

TESE DE
DOUTORADO

Cordas BPS Não-Abelianas
e
Uma Análise Simplética de Redução de Legendre

PATRICK BROCKILL

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS
RIO DE JANEIRO, 2006

Agradecimentos

- Ao Prof. José A. Helayël-Neto e Prof. Marco Aurelio Cattacin Kneipp, por sua orientação, apoio, amizade e por tudo que me ensinaram, assim por serem o ponto chave na realização desta tese;
- A Cecilia Uribe Estrada, pelo seu amor, companherismo e dedicação de sempre;
- A meus pais, meu irmão, OZ, Emma, e toda a minha família, pelo apoio incondicional, moral, financeiro, pelos bons momentos, e por manterem a minha visão das coisas com otimismo e bom humor;
- Aos professores do CBPF, em especial Prof. João dos Anjos, por sua bondade, amizade e apoio durante o meu tempo no CBPF;
- A Myriam, Ricardo e Rosângela, pelo efetivo apoio administrativo e amizade;
- A meus amigos no CBPF e São Paulo, pela prazerosa convivência, e a sua instrução em vários aspectos coloquiais de Portugêes;
- A meus demais amigos na Holanda, por sua valiosa amizade de tantos anos;
- Ao CAPES e FAPESP, pelo suporte financeiro e por terem facilitado a realização desta tese;
- Ao CBPF, pelas ótimas condições de trabalho;
- Ao Prof. Bruto Pimentel, por seu ensino em quantização à la Dirac, e por ter-me indicado Prof. Helayël;
- Ao Prof. Robin Devenish, por sua amizade, pelo apoio administrativo e social na universidade de Oxford;
- À Profa. Marleigh Sheaff, pelo apoio e amizade;
- Ao Prof. John Cumulat, por ter-me feito sentir como parte do grupo de física da Universidade de Boulder;
- Às bibliotecas do CBPF, IFT, Université de Paris XIV (LAL, Orsay), UW Madison, Oxford, Vanderbilt, Boulder, e Fermilab por terem-me permitido usar as suas instalações, e pela valiosa provisão dos textos necessários na realização desta tese.

Resumo

Cordas Z_k do tipo BPS em teorias não-Abelianas são discutidas, sobretudo no quadro de teorias $N = 2$ supersimétricas. Derivamos as condições de BPS necessárias para a sua existência e mostramos como estas são consistentes com as equações de movimento num limite particular, além de mostrarmos como um quarto das transformações supersimétricas desaparece neste limite. Procedemos por analisar as soluções do vácuo para que o primeiro grupo de homologia seja Z_k , assim garantindo a possibilidade da sua existência. Logo consideramos a sua solução explícita e a sua relação a soluções explícitas não-analíticas, e calculamos a tensão da corda. Concluimos por considerar as possíveis fases da teoria, e comparamos o nosso padrão de quebra de simetria, $G \rightarrow G_S \rightarrow G_\phi$, a resultados já conhecidos.

Na segunda parte desta tese, consideramos uma formulação multi-simplética de redução dimensional, e particularmente a sua aplicação com respeito a redução de Legendre. Formulamos um ansatz para a forma de Cartan da teoria reduzida no caso onde a variedade original tem a forma $M \times G$ (G um grupo), onde o grupo de isometria é unimodular. Baseado neste ansatz, deduzimos os requisitos de consistência quando faz-se a redução sobre mais do que uma dimensão, e mostramos que uma redução de Legendre somente pode ser associada com um setor Abelianos do grupo de isometria. Continuamos por calcular a forma de Cartan para uma variedade de coset representativo (S^2) para mostrar como os mesmos requisitos de consistência surgem. Consideramos o nosso requerimento de consistência em teorias gravitacionais dinâmicas.

Abstract

BPS Z_k strings are discussed in non-Abelian theories, particularly in the framework of $N = 2$ supersymmetric theories. We derive the BPS conditions required for their existence and show how these are consistent with the equations of motion in a certain limit, as well as show how only one quarter of the supersymmetric transformations vanish in this limit. We proceed to analyze the vacuum solutions such that the first homology group is Z_k , allowing for the existence of strings, consider their explicit solution and their relations to known (but non-analytic) solutions, and calculate the string tension. We conclude by considering the various phases of the theory, and relate our symmetry breaking pattern, $G \rightarrow G_S \rightarrow G_\phi$, to known results.

In the second part of this thesis, we consider a multisymplectic formulation of dimensional reduction, especially as it applies to Legendre reduction. We formulate an Ansatz for the Cartan form of the reduced theory in the case where the original manifold is of the form $M \times G$ (G a group), where the isometry group is unimodular, and based on this form we derive consistency requirements when reducing more than one dimension, and we show that Legendre reduction may only be performed over an Abelian sector of the isometry group. We further calculate the Cartan form on a particular coset manifold (S^2) and show how the same consistency requirements emerge. We also briefly consider our consistency requirement in dynamical gravitational theories.

Índice

Introdução e Motivações	3
1 Cordas BPS	6
1.1 Teorias Abelianas	6
1.2 Teorias Não-Abelianas	9
1.2.1 Motivação: $N = 2$ Super Yang-Mills com Matéria	9
1.2.2 O Caso sem Supersimetria	10
1.2.3 Transformações de Supersimetria	13
1.3 Soluções do Vácuo	14
1.3.1 A Primeira Quebra: $G \rightarrow G_S$	14
1.3.2 A Segunda Quebra: $G_S \rightarrow G_\phi$	15
1.3.3 Partículas de Gauge e as suas Massas	16
1.3.4 Quebra de Gauge e o Limite $m\mu \sim$ Constante	17
1.4 Soluções das Condições BPS	17
1.5 Conclusões	18
2 Variedades Simpléticas e o Formalismo Multi-Simplético	19
2.1 Dinâmica de Partículas	19
2.1.1 Objetos Padrão	19
2.1.2 Subvariedades de Lagrange e Funções Geradoras	20
2.1.3 A Dinâmica	22
2.1.4 Jatos e Prolongações	23
2.2 Dinâmica de Campos	26
2.2.1 Notação	26
2.2.2 Dinâmica de Campos	26
2.2.3 Prolongações	28
2.2.4 Ações e Equações de Movimento	28
2.2.5 Θ e Notação	30
2.2.6 Espaços de Configurações Vetoriais	30
2.2.7 Campos Fermiônicos	31
2.3 Conclusões	31
3 Redução de Legendre e Variedades Multi-Simpléticas	32
3.1 Redução de Legendre	32
3.1.1 O Mecanismo Básico: $5D \rightarrow 4D$	32
3.1.2 Supersimetria	33
3.1.3 Dimensão > 1	35
3.2 O Formalismo Multi-Simplético e Simetrias	36
3.2.1 Vetores de Killing	37
3.2.2 Quantidades Conservadas	38
3.3 Redução e a Forma de Cartan	41
3.4 Redução Dimensional sobre um Espaço $1D$	42
3.4.1 Soluções de $v^A = 0$	43
3.5 Redução sobre Espaços com Dimensão 2	43
3.5.1 A Solução $v_A^\lambda = 0$	44

3.6	Gravitação e a Condição $v = 0$	45
3.7	Conclusões	46
4	Redução Dimensional Sobre Grupos e Cosets	47
4.1	Simetrias Adicionais e Vetores de Killing	47
4.2	Redução Dimensional Sobre Variedades de Grupos	47
4.3	Redução Sobre Espaços Coset	49
4.3.1	Os Vetores de Killing de S^2	50
4.3.2	O Caso $S^2 = SO(3)/SO(2)$	51
4.3.3	Uma Identidade	52
4.3.4	O Caso Geral	54
4.4	Conclusões	54
5	Perspectivas Futuras	55
A	Convenções e Identidades Úteis	56
A.1	Notação de Espinores	56
A.2	Variedades Riemaniannas	58
B	Campo Escalar com Background Estático	60
B.1	Estruturas Canônicas	60
B.2	Invariância de Θ Sobre os Vetores de Killing	61

Introdução e Motivações

A tese é dividida em duas partes: a primeira trata de soluções de cordas tipo BPS em teorias não-Abelianas, e a segunda trata de possíveis extensões de redução de Legendre e um tratamento multi-simplético de redução dimensional. Embora estes assuntos sejam bastante diferentes, os conceitos e a ferramenta matemática realmente não são tão divergentes: grupos e as suas representações, cosets, $N = 2$ supersimetria, extensões centrais, termos topológicos, etc. tomam um papel central em ambas teorias.

A importância de cordas (como soluções topológicas em teorias de gauge [15]) tem sido enfatizada bastante na física de hoje. As aplicações em confinamento continuam a motivar muitos trabalhos recentes, baseados frequentemente nas idéias originais de [16], onde crê-se que o confinamento é uma generalização dual não-Abeliana do efeito de Meissner. Além disto, fora das suas aplicações conhecidas em supercondutores [17], cordas parecem desempenhar um papel importante com respeito à formação de galáxias [18, 19].

Cordas satisfazendo condições de BPS são particularmente interessantes na física. Elas satisfazem equações diferenciais da primeira ordem, assim facilitando a sua análise, em vez de equações de movimento da segunda ordem. Adicionalmente, a existência destes objetos topológicos em teorias supersimétricas e a sua relação com a dualidade [6] tem sido outra motivação importante para estudá-los com mais detalhe.

Numa teoria de Yang-Mills com grupo de gauge arbitrário semi-simples quebrada por um escalar na representação adjunta, conhecem-se as soluções BPS dos monopolos [20]. Não obstante, a situação para cordas é diferente. Embora conheçam-se as soluções BPS para um grupo Abelianos quebrado ao seu centro Z [21, 22] (e em mais alguns casos [23, 24]), as soluções BPS no caso de uma teoria de Yang-Mills quebrada a um grupo de gauge semisimples não-Abeliano não parecem ser muito conhecidas na literatura e vão ser o nosso objetivo na primeira parte neste trabalho. Mas, contrariamente aos casos Abelianos, as nossas cordas vão ser associadas aos elementos de algum grupo Z_k em vez de Z .

Relacionados ao nosso trabalho, e formando em parte uma motivação para o nosso estudo, são os trabalhos de Seiberg e Witten [6], onde considera-se uma teoria Yang-Mills supersimétrica $N = 2$ com grupo de gauge $SU(2)$. Exigindo que os termos supersimétricos F e D sejam nulos, é fácil ver (pelo menos classicamente) que o grupo de gauge é quebrado ao grupo $U(1)$ no espaço módulo, e com mais trabalho vê-se que monopolos sem massa aparecem neste ponto, além de um termo de massa quebrando $N = 2$. Nesta teoria efetiva, o grupo $U(1)$ é quebrado ao grupo Z , soluções de cordas Abelianas aparecem, e crê-se que confinamento é produzido. Após este resultado interessante, muitos trabalhos saíram generalizando este resultado [25] onde a teoria efetiva tinha um grupo de gauge $U(1)^{\text{rank}G}$ quebrado a seu centro discreto. Mas não consideravam o caso de um grupo quebrado a um grupo não-Abeliano semisimples, e assim não continham o grupo $SU(3) \times U(1)$. De certa forma, em termos do trabalho de Seiberg e Witten, o nosso trabalho pode ser visto como uma teoria efetiva onde o grupo de gauge é não-Abeliano e semi-simples, permitindo um grupo resíduo $SU(3) \times U(1)$.

Então, na primeira parte da tese, começamos por revisar brevemente as cordas abelianas tipo BPS, incluindo as suas soluções, tensões, etc. que vão ser generalizadas ao caso não-Abeliano da mesma forma. Seguimos por introduzir a nossa teoria, que vai ser a parte bosônica de uma teoria supersimétrica $N = 2$ de Yang-Mills com matéria em quatro dimensões, onde o campo de gauge S está na representação adjunta, e onde a matéria ϕ (com massa μ) está numa representação especial motivada pelo trabalho de [1], garantindo a possibilidade de cordas Z_k . Vamos propor as condições de BPS parecidas ao caso Abeliano, e mostrar que

elas são consistentes com as equações de movimento somente no caso onde um parâmetro de massa, m , seja nulo, e mostramos que um quarto das transformações de supersimetria são nulas neste caso. Terminamos por considerar as soluções das condições BPS, e brevemente consideraremos como muda a fase da teoria quando mudamos o parâmetro m .

As nossas contribuições a esta parte da tese, além de sugestões de como definir os vínculos de BPS, fazer e verificar contas, etc., eram sobretudo as contas relacionadas com supersimetria, notadamente seções 1.2.1 e 1.2.3.

Na segunda parte da tese, vamos reformular redução dimensional em termos multi-simpléticos. O método de redução dimensional existe já desde os trabalhos originais de Kaluza e Klein. Estes métodos têm sido cruciais para a física de hoje, sobretudo nas teorias de supergravidade e a teoria de cordas. E mesmo uma redução dimensional “trivial” onde os campos simplesmente não dependem da dimensão adicional pode dar um resultado não trivial. Neste contexto, a idéia de aplicar redução dimensional a teorias supersimétricas para achar supersimetrias estendidas tem sido utilizado bastante, em grande parte devido ao trabalho de Joël Scherk [7].

Nos finais dos anos setenta, achou-se uma modificação do método de Kaluza Klein para redução dimensional por Scherk e Schwarz [38], que tem recebido bastante atenção, sobretudo recentemente. Na mesma época apareceu outro método de fazer redução dimensional que os autores chamaram de “redução dimensional de Legendre” [43]. A aplicação deste método a uma teoria supersimétrica on-shell em $D + 1$ dimensões era capaz de gerar uma teoria supersimétrica off-shell em D dimensões. Um resultado quase imediato foi a sua relação com um novo supermultiplet, o vetor-tensor supermultiplet.

Este último tipo de redução dimensional parece cair fora das formulações de redução dimensional conhecidas na literatura. Assim, o nosso objetivo original deste trabalho era ver se seria possível generalizar o método de redução de Legendre de alguma forma. Para isto, precisávamos de vários conceitos de teorias multi-simpléticas. O desenvolvimento de teorias multi-simpléticas usando geometria e formas diferenciais avançou bastante nos anos setenta [53], e o leitor pode ver que a nossa formulação é uma híbrida de [27] e [26], e vários conceitos e resultados essenciais para a nossa formulação multi-simplética acham-se em capítulo 2.

De certo modo, a nossa reformulação de redução dimensional em termos multi-simpléticos dá um resultado negativo quanto a redução de Legendre: fora uma possível extensão discutida em seções 3.1.3 e 3.5.1, uma redução dimensional de Legendre que possa ser aplicada a gerar teorias off-shell de supersimetria deve proceder somente como já sabe-se fazer. Mas, em pesquisando isto, achamos um quadro geral de descrever todos os tipos de redução dimensional mencionados acima (pelo menos para teorias onde tem-se uma métrica tipo background). Dos nossos resultados, baseados nos métodos de teorias simpléticas, vê-se claramente que seria difícil que outra maneira de fazer uma redução dimensional existisse e, em particular, outras formas de redução de Legendre. Por outro lado, a nossa análise nos dá uma visão mais clara das possíveis extensões de redução dimensional, e pode ser que seja útil para, por exemplo, um tratamento de dualidade.

Assim, procedemos na segunda parte da tese da seguinte maneira: começamos por revisar brevemente os conceitos úteis do formalismo multi-simplético, seguido por uma revisão de redução dimensional de Legendre, e logo consideramos as possíveis generalizações a mais do que uma dimensão. Continuamos por introduzir as idéias básicas de redução dimensional sobre variedades multi-simpléticas e a importância dos vetores de Killing, seguido por um ansatz

para a forma de Cartan da teoria reduzida. Ao considerar redução dimensional sobre mais do que uma dimensão, vemos como surgem vínculos que têm que ser satisfeitos pela teoria original para que a redução possa ser efetuada. Concluimos este capítulo por brevemente considerar a redução dimensional de uma teoria gravitacional dinâmica, e mostramos como o ansatz normalmente considerado na literatura para a forma do vácuo é compatível com a nossa condição de redução dimensional.

Continuamos por considerar o espaço interno como um grupo, e mostramos que o nosso método de redução dimensional somente pode ser válido no caso de um grupo unimodular, e que uma redução dimensional de Legendre não é possível neste caso. Em seguida, consideramos um coset representativo, S^2 , e propomos a forma de Cartan da teoria reduzida (além de propormos a forma de Cartan reduzida para outros cosets). Mostramos que os mesmos vínculos aparecem como no caso de um espaço interno de um grupo, assim impedindo redução dimensional de Legendre neste caso também.

Em termos de contribuições, fora da introdução ao formalismo multi-simplético, capítulo 2, esta parte da tese tem sido inteiramente nosso trabalho, incluindo a escolha do mecanismo multi-simplético como sendo o formalismo mais adequado para descrever a redução de Legendre, os vários ansatz para a forma de Cartan reduzida, etc.

1 Cordas BPS

A inspiração inicial da obtenção de cordas não-Abelianas do tipo BPS foi o artigo de Olive e Turok [1]. Nele, os autores consideraram uma teoria com um grupo (compacto) de gauge G quebrado por um campo de Higgs ϕ numa representação particular tal que cordas pudessem surgir. De [1,2], também vê-se que o mesmo mecanismo funcionaria com a adição de um campo S na representação adjunta. Por outro lado, a parte bosônica de uma teoria $N = 2$ super Yang-Mills tem o mesmo conteúdo: um campo S de gauge na representação adjunta, e campos ϕ numa representação arbitrária. Assim, considerando a parte bosônica de $N = 2$ super Yang-Mills com um campo ϕ nesta representação particular, esperamos obter as condições de BPS para as cordas que poderiam surgir [3].

Na primeira seção, refazemos o cálculo famoso de vórtices no caso Abeliano, introduzindo o mesmo método de resolver a energia, etc. da corda que utilizaremos no caso não-Abeliano.

1.1 Teorias Abelianas

Vamos procurar uma solução estática de um campo ϕ numa teoria de quatro dimensões onde a Lagrangiana vai incluir os termos $\frac{1}{2}\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - V(\phi)$. Queremos achar uma solução ϕ que tenha uma simetria cilíndrica não dependendo de x^3 , onde efetivamente temos uma teoria em três dimensões. Assintoticamente quando a coordenada radial $\rho \rightarrow \infty$ ($\rho \equiv \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}$), queremos que o campo ϕ tenha a forma

$$|\phi| = a \rightarrow \phi = ae^{i\beta(\theta)}, \quad (1.1.1)$$

onde $\beta(\theta)$ pode ser uma função multivalor. Mas, visto que ϕ é uma função que somente pode tomar um valor, então

$$\beta(\theta + 2\pi) - \beta(\theta) = 2\pi n, \quad \text{onde } n \in Z; \quad (1.1.2)$$

ϕ é uma representação do grupo $U(1)$, cujo espaço é um círculo S^1 .

Do teorema de Derrick [4], no caso onde a dimensão é maior do que dois, sabemos que somente existem soluções triviais para esta Lagrangiana. Assim, vamos modificar ligeiramente a teoria para incluir um gauge de $U(1)$:

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}D_\mu\phi^*D^\mu\phi - V(\phi),$$

onde a derivada covariante é definida como $D_\mu\phi = \partial_\mu\phi + iqA_\mu\phi$. O limite desejado na periferia (1.1.1) pode ser obtido através do mecanismo de Higgs contanto que escolhamos $V(\phi)$ corretamente.

A fronteira $\rho \rightarrow \infty$ é um círculo S^1 . Por outro lado, ϕ é uma representação do grupo $U(1)$. Assim, vemos que ϕ é um mapeamento $\phi : S^1 \rightarrow S^1$. Desta forma, asseguramos que o primeiro grupo de homotopia não seja trivial¹:

$$\pi_1(S^1) = Z,$$

e uma corda vai ser representada pelo valor n .

¹No caso de um $U(1)$ compacto, o centro pode ser um grupo Z_k , por exemplo o grupo Z_2 no caso de supercondutores. Neste caso, o primeiro grupo de homotopia também pode ser Z , por exemplo $\pi_1(U(1)/Z_2) = Z$.

Vamos procurar o vácuo da teoria, e calcular a energia da corda. Neste referencial, consideramos que várias componentes de E e B são nulas: $E^i = B^1 = B^2 = 0$, e, já que $A_0 = A_3 = 0$, temos $D_0\phi = D_3\phi = 0$ também. A energia total por unidade de largura, ou a tensão da corda, é simplesmente

$$T = \int d^2x \left[\frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{2}|D_i\phi|^2 + V(\phi) \right],$$

onde² $i = 1, 2$ e $B \equiv -F_{12}$. Vamos também considerar que $V(\phi) \geq 0$, o que garante que $T \geq 0$. Para que a corda tenha tensão finita quando $\rho \rightarrow \infty$, os campos devem satisfazer as equações de vácuo

$$\begin{aligned} D_\mu\phi &= 0, \\ V(\phi) &= 0, \\ F_{\mu\nu} &= 0. \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

A última condição, $F_{\mu\nu} = 0$ é fácil satisfazer: se A_μ fosse um gauge puro, então automaticamente $F_{\mu\nu} = 0$. Isto vai sair automaticamente dos seguintes argumentos.

Utilizando as identidades

$$[D_\pm\phi]^* [D_\pm\phi] - |D_1\phi|^2 - |D_2\phi|^2 = \pm \left[i\epsilon_{ij}\partial_i (\phi^* D_j\phi) + qF_{12} |\phi|^2 \right] \tag{1.1.4}$$

$$\int d^2x \epsilon_{ij}\partial_i (\phi^* D_j\phi) = 0, \tag{1.1.5}$$

(onde definimos $D_+ \equiv D_1 + iD_2$ e $D_- \equiv D_1 - iD_2$) e graças às condições (1.1.3), podemos escrever a energia T como

$$\begin{aligned} T &= \int d^2x \left[\frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{2}|D_\pm\phi|^2 \pm \frac{1}{2}qB |\phi|^2 + V \right] \\ &\geq \int d^2x \left[\frac{1}{2}B^2 \pm \frac{q}{2}B (\phi^*\phi - X) \pm \frac{q}{2}BX + V \right] \\ &\geq \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} \left[B \pm \frac{1}{2}q(\phi^*\phi - X) \right]^2 \pm \frac{q}{2}BX - \frac{q^2}{8} (\phi^*\phi - X)^2 + V \right\}. \end{aligned}$$

Vamos tomar³ $X \equiv a^2$ e $V \geq q^2(\phi^*\phi - X)^2/8$. Assim,

$$T \geq \int d^2x \left\{ \pm \frac{1}{2}qa^2B \right\} = \pm \frac{1}{2}qa^2\Phi, \text{ onde o fluxo } \Phi \equiv \int d^2xB = - \oint dl_i A_i.$$

De (1.1.3), vemos que quando $\rho \rightarrow \infty$

$$D_i\phi = 0 \quad \rightarrow \quad A_i = \frac{i}{q}\phi^{-1}\partial_i\phi = -\frac{1}{q}\partial_i\beta = \frac{\epsilon_{il}x^l}{q\rho^2}\partial_\theta\beta,$$

²Note que $\nabla = \hat{\rho}\partial_\rho + \hat{\theta}(1/\rho)\partial_\theta$, $\nabla^2 = (1/\rho)\partial_\rho(\rho\partial_\rho) + (1/\rho^2)\partial_\theta^2$ no caso sob consideração.

³Na realidade, basta considerar que V satisfaça $V \geq q^2(\phi^*\phi - X)^2/8$, e $V = q^2(\phi^*\phi - X)^2/8$ seria uma condição BPS.

(um gauge puro) junto com a condição (1.1.1). Da equação (1.1.2) isto indica que

$$\Phi = \frac{2\pi}{q}n. \quad (1.1.6)$$

Desta forma

$$T \geq a^2\pi |n|$$

e o “bound” é saturado quando

$$\begin{aligned} D_{\pm}\phi &= (D_1 \pm iD_2)\phi = 0, \\ B \pm \frac{1}{2}q(\phi^*\phi - a^2) &= 0, \\ V &= q^2(\phi^*\phi - a^2)^2/8, \end{aligned}$$

onde usamos um “+” quando $n > 0$ e um “−” quando $n < 0$. A teoria com este potencial é a parte bosônica da teoria de $N = 2$ SQED. Portanto, vemos que as condições BPS impoem que a teoria seja supersimétrica.

De (1.1.6) segue a seguinte condição de quantização

$$q\Phi = 2\pi n,$$

que é muito parecida à condição para a carga magnética.

Um ansatz tendo simetria cilíndrica é

$$\begin{aligned} \phi(\theta, \rho) &= af(\rho)e^{in\theta}, \\ A_i(\theta, \rho) &= \frac{n}{q\rho^2}\epsilon_{ij}x^j g(\rho), \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

onde n é um numero inteiro não nulo. Assim, consideramos a seguinte condição para o “bound”

$$g(\infty) = 1 = f(\infty),$$

para recuperar a configuração (1.1.1) quando $\rho \rightarrow \infty$ com $\beta(\theta) = n\theta$. Na origem, consideramos a condição sobre a fronteira

$$g(0) = \mathcal{O}(\rho^2) \text{ e } f(0) = \mathcal{O}(\rho^n).$$

A primeira condição nos garante a regularidade de A_i no ponto $\rho = 0$. A segunda condição vem do fato que a vorticidade n requer que ϕ tenha que ter n nulos. Inserindo este ansatz nas condições BPS, um conjunto de equações diferenciais da primeira ordem sai:

$$\begin{aligned} g'(\rho) &= \mp \frac{q^2 a^2 \rho}{2n} (|f(\rho)|^2 - 1), \\ f'(\rho) &= \pm \frac{n}{\rho} (1 - g(\rho)) f(\rho). \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

Que estas equações têm soluções (não analíticas) é conhecido na literatura, e têm-se estudado algumas das suas propriedades [5].

1.2 Teorias Não-Abelianas

De certa forma, o caso não-Abeliano segue numa maneira análoga ao caso anterior. Lembrando que os campos de gauge são simplesmente veículos para encontrarmos soluções não triviais de ϕ (equação (1.1.1)), o resultado que sai daqui será não trivial: a representação de ϕ não pode ser uma representação qualquer no caso não-Abeliano, senão deve conter o estado $|k\lambda_\phi\rangle$, onde k é um número inteiro, $k \geq 2$, e onde λ_ϕ é um peso fundamental arbitrário. Este estado surge em várias representações, por exemplo na representação que denotamos $R_{k\lambda_\phi}$, que possui $|k\lambda_\phi\rangle$ como peso máximo. Também aparece no produto tensorial $R_{\lambda_\phi} \otimes \dots \otimes R_{\lambda_\phi}$ (k vezes) que denotamos $R_{k\lambda_\phi}^{\otimes}$, ou a parte simétrica deste produto, $R_{k\lambda_\phi}^{\text{sym}}$. É justamente este último caso quando $k = 2$ que corresponderia à representação de um condensado de dois férmions na representação fundamental.

1.2.1 Motivação: $N = 2$ Super Yang-Mills com Matéria

O leitor pode ver que a forma da nossa Lagrangiana, onde pode-se ter cordas BPS não-Abelianas no caso não supersimétrico, (1.2.6), é baseada na forma supersimétrica de uma Lagrangiana de Yang-Mills com matéria, facilitando assim uma ligação com o trabalho de Seiberg e Witten [6]. (Embora os trabalhos diferem em alguns aspectos. No trabalho de Seiberg e Witten, consideram-se cordas em teorias efetivas $U(1)$, que têm propriedades diferentes das que devem existir no nosso caso de teorias não-Abelianas.) Além de nos permitir fazer esta conexão, um estudo da Lagrangiana supersimétrica enfatiza a importância do termo de Fayet-Iliopoulos, que pode quebrar a supersimetria. Vamos ver que, na versão não supersimétrica, a constante aparecendo em frente deste termo deveria tomar uma forma específica para que cordas Z_k possam aparecer.

A Lagrangiana que vamos tomar é dada em [7] e tem a seguinte forma⁴:

$$\begin{aligned}
L_{N=2,D=4,\text{off-shell}} &= \frac{1}{2} D_\mu \phi^{\dagger i} D^\mu \phi_i + i \bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi + i \phi^{\dagger i} \bar{\lambda}_i \psi - i \bar{\psi} \lambda^i \phi_i - \bar{\psi} (M - \gamma_5^S N) \psi \\
&+ \text{tr} \left[-\frac{1}{4} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} + \frac{i}{2} \bar{\lambda}_i \gamma^\mu D_\mu \lambda^i + \frac{1}{2} D_\mu M D^\mu M + \frac{1}{2} D_\mu N D^\mu N \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \bar{\lambda}_i [\lambda^i, M] - \frac{1}{2} \bar{\lambda}_i \gamma_5 [\lambda^i, N] \right] - \tilde{V}, \tag{1.2.1}
\end{aligned}$$

onde o grupo de gauge é um grupo semi-simples arbitrário, onde M e N são campos na representação adjunta, e onde ϕ_i está numa representação ainda arbitrária. O potencial \tilde{V} tem a forma

$$\begin{aligned}
-\tilde{V} &= \frac{1}{2} f^{\dagger i} f_i - \frac{1}{2} \phi^{\dagger i} (M^2 + N^2) \phi_i + \frac{1}{2} \phi^{\dagger i} \sigma_i^{pj} \mathbf{d}^p \phi_j + \mu \left(\frac{1}{2} i \phi^{\dagger i} f_i - \frac{1}{2} i f^{\dagger i} \phi_i + \bar{\psi} \psi \right) \\
&+ \mu \phi^{\dagger i} M \phi_i + \text{tr} \left[\frac{1}{2} [M, N]^2 + \frac{1}{2} \mathbf{d}^2 \right] - \frac{1}{2} v^p d_a^p \delta_{a,0},
\end{aligned}$$

onde $\mathbf{d}^p \equiv d_a^p T_a$ e onde o último termo é um possível termo de Fayet-Iliopoulos no caso Abelianas que incluímos a mão [7].

⁴Esta Lagrangiana também é deduzida em [43] de uma redução de $N = 1, D = 6$ a $N = 2, D = 5$ por uma redução normal, e após de $N = 2, D = 5$ a $N = 2, D = 4$ através uma redução de Legendre.

