

Tese de Doutorado

Condições Iniciais para Inflação Cosmológica

Rafael Serra Perez

Orientador: Nelson Pinto-Neto

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Coordenação de Cosmologia, Relatividade e Astrofísica - ICRA

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2011

Resumo

O presente trabalho se destina a demonstrar que, no cenário de uma geometria não-homogênea com simetria esférica preenchida por um campo escalar massivo, é necessária uma região homogênea maior do que o horizonte por um fator de ordem 10 para iniciar um processo inflacionário. Os resultados obtidos são independentes das condições iniciais sobre a distribuição espacial do campo escalar. As condições iniciais escolhidas para os parâmetros da métrica são bem justificadas.

Abstract

The present work is intended to show that, in the framework of a inhomogeneous geometry with spherical symmetry filled with a massive scalar field, it is necessary a homogeneous patch larger than the horizon by a factor of order ten in order to start inflation. The results are independent from the initial conditions on the spatial distribution of the scalar field. The initial conditions on the metric parameters are well justified.

Agradecimentos

Durante a realização desse trabalho, algumas pessoas contribuíram muito para que o resultado fosse positivo. Cabe aqui mencioná-las:

- Nelson Pinto-Neto, como orientador, professor e amigo, pela disposição, competência e simpatia;
- Meus pais, irmão e avó, pelo carinho e pelo irrestrito apoio à minha formação e à realização desse trabalho;
- Meus amigos Balbi, Marco, Heitor, Aurélio, Raposo, Tiquinho, Marcos, Guilherme, Fernando, Damm, Manu, Adriana, Miurrause, Tatiana, Lúcia, Joris, Pedro, Paulinha, DaMattinha, Mosci... são muitos, pela companhia e descontração no tempo livre;
- Os pesquisadores do ICRA-BR e os colegas de cosmologia, e também amigos, Aranha, Poulis, Érico, Maria, Tovar, Marcela, Santiago, Vicente, Paulo Guilherme, Josephine, Rodrigo, Grasi, Eduardo, Aline, Diego, Mari, Sandro, Stella, Bia e Júnior, por fazerem dessa instituição um local prazeroso, tanto para os estudos quanto para a convivência;
- Aos amigos que fiz na física Gabriel, Boiúna, Nuno, Zambrano, João Paulo, Saliby, Alexis, Gavini, Rômulo, Dudu, Diogo, Murilo, Miatã e Álvaro;
- Ricardo, Myriam, Bete, Mônica, Luciene, Elisete, Luzia e Sônia, por toda a ajuda prestada;
- O *staff* do Bar do Manel, vulgo Sujinho, e a turma da Dona Niu;
- O CNPq, pelo apoio financeiro.

*[...] la solución del misterio siempre es inferior al misterio.
El misterio participa de lo sobrenatural y aun de lo divino; la
solución, del juego de manos.*

Jorge Luis Borges,
em *Abenjacán el Bojarí, Muerto en su Laberinto*

Sumário

1	Introdução	1
2	O Modelo Padrão da Cosmologia	4
2.1	Dinâmica do Universo	6
2.2	Horizontes	13
2.3	Evidências Observacionais	15
2.3.1	Diagrama de Hubble	15
2.3.2	Nucleossíntese Primordial	17
2.3.3	Radiação Cósmica de Fundo	18
2.3.4	Estruturas em Larga Escala	19
2.4	Universo Acelerado	20
3	Inflação	25
3.1	Problemas de Condições Iniciais	25
3.2	O Mecanismo Inflacionário	28
3.2.1	Dinâmica do Campo	29
3.2.2	Classes de Inflação	31
3.3	Reaquecimento	34
3.4	Inflação como Atrator	38
3.5	Conjectura “No-Hair”	40
3.6	Cenário Anisotrópico	44
3.7	Cenário Não-Homogêneo	46

4	Inflação Esfericamente Simétrica	53
4.1	O Modelo	54
4.2	Condições Iniciais	56
4.3	Condições para Inflação	60
5	Alternativas à Inflação	63
5.1	Modificações da Relatividade Geral	64
5.2	Universo Eterno	70
6	Conclusões	77

Capítulo 1

Introdução

Iniciamos o presente trabalho apresentando o paradigma conhecido como Modelo Padrão da Cosmologia [1, 2]. Esse modelo apresenta grandes sucessos preditivos, como o diagrama de Hubble, a abundância de elementos leves e a radiação cósmica de fundo em microondas. No entanto, alguns ajustes fenomenológicos são necessários para explicar a aceleração do universo e a formação de estruturas em larga escala. Assim, é inferida a existência de energia e matéria escuras, correspondendo a 96% da composição do universo, estando de acordo com observações astronômicas da CMB. Tais novos componentes levam a novas direções de pesquisa, como a conciliação da cosmologia com a física de partículas ou a modificação da teoria da gravitação vigente.

Além disso, algumas problemas surgem quando visamos as condições iniciais, ou melhor dizendo, as condições primordiais da evolução do universo. Tais dificuldades receberam o nome de *problema do horizonte* [3] e *problema da planezza* [4]. O primeiro se refere à existência de regiões em equilíbrio térmico porém separadas por distâncias que impediriam qualquer relação causal entre elas. Já o segundo problema aponta para um ajuste extremamente fino na curvatura espacial do universo primitivo, de uma parte em 10^{59} , de forma a observarmos a geometria quase plana presente

no universo atual.

