

Tese de  
Mestrado

**“O LIMITE DE BEKENSTEIN EM UMA  
TEORIA QUÂNTICA DE CAMPO  
ASSINTÓTICAMENTE LIVRE”**

**Enrique John Arias Chinga**

**Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas**

**Rio de Janeiro, Fevereiro de 2010.**

## Resumo

Para campos livres confinados espacialmente, o limite de Bekenstein estabelece que a entropia específica satisfaz a desigualdade  $\frac{S}{E} \leq 2\pi R$ , onde  $R$  é o radio da menor esfera que circunscribe o sistema. Nessa tese, a validade do limite de Bekenstein no setor assintoticamente livre de uma teoria de campo escalar euclidiana com auto-interação  $(\lambda\phi^4)_d$ , definido numa região espacial compacta sem fronteiras, é investigada. Consideramos que este sistema está em equilíbrio térmico com um reservatório a uma temperatura  $\beta^{-1}$ . Usando o metodo do potencial efetivo, obtivemos a energia média renormalizada  $E$  e a entropia canônica  $S$  do sistema. Discutimos em que situações a entropia específica satisfaz ou não o limite de Bekenstein.

## Abstract

For spatially bounded free fields, the Bekenstein bound states that the specific entropy satisfies the inequality  $\frac{S}{E} \leq 2\pi R$ , where  $R$  stands for the radius of the smallest sphere that circumscribes the system. The validity of the Bekenstein bound on the specific entropy in the asymptotically free side of the Euclidean  $(\lambda\varphi^4)_d$  self-interacting scalar field theory, defined in a compact spatial region without boundaries, is investigated. We consider a system described by the scalar field in thermal equilibrium with a reservoir at temperature  $\beta^{-1}$ . Using the effective potential we obtain the renormalized mean energy,  $E$ , and the canonical entropy,  $S$ , for the system, presenting an analytical proof that the specific entropy does not satisfy a quantum bound in some situations.

*A mi madre, quien me enseñó  
lo más valioso que he aprehendido.*

## Agradecimentos

- Em primeiro lugar eu gostaria de agradecer ao CBPF pelas condições de trabalho concedidas e à CAPES e FAPERJ pelo apoio financeiro.
- Ao meu orientador Nami Fux Svaiter pela orientação e estímulo constante para o trabalho.
- A meu amigo e colega Martin Aparicio, pela motivação inicial, pelas discussões constantes e sobre tudo pela grande amizade.
- A minha família, pelo carinho de sempre, pela confiança e o apoio constantes. Por ser eles exemplos que me fortalecem e me guiam pela vida.
- A todos meus amigos e colegas, pelas conversas, a companhia e o afeto. Grandes ajudas que me formaram como físico e como pessoa. Especialmente agradeço a: Azucena Rivasplata, Josephine Rua, Luis Durand, Juan Pablo Luna, Bruno Gomes e Lucas Tavares.
- Quero mostrar minha gratidão aos membros da colaboração, no CBPF, do experimento *Minerva* do Fermilab: professor Helio Da Motta e Cesar Castromonte. Sem ajuda deles os resultados computacionais mostrados nessa tese não teriam sido possíveis.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>O limite de Bekenstein</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>O método do potencial efetivo</b>	<b>11</b>
3.1	Os geradores funcionais em teoria quântica de campos . . . . .	11
3.2	A expansão perturbativa em número de laços . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Análise do limite de Bekenstein numa teoria de campo com liberdade assintótica</b>	<b>22</b>
4.1	O potencial efetivo ao nível de um laço . . . . .	22
4.2	O regime onde o quadrado da massa topológica é positivo definido, i.e., $m_T^2 > 0$ . . . . .	26
4.3	O regime onde o quadrado da massa topológica é negativo definido, i.e., $m_T^2 < 0$ . . . . .	31
<b>5</b>	<b>Resultados e Conclusões</b>	<b>38</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Campos quânticos na presença de fronteiras macroscópicas levantam questões importantes. Uma questão básica que tem sido discutida quando campos quânticos interagem com fronteiras é o fato desse sistema estar sujeito a certos limites fundamentais. 't Hooft [1] e Susskind [2], combinando mecânica quântica e gravitação, introduziram o limite holográfico, que postula  $S \leq \pi c^3 R^2 / \hbar G$ , onde  $S$  é a entropia do sistema [3].

Outra proposta, que relaciona a entropia  $S$  e a energia  $E$  de um sistema quântico confinado, estabelece  $S \leq 2\pi E R / \hbar c$ , onde  $R$  é o radio da menor esfera que circunscribe o sistema. Essa desigualdade é conhecida como o limite de Bekenstein. Essa desigualdade permite que a segunda lei generalizada da termodinâmica seja respeitada, a qual estabelece que a soma da entropia de um buraco negro e a entropia da matéria não pode diminuir. Por exemplo, um buraco negro de Schwarzschild num espaço tempo de quatro dimensões, satura esse limite.

Estamos interessados em analisar em quais situações teríamos uma limitação intrínseca na capacidade de armazenar informação de qualquer sistema quântico na ausência da gravidade. Quando a gravidade é desprezível, o limite é satisfeito para uma grande va-

riedade de sistemas. O limite de Bekenstein nos diz que qualquer sistema, descrito pelas leis da mecânica quântica e a relatividade restrita, tem uma limitação intrínseca na capacidade de armazenar informações.

Estudando um campo escalar confinado, sem massa, com auto-interação  $(\lambda \varphi^p)_d$  no regime de acoplamento forte, uma generalização do limite de Bekenstein foi obtida por Aparicio Alcalde *et al* [9]. Existe na literatura alguns trabalhos anteriores estudando esse limite para campos fracamente acoplados [10] [11].

Na referência [9], foi mostrado em que situações campos escalares fortemente acoplados podem satisfazer o limite de Bekenstein. Assumindo que o campo escalar esta confinado no interior de um hipercubo com lados de tamanho  $L$ , onde o campo escalar satisfaz condições de fronteira de Dirichlet, fez se uso da expansão perturbativa do acoplamento forte [12] [13] [14] [15] [16]. Assim em [9] foi obtida a energia média renormalizada e a entropia do sistema até a ordem  $\lambda^{-\frac{2}{p}}$ . Considerando o comportamento das quantidades termodinâmicas do sistema a baixas temperaturas, foi mostrado que quando a energia renormalizada do ponto zero é negativa, o limite quântico pode ser invalidado. Uma questão ainda aberta na literatura diz respeito ao sinal da energia renormalizada do ponto zero para campos livres descritos por integrais gaussianas. Esse sinal depende a princípio da topologia, da dimensionalidade do espaço-tempo, da forma geométrica da fronteira e também de outras propriedades físicas do sistema [17] [18] [19] [20]. Revisões discutindo o efeito Casimir [21] são apresentadas nas Refs. [22] [23] [24] [25] [26].

O propósito dessa tese é investigar o limite de Bekenstein numa situação física ainda não discutida na literatura, a saber, teorias quânticas de campos com interação que de-



screvem modelos com liberdade assintótica [27] [28] [29] [30] [31]. Gostaríamos de ressaltar que essa situação de campos com com liberdade assintótica, definidos numa pequena região do espaço, pode ocorrer na *QCD*, onde existiria uma transição de fase confinamento-desconfinamento a altas temperaturas ou se a materia é fortemente comprimida [32] [33] [34]. Para uma revisão completa deste tópico veja-se Ref. [35]. Em colisões de ions pesados ultra-relativísticos esperamos que o plasma de quarks e gluons seja produzido. Teriamos uma fase desconfiada numa pequena região do espaço. Devido a dificuldade de tratar a *QCD*, vamos apresentar um modelo mais simples que apresenta liberdade assintótica para algunos valores da constante de acoplamento. A validade do limite de Bekenstein em sistemas definidos numa região espacial compacta sem fronteiras, descritos por uma teoria assintoticamente livre é investigada. Estudaremos uma teoria quântica de campos associada a um campo escalar euclidiano com auto-interação  $(\lambda\varphi^4)_d$ , com o sinal negativo para a constante de acoplamento [36].

Para estudar o limite de Bekenstein nessa teoria com liberdade assintótica, assumimos que o campo escalar está confinado numa região limitada. Utilizaremos a expansão perturbativa de acoplamento fraco na teoria  $(\lambda\varphi^4)_d$  e assumiremos condições periódicas em todas as direções espaciais. Isso é feito para mantermos a invariância translacional de nosso modelo [37]. Para o leitor interessado em artigos estudando como se implementa a renormalização perturbativa para sistemas onde a invariância translacional foi quebrada veja-se, por exemplo as Refs. [38] [39] [40] [41] [42] [43] [44]. Assumimos também que o sistema está em equilíbrio térmico com um reservatório e investigaremos o setor assintoticamente livre da teoria  $(\lambda\varphi^4)_d$  [45] [46] [47] [48] [49]. Para estudar a

existencia de um limite quântico na entropia específica, analisaremos o comportamento da entropia específica usando o método do potencial efetivo.

Gostaríamos de enfatizar que a teoria do campo escalar com o sinal trocado da constante de acoplamento apresenta um condensado [50]. Na teoria quântica de campo com auto-interação  $(\lambda \varphi^4)_d$ , é possível achar a energia do vácuo  $E(\lambda)$ . Essa quantidade é dada pela soma de todos os diagramas conexos vácuo-vácuo. No plano complexo  $\lambda$ , a função  $E(\lambda)$  é analítica para  $Re(\lambda) > 0$  e a descontinuidade no eixo real é relacionada à vida média do vácuo. Para um sistema de  $N$  partículas, definimos  $E_N(\lambda)$  como a energia desse estado. Para  $\lambda$  negativo, temos estados de energia negativa. Definindo  $\max E_N(\lambda) = E_B$ , a probabilidade do vácuo de decair é  $e^{-E_B}$ . O condensado passa a ser descrito por um campo clássico  $\varphi_c$ . Nessa tese todos esses conceitos serão amplamente discutidos. Para simplificar os cálculos nos assumimos um sistema de unidades tal que  $\hbar = c = k_B = 1$ .

## Capítulo 2

# O limite de Bekenstein

A incorporação dos buracos negros dentro da estrutura formal da Mecânica Estatística é uma história fascinante que traz consigo resultados sobre os limites na capacidade para armazenar informações de um sistema. Esses resultados não teriam sido possíveis somente utilizando argumentos ligados a teoria da informação.

Um resultado fundamental para o entendimento das propriedades termodinâmicas de um buraco negro é o conhecido *teorema da área*, obtido independentemente por Demetrios Christodoulou e Stephen Hawking nos inícios da década de 1970. Esse teorema estabelece que a área do horizonte de eventos de um buraco negro nunca pode diminuir num processo dinâmico clássico genérico. Além disso, pode-se mostrar que se dois buracos negros se superpoem para formar um novo buraco negro, a área do buraco negro final é maior ou igual a soma das áreas dos buracos negros iniciais.

Outro resultado crítico é conhecido pela frase ”*um buraco negro não tem cabelo*”. Dessa forma se denomina ao fato que um buraco negro estacionário tem um estado único carac-

terizado apenas por três quantidades físicas: massa, carga elétrica e momento angular. O espaço de fase do sistema que colapsa para formar um buraco negro foi drasticamente reduzido nesse processo. Portanto o estado final do sistema que colapsa terá entropia zero qualquer que seja a entropia do sistema inicial. Desse desaparecimento de entropia temos um paradoxo e uma possível violação da segunda lei da termodinâmica. Esse resultado não só deixa ao buraco negro fora da termodinâmica tanto como coloca dúvidas sobre o domínio e a validade dos fundamentos dessa grande área da física. Esse paradoxo é contornado se associamos uma entropia ao buraco negro. A identificação da entropia que tem que ser associada a um buraco negro é guiada pelo teorema da área.

Jacob Bekenstein em 1972, propõe que a entropia de um buraco negro  $S_{BH}$  é proporcional a área do horizonte de eventos,  $A$ . Bekenstein propuz  $S_{BH} = \kappa\eta A/L_P^2$ , onde  $\eta$  é uma constante de proporcionalidade adimensional,  $\kappa$  a constante de Boltzmann e  $L_P$  o comprimento de Planck. Nessa fórmula se mostra uma estreita relação entre três pilares da física: mecânica quântica, relatividade restrita e mecânica estatística.