As transformações dos campos sobre supersimetria são [7]

$$\begin{aligned}
\delta\phi_i &= 2\bar{\zeta}_i\psi, \\
\delta\psi &= -i\zeta^i f_i - (i\gamma^\mu D_\mu + M + \gamma_5^S N)\zeta^i \phi_i, \\
\delta f_i &= 2\bar{\zeta}_i(\gamma^\mu D_\mu + iM - i\gamma_5^S N)\psi - 2\bar{\zeta}_i\lambda^j \phi_j, \\
\delta A_\mu &= i\bar{\zeta}_i\gamma_\mu\lambda^i, \\
\delta M &= i\bar{\zeta}_i\lambda^i, \\
\delta N &= i\bar{\zeta}_i\gamma_5^S\lambda^i, \\
\delta\lambda^i &= -\frac{1}{2}i\sigma^{\mu\nu}\zeta^i F_{\mu\nu} - \gamma^\mu D_\mu(M + \gamma_5^S N)\zeta^i - i\gamma_5^S\zeta^i[M, N] - i\zeta^j\sigma_j^{pi}\mathbf{d}^p, \\
\delta\mathbf{d}^p &= \sigma_i^{pj}\bar{\zeta}_j\gamma^\mu D_\mu\lambda^i + i\sigma_i^{pj}\bar{\zeta}_j[\lambda^i, M] + i\sigma_i^{pj}\bar{\zeta}_j\gamma_5^S[\lambda^i, N].
\end{aligned} \tag{1.2.2}$$

$$\tag{1.2.3}$$

Escrevendo $S = M + iN$ (para que $[M, N] = \frac{i}{2}[S, S^\dagger]$ e $\frac{1}{2}\{S, S^\dagger\} = M^2 + N^2$, onde $D_\mu S = \partial^\mu S + ie[W^\mu, S]$, $D_\mu S^\dagger = \partial_\mu S^\dagger - ie[S^\dagger, W^\mu]$) e integrando a Lagrangiana sobre os campos auxiliares, $f_i = i\mu\phi_i$ e $d_a^p = -\frac{1}{2}\phi^{\dagger i}\sigma^p{}_{ij}T_a\phi_j + \frac{1}{2}v^p\delta_{a,0}$, podemos escrever a parte bosônica V do potencial \tilde{V} da Lagrangiana acima como

$$V = \text{tr} \left[\frac{1}{8}[S, S^\dagger]^2 \right] + \frac{1}{2}D_a^p D_a^p + \frac{1}{2}F^{\dagger i} F_i - \frac{1}{2}\mu\phi^{\dagger i}(S + S^\dagger)\phi_i + \frac{1}{4}\phi^{\dagger i}\{S, S^\dagger\}\phi_i.$$

Introduzindo um fator explícito⁵ e [8],

$$\begin{aligned}
V(S, \phi_m) &= \frac{e^2}{8} \left\{ (S_b^* i f_{bca} S_c)^2 + \left(\phi_m^\dagger \sigma_{mn}^p T_a \phi_n - v_p \delta_{a0} \right)^2 + \frac{4\mu^2}{e^2} \phi_m^\dagger \phi_m \right. \\
&\quad \left. - \frac{4\mu}{e} \phi_m^\dagger (S + S^\dagger) \phi_m + 2\phi_m^\dagger \{S^\dagger, S\} \phi_m \right\},
\end{aligned} \tag{1.2.4}$$

onde os termos $v_p\delta_{a0}$ são os termos de Fayet-Iliopoulos que podem existir, e que são atribuídos a um possível fator $U(1)$ associado a um gerador T_0 . Podemos reescrever isto como

$$V(S, \phi_m) = \frac{1}{2} \left((d_a^1)^2 + (d_a^2)^2 + (D_a)^2 + F_m^\dagger F_m \right) \tag{1.2.5}$$

onde redefinimos $d_a^p \rightarrow -ed_a^p$, e

$$\begin{aligned}
D_a &= \frac{e}{2} (S_b^* i f_{bca} S_c) + d_a^3, \\
F_1 &= eS^\dagger\phi_1 - \mu\phi_1, \\
F_2 &= eS\phi_2 - \mu\phi_2.
\end{aligned}$$

1.2.2 O Caso sem Supersimetria

Nesta seção, vamos considerar uma Lagrangiana baseada na parte bosônica da Lagrangiana aparecendo na seção anterior, embora aqui vamos considerar somente um campo ϕ e vamos

⁵Para simplificar as expressões, escrevemos a constante de acoplamento acompanhando um fator $U(1)$ no grupo de gauge igual à parte não-Abeliana, e , embora não sejam necessariamente iguais.

considerar um potencial V arbitrário (vamos ver que o potencial de $N = 2$ aparece quase naturalmente). Para podermos fazer comparações entre as duas, tentamos manter uma notação parecida à notação supersimétrica no caso não supersimétrico. Desta forma, vamos escrever F em vez de F_1 ; Y_a em vez de D_a ; e X_a em vez de v_a .

Consideremos a seguinte Lagrangiana em quatro dimensões:

$$L = \text{tr} \left\{ -\frac{1}{4} G^{\mu\nu} G_{\mu\nu} + \frac{1}{2} D_\mu S^\dagger D^\mu S \right\} + \frac{1}{2} D_\mu \phi^\dagger D^\mu \phi - V(S, \phi). \quad (1.2.6)$$

Analogamente ao caso Abelian, vamos considerar uma teoria onde não há uma dependência de x^3 , onde somente a única componente do tensor $G_{\mu\nu}$ não nula é $G_{12} \equiv -B$. A tensão sobre a corda neste caso é

$$\begin{aligned} T &= \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} \text{Tr} \left[B^2 + |D_\mu S|^2 \right] + \frac{1}{2} |D_\mu \phi|^2 + V(S, \phi) \right\} \\ &\geq \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} \text{Tr} \left[B^2 + |D_1 S|^2 + |D_2 S|^2 \right] + \frac{1}{2} |D_1 \phi|^2 + \frac{1}{2} |D_2 \phi|^2 + V(S, \phi) \right\}. \end{aligned}$$

Para que isto seja uma quantidade finita, a configuração de campos em $\rho \rightarrow \infty$ vai ter que satisfazer as condições

$$\begin{aligned} D_\mu S = D_\mu \phi &= O(1/\rho^2), \\ V(S, \phi) &= O(1/\rho^3), \\ B &= O(1/\rho^2). \end{aligned}$$

Agora, vamos utilizar as identidades (1.1.4) e (1.1.5) (deixando que $q \rightarrow e$) para reescrever a tensão, mas vamos usar sinais contrários para os campos ϕ e S . Assim, a tensão assume a seguinte forma

$$\begin{aligned} T &= \int d^2x \left\{ \text{Tr} \left[\frac{1}{2} B^2 + \frac{1}{2} |D_\mp S|^2 \mp \frac{e}{2} S^\dagger [B, S] \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} |D_\pm \phi|^2 \pm \frac{e}{2} (\phi^\dagger B \phi) + V(S, \phi) \right\} \\ &\geq \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} B_a^2 \pm \frac{e}{2} (S_b^* i f_{bca} S_c + \phi^\dagger T_a \phi) B_a + V(S, \phi) \right\} \\ &\geq \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} [B_a \pm Y_a]^2 \mp X_a B_a - \frac{1}{2} Y_b^2 + V(S, \phi) \right\} \\ &\geq \int d^2x \left\{ \mp X_a B_a + \left(V(S, \phi) - \frac{1}{2} Y_a^2 \right) \right\}, \end{aligned}$$

onde, nas últimas duas linhas, introduzimos as definições

$$Y_a \equiv \frac{e}{2} (S_b^* i f_{bca} S_c + \phi^\dagger T_a \phi) + X_a, \quad X_a \equiv -\frac{me}{2} \left(\frac{S_a + S_a^*}{2} \right).$$

Evidentemente, se estivéssemos considerando um caso supersimétrico, um valor $m \neq 0$ daria massa à parte real do campo de gauge S , quebrando supersimetria $N = 2$, além de ser responsável por uma quebra espontânea do grupo de gauge [7].

Se conseguirmos impor $V(S, \phi) - \frac{1}{2}Y_a^2 \geq 0$, então a tensão terá a forma

$$T \geq \int d^2x \{ \mp X_a B_a \} .$$

Uma corda assim definida será saturada, ou seja, será uma corda do tipo BPS, somente quando satisfaz

$$D_0\phi = D_3\phi = D_0S = D_3S = 0, \quad (1.2.7)$$

$$D_{\pm}\phi = 0, \quad (1.2.8)$$

$$D_{\mp}S = 0, \quad (1.2.8)$$

$$B_a \pm Y_a = 0, \quad (1.2.9)$$

$$V(S, \phi) - \frac{1}{2}Y_a^2 = 0. \quad (1.2.10)$$

Das primeiras condições vemos simplesmente que $W_0 = W_3 = 0$.

Voltamos a considerar a condição original: $V(S, \phi) - \frac{1}{2}Y_a^2 \geq 0$. Esta condição pode ser satisfeita se $V(S, \phi)$ tem a forma

$$V(S, \phi) = \frac{1}{2} \left(Y_a^2 + F^\dagger F \right) \quad F \equiv eS^\dagger\phi - \mu\phi .$$

Quando $m = 0$ (então $X_a = 0$) a forma deste potencial concorda com a parte bosônica do potencial supersimétrico (1.2.5) de uma teoria $N = 2$ super-QCD (no caso de um sabor, e onde $\phi_2 = 0$), onde um valor $X_a \neq 0$ quebraria a supersimetria $N = 2$. Desta forma, vemos que a condição de BPS, equação (1.2.10), onde requeremos que $F = 0$, não quebraria supersimetria. Mas, como já comentamos, se $m \neq 0$, a parte real do campo S ganharia massa e quebraríamos supersimetria.

Temos de verificar que as nossas condições BPS sejam consistentes com as equações de movimento de nossa teoria,

$$(D_\mu G^{\mu\nu})_a - \frac{ie}{2} \left(\phi^\dagger T_a D^\nu \phi - D^\nu \phi^\dagger T_a \phi - S_b^* i f_{abc} D^\nu S_c + D^\nu S_b^* i f_{abc} S_c \right) = 0,$$

$$D_\mu D^\mu \phi_k + eY_a T_{kl}^a \phi_l - e^2 \left[\left(S - \frac{\mu}{e} \right) \left(S^\dagger - \frac{\mu}{e} \right) \phi \right]_k = 0,$$

$$D_\mu D^\mu S_d + eY_a \left(i f_{adc} S_c - \frac{m}{2} \delta_{ad} \right) - e^2 \phi^\dagger \left(S - \frac{\mu}{e} \right) T_d \phi = 0.$$

Podemos obter uma condição parecida com a primeira equação de movimento por deixar D_i atuar sobre a condição de BPS $B_a \pm Y_a = 0$. Após termos utilizado as outras condições de BPS, resulta que

$$D_\mu G_a^{\mu\nu} + \frac{ie}{2} \left[D^\nu \phi^\dagger T_d \phi - \phi^\dagger T_d D^\nu \phi - (D^\nu S)_b^* i f_{dbc} S_c + S_b^* i f_{dbc} D^\nu S_c - \frac{m}{2} (D^\nu S_d - D^\nu S_d^*) \right] = 0,$$

que é consistente com a primeira equação de movimento somente quando $m = 0$.

Do mesmo jeito, das condições de BPS, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= D_{\mp} D_{\pm} \phi - e \left(S - \frac{\mu}{e} \right) F \\ &= -D_\mu D^\mu \phi \mp e G_{12} \phi - e \left(S - \frac{\mu}{e} \right) F \\ &= -D_\mu D^\mu \phi - e Y_a T_a \phi - e \left(S - \frac{\mu}{e} \right) F \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
0 &= D_{\pm}D_{\mp}S_d - eF^{\dagger}T_d\phi \\
&= -D_{\mu}D^{\mu}S_d \pm e(G_{12}S)_d - eF^{\dagger}T_d\phi \\
&= -D_{\mu}D^{\mu}S_d - ieY_a f_{adb}S_b - eF^{\dagger}T_d\phi.
\end{aligned}$$

A última condição, como no caso anterior, é consistente com as equações de movimento somente quando $m = 0$. Vamos ver que esta condição deveria ser interpretada como o limite $m \rightarrow 0$ mais a frente, mas é interessante notar que conhece-se um resultado semelhante no caso Abelian [9].

1.2.3 Transformações de Supersimetria

Vamos considerar o caso $E^i = B^1 = B^2 = D_3M = D_3N = 0$. De (1.2.3) sabemos que, neste caso,

$$\delta\lambda^i = \left[-iB \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix} - D_{\mu} \begin{pmatrix} 0 & S\sigma^{\mu} \\ -S^{\dagger}\sigma^{\mu} & 0 \end{pmatrix} + \frac{ie}{2}[S, S^{\dagger}] \begin{pmatrix} 0 & S\sigma^{\mu} \\ -S^{\dagger}\sigma^{\mu} & 0 \end{pmatrix} \right] \zeta^i - i\zeta^j \sigma_j^{pi} \mathbf{d}^p.$$

No último termo, a quantidade $i\zeta^j \sigma_j^{pi} \mathbf{d}^p$ no caso $i = 1$ é $i(\zeta^2 \mathbf{d}^1 + i\zeta^2 \mathbf{d}^2 + \zeta^1 \mathbf{d}^3) = i(\zeta^1 \mathbf{d}^3 + \zeta^2 \mathbf{d}_+)$ e no caso $i = 2$ é $i(\zeta^1 \mathbf{d}^1 - i\zeta^1 \mathbf{d}^2 - \zeta^2 \mathbf{d}^3) = i(-\zeta^2 \mathbf{d}^3 + \zeta^1 \mathbf{d}_-)$, onde definimos $\mathbf{d}_{\pm} = \mathbf{d}^1 \pm i\mathbf{d}^2$.

Vamos escrever explicitamente as componentes dos pseudoespinores ζ^1 e ζ^2 usando (A.1.8).

Escrevendo $\zeta_{\alpha i} = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}$, temos

$$\zeta^1 = \begin{pmatrix} -ia_2 \\ -ib_2 \\ b_1^* \\ -a_1^* \end{pmatrix} \quad \zeta^2 = \begin{pmatrix} ia_1 \\ ib_1 \\ b_2^* \\ -a_2^* \end{pmatrix}.$$

Desta forma, a mudança em λ^i é dada por

$$\begin{aligned}
\delta\lambda^1 &= \begin{pmatrix} -ia_2(-iB + \frac{ie}{2}[S, S^{\dagger}] - id^3) + a_1 d_+ - a_1^* D_- S \\ -ib_2(iB + \frac{ie}{2}[S, S^{\dagger}] - id^3) + b_1 d_+ + b_1^* D_+ S \\ b_1^*(-iB - \frac{ie}{2}[S, S^{\dagger}] - id^3) - ib_2^* d_+ + ib_2 D_- S^{\dagger} \\ -a_1^*(iB - \frac{ie}{2}[S, S^{\dagger}] - id^3) + ia_2^* d_+ + ia_2 D_+ S^{\dagger} \end{pmatrix}, \\
\delta\lambda^2 &= \begin{pmatrix} ia_1(-iB + \frac{ie}{2}[S, S^{\dagger}] + id^3) - a_2 d_- - a_2^* D_- S \\ ib_1(iB + \frac{ie}{2}[S, S^{\dagger}] + id^3) - b_2 d_- + b_2^* D_+ S \\ b_2^*(-iB - \frac{ie}{2}[S, S^{\dagger}] + id^3) - ib_1^* d_- - ib_1 D_- S^{\dagger} \\ -a_2^*(iB - \frac{ie}{2}[S, S^{\dagger}] + id^3) + ia_1^* d_- - ia_1 D_+ S^{\dagger} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Analogamente, a mudança em ψ é dada por (1.2.2), ou

$$\begin{aligned}
\delta\psi &= - \begin{pmatrix} i \begin{pmatrix} 0 & D_- \\ D_+ & 0 \end{pmatrix} \zeta_-^i + (eS^{\dagger} - \mu)\zeta_+^i \\ -i \begin{pmatrix} 0 & D_- \\ D_+ & 0 \end{pmatrix} \zeta_+^i + (eS - \mu)\zeta_-^i \end{pmatrix} \phi_i \\
&= - \begin{pmatrix} -iD_-(a_1^* \phi_1 + a_2^* \phi_2) + i(eS^{\dagger} - \mu)(-a_2 \phi_1 + a_1 \phi_2) \\ iD_+(b_1^* \phi_1 + b_2^* \phi_2) + i(eS^{\dagger} - \mu)(-b_2 \phi_1 + b_1 \phi_2) \\ D_-(-b_2 \phi_1 + b_1 \phi_2) + (eS - \mu)(b_1^* \phi_1 + b_2^* \phi_2) \\ D_+(-a_2 \phi_1 + a_1 \phi_2) + (eS - \mu)(-a_1^* \phi_1 - a_2^* \phi_2) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Vemos que, no caso onde $a_2 \neq 0$, $a_1 = b_1 = b_2 = 0$ (ou onde $b_2 \neq 0$, $a_1 = b_1 = a_2 = 0$), as condições de BPS no limite $m \rightarrow 0$ dão $\delta\lambda^i = \delta\psi = 0$. Assim, um quarto das transformações supersimétricas são nulas para configurações BPS.

1.3 Soluções do Vácuo

Nesta seção vamos procurar as soluções para as equações de vácuo das equações de BPS. O trabalho de Olive *et al.* [10,11] e Olive e Turok [1] servirá como base para os nossos cálculos aqui.

É direto obter que a energia total da teoria que estamos considerando é positiva, e que será nula somente quando

$$\begin{aligned} D_\mu\phi &= D_\mu S = G_{\mu\nu} = 0, \\ V &= 0 \Leftrightarrow Y_a = F = 0, \end{aligned}$$

que são as equações de vácuo da teoria.

Para obtermos uma tensão finita, T , os campos têm que assumir os seus valores no vácuo quando $\rho \rightarrow \infty$. Além disto, a existência de cordas Z_k implica que o grupo G seja quebrado a um grupo G_ϕ tal que

$$\pi_1(G/G_\phi) = Z_k,$$

que é uma condição necessária para a existência de cordas Z_k .

Vamos quebrar o grupo de gauge em duas etapas: uma quebra $G \rightarrow G_S$ pelo campo S na representação adjunta, seguida pela quebra $G_S \rightarrow G_\phi$ pelo campo ϕ numa representação ainda a ser determinada. A primeira quebra é detalhada em [10,11], e a segunda em [1]. Esta divisão de quebras também vai ser útil quando consideramos as possíveis fases da teoria.

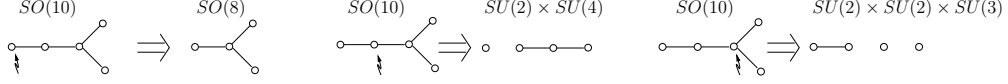
Para tratar tudo da forma mais geral, vamos reescrever a álgebra de Lie de G em termos dos geradores da subálgebra de Cartan H_i satisfazendo as condições $H_i = H_i^\dagger$ e $[H_i, H_j] = 0$, e os operadores de criação e aniquilação E_α satisfazendo $E_\alpha^\dagger = E_{-\alpha}$, da base de Cartan-Weyl, onde os α são as raízes da álgebra. Nesta base, podemos escolher os H_i e E_α de tal maneira que satisfaçam [11] $\text{tr}(H_i H_j) = \delta_{ij}$, $\text{tr}(E_\alpha E_\beta) = \delta_{\alpha+\beta,0}$ e $\text{tr}(H_i E_\alpha) = 0$. Considerando a representação adjunta do grupo, podemos identificar $|\alpha\rangle$ com $|E_\alpha\rangle$ para que $H_i |E_\alpha\rangle = [H_i, E_\alpha] = \alpha_i |E_\alpha\rangle$. Desta forma, os E_α são autovetores e os α os autovalores. Também satisfazem $[E_\alpha, E_\beta] = 0$ se $\alpha + \beta$ não é uma raiz, e $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \alpha \cdot H$. Um peso $|\mu\rangle$ satisfaz $H_i |\mu\rangle = \mu_i |\mu\rangle$, e $E_\alpha |\mu\rangle$ é proporcional a $|\mu + \alpha\rangle$, etc. e um peso fundamental λ_i satisfaz $2\lambda_i \cdot \alpha^j / (\alpha^j)^2 = \delta_i^j$. Além desta base, frequentemente será útil considerar a base de Chevalley, onde $H_\alpha \equiv 2(\alpha \cdot H) / \alpha^2$, assim que $[H_\alpha, E_\beta] = 2[(\beta \cdot \alpha) / \alpha^2] E_\beta$. Outro conceito introduzido nos trabalhos de Olive *et al.* é aquele de uma álgebra de Lie dual (veja [10,11]). Definimos as raízes duais (as coraízes) como⁶ $\alpha^{iV} \equiv 2\alpha^i / (\alpha^i)^2$ e os pesos fundamentais duais (os copesos fundamentais) como $\lambda_i^V \equiv 2\lambda_i / (\alpha^i)^2$.

1.3.1 A Primeira Quebra: $G \rightarrow G_S$

Seja α_ϕ uma raiz simples do grupo, e seja λ_ϕ o peso fundamental correspondente satisfazendo $2\lambda_\phi \cdot \alpha_\phi / (\alpha_\phi)^2 = 1$. Se o grupo (compacto) original, G , é quebrado por um campo S na

⁶Note que a nossa convenção é duas vezes a convenção considerada em [10,11].

representação adjunta cujo valor no vácuo seja $S \propto \lambda_\phi \cdot H$, então o “little group”, G_S , é dado localmente pela expressão $G_S = “U(1)_Q \times K”$, onde K é um grupo semisimples (ou simples) compacto e o grupo eletromagnético $U(1)$ é compacto e gerado por $Q \sim \lambda_\phi \cdot H$. Pode-se obter o grupo K a partir do diagrama de Dynkin, eliminando-se o ponto associado à raiz simples α_ϕ . Por exemplo,



Globalmente, temos que ter um pouco mais de cuidado. Embora localmente o grupo tenha a forma $G_S = “U(1)_Q \times K”$, os dois grupos têm alguns elementos em comum que estão no centro de K [11]. Então, em geral, a estrutura global de um grupo K é dada por $K = \tilde{K}/k(K)$, onde \tilde{K} é o grupo de cobrimento universal do grupo K , e onde $k(K)$ é algum subgrupo finito do centro de \tilde{K} , $Z(\tilde{K})$ [10]. Então, o grupo $G_S \approx “U(1)_Q \times K”$ corretamente seria escrito como $G_S = (U(1)_Q \times (\tilde{K}/k(K)))/Z$, onde Z é um subgrupo do grupo finito $Z(\tilde{K})/k(K)$. Em [10], os autores mostram que $k(K) = 1$ e determinam que o grupo Z é um grupo cíclico, Z_l , com elemento v_0 dado por [1, 10]

$$v_0 = \exp(2\pi iz\lambda_\phi^V \cdot H) \quad z \equiv \frac{|Z(G)|}{|Z(K)|}, \quad (1.3.1)$$

onde $|Z(G)|$ é a ordem do centro de G e $|Z(K)|$ é a ordem do centro de K . (A ordem $|Z(K)|$ é igual ao determinante da matriz de Cartan de K [11].) Dessa forma, o vácuo toma os seus valores em $\pi_2(G/G_S) \cong \pi_1(G_S) \cong Z_l$ e podemos obter monopolos.

1.3.2 A Segunda Quebra: $G_S \rightarrow G_\phi$

A segunda quebra, considerada em [1], é feita com o campo ϕ na representação com peso mais alto $\phi \propto |k\lambda_\phi\rangle$ (com $\langle k\lambda_\phi | k\lambda_\phi \rangle = 1$) que, para os nossos fins, será a quebra mais interessante. Assim, o grupo original G é quebrado no grupo

$$G \rightarrow G_\phi = (Z_{kl} \times K)/Z_l,$$

onde Z_{kl} contém o elemento $v_0^{1/k}$. Neste caso, $\pi_1(G/G_\phi) = Z_k$ e poderíamos obter cordas Z_k , embora ainda falte mostrar que as condições de BPS admitem soluções deste tipo.

Vamos tomar $\phi = a|k\lambda_\phi\rangle$ e $S = v \cdot H$, com a um número real e v um vetor real. Obviamente, queremos que $v \sim \lambda_\phi$ para que S faça a quebra $G \rightarrow G_S$. A condição $Y_a = 0$ é equivalente a

$$Y_a T_a = (\phi^\dagger T_a \phi) T_a + [S^\dagger, S] - m \left(\frac{S + S^\dagger}{2} \right) = 0.$$

O segundo termo é zero, já que S toma os seus valores somente na subálgebra de Cartan. O terceiro termo é $-mv \cdot H$. Lembrando-nos que $E_\alpha \phi = E_\alpha a |k\lambda_\phi\rangle = 0$ para α sendo uma raiz positiva, o primeiro termo pode ser escrito como

$$\text{tr} \left(\phi \phi^\dagger T_a \right) T_a = \left(\phi^\dagger H_i \phi \right) H_i + \frac{\alpha^2}{2} \left(\phi^\dagger E_\alpha \phi \right) E_{-\alpha} = a^2 k \lambda_\phi \cdot H.$$

Assim achamos que

$$v = \frac{ka^2}{m} \lambda_\phi. \quad (1.3.2)$$

A condição $F = 0$ nos dá

$$0 = F = eS^\dagger\phi - \mu\phi = (ke v \cdot \lambda_\phi - \mu)a |k\lambda_\phi\rangle ,$$

assim que

$$v \cdot \lambda_\phi = \frac{\mu}{ke} . \quad (1.3.3)$$

Combinando (1.3.2) e (1.3.3), achamos que

$$a^2 = \frac{m\mu}{k^2 e \lambda_\phi^2} . \quad (1.3.4)$$

Desta forma, verificamos que a equação de vácuo possui uma solução da forma

$$\begin{aligned} \phi &= a |k\lambda_\phi\rangle , \\ S &= \frac{ka^2}{m} \lambda_\phi \cdot H , \\ W_\mu &= 0 , \end{aligned}$$

que produz a quebra de simetria $G \rightarrow G_\phi$.

1.3.3 Partículas de Gauge e as suas Massas

Podemos também calcular as massas das partículas de gauge. Assim, vamos expandir os campos S , ϕ e W_μ sobre os valores no vácuo: $S = S_q + \frac{ka^2}{m} \lambda_\phi \cdot H$, $\phi = \phi_q + a |k\lambda_\phi\rangle$, e $W_\mu = W_\mu^q$. A contribuição nova do termo $\frac{1}{2}\text{tr}(D_\mu S^\dagger D^\mu S) = \frac{1}{2}\text{tr}[(\partial_\mu S^\dagger - ie[S^\dagger, W_\mu])(\partial^\mu S + ie[W^\mu, S])]$ será

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}e^2 \frac{k^2 a^4}{m^2} \text{tr}[\lambda_\phi \cdot H, W^\mu][W_\mu, \lambda_\phi \cdot H] &= \frac{e^2 k^2 a^4}{2m^2} W^{\alpha\mu} W_\mu^\beta \text{tr}[\lambda_\phi \cdot H, E_\alpha][E_\beta, \lambda_\phi \cdot H] \\ &= -\frac{e^2 k^2 a^4}{2m^2} W^{\alpha\mu} W_\mu^\beta (\lambda_\phi \cdot \alpha)(\lambda_\phi \cdot \beta) \text{tr}(E_\alpha E_\beta) \\ &= \sum_{\alpha>0} \frac{e^2 k^2 a^4}{m^2} W^{\alpha\mu} W_\mu^{-\alpha} (\lambda_\phi \cdot \alpha)^2 , \end{aligned}$$

e a contribuição nova do termo $\frac{1}{2}D_\mu\phi^\dagger D^\mu\phi = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi^\dagger - ie\phi^\dagger W_\mu)(\partial^\mu\phi + ieW^\mu\phi)$ vai ser

$$\frac{1}{2}e^2 a^2 \left[\langle k\lambda_\phi | E_\alpha E_\beta | k\lambda_\phi \rangle W_\mu^\alpha W^{\mu\beta} + \langle k\lambda_\phi | H_{\alpha_i} H_{\alpha_j} | k\lambda_\phi \rangle W_\mu^i W^{\mu j} \right] ,$$

mas $\langle k\lambda_\phi | E_\alpha E_\beta | k\lambda_\phi \rangle$ não é zero somente no caso onde $\beta < 0$, $\alpha > 0$, e $\beta = -\alpha$, onde $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \alpha \cdot H$. Assim, $\langle k\lambda_\phi | E_\alpha E_\beta | k\lambda_\phi \rangle = k\alpha \cdot \lambda_\phi$ ($\alpha > 0$) e a expressão acima torna-se

$$\frac{1}{2}e^2 a^2 \left(\sum_{\alpha>0} k(\alpha \cdot \lambda_\phi) W^{\alpha\mu} W_\mu^{-\alpha} + k^2 \lambda_\phi^2 W_\mu^i W^{\mu i} \right) .$$

Somando as duas contribuições, encontramos que os termos contribuindo às massas das partículas de gauge são

$$\frac{1}{2}e^2 a^2 k^2 \lambda_\phi^2 W_\mu^i W^{\mu i} + \sum_{\alpha>0} \left[\frac{e^2 k^2 a^4}{m^2} (\lambda_\phi \cdot \alpha)^2 + ke^2 a^2 (\alpha \cdot \lambda_\phi) W_\mu^\alpha W^{\mu(-\alpha)} \right] .$$

1.3.4 Quebra de Gauge e o Limite $m\mu \sim \text{Constante}$

Para podermos obter cordas Z_k , precisamos quebrar a simetria de gauge, assim exigindo que $a > 0$ em (1.3.4). Por outro lado, para que as condições de BPS sejam compatíveis com as equações de movimento, precisamos que $m = 0$, e achamos um paradoxo. A solução é considerar o caso onde $m \rightarrow 0$ e $\mu \rightarrow \infty$ tal que a seja constante. Este caso é parecido com o limite considerado por Prasad-Sommerfield [12] onde os autores consideram um potencial $V(\phi) = \lambda(\phi^2 - a^2)/4$ e precisam tomar o limite $\lambda \rightarrow 0$ para recuperar $|\phi| \rightarrow a$ quando $r \rightarrow \infty$ a fim de quebrar a simetria.