Ambas essas dificuldades podem ser resolvidas pelo processo conhecido como *inflação cosmológica* [5]. A época inflacionária corresponde a um período onde a expansão do universo era acelerada. O fluido responsável por essa expansão exponencial seria o potencial quase-constante de um campo escalar chamado *inflaton*. Essa dinâmica lenta do campo, também conhecida como *slowroll*, deve durar por aproximadamente 70 tempos de Hubble H^{-1} (*e-folds*) para resolver os problemas de condições iniciais do Modelo Padrão [6]. A inflação termina quando o campo decai em partículas elementares, apresentando uma saída suave em direção à cosmologia de Friedmann-Robertson-Walker. Porém, assim como a dinâmica do modelo Λ -CDM, o processo inflacionário também carece de condições iniciais apropriadas para ter início.

Estudos numéricos sobre inflação não-homogênea, ou seja, com flutuações no campo escalar, parecem indicar que uma homogeneidade pré-existente é necessária para a ocorrência de inflação [7]. Claramente, a inflação resolve os problemas mencionados acima por uma margem confortável de várias ordens de grandeza e suas condições iniciais necessárias são muito mais gerais do que no caso do modelo Λ -CDM, de forma que ainda somos levados a adotá-la. Uma outra possibilidade seria um modelo cosmológico onde o universo não tenha tido um início, como os modelos de ricochete [8], capazes de resolver alguns dos problemas mencionados acima. No momento, não dispomos de dados observacionais contundentes que dêem preferência a qualquer uma dessas hipóteses.

Mas é aceitável esperar que o universo emergja de uma era quântica (também dita *planckiana*) com o campo escalar possuindo valor apropriado para inflação por extensas regiões, maiores do que o horizonte observável? A resposta para essa pergunta ainda permanece fora de alcance, pois anteriormente a isso estaríamos no domínio da gravitação quântica. A falta

de uma teoria aplicável nesse regime nos impede de formularmos uma teoria de condições iniciais para o universo. Modificações da Relatividade Geral, capazes de gerar um ricochete, podem também ser boas candidatas para solucionar esse problema, ainda que de maneira efetiva [9].

Voltemos então nossas atenções para as condições pós-planckianas. Nesse trabalho, apresentaremos um estudo onde escolhemos condições iniciais bastante simples e verificamos a possibilidade de ocorrência de inflação. A geometria escolhida é de simetria esférica, pois assim podemos trabalhar com apenas uma coordenada espacial, simplificando bastante os cálculos analíticos, sem prejuízo sobre o resultado. Além disso, boa parte dos trabalhos numéricos sobre esse assunto presentes na literatura são baseados nessa geometria, de forma que poderemos comparar nossos resultados a estes. A distribuição não-homogênea do campo escalar é tratada de maneira geral, sem definir qualquer função específica. A escolha dos parâmetros da métrica também serão justificadas.

No Capítulo 2, faremos uma sucinta, porém necessária, revisão sobre o Modelo Padrão da Cosmologia, seguida de um resumo sobre o paradigma inflacionário no Capítulo 3. O nosso trabalho, com seus resultados, se encontra no Capítulo 4 desta tese. O Capítulo 5 apresenta as hipóteses diferentes do mecanismo inflacionário para solucionar os problemas do Modelo Padrão. Encerramos com as conclusões obtidas, no Capítulo 6.

Capítulo 2

O Modelo Padrão da Cosmologia

O desenvolvimento da Teoria da Relatividade Geral (TRG) [10, 11] no início do século XX por Einstein nos ofereceu pela primeira vez na história da humanidade uma teoria testável sobre o universo. De forma a satisfazer o princípio de Mach, onde as propriedades inerciais dos corpos são determinadas pela presença de toda demais matéria circundante, Einstein estava reticente em relação à hipótese de um universo-ilha, onde a matéria está confinada em uma região mas é assintoticamente plano. A ideia de uma partícula escapando para o infinito apresentaria problemas para a mecânica relativística. Primeiramente, Einstein tentou resolver o problema propondo condições de contorno para o elemento de linha, mas acabou por atingir uma solução mais elegante: um universo fechado e homogêneo.

Não é claro se Einstein possuía conhecimento sobre a situação observacional da astronomia da época. Havia então muita especulação sobre a natureza de nebulosas espirais, se eram outros universos-ilhas ou se eram objetos interiores à Via-Láctea. Já era conhecido pela contagem de estrelas que a nossa galáxia era um sistema finito e confinado, na forma aproximada de um esferóide achatado. As nebulosas espirais estavam mais concentradas próximas dos polos da Via-Láctea, aparentando estarem associadas a eles.

Nas décadas seguintes ficou mais claro que essas suposições estavam

equivocadas. A abundância de nebulosas espirais nos polos se explica pela presença de poeira interestelar, que obscurece o plano da galáxia. Em 1924, Hubble mostrou, através da luminosidade intrínseca e variável de estrelas cefeidas, que as tais nebulosas se situavam bastante afastadas da Via-Láctea, e eram comparáveis em tamanho [12]. Hubble então iniciou uma extensa sondagem na distribuição de galáxias pelo cosmos, adentrando os anos 1930. Ele obteve a primeira indicação de homogeneidade em larga escala do universo [13]. A visão inicial de Einstein parecia possuir uma boa dose de verdade.

Desde então, até épocas mais recentes, todas as observações astronômicas nos mostram um universo cuja distribuição de matéria é extremamente próxima de isotrópica. O universo ainda poderia não ser homogêneo, sendo isotrópico em um único ponto: o Sistema Solar. Porém, já foram identificadas bilhões de galáxias, todas elas tão boas candidatas para abrigar vida inteligente quanto a nossa, de forma que supor isotropia somente ao nosso redor não é uma opção razoável [14].