Porém Bekenstein foi além disso e conjecturou que a entropia dos buracos negros também tem que ser considerada na segunda lei da termodinâmica. Dessa forma Bekenstein formula a Segunda Lei Generalizada da Termodinâmica (SLG), que estabelece que a entropia de um sistema de matéria ou radiação mais a entropia dos buracos negros que estejam presentes sempre tende a aumentar em qualquer processo.

$$\Delta S_T = \Delta S_{mat} + \Delta S_{BH} \geq 0. \quad (2.1)$$

A presença dessa entropia apresenta certas questões. Por exemplo, em mecânica estatística

temos que uma entropia  $S$  de um sistema está diretamente relacionada a um número de possíveis estados microscópicos compatíveis com o estado macroscópico do sistema. De modo que se associamos uma entropia ao buraco negro, estaremos assumindo implicitamente que esse apresenta uma série de possíveis microestados. A natureza desses estados microscópicos de um buraco negro é totalmente um mistério.

Outra complicação está relacionada com o fato de que temos que associar uma temperatura ao buraco negro. Essa temperatura pode-se identificar de uma fórmula análoga à primeira lei da termodinâmica achada para um buraco negro. Utilizaremos como exemplo o buraco negro estacionário mais geral possível, i.e., o buraco negro de Kerr carregado. A área do horizonte de eventos desse buraco negro  $A$  é dada pela seguinte expressão

$$A = 4\pi[(M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2})^2 + a^2], \quad (2.2)$$

sendo  $m$ ,  $q$  e  $j$  massa, carga e momento angular do buraco negro. A partir dessas quantidades definimos  $M \equiv Gmc^{-2}$ ,  $Q \equiv \sqrt{G}qc^{-2}$  e  $a \equiv jm^{-1}c^{-1}$ . Se diferenciamos a área do horizonte de eventos com respeito aos parâmetros livres obtemos

$$d(mc^2) = \Theta dA + \Phi dQ + \Omega dj. \quad (2.3)$$

O estudo do movimento de uma partícula carregada em torno de um buraco negro de Kerr carregado mostra que  $\Phi$  é o potencial elétrico no horizonte de eventos, e  $\Omega$  a frequência angular com a qual a partícula atravessa o horizonte de eventos. A quantidade  $\Theta$  é a chamada gravidade superficial do buraco negro. Assim vemos que  $\Phi dQ$  e  $\Omega dj$  são o trabalho feito sobre o buraco negro pela adição de uma carga  $dQ$  e de um momento

angular  $dj$ , respectivamente. Como  $mc^2$  é a energia do buraco negro, a Eq. (2.4) lembra a primeira lei da termodinâmica  $dU = TdS + \Phi dQ + \Omega dj$ . Assim vemos que se a fórmula da entropia do buraco negro proposta por Bekenstein é correta, temos que associar ao buraco negro uma temperatura  $T_{BH}$  que é proporcional à gravidade superficial do buraco negro  $\Theta$ .

Outra maneira de identificar a temperatura do buraco negro é por intermédio do chamado *proceso de Geroch*. Nesse proceso se extrai energia rotacional de um buraco negro de Kerr jogando nele radiação térmica trazida desde um reservatório no infinito. A eficiência do motor térmico-gravitacional que trabalha segundo o proceso de Geroch tem a mesma forma que a eficiência de um motor térmico num ciclo de Carnot, mostrando que o buraco negro faria o papel de um sorvedor a uma temperatura  $T_{BH}$  que é proporcional a  $\Theta$ .

Embora todas estas analogias indicam que o buraco negro tem associada uma temperatura  $T_{BH}$ , a interpretação da gravidade superficial de um buraco negro  $\Theta$  como a temperatura desse tem uma dificuldade fundamental. Todo corpo a uma temperatura  $T$  emite uma radiação térmica conhecida como radiação de corpo negro. Portanto a designação de uma temperatura para o buraco negro entra em conflicto direto com a idéia estabelecida que nada pode ser emitido pelo buraco negro.

Essa controversia foi resolvida por Stephen Hawking em 1974. Estudando um campo bosónico quântico em torno de um corpo que colapsa para formar um buraco negro, Hawking mostrou que o buraco negro transforma processos virtuais em reais e partículas são do

campo são emitidas para o infinito. Quando a formação do buraco negro está completa se tem que a taxa de emissão da radiação é a mesma de uma radiação de corpo negro a uma temperatura  $T_{BH}$ . Com esse trabalho Hawking mostrou que a entropia e a temperatura são verdadeiramente duas características físicas do buraco negro. Além disso se tem que devido à radiação do buraco negro a área do horizonte de eventos dele diminui, restringindo a validade do teorema da área só para proceso clássicos. Esse último resultado poderia ser considerado como uma violação da segunda lei da termodinâmica. Entretanto se pode mostrar que o processo de evaporação de um buraco negro satisfaz a segunda lei generalizada da termodinâmica, mostrando dessa forma sua validade.

Dessa forma se estabelece os fundamentos da termodinâmica do buraco negro. Agora temos uma curiosidade. Se jogamos um corpo dentro de um buraco negro temos que a entropia final do buraco negro tem que exceder a entropia inicial do buraco negro junto com a entropia do corpo, segundo a SLG. Mais o incremento na entropia (área) do buraco negro deve-se principalmente à quantidade de matéria que entra no buraco negro, e a princípio esse aumento não está correlacionado com a entropia que carrega o corpo. Assim se um corpo com uma determinada massa pode ter qualquer quantidade de entropia, então poderíamos ter uma violação da segunda lei generalizada da termodinâmica. Dessa observação Bekenstein conjecturou que um sistema finito tem que ter um limite máximo na quantidade de entropia que ele possui. Este limite é chamado o limite universal entrópico, ou limite de Bekenstein. Esse limite é válido em quanto as interações gravitacionais do sistema sejam consideradas desprezíveis. O limite de Bekenstein estabelece que a entropia

de um sistema confinado numa região finita do espaço satisfaz a seguinte desigualdade

$$S \leq 2\pi RE, \tag{2.4}$$

onde  $E$  é a energia média do sistema e  $R$  é o radio da menor esfera que circunscribe o sistema. Esse limite tem sido testado e verificado em um grande número de situações físicas. Desde que se tem um limite na entropia de um sistema, isso implica que se tem uma limitação na capacidade de armazenar informação de um sistema descrito pelas leis da mecânica quântica, a relatividade restrita e a termodinâmica.



# Capítulo 3

## O método do potencial efetivo

### 3.1 Os geradores funcionais em teoria quântica de campos

As quantidades mais importantes numa teoria quântica de campos são as funções de Green da teoria. No espaço-tempo de Minkowski, essas são definidas como os valores esperados no vácuo de produtos dos operadores de campo temporalmente ordenados. Usando-se métodos funcionais, temos uma forma eficiente de obter todas as funções de Green de uma teoria em qualquer ordem de teoria de perturbações. O gerador funcional dessas funções de Green é definido como a amplitude de probabilidade de ter uma transição do campo partindo de um estado inicial de vácuo,  $|0^-\rangle$ , até um estado final de vácuo,  $|0^+\rangle$ , por meio de uma fonte externa  $j(x)$ , i.e.,  $Z[j] = \langle 0^+ | 0^- \rangle_j$ . Na versão euclideana da teoria esse gerador é dado pela expressão:

$$Z[j] = \mathcal{N} \int [D\phi] \exp(-S_0 - S_I + \int d^d x j(x)\phi(x)), \quad (3.1)$$

onde  $S_0$  e  $S_I$  são respectivamente a ação associada ao campo livre e o termo de interação. A quantidade  $\mathcal{N}$  é uma constante de normalização tal que  $Z[0] = 1$ . Na posse desse

gerador funcional, as funções de Green euclidianas da teoria, ou funções de Schwinger, são calculadas tomando derivadas funcionais sobre  $Z[j]$  com respeito à fonte,  $j(x)$ , e no final eliminando-se a fonte. A saber:

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \langle \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \rangle = \frac{\delta^n Z[j]}{\delta j(x_1) \dots \delta j(x_n)} \Big|_{j=0}. \quad (3.2)$$

Esse gerador funcional apresenta redundância de informações pois ele gera também as funções de Green desconexas. Para evitarmos esta redundância de informações vamos definir o gerador funcional das funções de Green conexas. Esse gerador é denotado por  $F[j]$ , e é o análogo da energia livre de Helmholtz em mecânica estatística, assim como o gerador funcional  $Z[j]$  é a generalização natural da função de partição. O gerador funcional das funções de Green conexas está definido por

$$F[j] = \ln Z[j], \quad (3.3)$$

satisfaz a normalização  $F[0] = 0$ . As funções de Green conexas são definidas como

$$G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta^n F[j]}{\delta j(x_1) \dots \delta j(x_n)} \Big|_{j=0}. \quad (3.4)$$

Um caso particular é a função de Green de um ponto que é conexa, por definição

$$G_c^{(1)}(x) = \frac{\delta F[j]}{\delta j(x)} \Big|_{j=0} = \langle \varphi(x) \rangle. \quad (3.5)$$

Para sistemas que exibem invariancia translacional esta função acima é uma constante  $v$ , independente de  $x$ .

$$G_c^{(1)}(x) = \langle \varphi(0) \rangle = v. \quad (3.6)$$

Essa função de Green de um ponto, em Minkowski é na verdade o valor esperado no vácuo do operador do campo. Esse valor é identicamente nulo, i.e.,  $v = 0$ , num caso de

uma teoria normal sem quebra da simetria. Para uma situação onde ocorre uma quebra espontânea da simetria, temos  $v \neq 0$ . Transições de fase são melhor entendidas usando-se métodos funcionais.

Embora  $F[j]$  só produza as funções de Schwinger conexas, essas também apresentam uma redundância de informação e se percebe que se pode obter cada um dos diagramas conexos,  $G_c^n(x_1, \dots, x_n)$ , partindo-se de um conjunto mais reduzido de diagramas. Esses diagramas são chamados *gráficos irreduzíveis de uma partícula* e o gerador funcional deles é chamado *ação efetiva* e é denotado por  $\Gamma[\varphi_c]$ . Vamos definir o campo clássico, denotado por  $\varphi_c(x)$ , como

$$\varphi_c(x) = \frac{\delta F[j]}{\delta j(x)}. \quad (3.7)$$

É importante lembrar que depois de avaliarmos a derivação funcional na Eq. (3.7) não se faz a fonte se anular. Podemos escrever isso mais explicitamente da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \varphi_c(x) &= \varphi_c(x, j) \\ j(x) &= j(x, \varphi_c). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Da equação Eq.(3.7) vemos que quando avaliamos o campo clássico  $\varphi_c(x, j)$  com uma fonte externa nula,  $j = 0$ , ele se torna a função de Green de um ponto. Em outras palavras, o campo clássico exhibe o valor constante  $v$  na ausência de fonte externa. Usando esse fato na Eq.(3.8) temos

$$\begin{aligned} \varphi_c(x, 0) &= v \\ j(x, v) &= 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Vamos definir a ação efetiva  $\Gamma[\varphi_c]$ , (funcional do campo clássico  $\varphi_c(x)$ ), como a transfor-

mada de Legendre do gerador das funções de Green conexas,  $F[j]$ , tomando as variáveis  $j(x)$  e  $\varphi_c(x)$  como variáveis conjugadas. Utilizando a Eq.(3.8) para fazer a inversão entre elas temos

$$\Gamma[\varphi_c] = F[j] - \int d^4x j(x)\varphi_c(x). \quad (3.10)$$

Na Eq.(3.10) estamos assumindo que a fonte depende do campo clássico, i.e.,  $j(x) = j(x, \varphi_c)$ . Temos então que  $\Gamma$  é apenas um funcional de  $\varphi_c$ . Diferenciando funcionalmente Eq.(3.10) obtemos a seguinte relação

$$\frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x)} = -j(x). \quad (3.11)$$

Devido às condições mostradas na Eq.(3.9) vemos que na ausencia de fontes, a configuração que o campo clássico assume é uma configuração uniforme e estacionária. Em outras palavras,  $\varphi_c(x) = v$  é a configuração do campo que faz extrema a ação efetiva

$$\left. \frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x)} \right|_{\varphi_c(x)=v} = 0. \quad (3.12)$$

Como já dissemos a ação efetiva é o gerador funcional dos vértices próprios ou gráficos irreduzíveis de uma partícula com os quais nos podemos gerar todas as funções de Green conexas de  $F[j]$  e de  $Z[j]$ . Os vértices próprios estão definidos da seguinte maneira

$$\Gamma_v^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \left. \frac{\delta^n \Gamma[\varphi_c]}{\delta\varphi_c(x_1) \dots \delta\varphi_c(x_n)} \right|_{\varphi_c(x)=v}, \quad (3.13)$$

onde  $v$  é o valor constante que assume o campo clássico quando faz extrema a ação efetiva.

