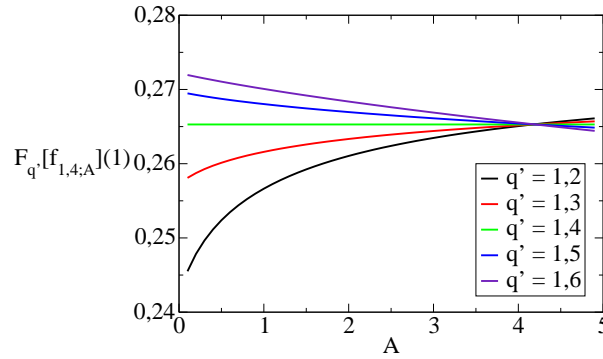


Fig. 19. A dependência em A de $F_{q'}[f_{1,4;A}](1)$ para diversos valores de q' .

que é igual à q -transformada de Fourier de uma q -Gaussiana $G_q(1; x)$ (ver detalhes em [32]), a qual, naturalmente, independe de A , porém, em geral, a q' -transformada de Fourier de $f_{q;A}$ depende de A (ver Fig. 19).

Considerando uma variável aleatória definida num espaço de probabilidade tal que sua densidade seja a função $f_{q;A}(x)$, tem-se para qualquer real Q que

$$\nu_Q[f_{q;A}] = \int_{-A^{-1/[2\alpha(q)]}}^{A^{-1/[2\alpha(q)]}} \frac{[1 - A|x|^{2\alpha(q)}]^{Q/(q-1)}}{C_q^Q \{1 + (q-1)x^2[1 - A|x|^{2\alpha(q)}]^{-1/\alpha(q)}\}^{Q/(q-1)}} dx \quad (54)$$

é finito e depende de A de forma monótona para qualquer $Q \neq 1$ (ver Fig. 20a). Então, o n -ésimo Q -momento não normalizado de $f_{q;A}(x)$ está dado por

$$\mu_Q^{(n)}[f_{q;A}] = \frac{1}{C_q^Q} \int_{-A^{-1/[2\alpha(q)]}}^{A^{-1/[2\alpha(q)]}} \frac{x^n}{[1 - A|x|^{2\alpha(q)}]^{Q/(2-q)}} \left[\exp_q \left(-\frac{x^2}{[1 - A|x|^{2\alpha(q)}]^{-1/\alpha(q)}} \right) \right]^Q dx,$$

o qual em geral depende de A . Se $Q = nq - (n-1)$, então

$$\begin{aligned} \mu_{nq-(n-1)}^{(n)}[f_{q;A}] &= \frac{1}{C_q^{nq-(n-1)}} \int_{-A^{-1/[2\alpha(q)]}}^{A^{-1/[2\alpha(q)]}} \frac{x^n}{[1 - A|x|^{2\alpha(q)}]^{n/[2\alpha(q)]} [1 - A|x|^{2\alpha(q)}]^{1/(2-q)}} \\ &\quad \times \left[\exp_q \left(-\frac{x^2}{[1 - A|x|^{2\alpha(q)}]^{-1/\alpha(q)}} \right) \right]^{nq-(n-1)} dx. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis $y = x/[1 - A|x|^{2\alpha(q)}]^{1/[2\alpha(q)]}$, tem-se que

$$\mu_{nq-(n-1)}^{(n)}[f_{q;A}] = \int_{-\infty}^{+\infty} y^n \left(\frac{1}{C_q} e_q^{-y^2} \right)^{nq-(n-1)} dy,$$

que é igual ao n -ésimo $[nq - (n-1)]$ -momento de uma q -Gaussiana $G_q(1; x)$, a qual naturalmente independe de A (ver Fig. 20b).

6 Um método para inverter a q -transformada de Fourier

Na seção 5, viu-se que é possível determinar a inversa da q -transformada de Fourier de uma densidade de probabilidade, conhecendo, além da sua q -transformada de Fourier, algum dos ν_Q de esta. Contudo, ainda não se tem um método, analítico ou numérico, para encontrar tal inversa. Nesta seção, introduzir-se-á uma expressão que poderia ser interpretada como uma q -generalização da transformada de Fourier inversa, com a qual se pode encontrar uma densidade de probabilidade a partir da sua q -transformada de Fourier e certa informação adicional (ver [46]).