1.4 Soluções das Condições BPS

A fim da tensão da corda ser finita, na periferia $\rho \rightarrow \infty$, os campos têm que assumir os valores no vácuo. Podemos considerar uma transformação geral de gauge $g(\theta) \in G$ dependendo do ângulo θ sobre o vácuo para obter

$$\begin{aligned} W_i(\theta) &= \frac{-1}{ie} (\partial_i g(\theta)) g(\theta)^{-1}, \\ \phi(\theta) &= g(\theta) \phi^{\text{vac}}, \\ S(\theta) &= g(\theta) S^{\text{vac}} g(\theta)^{-1}, \end{aligned}$$

com $i = 1, 2$. Embora $g(\theta)$ siga um caminho pelo grupo G , ele tem que satisfazer a condição, i.é $g(0) \phi^{\text{vac}} = g(2\pi) \phi^{\text{vac}}$, ou seja $g(0)^{-1} g(2\pi) = g(2\pi) \in G_\phi$ (tomando $g(0) = 1$) a fim de ϕ ser “single-valued”. Analogamente à condição (1.1.2), para obter uma corda não trivial, deveríamos tomar $g(2\pi)$ numa componente de G_ϕ não conectada à identidade [2]. Tomando $g(\theta) = e^{i\theta M}$ na periferia $\rho \rightarrow \infty$, onde M é um gerador de G , teremos

$$\begin{aligned} \phi(\theta) &= a e^{i\theta M} |k\lambda_\phi\rangle, \\ mS(\theta) &= ka^2 e^{iM\theta} \lambda_\phi \cdot H e^{-iM\theta}, \\ W_i(\theta) &= \frac{\epsilon_{ij} x^j}{e\rho^2} M. \end{aligned}$$

Por outro lado temos de verificar que $g(2\pi) = e^{i2\pi M} \in G_\phi$. Vamos considerar

$$M = \frac{n \lambda_\phi \cdot H}{k \lambda_\phi^2},$$

onde n é um número inteiro entre 1 e k . De [10] sabemos que λ_ϕ satisfaz

$$\lambda_\phi^2 = \frac{1}{2} \alpha_\phi^2 \frac{|Z(K)|}{|Z(G)|},$$

e desta forma vemos de (1.3.1) que $g(2\pi) = v_0^{n/k} \in G_\phi$.

Podemos agora introduzir a dependência do parâmetro ρ , tomando o ansatz

$$\begin{aligned} \phi(\theta, \rho) &= f(\rho) e^{in\theta} a |k\lambda_\phi\rangle, \\ mS(\theta, \rho) &= h(\rho) ka^2 \lambda_\phi \cdot H, \\ W_i(\theta, \rho) &= g(\rho) M \frac{\epsilon_{ij} x^j}{e\rho^2} \rightarrow B(\theta, \rho) = \frac{M}{e\rho} g'(\rho), \\ W_0(\theta, \rho) &= W_3(\theta, \rho) = 0, \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

onde impomos as condições $f(\infty) = g(\infty) = h(\infty) = 1$ para recuperar a configuração do vácuo em $\rho \rightarrow \infty$. Além disto, consideramos

$$f(0) = g(0) = 0$$

para que não surjam singularidades no ponto $\rho = 0$.

Colocando este ansatz nas condições de BPS, (1.2.7)-(1.2.10), encontramos que:

$$\begin{aligned} h(\rho) &= \text{const} = 1, \\ f'(\rho) &= \pm \frac{n}{\rho} [1 - g(\rho)] f(\rho), \\ g'(\rho) &= \mp \frac{q_\phi^2 a^2 \rho}{2n} [|f(\rho)|^2 - 1], \end{aligned}$$

onde definimos $q_\phi \equiv ek|\lambda_\phi|$. Estas relações que são exatamente as mesmas equações e condições de contorno que aparecem no caso Abelian, (1.1.8), e que Taubes mostrou a existência de soluções não triviais. Portanto podemos concluir que a nossa teoria possui soluções BPS de cordas Z_k para um semi-simples grupo arbitrário G .

Pode-se obter a tensão da corda através do ansatz (1.4.1), e vê-se que

$$T = \pi a^2 |n|,$$

como no caso Abelian. O fato de ser uma constante implica que poderia ser responsável por um potencial linear entre monopolos.

1.5 Conclusões

Mostramos que é possível obter cordas Z_k em teorias onde um grupo de gauge semi-simples é quebrado a um grupo não-Abelian, onde o conteúdo da teoria original contém um campo S na representação adjunta e um campo ϕ contendo a representação com o estado de peso $|k\lambda_\phi\rangle$ [3]. Neste caso, os nossos resultados formam a parte bosônica de uma teoria de Yang-Mills supersimétrica $N = 2$.

A nossa teoria [3] tem dois parâmetros importantes: a massa m da parte real do campo S e a massa μ do campo ϕ . O nosso resultado exige que consideremos um limite $m \rightarrow 0$ para que as condições de BPS concordem com as equações de movimento, onde $m\mu \rightarrow \text{constante}$ para poder quebrar a simetria de gauge. Construímos soluções explícitas das cordas BPS, e notamos que se pode construir as suas soluções a partir das soluções das cordas Abelianas.

Embora consideramos aqui sobretudo o caso $m > 0$, podemos generalizar os argumentos a fim de considerar as possíveis fases da teoria, dependendo do parâmetro m [13, 14]. A primeira fase $m < 0$ corresponde a um grupo G não quebrado; a segunda fase $m = 0$ (a fase de Coulomb ou de “monopolos livres”) corresponde ao caso onde o grupo G é quebrado a $G \rightarrow G_S = (U(1) \times K)/Z_l$ (e onde a supersimetria fica intacta); e a terceira fase $m > 0$ (a fase de Higgs ou supercondutora) corresponde ao caso que consideramos aqui onde o grupo é quebrado ao grupo $G \rightarrow G_\phi = (Z_{kl} \times K)/Z_l \subset G_S$ e Z_k cordas aparecem. Em [14], o autor mostra que o fluxo magnético dos monopolos é um múltiplo dos fluxos das cordas Z_k fundamentais, e portanto o confinamento dos monopolos é possível.

2 Variedades Simpléticas e o Formalismo Multi-Simplético

Como será evidente nos seguintes capítulos, um bom entendimento do formalismo multi-simplético será conveniente quando enfocarmos os nossos esforços em estender redução de Legendre. Assim, apresentam-se aqui alguns pontos salientes deste formalismo numa breve revisão das teorias elaboradas em [26, 27], que se baseiam em alguns conceitos que não são freqüentemente usados na física como, por exemplo, subvariedades de Lagrange.

Embora o nosso objetivo seja uma descrição de dinâmica de campos, resulta que esta pode ser melhor descrita como uma generalização da dinâmica de partículas. Assim, vamos começar por revisar os objetos padrão, introduzindo a forma de Poincaré, a dois-forma canônica ω , subvariedades de Lagrange, jatos e prolongações. Na seguinte parte do capítulo, continuamos por estender estes conceitos à dinâmica de campos, incluindo uma breve discussão de espaços de configurações vetoriais.

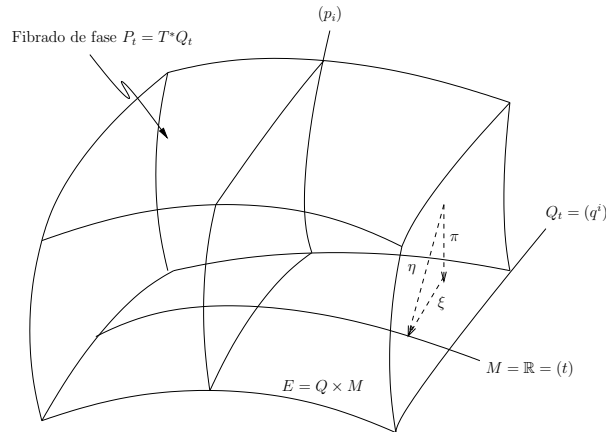
2.1 Dinâmica de Partículas

2.1.1 Objetos Padrão

O espaço de interesse é a variedade sobre a qual todas as possíveis configurações do estado de um sistema mecânico podem surgir, o espaço de fase.

O fibrado Q , o espaço de configuração, consiste no espaço base, M (com somente uma coordenada, t), as fibras Q_t (cujas coordenadas são a posição da partícula, q^i), e uma projeção $\xi : Q \rightarrow M$.

O fibrado de fase, P , tem a mesma base, M , mas agora as fibras consistem nos pontos (q^i, p_j) , onde p_j é uma coordenada no espaço cotangente T^*Q_t . Um ponto neste fibrado tem as coordenadas (t, q^i, p_j) , e a projeção $\eta : (t, q^i, p_j) \rightarrow t$:



O fato de que o fibrado de fase é o fibrado cotangente T^*Q já indica que existe uma um-forma canônica θ :

Definição A um-forma de Poincaré θ é definida sobre toda a variedade P , e tem a seguinte forma:

$$\theta = p_i dq^i$$

(note: não contém fatores dp_i). É importante ressaltar que esta forma somente existe sobre T^*Q , e que não há uma forma natural que exista sobre TQ [28]. Por esse motivo, é mais natural trabalhar com T^*Q do que com TQ .

Da um-forma de Poincaré podemos construir uma dois-forma canônica, ω , onde

$$\omega = d\theta = dp_i \wedge dq^i.$$

Definição Uma variedade simplética é uma variedade com dimensão par sobre qual existe uma dois forma ω tal que

1. $d\omega = 0$,
2. $\det(\omega_{ij}) \neq 0$.

Isto nos garante que cada fibrado cotangente seja uma variedade simplética [28].

2.1.2 Subvariedades de Lagrange e Funções Geradoras

É a partir deste ponto onde o formalismo multi-simplético começa a variar ligeiramente da apresentação padrão.

Definição Uma subvariedade de Lagrange de uma variedade simplética (P, ω) é uma subvariedade $N \subset P$ tal que $\omega|_N = 0$ e $\dim N = \frac{1}{2} \dim P$.

Para entender melhor o que é uma subvariedade de Lagrange, vamos apresentar uma melhor motivação para estas subvariedades através de um exemplo, usando o princípio de Euler [28].

Lembre-se que, dada uma Hamiltoniana H , o caminho que um sistema vai seguir acha-se por calcular o mínimo de

$$0 = \delta \int pdq - Hdt \tag{2.1.1}$$

sobre a curva $(q(t), p(t))$. O δ significa variar sobre caminhos que começam e terminam em pontos estacionais.

No caso onde o sistema segue um caminho sobre o qual a energia é constante, existe uma formulação equivalente a este método chamado o princípio de ação mínima de Euler (ou Maupertuis): dada uma Hamiltoniana H e uma energia E , o caminho $q(t)$ que o sistema segue no espaço base M é dado por

$$\delta \int pdq = 0, \tag{2.1.2}$$

onde δ é ligeiramente diferente: agora significa achar o mínimo sobre curvas onde a energia E é uma constante. Em outras palavras, um caminho é uma trajetória Hamiltoniana de algum sistema dinâmico se esta condição é satisfeita⁷.

Superficialmente, a equação (2.1.2) é similar com a equação (2.1.1) após termos deixado $E = \text{constante}$. Tem mais atrás disto, agora que δ significa outra coisa (caminhos onde as energias são iguais, mas onde os tempos não correspondem), e o leitor é aconselhado ver o argumento em [28] para um melhor entendimento.

⁷Ela dá, por exemplo, condições do tipo $\delta \int [E - V(q)]^{1/2} ds = 0$, i.e. o princípio de ação mínima de Jacobi com a métrica $d\rho = \sqrt{T} ds$ [28].

A seguinte observação apresenta-se: se $pdq|_C = dS$, poderíamos escrever

$$\int_C pdq = \int_C dS = [S]_{\partial C} .$$

Lembre-se que dissemos que δ varia o caminho do seguinte jeito: os pontos iniciais e finais de q não variam, embora os momentos iniciais e finais possam variar. Mas agora que ∂C não é nada mais do que os pontos q_0 e q_1 (que não variam), temos

$$\delta \int_C pdq = \delta \int_C dS = \delta [S]_{\partial C} = 0 ,$$

automaticamente.

Assim, encontramos

$$\text{Se } pdq|_C = dS \text{ então } \delta \int_C pdq = 0 .$$

Curvas com energia E correspondendo a mínimos da ação têm que satisfazer esta condição.

Vamos generalizar um pouco ao caso com q^i e p_i . Visto que $ddS = 0$, temos a seguinte condição:

$$\text{Uma curva } C \text{ é uma trajetória Hamiltoniana se } d(p_i dq^i)|_C = 0 .$$

Na verdade, podemos reescrever isto como [27]

$$0 = d(p_i dq^i)|_C = d(p_i dq^i)|_C = \omega|_C ,$$

para que a curva C seja o conjunto de pontos (q^i, p_j) satisfazendo $p_i = \phi_i(q)$ tal que $\int \phi_j(q^i) dq^j$ seja uma integral exata [27].

Assim, sobre C temos que ter

$$0 = \omega|_C \quad \text{ou} \quad 0 = \omega(X, Y) \quad \text{se} \quad X \in TC, Y \in TC .$$

A curva C é o que é chamada uma subvariedade de Lagrange de uma variedade simplética.

A função $S(q)$ que aparece acima chama-se a “função geradora” para a curva C [27]. Isto quer dizer que ela determina completamente a curva C . Por exemplo, sabendo que

$$dS = \theta|_C = p_i dq^i|_C$$

sabemos como calcular p_i :

$$dS = \frac{\partial S}{\partial q^i} dq^i \equiv p_i dq^i ,$$

ou seja [27, 29]

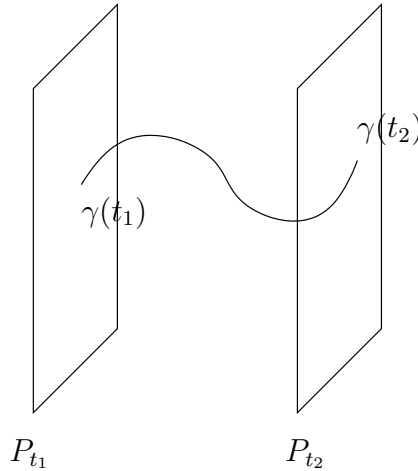
$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q^i} .$$

O formalismo de [27] é quase completamente baseado em descrever subvariedades de Lagrange em termos de funções geradores. Tanto a Lagrangiana quanto a Hamiltoniana, o tensor de energia-momentum, etc. geram subvariedades de Lagrange [27, p.44]. De fato, o que torna o formalismo interessante é que a mesma subvariedade de Lagrange pode ser gerada por mais do que uma função, e acontece que tanto a Lagrangiana quanto a Hamiltoniana geram a mesma subvariedade de Lagrange neste contexto.

É também útil notar [29] que podemos escrever ω como $\omega = dp_i \wedge dq^i = \frac{\partial^2 S}{\partial p_j \partial q^i} dp_j \wedge dq^i$. E a mesma forma para ω teria sido obtida se tomássemos $q'^i = \frac{\partial S}{\partial p_i}$ e $p'_i = p_i$. Neste sentido, a função S determina uma transformação canônica entre as variedades com coordenadas (q^i, p_j) e (q'^i, p'_j) , com a identidade dada por $S_{\text{id}} = q^i p_i$.

2.1.3 A Dinâmica

Imaginemos que uma partícula segue um caminho no espaço de fase. No tempo inicial, ela encontra-se no ponto (t_1, q_1^i, p_{1i}) , e segue um caminho até chegar no ponto (t_2, q_2^i, p_{2i}) .



Toda a dinâmica é contida numa família de difeomorfismos $R_{(t_2, t_1)} : P_{t_1} \rightarrow P_{t_2}$, cuja existência assumimos [27]. O caminho seguido, $\gamma(t)$, é admissível se $R_{(t_2, t_1)}$ preserva a estrutura simplética, $R_{(t_2, t_1)}^* \omega_{t_2} = \omega_{t_1}$ (ou seja: $R_{(t_2, t_1)}$ é um symplectomorfismo) e⁸ $\gamma(t_2) = R_{(t_2, t_1)}(\gamma(t_1))$.

Chamamos a variedade (que, na verdade, consiste de duas variedades separadas) cujas coordenadas são $(q_1^i, p_{1i}; q_2^i, p_{2i})$ a dinâmica⁹ $D^{(t_2, t_1)}$. Tomando o espaço $P^{(t_2, t_1)} = P_{t_2} \times P_{t_1}$, é possível definir sobre ele um $\omega^{(t_2, t_1)}$ tal que $(P^{(t_2, t_1)}, \omega^{(t_2, t_1)})$ seja uma variedade simplética. O resultado disto é que a variedade $D^{(t_2, t_1)}$ é uma subvariedade de Legendre sobre este intervalo [27]. Assim, os autores seguem por procurarem as funções geradoras que geram $D^{(t_2, t_1)}$.

Para físicos, é mais interessante investigar o caso onde $\delta t \rightarrow 0$. As mesmas estruturas continuam sendo válidas (embora ligeiramente modificadas), mas agora definidas sobre um intervalo instantâneo (representado pelo índice i), por exemplo $\theta_t^i = \frac{d}{dt}(p_i dq^i)$, $\omega_t^i = \frac{d}{dt}(dp_i \wedge dq^i)$, D_t^i , etc. Note que as coordenadas agora incluem as derivadas com respeito ao tempo, $(q^i, p_i, \dot{q}^i, \dot{p}_j)$. Em [27] os autores provam que $0 = \omega_t^i|_{D_t^i} = d\theta_t^i|_{D_t^i}$.

A função geradora de D_t^i é chamada a Lagrangiana, L_t . Ela satisfaz

$$dL_t = \theta_t^i = \dot{p}_i dq^i + p_i d\dot{q}^i,$$

⁸Estas condições formam um conjunto de equações de primeira ordem, onde as soluções são os γ admissíveis. [27]. Por exemplo, se temos q_1, p_1 e $q_2(q_1, p_1), p_2(q_1, p_1)$ e $\omega_1 = dp_1 \wedge dq_1$ e $\omega_2 = dp_2 \wedge dq_2$, a condição sobre R simplesmente diz que $\{q_2, p_2\} = 1$.

⁹Por exemplo, para um oscilador harmônico seguindo as equações de movimento $q(t) = A \cos \sqrt{k/m}t + (B/\sqrt{km}) \sin \sqrt{k/m}t$ e $p(t) = -A\sqrt{km} \sin \sqrt{k/m}t + B \cos \sqrt{k/m}t$ a variedade da dinâmica seria descrita por $q_2 = q_1 \cos \sqrt{k/m}(t_2 - t_1) + (p_1/km) \sin \sqrt{k/m}(t_2 - t_1)$ e $p_2 = -q_1 \sqrt{km} \sin \sqrt{k/m}(t_2 - t_1) + p_1 \cos \sqrt{k/m}(t_2 - t_1)$ [27].

ou [27]

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial L(t, q^i, \dot{q}^i)}{\partial \dot{q}^i}, \\ \dot{p}_i &= \frac{\partial L(t, q^i, \dot{q}^i)}{\partial q^i}. \end{aligned}$$

Note que é apenas agora que obtemos uma definição do momentum, p_i (embora já disséssemos que usaríamos o fibrado T^*Q).

A Hamiltoniana é outra função geradora de D_t^i , mas é uma descrição que utiliza estruturas não canônicas, dependendo de como definimos o fibrado de configuração, Q . Agora, toma-se uma forma não canônica

$$\theta_t^h = \dot{p}_i dq^i - \dot{q}^i dp_i,$$

que continua satisfazendo a relação

$$d\theta_t^h = \omega_t^i.$$

Assim, definimos a função geradora de D_t^i como

$$\dot{p}_i dq^i - \dot{q}^i dp_i = -dH_t,$$

ou [27]

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial H(t, q^i, p_i)}{\partial q^i}, \\ \dot{q}^i &= \frac{\partial H(t, q^i, p_i)}{\partial p_i}. \end{aligned}$$

Agora, é possível definir outra forma, a forma de Cartan, Θ , dada por

$$\Theta = p_i dq^i - H dt,$$

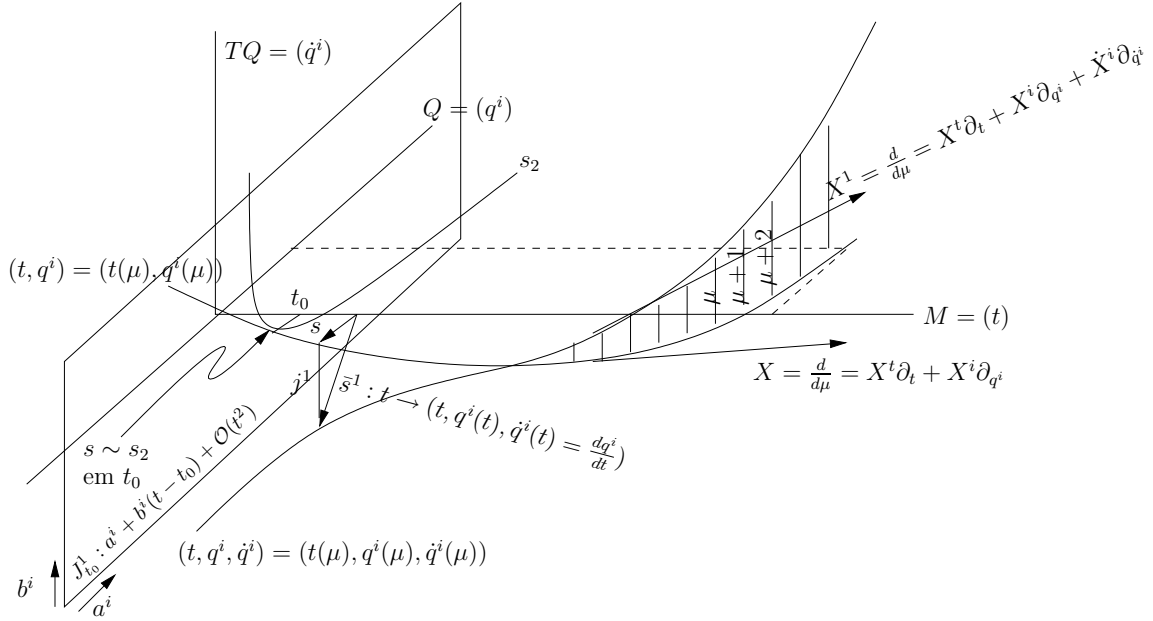
que tem a seguinte propriedade extremamente útil na nossa análise. Um caminho $\gamma(t)$ pelo fibrado P é admissível somente quando

$$(d\Theta)(X)|_S = 0,$$

onde X é um vetor qualquer em P (i.e. da forma $A \frac{\partial}{\partial t} + B^i \frac{\partial}{\partial q^i} + C_i \frac{\partial}{\partial p^i}$), e onde $S \subset P$ é a imagem de $\gamma(t)$ [27].

2.1.4 Jatos e Prolongações

Tomando o limite $\delta t \rightarrow 0$ acima, torna-se útil introduzir e utilizar fibrados de “jatos” [27, 30]. Consideremos o fibrado $M \times Q$, no plano na figura abaixo. Cada fibra apontando para cima é uma cópia de TQ (N.B.: não T^*Q), assim que temos formado um fibrado vetor. O espaço M é parametrizado pelas coordenadas t , e o espaço Q por q^i , para que cada ponto no plano $E = M \times Q$ possa ser representado pelas coordenadas (t, q^i) .



Uma seção $s(t) : M \rightarrow E$ tem a forma $q^i = q^i(t)$. Dizemos que duas seções $s_1(t)$ e $s_2(t)$ são “equivalentes” (i.e. que têm o mesmo jato) em $J^1(E)$ se as expansões de Taylor delas até a primeira ordem são idênticas:

$$q_{(1)}^i(t) = a^i + b^i t + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2 q_{(1)}^i}{dt^2} \right|_{t=0} t^2 + \dots \text{ e } q_{(2)}^i(t) = a^i + b^i t + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2 q_{(2)}^i}{dt^2} \right|_{t=0} t^2 + \dots,$$

i.e. embora as expansões de Taylor não sejam idênticas, ainda temos $q_{(1)}^i = q_{(2)}^i$ e $\frac{dq_{(1)}^i}{dt} = \frac{dq_{(2)}^i}{dt}$ no ponto $t = 0$, que simplesmente diz que as seções são tangentes no ponto $t = 0$. Dadas as coeficientes da expansão a^i e b^i , é fácil calculá-las em outro sistema [27], e é importante notar [30] que, embora as expansões de Taylor sejam diferentes em sistemas de coordenadas diferentes, a coincidência delas é algo que não depende de coordenadas.

Vamos chamar o “um-jato” com “alvo” a seção $s(t)$ (ou o “um-jato de s em t ”) $j^1 s(t)$. Todos os possíveis jatos (sobre todas as possíveis seções) em qualquer ponto t (o espaço de jatos, ou o fibrado de um-jatos) podemos denotar como $J^1(E)$. Já que somente tem duas quantidades que definem o jato no ponto t , i.e. a^i e b^i , também podemos escrever $j^1 s(t)$ por dar as suas coordenadas em $J^1(E)$, i.e. (t, a^i, b^i) . Para dar um exemplo, o fibrado de configuração instantânea, Q_t^i , com coordenadas (q, \dot{q}) é igual ao um-jato $J^1(Q)$ que tem as mesmas coordenadas [27].

Um caminho genérico $s^1(t)$ por $J^1(E)$ com coordenadas $(t, q^i(t), \dot{q}^i(t))$, onde não tem uma relação entre \dot{q}^i e q^i é chamado uma seção do jato. Mesmo assim, a escolha de uma seção $s(t)$, i.e. de $(t, q^i(t))$ sobre a base, na verdade determina $\frac{dq^i}{dt}$. Assim, $s(t)$ induz uma seção \bar{s}^1 do fibrado pelo mapeamento j^1 : ou seja, dada uma seção, podemos simplesmente calcular a primeira derivada de $q^i(t)$, que determine o valor do vetor sobre o fibrado, ou seja: $j^1 : s = (t, q^i) \rightarrow \bar{s}^1 = (t, q^i, \dot{q}^i)$. \bar{s}^1 chama-se a 1-jato extensão, ou prolongação, de s .

Vamos calcular a prolongação de um vetor de duas maneiras diferentes. A primeira é mais direta, mas talvez menos geral. Temos um caminho (t, q^i) na variedade E . O vetor X

tangente sobre este caminho é

$$X = \frac{d}{d\mu} = \frac{dt}{d\mu} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{dq^i}{d\mu} \frac{\partial}{\partial q^i} = X^t \frac{\partial}{\partial t} + X^i \frac{\partial}{\partial q^i}.$$

Gostaríamos de calcular este mesmo vetor sobre um caminho no espaço (t, q^i, \dot{q}^i) onde $\dot{q}^i = dq^i/dt = X^i/X^t$ (a gradiente da curva). Então, o novo vetor tem a forma¹⁰

$$\begin{aligned} X^1 = \frac{d}{d\mu} &= \frac{dt}{d\mu} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{dq^i}{d\mu} \frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{d\dot{q}^i}{d\mu} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} = X^t \frac{\partial}{\partial t} + X^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{d}{d\mu} \left(\frac{X^i}{X^t} \right) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \\ &= X^t \frac{\partial}{\partial t} + X^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \left(\frac{dX^i/d\mu}{X^t} - \left(\frac{X^i}{X^t} \right) \frac{dX^t/d\mu}{X^t} \right) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \\ &= X^t \frac{\partial}{\partial t} + X^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \left(\frac{(X^t \partial_t + X^i \partial_i) X^i}{X^t} - \dot{q}^i \frac{(X^t \partial_t + X^i \partial_i) X^t}{X^t} \right) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \\ &= X^t \frac{\partial}{\partial t} + X^i \frac{\partial}{\partial q^i} + (\partial_t X^i + \dot{q}^j \partial_j X^i - \dot{q}^i \partial_t X^t - \dot{q}^i \dot{q}^j \partial_j X^t) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}. \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

A segunda maneira dá o mesmo resultado, mas de uma maneira um pouco mais geral [30]. Gostaríamos de impor a relação $\dot{q}^i = \frac{dq^i}{dt}$ sobre a seção \bar{s}^1 . Se um vetor X^1 é tangente a \bar{s}^1 , podemos requerer [31]

$$(dq^i - \dot{q}^i dt)(X^1) = 0.$$

Esta expressão determina uma família de variedades. Definimos

$$\theta_i = dq^i - \dot{q}^i dt$$

como a um-forma “de contato”.

É interessante notar que $\bar{s}^1 * \theta = 0$ [30]. Deste fato, e de (2.2.4), podemos deduzir que [26,30]

$$\mathcal{L}_{X^1} \theta_i = A_{ij} \theta_j.$$

Para resolver esta equação, simplesmente inserimos a seguinte forma para X^1 :

$$X^1 = \frac{d}{d\mu} = X^t \frac{\partial}{\partial t} + X^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \dot{X}^i \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i},$$

e calculamos $\mathcal{L}_{X^1} \theta_i$, o que é fácil já que \mathcal{L}_{X^1} e d se comutam. Assim achamos, assumindo que X^t e X^j não dependam de \dot{q} :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{X^1} \theta_j &= d(X^j(t, q)) - \dot{X}^j dt - \dot{q}^j d(X^t(t, q)) \\ &= \left(\frac{\partial X^j}{\partial t} - \dot{X}^j - \dot{q}^j \frac{\partial X^t}{\partial t} \right) dt + \left(\frac{\partial X^j}{\partial q^i} - \dot{q}^j \frac{\partial X^t}{\partial q^i} \right) dq^i \\ &= A_{ji} \theta_i = A_{ji} (dq^i - \dot{q}^i dt). \end{aligned}$$

Do segundo termo na segunda linha acima, deduzimos que

$$A_{ji} = \left(\frac{\partial X^j}{\partial q^i} - \dot{q}^j \frac{\partial X^t}{\partial q^i} \right).$$

¹⁰Note que poderíamos escrever \bar{X}^1 para uma notação mais consistente, mas preferimos abreviá-lo por X^1 .