O conceito de homogeneidade em larga escala já nos acompanha há tanto tempo que já é senso comum entre os cosmólogos, embora em contraste com a nossa experiência cotidiana, onde tudo que observamos possui uma estrutura. Mesmo em astronomia, quando observamos o céu, vemos galáxias e aglomerados de galáxias, sendo necessário analisar regiões maiores do que 100 Mpc^1 para percebermos a homogeneidade do universo. Mas devemos reconhecer que a homogeneidade e isotropia é um princípio poderoso na Cosmologia, de forma que sem ele o estudo do universo seria demasiadamente complicado [15].

¹100 Megaparsecs. Parsec (pc) é uma unidade de medida astronômica equivalente a 31×10^{12} quilômetros ou 3,26 anos-luz.

2.1 Dinâmica do Universo

Graças a esse princípio, chamado de Princípio Cosmológico, podemos aplicar a TRG ao universo e obter resultados quantitativos de forma muito mais simples, e testá-los com observações astronômicas. A equação de Einstein descreve a dinâmica do campo gravitacional, relacionando a geometria do espaço-tempo com o conteúdo material, na seguinte maneira

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

onde $\kappa = 8\pi G$, sendo G a constante da gravitação de Newton, e $c = 1$. A quantidade $T_{\mu\nu}$ do lado direito da equação acima é o tensor momento-energia. Acima de escalas próximas a 100 Mpc, o conteúdo material do universo pode ser visto como um fluido contínuo e homogêneo, e sem viscosidade. Assim sendo, $T_{\mu\nu}$ assume a forma do tensor momento-energia para um fluido perfeito, dado por

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}. \quad (2.2)$$

As quantidades u_μ e u_ν definem as velocidades do elemento de volume do fluido. Se esses elementos se deslocam de maneira comóvel com o fluido cósmico, essas quantidades são iguais a $u_t = 1$ e $u_i = 0$. O tensor momento-energia é dado nesse referencial na forma diagonal $T_{\mu\nu} = (\rho, -p, -p, -p)$.

A geometria é dada por uma métrica maximalmente simétrica conhecida na Cosmologia como métrica de Robertson-Walker, cujo elemento de linha é expresso por [3]

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (2.3)$$

que descreve um espaço-tempo homogêneo e isotrópico, com $a(t)$ sendo o fator de escala. A constante k define a curvatura do universo e pode assumir os valores $k = 1, 0, -1$, determinando se o espaço-tempo é esférico, plano ou hiperbólico, respectivamente. A aplicação dessa geometria nas equações de

Einstein (2.1) nos dá as seguintes equações:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{6}(\rho + 3p) \quad (2.4)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{k}{a^2} = \frac{\kappa}{2}(\rho - p) \quad (2.5)$$

Eliminando \ddot{a} das expressões acima, obtemos uma equação de primeira ordem, na forma

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{\kappa}{3}\rho. \quad (2.6)$$

Além dessas equações, temos também a expressão de conservação de energia, obtida da divergência do tensor momento-energia $T^{\mu\nu}_{;\nu}$, resultando em

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad (2.7)$$

As equações (2.4 - 2.6) foram obtidas pela primeira vez em 1922 por A. Friedmann [16], e por isso carregam o seu nome². Elas mostram que um universo homogêneo e isotrópico não pode ser estático, e sua dinâmica é explicitada pelo fator de escala $a(t)$. A equação (2.4) nos diz que o universo possui uma aceleração negativa, como esperado do comportamento atrativo da gravidade, desde que a condição de energia $\rho + 3p > 0$ seja satisfeita. Já a equação (2.6) nos dá a velocidade, sendo ainda incapaz de dizer se o universo possui um comportamento de colapso acelerado ou expansão desacelerada, pois \dot{a} aparece elevado ao quadrado. A resposta dessa questão veio ainda nos anos 1920, através do desvio para o vermelho na espectroscopia de galáxias distantes [17]. Esse desvio representa o efeito Doppler relativístico de objetos que se afastam em altas velocidades, confirmando a expansão do universo.

Se o universo se expande, temos que a densidade de energia do universo deve decair tão ou mais rapidamente quanto $\rho \propto a^{-3}$, referente ao aumento de volume. Analisando a equação (2.6), temos que o lado direito se torna desprezível em tempos futuros ($a \rightarrow \infty$), de forma que o destino do universo

²A referência original em alemão é A. Friedmann, Z. Phys. **10** 377 (1922).

é determinado pelo valor de k . No caso onde $k = -1$, a quantidade \dot{a}^2 continua definido positivamente de maneira que o fator de escala aumenta com $a \propto t$, se expandindo indefinidamente. No caso plano, com $k = 0$, a expansão também continua, mas com uma potência menor do que t . Já no caso de um universo fechado, onde $k = 1$, o valor de \dot{a} se anula quando $\rho = 3/(\kappa a^2)$. Nesse momento, o fator de escala começa a diminuir novamente pois $\ddot{a} < 0$, como visto em (2.4). A contração continua até $a \rightarrow 0$.

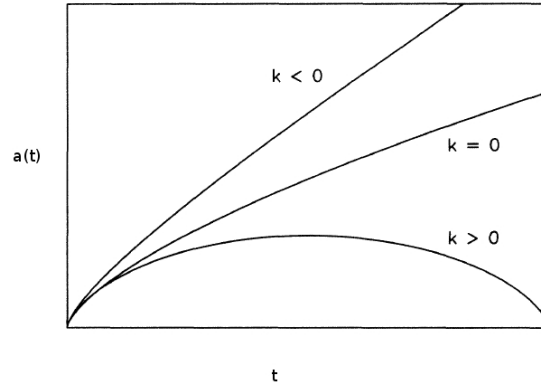


Figura 2.1: Evolução do fator de escala em função do tempo para os três valores possíveis para a curvatura espacial k .