6.1 Descrição do método

Sejam q no intervalo $(1;2)$ e uma função não negativa contínua por partes $f(x)$ da variável real x com suporte⁷ $\text{supp } f$. Define-se, para cada elemento y do suporte de $f(x)$, a função $f_y(x) = f(x+y)$ da variável x (nota-se que $f_0(x) = f(x)$).

⁷O suporte de uma função $f(x)$ da variável x é o fecho do conjunto formado por todos os elementos y do domínio de f tais que $f(y) \neq 0$.

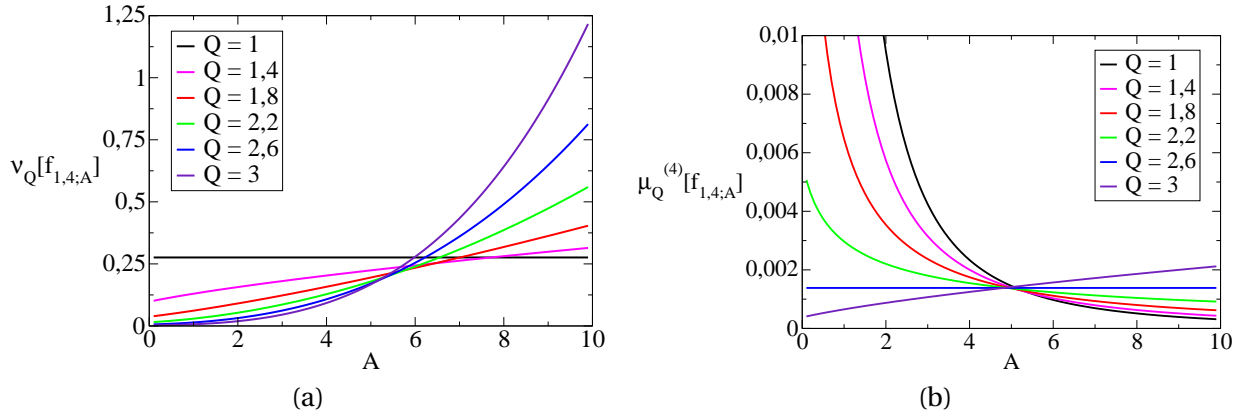


Fig. 20. A dependência em A (a) da quantidade $v_Q[f_{1,4;A}]$ e (b) do quarto Q -momento não normalizado de $f_{1,4;A}(x)$ para diferentes valores de Q . Nota-se que $v_Q[f_{1,4;A}]$ é uma função monótona de A quando $Q \neq 1$, e quando $Q = 2,6$, $\mu_Q^{(4)}[f_{1,4;A}]$ independe de A .

Logo, a q -transformada de Fourier de $f_y(x)$ está dada por

$$F_q[f_y](\xi; y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y) e_q^{i\xi x [f(x+y)]^{q-1}} dx.$$

Fazendo mudança de variáveis $z = x + y$, tem-se que

$$F_q[f_y](\xi; y) = \int_{\text{supp } f} f(z) e_q^{i\xi(z-y)[f(z)]^{q-1}} dz.$$

Logo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_q[f_y](\xi; y) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\text{supp } f} f(z) e_q^{i\xi(z-y)[f(z)]^{q-1}} dz d\xi.$$

Assumindo que a função $f(x)$ é tal que é permitido permutar os operadores de integração no lado direito da equação acima, tem-se que

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_q[f_y](\xi; y) d\xi = \int_{\text{supp } f} f(z) \int_{-\infty}^{+\infty} e_q^{i\xi(z-y)[f(z)]^{q-1}} d\xi dz.$$

A integral em ξ pode ser rescrita em termos da distribuição $\delta_q(x)$ (ver (30)), logo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_q[f_y](\xi; y) d\xi = \frac{2\pi}{2-q} \int_{\text{supp } f} f(z) \delta_q((z-y)[f(z)]^{q-1}) dz.$$

Assumindo que a função f pertence à família de funções para as quais a distribuição $\delta_q(x)$ se comporta como a delta de Dirac (ver Teorema 2 e [40, 42, 44, 45]), tem-se que