Desde que o primeiro termo na segunda linha tem que ser $A_{ji}\dot{q}^i dt$, podemos resolver para \dot{X}^i e achamos que [30]

$$\dot{X}^i = \frac{\partial X^i}{\partial t} + \dot{q}^j \frac{\partial X^i}{\partial q^j} - \dot{q}^i \frac{\partial X^t}{\partial t} - \dot{q}^j \frac{\partial X^t}{\partial q^j} \dot{q}^i. \quad (2.1.4)$$

Então, a prolongação de um campo vetorial torna-se $j^1 : X = X^1$, onde X^1 é dado por equação (2.1.3). Os autores de [30] também notam a seguinte relação importante:

$$j^1([X_1, X_2]) = [j^1(X_1), j^1(X_2)]. \quad (2.1.5)$$

2.2 Dinâmica de Campos

2.2.1 Notação

Neste trabalho, definimos a forma ω numa variedade com coordenadas (x^1, x^2, \dots, x^m) como

$$\omega \equiv dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m, \quad (2.2.1)$$

e a forma V como

$$V \equiv \sqrt{\pm g} \omega. \quad (2.2.2)$$

Por exemplo, vamos considerar teorias definidas sobre uma variedade $m = D + 1$ -dimensional $M \times \mathbb{R}$ com coordenadas $x^m = (x^\alpha; x^{D+1})$ onde $\alpha = 1, \dots, D$. Neste caso, podemos tomar $\omega = \omega_M \wedge dx^{D+1}$. Vamos também considerar variedades $m = D + n$ -dimensional definidas sobre uma variedade D -dimensional, M , e um grupo n -dimensional, G (ou um coset n -dimensional, G/H).

Usamos a seguinte identidade [30], freqüente neste trabalho

$$s^*[\Theta(s_*X)] = (s^*\Theta)(X), \quad (2.2.3)$$

onde Θ é uma n -forma, X um vetor, e s um mapa. Relacionado a esta identidade é a seguinte [34]:

$$\mathcal{L}_X(s^*\Theta) = s^*(\mathcal{L}_{s_*X}\Theta), \quad (2.2.4)$$

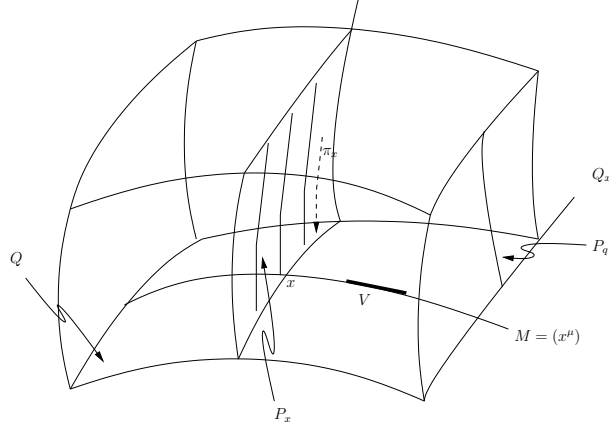
além de identidades comuns como $\mathcal{L}_X\Theta = d[\Theta(X)] + (d\Theta)(X)$.

2.2.2 Dinâmica de Campos

O tratamento da dinâmica de campos é parecido com o caso mais simples da dinâmica de partículas, mas com algumas diferenças importantes. Para começar, a variedade M (com dimensão m) tem coordenadas x^μ (em vez de apenas t). Em cada ponto x , definimos uma fibra Q_x com coordenadas (x^μ, ϕ^A) , onde A é um índice interno qualquer. O momentum agora vai pertencer ao espaço cotangente dos ϕ 's, quanto dos x 's, o que é a novidade aqui. Então, um elemento $p \in P_x$ terá a forma

$$p = p_A^\lambda d\phi^A \otimes (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m) \left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda} \right).$$

Queremos $(m - 1)$ -formas porque consideramos uma região $V \subset M$ e, igual ao caso anterior, queremos definir a dinâmica sobre a fronteira de V , ∂V , o que é equivalente ao que fizemos no caso anterior quando demos a dinâmica sobre a fronteira do intervalo $[t_1, t_2]$.



O procedimento segue como antes: definir a dinâmica sobre ∂V , e logo considerar V infinitesimal. As estruturas que saem deste caso são muito parecidas às anteriores. Em vez de dar todo o formalismo, vamos simplesmente fornecer alguns resultados.

A forma canônica θ_x^i é dada por [27]

$$\theta_x^i = (\kappa_A d\phi^A + p_A^\lambda d\phi_\lambda^A) \otimes dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m,$$

onde

$$\kappa_A \equiv p_{A\lambda}^\lambda = \frac{\partial p_A^\lambda}{\partial x^\lambda}, \quad \phi_\lambda^A \equiv \frac{\partial \phi^A}{\partial x^\lambda}.$$

A forma ω_x^i é similarmente dada por

$$\omega_x^i = (d\kappa_A \wedge d\phi^A + dp_A^\lambda \wedge d\phi_\lambda^A) \otimes dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m.$$

A função geradora $L(x^\lambda, \phi^A, \phi_\lambda^A) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$ agora satisfaz

$$dL \otimes dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m = \theta_x^i,$$

de onde encontramos

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_A^\lambda}{\partial x^\lambda} &= \frac{\partial L(x^\lambda, \phi^A, \phi_\lambda^A)}{\partial \phi^A}, \\ p_A^\lambda &= \frac{\partial L(x^\lambda, \phi^A, \phi_\lambda^A)}{\partial \phi_\lambda^A}. \end{aligned}$$

A descrição Hamiltoniana da dinâmica é efetuada por

$$\theta_x^h = (\kappa_A d\phi^A - \phi_\lambda^A dp_A^\lambda) \otimes dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m,$$

onde a função geradora da dinâmica é a Hamiltoniana, $H(x, \phi^A, p_A^\lambda) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$. De $-dH \otimes dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m = \theta_x^h$ saem as equações de movimento:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_A^\lambda}{\partial x^\lambda} &= -\frac{\partial H(x^\lambda, \phi^A, p_A^\lambda)}{\partial \phi^A}, \\ \phi_\lambda^A &= \frac{\partial H(x^\lambda, \phi^A, p_A^\lambda)}{\partial p_A^\lambda}. \end{aligned}$$

Também podemos definir uma forma Cartan neste caso, o que é a quantidade que mais usamos neste trabalho. Ela tem a forma [27]

$$\begin{aligned}\Theta &= p_A^\lambda dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{d\phi^A} \wedge \dots \wedge dx^m - H dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m \\ &= p_A^\lambda d\phi^A \wedge \omega(\partial_\lambda) - H\omega,\end{aligned}\tag{2.2.5}$$

(onde $\widehat{\lambda}$ indica que substituímos dx^λ por $d\phi^A$ acima).

É também possível escrever Θ em termos da Lagrangiana [27]. Começamos por notar que a Hamiltoniana e a Lagrangiana são relacionadas por

$$H\omega = (p_A^\lambda \phi_\lambda^A - L)\omega,$$

assim a forma Cartan, Θ , torna-se

$$\Theta = p_A^\lambda d\phi^A \wedge \omega(\partial_\lambda) - (p_A^\lambda \phi_\lambda^A - L)\omega.\tag{2.2.6}$$

2.2.3 Prolongações

Prolongações de vetores neste caso procedem igual ao caso anterior, simplesmente tomando $q^i \rightarrow \phi^A$, e em vez de impor a relação $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$, vamos impor a relação $\phi_\lambda^A = \frac{\partial \phi^A}{\partial x^\lambda}$, onde o vetor X agora vai ter a forma $X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + X^A \frac{\partial}{\partial \phi^A}$. A prolongação de X torna-se:

$$\begin{aligned}X^1 &= j^1 X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + X^A \frac{\partial}{\partial \phi^A} + X_\mu^A \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \phi^A)} \\ &= X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + X^A \frac{\partial}{\partial \phi^A} \\ &\quad + \left(\frac{\partial X^A}{\partial x^\mu} + \phi_\mu^B \frac{\partial X^A}{\partial \phi^B} - \phi_\lambda^A \frac{\partial X^\lambda}{\partial x^\mu} - \phi_\lambda^A \frac{\partial X^\lambda}{\partial \phi^B} \phi_\mu^B \right) \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \phi^A)}.\end{aligned}\tag{2.2.7}$$

Note que (2.1.5) continua sendo válido.

2.2.4 Ações e Equações de Movimento

Consideremos uma prolongação de uma seção $\bar{s}^1 = j^1(s)$ dada por $\bar{s}^1 : (x^\mu) \rightarrow (x^\mu, \phi^A(x), \phi_\lambda^A(x))$. Notamos que os pullbacks de $d\phi^A$ e dp_A^λ têm a seguinte forma:

$$(\bar{s}^1)^* d\phi^A = \frac{\partial \phi^A}{\partial x^\mu} dx^\mu \quad (\bar{s}^1)^* dp_A^\lambda = \frac{\partial p_A^\lambda}{\partial x^\mu} dx^\mu.$$

Esta prolongação satisfaz:

$$\begin{aligned}&(\bar{s}^1)^* \left(p_A^\lambda d\phi^A \wedge \omega(\partial_\lambda) - p_A^\lambda \phi_\lambda^A \omega \right) \\ &= \left(p_A^\lambda \frac{\partial \phi^A}{\partial x^\lambda} \omega - p_A^\lambda \phi_\lambda^A \omega \right) \\ &= 0,\end{aligned}$$

onde a forma que se encontra dentro dos colchetes é conhecida como a “forma de contato”. Assim, da equação (2.2.6) vemos que

$$(\bar{s}^1)^* \Theta = L(x^\mu, \phi^A(x), \phi_\lambda^A(x)) \omega. \quad (2.2.8)$$

Desta forma, a ação pode ser escrita como [30]

$$S[\phi] = \int_M (\bar{s}^1)^* \Theta = \int_{\bar{s}^1(M)} \Theta.$$

Vejam os que acontece no limite $\delta S = 0$, onde

$$\begin{aligned} 0 &= \delta S = \int_{\bar{s}^1(M)} \mathcal{L}_{X^1} \Theta = \int_M (\bar{s}^1)^* \mathcal{L}_{X^1} \Theta \\ &= \int_M (\bar{s}^1)^* ((d\Theta)(X^1) + d(\Theta(X^1))), \end{aligned}$$

para um vetor X^1 arbitrário. Esta equação é satisfeita quando

$$(\bar{s}^1)^* [(d\Theta)(X^1)] = 0, \quad (2.2.9)$$

isto é, as equações de movimento [27, 30]. É prudente notar que esta equação tem que ser satisfeita para um X^1 qualquer.

É útil ver um cálculo explícito das equações de movimento. Calcula-se

$$\begin{aligned} (\bar{s}^1)^* [(d\Theta)(X^1)] &= \left[X^\mu \partial_\mu \phi^A \left(\partial_\lambda p_A^\lambda + \frac{\partial H}{\partial \phi^A} \right) + X^\mu \partial_\mu p_A^\lambda \left(-\partial_\lambda \phi^A + \frac{\partial H}{\partial p_A^\lambda} \right) \right. \\ &\quad \left. + X_A^\lambda \left(\partial_\lambda \phi^A - \frac{\partial H}{\partial p_A^\lambda} \right) + X^A \left(-\partial_\lambda p_A^\lambda - \frac{\partial H}{\partial \phi^A} \right) \right] \omega \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde os termos em colchetes são as equações de movimento. Em cálculos explícitos deste tipo, as seguintes identidades têm sido bastante úteis¹¹:

$$\begin{aligned} dx^\sigma \wedge \omega(\partial_\mu) &= \delta_\mu^\sigma \omega, \\ dx^\sigma \wedge dx^\tau \wedge \omega(\partial_\mu, \partial_\nu) &= (\delta_\mu^\sigma \delta_\nu^\tau - \delta_\mu^\tau \delta_\nu^\sigma) \omega, \\ dx^\sigma \wedge \omega(\partial_\mu, \partial_\nu) &= -\delta_\mu^\sigma \omega(\partial_\nu) + \delta_\nu^\sigma \omega(\partial_\mu), \\ dx^\sigma \wedge \omega(\partial_\lambda, \partial_\mu, \partial_\nu) &= \delta_\lambda^\sigma \omega(\partial_\mu, \partial_\nu) - \delta_\mu^\sigma \omega(\partial_\lambda, \partial_\nu) \\ &\quad + \delta_\nu^\sigma \omega(\partial_\lambda, \partial_\mu), \\ dx^\sigma \wedge dx^\tau \wedge \omega(\partial_\lambda, \partial_\mu, \partial_\nu) &= (\delta_\mu^\tau \delta_\lambda^\sigma - \delta_\mu^\sigma \delta_\lambda^\tau) \omega(\partial_\nu) + (\delta_\lambda^\tau \delta_\nu^\sigma - \delta_\nu^\tau \delta_\lambda^\sigma) \omega(\partial_\mu) \\ &\quad + (\delta_\mu^\sigma \delta_\nu^\tau - \delta_\mu^\tau \delta_\nu^\sigma) \omega(\partial_\lambda). \end{aligned}$$

Pode-se freqüentemente evitar o uso destas identidades pelo uso da decomposição em (3.2.6).

Notemos também que

$$\begin{aligned} (\bar{s}^1)^*(d\Theta) &= (\bar{s}^1)^* \left(dp_A^\lambda \wedge d\phi^A \wedge \omega(\partial_\lambda) - \left(\frac{\partial H}{\partial p_A^\lambda} dp_A^\lambda + \frac{\partial H}{\partial \phi^A} d\phi^A \right) \wedge \omega \right) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

já que $\omega(\partial_\lambda) \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu = 0$ e $\omega \wedge dx^\mu = 0$.

¹¹Isto é fácil ver. A terceira identidade, por exemplo, pode ser derivada ao notar que $0 = (dx^\sigma \wedge \omega)(\partial_\mu, \partial_\nu) = (\delta_\mu^\sigma \omega - dx^\sigma \wedge \omega(\partial_\mu))(\partial_\nu)$ que pode ser expandida para obter a terceira identidade. As outras identidades também são derivadas da mesma forma.

2.2.5 Θ e Notação

Freqüentemente neste trabalho, consideramos quantidades tal como $(\bar{s}^1)^*[(d\Theta)(X^1)]$, onde aqui estamos tomando alguma liberdade na notação: o vetor X^1 é um vetor no espaço J^1 (o “espaço de evolução”, com coordenadas $(x, \phi^A, \phi_\lambda^A)$), mas a forma Θ é definida sobre o espaço J^{1*} (veja [30]). As expressões corretas utilizam um mapa (a “derivada do fibrado”), FL , que existe entre os dois espaços, a transformação de Legendre [29, 32, 33]:

$$FL : (x^\lambda, \phi^A, \phi_\lambda^A) \rightarrow (x^\lambda, \phi^A, p_A^\lambda).$$

Assim, $0 = (\bar{s}^1)^*[(d\Theta)(X^1)]$ corretamente seria

$$\begin{aligned} 0 &= (\bar{s}^1)^* [(FL)^* d\Theta (X^1)] \\ &= (\bar{s}^1)^* (FL)^* [(d\Theta) ((FL)_* X^1)] \\ &= (FL \circ \bar{s}^1)^* [(d\Theta) ((FL)_* X^1)]. \end{aligned}$$

Note que $(FL \circ \bar{s}^1)$ não é nada mais que $(x) \rightarrow (x, \phi^A, p_A^\lambda)$. Assim,

$$FL_* \frac{\partial}{\partial \lambda \phi^A} = \frac{\partial p_B^\mu}{\partial \lambda \phi^A} \frac{\partial}{\partial p_B^\mu} = \frac{\partial^2 L}{(\partial_\mu \phi^B)(\partial_\lambda \phi^A)} \frac{\partial}{\partial p_B^\mu}$$

e

$$\begin{aligned} (FL)_* X^1 &= (FL)_* \left(X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + X^A \frac{\partial}{\partial \phi^A} + X_\lambda^A \frac{\partial}{\partial (\partial_\lambda \phi^A)} \right) \\ &\equiv X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + X^A \frac{\partial}{\partial \phi^A} + X_B^\mu \frac{\partial}{\partial p_B^\mu}, \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

onde definimos

$$X_B^\mu \equiv X_\lambda^A \partial^2 L / (\partial_\mu \phi^B)(\partial_\lambda \phi^A). \quad (2.2.12)$$

Porém poderíamos eleger trabalhar com o espaço J^{1*} com coordenadas (x, ϕ^A, p_A^λ) , e com $(FL)_* X^1$ se quisermos.

2.2.6 Espaços de Configurações Vetoriais

Quando o espaço de configuração Q é vetorial, por exemplo ϕ_μ^A , tem-se que modificar ligeiramente as considerações acima, assim modificando ligeiramente a prolongação do campo.

As vezes, usa-se a notação $\phi_{(\mu)}^A$, enfatizando o fato que podemos incluir o índice μ no índice A [26]. Vamos considerar uma ação de um campo ϕ_μ com um potencial da forma $V(\phi) = g^{\mu\nu}(x)\phi_\mu\phi_\nu$. Usando (B.2.1), é fácil mostrar que este termo é invariante sobre o vetor

$$X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \phi_\nu (\partial_\mu X^\nu) \frac{\partial}{\partial \phi_\mu}. \quad (2.2.13)$$

O segundo ponto a considerar é como queremos definir o espaço do jato de tal forma que o formalismo fique covariante. Neste caso, queremos tomar o espaço TQ como a derivada covariante da forma $\nabla_\mu \phi_\lambda^A$ em vez de coordenadas geodésicas onde $\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma = 0$. Assim, queremos que o mapa \bar{s}^1 seja

$$\bar{s}^1 : (x) \rightarrow (x, \phi_\lambda^A, \overline{\phi_{\lambda\mu}^A}),$$

onde definimos

$$\overline{\phi_{\lambda\mu}^A} \equiv \partial_\mu \phi_\lambda^A - \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma \phi_\sigma^A.$$

A forma de contato agora vai ser

$$d\overline{\phi_\lambda^A} - \overline{\phi_{\lambda\mu}^A} dx^\mu,$$

onde definimos

$$\overline{d\phi_\lambda^A} \equiv d\phi_\lambda^A - \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma \phi_\sigma^A dx^\nu.$$

Desta forma, vemos que a forma de contato não muda se escolhemos um sistema geodésico.

As formas canônicas θ_x^i e θ_x^h são

$$\begin{aligned} \theta_x^i &= (\overline{\kappa}_A^\lambda d\phi_\lambda^A + p^{\lambda\mu} d\overline{\phi_{\lambda\mu}^A}) \otimes dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m, \\ \theta_x^h &= (\overline{\kappa}_A^\lambda d\phi_\lambda^A - \overline{\phi_{\lambda\mu}^A} dp^{\lambda\mu}) \otimes dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m, \end{aligned}$$

onde definimos

$$\overline{\kappa}_A^\lambda \equiv \nabla_\mu p^{\lambda\mu} = \partial_\mu p^{\lambda\mu} + \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda p^{\sigma\mu} = \kappa^\lambda + \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda p^{\sigma\mu}.$$

Assim, $H\omega = (p_A^{\lambda\mu} \overline{\phi_{\lambda\mu}^A} - L)\omega$.

Neste caso, a forma de Cartan deve ser escrita em termos de $\overline{d\phi_\lambda^A}$:

$$\Theta = p_A^{\lambda\mu} \overline{d\phi_\lambda^A} \wedge \omega(\partial_\mu) - H\omega.$$

2.2.7 Campos Fermiônicos

Embora não consideremos campos fermiônicos aqui, crê-se que o mesmo formalismo deve ser aplicável. Obviamente, a ordem dos campos torna-se um ponto importante, o que é considerado em [26, 35]. Outro ponto importante é a necessidade de tomar as derivadas de Lie de campos fermiônicos, um assunto que foi o objetivo original de [36]; este ponto é elaborado com muito detalhe também no seguinte trabalho dos mesmos autores [37].

2.3 Conclusões

O formalismo multi-simplético é um formalismo amplo, capaz de descrever dinâmica numa forma geral e geométrica. Assim, já que o ponto de partida nos seguintes capítulos é baseado neste formalismo, os resultados que saem vão ser relativamente gerais. Um exemplo simples usando alguns métodos deste capítulo é dado em Apêndice B.

3 Redução de Legendre e Variedades Multi-Simpléticas

Em termos de supersimetria, os métodos de redução dimensional de Kaluza-Klein e Scherk-Schwarz [7, 38–40] são interessantes porque geram novas teorias supersimétricas em dimensões mais baixas. As teorias efetivas que resultam destas reduções aparecem devido a uma configuração do campo gravitacional onde uma dimensão é compactificada, e onde alguma informação sobre a dimensão adicional é perdida (por exemplo $\partial_5(\text{campo}) = 0$) neste processo.

A novidade do método de redução de Legendre é que não se perde informação em fazer a redução. Por outro lado, é evidente que este tipo de redução é fundamentalmente diferente aos outros métodos de redução dimensional em pelo menos um aspecto: a redução não vem mais de uma compactificação de uma dimensão, ou de uma configuração no campo gravitacional, senão são transformações cujo parâmetro é uma coordenada num espaço adicional, aparecendo na métrica em dimensões mais altas, sobre que a ação é invariante.

Uma generalização do método de Legendre requer um conhecimento do formalismo multi-simplético. Neste formalismo, para espaços internos que são ou grupos ou cosets, vamos considerar os vetores de Killing K_i , sobre que a teoria original era invariante. Podemos usar estas simetrias da teoria original para encontrar expressões deduzidas da teoria original que têm a forma de Lagrangianas em dimensões mais baixas onde o espaço adicional não aparece. Assim, vamos ver que faz sentido falar sobre “reduzir com respeito a um vetor de Killing”, onde a redução é efetuada através o uso deste vetor. No caso onde o espaço adicional tem dimensão maior do que um, vamos ver como surgem umas condições que a teoria original tem que satisfazer, e como as soluções destas condições são precisamente os tipos de redução dimensional que já conhecemos: Kaluza-Klein, Scherk-Schwarz e Legendre. Um elemento agradável do formalismo multi-simplético é que é fácil generalizá-lo a teorias onde aparecem derivadas mais altas dos campos, ou seja teorias onde aparecem r -jatos [41, 42].

Vamos começar por dar um resumo de redução de Legendre e uma possível extensão do método ao caso de redução de mais do que uma dimensão. Após termos feito a ligação entre o formalismo multi-simplético, vetores de Killing e redução dimensional, revisamos estes resultados em termos mais gerais. Terminamos este capítulo por brevemente considerar como aplicar este formalismo a teorias gravitacionais.

3.1 Redução de Legendre

A idéia atrás este tipo de redução soa quase trivial: tomar o Hamiltoniano de uma teoria definida em D dimensões como uma Lagrangiana em $D - 1$ dimensões. Precisa-se escolher uma coordenada do tipo espaço para o “tempo” do Hamiltoniano.

3.1.1 O Mecanismo Básico: $5D \rightarrow 4D$

Consideremos uma teoria cinco dimensional com coordenadas $x^{\hat{\mu}} = x^0 \dots x^4$ e métrica $(+, -, -, -, -)$. Queremos reduzir com respeito à variável, i.é., x^4 . Para realizar isto, começamos com uma Lagrangiana em 5 dimensões, $L_{(5)}$, e achamos o “Hamiltoniano”, $H_{(5)}$, com respeito à variável do “tempo”, x^4 (embora x^4 realmente seja do tipo-espaço), através de uma transformação de Legendre:

$$H_{(5)} = \sum_{\dot{\phi}} \dot{\phi} \frac{\partial L_{(5)}}{\partial \dot{\phi}} - L_{(5)} \quad \text{onde} \quad \dot{\phi} = \frac{d\phi}{dx^4}.$$

Definimos a Lagrangiana reduzida como o negativo deste Hamiltoniano

$$L_{(4)} \equiv -H_{(5)} = -\dot{\phi} \frac{\partial L_{(5)}}{\partial \dot{\phi}} + L_{(5)},$$

onde os momentos π agora são considerados novos campos independentes na teoria em quatro dimensões.

Por que definimos a Lagrangiana em 4 dimensões desta maneira? Ao definirmos a Lagrangiana assim, a ação $S_{(4)}$ em quatro dimensões não depende de x^4 mesmo se $L_{(4)}$ depender:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx^4} L_{(4)} &= -\frac{d}{dx^4} H_{(5)} \neq 0, \\ \frac{d}{dx^4} S_{(4)} &= \frac{d}{dx^4} \int dx^0 \dots dx^3 L_{(4)} = -\frac{d}{dx^4} \int dx^0 \dots dx^3 H_{(5)} = 0, \end{aligned}$$

desde que a “energia” não varia com respeito ao “tempo”, x^4 . É importante enfatizar que os campos ϕ retenham a sua dependência da coordenada x^4 . Não obstante, como eles variam sobre mudanças em x^4 depende das equações de movimento da teoria em 5 dimensões, que agora são vínculos na teoria quatro dimensional: $\partial_{\hat{\mu}}(\partial L_{(5)}/\partial(\partial_{\hat{\mu}}\phi)) - \partial L_{(5)}/\partial\phi = 0$.

Por exemplo, vamos considerar uma teoria em $5D$ da forma [43]

$$L_{(5)} = \partial^{\hat{\mu}}\phi\partial_{\hat{\mu}}\phi^*, \quad (3.1.1)$$

com equações de movimento $\partial^{\hat{\mu}}\partial_{\hat{\mu}}\phi = 0$. O momentum canônico com respeito ao “tempo” x^4 é $\pi(\phi) = \partial L_{(5)}/\partial(\partial_4\phi) = \partial^4\phi^*$ e $\pi(\phi^*) = \partial^4\phi$. Assim, a “Hamiltoniana” em $5D$ fica $H_{(5)} = -\pi(\phi^*)\pi(\phi) - \partial^{\mu}\phi\partial_{\mu}\phi^*$ (onde $\mu = 0\dots 3$). Introduzindo a notação $G \equiv \partial^4\phi$ e $G^* \equiv \partial^4\phi^*$, a Lagrangiana em $4D$ torna-se

$$L_{(4)} = -H_{(5)} = \partial^{\mu}\phi\partial_{\mu}\phi^* + G^*G, \quad (3.1.2)$$

onde os campos ϕ , ϕ^* , G e G^* ainda são vinculados pelas equações de movimento em $5D$, junto com as definições dos momentos:

$$\begin{aligned} \partial_4 G &= -\partial_{\mu}\partial^{\mu}\phi & \text{e} & & \partial_4 G^* &= -\partial_{\mu}\partial^{\mu}\phi^*, \\ \partial_4 \phi &= -G & \text{e} & & \partial_4 \phi^* &= -G^*. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Assim, obtemos uma ação $S_{(4)}$ em $4D$ que não depende de mudanças em x^4 , devido a como mudam os campos ϕ , ϕ^* , G , G^* sob mudanças de x^4 .

3.1.2 Supersimetria

A importância deste método de obter Lagrangianas pode ser melhor valorizada com a introdução de supersimetria.

Começa-se com uma teoria supersimétrica em $D + 1$ dimensões on-shell, ou seja, a supersimetria é realizada somente através a aplicação das equações de movimento. Constrói-se pelo método acima uma “energia” em D dimensões. Esta teoria mostrará duas simetrias: ela também será uma teoria supersimétrica, além de também ser invariante sobre as equações de

movimento de $D + 1$ dimensões. Assim, não há necessidade de aplicarmos as equações de movimento em D dimensões para realizar a supersimetria, ou seja: a teoria assim obtida será uma teoria supersimétrica off-shell.

Um aspecto interessante é que a dimensão adicional sobre que reduzimos torna-se o espaço de uma carga central na teoria reduzida. Isto implica que a teoria reduzida deve ter a possibilidade de suportar uma carga central, que somente acontece em teorias onde $N \geq 2$.

Então, o caso mais simples vai ser uma redução dimensional de uma teoria $N = 2$ on-shell em 5 dimensões a uma teoria $N = 2$ off-shell com carga central em 4 dimensões. Para isto, precisamos de um grupo de simetria interna $USp(2)$ para acomodá-la, e isto é facilitado pelo uso de espinores de Majorana do tipo $SU(2)$ [7]. A escolha da teoria mais simples acomodando estes requisitos contém o $N = 2$ hypermultiplet [7, 12.2], contendo dois escalares complexos A^1 e A^2 e um espinor (complexo) ψ . Vamos seguir a notação de seção A.1 para espinores.

Constrói-se uma representação da supersimetria on-shell por considerar as seguintes mudanças nos campos A_i e ψ :

$$\delta A_i = i\bar{\zeta}_i \psi \quad \delta \psi = 2\gamma^{\hat{\mu}} \zeta^i \partial_{\hat{\mu}} A_i,$$

onde consideramos as matrizes gamma como $\gamma^{\hat{\mu}} \equiv \{\gamma^{\mu}, i\gamma_5\}$ e $\gamma_{\hat{\mu}} = \{\gamma_{\mu}, -i\gamma_5\}$, e as matrizes A , B e C como definimos em (A.1.1). A Lagrangiana que vamos considerar para este hypermultiplet sem massa em cinco dimensões é simplesmente¹²

$$L = \partial_{\hat{\mu}} A^{*i} \partial^{\hat{\mu}} A_i - \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^{\hat{\mu}} \partial_{\hat{\mu}} \psi.$$

Pode-se mostrar, reescrevendo equação (A.1.7) como

$$\eta_{\alpha}^i \bar{\zeta}_{i\beta} = \frac{1}{4} [(\bar{\eta}_i \zeta^i) 1_{\alpha\beta} + (\bar{\eta}_i \gamma_{\hat{\mu}} \zeta^i) (\gamma^{\hat{\mu}})_{\alpha\beta} - \frac{1}{2!} (\bar{\eta}_i \gamma_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \zeta^i) (\gamma^{\hat{\mu}\hat{\nu}})_{\alpha\beta}],$$

e usando (A.1.9) que a álgebra toma a forma

$$[\delta(\zeta), \delta(\eta)] = 2i(\bar{\eta}^j \gamma^{\hat{\mu}} \zeta_j) \partial_{\hat{\mu}} + (\text{equações de movimento}),$$

onde o termo $-i(\bar{\eta}_i \gamma_{\hat{\rho}} \zeta^i) \gamma^{\hat{\rho}} \gamma^{\hat{\mu}} \partial_{\hat{\mu}} \psi$ aparece no caso de $[\delta(\zeta), \delta(\eta)]\psi$. Pode-se também ver que a mudança δL da Lagrangiana é dada por

$$\partial_{\hat{\rho}} \left[-i\bar{\psi} \gamma^{\hat{\rho}} (\gamma^{\hat{\mu}} \zeta^i \partial_{\hat{\mu}} A_i) + iA_i (\partial_{\hat{\mu}} \bar{\psi}) \gamma^{\hat{\mu}\hat{\rho}} \zeta^i - iA^{*i} \bar{\zeta}_i \gamma^{\hat{\rho}\hat{\mu}} \partial_{\hat{\mu}} \psi \right],$$

uma divergência total.