Com os vértice próprios podemos expandir a ação efetiva em potências do campo clássico da seguinte forma

$$\Gamma[\varphi_c] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_1 \dots dx_n (\varphi_c(x_1) - v) \dots (\varphi_c(x_n) - v) \Gamma_v^{(n)}(x_1, \dots, x_n). \quad (3.14)$$

Por exemplo, para uma configuração uniforme e estacionária nula, teremos

$$\Gamma[\varphi_c] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_1 \dots dx_n \varphi_c(x_1) \dots \varphi_c(x_n) \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n), \quad (3.15)$$

onde os coeficientes dessa expanssão são definidos como

$$\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \Gamma_v^{(n)}(x_1, \dots, x_n)|_{v=0}. \quad (3.16)$$

Se consideramos agora que o campo clássico é independente do ponto, pode-se mostrar que a ação efetiva pode ser escrita da seguinte maneira

$$\Gamma[\varphi_c] = - \int d^4x V(\varphi_c) \quad (3.17)$$

onde a quantidade  $V(\phi_c)$  não é mais um funcional. Essa quantidade é chamada de potencial efetivo e pode ser escrito como

$$V(\varphi_c) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_c^n}{n!} \tilde{\Gamma}^{(n)}(0, \dots, 0). \quad (3.18)$$

Os coeficientes  $\tilde{\Gamma}^{(n)}$  são as transformadas de Fourier das funções  $\Gamma^{(n)}$ . De Eq. (3.18) temos que o potencial efetivo é a função geratriz das funções de Green irreduzíveis de uma partícula com momento zero.

O potencial efetivo  $V(\varphi_c)$  tem uma interpretação física. Ele representa a densidade de energia do campo quando esse apresenta um valor esperado no vácuo igual a  $\varphi_c$ . É uma ferramenta muito importante para conhecer as propriedades do estado fundamental de um campo. Uma característica principal do potencial efetivo é que no seu mínimo temos, sem nenhuma aproximação, o verdadeiro vácuo da teoria. Nesse sentido o potencial efetivo é a generalização do potencial clássico que aparece como a parte que não tem derivadas

no lagrangeano da teoria. Na verdade o potencial efetivo contém ao potencial clássico como uma primeira aproximação. Essa aproximação é corrigida por uma série infinita de diagramas de Feynman. Essa é a chamada expansão em número de laços, pois a ordem dos gráficos que corrigem ao potencial clássico estão compostos por diagramas de 1-laço, 2-laços e assim sucessivamente. Se reestabelecemos a constante de Planck nas integrais funcionais se pode mostrar que a potência da constante de Planck da conta do número de laços que apresenta o diagrama considerado .

### 3.2 A expansão perturbativa em número de laços

Como já discutimos, desejamos calcular o potencial efetivo  $V(\varphi_c)$ , pois o conhecimento dessa função nos fornece o entendimento da estrutura do estado fundamental da teoria. Entretanto, o cálculo exato do potencial efetivo envolve uma soma infinita de diagramas de Feynman. Desta forma uma aproximação perturbativa faz-se necessária. Como naturalmente os diagramas de Feynman que aparecem no potencial efetivo ficam caracterizados por potências da constante de Planck (expansão em laços), vamos utilizar essa expansão. Nesse método da expansão em número de laços, se calculam primeiro todas as contribuições ao potencial efetivo dos gráficos que não tem nenhum laço. Em seguida calculamos aqueles que apresentam só um laço e assim sucessivamente.

Considerando que nossa teoria está descrita pela densidade lagrangeana  $\mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi)$ , se reescalamos esta densidade multiplicando-a por um parâmetro  $a$

$$\mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi) \rightarrow \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi)/a, \quad (3.19)$$

pode-se mostrar que uma expansão em número de laços é equivalente a uma expansão

em potências desse parâmetro  $a$ . De Eq. (3.19) temos que cada gráfico de Feynman agora carregará um fator que é uma potência do parâmetro  $a$ . Como o propagador é por definição a inversa do operador diferencial que atua sobre o campo que aparece na densidade lagrangeana, temos que cada propagador carregará um factor  $a$ . Cada vértice terá associado um factor  $a^{-1}$ , portanto se o gráfico de Feynman tem  $I$  propagadores internos,  $V$  vértices e seja  $P$  a potência de  $a$  num diagrama, teremos que  $P = I - V$ . Queremos enfatizar que estamos considerando gráficos de Feynman irreduzíveis de uma partícula, portanto os propagadores externos do gráfico de Feynman deve ser removidos.

Por outro lado, vemos que o número de laços que apresenta um diagrama,  $L$ , está dado pela quantidade de variáveis de integração independentes que tenha o diagrama. Como cada propagador interno tem que ser integrado, então o número de integrações em princípio é  $I$ . Como cada vértice carrega uma função delta que garante a conservação do momento em cada vértice, sendo um desses vínculos a conservação do momento total do diagrama, teremos só  $V - 1$  vínculos sobre os propagadores internos. Portanto, as variáveis de integração independentes são  $L = I - V + 1$ . Mostramos que a potência do parâmetro  $a$  da conta do número de laços que apresenta o diagrama, pois  $P = L - 1$ , e que uma expansão em número de laços é equivalente a uma expansão em potências do parâmetro  $a$ . O candidato imediato para ser o parâmetro  $a$  é a constante de Planck  $\hbar$ , se não fosse pela nossa escolha de unidades que faz esse parâmetro igual à unidade.

Dessa forma, vamos achar a ação efetiva a nível de um laço. Vamos utilizar o método do

ponto de sela. Partindo da expressão do gerador funcional  $Z[j]$

$$Z[j] = e^{F[j]/\hbar} = \mathcal{N} \int [D\phi] \exp(-S[\phi, j]/\hbar), \quad (3.20)$$

onde

$$S[\phi, j] = \int d^4x \left( \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 + \frac{m^2}{2} \phi^2 + U(\phi) - j\phi \right), \quad (3.21)$$

e  $\mathcal{N}$  é uma constante de normalização tal que  $Z[0] = 1$ . Queremos ressaltar que na Eq. (3.20) reintroduzimos a constante de Planck  $\hbar = 1$  para dar conta do número de laços. O método do ponto de sela se baseia em acharmos uma solução estacionária de  $S[\phi, j]$ . Em seguida devemos expandir  $\phi$  da Eq. (3.21) em torno dessa solução estacionária. Chamaremos de  $\phi_0$  à configuração que faz estacionária  $S[\phi, j]$ . Então  $\phi_0$  obedece a equação

$$(-\nabla^2 + m^2)\phi_0(x) + U'(\phi_0) = j(x). \quad (3.22)$$

Da Eq. (3.22) vemos que  $\phi_0$  é dependente de  $j(x)$ . Para expandir a Eq. (3.21) em torno de  $\phi_0(x)$  fazemos  $\phi(x) = \phi_0(x) + \tilde{\phi}(x)$ . Assim teremos que

$$S[\phi, j] = S[\phi_0, j] + \int d^4x \left[ \frac{1}{2} (\nabla\tilde{\phi})^2 + \frac{1}{2} (m^2 + U''(\phi_0)) \tilde{\phi}^2 + \sum_{p \geq 3} \frac{1}{p!} U^{(p)}(\phi_0) \tilde{\phi}^p \right]. \quad (3.23)$$

Substituindo a Eq. (3.23) na Eq. (3.20), obtemos

$$e^{F[j]/\hbar} = \mathcal{N} e^{-S[\phi_0, j]/\hbar} \int D\tilde{\phi} \exp \left[ -\frac{1}{\hbar} \int d^4x \left[ \frac{1}{2} (\nabla\tilde{\phi})^2 + \frac{1}{2} (m^2 + U''(\phi_0)) \tilde{\phi}^2 + \sum_{p \geq 3} \frac{1}{p!} U^{(p)}(\phi_0) \tilde{\phi}^p \right] \right]. \quad (3.24)$$

Prosseguindo, vamos expandir o gerador funcional  $F[j]$  em potências de  $\hbar$

$$F[j] = F_0[j] + \hbar F_1[j] + \hbar^2 F_2[j] + \dots \quad (3.25)$$



Assim podemos reescrever a Eq. (3.24) da seguinte maneira

$$F[j] = \hbar \ln \mathcal{N} \int D\tilde{\varphi} \exp \left[ -\frac{1}{\hbar} \int d^4x \left[ \frac{1}{2} (\nabla \tilde{\varphi})^2 + \frac{1}{2} (m^2 + U''(\varphi_0)) \tilde{\varphi}^2 + \sum_{p \geq 3} \frac{1}{p!} U^{(p)}(\varphi_0) \tilde{\varphi}^p \right] \right] - S[\varphi_0, j]. \quad (3.26)$$

Usando a Eq. (3.25) e a Eq. (3.26) vemos que a contribuição de ordem  $\hbar^0$  a  $F[j]$  é simplesmente

$$F_0[j] = -S[\varphi_0, j]. \quad (3.27)$$

Substituindo a Eq. (3.27) na Eq. (3.24) obtemos

$$e^{(F[j]-F_0[j])/\hbar} = \mathcal{N} \int D\tilde{\varphi} \exp \left[ -\frac{1}{\hbar} \int d^4x \left[ \frac{1}{2} (\nabla \tilde{\varphi})^2 + \frac{1}{2} (m^2 + U''(\varphi_0)) \tilde{\varphi}^2 + \sum_{p \geq 3} \frac{1}{p!} U^{(p)}(\varphi_0) \tilde{\varphi}^p \right] \right], \quad (3.28)$$

onde  $\mathcal{N}$  é uma constante de normalização tal que  $Z[0] = 1$ , quer dizer

$$\mathcal{N}^{-1} = \int D\varphi \exp \left[ -\frac{1}{\hbar} \int d^4x \left[ \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{m^2}{2} \varphi^2 + U(\varphi) \right] \right]. \quad (3.29)$$

Utilizando a Eq. (3.29), a Eq. (3.28) pode ser escrita da seguinte maneira

$$e^{(F[j]-F_0[j])/\hbar} = \frac{\int D\tilde{\varphi} \exp \left[ -\frac{1}{\hbar} \int d^4x \left[ \frac{1}{2} (\nabla \tilde{\varphi})^2 + \frac{1}{2} (m^2 + U''(\varphi_0)) \tilde{\varphi}^2 + \sum_{p \geq 3} \frac{1}{p!} U^{(p)}(\varphi_0) \tilde{\varphi}^p \right] \right]}{\int D\varphi \exp \left[ -\frac{1}{\hbar} \int d^4x \left[ \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{m^2}{2} \varphi^2 + U(\varphi) \right] \right]}, \quad (3.30)$$

Reescreveremos  $\varphi = \tilde{\varphi} = \sqrt{\hbar} \phi$ , encontramos que a Eq. (3.30) fica escrita como

$$e^{(F[j]-F_0[j])/\hbar} = \frac{\int D\phi \exp \left[ -\int d^4x \left[ \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} (m^2 + U''(\varphi_0)) \phi^2 + \sum_{p \geq 3} \frac{\hbar^{p/2-1}}{p!} U^{(p)}(\varphi_0) \phi^p \right] \right]}{\int D\phi \exp \left[ -\int d^4x \left[ \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{1}{\hbar} U(\sqrt{\hbar} \phi) \right] \right]}. \quad (3.31)$$