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_q[f_y](\xi; y) d\xi = \frac{2\pi}{2-q} \int_{\text{supp } f} f(z) \delta((z-y)[f(z)]^{q-1}) dz. \tag{55}$$

Se o suporte de $f(x)$ é uma união finita de intervalos fechados $[a_j; b_j]$ mutuamente exclusivos, então

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_q[f_y](\xi; y) d\xi = \frac{2\pi}{2-q} \sum_{j=1}^n \int_{a_j}^{b_j} f(z) \delta((z-y)[f(z)]^{q-1}) dz.$$

Como $f(y) \neq 0$ dentro de qualquer intervalo de integração, então, pelo Teorema 7 (ver Apêndice), tem-se que

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_q[f_y](\xi; y) d\xi = \frac{2\pi}{2-q} \sum_{j=1}^n \int_{a_j}^{b_j} f(z) \frac{\delta(z-y)}{[f(y)]^{q-1}} dz.$$

Como y é fixado, existe um único inteiro positivo $j_0 \leq n$ tal que y é elemento do intervalo $[a_{j_0}; b_{j_0}]$. Logo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_q[f_y](\xi; y) d\xi = \frac{2\pi}{2-q} \int_{a_{j_0}}^{b_{j_0}} f(z) \frac{\delta(z-y)}{[f(y)]^{q-1}} dz.$$

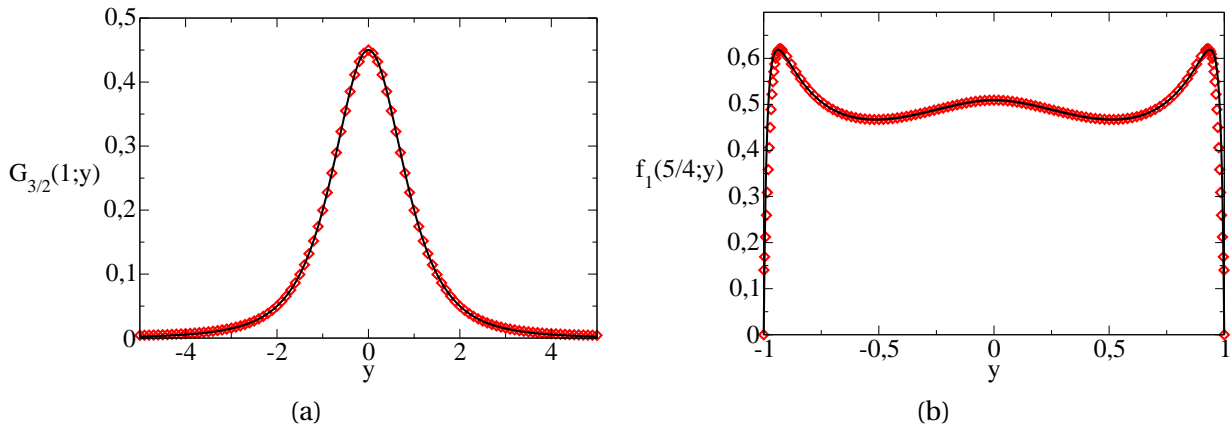


Fig. 21. Representações de (a) $G_{3/2}(1; y)$ e (b) $f_1(5/4; y)$. Em ambos os casos, a linha contínua corresponde à expressão analítica das funções enquanto que os pontos foram obtidos numericamente mediante o uso da equação (56). Em (b), para todos os valores de y no intervalo $(-1; 1)$ usou-se $\gamma = 2$ em (56) enquanto que para $y = \pm 1$ usou-se $\gamma = 1$.

Finalmente, pelo **Lema 5** (ver **Apêndice**), tem-se que

$$f(y) = \left[\frac{2-q}{\gamma\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_q[f_y](\xi; y) d\xi \right]^{\frac{1}{2-q}}, \quad (56)$$

onde $\gamma = 2$ se y é um ponto interno de $[a_{j_0}; b_{j_0}]$, e $\gamma = 1$ se y pertence à fronteira de $[a_{j_0}; b_{j_0}]$.