Uma outra forma de escrever a equação (2.6) é utilizando a densidade de energia relativa, definida como $\Omega = \rho/\rho_c$, onde $\rho_c = 3H^2/\kappa$ é a densidade crítica. Dessa forma, essa equação se reduz a

$$\Omega(t) - \frac{k}{(aH)^2} = 1. \quad (2.8)$$

A quantidade $\Omega = \Omega_m + \Omega_r + \dots$ leva em conta o conteúdo material do universo, como matéria, radiação e demais componentes. Podemos notar que em um universo plano, devemos ter $\Omega = 1$, definindo assim o conceito de densidade crítica como a de um universo sem curvatura, e portanto, temos

que a geometria é determinada pela quantidade de matéria e energia contida dentro dele. Esse ponto voltará a ser abordado quando discutirmos a questão de condições iniciais do universo.

A solução das equações de Friedmann é mais facilmente obtida se utilizarmos como variável o tempo conforme, definido por

$$\eta \equiv \int \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.9)$$

Após derivar a equação (2.4) por η e utilizando a equação (2.6), podemos escrever a expressão [1]

$$a'' + ka = \frac{\kappa}{6}(\rho - 3p)a^3. \quad (2.10)$$

Essa equação corresponde ao traço das equações de Einstein e é muito útil para encontrarmos soluções analíticas para um universo preenchido por poeira e radiação.

No caso de radiação, $p = \rho/3$ e então temos que a equação (2.10) se reduz a $a'' + ka = 0$, que pode ser facilmente integrada. O resultado é

$$a(\eta) \propto \begin{cases} \sinh \eta, & k = -1; \\ \eta, & k = 0; \\ \sin \eta, & k = 1. \end{cases} \quad (2.11)$$

O tempo físico é recuperado após fazermos a integração $dt = a(\eta)d\eta$. O resultado é o abaixo

$$t \propto \begin{cases} \cosh \eta - 1, & k = -1; \\ \eta^2/2, & k = 0; \\ 1 - \cos \eta, & k = 1. \end{cases} \quad (2.12)$$

É interessante notar que, em um universo plano dominado por radiação, o fator de escala evolui com $a \propto \sqrt{t}$. Assim, a partir de (2.6) vemos que $\rho_r \propto a^{-4}$. Esse resultado já poderia ser alcançado se tivéssemos colocado a equação de estado $p = \rho/3$ na equação de conservação de energia (2.7). Esse

fator extra a^{-1} tem origem no chamado *desvio para o vermelho cosmológico*. A expansão do universo provoca um alongamento no comprimento de onda da radiação, que é inversamente proporcional à sua energia.

No caso de poeira, ou matéria não-relativística, a pressão é nula, e então o lado direito da equação (2.10) é constante. Dessa forma a solução é dada por

$$a(\eta) \propto \begin{cases} \cosh \eta - 1, & k = -1; \\ \eta^2, & k = 0; \\ 1 - \cos \eta, & k = 1. \end{cases} \quad (2.13)$$

No caso plano, temos que $t \propto \eta^3$, resultando em um fator de escala $a(t) \propto t^{2/3}$ em função do tempo cósmico.

O intervalo do tempo conforme em espaços plano e aberto é infinito, podendo se estender entre $0 < \eta < \infty$. Porém, em universos fechados esse intervalo possui um limite de $0 < \eta < \pi$ e $0 < \eta < 2\pi$, tanto no caso de radiação quanto no de matéria, respectivamente.

No caso de um universo plano preenchido por poeira e radiação, temos que a densidade de energia do lado direito de (2.10) é igual a [1]

$$\rho = \rho_m + \rho_r = \frac{\rho_{eq}}{2} \left[\left(\frac{a_{eq}}{a} \right)^3 + \left(\frac{a_{eq}}{a} \right)^4 \right], \quad (2.14)$$

onde o subscrito *eq* se refere ao momento de equivalência entre matéria e radiação, ou seja, quando $\rho_m = \rho_r$. A densidade de radiação não vai contribuir na equação (2.10), pois $p = \rho_r/3$, sobrando apenas a contribuição da matéria. A equação fica então na forma

$$a'' = \frac{\kappa}{12} \rho_{eq} a_{eq}^3, \quad (2.15)$$

cuja solução é bastante simples e dada por

$$a(\eta) = \frac{\kappa}{24} \rho_{eq} a_{eq}^3 \eta^2 + C\eta. \quad (2.16)$$

A constante de integração C é obtida ao colocarmos essa expressão junto com (2.14) em (2.6) quando reescrita no tempo conforme, resultando em

$C = \sqrt{\kappa\rho_{eq}a_{eq}^4/6}$. A solução é então

$$a(\eta) = a_{eq} \left[\left(\frac{\eta}{\eta_\star} \right)^2 + 2 \frac{\eta}{\eta_\star} \right], \quad \text{com } \eta_\star = \sqrt{\frac{\kappa\rho_{eq}a_{eq}^2}{24}} = \frac{\eta_{eq}}{\sqrt{2}-1}. \quad (2.17)$$

Vemos que quando $\eta \ll \eta_{eq}$, a radiação domina e $a \propto \eta$. À medida que o universo se expande, a densidade de energia da radiação decai mais rapidamente do que a da poeira. Esta última vem a dominar quando $\eta \gg \eta_{eq}$, resultando em uma expansão com $a \propto \eta^2$.