A Hamiltoniana obtida com respeito à quinta dimensão agora é

$$L_{(4)} = -H = \partial^{\mu} A_i \partial_{\mu} A^{*i} - \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \psi + G_i G^{*i},$$

onde $G_i \equiv -\partial_4 A_i$ e $G^{*i} = -\partial_4 A^{*i}$ e onde $\mu = 0 \dots 3$. Esta Lagrangiana é invariante somente quando as equações de movimento em cinco dimensões são satisfeitas:

$$0 = \partial^{\hat{\mu}} \partial_{\hat{\mu}} A_i = \partial^{\mu} \partial_{\mu} A_i + \partial_4 G_i \quad 0 = \gamma^{\hat{\mu}} \partial_{\hat{\mu}} \psi = \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \psi + i\gamma_5 \partial_4 \psi.$$

¹²Podemos redefinir $\Psi = i\psi$ para obter as convenções usuais .

Neste caso, os campos transformam-se como

$$\begin{aligned}\delta A_i &= i\bar{\zeta}_i\psi, \\ \delta\psi &= 2\gamma^\mu\zeta^i\partial_\mu A_i + 2i\gamma_5\zeta^i\partial_4 A_i = 2\gamma^\mu\zeta^i\partial_\mu A_i - 2i\gamma_5\zeta^i G_i, \\ \delta G_i &= -\partial_4(\delta A_i) = -i\bar{\zeta}_i\partial_4\psi = \bar{\zeta}_i\gamma_5\gamma^\mu\partial_\mu\psi.\end{aligned}$$

A álgebra que estas transformações satisfazem é simplesmente a mesma álgebra anterior:

$$[\delta(\zeta), \delta(\eta)] = 2i(\bar{\eta}^j\gamma^\mu\zeta_j)\partial_\mu - 2\bar{\eta}^j\gamma_5\zeta_j\partial_4.$$

As equações de movimento em quatro dimensões são $0 = \partial^\mu\partial_\mu A_i$, $0 = \gamma^\mu\partial_\mu\psi$ e $G_i = 0$ que podemos escrever (levando em conta as equações de movimento em cinco dimensões) como $0 = \partial_4 A_i$, $0 = \partial_4\psi$ e $0 = \partial_4 G_i$. Se definimos o espaço da carga central como $z \equiv x^4$, então $\delta_z\phi = 0$ para todos os campos $\phi = \{A_i, \psi, G_i\}$. Esta condição é a condição de encurtamento do multiplete no caso sem massa [7]. No caso massivo esta condição torna-se [43] $\delta_z\phi = im\phi$.

3.1.3 Dimensão > 1

A generalização de redução de Legendre para mais do que uma dimensão não é óbvia. Requerendo que a ação seja invariante sobre a derivada na coordenada sobre que integramos, mas agora para duas dimensões, dá vínculos onde não se vê facilmente se somente existem soluções “triviais” ou não, sobretudo para teorias de gauge.

Consideremos novamente a Lagrangiana (3.1.1), $L_{(5)} = \partial^{\hat{\mu}}\phi\partial_{\hat{\mu}}\phi^*$. Aham-se pelo menos duas possibilidades para redução dimensional de Legendre de duas dimensões: no primeiro caso, o caso trivial, simplesmente consideramos que a ação reduzida tome a forma

$$\int \partial^\mu\phi\partial_\mu\phi^* + G^*G dx^1 \dots dx^{d-2},$$

onde as transformações dos campos sobre x^4 e x^5 são dadas por

$$\begin{aligned}T^1\phi &= -G & \text{e} & & T^2\phi &= -G, \\ T^1G &= -\square\phi & & & T^2G &= -\square\phi.\end{aligned}$$

No segundo caso, vamos considerar que a ação reduzida tome a forma

$$\int \partial^\mu\phi\partial_\mu\phi^* + G^*G + H^*H dx^1 \dots dx^{d-2}.$$

Este caso parece-nos mais “correto” de certa forma: vê-se a aparência dos dois momentos associados com x^4 e x^5 . As transformações são dadas por

$$\begin{aligned}T_{(1/2)}^1\phi &= -G, & & & T_{(1/2)}^2\phi &= H, \\ T_{(1/2)}^1G &= -\square\phi, & \text{e} & & T_{(1/2)}^2G &= 0, \\ T_{(1/2)}^1H &= 0, & & & T_{(1/2)}^2H &= \square\phi,\end{aligned}$$

onde incluímos índices $1/2$ para considerações mais em frente, e onde $\square = -P^2$. Note que, já que queremos que estas simetrias não quebrem a simetria de Lorentz, $[T^i, P^2] = 0$.

A álgebra nesta forma não se fecha, e precisa-se incluir outra simetria, $T_{(0)}^3$, que simplesmente gera uma rotação entre G e H :

$$\begin{aligned} T_{(0)}^3 \phi &= 0, \\ T_{(0)}^3 G &= -H, \\ T_{(0)}^3 H &= G. \end{aligned}$$

Agora, se definimos

$$T_{(q+\frac{1}{2})}^i \equiv (P^2)^q T_{(1/2)}^i \quad \text{e} \quad T_{(q)}^3 \equiv (P^2)^q T_{(0)}^3,$$

onde $q \in \mathbb{Z}$. Então a álgebra toma a forma

$$[T_{(m)}^a, T_{(n)}^b] = C^{abc} T_{(m+n)}^c,$$

onde $C^{123} = C^{231} = C^{312} = 1$ são as constantes associadas ao grupo $SU(2)$. Esta álgebra é uma álgebra $SU(2)$ “affine twisted” de Kac-Moody [44] sem carga central. Esta álgebra também é isomorfa a uma álgebra untwisted $SU(2)$, onde aparece uma derivação, d [44].

3.2 O Formalismo Multi-Simplético e Simetrias

Vamos generalizar o método de redução de Legendre que se encontra acima pelo uso do formalismo multi-simplético de [27]. O ponto de partida é, como no caso de redução dimensional de Legendre, a energia, e neste formalismo a definição da energia depende de um vetor. Para o caso de redução dimensional de apenas uma dimensão, este vetor vai ser o vetor de Killing desta dimensão.

Em termos de notação, o formalismo multi-simplético de [27] é tal que a forma de Cartan para uma teoria com vários campos, ou campos vetoriais, não é substantivamente diferente de uma teoria com um campo escalar com índices internos. Desta forma, nesta seção, vamos simplificar tudo por simplesmente considerar um campo ϕ^A com índices internos, A .

Vamos escrever uma simetria como um vetor atuando sobre o espaço com coordenadas x^μ e os campos ϕ^A . Por exemplo, se a ação é invariante sob translações, vamos escrever isto como ∂_μ , ou seja: $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\nu \partial_\nu x^\rho = x^\mu + \varepsilon^\mu$. Da mesma forma, uma invariância sob $\phi \rightarrow \phi' = e^{i\varepsilon} \phi = \phi + i\varepsilon \phi \frac{\partial}{\partial \phi}$, pode-se escrever como $i\phi \partial / \partial \phi$. Uma simetria geral pode ser escrita como

$$X^\mu(x, \phi) \frac{\partial}{\partial x^\mu} + X^A(x, \phi) \frac{\partial}{\partial \phi^A}.$$

Neste capítulo, vamos nos concentrar sobre simetrias que têm a seguinte forma:

$$X + Y \quad \text{onde } X = X^\mu(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \text{ e } Y = X^A(\phi) \frac{\partial}{\partial \phi^A},$$

ou seja, simetrias X “internas” (x^μ) que não dependem do campo, e simetrias Y “externas” (ϕ^A) que não dependem da coordenada, embora eventualmente possam depender de alguma coordenada interna.

Dada uma teoria com uma forma de Cartan Θ , existe uma maneira direta de ver se um vetor X gera uma simetria ou não:

Definição Um vetor X gera uma simetria se a sua prolongação X^1 satisfaz

$$\mathcal{L}_{X^1}\Theta = 0, \quad (3.2.1)$$

onde \mathcal{L} é a derivada de Lie.

O zero no lado direito pode ser estendido ao caso de uma divergência total, $d\Delta$, que corresponde a um termo topológico (uma anomalia clássica, ou um termo de Wess-Zumino). Alguns exemplos de como este termo topológico pode aparecer quando X é um vetor de Killing aparecem nos trabalhos de [26, 30, 41], embora vamos considerá-lo como zero pelo momento.

3.2.1 Vetores de Killing

As teorias sob consideração aqui vão ser teorias definidas sobre superfícies com uma métrica. A ação vai ser uma integral sobre o espaço, onde aparece a métrica e derivadas covariantes, ∇_μ . Como exemplo, vamos considerar a ação $S[\phi(x)] = \int \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(x)\partial_\mu\phi(x)\partial_\nu\phi(x)\sqrt{-g}d^4x$. O escalar $g^{\mu\nu}(x)\partial_\mu\phi(x)\partial_\nu\phi(x)$ é invariante sobre reparametrizações em cada ponto da superfície, mas não há, a princípio, uma relação entre o escalar em dois pontos da variedade (ou seja, não sabemos $g^{\mu\nu}(x')$ em termos de $g^{\mu\nu}(x)$).

Uma isometria é uma transformação $x \rightarrow x'$ onde a métrica $g_{\mu\nu}(x)$ e $g'_{\mu\nu}(x)$ são relacionadas por $g_{\mu\nu}(x) = g'_{\mu\nu}(x')$, ou equivalentemente $g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} g_{\rho\sigma}(x')$. Estas transformações são geradas pelos vetores de Killing, $K_i = K_i^\mu \partial_\mu$. Substituindo $x \rightarrow x' = x + \varepsilon K_i(x)$, obtém-se da equação de transformação da métrica a seguinte condição que os vetores de Killing devem satisfazer [31]:

$$0 = (\mathcal{L}_K g)_{\mu\nu} = K^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} + g_{\mu\sigma} \partial_\nu K^\sigma + g_{\sigma\nu} \partial_\mu K^\sigma. \quad (3.2.2)$$

Considere uma transformação $x \rightarrow x'$ de coordenadas. O escalar

$$\alpha(x) = g^{\mu\nu}(x)\partial_\mu\phi(x)\partial_\nu\phi(x) = g'^{\mu\nu}(x')\frac{\partial\phi(x')}{\partial x'^\mu}\frac{\partial\phi(x')}{\partial x'^\nu} = g^{\mu\nu}(x')\frac{\partial\phi(x')}{\partial x'^\mu}\frac{\partial\phi(x')}{\partial x'^\nu} = \alpha(x')$$

se transformamos sob uma isometria. Mas agora, vê-se que o escalar não muda entre x e x' . Deste modo, obtemos uma simetria sob a qual a Lagrangiana não muda. Assim, podemos considerar uma família de congruências geradas pelos vetores de Killing sobre a variedade original, onde o movimento sobre cada congruência é gerada por uma derivada de Lie sobre o vetor de Killing, então $\mathcal{L}_K\alpha = 0$.

Vamos mostrar que a medida de integração, V , é também invariante sob K_i . Começamos por escrever $\mathcal{L}_K(\sqrt{g}) = \frac{1}{2\sqrt{g}}\mathcal{L}_K(\sqrt{g}\sqrt{g}) = \frac{1}{2\sqrt{g}}\mathcal{L}_K g$ e utilizamos a identidade $\partial(\det M)/\partial(M_j^i) = \det M (M^{-1})^i_j$ para uma matriz M . Assim podemos escrever

$$\mathcal{L}_K(\sqrt{g}) = \frac{1}{2\sqrt{g}}K^\rho \frac{\partial \det g}{\partial x^\rho} = \frac{1}{2\sqrt{g}}\det g g^{\mu\nu} K^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu}.$$

Somando ambos lados de (3.2.2) sobre $g^{\mu\nu}$ nos dá $g^{\mu\nu} K^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} = -2\partial_\mu K^\mu$ para que $\mathcal{L}_K(\sqrt{g}) = -\sqrt{g}\partial_\mu K^\mu$.

Agora podemos calcular $\mathcal{L}_K\omega$. Usando [31, (4.67), (4.76)] isto é $\mathcal{L}_K\omega = \partial_\mu K^\mu\omega$. Então, deduzimos que

$$\mathcal{L}_K V = 0. \quad (3.2.3)$$

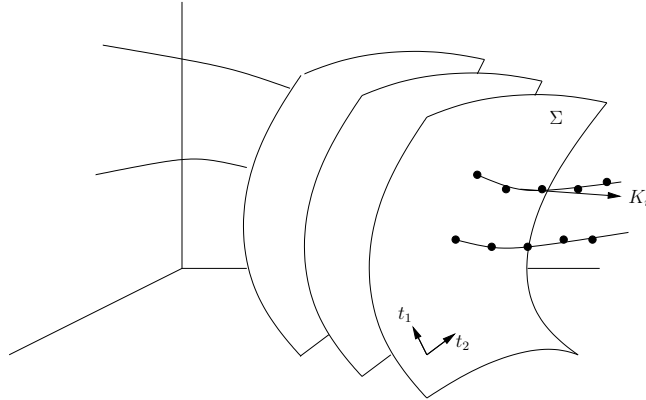
Desta forma, obtemos uma simetria da teoria. Em termos simpléticos, a simetria é gerada pelo vetor $X_i = K_i = K_i^\mu(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ que, justamente, quando opera sobre uma Lagrangiana, somente muda a métrica e não o campo ϕ . Do teorema de Frobenius, sabemos que, para que os X_i formem uma variedade integral, $\mathcal{L}_{X_i} X_j$ é uma combinação linear dos vetores $C(x)^k{}_{ij} X_k$. O caso em que estamos interessados, o de uma variedade de grupo ou de coset, sabemos que os fatores C são constantes:

$$\mathcal{L}_{X_i} X_j = C^k{}_{ij} X_k. \quad (3.2.4)$$

Mais adiante, vamos querer adicionar um fator $X^A \neq 0$ de tal forma que preservemos as identidades de Lie dos vetores de Killing. O vetor X_i agora vai ter a aparência $X_i = X_i^\mu(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu} + X_i^A \frac{\partial}{\partial \phi^A}$ de tal forma que continuemos satisfazendo equação (3.2.4), por exemplo por considerar X_i^A somente uma função de ϕ , ou mais geralmente uma função $X_i^A(x, \phi)$ satisfazendo $X_i^\mu \partial_\mu X_j^A = 0$.

3.2.2 Quantidades Conservadas

Da discussão acima, sabemos que podemos construir hipersuperfícies Σ (cruzando cada congruência num ponto no nosso exemplo abaixo) sobre a qual vamos integrar a ação já que a ação em cada ponto da congruência não muda sobre a mesma congruência.



Assim definido, uma integral sobre Σ será uma quantidade conservada. Mas ainda nos falta a expressão explícita sobre que deveríamos integrar.

Teorema A quantidade dada por¹³ [27]

$$E(X) = -(\bar{s}^1)^* (\Theta(X^1)), \quad (3.2.5)$$

é uma constante de movimento.

A prova disto é fácil. Primeiro, vamos mostrar que $d[E(X)] = 0$ sobre uma região no espaço se usamos as equações de movimento; de fato

$$\begin{aligned} d[E(X)] &= -d(\bar{s}^1)^* (\Theta(X^1)) \\ &= -(\bar{s}^1)^* (\mathcal{L}_{X^1} \Theta - (d\Theta)(X^1)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

¹³Aqui $E(X)$ não é uma contracção, senão mostra uma dependência de X de E .

se X é um operador de simetria e se usamos as equações de movimento, (2.2.9).

Em calcular o lado direito de (3.2.5) explicitamente, é conveniente decompor X^1 da seguinte maneira¹⁴:

$$\begin{aligned} X^1 &= \left(X^\mu(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu} + X^\mu \partial_\mu \phi^A \frac{\partial}{\partial \phi^A} + X^\mu \partial_\mu \phi_\lambda^A \frac{\partial}{\partial \phi_\lambda^A} \right) \\ &\quad + \left([X^A - X^\mu \partial_\mu \phi^A] \frac{\partial}{\partial \phi^A} + [X_\lambda^A - X^\mu \partial_\mu \phi_\lambda^A] \frac{\partial}{\partial \phi_\lambda^A} \right) \\ &\equiv (\bar{s}^1)_* X + v^1. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Normalmente, trabalhamos diretamente com $(FL)_* X^1$ (veja equação (2.2.11)) e, por um abuso de notação, escrevemos v^1 quando deve ser $(FL)_* v^1$. Assim, note que v^1 é *vertical*¹⁵: ele não contém uma componente em $\partial/\partial x^\mu$. Para uso futuro, podemos escrever a componente $\partial/\partial p_A^\lambda$ de v^1 da seguinte maneira:

$$v^1 = [X^A - X^\mu \partial_\mu \phi^A] \frac{\partial}{\partial \phi^A} + [X_A^\lambda - X^\mu \partial_\mu p_A^\lambda] \frac{\partial}{\partial p_A^\lambda},$$

onde X_A^λ é dado pela expressão (2.2.12). Inserindo esta expressão em X_A^λ , e escrevendo p_A^λ como $\partial L / \partial (\partial_\lambda \phi^A)$, podemos reescrever v^1 como

$$v^1 \equiv v^A \frac{\partial}{\partial \phi^A} + v_A^\lambda \frac{\partial}{\partial p_A^\lambda}, \quad (3.2.7)$$

onde

$$v^A \equiv X^A - X^\mu \partial_\mu \phi^A, \quad (3.2.8)$$

$$v_A^\lambda \equiv \frac{dv^B}{dx^\mu} \frac{\partial^2 L}{\partial (\partial_\mu \phi^B) \partial (\partial_\lambda \phi^A)}, \quad (3.2.9)$$

onde $d/dx^\mu \equiv \partial/\partial x^\mu + (\partial_\mu \phi^C) \partial/\partial \phi^C$ é uma derivada “exata” [30]:

$$\begin{aligned} dv^B/dx^\mu &= \partial_\mu v^B + (\partial v^B/\partial \phi^C) (\partial \phi^C/\partial x^\mu) \\ &= \partial_\mu X^B + \phi_\mu^C \partial X^B/\partial \phi^C - \partial_\mu (X^\nu \partial_\nu \phi^B) - \phi_\nu^B \phi_\mu^C \partial X^\nu/\partial \phi^C. \end{aligned}$$

No futuro, vai ser importante notar que a condição $v^A = 0$ automaticamente implica $v^1 = 0$ por (3.2.9).

No caso de um campo vetorial, por exemplo ϕ_μ^A em (2.2.13), a parte espacial de v teria a forma

$$v_{(\mu)}^A = -\phi_\nu^A (\partial_\mu X^\nu) - X^\nu \partial_\nu \phi_\mu^A = -\mathcal{L}_X \phi_\mu^A.$$

Note a aparência da derivada de Lie¹⁶.

¹⁴Note que $-\mathcal{L}_X \phi^A$ aparece no primeiro termo, e $-\mathcal{L}_X \phi_\lambda^A$ aparece no termo $X_\lambda^A - X^\mu \partial_\mu \phi_\lambda^A$ quando tomamos em conta a forma de X_λ^A , (2.2.7).

¹⁵O uso do “1” simplesmente significa que $v^1 \in J^1$ ou J^{1*} .

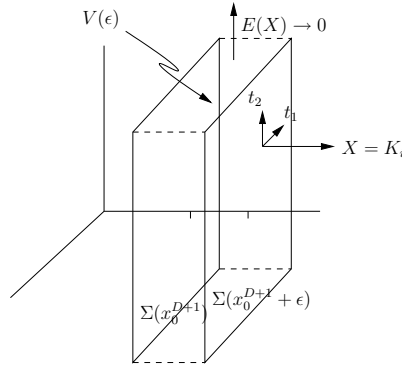
¹⁶É freqüentemente útil escrever a derivada de Lie em termos de derivadas covariantes, por exemplo $\mathcal{L}_X \phi_\mu^A = X^\lambda \nabla_\lambda \phi_\mu^A + \phi_\lambda^A \nabla_\mu X^\lambda$, quando a torção é zero.

Usando esta expansão de v^1 , vemos que o negativo da energia, (3.2.5) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
(\bar{s}^1)^* [\Theta(X^1)] &= (\bar{s}^1)^* [\Theta(\bar{s}_*^1 X + v^1)] \\
&= [(\bar{s}^1)^* \Theta] (X) + (\bar{s}^1)^* [\Theta(v^1)] \\
&= L\omega(X) + (\bar{s}^1)^* [p_A^\lambda v^A \omega(\partial_\lambda)] \\
&= \left(X^\lambda L + p_A^\lambda (X^A - X^\mu \partial_\mu \phi^A) \right) \omega(\partial_\lambda), \tag{3.2.10}
\end{aligned}$$

onde usamos as identidades (2.2.8) e (2.2.3). Esta expressão para a energia concorda com a expressão obtida em [27, (19.72)] onde os autores encontram a energia através de uma transformação de Legendre parcial (contrariamente ao caso da Hamiltoniana, que é uma transformação sobre todas as variáveis), e onde a expressão deve ser integrada sobre uma hipersuperfície Σ . Esta expressão gera $\theta(X, t)$, onde t é um produto $t_1 \wedge \dots \wedge t_{m-1}$ dos $m - 1$ vetores sobre a hipersuperfície Σ [27], e a forma para E gera equações de movimento parecidas ao caso Hamiltoniano [27, (19.14)].

Agora, temos uma quantidade, $-E$, cuja divergência é zero. Assim, podemos integrá-la sobre a hipersuperfície no espaço, Σ . Tomando um exemplo simples em $m = D + 1$ -dimensões onde Σ é determinado por $x^{D+1} = \text{constante}$,



e integrando sobre um volume $V(\epsilon)$ (onde Σ não é necessariamente transversal ao vetor X), nos daria

$$0 = \int_{V(\epsilon)} dE = \int_{\partial V(\epsilon)} E = \int_{\Sigma(x_0^{D+1} + \epsilon)} E - \int_{\Sigma(x_0^{D+1})} E,$$

com tal que $E \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \infty$ (ou se $\partial V(\epsilon) = 0$, embora não vamos tomar este caso em conta agora).

Normalmente, o vetor no qual estamos interessados terá uma aparência como, por exemplo, $X = d/dx^{D+1}$, e estaremos somente interessados nas superfícies Σ caracterizadas por $x^{D+1} = \text{constante}$. Neste caso, podemos verificar que a derivada da integral seja zero:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dx^{D+1}} \int_{\Sigma(x^{D+1})} E \Big|_{x_0^{D+1}} = \int_{\Sigma(x_0^{D+1})} \mathcal{L}_X E = E(X) \Big|_{\partial \Sigma} \\
&= -p_A^\lambda (X^A - X^\mu \partial_\mu \phi^A) \omega(\partial_\lambda, X) \Big|_{\partial \Sigma},
\end{aligned}$$

onde substituímos a forma explícita de E da equação (3.2.10). Em geral, isto não tem que ser necessariamente zero (a não ser que a variedade Σ seja uma variedade fechada). Por exemplo, no caso onde $X = d/dx^{D+1}$ (e $X^A = 0$), esta expressão torna-se $0 = p_A^\lambda (\partial_{D+1} \phi^A) (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^D) (\partial_\lambda)|_{\partial\Sigma}$. Se as equações de movimento forçarem $\partial_{D+1} \phi^A \rightarrow 0$ suficientemente rápido, é possível que esta expressão seja zero (o que é ligado à pergunta se $\int_{\Sigma(x^{D+1})} E$ é um número finito).

3.3 Redução e a Forma de Cartan

A aparência de $\Theta(X^1)$ na expressão da energia sugere que uma redução “espontânea” sobre mais do que uma simetria poderia ter uma forma parecida, embora devamos ter cuidado com as seções \bar{s}^1 .

Ansatz/Proposição A forma de Cartan de uma teoria reduzida sobre os vetores X_1, \dots, X_n pode assumir a forma

$$\Theta_{\text{red}} = \Theta(X_1^1, X_2^1, \dots, X_n^1), \quad (3.3.1)$$

quando $V(X_1, \dots, X_n) \neq 0$ (um grupo, por exemplo).

Como exemplo, podemos considerar uma redução de um espaço do tipo Minkowski com dimensão $m = D + 1$ (com coordenadas $x^\mu = (x^\alpha, x^{D+1})$) a um espaço com dimensão D , onde vamos a tomar o vetor de Killing $P_{D+1} = \frac{\partial}{\partial x^{D+1}}$. Segundo o nosso ansatz, a forma de Cartan para a teoria reduzida tomara a forma $\Theta(P_{D+1}^1)$. É óbvio que os outros vetores de Killing para o grupo de Poincaré em D dimensões, $P_\alpha, M_{\alpha\beta}$ vão continuar sendo simetrias da nova teoria já que, por exemplo $\mathcal{L}_{M_{\alpha\beta}} P_{D+1} = 0$ também é válido para as prolongações (2.1.5).

Da discussão acima, do teorema de Frobenius sabemos que, para uma variedade integral precisamos de (3.2.4). Por outro lado, para que sejam simetrias da nova teoria, precisamos de $\mathcal{L}_X P_{D+1} = 0$ onde $X \in \{P_\alpha, M_{\alpha\beta}\}$. Em termos de grupos, se os X pertencem a um grupo H (neste caso, o grupo de Poincaré de D dimensões) num grupo G (o grupo de Poincaré em $D + 1$ dimensões) então chegamos à seguinte conclusão:

Proposição Os vetores sobre que podemos fazer uma redução pertencem ao centralizador do grupo, $Z_G(H)$.

A pergunta sobre as possíveis extensões do grupo de Poincaré tem recebido bastante atenção, notadamente o trabalho de [45] (veja também [7, 46]). A análise deles mostrava que só pode-se estender o grupo de Poincaré (em quatro dimensões, pelo menos) pelo produto direto de um grupo semisimples com fatores de $U(1)$. Assim, estaremos interessados em investigar ou redução por um vetor de Killing $X = K$, ou redução pelos vetores de Killing K_1, \dots, K_n que geram grupos semisimples.

É interessante notar que esta condição para um vetor de Killing $X = K$ é equivalente ao formalismo da quebra $G \rightarrow G_S$ considerado em seção 1.3.1. Obviamente, neste caso o grupo $U(1)_Q$ em seção 1.3.1 aqui seria dado pelo grupo Abelian gerado por $K: U(1)_K$.

O problema é que temos que ver se podemos verificar que a forma de Cartan definida deste jeito ainda satisfaça $d(\bar{s}^1)^* \Theta_{\text{red}} = 0$ sobre as seções de $D + n$ dimensões, ou se aparecem condições que precisam-se impor para que isto seja verdade.

3.4 Redução Dimensional sobre um Espaço $1D$

Consideremos agora um espaço $m = D + 1$ -dimensional parametrizado por (x^α, x^{D+1}) , e vamos considerar uma métrica definida sobre o espaço total de $D + 1$ dimensões que tem um vetor de Killing $X = \partial_{D+1}$. Podemos ver se faz sentido definir a ação que resulta de uma redução dimensional, S_D da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} S_D &= - \int_{\Sigma(x^{D+1})} E = \int_{\Sigma(x^{D+1})} L\omega(X) + (\bar{s}^1)^* [\Theta(v^1)] \\ &= \int_{\Sigma(x^{D+1})} \left(L(x^\mu, \phi^A(x), \phi_\mu^A(x)) - p_A^{D+1} \partial_{D+1} \phi^A \right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^D, \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

onde usamos equação (3.2.10) e definimos $\Sigma(x^{D+1})$ por $x^{D+1} = \text{constante}$, e onde dx^{D+1} não aparece. Obviamente, isto é exatamente a definição de uma redução do tipo Legendre se incluímos as equações de movimento em $D + 1$ dimensões.

Podemos também considerar o caso onde incluímos um gerador $X^A \frac{\partial}{\partial \phi^A}$ de simetrias quando fazemos a redução dimensional onde $v^1 \neq 0$. Por exemplo, há uma simetria global adicional, $\phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha} \phi$, $\phi^* \rightarrow \phi'^* = e^{-i\alpha} \phi^*$ na Lagrangiana de (3.1.1). Se tomamos o vetor total de simetrias sobre que queremos fazer a redução como $X = \frac{\partial}{\partial x^4} + i\alpha \phi \frac{\partial}{\partial \phi} - i\alpha \phi^* \frac{\partial}{\partial \phi^*}$, então o resultado da redução dimensional em (3.1.2) terá um termo adicional: $L'_4 = L_4 + i\alpha(\phi^* G - \phi G^*)$, que segue invariante quando aplicam-se as equações de movimento em $5D$, (3.1.3).

É evidente que a redução dimensional poderia reproduzir uma redução dimensional do tipo Kaluza-Klein se o segundo termo na primeira linha acima não aparecesse, ou seja quando

$$v^1 = 0. \quad (3.4.2)$$

Lembrando-nos de equação (3.2.7), isto acontece quando¹⁷ $v^A = 0$.

Para o gerador de simetria $X = \frac{\partial}{\partial x^{D+1}}$ (onde $X^A = 0$), isto diz que

$$v^A = 0 \Rightarrow -\partial_{D+1} \phi^A = 0.$$

Ou seja, o caso $v^1 = 0$ onde $X^A = 0$ e onde X^μ não depende de ϕ^A resulta em redução dimensional do tipo Kaluza-Klein onde $\partial_{D+1} \phi^A = 0$. No caso um pouco mais geral, onde tem uma simetria global incluída, por exemplo $X = \frac{\partial}{\partial x^{D+1}} + \alpha \phi^A \frac{\partial}{\partial \phi^A}$, onde $\alpha = \text{constante}$, teríamos

$$v^A = 0 = \alpha \phi^A - \partial_{D+1} \phi^A.$$

Este vínculo pode ser satisfeito se assumimos que ϕ^A tenha a seguinte forma: $\phi^A(x^\mu) = e^{\alpha x^{D+1}} \phi^A(x^\alpha)$.