Se o suporte de $f(x)$ é a reta real. A partir de (55) obtém-se facilmente que

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_q[f_y](\xi; y) d\xi = \frac{2\pi}{2-q} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \frac{\delta(z-y)}{[f(z)]^{q-1}} dz = \frac{2\pi}{2-q} [f(y)]^{2-q},$$

o qual decorre no caso particular $\gamma = 2$ de (56).

Por outro lado se o suporte de $f(x)$ for limitado só por cima ou só por baixo ou for igual ao conjunto dos reais, fazendo um procedimento similar ao descrito, é possível obter (56) a partir de (55).

Portanto, conhecendo a q -transformada de Fourier de todas as translações de uma densidade de probabilidade no eixo das abscisas, pode-se obter a dita densidade mediante o uso de (56). A figura **Fig. 21** mostra dois exemplos do uso de (56). Deve-se ressaltar duas coisas, em primeiro lugar, ainda que (56) foi encontrada analiticamente, ela é aplicada numericamente nos exemplos. Isto se deve principalmente ao fato de que a q -transformada de Fourier das translações das funções consideradas não são triviais de serem integradas analiticamente. Em segundo lugar, nota-se que (56) funciona mesmo com as funções dos contraexemplos de Hilhorst.

6.2 Caso particular $q \rightarrow 1$

No limite $q \rightarrow 1$, (56) reduz-se a

$$f(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F[f_y](\xi; y) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y) e^{i\xi x} dx d\xi.$$

Fazendo a mudança de variáveis $z = x + y$, tem-se que

$$f(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi y} \int_{\text{supp } f} f(z) e^{i\xi z} dz d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi y} F[f](\xi) d\xi, \quad (57)$$

a qual é a conhecida expressão da transformada de Fourier inversa.

Se se tratasse de fazer um procedimento similar ao descrito nas linhas anteriores no caso $q \neq 1$, encontrar-se-ia imediatamente o problema que, em geral, $e_q^{a+b} \neq e_q^a e_q^b$. Portanto, nenhuma expressão analítica similar a (57) tem sido encontrada até agora.

7 Conclusões e perspectivas

Conclui-se que as q -ondas planas com $q \neq 1$ se diferenciam das ondas planas padrão pelo fato de que elas podem ser normalizadas quando q é elemento do intervalo $(1; 3)$. Graças a esta propriedade, as q -ondas planas poderiam ser usadas na física, especialmente na mecânica quântica ou na teoria de campos.

A partir dos resultados numéricos e analíticos apresentados na seção 4, conclui-se que a distribuição $\delta_q(x)$ definida em (30) é de fato uma nova representação da delta de Dirac, ou seja, trata-se da representação da delta de Dirac em q -ondas planas. O Teorema 2 e seus corolários, como também o feito em [40, 42, 44, 45], já constituem uma prova rigorosa da Conjectura 2, porém ainda é possível encontrar novas famílias de funções para as quais a delta de Dirac possa ser representada como combinação linear de q -ondas planas.

A representação da delta de Dirac em q -ondas planas, como toda representação da delta de Dirac, terá aplicação na matemática e na física. Em particular, sabe-se que se pode obter, de forma heurística, a expressão da transformada de Fourier inversa a partir da definição da transformada de Fourier e da representação da delta de Dirac em ondas planas, então, é possível que, a partir da definição da q -transformada de Fourier e da representação da delta de Dirac em q -ondas planas, se possa obter, de forma heurística, a expressão da inversa da q -transformada de Fourier. Isto já foi realizado nesta dissertação, resultando numa q -generalização da transformada de Fourier inversa dada por (56).

A partir dos resultados analíticos e numéricos apresentados na seção 5, conclui-se que é possível determinar uma densidade de probabilidade $f(x)$ a partir da sua q -transformada de Fourier e do conhecimento de algum dos $\nu_Q[f]$, dados por (36), para $Q \neq 1$. Em particular, nos contraexemplos de Hilhorst, o valor do parâmetro adicional das funções consideradas pode ser encontrado a partir de qualquer ν_Q destas, identificando assim a densidade original.

A propriedade da q -transformada de Fourier dada em (56) é ressaltante, e pode ser considerada como uma q -generalização da transformada de Fourier inversa. Graças a ela, a q -transformada de Fourier poderia ter aplicações similares à da transformada de Fourier padrão, tanto na matemática como na física e na engenharia. (56) foi obtida de forma heurística nesta dissertação, portanto, uma prova rigorosa de esta propriedade é bem-vinda.