Como o volume do universo aumenta com o tempo, fica claro que o universo já foi muito mais quente do que hoje. A energia dos fótons que preenchem o universo é proporcional às suas frequências, na forma $E = \hbar\omega$, sendo esta última também relacionada ao comprimento de onda, via $\omega = 2\pi c/\lambda$. A expansão do universo alonga o comprimento de onda λ , reduzindo portanto a energia da radiação. Sendo a temperatura do universo dada em termos de sua energia através de $E = k_B T$, temos então que $T = 2\pi\hbar c/k_B \lambda$, ou seja,

$$T(t) = \frac{T_0}{a(t)}. \quad (2.18)$$

A temperatura atual T_0 é precisamente medida com valor igual a $2,725 \pm 0,002$ K [18]. Na época da equivalência matéria-radiação (quando $\rho_m = \rho_r$), podemos calcular o fator de escala através da igualdade

$$\frac{\Omega_r^0}{a^4} = \frac{\Omega_m^0}{a^3} \quad \rightarrow \quad a(t_{eq}) = \frac{\Omega_r^0}{\Omega_m^0} \quad (2.19)$$

Substituindo os valores atuais para essas grandezas (para radiação $\Omega_r^0 \simeq 8,24 \times 10^{-5}$, e para matéria $\Omega_m^0 \simeq 0,28$), obtemos que $a(t_{eq})$ era ~ 3000 vezes menor do que hoje, inferindo uma temperatura na ordem de 10^4 K. Em tempos ainda mais remotos, a temperatura ultrapassava a ordem de GeV/k_B , gerando um ambiente onde mesmo bárions e mésons não permaneciam estáveis; um cenário conhecido como *Big Bang*³.

³As unidades de temperatura são relacionadas através de $1 \text{ eV}/k_B \simeq 1.16 \times 10^4 \text{ K}$.

Voltando ainda mais no passado, vemos que o fator de escala $a \rightarrow 0$ quando o tempo também vai para zero. Esse momento é chamado de *singularidade inicial*, e corresponderia ao início do universo. Não é claro se esse momento realmente ocorreu, pois se trata de uma situação onde a própria TRG não é mais válida, e portanto não podemos inferir esse início singular. Argumenta-se que a condição de energia $\rho + 3p > 0$ não vale mais nesse regime, e portanto haveria a possibilidade de um ricochete [8], onde o universo inicia a expansão após uma fase de contração anterior, ou a de um universo eterno no passado, quando o volume do universo tende assintoticamente a um valor mínimo. Para um estudo mais aprofundado dessa época é necessária uma teoria quântica da gravitação. Como ainda não dispomos dessa ferramenta, deixaremos essa discussão de lado pelo momento.

No entanto, podemos chamar o tempo decorrido desde então de *idade do universo*. Ela pode ser obtida vendo que o fator de escala evolui como uma lei de potência $a(t) \propto t^n$, e dessa forma, a quantidade $H = \dot{a}/a$ é simplesmente igual a n/t . Esse parâmetro H é chamado de *parâmetro de Hubble* e é um observável cosmológico. Medindo o valor de H hoje (H_0), podemos obter o tempo t_0 correspondente à idade do universo. Como o universo foi dominado por poeira em quase toda a sua evolução até hoje, com o fator de escala evoluindo na forma $a \propto t^{2/3}$, temos que

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3t} \quad \rightarrow \quad t_0 \simeq \frac{2}{3}H_0^{-1} \quad (2.20)$$

Como o parâmetro de Hubble atual é observado em valores próximos a $72 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$, a idade do universo seria de aproximadamente 9 bilhões de anos, valor menor do que a idade dos aglomerados globulares mais antigos (~ 13 bilhões de anos). No caso de um universo vazio, uma boa aproximação para um cenário com $\Omega_m < 0,2$, a equação (2.4) nos assegura que o fator de escala evolui com $a \propto t$. A idade do universo seria então

$$t_0 = H_0^{-1}, \quad (2.21)$$

o que corresponde a aproximadamente 13 bilhões de anos, mais apropriada para abrigar as estrelas mais antigas. Isso indica que Ω_m deve ser pequeno em comparação com o valor crítico $\Omega = 1$, apontando para um universo com curvatura espacial negativa. Em contrapartida, observações mais recentes parecem corroborar o modelo de universo plano [19], levando assim a um problema relacionado com a idade do universo. Voltaremos a esse assunto mais à frente.

2.2 Horizontes

Existe um limite fundamental para o quão longe podemos observar, pois afinal, nenhuma partícula pode se propagar com velocidade superior a da luz. Essa velocidade, sendo finita, estabelece a existência de horizontes, impondo uma dificuldade na tarefa de compreender todo o universo.

Em Relatividade Especial, o intervalo ao longo de uma trajetória de uma partícula sem massa se propagando com velocidade da luz é igual a zero, ou seja, $ds^2 = 0$. Em Relatividade Geral, essa expressão deve valer localmente para todos os referenciais inerciais. Sendo a quantidade ds^2 um invariante, o intervalo também deve ser zero ao longo de qualquer geodésica nula em espaços curvos.

Situando o observador na origem, temos que a propagação radial da luz em um universo isotrópico é dada, em termos do tempo conforme, por

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - d\chi^2) = 0, \quad (2.22)$$

resultando na simples expressão $\chi(\eta) = \pm\eta + \text{const.}$ A função $\chi(\eta)$ corresponde à distância percorrida na superfície, e não deve ser confundida com a coordenada r em (2.3). As geodésicas então correspondem a linhas retas em ângulos de 45° no plano $\eta \times \chi$.