Vemos de $v^A = 0$ que há uma espécie de compensação do espaço “externo” (com coordenada x^{D+1}) e um grupo “interno”. No caso de redução dimensional comum, este espaço externo normalmente seria dado por um círculo, S^1 , assim que faz sentido introduzir uma simetria externa global de $U(1)$. Isto faz-se por considerar ϕ como campo imaginário, onde o gerador de simetria X é dado pela expressão $X = \frac{\partial}{\partial x^{D+1}} + i\alpha \phi \frac{\partial}{\partial \phi} - i\alpha \phi^* \frac{\partial}{\partial \phi^*}$ e onde $\phi(x) = e^{i\alpha x^{D+1}} \phi(x^\alpha)$

¹⁷Note que a condição $v^A = 0$ também pode ser escrita como $(d\phi^A - \phi_\lambda^A dx^\lambda)(X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + X^A \frac{\partial}{\partial \phi^A})$.

e $\phi^*(x) = e^{-i\alpha x^{D+1}} \phi^*(x^\alpha)$. Assim recuperamos o caso de redução dimensional do tipo Scherk-Schwarz¹⁸.

3.4.1 Soluções de $v^A = 0$

No caso onde v^A tem a forma de (3.2.8), é bastante fácil achar uma solução explícita. Neste caso, o vínculo $v_i^A = X_i^A(\phi) - X_i^\mu \phi_\mu^A = 0$ pode ser satisfeito da seguinte forma:

$$\phi_\mu^A = \phi'_\mu{}^A + \tilde{X}_{i\mu}(X_i^A(\phi) - X_i^\nu \phi'_\nu{}^A), \quad (3.4.3)$$

onde $\phi'_\mu{}^A$ é uma função qualquer, e onde $X_i^\mu \tilde{X}_{i\mu} \equiv 1$. (Na verdade, pode-se acrescentar um termo $t_\mu C^A$ onde $X_i^\mu t_\mu \equiv 0$, mas vamos tomar $t_\mu = 0$ aqui). De certo modo, podemos ver isto como um mapeamento, τ_i dependendo tanto de X_i^μ , X_i^A quanto de $\tilde{X}_{i\mu}$:

$$\tau_i : \phi'_\mu{}^A \mapsto \phi_\mu^A = \phi'_\mu{}^A + \tilde{X}_{i\mu}(X_i^A - X_i^\nu \phi'_\nu{}^A).$$

No caso onde tem vários vetores X_i sobre que queremos requerer que $v_i^A = 0$, não queremos que a ordem seja importante: $\tau_i \circ \tau_j = \tau_j \circ \tau_i$. Então, de

$$(\tau_i \circ \tau_j - \tau_j \circ \tau_i) \phi'_\mu{}^A = -(X_i^\nu \tilde{X}_{j\nu})(X_j^A - X_j^\rho \phi'_\rho{}^A) \tilde{X}_{i\mu} + (i \leftrightarrow j),$$

vai ser útil definir \tilde{X}_i em termos de formas duais, e_i que satisfazem $e_{i\mu} X_j^\mu = \delta_{ij}$ de tal forma que os mapas se comutem entre si:

$$\tilde{X}_{i\mu} = e_{i\mu}.$$

3.5 Redução sobre Espaços com Dimensão 2

Em fazer a redução de duas dimensões, acha-se um obstáculo impedindo que mais do que um v^1 não seja igual a zero. Este obstáculo permanece para reduções sobre mais do que duas dimensões.

Dada: uma teoria em $m = D + 2$ dimensões onde o espaço adicional tem coordenadas (x^{D+1}, x^{D+2}) com dois vetores de Killing $X_1 = \frac{\partial}{\partial x^{D+1}}$ e $X_2 = \frac{\partial}{\partial x^{D+2}}$.

Vamos tomar o seguinte ansatz: a forma correspondendo à condição de redução por uma dimensão, $0 = -dE = d(\bar{s}^1)^*[\Theta(X^1)]$, para duas dimensões deve ser

$$0 = d(\bar{s}^1)^* [\Theta(X_1^1, X_2^1)]. \quad (3.5.1)$$

Onde o uso de \bar{s}^1 garante que vamos poder utilizar as equações de movimento de $D + 2$ dimensões. Assim, a redução da teoria em $D + 2$ dimensões a D dimensões teria a forma:

$$S_D = \int_{\Sigma(x^{D+1}, x^{D+2})} (\bar{s}^1)^* [\Theta(X_1^1, X_2^1)], \quad (3.5.2)$$

onde $\Sigma(x^{D+1}, x^{D+2})$ é uma superfície de dimensão D sobre que x^{D+1} e x^{D+2} são constantes. Desta forma, os momentos relacionados com tanto X_1 e X_2 vão aparecer, dando-nos outro motivo para esta escolha.

¹⁸Variando este método um pouco, podemos considerar uma simetria local $\phi(x) = e^{i\alpha(x^{D+1})} \tilde{\phi}(x^\alpha)$, que satisfaz $\partial_{D+1}\phi - i\alpha'(x^{D+1})\phi = 0$. Assim, podemos exigir uma simetria “interna” da forma $\phi \rightarrow \phi' = \phi + \epsilon i\alpha'(x^{D+1})\phi \frac{\partial}{\partial \phi}$.

Para ver se é possível satisfazer o nosso ansatz, expandimos $d [\Theta(X_1^1, X_2^1)]$ como

$$(d\Theta)(X_1^1, X_2^1) - (\mathcal{L}_{X_1^1}\Theta)(X_2^1) + (\mathcal{L}_{X_2^1}\Theta)(X_1^1) + \Theta(\mathcal{L}_{X_2^1}X_1^1).$$

Já que os vetores X_1 e X_2 são simetrias da teoria, $\mathcal{L}_{X_{1,2}^1}\Theta = 0$, o ansatz toma a seguinte forma:

$$0 = (\bar{s}^1)^* \left[(d\Theta)(X_1^1, X_2^1) + \Theta(\mathcal{L}_{X_2^1}X_1^1) \right],$$

onde podemos decompor X_1^1 e X_2^1 seguindo (3.2.6). Os termos da forma $(\bar{s}^1)^*[(d\Theta)(X^1)]$ que aparecem são zero pelas equações de movimento, (2.2.9), e os termos da forma $(\bar{s}^1)^*d\Theta$ são zero pela equação (2.2.10). Os únicos termos que ficam são

$$\begin{aligned} 0 &= (\bar{s}^1)^* \left[(d\Theta)(v_1^1, v_2^1) + \Theta(\mathcal{L}_{X_2^1}X_1^1) \right] \\ &= \left(v_1^\lambda v_2^A - v_2^\lambda v_1^A \right) \omega(\partial_\lambda) + (\bar{s}^1)^* \left[\Theta(\mathcal{L}_{X_2^1}X_1^1) \right], \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

onde a forma de $d\Theta$ aparece em equação (2.2.10). Então, embora seja possível nos livrar do segundo termo no caso onde X_1, X_2 comutam (e, assim, $[X_1^1, X_2^1] = 0$ de equação (2.1.5)), o primeiro termo fica sendo um problema. Infelizmente, além de requerer que um $v^1 = 0$, as outras possibilidades, como $\beta v_1^1 = \alpha v_2^1$, $v_i^A = (\text{const})$, ou onde o primeiro termo em (3.5.3) é uma divergência total, etc. ou parecem dar resultados já conhecidos ou resultados triviais¹⁹. O caso onde escolhemos $v^1 = v^2 = 0$, que nos dá um toro em duas dimensões é considerado em [7].

Esta condição permanece para reduções sobre espaços de dimensões maiores. O resultado então fica:

Proposição Uma redução dimensional de $D+n$ dimensões a D dimensões, onde as equações de movimento de $D+n$ dimensões são satisfeitas, é possível no caso onde todos os $v_i^1 = 0$ ($i = 1, \dots, n$), ou no caso onde todos os $v_i^1 = 0$ menos um ($i = 2, \dots, n$).

3.5.1 A Solução $v_A^\lambda = 0$

Nesta seção vamos discutir soluções não triviais caracterizadas pelas soluções dadas em, por exemplo, seção 3.1.3. A maior diferença entre as soluções deste tipo e as soluções da seção anterior é que as novas soluções respeitam equações de movimento *vinculadas* das dimensões altas, assim que apresentam soluções menos flexíveis que as soluções consideradas na seção anterior. Sendo assim, não vamos dar tanta ênfase nestas soluções.

Começamos por notar que, na verdade, a equação (3.5.1) é restritiva demais, e para que (3.5.2) seja invariante sobre X_1 , é suficiente mostrar que

$$0 = [(\bar{s}^1)^* d [\Theta (X_1^1, X_2^1)]] (X_1). \quad (3.5.4)$$

¹⁹Como exemplo de v 's proporcionais, podemos considerar um campo ϕ num espaço $m = D+2$ -dimensional com coordenadas $(x^\alpha, x^{D+1}, x^{D+2})$, onde queremos fazer uma redução sobre ∂_{D+1} e ∂_{D+2} ($\mathcal{L}_{\partial_{D+1}}\partial_{D+2} = 0$). A condição $\beta v_1 = \alpha v_2$ torna-se $\beta\partial_{D+1}\phi = \alpha\partial_{D+2}\phi$. Mas, definindo $u \equiv \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}(\alpha x^{D+1} + \beta x^{D+2})$ e $w \equiv \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}(-\beta x^{D+1} + \alpha x^{D+2})$ (para que $du \wedge dw = dx^{D+1} \wedge dx^{D+2}$), esta condição simplesmente torna-se $\partial_w\phi = 0$, que não tem soluções mais interessantes das soluções que já temos. Pode-se também tomar $\alpha(x^\alpha)$ e $\beta(x^\alpha)$ dependendo das coordenadas x^α , mas estas soluções são do mesmo gênero.

Como mostramos em equação (3.5.3), o termo nos colchetes dá zero quando $v_1^A = v_2^A = 0$. Mas agora, vemos que a expressão inteira pode ter outras soluções além desta, que nos vão permitir explicar os resultados que obtivemos em seção 3.1.3.

Então, vamos revisitare o modelo de seção 3.1.3, denotando $X_1 = \partial_4$, $X_2 = \partial_5$, e reescrevendo $\hat{\mu}$ simplesmente como μ . Note que $\mathcal{L}_{\partial_4}\partial_5 = 0$ como na seção anterior. Então, $v_1^\phi = -\partial_4\phi = \partial^4\phi$ e $v_2^\phi = -\partial_5\phi = \partial^5\phi$. Em geral, vamos fazer a seguinte definição:

$$G^A \equiv v_1^A \quad H^A \equiv v_2^A, \quad (3.5.5)$$

e vamos considerar G^A e H^A como campos independentes. Assim que, neste caso, $G \equiv \partial^4\phi$ e $H \equiv \partial^5\phi$. Note que definimos os campos adicionais como os v 's e não os momentos.

Começamos por considerar invariância sobre o vetor X_1 . A condição (3.5.4) agora fica:

$$0 = (v_{1A}^\lambda v_2^A - v_{2A}^\lambda v_1^A)\omega(\partial_\lambda, \partial_4).$$

Obviamente, esta expressão é automaticamente zero quando²⁰ $\lambda = 4$. A pergunta fica: podemos exigir que a expressão seja zero quando $\lambda \neq 4$ por requerer que $v_{1A}^\lambda = 0$, $v_{2A}^\lambda = 0$?

É fácil ver que as derivadas dos campos G e H aparecem nas quantidades $v_{\phi^*}^\lambda$:

$$v_{1\phi^*}^\lambda = -\partial_4 p_{\phi^*}^\lambda = -\partial_4 \partial^\lambda \phi = \partial^\lambda G \quad \text{e} \quad v_{2\phi^*}^\lambda = \partial^\lambda H.$$

Então, simplesmente vamos requerer que

$$\partial^\lambda G = \partial^\lambda H = 0 \quad \lambda = 0, \dots, 3, 5.$$

Mas o vínculo $\partial^5 G = 0$ também implica um vínculo sobre H :

$$\partial^5 G = \partial^5(\partial^4 \phi) = \partial^4(\partial^5 \phi) = \partial^4 H = 0.$$

Então, a ação é invariante sobre X_1 se respeitamos as equações de movimento com estes vínculos:

$$[\text{eq.mov.}]_{\partial^{(0\dots 3,5)}(G,H), \partial^4 H=0}.$$

Obviamente, no caso onde consideramos invariância sobre $X_2 = \partial_5$, esta expressão torna-se $[\text{eq.mov.}]_{\partial^{(0\dots 4)}(G,H), \partial^5 G=0}$.

3.6 Gravitação e a Condição $v = 0$

Agora queremos mostrar que a condição $v = 0$ concorda com uma redução dimensional do tipo Kaluza-Klein quando considera-se gravitação. Obviamente, no caso de uma teoria onde há uma métrica dinâmica, não há vetores de Killing sobre que possamos fazer a redução. Não obstante, podemos considerar o vácuo da teoria, e da condição $v = 0$ podemos deduzir a condição que é necessária para podermos fazer uma redução.

No caso de gravitação sem torção²¹, a condição de $v = 0$ torna-se

²⁰Em geral, a condição que queremos satisfazer é $\omega(v_A^\lambda \partial_\lambda, X) = 0$. Obviamente, uma solução disto é que v_A^λ é proporcional a X^λ . Por exemplo, poderíamos tomar a seguinte solução particular: $v_A^\lambda = (\tilde{X}_\mu v'^\mu_A) X^\lambda$. No caso onde $X_1 = \partial_4$, isto implicaria que $v_{\phi, \phi^*}^{0, \dots, 3, 5} = 0$ e $v_{\phi, \phi^*}^4 = v'_{\phi, \phi^*}{}^4$. Tais soluções podemos também reproduzir em termos dos momentos, já que $v_A^\lambda = X_A^\lambda - X^\mu \partial_\mu p_A^\lambda$: $\partial_\mu p_A^\lambda = \tilde{X}_\mu [X_A^\lambda - \tilde{X}_\rho (X_A^\rho - X^\sigma \partial_\sigma p'^\rho_A) X^\lambda]$.

²¹Os autores de [27] não consideram torção porque não existe um referencial onde a conexão seja zero.

$$v = -\mathcal{L}_X \Gamma^\kappa_{\mu\nu}. \quad (3.6.1)$$

Esta condição diz que a conexão, $\Gamma^\kappa_{\mu\nu}$ é invariante sobre o vetor X . No caso onde há várias simetrias de um grupo G , as condições $v = 0$ dizem que a conexão é G -invariante.

Vemos de equação (A.2.4) que um vetor de Killing, X satisfazendo $\mathcal{L}_X g_{\mu\nu} = 0$ também satisfaz a condição $v = 0$. Então, dado um conjunto de vetores, um vácuo $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$ satisfazendo $v = 0$ é a métrica onde esses vetores são vetores de Killing. Vácuos satisfazendo esta condição (vácuos homogêneos) consideram-se em [47], onde da forma do vácuo é bastante fácil derivar o ansatz de Kaluza-Klein [47, 48]. Não obstante, este vácuo é somente uma solução. Isto é provavelmente desejado, por exemplo para podermos acomodar a teoria sobre K3 em [48].

3.7 Conclusões

Desenvolvemos uma maneira clássica para analisar os possíveis tipos de redução dimensional que inclui redução dimensional do tipo Legendre, pouco estudada na literatura. Vimos como é possível considerar redução dimensional como uma redução sobre um vetor de Killing da métrica original. Mostramos que as maneiras convencionais de fazer redução, Kaluza-Klein e Scherk-Schwarz, correspondem à condição $v = 0$, enquanto uma redução do tipo Legendre corresponde à condição $v \neq 0$. Embora fique a a pergunta sobre o que acontece no caso supersimétrico, no caso de uma redução sobre duas (ou mais) dimensões, mostramos ser possível estender a definição de redução dimensional de Legendre quando os vetores de Killing são associados a fatores Abelianos na álgebra (e, no nosso caso simples, associados a álgebras de Kac-Moody), mesmo quando o grupo de isometrias da variedade não seja Poincaré.

No capítulo seguinte, vamos tentar estender estes resultados a variedades internas de grupos e cosets.

4 Redução Dimensional Sobre Grupos e Cosets

Neste capítulo pretendemos generalizar os resultados do capítulo anterior aos casos de variedades internas de grupos ou cosets. Brevemente definimos quais vetores de Killing vamos usar, e logo mostramos como se vê a forma canônica de Cartan no caso de uma variedade interna correspondo a um grupo G , e mostramos como não é possível fazer uma redução de Legendre sobre uma variedade interna deste tipo. Na seguinte seção, consideramos o caso de uma variedade interna do tipo coset G/H . Começamos por tomar um caso simples, o coset $SO(3)/SO(2)$ ou S^2 , e mostramos como as mesmas barreiras à redução de Legendre surgem neste caso também. Após termos derivado umas identidades gerais, terminamos por propor a forma de Cartan reduzida para cosets do tipo SO ou SU (e, implicitamente, outros cosets também).

4.1 Simetrias Adicionais e Vetores de Killing

Para um grupo, em geral, o fato de que uma métrica de um grupo é biinvariante já indica que tem (pelo menos) dois conjuntos de vetores de Killing que comutam entre si: os do lado direito e do lado esquerdo [49]. Desta forma, os grupos de isometria do lado esquerdo e do lado direito são (pelo menos) $G \times G$. Para os nossos fins, vamos escolher os vetores do lado direito para gerar o grupo sob consideração.

O caso de um coset G/H é um pouco diferente [49, 50], pois a métrica não é mais biinvariante. Podemos escolher os geradores da ação esquerda, como anteriormente, sobre que a métrica é invariante. O grupo de isometria direita, não obstante, é o grupo $K = N_G(H)|H$, onde $N_G(H)$ é o normalizador do grupo H em G . Esta vez, as isometrias do espaço são (pelo menos) $G \times K$. Estas isometrias têm que ser modificadas em dois casos: nos casos onde um vetor gerando a ação esquerda coincide com um vetor gerando a ação direita (que coincidem com fatores $U(1)$ no grupo G); e nos casos onde G/H pode ser descrito por mais do que uma maneira, por exemplo S^7 : $SO(5)/SO(3) \approx SU(4)/SU(3) \approx SO(7)/G_2 \approx SO(8)/SO(7)$. O grupo K surge naturalmente como o grupo de gauge quando considera-se gravitação [49].

Em fazer uma redução dimensional sobre um grupo ou um coset, é conveniente escolher então os geradores da ação esquerda.

4.2 Redução Dimensional Sobre Variedades de Grupos

Vamos considerar um grupo externo com vetores de Killing X_i . Podemos considerar, como anteriormente, simetrias internas sob as quais queremos reduzir, para que os vetores de simetria se tornem $X_i^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + X_i^A \frac{\partial}{\partial \phi^A}$. Por exemplo, um grupo interno

$$\delta\phi^A = \varepsilon^i X_i^B \frac{\partial}{\partial \phi^B} \phi^A = \varepsilon^i (-T_i\phi)^B \frac{\partial}{\partial \phi^B} \phi^A,$$

com as mesmas coeficientes de Lie satisfaria as nossas condições, já que

$$[-T_i^A{}_B \phi^B \frac{\partial}{\partial \phi^A}, -T_j^C{}_D \phi^D \frac{\partial}{\partial \phi^C}] = -[T_i, T_j]^C{}_B \phi^B \frac{\partial}{\partial \phi^C}.$$

Nesta seção, vamos nos servir da seguinte notação:

$$\Theta(\widehat{X}_p^1) = \Theta(X_1^1, \dots, X_{p-1}^1, X_{p+1}^1, \dots, X_n^1).$$

Para os geradores de simetria, os X_p^1 devem satisfazer

$$\mathcal{L}_{X_p^1} \Theta = 0,$$

e, como os vetores de Killing formam um grupo, eles devem também satisfazer

$$\mathcal{L}_{X_p^1} X_q^1 = C_{p,q}{}^r X_r^1.$$

Como no caso anterior, vamos supor que a forma de Cartan reduzida assuma a forma de (3.3.1), onde requeremos que

$$d(\bar{s}^1)^* \Theta(X_1^1, X_2^1, \dots, X_n^1) = 0, \quad (4.2.1)$$

e a nossa pergunta é: quais condições temos que exigir para que equação (4.2.1) seja satisfeita?

Começamos impor esta condição por explicitar $d[\Theta(X_1^1, X_2^1, \dots, X_n^1)]$ como:

$$\begin{aligned} d[\Theta(X_1^1, X_2^1, \dots, X_n^1)] &= \sum_{p=n}^1 (-1)^{p-n} \mathcal{L}_{X_p^1} \Theta(\widehat{X}_p^1) \\ &\quad + (-1)^n (d\Theta)(X_1^1, \dots, X_n^1); \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

as derivadas de Lie que aparecem no primeiro termo são dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{X_p^1} \Theta(\widehat{X}_p) &= \Theta(C_{p,1}{}^1 X_1^1, \dots, \widehat{X}_p^1, \dots) + \Theta(C_{p,1}{}^p X_p^1, \dots, \widehat{X}_p^1, \dots) + \dots \\ &= \sum_{q=1}^n C_{p,q}{}^q \Theta(\widehat{X}_p^1) + C_{p,q}{}^p (-1)^{p-q-1} \Theta(\widehat{X}_q^1), \end{aligned}$$

e podemos substituí-las em (4.2.2).

Assim o vínculo (4.2.1), multiplicado pelo fator comum $(-1)^n$ torna-se

$$\begin{aligned} 0 = (-1)^n (\bar{s}^1)^* d[\Theta(X_1^1, X_2^1, \dots, X_n^1)] &= (\bar{s}^1)^* \left[(d\Theta)(X_1^1, \dots, X_n^1) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{p=1}^n 2(-1)^p \Theta(\widehat{X}_p) \sum_{q=1}^n C_{p,q}{}^q \right]. \end{aligned}$$

Evidentemente, se impomos a seguinte condição:

$$\sum_{q=1}^n C_{p,q}{}^q = \text{Tr}[\text{ad}(T_p)] = 0, \quad (4.2.3)$$

onde introduzimos a representação adjunta, podemos simplificar a condição original, (4.2.1). Esta condição, que aparece em [38] é uma condição satisfeita para todas as álgebras de Lie semi-simples e para muitas álgebras além destas, mas exclui várias possibilidades exóticas. Grupos satisfazendo esta condição chamam-se grupos unimodulares [49]. Deste momento para a frente, vamos assumir que o grupo sob consideração seja unimodular.

Utilizando a nossa regra de decomposição (3.2.6) para os X_i^1 , a condição (4.2.3) torna-se

$$0 = (\bar{s}^1)^* [(d\Theta)(\bar{s}_*^1 X_1 + v_1^1, \dots, \bar{s}_*^1 X_n + v_n^1)]. \quad (4.2.4)$$

Expandindo esta expressão mostra que vários termos são identicamente zero. Por exemplo, um termo que tem a forma

$$\begin{aligned} (\bar{s}^1)^* [(d\Theta)(\bar{s}_*^1 X_1, \dots, \bar{s}_*^1 X_n)] &= [(\bar{s}^1)^*(d\Theta)](X_1, \dots, X_n) \\ &= 0, \end{aligned}$$

é zero pela equação (2.2.10). Do mesmo modo, qualquer termo com exatamente um v^1 é zero pelas equações de movimento:

$$\begin{aligned} (\bar{s}^1)^* [(d\Theta)(v_1^1, \bar{s}_*^1 X_2, \dots, \bar{s}_*^1 X_n)] &= (\bar{s}^1)^* [d\Theta(v_1^1)](X_2, \dots, X_n) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Da forma de $d\Theta$, (2.2.10), e visto que não aparecem termos $\partial/\partial x^\mu$ nos v_i^1 , vemos que qualquer termo com três ou mais v^1 deve ser exatamente zero também.

Não obstante, todos os termos da forma

$$\begin{aligned} &(\bar{s}^1)^* [(d\Theta)(\bar{s}_*^1 X_1, \dots, \bar{s}_*^1 X_{i-1}, v_i^1, \bar{s}_*^1 X_{i+1}, \dots, \bar{s}_*^1 X_{j-1}, v_j^1, \bar{s}_*^1 X_{j+1}, \dots)] \\ &= (-1)^{i+j+1} ((\bar{s}^1)^* [(d\Theta)(v_i^1, v_j^1)]) (\widehat{X}_i, \widehat{X}_j), \end{aligned}$$

com exatamente dois v^1 's permanecem, exatamente como no caso anterior.

Resumindo, podemos satisfazer a condição (4.2.1) se exigimos que

1. O grupo seja unimodular.
2. Todos os $v^1 = 0$, com a possibilidade eventual de um $v^1 \neq 0$ (mas veja abaixo).

Se estas condições são satisfeitas, podemos deduzir a “energia”, que toma a seguinte forma:

$$\int (\bar{s}^1)^* [\Theta(X_1^1, \dots, X_n^1)] = \int (\bar{s}^1)^* [\Theta(\bar{s}_*^1 X_1 + v_1^1, \dots, \bar{s}_*^1 X_n + v_n^1)]. \quad (4.2.5)$$

Dizemos “eventual” acima pela seguinte razão: não é possível definir todos os v^A zero menos um: se, por exemplo (no caso sem X^A) $X_i^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \phi^A = 0$ para $i = 1, \dots, n-1$ isto já implica que $X_n^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \phi^A = 0$ pelas mesmas identidades de Lie.

Este último resultado é interessante (embora um pouco decepcionante): aparentemente não é possível fazer reduções do tipo Legendre sobre variedades de grupos, senão somente sobre variedades que correspondem com os fatores Abelianos no centro do grupo de Poincaré. Mesmo assim, falta verificar o mesmo para espaços coset.

4.3 Redução Sobre Espaços Coset

O nosso propósito nesta seção é considerar um espaço coset representativo (S^2) e achar a forma de Cartan que corresponde com uma redução dimensional sobre ele. Vamos ver que o mesmo mecanismo aparece como no caso anterior: um possível $v^A \neq 0$ é proibido pelas identidades de Lie do grupo G .

4.3.1 Os Vetores de Killing de S^2

Vamos tomar um elemento g no espaço de $SO(3)$ da seguinte forma: $g(\theta, \phi, \chi) = e^{\phi T_2} e^{\theta T_1} e^{\chi T_3}$, onde T_1, T_2 e T_3 satisfazem a álgebra de $SO(3)$. Os vetores invariantes do lado esquerdo, D_A , simplesmente são duais às um-formas invariantes $\sigma = g^{-1}dg = \sigma^i T_i$. De um cálculo explícito, acha-se que estes são dados por

$$\begin{aligned}\sigma^1 &= \cos \chi d\theta + \cos \theta \sin \chi d\phi, \\ \sigma^2 &= -\sin \chi d\theta + \cos \theta \cos \chi d\phi, \\ \sigma^3 &= -\sin \theta d\phi + d\chi,\end{aligned}$$

e satisfazem as equações de Maurer-Cartan $d\sigma^A + \frac{1}{2}C^A_{BC}\sigma^B \wedge \sigma^C = 0$. Os vetores duais, D_A , são

$$\begin{aligned}D_1 &= \cos \chi \partial_\theta + \frac{\sin \chi}{\cos \theta} \partial_\phi + \tan \theta \sin \chi \partial_\chi, \\ D_2 &= -\sin \chi \partial_\theta + \frac{\cos \chi}{\cos \theta} \partial_\phi + \tan \theta \cos \chi \partial_\chi, \\ D_3 &= \partial_\chi.\end{aligned}$$

Os vetores invariantes do lado direito, Q_A , são os duais das um-formas $dg g^{-1}$, e são dados por

$$\begin{aligned}Q_1 &= \cos \phi \partial_\theta + \tan \theta \sin \phi \partial_\phi + \frac{\sin \phi}{\cos \theta} \partial_\chi, \\ Q_2 &= \partial_\phi, \\ Q_3 &= -\sin \phi \partial_\theta + \tan \theta \cos \phi \partial_\phi + \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \partial_\chi.\end{aligned}$$

Neste espaço, podemos usar a representação adjunta para definir uma métrica. Esta métrica é dada pela expressão $\sigma^1 \otimes \sigma^1 + \sigma^2 \otimes \sigma^2 + \sigma^3 \otimes \sigma^3$, ou simplesmente $\eta_{AB} dx^A \otimes dx^B$ com $\eta_{AB} = \text{diag}(1, 1, 1)$ e $x = \{\theta, \phi, \chi\}$. Da construção, sabe-se que $\mathcal{L}_{Q_A} \eta = 0$. Mas, pode-se mostrar que $\mathcal{L}_{D_A} \eta = 0$ também, pois a métrica é biinvariante.

Vamos escolher uma seção onde χ é uma constante, $\pi : (\theta, \phi, \chi) \rightarrow (\theta, \phi, 0)$. Assim, $e^1 = \sigma^1|_{\chi=0}$, etc. e calculamos $e^1 = d\theta$, $e^2 = \cos \theta d\phi$ e $e^3 = -\sin \theta d\phi$ onde e^1 e e^2 formam um “covariant frame” em G/H e onde e^3 é a H -conexão. A projeção $\pi_* Q_A \equiv K_A$ dá

$$\begin{aligned}K_1 &= \cos \phi \partial_\theta + \tan \theta \sin \phi \partial_\phi, \\ K_2 &= \partial_\phi, \\ K_3 &= -\sin \theta \partial_\theta + \tan \theta \cos \phi \partial_\phi,\end{aligned}\tag{4.3.1}$$

e estes satisfazem as identidades de Lie de $SO(3)$.