Conclui-se que uma densidade de probabilidade $f(x)$ pode ser determinada a partir do conhecimento da q -transformada de Fourier de todas suas translações no eixo das abscisas mediante o uso de (56). Mesmo as funções consideradas nos contraexemplos de Hilhorst obedecem esta propriedade da q -transformada de Fourier.

Apêndice. Algumas propriedades da delta de Dirac

Lema 5. *Sejam a e b reais com $a < b$, e uma função real $f(x)$ da variável real x contínua em $x = 0$. Logo,*

$$\int_a^b f(x)\delta(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < a \text{ ou } b < 0 \\ f(0) & \text{se } a < 0 < b \\ f(0)/2 & \text{se } a = 0 < b \text{ ou } a < b = 0. \end{cases}$$

Prova. Nota-se que só a restrição de $f(x)$ ao intervalo $[a; b]$ contribui na integral. Logo, pode-se definir uma função $F(x)$ da variável x tal que

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } a < x < b \\ 0 & \text{para qualquer outro } x. \end{cases}$$

Esta função é contínua na origem só nos seguintes casos: $0 < a$ ou $b < 0$, $a < 0 < b$, $a = 0$ e $f(a) = 0$, ou $b = 0$ e $f(b) = 0$. Então, em quaisquer destes casos ter-se-ia que

$$\int_a^b f(x)\delta(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\delta(x) dx = F(0).$$

Assim se $0 < a$ ou $b < 0$, $F(0) = 0$; se $a < 0 < b$, $F(0) = f(0)$.

Segue do já provado que

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} f(x)\delta(x) dx = f(0)$$

para qualquer ϵ positivo. Por outro lado, usando a fórmula do valor médio para integrais, tem-se que

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} f(x)\delta(x) dx = 2\epsilon f(\tau)\delta(\tau),$$

onde τ é elemento do intervalo $(-\epsilon; \epsilon)$. Devido à liberdade de escolher ϵ tão pequeno como se quiser, pode-se escrever

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} f(x)\delta(x) dx = 2\epsilon f(0)\delta(\epsilon).$$

Logo, $2\epsilon f(0)\delta(\epsilon) = f(0)$, de onde se obtém que $\delta(\epsilon) = 1/(2\epsilon)$. Assim introduz-se a seguinte representação da delta de Dirac:

$$\delta(x) = \begin{cases} 1/(2\epsilon) & \text{se } -\epsilon < x < \epsilon \text{ com } \epsilon \rightarrow 0+. \\ 0 & \text{em qualquer outro caso.} \end{cases}$$

Usando esta representação, no caso em que $a = 0 < b$, tem-se que

$$\int_0^b f(x)\delta(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_0^\epsilon f(x)\delta(x) dx + \int_\epsilon^b f(x)\delta(x) dx \right],$$

onde a segunda integral é nula. Logo,

$$\int_0^b f(x)\delta(x) dx = \frac{f(0)}{2}.$$

Analogamente, quando $a < 0$, pode-se obter que

$$\int_a^0 f(x)\delta(x) dx = \frac{f(0)}{2}.$$

Isto conclui a prova. □

Lema 6. *Sejam x e $a \neq 0$ reais. Logo,*

- (i) $\delta(x) = \delta(-x)$;
- (ii) $\delta(ax) = \delta(x)/|a|$,

no espaço de funções reais da variável x contínuas em $x = 0$.

Teorema 7. *Seja uma função real diferenciável $P(x)$ da variável real x tal que a equação $P(x) = 0$ possui um número finito de soluções, x_j com $j = 1, 2, \dots, n$, e $P'(x_j) \neq 0$. Logo,*

$$\delta(P(x)) = \sum_{j=1}^n \frac{\delta(x - x_j)}{|P'(x_j)|},$$

no espaço de funções reais contínuas da variável x .