Para introduzirmos uma auto-interação vamos trabalhar explicitamente o caso do campo escalar massivo com auto-interação  $U(\varphi) = \lambda \varphi^4/4!$ . Dessa forma, a Eq. (3.31) se escreve

como

$$e^{(F[j]-F_0[j])/\hbar} = \frac{\int D\phi \exp \left[ - \int d^4x \left[ \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}(m^2 + \frac{\lambda}{2}\varphi_0^2)\phi^2 + \frac{\lambda}{3!}\hbar^{1/2}\varphi_0\phi^3 + \frac{\lambda}{4!}\hbar\phi^4 \right] \right]}{\int D\phi \exp \left[ - \int d^4x \left[ \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\hbar\phi^4 \right] \right]}.$$
(3.32)

Da Eq. (3.25) temos

$$\frac{F[j] - F_0[j]}{\hbar} = F_1[j] + \hbar F_2[j] + \dots,$$
(3.33)

Se tomamos o limite  $\hbar \rightarrow 0$  na Eq. (3.32) resulta

$$e^{F_1[j]} = \frac{\int D\phi \exp \left[ - \int d^4x \left[ \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}(m^2 + \frac{\lambda}{2}\varphi_0^2)\phi^2 \right] \right]}{\int D\phi \exp \left[ - \int d^4x \left[ \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 \right] \right]}.$$
(3.34)

As integrais que aparecem na Eq. (3.34) são gaussianas e podem ser feitas sem maior dificuldade, obtendo

$$F_1[j] = -\frac{1}{2} \ln \left[ \frac{\det K_{xy}(\varphi_0)}{\det K_{xy}(0)} \right],$$
(3.35)

onde definimos o operador  $K_{xy}(\varphi_0) = (-\nabla^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2}\varphi_0^2(x))\delta(x-y)$ . Definindo  $G_f$  como a inversa do operador  $K_{xy}(0) = (-\nabla^2 + m^2)\delta(x-y)$ , e utilizando que  $\ln \det A = Tr \ln A$ , podemos escrever a correção de um laço ao gerador funcional  $F_1[j]$  da seguinte maneira

$$F_1[j] = -\frac{1}{2} Tr \ln \left( 1 + \frac{\lambda}{2}\varphi_0^2 G_f \right).$$
(3.36)

Portanto ao nível de um laço teremos que o gerador funcional das funções de Green conexas está dado por

$$F[j] = -S[\varphi_0] + \int d^4x \varphi_0(x) j(x) - \frac{\hbar}{2} Tr \ln \left( 1 + \frac{\lambda}{2}\varphi_0^2 G_f \right),$$
(3.37)

onde chamamos  $S[\varphi_0] = S[\varphi_0, j = 0]$ . Desse resultado podemos realizar uma transformada de Legendre para achar a ação efetiva  $\Gamma[\varphi_c]$ . Portanto temos que fazer também uma

expansão da ação efetiva em potências de  $\hbar$ . Ou melhor

$$\Gamma[\varphi_c] = \Gamma_0[\varphi_c] + \hbar\Gamma_1[\varphi_c] + \hbar^2\Gamma_2[\varphi_c] + \dots \quad (3.38)$$

Desses resultados obtidos se pode provar que ao nível de um laço as funções  $\varphi_0$  e  $\varphi_c$  coincidem. A ação efetiva a esse nível vem dada pela expressão

$$\Gamma[\varphi_c] = -S[\varphi_c] - \frac{\hbar}{2}Tr \ln \left( 1 + \frac{\lambda}{2}\varphi_c^2 G_f \right). \quad (3.39)$$

Considerando agora que o campo clássico assume um valor constante  $\varphi_c(x) = \varphi$ , podemos calcular o potencial efetivo até o nível de um laço. Encontramos

$$V(\varphi_c) = \frac{m^2}{2}\varphi_c^2 + \frac{\lambda}{4!}\varphi_c^4 + \frac{\hbar}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \ln \left( 1 + \frac{\lambda\varphi_c^2}{p^2 + m^2} \right). \quad (3.40)$$

Esse resultado será usado nesse trabalho. Consideraremos que o espaço é compacto sem fronteiras. Assim o espaço dos momentos do campo será discreto.

# Capítulo 4

## Análise do limite de Bekenstein numa teoria de campo com liberdade assintótica

### 4.1 O potencial efetivo ao nível de um laço

Vamos considerar um campo escalar sem carga com uma auto-interação ( $\lambda\varphi^4$ ), definido em um espaçotempo de Minkowski  $d$ -dimensional. O gerador funcional das funções de Schwinger  $Z[h]$  é definido formalmente pela seguinte integral funcional [51]:

$$Z[h] = \int [D\varphi] \exp\left(-S_0 - S_I + \int d^d x h(x)\varphi(x)\right), \quad (4.1)$$

onde a ação que descreve ao campo escalar livre é dada por

$$S_0(\varphi) = \int d^d x \left( \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + \frac{1}{2}m_0^2\varphi^2 \right), \quad (4.2)$$

e a parte de interação, definida pela contribuição não gaussiana, é dada por o seguinte termo na ação:

$$S_I(\varphi) = \int d^d x \frac{\lambda}{4!} \varphi^4(x). \quad (4.3)$$

Na Eq. (4.1),  $[D\varphi]$  é formalmente dado por  $[D\varphi] = \prod_x D\varphi(x)$ , enquanto  $\lambda$  e  $m_0$  são, respectivamente, a constante de acoplamento e a massa nuas. Finalmente,  $h(x)$  é uma fonte externa que introduzimos para gerar as funções de Schwinger da teoria por meio de derivadas funcionais.

Assumiremos que o sistema é espacialmente limitado e está em equilíbrio com um reservatório térmico a uma temperatura  $\beta^{-1}$ . Como estamos assumindo que o acoplamento é fraco, podemos utilizar a expansão perturbativa usual para calcularmos a função de partição definida por  $Z(\beta, \Omega) = Z(\beta, \Omega, h)|_{h=0}$ , onde  $h$  é a fonte externa. Estamos definindo o volume da nossa variedade  $(d-1)$  dimensional como  $V_{d-1} \equiv \Omega$ . Da função de partição definimos a energia livre do sistema, dada por  $F(\beta, \Omega) = -\frac{1}{\beta} \ln Z(\beta, \Omega, h)|_{h=0}$ . Esta quantidade pode ser usada para calcular a energia média  $E(\beta, \Omega)$ , definida como

$$E(\beta, \Omega) = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z(\beta, \Omega, h)|_{h=0}, \quad (4.4)$$

e a entropia canônica  $S(\beta, \Omega)$  do sistema em equilíbrio com o reservatório. A entropia canônica  $S(\beta, \Omega)$  é dada pela expressão

$$S(\beta, \Omega) = \left(1 - \beta \frac{\partial}{\partial \beta}\right) \ln Z(\beta, \Omega, h)|_{h=0}. \quad (4.5)$$

Como a teoria do campo escalar com o sinal trocado da constante de acoplamento pode exibir um condensado, vamos usar o método do potencial efetivo para encontrar todas as quantidades termodinâmicas do sistema e estudar o estado fundamental da teoria. Primeiro, estudaremos o potencial efetivo ao nível de um laço num espaço euclidiano quadridimensional, para valores positivos da constante de acoplamento. Depois discutiremos a continuação analítica da teoria para valores negativos da constante de acoplamento.

Considerando que o sistema está em equilíbrio térmico com um reservatório a uma temperatura  $\beta^{-1}$ , assumiremos as condições de Kubo-Martin-Schwinger (KMS) [52] [53] [54] [55]. Também assumiremos que o campo está em uma região compacta. Por simplicidade usaremos condições de contorno periódicas para o campo nas três direções espaciais com comprimentos de compactificação  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$ . Depois dessas considerações, o potencial efetivo euclidiano pode se escrito como:

$$V_{eff}(\phi; \beta, L_1, L_2, L_3) = \frac{\mu^4}{3} \pi^2 g \phi^4 + U + \text{counterterms} + \frac{1}{\beta\Omega} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s+1}}{2s} g^s \phi^{2s} Z_4(2s, a_1, a_2, a_3, a_4), \quad (4.6)$$

onde definimos as variáveis  $\phi = \varphi/\mu$ ,  $g = \lambda/8\pi^2$ ,  $a_i^{-1} = \mu L_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $a_4^{-1} = \mu\beta$  e finalmente  $\Omega = L_1 L_2 L_3$ . Foi introduzido um parâmetro de massa  $\mu$  para manter a função zeta de Epstein  $Z_4$ , adimensional.

A primeira contribuição ao potencial efetivo definido na Eq.(4.6) é simplesmente o potencial clássico. Essa contribuição não tem nenhum termo quadrático porque consideraremos que o campo escalar não tem massa nua, i.e.,  $m_0 = 0$ . A segunda contribuição,  $U(\beta, L_1, L_2, L_3)$  é definida por

$$U(\beta, L_1, L_2, L_3) = \frac{1}{2\beta\Omega} \sum_{n_1, \dots, n_4 = -\infty}^{\infty} \ln \left( \left( \frac{2\pi m}{\beta} \right)^2 + \left( \frac{2\pi n_1}{L_1} \right)^2 + \left( \frac{2\pi n_2}{L_2} \right)^2 + \left( \frac{2\pi n_3}{L_3} \right)^2 \right). \quad (4.7)$$

A linha que aparece em Eq. (4.7) indica que o termo para o qual todos os  $n_i = 0$  deve ser omitido. Não é difícil mostrar que a Eq. (4.7) pode ser reescrita como

$$U(\beta, L_1, L_2, L_3) = \frac{1}{\beta\Omega} \sum_{n_1, n_2, n_3 = -\infty}^{\infty} \left( \pi\beta\bar{n} + \ln(1 - e^{-2\pi\beta\bar{n}}) \right) + \frac{1}{\beta\Omega} J_1, \quad (4.8)$$

onde estamos definindo a variável  $\bar{n}(L_1, L_2, L_3)$  e a constante, divergente,  $J_1$  como

$$\bar{n} = \sqrt{\left(\frac{n_1}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{L_2}\right)^2 + \left(\frac{n_3}{L_3}\right)^2}, \quad (4.9)$$

e

$$J_1 = \sum_{n_1, n_2, n_3=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \ln\left(1 + (2\pi m)^2\right) - \sum_{n_1, n_2, n_3=-\infty}^{\infty} \left(1 + 2\ln(1 - e^{-1})\right). \quad (4.10)$$

O último termo de Eq. (4.6) é explicitamente a correção dos gráficos de Feynman de um laço ao potencial efetivo e está definida em termos da função zeta de Epstein homogénea

$Z_p(2s, a_1, \dots, a_p)$ , dada por

$$Z_p(2s, a_1, \dots, a_p) = \sum_{n_1, \dots, n_p=-\infty}^{\infty} \left((a_1 n_1)^2 + \dots + (a_p n_p)^2\right)^{-s}. \quad (4.11)$$

A soma em Eq.(4.11) é convergente para  $s > p/2$ . A função zeta de Epstein homogénea tem uma continuação analítica no plano complexo, i.e.,  $s \in C$ , exceto por um polo em  $s = p/2$ . Devido a esta única contribuição polar, a qual ocorre em nosso caso em  $s = 2$ , a teoria pode ser renormalizada usando só um único contratermo. Em outras palavras, só é necessário renormalizar a constante de acoplamento da teoria. Como estamos assumindo condições de fronteira periódicas para o campo nas direções espaciais, temos uma geração topológica de massa, devido ao gráfico de Feynman da auto-energia [56] [57] [58]. A massa topológica é definida em termos da primeira condição de renormalização do potencial efetivo. Temos

$$\frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial \phi^2} \Big|_{\phi=0} = m_T^2 \mu^2. \quad (4.12)$$

É fácil mostrar que a massa topológica  $m_T^2$  pode ser escrita como

$$m_T^2 = \frac{g}{\mu^2 \beta \Omega} Z_4(2, a_1, a_2, a_3, a_4). \quad (4.13)$$