Se o universo tem uma idade finita, a luz só pôde se propagar por uma distância finita correspondente a esse tempo. Assim, o volume de onde

podemos receber qualquer tipo de informação do universo é limitado. A distância máxima que a luz pôde se propagar é igual a

$$\chi_p(\eta) = \eta - \eta_i = \int_{t_i}^t \frac{dt}{a}, \quad (2.23)$$

onde η_i corresponde ao início do universo. Essa distância é chamada de *horizonte de partículas*. No momento η , qualquer evento situado a uma distância $\chi > \chi_p(\eta)$ é inacessível para um observador na origem $\chi = 0$. Se o universo possui uma singularidade inicial, podemos simplesmente impor $\eta_i = 0$, mas queremos deixar em aberto essa questão. Então, por um ponto de vista mais geral, assumiremos $\eta_i \neq 0$.

Multiplicando χ_p pelo fator de escala, obtemos o comprimento físico do horizonte de partículas, dado por

$$d_p(t) = a(t)\chi_p = a(t) \int_{t_i}^t \frac{dt}{a}. \quad (2.24)$$

Em um universo dominado por radiação, com fator de escala $a(t) \propto \sqrt{t}$, temos que o horizonte de partículas se expande de acordo com $d_p(t) = 2t$. Por outro lado, no domínio por matéria, evoluindo com $a(t) \propto t^{2/3}$, esse horizonte cresce com $d_p(t) = 3t$.

Quando a condição de energia $\rho + 3p > 0$ é satisfeita, temos que o horizonte de partículas é da ordem da escala de Hubble (também chamada de *escala de curvatura*), definida por H^{-1} [1]. O nome *horizonte de Hubble*, definido por essa escala, é muitas vezes identificado com o de partículas, embora eles sejam conceitualmente diferentes. O primeiro é uma escala dinâmica caracterizada pela taxa de expansão do universo, enquanto que o segundo é um conceito cinemático relacionado à propagação da luz.

Um outro horizonte é conhecido como *horizonte de eventos*. Este é a parte complementar do horizonte de partículas, pois engloba as regiões de onde um sinal emitido nunca será recebido por um observador no futuro. É

definido na seguinte forma

$$\chi_e(\eta) = \int_{\eta}^{\eta_{max}} d\eta = \eta_{max} - \eta, \quad (2.25)$$

onde max se refere ao momento final do universo. A extensão física do horizonte de eventos é dada então por

$$d_e(t) = a(t) \int_t^{t_{max}} \frac{dt}{a}. \quad (2.26)$$

Em caso de um universo infinito, $t_{max} = \infty$, e a integral (2.26) pode convergir ou divergir, dependendo da taxa de expansão. Como exemplo, temos que em um universo desacelerado aberto ou plano, com tanto t_{max} e η_{max} infinitos, χ_e e d_e divergem, de maneira que não há horizonte de eventos. Já em um universo fechado e desacelerado, o tempo disponível para observações futuras é finito, pois o universo está fadado a colapsar. Portanto, existe tanto um horizonte de eventos quanto um horizonte de partículas.

2.3 Evidências Observacionais

O sucesso do Modelo Padrão como a conjectura vigente hoje em dia se baseia em três principais pilares observacionais: o diagrama de Hubble, exibindo a expansão do universo; a abundância de elementos leves, em acordo com a teoria de nucleossíntese; e a detecção da radiação cósmica de fundo em microondas, como espectro de corpo negro.

2.3.1 Diagrama de Hubble

Como mencionamos anteriormente, essa é a evidência de que o universo está se expandindo. Hubble, nas décadas de 1920 e 1930 foi o primeiro a observar o desvio para o vermelho das galáxias

$$1 + z = \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{em}} = \frac{1}{a}, \quad (2.27)$$

e portanto verificando que elas estão se afastando umas das outras. Esse efeito ocorre pois o comprimento de onda no momento de emissão (λ_{em}) é menor do que o observado pelo detector (λ_{obs}), devido à expansão do fator de escala. Quando o desvio para o vermelho z é muito pequeno, podemos aproximar essa expressão como o efeito Doppler relativístico $z \simeq v/c$.

Hubble então percebeu que o desvio para o vermelho aumentava com a distância, o que é exatamente o esperado em um universo em expansão, com distância física entre duas galáxias sendo $d = ax$, sendo x a distância comóvel. Se $\dot{x} = 0$ (sem movimento peculiar), a velocidade física é então

$$v = \dot{d} = \dot{a}x = Hd, \quad (2.28)$$

onde $H = \dot{a}/a$, como definido na Seção 2.1. As velocidades aumentam linearmente com a distância, com taxa dada pelo parâmetro de Hubble H . O trabalho original de Hubble detectou $H = 500 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, quase dez vezes maior do que as atuais estimativas, porém indo a desvios para o vermelho de apenas $z \simeq 0,003$.

As versões atuais do diagrama de Hubble ainda se utilizam do mesmo princípio: cruzar a distância com o desvio para vermelho de objetos distantes. No entanto, inferir tais distâncias não é fácil se o objeto celeste não possui uma luminosidade intrínseca conhecida. Por isso, apela-se à técnica conhecida como *vela padrão* [2], onde escolhe-se uma categoria de objetos com a mesma luminosidade intrínseca. Qualquer diferença entre a luminosidade de dois desses objetos seria resultado apenas da diferença nas distâncias. Como dito anteriormente, Hubble utilizou estrelas cefeidas, onde a luminosidade variável é proporcional ao período. Atualmente, a vela padrão que melhor pode ser observada em grandes distâncias são supernovas Tipo Ia, podendo estender o diagrama de Hubble até $z \sim 1,7$. Nessas distâncias, o fator de escala a passa a ter influência sobre a forma do diagrama, que passa a depender da composição do universo.