Prova. Seja uma função contínua $f(x)$ da variável x e considere-se $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, logo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(P(x)) dx = \int_{-\infty}^{x_1+\epsilon} f(x)\delta(P(x)) dx + \int_{x_1+\epsilon}^{x_2+\epsilon} f(x)\delta(P(x)) dx + \dots + \int_{x_{n-1}+\epsilon}^{\infty} f(x)\delta(P(x)) dx,$$

onde $\epsilon > 0$. Escolhendo $\epsilon < \min\{x_2 - x_1; x_3 - x_2; \dots; x_n - x_{n-1}\}$, tal que a restrição de P ao intervalo $[x_j - \epsilon; x_j + \epsilon]$ com $j = 1, 2, \dots, n$ seja injetiva, pelo **Lema 5**, cada integral no lado direito da equação acima pode ser reescrita de tal forma que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(P(x)) dx = \sum_{j=1}^n \int_{x_j-\epsilon}^{x_j+\epsilon} f(x)\delta(P(x)) dx.$$

Como em cada intervalo de integração P é injetiva, então, fazendo a mudança de variáveis $y = P(x)$, tem-se que $x \rightarrow x_j - \epsilon \Rightarrow y \rightarrow y_{j-}$, $x \rightarrow x_j + \epsilon \Rightarrow y \rightarrow y_{j+}$, e

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(P(x)) dx = \sum_{j=1}^n \int_{y_{j-}}^{y_{j+}} f(x(y)) \frac{\delta(y)}{\text{sgn}(P'(x(y)))|P'(x(y))|} dy,$$

onde sgn é a *função sinal*, tal que $\text{sgn } x = -1$ se x é negativo, $\text{sgn } x = 0$ se $x = 0$, e $\text{sgn } x = 1$ se x é positivo. Deve-se notar que se $y_{j-} < 0 < y_{j+}$, $P'(x_j)$ é positivo; e se $y_{j+} < 0 < y_{j-}$, $P'(x_j)$ é negativo. Então,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(P(x)) dx = \sum_{j=1}^n \int_{\min\{y_{j-}, y_{j+}\}}^{\max\{y_{j-}, y_{j+}\}} f(x(y)) \frac{\delta(y)}{|P'(x(y))|} dy = \sum_{j=1}^n \frac{f(x_j)}{|P'(x_j)|}.$$

Afinal, identifica-se $f(x_j)$ com

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_j) dx,$$

o qual conclui a prova. □

Teorema 8. *Seja a função degrau de Heaviside $\theta(x)$ da variável real x tal que $\theta(x) = 1$ se x é positivo, e $\theta(x) = 0$ no caso contrário. Logo,*

- (i) $\theta'(x) = \delta(x)$, no espaço de funções reais diferenciáveis da variável x ;
- (ii) *Se uma função $f(x)$ da variável x é diferenciável e possui derivada contínua em $x = 0$, então*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x) dx = -f'(0).$$

Prova. (i) Mostrar-se-á primeiro que $\theta'(x)$ não tem suporte ilimitado. Se $x \gg 0$, então

$$\theta'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\theta(x+h) - \theta(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1-1}{h} = 0;$$

se $x \ll 0$, então

$$\theta'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\theta(x+h) - \theta(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$

Assim, $\theta'(x)$ não tem suporte ilimitado. Logo, existem a negativo e b positivo tais que se uma função real $f(x)$ da variável x é diferenciável, então

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\theta'(x) dx = \int_a^b f(x)\theta'(x) dx.$$

Fazendo integração por partes, tem-se que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\theta'(x) dx = f(x)\theta(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)\theta(x) dx = f(0).$$

(ii) Integrando

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x) dx$$

por partes, tem-se que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x) dx = f(x)\delta(x)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\delta(x) dx.$$

Pelo provado no item (i), pode-se fazer a substituição $\delta(x) = \theta'(x)$. Então,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x) dx = f(x)\theta'(x)|_{-\infty}^{\infty} - f'(0) = -f'(0),$$