Esse resultado também foi obtido por Elizalde e Kirsten [59]. Vemos que a massa topológica depende dos valores dos comprimentos de compactificação e da temperatura do reservatório térmico, como foi discutido também por esses autores. Antes de continuarmos devemos estudar duas situações distintas:  $m_T^2 > 0$  e  $m_T^2 < 0$ . Depois dessas considerações, podemos escrever o potencial efetivo da forma

$$V_{eff}(\phi; \beta, L_1, L_2, L_3) = \mu^2 \frac{m_T^2}{2} \phi^2 + \frac{\mu^4}{3} \pi^2 g \phi^4 + \mu^4 \frac{\delta\lambda}{4!} \phi^4 + U + \frac{1}{\beta\Omega} \sum_{s=2}^{\infty} \frac{(-1)^{s+1}}{2s} g^s \phi^{2s} Z_4(2s, a_1, a_2, a_3, a_4). \quad (4.14)$$

## 4.2 O regime onde o quadrado da massa topológica é positivo definido, i.e., $m_T^2 > 0$

Primeiramente estudaremos o caso  $m_T^2 > 0$ . Assim consideraremos só valores dos comprimentos de compactificação da caixa e da temperatura de tal maneira que a continuação analítica da função zeta de Epstein homogênea  $Z_4(2, a_1, \dots, a_4)$  seja negativa e vamos efetuar uma extensão da teoria para valores negativos da constante de acoplamento, i.e.,  $g < 0$ . Assim teremos que a massa topológica é dada por

$$m_T^2 = -\frac{|g|}{\mu^2 \beta \Omega} Z_4(2, a_1, a_2, a_3, a_4). \quad (4.15)$$

Portanto podemos associar uma massa para esse campo escalar confinado dentro do nosso domínio finito. A segunda condição de renormalização, que define uma constante de acoplamento finita é dada por

$$\frac{\partial^4 V_{eff}}{\partial \phi^4} \Big|_{\phi=0} = 8\pi^2 g \mu^4. \quad (4.16)$$



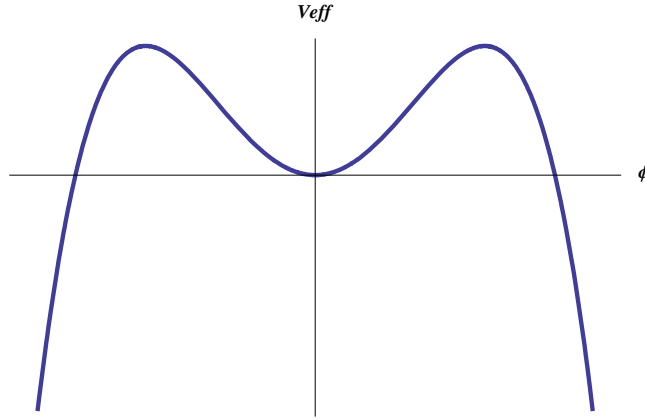


Figura 4.1: O potencial efetivo para o caso  $m_T^2 > 0$ .

O potencial efetivo renormalizado nesse caso (constante de acoplamento negativa,  $Z_4(2, a_1, \dots, a_4)$  assumindo só valores negativos e por o tanto  $m_T^2 > 0$ ), pode ser re-escrito como

$$V_{eff}^R(\phi; \beta, L_1, L_2, L_3) = \mu^2 \frac{m_T^2}{2} \phi^2 - \frac{\mu^4}{3} \pi^2 |g| \phi^4 + U - \frac{1}{\beta \Omega} \sum_{s=3}^{\infty} \frac{|g|^s}{2s} \phi^{2s} Z_4(2s, a_1, a_2, a_3, a_4). \quad (4.17)$$

Um esboço do potencial efetivo renormalizado em esta situação é apresentado em Fig. (4.1). Nesse caso o potencial efetivo renormalizado tem um mínimo local metaestável na origem sem estado fundamental. Esse resultado é esperado pois estamos trabalhando no setor assintoticamente livre da teoria euclidiana do campo escalar com auto-interação  $(\lambda \varphi^4)_d$ .

Para calcular a entropia específica  $S/E$ , onde a energia média  $E$  e a entropia  $S$  estão dadas por Eq. (4.4) e Eq. (4.5) respectivamente, devemos realizar uma transformada de Legendre inversa para obter o logaritmo da função de partição  $\ln Z(\beta, \Omega, h)$ , a partir do potencial efetivo. Note-se que essas funções termodinâmicas são calculadas na ausência de fontes, i.e.,  $h = 0$ . A próxima etapa seria achar um ponto estacionário,  $\phi_0$ , do potencial

efetivo renormalizado definido pela equação seguinte

$$\frac{\partial V_{eff}^R}{\partial \phi} \Big|_{\phi=\phi_0} = 0. \quad (4.18)$$

Substituindo a Eq. (4.17) em Eq. (4.18) obtemos que  $\phi_0$  deve satisfazer

$$\mu^2 m_T^2 \phi_0 - \frac{4}{3} \mu^4 \pi^2 |g| \phi_0^3 - \frac{1}{\beta \Omega} \sum_{s=3}^{\infty} |g|^s \phi_0^{2s-1} Z_4(2s, a_1, a_2, a_3, a_4) = 0. \quad (4.19)$$

Da fig. (4.1), onde se mostra o potencial efetivo renormalizado, vemos que Eq. (4.19) tem três soluções. Como estamos interessados na situação que seja estável na presença de pequenas perturbações, nos escolhemos a solução que é um mínimo local do potencial efetivo, que dizer,  $\phi_0 = 0$ . Realizando a transformada de Legendre quando o potencial efetivo alcança este ponto estacionário metaestável, obtemos o logaritmo da função de partição  $\ln Z(\beta, \Omega)$

$$\begin{aligned} \ln Z(\beta, \Omega) &= \ln Z(\beta, \Omega, h) \Big|_{h=0} \\ &= -(\beta \Omega) V_{eff}^R(\phi; \beta, L_1, L_2, L_3) \Big|_{\phi=\phi_0=0}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Substituindo Eq. (4.8) e Eq. (4.17) em Eq. (4.20) obtemos

$$\ln Z(\beta, \Omega) = - \sum_{n_1, \dots, n_3 = -\infty}^{\infty} (\pi \beta \bar{n} + \ln(1 - e^{-2\pi \beta \bar{n}})) - J_1. \quad (4.21)$$

A energia média  $E(\beta, \Omega)$  e a entropia canônica  $S(\beta, \Omega)$  do sistema em equilíbrio térmico com um reservatório pode ser calculadas usando Eq. (4.4), Eq. (4.5) e Eq.(4.21). Obtemos

$$E(\beta, \Omega) = \sum_{n_1, \dots, n_3 = -\infty}^{\infty} \left( \bar{n} \pi + \frac{2\bar{n} \pi}{e^{2\bar{n} \pi \beta} - 1} \right) \quad (4.22)$$

e

$$S(\beta, \Omega) = \sum_{n_1, \dots, n_3 = -\infty}^{\infty} \left( \frac{2\bar{n} \pi \beta}{e^{2\bar{n} \pi \beta} - 1} - \ln(1 - e^{-2\bar{n} \pi \beta}) \right) - J_1. \quad (4.23)$$

Gostaríamos de enfatizar que temos uma constante indeterminada na definição da entropia. Esta ambiguidade deve ser eliminada utilizando-se a terceira lei da termodinâmica e assumindo a continuidade da entropia para todas as temperaturas. Por simplicidade consideraremos que os comprimentos de compactificação das coordenadas espaciais são todas iguais  $L_i = L$ , para  $i = 1, 2, 3$ , e definiremos a variável adimensional  $\xi = \beta/L$ . Com estas considerações podemos escrever a energia média e a entropia canônica como

$$E(\xi)L = \varepsilon^{(r)} + P(\xi) \quad (4.24)$$

e

$$S(\xi) = \xi P(\xi) + R(\xi) + cte. \quad (4.25)$$

Na Eq. (4.24) a quantidade  $\varepsilon^{(r)}$  é definida por

$$\varepsilon^{(r)} = \sum_{n_1, \dots, n_3 = -\infty}^{\infty} \tilde{n}\pi, \quad (4.26)$$

onde definimos a variável  $\tilde{n}$  como  $\tilde{n} = \sqrt{(n_1)^2 + (n_2)^2 + (n_3)^2}$ . O termo  $\varepsilon^{(r)}$  é simplesmente a energia de Casimir renormalizada do campo escalar com condições de fronteira periódicas nas três coordenadas espaciais. Na Ref. [17] se mostra que  $\varepsilon^{(r)} = -0.81$ . As funções positivas  $P(\xi)$  e  $R(\xi)$  estão definidas por

$$P(\xi) = \sum_{n_1, \dots, n_3 = -\infty}^{\infty} \left( \frac{2\tilde{n}\pi}{e^{2\tilde{n}\pi\xi} - 1} \right) \quad (4.27)$$

e

$$R(\xi) = - \sum_{n_1, \dots, n_3 = -\infty}^{\infty} \ln(1 - e^{-2\tilde{n}\pi\xi}). \quad (4.28)$$

Notemos que a condição  $m_T^2 > 0$  é satisfeita só para alguns valores da razão  $\beta/L$ , dada por  $\xi$ . Usando a continuação analítica mostrada em Ref. [59], podemos escrever a massa

topológica como

$$m_T^2 = -\frac{|g|}{L^2} \frac{f_1(\xi)}{\xi}, \quad (4.29)$$

onde a função  $f_1(\xi)$  é a continuação analítica de  $Z_4(2s, 1, 1, 1, \xi^{-1})$  para  $s = 1$ , e é dada por

$$f_1(\xi) = a\xi + \frac{\pi^2}{3}\xi^2 + K(\xi). \quad (4.30)$$

O coeficiente  $a$  e a função  $K(\xi)$  em Eq. (4.30) são respectivamente dados por

$$\begin{aligned} a = & 2\pi\gamma + 2\pi \ln \frac{1}{4\pi} + \frac{\pi^2}{3} + 8\pi \sum_{n, n_1=1}^{\infty} \left(\frac{n_1}{n}\right)^{1/2} K_{1/2}(2\pi n n_1) \\ & + 4\pi\xi \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n_1, n_2, n_3=-\infty}^{\infty} K_0\left(2\pi n \sqrt{n_1^2 + n_2^2}\right) \end{aligned} \quad (4.31)$$

e

$$K(\xi) = 4\pi\xi^{3/2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n_1, n_2, n_3=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\tilde{n}}{n}\right)^{-1/2} K_{-1/2}(2\pi n \tilde{n} \xi). \quad (4.32)$$

As funções  $K_r(\xi)$  que aparecem em Eq. (4.31) e Eq. (4.32) são as funções de Kelvin, Ref. [61]. Em Fig. (4.2) o comportamento da massa topológica com respeito à variável  $\xi$  é apresentado. Da Fig. (4.2) podemos ver que temos três domínios onde o quadrado da massa topológica tem um sinal bem definido. Esses domínios são dados por I=(0,  $\xi_1$ ), II=( $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ) e III=( $\xi_2$ ,  $\infty$ ) respectivamente, onde  $\xi_1 = 0.25526$  e  $\xi_2 = 2.6776$ . Nos domínios I e III o quadrado da massa topológica é negativo, em quanto que em II é positivo. Portanto só a situação II é consistente com o caso que estamos tratando agora. Nesse caso a energia media e a entropia canônica estão dadas por

$$E_{II}(\xi)L = \varepsilon^{(r)} + P(\xi) \quad (4.33)$$

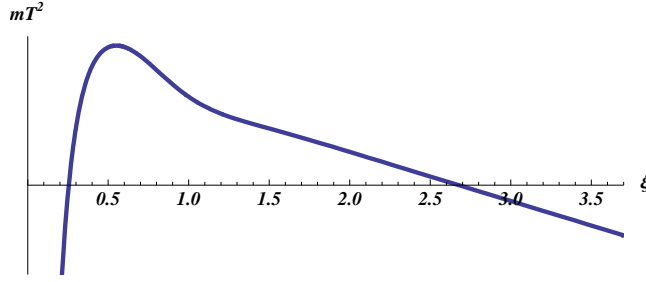


Figura 4.2: Comportamento de  $m_T^2$  em função de  $\xi$

e

$$S_{II}(\xi) = \xi P(\xi) + R(\xi) + cte_{II}. \quad (4.34)$$

Na próxima seção vamos analisar o caso onde o quadrado da massa topológica é negativo.