As observações mais recentes indicam que a relação distância \times desvio para o vermelho para $z > 1$ é característica de um universo que se expande aceleradamente [20, 21]. Essa dinâmica carece de algum fluido com pressão negativa e que viole a condição $\rho + 3p > 0$, como podemos ver na equação (2.4). Falaremos mais a respeito em um momento posterior.

2.3.2 Nucleossíntese Primordial

Como vimos na Seção 2.1, a temperatura do cosmos aumenta à medida que voltamos na história. Quando a temperatura era da ordem de MeV/k_B , não poderia haver no universo átomos neutros ou mesmo núcleos ligados. A vasta quantidade de radiação em tal ambiente garantia que qualquer átomo ou núcleo fosse quase que imediatamente destruído por um fóton de alta energia. Somente após a expansão propiciar um esfriamento do universo, com temperaturas bem abaixo da energia de ligação, elementos leves puderam ser formados. Sabendo as condições do universo nessa época e as seções de choque relevantes dos núcleos atômicos, pode-se calcular a abundância primordial dos elementos mais leves.

A teoria da Nucleossíntese Primordial não será discutida nesse trabalho. Uma boa descrição desse período pode ser obtida em [1, 2]. Observações precisas [22] são consistentes com as previsões do Modelo Padrão⁴. Além disso, as previsões teóricas dependem da densidade de prótons e nêutrons na época da Nucleossíntese. A combinação dessas densidades nos dão a densidade bariônica do universo, pois esses dois eram os únicos bárions presentes nesse período. Como essa densidade decai com a^{-3} , podemos comparar com as densidades de elementos leves observadas hoje. Em particular, as medidas de deutério primordial apontam para uma densidade bariônica de apenas 20% da densidade de matéria observada atualmente.

⁴Há, no entanto, uma discrepância na abundância do elemento lítio (Li). Os cálculos prevêem uma quantidade 2 ou 3 vezes maior do que a observada [23].

Assim sendo, a nucleossíntese pode ser um dos grandes indicadores da existência de uma matéria escura não-bariônica.

A medição de deutério [24] é uma das técnicas mais eficientes para testar o modelo, pois ela explora a abundância em desvios para o vermelho da ordem $z \sim 3 - 4$. Trata-se de um período onde pode-se medir as densidades antes que muitos processos astrofísicos pudessem alterá-las. O método consiste em analisar a luz de quasares distantes e verificar as linhas de absorção pelo hidrogênio presente ao longo da trajetória da luz.

2.3.3 Radiação Cósmica de Fundo

Quando a temperatura do universo excedia os 3000K de temperatura, átomos neutros não permaneciam estáveis, pois a alta energia da radiação era suficiente para ejetar os elétrons de suas órbitas. O universo era então opaco à luz devido ao grande número de espalhamentos fóton-elétron. Quando o universo esfriou até a ordem de $0,3 \text{ eV}/k_B$, os elétrons se combinaram com nucleons e formaram átomos de Hidrogênio e Hélio, permitindo que a luz se propagasse livremente. Esse momento é chamado de *recombinação*.

A maior evidência desse período é a observação da radiação cósmica de fundo em microondas (CMB, na sigla em inglês), realizada pela primeira vez por Penzias e Wilson na década de 1960 [25]. Ela nos oferece uma visão do universo de quando ele tinha apenas 300.000 anos de idade. Os fótons da CMB colidiram pela última vez com elétrons em um desvio para o vermelho $z \sim 1100$, e viajaram livremente desde então. Assim, a CMB é o melhor objeto a se utilizar para sondar os momentos mais primitivos do universo.

Um dos pontos cruciais nesse assunto é que a quantidade de espalhamentos fóton-elétron antes da recombinação deve ter sido enorme, garantindo que os fótons estivessem em equilíbrio na superfície de último espalhamento. Assim, o espectro observado da CMB deve ser aquele de um corpo negro. Atualmente, o desvio para o vermelho cosmológico durante toda

a trajetória da radiação a deixou com temperatura igual a 2,73 K.

Mas o fato mais importante proveniente da observação da CMB foi a comprovação de que o universo era bastante homogêneo quando ainda muito jovem, com flutuações não maiores do que uma parte em 10^5 [19]. Essa descoberta corroborou o modelo de Big Bang, que hoje chamamos de Modelo Padrão, que encontrava oposição de modelos estacionários. A observação em uma única frequência feita por Penzias e Wilson favoreceu significativamente a hipótese de um universo em expansão.

2.3.4 Estruturas em Larga Escala

Embora o Modelo Padrão da Cosmologia possua esses notáveis sucessos preditivos, muitos assuntos ainda permanecem em aberto. Primeiramente, gostaríamos de citar a presença de matéria escura que, como dito anteriormente, não possui natureza bariônica. A existência de matéria escura foi inferida pela primeira vez por Zwicky, em 1933, ao medir a velocidade de rotação de discos galácticos [26]. Não apenas na escala de uma galáxia, mas parece haver um desencontro de valores em qualquer escala quando se compara a matéria inferida pela atração gravitacional e a observada astronômica. Os candidatos mais populares para matéria escura seriam partículas elementares criadas durante o Big Bang, quando a temperatura excedia a ordem GeV/k_B .