pois o suporte de $\theta'(x)$ não é ilimitado. □

Referências

- [1] C. Tsallis, Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics, J. Stat. Phys. 52 (1988) 479.
- [2] Mecânica Estatística Não Extensiva e Termodinâmica, <http://tsallis.cat.cbpf.br/biblio.htm>.
- [3] P. Douglas, S. Bergamini e F. Renzoni, Tunable Tsallis distributions in dissipative optical lattices, Phys. Rev. Lett. 96 (2006) 110601.
- [4] G.B. Bagci e U. Tirnakli, Self-organization in dissipative optical lattices, Chaos 19 (2009) 033113.
- [5] B. Liu e J. Goree, Superdiffusion and non-Gaussian statistics in a driven-dissipative 2D dusty plasma, Phys. Rev. Lett. 100 (2008) 055003.
- [6] R.G. DeVoe, Power-law distributions for a trapped ion interacting with a classical buffer gas, Phys. Rev. Lett. 102 (2009) 063001.
- [7] R.M. Pickup, R. Cywinski, C. Pappas, B. Farago e P. Fouquet, Generalized spin glass relaxation, Phys. Rev. Lett. 102 (2009) 097202.
- [8] L.F. Burlaga e N.F. Ness, Compressible “turbulence” observed in the heliosheath by Voyager 2, Astrophys. J. 703 (2005) 311.
- [9] L.F. Burlaga e A.F. Vinas, Triangle for the entropic index q of non-extensive statistical mechanics observed by Voyager 1 in the distant heliosphere, Physica A 356 (2005) 375.
- [10] F. Caruso, A. Pluchino, V. Latora, S. Vinciguerra e A. Rapisarda, Analysis of self-organized criticality in the Olami-Feder-Christensen model and in real earthquakes, Phys. Rev. E 75 (2007) 055101(R).
- [11] B. Bakar e U. Tirnakli, Analysis of self-organized criticality in Ehrenfest’s dog-flea model, Phys. Rev. E 79 (2009) 040103(R).
- [12] A. Celikoglu, U. Tirnakli e S.M.D. Queiros, Analysis of return distributions in the coherent noise model, Phys. Rev. E 82 (2010) 021124.
- [13] V. Khachatryan *et al* (CMS Collaboration), Transverse-momentum and pseudorapidity distributions of charged hadrons in pp collisions at $\sqrt{s} = 0,9$ and $2,36$ TeV, J. High Energy Phys. 02 (2010) 041.
- [14] V. Khachatryan *et al* (CMS Collaboration), Transverse-momentum and pseudorapidity distributions of charged hadrons in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV, Phys. Rev. Lett. 105 (2010) 022002.
- [15] A. Adare *et al* (PHENIX Collaboration), Measurement of neutral mesons in $p + p$ collisions at $\sqrt{s} = 200$ GeV and scaling properties of hadron production, [arXiv:1005.3674 \[hep-ex\]](https://arxiv.org/abs/1005.3674).