### 4.3 O regime onde o quadrado da massa topológica é negativo definido, i.e., $m_T^2 < 0$

Consideraremos a situação onde os valores dos comprimentos de compactificação do nosso domínio espacial e da temperatura são tais que a continuação analítica da função zeta de Epstein  $Z_4(2, a_1, \dots, a_4)$  é sempre positiva. Nesse caso o quadrado da massa topológica é uma quantidade negativa. Nessa situação temos que impor a segunda condição de renormalização do potencial efetivo em um ponto arbitrário  $\phi = M$  fora da origem. Isso ocorre devido ao fato de que se utilizamos esse ponto na origem, o potencial efetivo não só não é limitado por baixo como também não apresenta nenhum mínimo local. Nenhuma teoria física pode ser construída nessa situação. O sistema não é estável submetido a pequenas perturbações. Consideraremos então a segunda condição de renormalização do potencial efetivo na forma

$$\frac{\partial^4 V_{eff}}{\partial \phi^4} \Big|_{\phi=M} = 8\pi^2 g\mu^4. \quad (4.35)$$

Usando Eq. (4.35) e o potencial efetivo definido em Eq. (4.14) obtemos

$$V_{eff}^R(\phi; \beta, L_1, L_2, L_3) = \mu^2 \frac{m_T^2}{2} \phi^2 - \frac{\mu^4}{3} \pi^2 |g| \phi^4 + U - \frac{1}{\beta \Omega} \sum_{s=3}^{\infty} \alpha(\phi, s) Z_4(2s, a_1, a_2, a_3, a_4). \quad (4.36)$$

A quantidade  $U$  na Eq. (4.36) é definida por Eq. (4.8). A função  $\alpha(\phi, s)$  é dada por

$$\alpha(\phi, s) = |g|^s \left( \frac{\phi^{2s}}{2s} - \frac{\phi^4}{4!} (2s-1)(2s-2)(2s-3) M^{2s-4} \right). \quad (4.37)$$

Embora o parâmetro  $M$  apareça explicitamente na fórmula do potencial efetivo, ele não afeta o conteúdo físico do problema. Isto pode ser visto se reparametrizamos a teoria usando um ponto diferente  $M'$  para impor a segunda condição de renormalização da seguinte maneira

$$\frac{\partial^4 V_{eff}^R}{\partial \phi^4} \Big|_{\phi=M'} = 8\pi^2 g' \mu^4. \quad (4.38)$$

Obtemos uma relação entre os dois conjuntos de parâmetros  $(g, M)$  e  $(g', M')$  que preserva a forma do potencial efetivo, dado por Eq. (4.36). Essa discussão apenas traz a tona o fato de que o ponto de renormalização é irrelevante. O potencial efetivo Eq. (4.36) pode ser reescrito da seguinte maneira

$$V_{eff}^R(\phi; \beta, L_1, L_2, L_3) = -\frac{\mu^2 m_T^2}{2} F(\phi; \beta, L_1, L_2, L_3) + U, \quad (4.39)$$

onde definimos a função  $F(\phi; \beta, L_1, L_2, L_3)$  como

$$F(\phi; \beta, L_1, L_2, L_3) = -\phi^2 + A\phi^4 - \sum_{s=3}^{\infty} C_s \phi^{2s}. \quad (4.40)$$

Os coeficientes  $C_s$ , quantidades independentes do campo, são definidos para  $s = 3, 4, \dots$ , por

$$C_s = \frac{|g|^{s-1}}{s} \frac{Z_4(2s, a)}{Z_4(2, a)}, \quad (4.41)$$

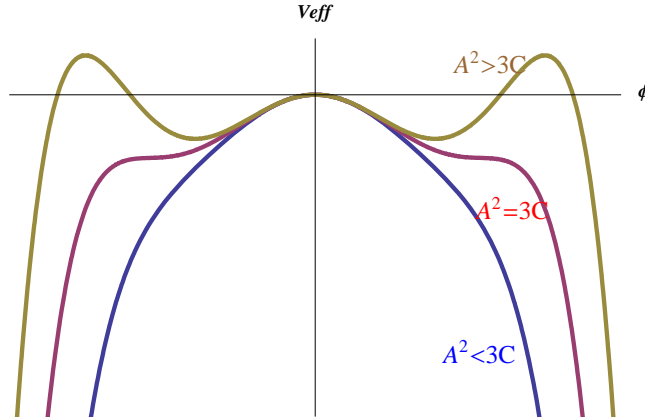


Figura 4.3: Comportamento do Potencial Efetivo no caso  $m_T^2 < 0$  para diferentes valores de  $A$ .

e o coeficiente  $A$  é definido pela expressão

$$A = A_o + \frac{1}{4!} \sum_{s=3}^{\infty} C_s (2s-1)(2s-2)(2s-3) M^{2s-4}, \quad (4.42)$$

onde

$$A_o = -\frac{2\beta\Omega\mu^4\pi^2}{3Z_4(2, a)}. \quad (4.43)$$

Nas expressões anteriores, por simplicidade escrevemos  $Z_4(2s, a) = Z_4(2s, a_1, a_2, a_3, a_4)$ . Note que os coeficientes  $C_s$  estão definidos no domínio de convergência de  $Z_4(2s, a)$ ,  $s = 3, 4, \dots$ . Portanto teremos que  $Z_4(2s, a) > 0$ . Como nesse caso estamos considerando  $Z_4(2, a) > 0$ , os coeficientes  $C_s$  são positivos. Escolhendo a segunda condição de renormalização em um ponto  $M = 0$ , o coeficiente da quarta potência do campo em Eq.(4.40) seria negativo,  $A_o < 0$ , fazendo impossível achar um mínimo do potencial efetivo. Uma maneira de resolver esse problema é impondo a segunda condição de renormalização em um ponto  $M \neq 0$  de tal maneira que o coeficiente  $A$  seja positivo.

Na Fig. (4.3) apresentamos o potencial efetivo para diferentes valores de  $M$ , e con-

sequentemente para diferentes valores de  $A$ , considerando valores pequenos do campo  $\phi$ . esse comportamento depende dos primeiros termos em Eq. (4.40). Nesta aproximação tomaremos em conta só os três primeiros termos de Eq. (4.40), e denotaremos o terceiro coeficiente  $C = C_3 > 0$ . Temos

$$F(\phi; \beta, L_1, L_2, L_3) = -\phi^2 + A\phi^4 - C\phi^6. \quad (4.44)$$

Da Fig. (4.3) vemos que a única situação onde o potencial efetivo tem um mínimo local e a teoria é metaestável é escolhendo  $M$  de tal maneira que  $A$  seja positivo e  $A^2 > 3C$ . Só nesse caso podemos achar um mínimo local do potencial efetivo quando a massa topológica satisfaz a desigualdade  $m_T^2 < 0$ . Aqui queremos ressaltar que esse mínimo é necessariamente fora da origem e que portanto temos um condensado nesse caso. Concluimos que devemos tomar  $M$  não nulo de tal forma que  $A > \sqrt{3C_3} > 0$ . Em termos de  $M$  esta desigualdade pode ser escrita como

$$-\frac{2\beta\Omega\mu^4\pi^2}{3Z_4(2, a)} + \frac{1}{4!} \sum_{s=3}^{\infty} C_s(2s)(2s-1)(2s-2)(2s-3)M^{2s-4} > \sqrt{\frac{|g|^2 Z_4(6, a)}{Z_4(2, a)}} \quad (4.45)$$

Mostraremos que para valores fixos da constante de acoplamento e do volume do domínio compacto, sempre podemos achar  $M$  que satisfaz Eq. (4.45) para qualquer temperatura. Podemos fazer uma aproximação na serie apresentada em Eq. (4.42) tomando só o termo  $s = 3$ . Essa aproximação é semelhante a aquela utilizada na Eq. (4.44) e é válida para valores pequenos do campo e da constante de acoplamento. O coeficiente  $A$  se escreve como

$$A = A_o + 15CM^2. \quad (4.46)$$



Em seguida, consideraremos que os comprimentos de compactificação do domínio compacto são iguais,  $L_1 = L_2 = L_3 = L$ , e definiremos a variável  $\xi = \beta/L$ . Não é difícil mostrar que

$$Z_4(2s, a) = (\mu L)^{2s} f_s(\xi), \quad (4.47)$$

onde

$$f_s(\xi) = Z_4(2s, 1, 1, 1, \xi^{-1}). \quad (4.48)$$

Considerando Eq. (4.46) e Eq. (4.47) a condição Eq. (4.45) pode ser reescrita da seguinte maneira

$$M^2(\mu L)^2 > \frac{2\pi^2}{15|g|^2} \frac{\xi}{f_3(\xi)} + \frac{1}{5|g|} \sqrt{\frac{f_1(\xi)}{f_3(\xi)}}. \quad (4.49)$$

Da Fig. (4.4) vemos que as funções  $\xi/f_3(\xi)$  e  $f_1(\xi)/f_3(\xi)$  são limitadas por cima e por o tanto sempre podemos achar um valor de  $M$  que satisfaz a Eq. (4.49). Note que como estamos considerando que o quadrado da massa topológica é negativo estamos tomando valores de  $\xi$  tais que  $f_1(\xi)$  seja positivo e, como  $f_3(\xi)$  é sempre positiva, não temos problema em tomar a raiz quadrada de  $f_1(\xi)/f_3(\xi)$  no domínio em que estamos trabalhando. Definindo  $v_1$  e  $v_2$  como cotas superiores das funções  $\xi/f_3(\xi)$  e  $\sqrt{f_1(\xi)/f_3(\xi)}$ , respectivamente, Eq. (4.49) é satisfeita imediatamente tomando

$$M^2(\mu L)^2 = \frac{2\pi^2 v_1}{15|g|^2} + \frac{v_2}{5|g|}. \quad (4.50)$$

Usando a Eq. (4.44) e Eq. (4.46), podemos achar o mínimo local do potencial efetivo renormalizado,  $\phi_0$ , dado por

$$\phi_0^2 = \frac{A - \sqrt{A^2 - 3C}}{3C}. \quad (4.51)$$

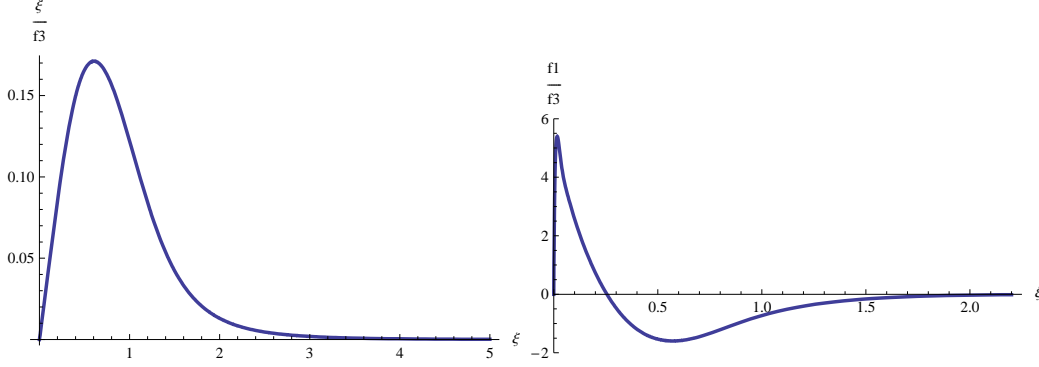


Figura 4.4: As funções  $\xi/f_3(\xi)$  e  $f_1(\xi)/f_3(\xi)$

É mais conveniente definir  $\Theta = \phi_0^2(\mu L)^2$ . Então teremos que

$$\Theta(\xi) = \frac{2\pi^2 v_1}{3|g|^2} + \frac{v_2}{|g|} - \frac{2\pi^2}{3|g|^2} \frac{\xi}{f_3(\xi)} - \frac{1}{3} \left( \frac{4\pi^2}{|g|^2} \left( \frac{\xi}{f_3(\xi)} \right)^2 - \frac{12\pi^2}{|g|^2} \left( \frac{2\pi^2 v_1}{15|g|^2} + \frac{v_2}{5|g|} \right) \frac{\xi}{f_3(\xi)} + \left( \frac{2\pi^2 v_1}{|g|^2} + \frac{3v_2}{|g|} \right)^2 - \frac{9}{|g|^2} \frac{f_1(\xi)}{f_3(\xi)} \right)^{1/2} \quad (4.52)$$