Os três vetores de Killing definidos sobre uma superfície de somente duas dimensões devem satisfazer uma relação linear. Começamos por fazer a seguinte observação: de $dx^\sigma \wedge \omega = 0$, pode-se deduzir que

$$\begin{aligned}0 &= (dx^\sigma \wedge \omega)(\partial_\mu, \partial_\nu) \\ &= \delta_\mu^\sigma \omega(\partial_\nu) - \delta_\nu^\sigma \omega(\partial_\mu) + dx^\sigma \wedge \omega(\partial_\mu, \partial_\nu).\end{aligned}$$

Multiplicando isto por $\times K_a^\mu K_b^\nu$ e tomando o produto interno $K_c \lrcorner$, e multiplicando o resultado por $\times \partial_\sigma$ nos dá

$$0 = \omega(K_a, K_b)K_c + \omega(K_b, K_c)K_a + \omega(K_c, K_a)K_b, \quad (4.3.2)$$

o que vale no nosso caso particular onde $K_a = K_1$, $K_b = K_2$ e $K_c = K_3$. Na verdade, esta equação vale também quando, por exemplo, $K_a = p$, $K_b = K_2$ e $K_c = K_3$:

$$0 = \omega(p, K_2)K_3 + \omega(K_2, K_3)p + \omega(K_3, p)K_2, \quad (4.3.3)$$

para um vetor p qualquer.

Assim, tomando (eq. 4.3.3) também temos a seguinte relação:

$$0 = \omega(p, K_2)\omega(K_3) - \omega(p, K_3)\omega(K_2) + \omega(K_2, K_3)\omega(p). \quad (4.3.4)$$

4.3.2 O Caso $S^2 = SO(3)/SO(2)$

Este coset tem como os vetores de Killing os três vetores em (4.3.1) que satisfazem a álgebra de Lie de $SO(3)$. Mas observa-se também que o ansatz para a forma de Cartan reduzida para grupos, equação (3.3.1), não serviria neste caso simplesmente porque o produto interno de três vetores de Killing com um espaço com apenas duas dimensões, S^2 , daria exatamente zero.

A forma das identidades (4.3.2) e (4.3.3) é a inspiração do nosso ansatz para a forma de Cartan:

$$\Theta(X_1^1, X_2^1)V_{S^2}(X_1, X_2) + \Theta(X_1^1, X_3^1)V_{S^2}(X_1, X_3) + \Theta(X_2^1, X_3^1)V_{S^2}(X_2, X_3). \quad (4.3.5)$$

onde vamos escrever a parte da métrica correspondendo ao espaço S^2 , V_{S^2} , simplesmente como V do espaço inteiro nesta seção, onde não deveria haver confusão. E, como nos casos anteriores, queremos ver sob quais condições $(\bar{s}^1)^*d$ (eq. 4.3.5) = 0.

Tomando $(\bar{s}^1)^*d$ de equação (4.3.5) temos

$$\begin{aligned} & (\bar{s}^1)^*d \left[\Theta(X_1^1, X_2^1)V(X_1, X_2) + (1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3) + (1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3) \right] \\ = & (\bar{s}^1)^* \left[V(X_1, X_2) \left((d\Theta)(X_1^1, X_2^1) - (\mathcal{L}_{X_1^1}\Theta)(X_2^1) + (\mathcal{L}_{X_2^1}\Theta)(X_1^1) + \Theta(\mathcal{L}_{X_2^1}X_1^1) \right) \right. \\ & + \Theta(X_1^1, X_2^1) \wedge ((dV)(X_1, X_2) - (\mathcal{L}_{X_1}V)(X_2) + (\mathcal{L}_{X_2}V)(X_1) + V(\mathcal{L}_{X_2}X_1)) \\ & \left. + (1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3) + (1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3) \right] \\ = & (\bar{s}^1)^* \left[V(X_1, X_2) \left((d\Theta)(X_1^1, X_2^1) + \Theta(\mathcal{L}_{X_2^1}X_1^1) \right) \right. \\ & \left. + \Theta(X_1^1, X_2^1) \wedge (V(\mathcal{L}_{X_2}X_1)) + (1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3) + (1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3) \right]. \end{aligned}$$

onde, na última expressão, usamos o fato que os vetores X_i são geradores de simetria ($\mathcal{L}_{X_i^1}\Theta = 0$), $dV = 0$ e equação (3.2.3) para simplificar o resultado.

Inserindo $\mathcal{L}_{X_1^1}X_2^1 = X_3^1$, etc., este se torna:

$$\begin{aligned} & (\bar{s}^1)^* \left[V(X_1, X_2)(d\Theta)(X_1^1, X_2^1) + (1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3) + (1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3) \right. \\ & + \sqrt{g}\Theta(-\omega(X_1, X_2)X_3^1 - \omega(X_3, X_1)X_2^1 - \omega(X_2, X_3)X_1^1) \\ & \left. - \sqrt{g}(\Theta(X_1^1, X_2^1) \wedge \omega(X_3) + \Theta(X_1^1, X_3^1) \wedge \omega(X_2) + \Theta(X_2^1, X_3^1) \wedge \omega(X_1)) \right]. \end{aligned}$$

A primeira linha, após termos usado as equações de movimento (2.2.9) e a identidade (2.2.10), é reduzida a

$$\begin{aligned} \text{(primeira linha)} &= (\bar{s}^1)^* [(d\Theta)(v_1^1, v_2^1)] V(X_1, X_2) + (\bar{s}^1)^* [(d\Theta)(v_1^1, v_3^1)] V(X_1, X_3) \\ &\quad + (\bar{s}^1)^* [(d\Theta)(v_2^1, v_3^1)] V(X_2, X_3). \end{aligned}$$

A segunda linha, usando a nossa decomposição, equação (3.2.6), e equação (3.2.10):

$$\begin{aligned} \text{(segunda linha)} &= (-\sqrt{g})L\omega(\omega(X_1, X_2)X_3 + \omega(X_3, X_1)X_2 + \omega(X_2, X_3)X_1) \\ &\quad + (-\sqrt{g})p_A^\lambda\omega(\partial_\lambda)(\omega(X_1, X_2)v_3^A + \omega(X_3, X_1)v_2^A + \omega(X_2, X_3)v_1^A) \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde simplificamos as expressões em colchetes pelo uso de equações (4.3.2) e (4.3.3).

Ao notar que $\Theta(v_1^1, v_2^1) = 0$, somente alguns termos vão sobrar na terceira linha. Assim, $(\bar{s}^1)^*[\Theta(X_1^1, X_2^1)]$ toma a forma $L\omega(X_1, X_2) - p_A^\lambda v_2^A \omega(p_2, X_1) + p_A^\lambda v_1^A \omega(p_1, X_2)$ onde definimos: $p_1 \equiv v_1^A p_A^\lambda \partial_\lambda$, etc.. Então, a terceira linha fica

$$\begin{aligned} \text{(terceira linha)} &= (-\sqrt{g})[L\omega(\omega(X_1, X_2)X_3 + \omega(X_3, X_1)X_2 + \omega(X_2, X_3)X_1) \\ &\quad + (\omega(p_1, X_2)\omega(X_3) - \omega(p_1, X_3)\omega(X_2) + (1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1) + (1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2))] \\ &= (-\sqrt{g})p_A^\lambda\omega(\partial_\lambda)[v_1^A\omega(X_3, X_2) - v_2^A\omega(X_3, X_1) + v_3^A\omega(X_1, X_2)], \end{aligned}$$

onde a primeira linha acima é zero por (4.3.2) e (4.3.3), e onde reescrevemos a segunda linha acima usando (4.3.4).

Então, somando os resultados acima, podemos reescrever a condição $(\bar{s}^1)^*d(\text{eq. 4.3.5})=0$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} &(\bar{s}^1)^* [(d\Theta)(v_1^1, v_2^1)] V(X_1, X_2) + (\bar{s}^1)^* [(d\Theta)(v_1^1, v_3^1)] V(X_1, X_3) \\ &+ (\bar{s}^1)^* [(d\Theta)(v_2^1, v_3^1)] V(X_2, X_3) \\ &+ (-\sqrt{g})p_A^\lambda\omega(\partial_\lambda)[v_1^A\omega(X_3, X_2) - v_2^A\omega(X_3, X_1) + v_3^A\omega(X_1, X_2)]. \end{aligned}$$

Desta toma, podemos concluir que a redução funciona quando todos os $v_i^1 = 0$.

Notamos que é possível fazer redução sobre somente um dos vetores de Killing de S^2 , mas não fazer redução sobre os outros dois vetores de Killing. A variedade sobrando é, por exemplo, um círculo sobre que temos uma ação reduzida. A invariância sobre o vetor original nos deixa, por exemplo, relacionar a integral sobre um círculo $\theta = \pi/2$ ao círculo $\phi = \pi/2, 3\pi/2$. Temos tentado, por exemplo, relacionar ações sobre a métrica $(1, -1, -1, -1)$ com a métrica $(-1, -1, -1, -1)$ usando este formalismo, mas a interpretação disto é um pouco difícil decifrar.

4.3.3 Uma Identidade

Precisamos de uma generalização de (4.3.2) para o caso geral. Vamos considerar a quantidade

$$2!(g^{-1})^1_{[i}(g^{-1})^2_{j]},$$

onde g é um elemento na representação adjunta do grupo $SO(3)$. Obviamente, neste caso, $g^{-1} = g^T$, e se quadramos a expressão acima obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^{\dim SO(3)} \left[2! (g^{-1})^1_{[i} (g^{-1})^2_{j]} \right]^2 &= \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^{\dim SO(3)} \left[2! (g^{-1})^1_{[i} (g^{-1})^2_{j]} \right] \left[2! g^i_1 g^j_2 \right] \\ &= \frac{1}{2!} 2! \mathbb{I}^1_1 \mathbb{I}^2_2 \\ &= 1. \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

Por outro lado, escrevendo Q_i para os vetores invariantes do lado direito do grupo $SO(3)$, D_i para os vetores invariantes do lado esquerdo, e σ^i para as um-formas de Cartan invariantes do lado esquerdo ($\sigma^i(D_j) = \delta^i_j$), e sabendo que

$$Q_{i,g} = R_{g*} Q_{i,e} = R_{g*} \circ L_{g*}^{-1} D_{i,g} = (g^{-1})^j_i D_{j,g},$$

(onde abreviamos $(\text{Ad } g^{-1})^j_i D_{j,g}$ por $(g^{-1})^j_i D_{j,g}$) podemos escrever g^{-1} em termos de σ atuando sobre Q :

$$\sigma^1(Q_i) = (g^{-1})^1_i.$$

Desta forma, a identidade (4.3.6) pode ser escrita como

$$1 = \frac{1}{2!} [(\sigma^1 \wedge \sigma^2)(Q_i, Q_j)]^2.$$

Podemos generalizar este resultado um pouco para um grupo SO qualquer. Neste caso,

$$1 = \frac{1}{a!} \sum_{i_1, \dots, i_a=1}^{\dim G} [(\sigma^1 \wedge \sigma^2 \wedge \dots \wedge \sigma^a)(Q_{i_1}, Q_{i_2}, \dots, Q_{i_a})]^2,$$

onde a pode ter um valor $1, \dots, \dim G$.

É fácil generalizar estes resultados para espaços do tipo coset G/H , onde o grupo sob consideração e a sua representação adjunta é o grupo G , um grupo do tipo SO . Projetando do fibrado G para a variedade G/H , $e^i(\pi_* D_j)$ é δ^i_j se o índice i corresponde a um gerador em G/H . Definindo $K_i = \pi_* Q_i$, temos

$$e^1(K_i) = (g^{-1})^1_i$$

também. Desta forma,

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{a!} \sum_{i_1, \dots, i_a=1}^{\dim G} [(e^1 \wedge e^2 \wedge \dots \wedge e^a)(K_{i_1}, K_{i_2}, \dots, K_{i_a})]^2 \\ &= \frac{1}{a!} \sum_{i_1, \dots, i_a=1}^{\dim G} [V(K_{i_1}, K_{i_2}, \dots, K_{i_a})]^2, \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

quando G é um grupo do tipo SO , e onde a pode ser $1, \dots, \dim(G/H)$. No caso de $SO(3)/SO(2)$, e tomando $a = 2$, esta relação diz que

$$1 = [V(K_1, K_2)]^2 + [V(K_2, K_3)]^2 + [V(K_3, K_1)]^2,$$

e a sua derivada simplesmente dá a expressão (4.3.2).

Se G fosse, por exemplo, um grupo do tipo SU , onde $g^{-1} = g^\dagger$, teríamos que tomar

$$1 = \frac{1}{a!} \sum_{i_1, \dots, i_a=1}^{\dim G} [V(K_{i_1}, K_{i_2}, \dots, K_{i_a})] [V(K_{i_1}, K_{i_2}, \dots, K_{i_a})]^* .$$

4.3.4 O Caso Geral

Podemos especular ou melhor postular a forma da forma de Cartan reduzida para um coset G/H quando o grupo G é um grupo do tipo SO . Vamos assumir que todos os v 's deveriam ser nulos. Vamos também assumir, como no caso anterior de S^2 , que a Lagrangiana reduzida seja

$$\Theta_{\text{red}} = \frac{1}{n!} \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^{\dim G} \Theta(X_{i_1}^1, \dots, X_{i_n}^1) V(X_{i_1}, \dots, X_{i_n}), \quad (4.3.8)$$

onde $X_{i_1}^1 = (\bar{s}^1)_* X_{i_1}$, etc. para que

$$\begin{aligned} L_{\text{red}} \omega_M = (\bar{s}^1)_* \Theta_{\text{red}} &= \frac{1}{n!} \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^{\dim G} [(\bar{s}^1)_* \Theta] (X_{i_1}, \dots, X_{i_n}) V(X_{i_1}, \dots, X_{i_n}) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^{\dim G} \frac{L \omega_M}{\sqrt{g}} [V(X_{i_1}, \dots, X_{i_n})]^2 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{g}} L \right) \omega_M, \end{aligned}$$

onde usamos equação (2.2.8) e equação (4.3.7), e onde a forma ω_M é a forma de volume sobre a variedade interna M . Este resultado concorda com os resultados anteriores: quando faz-se uma redução com todos os v 's nulos, a Lagrangiana reduzida simplesmente é a Lagrangiana da teoria original.

Da mesma forma, quando o coset tem a forma G/H com um grupo G um grupo do tipo SU , simplesmente teríamos que substituir $V(X_{i_1}, \dots, X_{i_n})$ em (4.3.8) por $[V(X_{i_1}, \dots, X_{i_n})]^*$.

4.4 Conclusões

Estendemos os resultados do capítulo anterior aos casos onde a variedade interna é um grupo ou um coset. No caso de um grupo G , fazendo um ansatz para a forma de Cartan nos deu o resultado que G deve ser unimodular, além de requerer que todos os v 's sejam zero, assim excluindo a possibilidade de redução de Legendre neste caso. Redução de Legendre tampouco parece ser possível no caso de uma variedade interna do tipo coset, G/H , pelo menos no caso de S^2 . Notamos que é possível fazer a redução sobre somente um vetor de Killing no caso de, por exemplo, S^2 , mas a interpretação dos resultados não fica muito clara. Terminamos por encontrar uma expressão para a forma de Cartan reduzida para o caso de um coset geral.

5 Perspectivas Futuras

Na primeira parte da tese, mostramos como Z_k cordas podem ser acomodadas em teorias onde um grupo de gauge é quebrado a um grupo não-Abeliano.

Na segunda parte da tese, mostramos que redução dimensional de Legendre (e Kaluza-Klein e Scherk-Schwarz) pode ser vista em termos multi-simpléticos. Com o uso deste formalismo, obtemos uma maneira geral de procurar possíveis extensões de redução de Legendre. Embora vários dos nossos resultados tenham sido, até certo ponto, negativos em termos das possíveis extensões de redução de Legendre (excluindo, por exemplo, seção 3.5.1), obtivemos um quadro relativamente geral em que a busca de novas formas de redução dimensional tem sido bastante reduzida.

Uma das esperanças iniciais dos autores de [43] era que uma teoria off-shell de $N = 8$ supergravidade pudesse ser obtida através de uma aplicação de uma redução de Legendre. Não é óbvio, dados os argumentos em [51, 52], se este será possível, mas é possível que os nossos resultados formem um passo intermediário na prova que sim é possível ou não.

Esperamos que o desenvolvimento de uma maneira de estudar os métodos de redução dimensional em termos de formas de Cartan, etc. também facilite o estudo da relação entre redução dimensional e dualidade e (co)homologia, onde é inconveniente considerar a teoria reduzida como uma teoria efetiva após tomar os modos zero da teoria inicial. Fora disto, é bastante fácil generalizar o nosso método a redução dimensional em teorias com derivadas altas dos campos, um ponto que fica para futura pesquisa.

Várias considerações ficam para pesquisa futura, como a pergunta sobre o que acontece quando se aplica o mecanismo de seção 3.5.1 ao caso supersimétrico, e o que acontece no caso de redução sobre somente um vetor de Killing na seção 4.3.2. Fora destes pontos, a omissão maior aqui tem sido a possibilidade da inclusão de um termo topológico Δ associado a um vetor de Killing em (3.2.1). Não sabemos ao certo se este tenha recebido muita atenção na literatura (fora de teorias de gauge), mas do nosso ponto de vista, seria a extensão mais interessante das formas de redução dimensional que aparecem aqui, sobretudo em combinação com uma redução do tipo Legendre. Esperamos poder investigar estes pontos em trabalho futuro.

A Convenções e Identidades Úteis

O nosso laboratório nesta obra tanto para as cordas BPS quanto para redução dimensional é freqüentemente supersimetria rígida estendida $N = 2$. Assim será conveniente definir a notação dos pseudoespinores que vamos utilizar. Incluímos também algumas identidades geométricas.

A métrica que usamos nesta obra é $(+, -, -, -, \dots)$.

A.1 Notação de Espinores

Dados dois espinores χ e ψ , consideramos as seguintes convenções [54]: $(\chi\psi)^T = -\psi^T\chi^T$, $(\chi\psi)^\dagger = +\psi^\dagger\chi^\dagger$ e $(\chi\psi)^* = -\chi^*\psi^*$. Em $D = s + t$ dimensões com s dimensões do tipo espaço e t do tipo tempo, os elementos γ^μ da álgebra de Clifford, com os $2^{\lfloor D/2 \rfloor}$ elementos $1, \gamma^\mu, \gamma^{\mu\nu}, \gamma^{\mu\nu\rho}, \dots$ (onde definimos $\gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{2!}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$, $\gamma^{\mu\nu\rho} = \frac{1}{3!}\gamma^{[\mu}\gamma^\nu\gamma^{\rho]}$, $\sigma^{\mu\nu} \equiv i\gamma^{\mu\nu}$, e $\gamma^{\mu_0}\gamma_{\mu_0} = \gamma^{\mu_0\nu_0}\gamma_{\nu_0\mu_0} = \gamma^{\mu_0\nu_0\sigma_0}\gamma_{\sigma_0\nu_0\mu_0} = 1$, etc.) satisfazem as seguintes relações:

$$\gamma^{\mu\dagger} = -(-1)^t A\gamma^\mu A^{-1}, \quad \gamma^{\mu T} = -\eta(-1)^t C\gamma^\mu C^{-1}, \quad \gamma^{\mu*} = \eta B\gamma^\mu B^{-1},$$

$$C = B^T A, \quad B^T = \epsilon B,$$

onde η, ϵ são constantes determinadas pelo número de dimensões do tipo tempo e do tipo espaço:

$$\epsilon = \cos \frac{s-t}{4}\pi - \eta \sin \frac{s-t}{4}\pi,$$

note que para $s = 3, t = 1$ temos $\epsilon = -\eta$. A matriz γ_{D+1} é definida como

$$\gamma_{D+1} = (-1)^{(s-t)/4} \gamma^1 \dots \gamma^D \xrightarrow{s=3, t=1} \gamma_5 = i\gamma^0 \dots \gamma^3.$$

Onde podem-se verificar as seguintes relações das definições acima:

$$A^* = \eta^t B A B^{-1}, \quad A^T = \eta^t C A^{-1} C^{-1}, \quad A^{-1} = (-1)^{t(t-1)/2} A, \quad C^T = \epsilon \eta^t (-1)^{t(t-1)/2} C,$$

$$\gamma_{D+1}^2 = 1, \quad \gamma_{D+1}^\dagger = \gamma_{D+1} = (-1)^t A \gamma_{D+1} A^{-1}, \quad \gamma_{D+1}^* = (-1)^{(s-t)/2} B \gamma_{D+1} B^{-1}, \quad \gamma_{D+1}^T = (-1)^{D/2} C \gamma_{D+1} C^{-1}.$$

No caso $s = 3, t = 1$ vamos tomar as matrizes de γ da seguinte forma:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_5 = i\gamma_5^S = i \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

onde a nossa γ_5 difere com a matriz γ_5^S de [7] por uma constante, i . As matrizes A, B e C podemos tomar como²², no caso $\epsilon = 1, \eta = -1$:

$$A = \gamma^0 \quad B = i\gamma^2 \quad C = i\gamma^2\gamma^0 = -C^S. \quad (\text{A.1.1})$$

$$\text{Assim, } B = B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ -\epsilon & 0 \end{pmatrix} \text{ e } C = -C^{-1} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & -\epsilon \end{pmatrix}.$$

²²O C^S de [7] é o nosso $C^{-1} = -C$.

Se definimos a conjugação de carga como

$$\psi^c = B^{-1}\psi^* = -C^{-1}\bar{\psi}^T = C^S\bar{\psi}^T \quad \psi^{cc} = \psi, \quad (\text{A.1.2})$$

então um espinor de Majorana satisfaz

$$\psi^c = \psi. \quad (\text{A.1.3})$$

Se usamos estas definições para os geradores Q_i da álgebra de supersimetria de $N = 2$, obteremos uma simetria interna do tipo $O(2)$, enquanto a simetria máxima que pode ser representada deveria ser $SU(2)$ [7]. É possível realizar esta simetria pelo uso de espinores de Majorana do tipo $SU(2)$ além de espinores complexos. Neste caso, podemos definir o conjugado de um espinor como $\zeta_i^c = \Theta_{ij}B'^{-1}\zeta_j^*$, onde Θ_{ij} é uma matriz constante, e onde $i = 1, 2$. Se queremos que $\zeta_i^{cc} = \zeta_i$, então vê-se que requeremos que $\Theta\Theta^* = \epsilon \cdot 1$, onde $B'^T = \epsilon B'$. Para poder representar o grupo $SU(2)$, tomamos os índices acima como representações que transformam-se como o complexo conjugado das representações com os índices abaixo (ζ_1 transforma-se como a representação $|\frac{1}{2}\rangle$ e ζ_2 como a representação $|\frac{1}{2}\rangle$ de $SU(2)$). Podemos formar invariantes sobre este espaço pelo uso do tensor invariante²³ ϵ , por exemplo, $\zeta_i\epsilon^{ij}\eta_k$. (Note que podemos tomar o determinante da métrica g para o grupo $SU(2)$ como um, assim que $\epsilon_{12} = \det g \epsilon^{12} = \epsilon^{12}$). Se tomamos Θ como uma constante vezes $-i\epsilon$ (onde incluímos um fator $-i$ para conveniência), então requeremos que ϵ para a álgebra de Clifford seja -1 . A maneira mas fácil para realizar isto é por tomar

$$A' = A \quad B' = B\gamma_5 \quad C' = \gamma_5 C = -i\gamma_5^S C^S,$$

para que $C' = B'^T A'$ e $B'^T = -B'$. Com estas convenções o conjugado toma a forma

$$\zeta_i^c = -i\epsilon_{ij}\gamma_5 B^{-1}\zeta_j^* = -i\epsilon_{ij}\gamma_5 C\bar{\zeta}^{jT} = -\epsilon_{ij}\gamma_5^S C^S\bar{\zeta}^{jT} \quad \zeta_i^{cc} = \zeta_i, \quad (\text{A.1.4})$$

e os espinores tipo pseudomajorana satisfazem²⁴

$$\zeta_i^c = \zeta_i. \quad (\text{A.1.6})$$

Temos a seguinte notação: $\bar{\zeta}^j \equiv \bar{\zeta}_i\epsilon^{ij}$, $\eta^i = \epsilon^{ij}\eta_j$, etc.

Em geral, é bastante fácil verificar que $(\bar{\eta}^i M \zeta_i)^T = -\bar{\zeta}^i \gamma_5 C^{-1} M^T C \gamma_5 \eta_i$, onde M é uma matriz 4×4 . Deste jeito verificamos que para espinores do tipo pseudomajorana,

$$\begin{aligned} \bar{\eta}^i \zeta_i &= -\bar{\zeta}^i \eta_i & \bar{\eta}^i \gamma^\mu \zeta_i &= -\bar{\zeta}^i \gamma^\mu \eta_i & \bar{\eta}^i \gamma^{\mu\nu} \zeta_i &= \bar{\zeta}^i \gamma^{\mu\nu} \eta_i, \\ \bar{\eta}^i \gamma^{\mu\nu\rho} \zeta_i &= \bar{\zeta}^i \gamma^{\mu\nu\rho} \eta_i & \bar{\eta}^i \gamma_5 \zeta_i &= -\bar{\zeta}^i \gamma_5 \eta_i, \\ \bar{\eta}^i \gamma^\mu \gamma_5 \zeta_i &= \bar{\zeta}^i \gamma^\mu \gamma_5 \eta_i & \bar{\eta}^i \gamma^{\mu\nu} \gamma_5 \zeta_i &= \bar{\zeta}^i \gamma^{\mu\nu} \gamma_5 \eta_i, \end{aligned}$$

onde $\gamma^{\mu\nu\rho}$ pode ser escrito como $\gamma^{\mu\nu\rho} = i\epsilon^{\alpha\mu\nu\rho}\gamma_5\gamma_\alpha$.

²³Chamam-se $SU(2)$ Majorana pelo seguinte: se $\psi'_i = t_{ij}\psi_j$, onde t é uma matriz unitária, então para que $\psi_i = \epsilon_{ij}B'^{-1}\psi_j^*$ continue sendo válido, requeremos que $t\epsilon t^T = \epsilon$, o que é a condição para o grupo $USp(2n, C)$ onde $SU(2) \sim USp(2)$.

²⁴Infelizmente, esta definição para a conjugação de carga modificaria (A.1.2)

$$\psi^c = B'^{-1}\psi^* = \gamma_5 B^{-1}\psi^* = -i\gamma_5 C\bar{\psi}^T \quad \psi^{cc} = -\psi \quad (\text{A.1.5})$$

ou seja, seria difícil definir um espinor de Majorana deste jeito.

Qualquer matriz 4×4 M pode ser decomposta como

$$M = \frac{1}{4} \left[\text{Tr}(M)1 + \frac{1}{1!} \text{Tr}(M\gamma_\mu)\gamma^\mu + \frac{1}{2!} \text{Tr}(M\gamma_{\nu\mu})\gamma^{\mu\nu} + \frac{1}{3!} \text{Tr}(M\gamma_{\mu\nu\rho})\gamma^{\rho\nu\mu} + \dots \right].$$

E a seguinte decomposição de $\zeta_i \bar{\eta}^i$ é útil em fazer as contas:

$$\begin{aligned} \eta_\alpha^i \bar{\zeta}_{i\beta} &= -\frac{1}{4} \left[(\bar{\zeta}^i \eta_i) 1_{\alpha\beta} + \frac{1}{1!} (\bar{\zeta}^i \gamma_\mu \eta_i) (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} + \frac{1}{2!} (\bar{\zeta}^i \gamma_{\mu\nu} \eta_i) (\gamma^{\mu\nu})_{\alpha\beta} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3!} (\bar{\zeta}^i \gamma_{\mu\nu\rho} \eta_i) (\gamma^{\rho\nu\mu})_{\alpha\beta} + (\bar{\zeta}^i \gamma_5 \eta_i) (\gamma_5)_{\alpha\beta} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[(\bar{\eta}^i \zeta_i) 1_{\alpha\beta} + \frac{1}{1!} (\bar{\eta}^i \gamma_\mu \zeta_i) (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} - \frac{1}{2!} (\bar{\eta}^i \gamma_{\mu\nu} \zeta_i) (\gamma^{\mu\nu})_{\alpha\beta} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3!} (\bar{\eta}^i \gamma_{\mu\nu\rho} \zeta_i) (\gamma^{\rho\nu\mu})_{\alpha\beta} + (\bar{\eta}^i \gamma_5 \zeta_i) (\gamma_5)_{\alpha\beta} \right], \end{aligned} \quad (\text{A.1.7})$$

onde podemos reescrever $-\frac{1}{3!} (\bar{\eta}^i \gamma_{\mu\nu\rho} \zeta_i) (\gamma^{\rho\nu\mu})_{\alpha\beta} = (\bar{\eta}^i \gamma_\alpha \gamma_5 \zeta_i) (\gamma_5 \gamma^\alpha)_{\alpha\beta}$.

É possível definir pseudoespinores ζ_i ($i = 1, 2$) do tipo $SU(2)$ Majorana a partir de espinores de Majorana, ψ_i do seguinte jeito:

$$\zeta^i = -i\varepsilon^{ij} \left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \right) \psi_j + \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) \psi^i,$$

se ψ_j satisfazem as condições de Majorana, então ζ_i automaticamente satisfazem (A.1.6). Em termos de dois componentes, isto fica

$$\zeta^i = \begin{pmatrix} -i\varepsilon^{ij} \zeta_{\alpha j} \\ \bar{\zeta}^{\dot{\alpha} i} \end{pmatrix} \quad \bar{\zeta}_i = (\zeta_i^\alpha, i\varepsilon_{ij} \bar{\zeta}_{\dot{\alpha}}^j). \quad (\text{A.1.8})$$

Em fazer as contas, a seguinte relação resulta ser útil para fechar a álgebra de supersimetria sobre os campos fermiônicos:

$$\delta_i^k \delta_j^l = \frac{1}{2} \delta_i^l \delta_j^k + \frac{1}{2} \sigma^{al} \sigma^ak_j. \quad (\text{A.1.9})$$

A.2 Variedades Riemaniannas

Vamos supor uma conexão compatível com a métrica: $g_{\mu\nu;\sigma} = 0$, mas onde a torção não seja necessariamente nula, incluindo, por exemplo, a teoria de gravitação de Einstein-Cartan, mas excluindo a teoria de Weyl [55].