- [16] M. Shao, L. Yi, Z.B. Tang, H.F. Chen, C. Li e Z.B. Xu, Examination of the species and beam energy dependence of particle spectra using Tsallis statistics, *J. Phys. G* 37(8) (2010) 085104.
- [17] M.L. Lyra e C. Tsallis, Nonextensivity and multifractality in low-dimensional dissipative systems, *Phys. Rev. Lett.* 80 (1998) 53.
- [18] E.P. Borges, C. Tsallis, G.F.J. Ananos e P.M.C. de Oliveira, Nonequilibrium probabilistic dynamics at the logistic map edge of chaos, *Phys. Rev. Lett.* 89 (2002) 254103.
- [19] G.F.J. Ananos e C. Tsallis, Ensemble averages and nonextensivity at the edge of chaos of one-dimensional maps, *Phys. Rev. Lett.* 93 (2004) 020601.
- [20] U. Tirnakli, C. Beck e C. Tsallis, Central limit behavior of deterministic dynamical systems, *Phys Rev. E* 75 (2007) 040106(R).
- [21] U. Tirnakli, C. Tsallis e C. Beck, A closer look at time averages of the logistic map at the edge of chaos, *Phys. Rev. E* 79 (2009) 056209.
- [22] L. Borland, Closed form option pricing formulas based on a non-Gaussian stock price model with statistical feedback, *Phys. Rev. Lett.* 89 (2002) 098701.
- [23] L. Borland, A theory of non-gaussian option pricing, *Quant. Finance* 2 (2002) 415.
- [24] S.M.D. Queiros, On non-Gaussianity and dependence in financial time series: A nonextensive approach, *Quant. Finance* 5 (2005) 475.
- [25] A. Upadhyaya, J.P. Rieu, J.A. Glazier e Y. Sawada, Anomalous diffusion and non-Gaussian velocity distribution of Hydra cells in cellular aggregates, *Physica A* 293 (2001) 549.
- [26] K.E. Daniels, C. Beck e E. Bodenschatz, Defect turbulence and generalized statistical mechanics, in *Anomalous Distributions, Nonlinear Dynamics and Nonextensivity*, eds. H.L. Swinney and C. Tsallis, *Physica D* 193 (2004) 208.
- [27] R. Arevalo, A. Garcimartin e D. Maza, Anomalous diffusion in silo drainage, *Eur. Phys. J. E* 23 (2007) 191.
- [28] L.G. Moyano e C. Anteneodo, Diffusive anomalies in a long-range Hamiltonian system, *Phys. Rev. E* 74 (2006) 021118.
- [29] J.C. Carvalho, R. Silva, J.G. do Nascimento e J.R. de Medeiros, Power law statistics and stellar rotational velocities in the Pleiades, *Europhys. Lett.* 84 (2008) 59001.
- [30] M. Gell-Mann e C. Tsallis (eds), *Nonextensive Entropy - Interdisciplinary Applications*, New York, Oxford University Press, 2004.
- [31] C. Tsallis, *Nonextensive Statistical Mechanics - Approaching a Complex World*, New York, Springer, 2009.
- [32] S. Umarov, C. Tsallis e S. Steinberg, On a q -central limit theorem consistent with nonextensive statistical mechanics, *Milan J. Math.* 76 (2008) 307.
- [33] B.R. James, *Probabilidade: Um Curso em Nível Intermediário*, 3ed, Rio de Janeiro, IMPA, 2010.
- [34] S. Umarov, C. Tsallis, M. Gell-Mann e S. Steinberg, Generalization of symmetric α -stable Lévy distributions for $q > 1$, *J. Math. Phys.* 51 (2010) 033502.
- [35] S. Umarov e C. Tsallis, On a representation of the inverse F_q -transform, *Phys. Lett. A* 372 (2008) 4874.
- [36] H.J. Hilhorst, Note on a q -modified central limit theorem, *J. Stat. Phys.* (2010) P10023
- [37] C. Tsallis, Nonadditive entropy and nonextensive statistical mechanics - An overview after 20 years, *Braz. J. Phys.* 39 (2009) 2A.
- [38] E.D. Nobre, M.A. Rego-Monteiro e C. Tsallis, Nonlinear relativistic and quantum equations with a common type of solution, *Phys. Rev. Lett.* 106 (2011) 140601.
- [39] E.P. Borges, On a q -generalization of circular and hyperbolic functions, *J. Phys. A* 31 (1998) 5281.
- [40] M. Jauregui e C. Tsallis, New representations of π and Dirac delta using the nonextensive-statistical-mechanics q -exponential function, *J. Math. Phys.* 51 (2010) 063304.
- [41] P.A.M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, London, Oxford University Press, 1958.
- [42] A. Chevreuil, A. Plastino e C. Vignat, On a conjecture about Dirac's delta representation using q -exponentials, *J. Math. Phys.* 51 (2010) 093502.
- [43] I.S. Gradshteyn e I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, 7 ed, Academic Press, 2007.
- [44] A. Plastino e M.C. Rocca, A direct proof of Jauregui-Tsallis' conjecture, [arXiv:1012.1223 \[math-ph\]](https://arxiv.org/abs/1012.1223).
- [45] M. Mamode, Integral representation of Dirac distribution using the Tsallis q -exponential function, *J. Math. Phys.* 51 (2010) 123509.
- [46] M. Jauregui e C. Tsallis, On the role of q -Fourier transform in physical complexity, [arXiv:1010.6275v2 \[cond-mat.stat-mech\]](https://arxiv.org/abs/1010.6275v2)
- [47] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 3ed, McGraw-Hill, 1987.
- [48] C. Tsallis, A.R. Plastino, R.F. Alvarez-Estrada, Escort mean values and the characterization of power-law-decaying probability densities, *J. Math. Phys.* 50 (2009) 043303.
- [49] A. Rodriguez e C. Tsallis, A generalization of the cumulant expansion. Application to a scale-invariant probabilistic model, *J. Math. Phys.* 51 (2010) 073301.