Considerando os parâmetros  $v_1$ ,  $v_2$  e  $g$  como constantes analizaremos o comportamento de  $\Theta$  só com respecto a  $\xi$ . Realizando a transformada de Legendre no ponto estacionário metaestável do potencial efetivo,  $\phi_0$  obtemos o logaritmo da função de partição do nosso sistema

$$\begin{aligned} \ln Z(\beta, \Omega) &= \ln Z(\beta, \Omega, h)|_{h=0} \\ &= -(\beta\Omega)V_{eff}^R(\phi; \beta, L_1, L_2, L_3)|_{\phi=\phi_0}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Substituindo Eq. (4.8), Eq. (4.39), Eq. (4.44), Eq. (4.46) e Eq. (4.50) em Eq. (4.53)

obtemos finalmente

$$\begin{aligned} \ln Z(\xi) &= \frac{|g|}{2} f_1(\xi)\Theta(\xi) + \frac{|g|}{2} \left\{ \frac{2\pi^2 \xi}{3} - \left( \frac{2\pi^2 v_1}{3} + |g|v_2 \right) f_3(\xi) \right\} \Theta^2(\xi) \\ &\quad + \frac{|g|^4}{3} f_3(\xi)\Theta^3(\xi) - \sum_{n_1, \dots, n_3 = -\infty}^{\infty} (\tilde{n}\pi\xi + \ln(1 - e^{-2\tilde{n}\pi\xi})) - J_1. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Usando Eq.(4.4), Eq.(4.5) e Eq.(4.54) obtemos a energia média e a entropia canônica do sistema

$$E(\xi)L = \varepsilon^{(r)} + P(\xi) + \chi(\xi) \quad (4.55)$$

$$S(\xi) = \xi P(\xi) + R(\xi) + \psi(\xi) + cte, \quad (4.56)$$

onde as funções  $\varepsilon^{(r)}$ ,  $P(\xi)$  e  $R(\xi)$  estão definidas nas Eq.(4.26), Eq.(4.27) e Eq.(4.28) respectivamente. As funções  $\chi(\xi)$  e  $\psi(\xi)$  são as contribuições do condensado achado nesta situação à energia média e a entropia, respectivamente. Elas estão definidas pelas expressões seguintes

$$\chi(\xi) = -\frac{|g|}{2} \left\{ f_1'(\xi)\Theta(\xi) + \left( \frac{2\pi^2}{3} - \left( \frac{2\pi v_1}{3} + |g|v_2 \right) f_3'(\xi) \right) \Theta^2(\xi) + \frac{|g|^2}{3} f_3'(\xi)\Theta^3(\xi) \right\} \quad (4.57)$$

e

$$\psi(\xi) = \frac{|g|}{2} \left\{ g_1(\xi)\Theta(\xi) + \left( \frac{2\pi v_1}{3} + |g|v_2 \right) g_3(\xi)\Theta^2(\xi) + \frac{|g|^2}{3} g_3(\xi)\Theta^3(\xi) \right\}. \quad (4.58)$$

Como estamos considerando que o quadrado da massa topológica é negativo, nossos resultados são validos somente quando  $\xi$  pertence aos domínios I= $(0, \xi_1)$  ou III= $(\xi_2, \infty)$ .

Esses resultados podem ser expressados da seguinte maneira

$$E_{(I,III)}(\xi)L = \varepsilon^{(r)} + P(\xi) + \chi(\xi) \quad (4.59)$$

$$S_{(I,III)}(\xi) = \xi P(\xi) + R(\xi) + \psi(\xi) + cte_{(I,III)}. \quad (4.60)$$

Em Eq.(4.59) e Eq.(4.60) vemos explicitamente que a forma da energia média é a mesma nas regiões I e III, entretanto a forma da entropia canônica é diferente em cada um desse intervalos. Esta discrepancia é devida a certas constantes,  $cte_I$  e  $cte_{III}$ , que serão fixadas com a ajuda da terceira lei da termodinâmica e assumindo a continuidade da entropia.

# Capítulo 5

## Resultados e Conclusões

A validade do limite de Bekenstein pode ser verificado para qualquer sistema físico. Neste trabalho investigamos o limite de Bekenstein numa situação que até onde sabemos não foi discutida na literatura. Estudamos a validade do limite para o caso de uma teoria de campo que apresenta liberdade assintótica, mais especificamente no setor assintoticamente livre do campo escalar com auto-interação  $\lambda\varphi^4$ . Obtivemos duas situações diferentes: o caso quando o quadrado da massa topológica é positivo e o caso quando é negativo. Mostramos que quando o quadrado da massa topológica é negativo se tem a presença de um condensado. Nesse caso o mínimo do potencial efetivo está fora da origem e é dado pela função  $\Theta(\xi)$  definida na Eq. (4.52). Gostaríamos de enfatizar que só nos intervalos I e III, da variável  $\xi$ , o quadrado da massa topológica é negativo. No intervalo II o quadrado da massa topológica é positivo e o potencial efetivo tem um mínimo trivial. Na Fig. (5.1) mostramos o comportamento do mínimo do potencial efetivo  $\Theta$ , como uma função de  $\xi$ , para valores fixos de  $v_1$ ,  $v_2$  e  $g$ . Note que o mínimo do potencial efetivo está localizado na origem,  $\Theta = 0$ , quando considerando temperaturas muito altas,  $\beta = 0$ , ou quando consideramos temperaturas muito baixas,  $\beta \rightarrow \infty$ . Essas duas características são

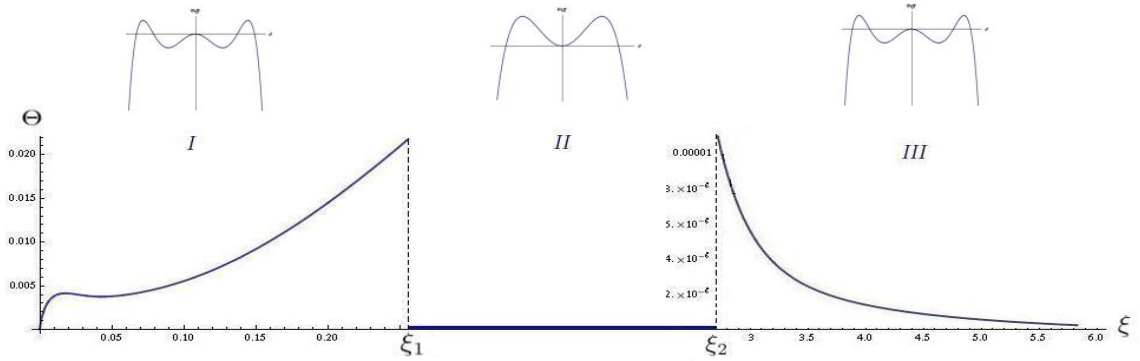


Figura 5.1: O mínimo do Potencial Efetivo,  $\Theta(\xi)$ , para  $v_1=v_2=100$  e  $g = 0.13$ .

independentes dos valores de  $v_1$ ,  $v_2$  e  $g$  escolhidos. Deste último resultado temos que a função  $\psi(\xi)$ , Eq. (4.57), se anula quando a temperatura se aproxima de zero.

Como estamos considerando que o campo está definido num domínio espacial finito, o comprimento de compactificação  $L$  tem sempre um valor finito, e por o tanto  $\xi$  será basicamente o inverso da temperatura. Usando a terceira lei da termodinâmica podemos fixar as constantes que aparecem nas formulas das entropias Eq. (4.34) e Eq. (4.60)

$$\begin{aligned}
 S_I(\xi) &= \xi P(\xi) + R(\xi) + \psi(\xi) + cte_I, \\
 S_{II}(\xi) &= \xi P(\xi) + R(\xi) + cte_{II}, \\
 S_{III}(\xi) &= \xi P(\xi) + R(\xi) + \psi(\xi) + cte_{III}.
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

Desde que as funções  $P(\xi)$ ,  $R(\xi)$  e  $\psi(\xi)$  vão para zero quando  $\xi \rightarrow \infty$  e usando a terceira lei da termodinâmica  $\lim_{\xi \rightarrow \infty} S_{III} = 0$ , achamos que  $cte_{III} = 0$ . Assumindo a continuidade da entropia com respeito ao parâmetro  $\xi$ , podemos fixar as outras duas constantes usando

$S_I(\xi_1) = S_{II}(\xi_1)$  e  $S_{II}(\xi_2) = S_{III}(\xi_2)$ , obtendo

$$\begin{aligned} cte_I &= \psi(\xi_2) - \psi(\xi_1), \\ cte_{II} &= \psi(\xi_2), \\ cte_{III} &= 0. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Para valores genéricos dos parâmetros  $(v_1, v_2, g)$ , a função  $\psi(g, \xi)$  não é positiva definida e a entropia pode ser negativa para certos valores de  $\xi$ . Escolhendo valores grandes de  $v_1$  e  $v_2$  e valores pequenos de  $g$  esta situação anômala é excluída.

O limite de Bekenstein estabelece  $S/E \leq 2\pi R$ , onde  $R$  é o radio da menor esfera que circunscreve ao dominio espacial compacto do nosso sistema. Como estamos considerando que todos os comprimentos de compactificação são iguais a  $L$ , teremos que  $R = \sqrt{3}L/2$ . Definindo a função  $T = S/2\pi RE$  em cada um dos intervalos I, II e III e usando Eq.(4.33), Eq.(4.59), Eq.(5.1) e Eq.(5.2) temos que

$$T_I(\xi) = \frac{1}{\sqrt{3}\pi} \frac{\xi P(\xi) + R(\xi) + \psi(\xi) + \psi(\xi_2) - \psi(\xi_1)}{\varepsilon^{(r)} + P(\xi) + \chi(\xi)}, \tag{5.3}$$

$$T_{II}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{3}\pi} \frac{\xi P(\xi) + R(\xi) + \psi(\xi_2)}{\varepsilon^{(r)} + P(\xi)}, \tag{5.4}$$

$$T_{III}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{3}\pi} \frac{\xi P(\xi) + R(\xi) + \psi(\xi)}{\varepsilon^{(r)} + P(\xi) + \chi(\xi)}. \tag{5.5}$$

Cada uma dessas funções é valida só quando  $\xi$  se encontra nos domínios I, II e III respectivamente. O limite de Bekenstein será violado se em algum momento alguma destas funções  $T$  tem um valor maior do que a unidade. Em Fig. (5.2) mostramos a função  $T_I(\xi)$  para  $\xi \in I=(0, \xi_1)$ , usando os valores  $v_1 = 100$ ,  $v_2 = 100$  e  $g = 0.13$ .

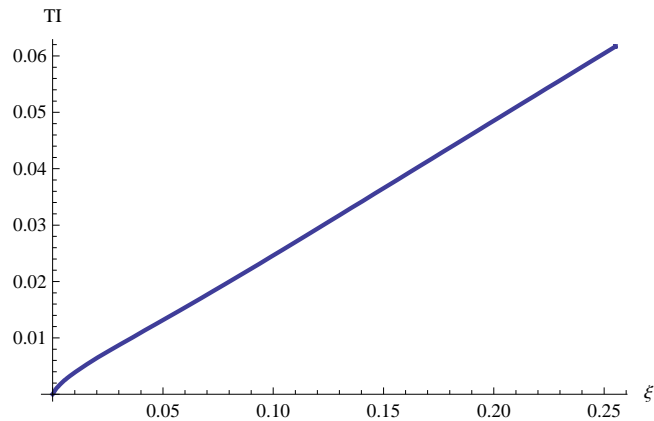


Figura 5.2: A função  $T_I(\xi)$  no seu domínio  $\xi \in I=(0, \xi_1)$

Como estamos considerando grandes temperaturas nesta situação, esperamos que o fato da energia de Casimir do sistema ser negativa não seja importante. Nesse domínio de temperaturas o sistema desenvolve um condensado. Queremos analisar se esse produto da liberdade assintótica viola o limite de Bekenstein. O resultado encontrado em Fig. (5.2) diz que as flutuações térmicas são grandes demais tal que dominam sobre qualquer contribuição quântica. Resultando que o limite de Bekenstein é satisfeito nesse regime.