Definimos a conexão $\omega^\kappa{}_\nu$ como [56] $\omega^\kappa{}_\nu \equiv \Gamma^\kappa{}_{\mu\nu} dx^\mu$. A derivada covariante, D , atuando, por exemplo, sobre α_ν^μ é dada por $D\alpha_\nu^\mu = (\nabla_\rho \alpha_\nu^\mu) dx^\rho = d\alpha_\nu^\mu + \omega^\mu{}_\rho \alpha_\nu^\rho - \omega^\rho{}_\nu \alpha_\rho^\mu$, e $\nabla_\mu \partial_\nu = \Gamma^\kappa{}_{\mu\nu} \partial_\kappa$ e $\nabla_\mu dx^\nu = -\Gamma^\nu{}_{\mu\kappa} dx^\kappa$.

A curvatura, $\Omega^\kappa{}_\nu$ é dada por $\Omega^\kappa{}_\nu = d\omega^\kappa{}_\nu + \omega^\kappa{}_\sigma \wedge \omega^\sigma{}_\nu$, onde $\Omega^\kappa{}_\nu = \frac{1}{2} R^\kappa{}_{\nu\rho\mu} dx^\rho \wedge dx^\mu$, onde $R^\kappa{}_{\mu\nu\rho} = -R^\kappa{}_{\mu\rho\nu}$. A primeira identidade de Bianchi tem a forma

$$R^\kappa{}_{\mu\nu\rho} + R^\kappa{}_{\nu\rho\mu} + R^\kappa{}_{\rho\mu\nu} = Q^\kappa{}_{\nu\rho;\mu} + Q^\kappa{}_{\rho\mu;\nu} + Q^\kappa{}_{\mu\nu;\rho} + Q^\sigma{}_{\mu\nu} Q^\kappa{}_{\sigma\rho} + Q^\sigma{}_{\nu\rho} Q^\kappa{}_{\sigma\mu} + Q^\sigma{}_{\rho\mu} Q^\kappa{}_{\sigma\nu}$$

A torção $\Theta^\kappa = \frac{1}{2} Q^\kappa{}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ satisfaz $\Theta^\mu = ddx^\mu + \omega^\mu{}_\rho \wedge dx^\rho = \omega^\mu{}_\rho \wedge \theta^\rho = \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} dx^\nu \wedge dx^\rho = \Gamma^\mu{}_{[\nu\rho]} dx^\nu \otimes dx^\rho$.

Reescrevendo equação (3.2.2), achamos que

$$\mathcal{L}_X g_{\mu\nu} = X_{\mu;\nu} + X_{\nu;\mu} + X^\rho(Q_{\nu\mu\rho} + Q_{\mu\nu\rho}). \quad (\text{A.2.1})$$

Vamos usar as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} X^\kappa_{;\mu;\nu} - X^\kappa_{;\nu;\mu} &= -X^\rho R^\kappa_{\rho\mu\nu} + X^\kappa_{;\rho} Q^\rho_{\mu\nu}, \\ X_{\kappa;\mu;\nu} - X_{\kappa;\nu;\mu} &= X_\rho R^\rho_{\kappa\mu\nu} + X_{\kappa;\rho} Q^\rho_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{A.2.2})$$

Vamos definir $\Gamma \equiv \Gamma^\kappa_{\mu\nu} \partial_\kappa \otimes dx^\mu \otimes dx^\nu = \omega^\kappa_\nu \otimes \partial_\kappa \otimes dx^\nu$. Desta forma, vemos que

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X \Gamma)^\kappa_\nu &= \mathcal{L}_X \omega^\kappa_\nu - (\partial_\rho X^\kappa) \omega^\rho_\nu + (\partial_\nu X^\rho) \omega^\kappa_\rho \\ &= (d\omega^\kappa_\nu)(X) + d[\omega^\kappa_\nu(X)] - (\partial_\rho X^\kappa) \omega^\rho_\nu + (\partial_\nu X^\rho) \omega^\kappa_\rho \\ &= (\Omega^\kappa_\nu - \omega^\kappa_\sigma \wedge \omega^\sigma_\nu)(X) + d[\omega^\kappa_\nu(X)] - (\partial_\rho X^\kappa) \omega^\rho_\nu + (\partial_\nu X^\rho) \omega^\kappa_\rho \\ &= \Omega^\kappa_\nu(X) + [D(DX)]^\kappa_\nu, \end{aligned}$$

ou simplesmente

$$\mathcal{L}_X \Gamma^\kappa_{\mu\nu} = X^\sigma R^\kappa_{\sigma\mu\nu} + \nabla_\nu \nabla_\mu X^\kappa, \quad (\text{A.2.3})$$

ou $\mathcal{L}_X g_{\rho\kappa} \Gamma^\kappa_{\mu\nu} = g_{\rho\kappa} X^\sigma R^\kappa_{\sigma\mu\nu} + g_{\rho\kappa} \nabla_\nu \nabla_\mu X^\kappa + \Gamma^\kappa_{\mu\nu} \mathcal{L}_X g_{\rho\kappa} = g_{\rho\kappa} X^\sigma R^\kappa_{\sigma\mu\nu} + g_{\rho\kappa} \nabla_\nu \nabla_\mu X^\kappa + \Gamma^\kappa_{\mu\nu} (X_{\rho;\kappa} + X_{\kappa;\rho})$.

Quando a torção é zero, podemos usar (A.2.1) para notar que $\nabla_\mu \mathcal{L}_X g_{\sigma\nu} = \nabla_\mu (X_{\sigma;\nu} + X_{\nu;\sigma}) = X_{\sigma;\nu;\mu} + X_{\nu;\sigma;\mu}$. Por outro lado, podemos usar equação (A.2.2) para escrever isto como $\nabla_\mu g_{\sigma\nu} = X_{\sigma;\mu;\nu} + X_{\nu;\sigma;\mu} - X_\rho R^\rho_{\sigma\mu\nu}$. Assim, vemos que

$$\mathcal{L}_X \Gamma^\kappa_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\kappa\sigma} (\nabla_\mu \mathcal{L}_X g_{\sigma\nu} + \nabla_\nu \mathcal{L}_X g_{\sigma\mu} - \nabla_\sigma \mathcal{L}_X g_{\mu\nu}) \quad (\text{A.2.4})$$

(usando equação (A.2.3)).

B Campo Escalar com Background Estático

A título de ilustração, neste apêndice vamos aplicar alguns dos métodos elaborados em capítulo 2 a um caso concreto. Assim, vamos mostrar a invariância da forma de Cartan, calcular a Hamiltoniana, etc. para a seguinte teoria simples:

$$S[\phi] = \int dt dr d\theta d\varphi \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi)) .$$

B.1 Estruturas Canônicas

Começamos por calcularmos os momentos:

$$\begin{aligned} p^\lambda &= \frac{\partial L}{\partial \phi_\lambda} = 2\sqrt{-g} g^{\lambda\nu} \partial_\nu \phi , \\ \kappa \equiv \partial_\lambda p^\lambda &= \frac{\partial L}{\partial \phi^A} = -\sqrt{-g} \frac{\partial V}{\partial \phi} , \end{aligned} \tag{B.1.1}$$

ou, equivalentemente,

$$\partial_\mu \phi = \frac{1}{2\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} p^\nu .$$

A forma canônica θ_x^i então fica

$$\begin{aligned} \theta_x^i &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \left(-\sqrt{-g} \frac{\partial V}{\partial \phi} d\phi + 2\sqrt{-g} g^{\lambda\nu} \partial_\nu \phi d\phi_\lambda \right) \otimes V \\ &= d \left[\left(g^{\lambda\nu} \phi_\nu \phi_\lambda - V \right) \otimes V \right] \\ &\equiv dL , \end{aligned}$$

onde a Lagrangiana reaparece, como deveria. Assim, ω_x^i assume a forma:

$$\omega_x^i = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[d \left(-\sqrt{-g} \frac{\partial V}{\partial \phi} \right) \wedge d\phi + d \left(2\sqrt{-g} g^{\lambda\nu} \partial_\nu \phi \right) \wedge d\phi_\lambda \right] \otimes V .$$

A forma canônica θ_x^h correspondendo a Hamiltoniana é

$$\begin{aligned} \theta_x^h &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \left(-\sqrt{-g} \frac{\partial V}{\partial \phi} d\phi - \frac{1}{2\sqrt{-g}} g_{\lambda\mu} p^\mu dp_A^\lambda \right) \otimes V \\ &= -d \left(g^{\lambda\nu} \phi_\lambda \phi_\nu + V \right) \otimes V \\ &\equiv -d\sqrt{-g} H \otimes V , \end{aligned} \tag{B.1.2}$$

quando calculamos $\omega_x^h = d\theta_x^h$ achamos que $\omega_x^h = \omega_x^i$.

Podemos também calcular a forma de Cartan, que tem a seguinte expressão:

$$\Theta = 2g^{\lambda\nu} \phi_\nu d\phi \wedge V \left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda} \right) - \left(g^{\lambda\nu} \phi_\lambda \phi_\nu + V \right) V . \tag{B.1.3}$$

B.2 Invariância de Θ Sobre os Vetores de Killing

O nosso propósito nesta seção é mostrar explicitamente que esta teoria é invariante sobre os vetores de Killing da métrica. Neste cálculo, precisamos de dois elementos: $K^\mu \partial_\mu g^{\alpha\sigma}$, e a prolongação $j^1 K = K^1$.

Já que $0 = K^\mu \partial_\mu (\delta^\alpha_\beta) = K^\mu \partial_\mu (g^{\alpha\gamma} g_{\gamma\beta})$, sabemos que $K^\mu \partial_\mu g^{\alpha\sigma} = -g^{\alpha\gamma} g^{\beta\sigma} (K^\mu \partial_\mu g_{\gamma\beta})$. Isto sabemos de (3.2.2) que nos dá

$$K^\mu \partial_\mu g^{\alpha\sigma} = g^{\beta\sigma} \partial_\beta K^\alpha + g^{\alpha\gamma} \partial_\gamma K^\sigma. \quad (\text{B.2.1})$$

Consideremos o vetor $K = K^\mu \partial_\mu$. A sua prolongação vêm de (2.2.7):

$$K^1 = j^1 K = K^\mu \partial_\mu - (\partial_\mu \phi) \frac{\partial K^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial (\partial_\nu \phi)} = K^\mu \partial_\mu - \phi_\mu (\partial_\nu K^\mu) \frac{\partial}{\partial \phi_\nu}.$$

Ainda falta mostrar que $\mathcal{L}_{K^1} \Theta = 0$. O que achamos é que a derivada de Lie de cada termo de Θ com respeito a K é zero. Vamos dividir a forma Θ em dois pedaços $\Theta \equiv 2\Theta_1 - \Theta_2$ e mostramos a invariância de cada termo:

O primeiro termo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{K^\mu \partial_\mu - \phi_\mu (\partial_\nu K^\mu) \frac{\partial}{\partial \phi_\nu}} g^{\lambda\nu} \partial_\nu \phi d\phi \wedge V\left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\right) &= \left[K^1 \left(g^{\lambda\nu} \partial_\nu \phi \right) \right] d\phi \wedge V\left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\right) \\ &+ g^{\lambda\nu} \partial_\nu \phi (d\mathcal{L}_{K^1} \phi) \wedge V\left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\right) \\ &+ g^{\lambda\nu} \partial_\nu \phi d\phi \wedge (\mathcal{L}_{K^1} V)\left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\right) \\ &+ g^{\lambda\nu} \partial_\nu \phi d\phi \wedge V\left(\mathcal{L}_{K^1} \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\right). \end{aligned}$$

A segunda linha é trivialmente zero já que não há fatores do tipo $\partial/\partial\phi$ em K^1 . A terceira linha é igualmente zero $\mathcal{L}_{K^1} V = \mathcal{L}_K V = 0$, pois K é um vetor do tipo Killing. As únicas contribuições vêm da primeira e última regra.

De $(\mathcal{L}_K U)^\nu = K^\mu \partial_\mu U^\nu - U^\mu \partial_\mu K^\nu$, facilmente achamos que $\mathcal{L}_{K^1} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} = -\partial_\lambda K^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}$. Conhecemos também a derivada $K^\mu \partial_\mu g^{\lambda\nu}$ de equação (B.2.1). Então, a equação acima torna-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{K^1} g^{\lambda\nu} \partial_\nu \phi d\phi \wedge V\left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\right) &= \left(g^{\lambda\nu} \partial_\mu K^\nu + g^{\nu\mu} \partial_\mu K^\lambda \right) \partial_\nu \phi d\phi \wedge V\left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\right) \\ &+ g^{\lambda\nu} \left(-\partial_\lambda \phi \partial_\mu K^\lambda \right) d\phi \wedge V\left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\right) \\ &+ g^{\lambda\nu} \partial_\nu \phi d\phi \wedge V\left(-\partial_\lambda K^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Agora, o segundo termo de Θ . Temos que calcular

$$\mathcal{L}_{K^1} H V.$$

Mais uma vez, desde que $\mathcal{L}_{K^1} V = 0$, sabemos que o seguinte é zero

$$\mathcal{L}_{K^1} H = \mathcal{L}_{K^1} \left(g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + V \right) = \mathcal{L}_{K^1} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi,$$

pois K^1 não contém derivadas com respeito a $\partial/\partial\phi$, i.e. $\mathcal{L}_{K^1}V = 0$.

Utilizando equação (B.2.1) novamente, isto se torna:

$$\begin{aligned} \left(g^{\alpha\mu}\partial_\mu K^\beta + g^{\beta\mu}\partial_\mu K^\alpha\right)\phi_\alpha\phi_\beta + 2g^{\alpha\beta}\phi_\alpha(-\phi_\mu\partial_\beta K^\mu) &= 2g^{\alpha\mu}\partial_\mu K^\beta\phi_\alpha\phi_\beta - 2g^{\alpha\beta}\partial_\beta K^\mu\phi_\alpha\phi_\mu \\ &= 0. \end{aligned}$$

Referências

- [1] D. Olive and N. Turok, “Z-2 Vortex Strings In Grand Unified Theories”, Phys. Lett. 117B (1982) 193.
- [2] M. Hindmarsh and T.W.B. Kibble, “Beads On Strings”, Phys. Rev. Lett. 55 (1985) 2398.
- [3] M.A.C. Kneipp, P. Brockill, “BPS String Solutions in Non-Abelian Yang-Mills Theories and Confinement”, Phys. Rev. D64 (2001) 125012. hep-th/0104171.
- [4] R. Rajaraman, “Solitons and Instantons: An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory”, North-Holland, Amsterdam, 1982.
- [5] A Jaffe and C. Taubes, “Vortices and Monopoles”, Birkhäuser Boston, 1980.
- [6] N. Seiberg and E. Witten, “Electric - magnetic duality, monopole condensation, and confinement in N=2 supersymmetric Yang-Mills theory”, Nucl. Phys. B426 (1994) 19.
- [7] M.F. Sohnius, “Introducing Supersymmetry”, Phys. Rep. 128 (1985) 39-204.
- [8] P. West, “Introduction to Supersymmetry and Supergravity”, World Scientific, Singapore, 1990.
- [9] A. Hanany, M. J. Strassler and A. Zaffaroni, “Confinement and strings in MQCD”, Nucl.Phys. B513 (1998) 87; J. D. Edelstein, W. G. Fuertes, J. Mas, J. M. Guilarte, “Phases of dual superconductivity and confinement in softly broken N=2 supersymmetric Yang-Mills theories”, Phys.Rev. D62 (2000) 65008; A. Vainshtein and A. Yung, “Type I superconductivity upon monopole condensation in Seiberg-Witten theory”, Nucl.Phys. B614 (2001) 3.
- [10] P. Goddard and D.I. Olive, “Charge Quantization In Theories With An Adjoint Representation Higgs Mechanism”, Nucl. Phys. B191 (1981) 511.
- [11] D. Olive, “Lectures on Gauge Theories and Lie Algebras with Some Applications to Spontaneous Symmetry Breaking and Integrable Dynamical Systems”, Univ. of Virginia preprint, 1983.
- [12] M. K. Prasad and C.M. Sommerfield, “An Exact Classical Solution for the 't Hooft Monopole and the Julia-Zee Dyon”, Phys. Rev. Lett. 35 (1975) 760.
- [13] M.A.C. Kneipp, “BPS Z_k Strings, String Tensions and Confinement in Non-Abelian Theories”, CBPF-NF-39-02, UNESP2002/020, *Workshop on Integrable Theories, Solitons and Duality, São Paulo, Brasil, Jul 1-6 2002*, hep-th/0211146.
- [14] M.A.C. Kneipp, “Z(k) String Fluxes and Monopole Confinement in Non-Abelian Theories”, Phys.Rev. D68 (2003) 045009.
- [15] H.B. Nielsen and Olesen, “Vortex Line Models For Dual Strings”, Nucl. Phys. B61 (1973) 45.
- [16] S. Mandelstam, “Vortices And Quark Confinement In Nonabelian Gauge Theories”, Phys. Rep. 23C (1976) 245; G. 't Hooft, em Proceed. of Euro. Phys. Soc. 1975, ed A. Zichichi.

- [17] A.A. Abrikosov, “On the Magnetic properties of superconductors of the second group”, Sov. Phys. JETP 5 (1957) 1174.
- [18] Ya.B. Zel’dovich, “Cosmological fluctuations produced near a singularity”, Mon. Not. R. Astron. Soc. 192 (1980) 663; A. Vilenkin, “Cosmological Density Fluctuations Produced By Vacuum Strings”, Phys. Rev. Lett. 46 (1981) 1169.
- [19] T.W.B. Kibble, G. Lazarides and Q. Shafi, Phys. Rev. D26 (1982) 435, Phys. Lett. B113 (1982) 237.
- [20] F.A. Bais, “Charge - Monopole Duality In Spontaneously Broken Gauge Theories”, Phys. Rev. D18 (1978) 1206.
- [21] P. Goddard and P. Mansfield, “Topological Structures In Field Theories”, Rep. Prog. Phys. 49 (1986) 725; Townsend “Three Lectures on Supersymmetry and Extended Objects” *13th GIFT Seminar on Theoretical Physics, Salamanca, 1992*.
- [22] E. B. Bogomol’nyi, Sov. Jour. Nucl. Phys. 24 (1976) 449.
- [23] M.B. Hindmarsh and T.W.B. Kibble, “Cosmic strings”, Rept.Prog.Phys. 58 (1995) 477.
- [24] A. Achucarro and T. Vachaspati, “Semilocal and electroweak strings”, Phys.Rept.327 (2000) 347.
- [25] M. Douglas and S.H. Shenker, “Dynamics of SU(N) supersymmetric gauge theory”, Nucl.Phys. B447 (1995) 271; P. C. Argyres and M. R. Douglas, “New phenomena in SU(3) supersymmetric gauge theory”, Nucl.Phys. B448 (1995) 93; E. Witten, “Branes and the dynamics of QCD”, Nucl.Phys. B507 (1997) 658; A. Hanany, M. J. Strassler and A. Zaffaroni, “Confinement and strings in MQCD”, Nucl.Phys. B513 (1998) 87; A. Yung, “Vortices on the Higgs branch of the Seiberg-Witten theory”, Nucl.Phys. B562 (1999) 191; X. Hou, “Abrikosov string in N=2 supersymmetric QED”, Phys.Rev. D63 (2001) 045015; A. Gorsky, A. Vainshtein, A. Yung, “Deconfinement at the Argyres-Douglas point in SU(2) gauge theory with broken N=2 supersymmetry”, Nucl.Phys. B584 (2000) 197; J. D. Edelstein, W. G. Fuertes, J. Mas, J. M. Guilarte, “Phases of dual superconductivity and confinement in softly broken N=2 supersymmetric Yang-Mills theories”, Phys.Rev. D62 (2000) 065008; A. Vainshtein and A. Yung, “Type I superconductivity upon monopole condensation in Seiberg-Witten theory”, Nucl.Phys. B614 (2001) 3; A Yung, “Confinement near Argyres-Douglas point in N=2 QCD and low-energy version of AdS / CFT correspondence”, Nucl.Phys. B626 (2002) 207.
- [26] V. Aldaya, J. A. de Azcárraga, “Geometric Formulation of Classical Mechanics and Field Theory”, Riv. del Nuovo Cim., v.3, (1980) p.1-66.
- [27] Kijowski, “Symplectic Framework for Field Theories”, Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag, Berlin, 1979.
- [28] T. Frankel, “The Geometry of Physics: An Introduction”, 1997, 654pp. Cambridge, UK: Univ. Pr. (1997) 654 p.
- [29] C. von Westenholz, “Differential Forms in Mathematical Physics”, North-Holland, 1981.

- [30] J. A. de Azcárraga, J. M. Izquierdo, “Lie Groups, Lie Algebras, Cohomology and Some Applications in Physics”, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1995.
- [31] B. Schutz, “Geometrical Methods of Mathematical Physics”, Cambridge Univ. Press, 1980.
- [32] R. Abraham, J. Marsden, “Foundations of Mechanics”, W. A. Benjamin, New York, 1967.
- [33] P. Chernoff, J. Marsden, “Properties of Infinite Dimensional Hamiltonian Systems”, Lecture Notes in Mathematics 425, Springer-Verlag, Berlin, 1974.
- [34] R. W. R. Darling, “Differential Forms and Connections”, Cambridge Univ. Press, 1994.
- [35] M. Henneaux and C. Teitelboim, “Quantization of Gauge Systems”, Princeton Univ. Press, 1992.
- [36] D. J. Hurley and M. A. Vandyck, “Geomety, Spinors and Applications”, Springer and Praxis Publishing, Chicester, UK, 2000.
- [37] D. J. Hurley and M. A. Vandyck, “Topics in Differential Geometry, A New Approach Using D -Differentiation”, Springer and Praxis Publishing, Chicester, UK, 2002.
- [38] J. Scherk and J. H. Schwarz, “How to Get Masses from Extra Dimensions,” Nucl. Phys. B 153 (1979) 61, Phys. Lett. 82B (1979) 60, Phys. Lett. 84B (1979) 83.
- [39] E. Cremmer e J. Scherk, “Dual Models in Four Dimensions With Internal Symetries”, Nucl. Phys. B103 (1976) 399-425.
- [40] J. Scherk and J. Schwarz, “Spontaneous Breaking of Supersymmetry Through Dimensional Reduction”, Phys.Lett. B82 (1979) 60.
- [41] V. Aldaya, J. A. de Azcárraga, “Variational Principles on r th Order Jets of Fibre Bundles in Field Theory”, J. Math. Phys. 19 (1978) 1869-1875.
- [42] D. J. Saunders, “The Geometry of Jet Bundles”, Cambridge, 1989.
- [43] M. F. Sohnius, K. S. Stelle and P. C. West, “Dimensional Reduction By Legendre Transformation Generates Off-Shell Supersymmetric Yang-Mills Theories,” Nucl. Phys. B 173 (1980) 127. Sohnius, Stelle, West, “Off-Mass-Shell Formulation of Extended Supersymmetric Gauge Theories,” Phys. Lett. 92B (1980) 123.
- [44] P. Goddard, D. Olive, “Kac-Moody and Virasoro Algebras in Relation to Quantum Physics”, Int. J. Mod. Phys. A1 (1986) p. 303-414. Também aparece em Goddard e Olive, “Kac-Moody and Virasoro
- [45] S. Coleman, J. Mandula, “All Possible Symmetries of the S Matrix”, Phys. Rev. 159 (1967) 1251.
- [46] L. Michel, “Invariance in Quantum Mechanics and Group Extension”, em *Group Theoretical Concepts and Methods in Elementary Particle Physics*, p.135-200, 1962, Gürsey ed., Gordon and Breach Science Publishers, London.

- [47] S. Weinberg, “Generalized Theories of Gravity and Supergravity in Higher Dimensions,” UTTG-12-84, *5th Workshop on Grand Unification, Providence, RI, Apr 12-14, 1984*.
- [48] M. J. Duff, “Modern Kaluza-Klein Theories,” Imperial/TP/83-84/45, *Kaluza-Klein Workshop, Chalk River, Canada, Aug 11-16, 1983*. Algebras, A Reprint Volume for Physicists”, World Scientific, Singapore, 1988.
- [49] R. Coquereaux, A. Jadczyk, “Riemannian Geometry, Fibre Bundles, Kaluza-Klein Theories and All That...”, World Sci. Lecture Notes in Physics, vol. 16., 1988.
- [50] L. Castellani, R. D’Auria and P. Fre, “Supergravity and superstrings: A Geometric perspective. Vol. 1: Mathematical foundations,” World Scientific, 1991.
- [51] S. J. Gates, Jr., “Superspace Formulation of New Non-Linear Sigma Models”, Nucl. Phys. B238 (1984) 349-366.
- [52] W. Siegel, “Off-Shell Central Charges”, Nucl. Phys. B173 (1980) 51-58. W. Siegel e M. Roček, “On Off-Shell Supermultiplets”, Phys. Lett. 105B (1981) 275-277.
- [53] H.A. Kastrup, “Canonical Theories of Lagrangian Dynamical Systems in Physics”, Phys. Rep. 101 (1983) 1-167.
- [54] M. A. de Andrade, “Dirac Spinors in Arbitrary Dimensions,” Notas de Aula, <http://www.cbpf.br/~dcp/papers/>.
- [55] V. de Sabbata, M. Gasperini, “Introduction to Gravitation”, World Scientific, Singapore, 1985.
- [56] M. Spivak, “A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol. 2”, Publish or Perish, Inc., 1970.
- As seguintes referências, embora não aparecem no texto, ainda assim têm sido bastante fundamentais no desenvolvimento da primeira parte da tese, sobre cordas Z_k :*
- [57] M. Aryal and A.E. Everett, “Properties Of Z(2) Strings”, Phys. Rev. D35 (1987) 3105; 2398; C-P Ma, “SO(10) cosmic strings and baryon number violation”, Phys. Rev. D48 (1993) 530.
- [58] A. Yung, “What do we learn about confinement from the Seiberg-Witten Theory”, hep-th/0005088.
- [59] N. Dorey, C. Fraser, T. J. Hollowood and M.A.C. Kneipp, “Non Abelian Duality in N=4 Supersymmetric Gauge Theories”, hep-th/9512116.
- [60] P. Goddard and D.I. Olive, “New Developments In The Theory Of Magnetic Monopoles”, Rep. Prog. Phys. 127 (1978) 1357.
- Embora não pareçam no texto, as seguintes referências têm sido úteis para o desenvolvimento da segunda parte da tese, sobre redução de Legendre:*
- [61] D. I. Olive and P. C. West, “The N=4 Supersymmetric E(8) Gauge Theory And Coset Space: Dimensional Reduction,” Nucl. Phys. B 217 (1983) 248.

- [62] P. Forgacs and N. S. Manton, “Space-Time Symmetries In Gauge Theories,” *Commun. Math. Phys.* 72 (1980) 15.
- [63] G. Chapline and N. S. Manton, “The Geometrical Significance Of Certain Higgs Potentials: An Approach To Grand Unification,” *Nucl. Phys. B* 184 (1981) 391.
- [64] N. S. Manton, “Fermions And Parity Violation In Dimensional Reduction Schemes,” *Nucl. Phys. B* 193 (1981) 502.
- [65] N. S. Manton, “A New Six-Dimensional Approach To The Weinberg-Salam Model,” *Nucl. Phys. B* 158 (1979) 141.
- [66] J. M. Overduin and P. S. Wesson, *Phys. Rept.* 283 (1997) 303.
- [67] E. Witten, “Some Exact Multipseudoparticle Solutions Of Classical Yang-Mills Theory,” *Phys. Rev. Lett.* 38 (1977) 121.
- [68] J. Scherk, “Extended Supersymmetry and Extended Supergravity Theories,” LPTENS 78/21, *NATO Advanced Study Inst. on Gravitation: Recent Developments, Cargese, France, Jul 10-29, 1978.*
- [69] A. Salam and J. Strathdee, “On Kaluza-Klein Theory”, *Ann. of Physics*, 141 (1982) 316-352.
- [70] S. Hollands, “Noether charges corresponding to Killing vectors for self-interacting quantum field theories in curved spacetime,” *Annalen Phys.* 10 (2001) 859.
- [71] P. van Nieuwenhuizen, “General Theory Of Coset Manifolds And Antisymmetric Tensors Applied To Kaluza-Klein Supergravity,” ITP-SB-84-57, *Supersymmetry and Supergravity '84, Trieste, 1984.*
- [72] M. Spivak, “A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol. 1”, Publish or Perish, Inc., 1970.
- [73] F. Gieres, “Geometry of Supersymmetric Gauge Theories”, *Lecture Notes in Physics* 302, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [74] Robert M. Wald, “General Relativity”, Chicago University Press, Chicago, 1984.
- [75] S. Kobashi, K. Nomizu, “Foundations of Differential Geometry, Vol. 1”, Interscience Publishers, New York, 1963.
- [76] S. Kobashi, K. Nomizu, “Foundations of Differential Geometry, Vol. 2”, Interscience Publishers, New York, 1969.
- [77] K. Nomizu, “Invariant Affine Connections on Homogeneous Spaces”, *Amer. J. Math.* 76 (1954), 33.
- [78] M. Nakahara, “Geometry, Topology and Physics”, IOP Publishing Ltd, Philadelphia, 1990.
- [79] A. Lichnerowicz, “Geometry of Groups of Transformations”, Noordhoff Publishing, Leyden, the Netherlands, 1977.

- [80] G. Vilasi, “Hamiltonian Dynamics”, World Scientific, 1998.
- [81] Y. Choquet-Bruhat, C. DeWitt-Morette, “Analysis, Manifolds and Physics, Part II: 92 Applications”, North-Holland, 1989.
- [82] M. Quirós, “New Ideas in Symmetry Breaking”, hep-ph/0302189.
- [83] C. Biggio, “Symmetry Breaking in Extra Dimensions”, hep-ph/0312209.
- [84] E. Cremmer, J. Scherk, J. Schwarz, “Spontaneously Broken $N = 8$ Supergravity”, Phys.Lett. B84 (1979) 83.
- [85] J. Gheerardyn, “Aspects of On-Shell Supersymmetry”, hep-th/0411126.
- [86] J. Wess and J. Bagger, “Supersymmetry and Supergravity”, 2nd Ed., Princeton, 1992.
- [87] H. Flanders, “Differential Forms with Applications to the Physical Sciences”, Academic Press, NY, London, 1963.