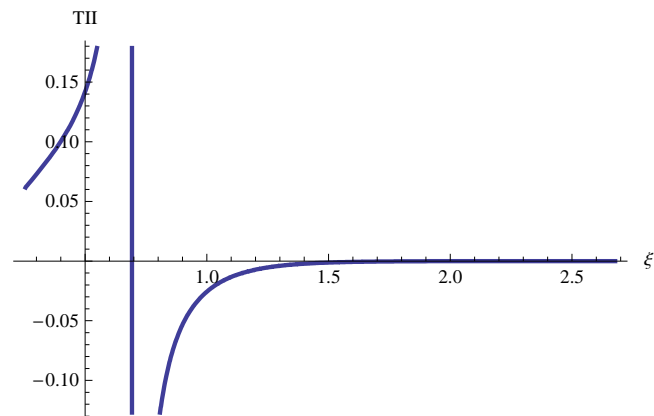


Figura 5.3: A função  $T_{II}(\xi)$  no seu domínio  $\xi \in II=(\xi_1, \xi_2)$

Na Fig.(5.3) temos a função  $T_{II}(\xi)$  na região  $\xi \in II=(\xi_1, \xi_2)$ . Nessa situação o potencial efetivo renormalizado tem um mínimo trivial e o sistema se comportara como se fosse um

gas de bosons livres. Como estamos considerando um domínio compacto com condições de fronteira periódicas sobre as coordenadas espaciais, a energia renormalizada de Casimir é negativa,  $\varepsilon^{(r)} = -0.81$ .

Como estamos considerando temperaturas cada vez mais baixas, a contribuição térmica  $P(\xi)$  à energia média do sistema é cada vez menor, eventualmente sendo superada pela energia renormalizada de Casimir negativa  $\varepsilon^{(r)}$ . Isso ocorre na Fig. (5.3), a divergência dessa figura é devido a que neste domínio temos um valor  $\xi'$  que satisfaz  $\varepsilon^{(r)} + P(\xi') = 0$ . É claro que devido a essa divergência, causada pela energia de Casimir negativa, o limite de Bekenstein é violado. Se continuamos baixando a temperatura o valor negativo de  $\varepsilon^{(r)}$  predomina tornando negativa a energia média do sistema e a função  $T_{II}(\xi)$ . Como temos assegurado que a entropia sempre é positiva é obvio que o limite de Bekenstein é violado para temperaturas menores que  $\beta'^{-1} = \xi' L$ .

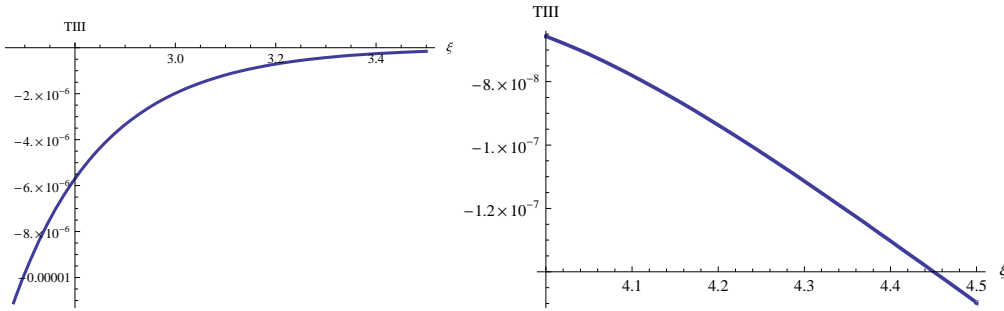


Figura 5.4: A função  $T_{III}(\xi)$  no seu domínio  $\xi \in III=(\xi_2, \infty)$

Na terceira região  $\xi \in III$  temos que as contribuições quânticas são dominantes frente as flutuações térmicas pois em III se consideram apenas baixas temperaturas. Assim a energia de Casimir e a presença do condensado desempenham um papel principal. Nessa região e a liberdade assintótica poderia causar alguma modificação importante. Na Fig.



(5.4) mostramos o comportamento da função  $T_{III}(\xi)$  no seu domínio  $\xi \in III$ . Como podemos ver dessa figura  $T_{III}(\xi)$  assume só valores negativos, e ao igual que o caso anterior isto é causado pela energia de Casimir negativa que faz negativa a energia média do sistema. Sendo a entropia sempre positiva é claro que nesse regime o limite de Bekenstein é violado.

Em resumo, foi mostrado que não existe um limite na capacidade de armazenar informação para a teoria do campo escalar com auto-interação  $(\lambda \varphi^4)_d$  com o sinal trocado da constante de acoplamento para baixas temperaturas. Uma extensão natural desta tese é o estudo do limite de Bekenstein num modelo mais realista, como, por exemplo, na cromodinâmica quântica a altas temperaturas num domínio compacto.

# Bibliografia

- [1] G. 't Hooft, “*Dimensional Reduction in Quantum Gravity*”, in *Salam-Festschrift*, A. Aly, J. Ellis and S. Randbar-Daemi, eds. ,World Scientific, Singapore (1993), ArXiv gr-qc/9310026.
- [2] L. Susskind, *J. Math. Phys.* **36**, 6377 (1995).
- [3] R. Bousso, *Rev. Mod. Phys.* **74**, 825 (2002).
- [4] J. D. Bekenstein, *Phys. Rev.* **D7**, 2333 (1973).
- [5] J. D. Bekenstein, *Phys. Rev.* **D23**, 287 (1981).
- [6] J. D. Bekenstein, *Phys. Rev.* **D30**, 1669 (1984).
- [7] M. Schiffer and J. D. Bekenstein, *Phys. Rev.* **D39**, 1109 (1989).
- [8] J. D. Bekenstein, *Phys. Rev.* **D49**, 1912 (1994).
- [9] M. Aparicio Alcalde, G. Menezes and N. F. Svaiter, *Phys. Rev.* **D77**, 125024 (2008).
- [10] J. D. Bekenstein and E. I. Guendelman, *Phys. Rev.* **D35**, 716 (1987).
- [11] J. D. Bekenstein and M. Schiffer, *Int. J. Mod. Phys.* **C1**, 355 (1990).
- [12] S. Kovesi-Domokos, *Il Nuovo Cim.* **33A**, 769 (1976).
- [13] R. Menikoff and D. H. Sharp, *J. Math. Phys.* **19**, 135 (1978).
- [14] C. M. Bender, F. Cooper, G. S. Guralnik and D. H. Sharp, *Phys. Rev.* **D19**, 1865 (1979).
- [15] J. R. Klauder, *Ann. Phys.* **117**, 19 (1979).
- [16] N. F. Svaiter, *Physica* **A345**, 517 (2005).
- [17] J. Ambjorn and S. Wolfram, *Ann. Phys.* **147**, 1 (1983).
- [18] F. Caruso, N. P. Neto, B. F. Svaiter and N. F. Svaiter, *Phys. Rev.* **D43**, 1300 (1991).

- [19] R. D. M. De Paola, R. B. Rodrigues and N. F. Svaiter, Mod. Phys. Lett. **A34**, 2353 (1999).
- [20] L. E. Oxman, N. F. Svaiter and R. L. P. G. Amaral, Phys. Rev. **D72**, 125007 (2005).
- [21] H. B. G. Casimir, Proc. Kon. Ned. Akad. Wekf. **51**, 793 (1948).
- [22] G. Plunien, B. Müller and W. Greiner, Phys. Rep. **134**, 87 (1986).
- [23] A. A. Grib, S. G. Mamayev and V. M. Mostepanenko, “*Vacuum Quantum Effects in Strong Fields*”, Friedman Laboratory Publishing. St. Petersburg (1994).
- [24] M. Krech, “*The Casimir Effect in Critical Systems*”, World Scientific, Singapore (1994).
- [25] M. Bordag, U. Mohideen and V. M. Mostepanenko, Phys. Rep. **353**, 1 (2001).
- [26] K. A. Milton, “*The Casimir Effect: Physical Manifestation of Zero-Point Energy*”, World Scientific (2001).
- [27] D. Gross and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30**, 1343 (1973).
- [28] H. D. Politzer, Phys. Rev. Lett. **30**, 1346 (1973).
- [29] D. Gross and F. Wilczek, Phys. Rev. **D8**, 3633 (1973).
- [30] D. Gross and F. Wilczek, Phys. Rev. **D9**, 980 (1974).
- [31] H. D. Politzer, Phys. Rep. **146**, 129 (1974).
- [32] E. V. Shuryak, Phys. Rep. **61**, 71 (1980).
- [33] D. Gross, R. Pisarski and L. Yaffe, Rev. Mod. Phys. **53**, 43 (1981).
- [34] L. Mc Lerran, Rev. Mod. Phys. **58**, 1021 (1986).
- [35] E. V. Shuryak, *The QCD Vacuum, Hadrons and Superdense Matter*, World scientific, Singapore (2004).
- [36] K. Symanzik, Lett. Nuovo Cim. **6**, 2 (1973).
- [37] L. H. Ford and N. F. Svaiter, Phys. Rev. **D51**, 6981 (1995).
- [38] K. Symanzik, Nucl. Phys. **B190**, 1 (1981).
- [39] C. D. Fosco and N. F. Svaiter, J. Math. Phys. **42**, 5185, (2001).
- [40] M. I. Caicedo and N. F. Svaiter, J. Math. Phys. **45**, 179 (2004).

- [41] N. F. Svaiter, J. Math. Phys. **45**, 4524 (2004).
- [42] R. B. Rodrigues and N. F. Svaiter, Physica **A328**, 466 (2003).
- [43] R. B. Rodrigues and N. F. Svaiter, Physica **A342**, 529 (2004).
- [44] M. Aparicio Alcalde, G. F. Hidalgo and N. F. Svaiter, J. Math. Phys. **47**, 052303 (2006).
- [45] R. A. Brandt, Phys. Rev. **D14**, 3381 (1976).
- [46] R. A. Brandt, Ng Wing-Chiu and Y. Wai-Bong, Phys. Rev. **D19**, 503 (1979).
- [47] V. Rivasseau, Comm. Math. Phys. **95**, 445 (1984).
- [48] K. Gawedzki and A. Kupiainen, Nucl. Phys. **B257** [FS14], 474 (1985).
- [49] K. Langfeld, F. Schmüser and H. Reinhardt, Phys. Rev. **D51**, 765 (1995).
- [50] G. Parisi, “*The Physical Basis of the Asymptotic Estimates in Perturbation Theory*”, in “*Field Theory, Disorder and Simulations*”, World Scientific, Singapore (1992).
- [51] J. Zinn-Justin, “*Quantum Field Theory and Critical Phenomena*” Oxford University Press, N.Y. (1996).
- [52] T. Matsubara, Prog. Theor. Phys. **55**, 351 (1955).
- [53] R. Kubo, J. Phys. Soc. Jap. **12**, 570 (1957).
- [54] P. C. Martin and J. Schwinger, Phys. Rev. **115**, 1342 (1959).
- [55] J. I. Kapusta, “*Finite-temperature Field Theory*”, Cambridge University Press (1989).
- [56] L. H. Ford and T. Yoshimura, Phys. Lett. **70**, 89 (1979).
- [57] L. H. Ford, Phys. Rev. **D22**, 3003 (1980).
- [58] N. D. Birrel and L. H. Ford, Phys. Rev. **D22**, 330 (1980).
- [59] E. Elizalde and K. Kirsten, J. Math. Phys. **35**, 1260 (1994).
- [60] S. Coleman and E. Weinberg, Phys. Rev. **D7**, 1888 (1973).
- [61] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, “*Tables of Integrals, Series and Products*”, Academic Press Inc., New York (1980).
- [62] A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev, “*Integrals and Series*”, Vol. 1 and 2, Gordon and Breach Science Publishers (1986).