Nas últimas décadas, tem havido um grande número de sondagens para identificar uma estrutura no universo, como o *Sloan Digital Sky Survey* (SDSS) [27] e o *Two Degree Field Galaxy Redshift Survey* (2dF) [28]. Juntos, esses projetos compilam o desvio para o vermelho, e portanto a distância, de milhões de galáxias, e verificaram que elas não estão distribuídas ao acaso. O universo possui uma estrutura em larga escala. Para entendermos essa estrutura, devemos levar em consideração que o universo apresentava desvios em sua homogeneidade. Isso é consistente com a observação da CMB,

pois esta apresenta pequenas anisotropias, indicando um desvio em algumas regiões de $\delta\rho/\rho \sim 10^{-5}$ na densidade média do universo. Mas nesse estudo é necessário o emprego do mecanismo inflacionário, que veremos mais a frente.

A teoria de formação de estruturas está atualmente muito longe de uma forma final. No entanto, já é sabido entre os cosmólogos desse campo que as observações indicam fortemente a presença de matéria escura. Ela é então necessária não somente para explicar a rotação dos discos galácticos como também a estrutura observada no universo em largas escalas. Entretanto, uma explicação alternativa desse efeitos é a modificação da gravitação newtoniana, conhecida como MOND [29]. Nesse caso, a gravidade possui alguns efeitos apreciáveis apenas em escalas galácticas, sendo estes os responsáveis pela dinâmica observada, eliminando a necessidade de matéria escura.

2.4 Universo Acelerado

Vimos na seção anterior que o diagrama de Hubble em altos desvios para o vermelho parecem apontar para um universo com aceleração positiva. Olhando para a equação de Friedmann (2.4), temos que isso só pode ser explicado pela TRG caso a dinâmica do universo fosse dominada por um fluido que obedecesse à condição $\rho + 3p < 0$. Tal fluido, com pressão negativa $p < -\rho/3$ foi denominado de *energia escura*, por nunca ter sido observado diretamente.

Além da observação de supernovas distantes, os dados provenientes da CMB indicam que o universo é muito próximo de plano, com $k/a^2 \simeq 0$, o que a partir de (2.6) sugere uma densidade relativa $\Omega = \kappa\rho/3H^2 \simeq 1$. Como os mapeamentos SDSS e 2dF nos dão uma densidade de matéria próxima de $\Omega_m \simeq 0,28$, incluindo matéria escura⁵, há uma evidência de uma forma

⁵A matéria bariônica corresponde a aproximadamente $\Omega_b \simeq 0,04$.

escura de matéria ou energia ainda não detectada.

A combinação desses dois conjuntos de dados observacionais são consistentes com a hipótese de que o universo é preenchido por energia escura, com $\Omega_\Lambda \simeq 0,72$ [19]. O símbolo Λ é pegado emprestado da constante cosmológica, um termo extra colocado a mão nas equações de Einstein de forma a contrabalançar a atração gravitacional e gerar um universo estático. Sendo esse termo constante, a equação de conservação (2.7) nos garante $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$, provocando uma aceleração ao universo.

A constante cosmológica é só um entre diversos candidatos a energia escura [30]. Os mais populares são a energia do vácuo e a quintessência, onde em ambos temos $p \simeq -\rho$. O primeiro, apesar de ser um efeito esperado das flutuações do vácuo quântico, apresenta uma grande dificuldade no ponto de vista quantitativo, pois ultrapassa o valor esperado de ρ_Λ em 120 ordens de grandeza. Já a quintessência é um modelo baseado na dinâmica de um campo escalar, podendo inclusive ser variável no tempo. Tal campo nunca foi detectado, nem astonomicamente nem em aceleradores de partículas, o que é uma grave dificuldade para essa hipótese. Outra questão é que o modelo não é baseado na física fundamental, possuindo desagradavelmente um caráter fenomenológico. Um candidato interessante é o gás de Chaplygin, que se comportaria como matéria em pequenas escalas mas como Λ em distâncias cosmológicas, unificando em um único formalismo a matéria e energia escuras [31]. Essas hipóteses diferem da constante cosmológica, que é parte da geometria do universo, por se tratarem de mecanismos físicos.

O espaço-tempo dominado pela constante cosmológica, ou qualquer fluido com equação de estado $p = -\rho$ é chamado de espaço de de Sitter [1]. A equação (2.4) é então expressa no seguinte modo

$$\ddot{a} - H_\Lambda^2 a = 0, \quad \text{com} \quad H_\Lambda^2 = \frac{\kappa}{3} \rho_\Lambda, \quad (2.29)$$

cuja solução é

$$a(t) = C_1 \exp(H_\Lambda t) + C_2 \exp(-H_\Lambda t). \quad (2.30)$$

As constantes C_1 e C_2 podem ser fixadas a partir da equação (2.6), resultando em $4H_\Lambda^2 C_1 C_2 = k$. No caso de um universo plano, com $k = 0$, temos que uma das constantes deve ser igual a zero. Para um universo em expansão, devemos escolher então $C_2 = 0$ e $a(t) = \exp(H_\Lambda t)/H_\Lambda$. Na situação de um universo com curvatura ($k = \pm 1$), as constantes são relacionadas na forma $C_1 = 1/(2H_\Lambda) = \pm C_2$. A solução total pode se resumida na expressão

$$ds^2 = dt^2 - \frac{1}{H_\Lambda^2} \begin{pmatrix} \sinh^2(H_\Lambda t) \\ \exp(2H_\Lambda t) \\ \cosh^2(H_\Lambda t) \end{pmatrix} \left[d\chi^2 + \begin{pmatrix} \sinh^2 \chi \\ \chi^2 \\ \sin^2 \chi \end{pmatrix} d\Omega^2 \right], \quad \begin{matrix} k = -1; \\ k = 0; \\ k = 1, \end{matrix} \quad (2.31)$$

com $d\Omega$ representando a parte angular. Vemos que a coordenada radial χ pode ir de zero a infinito apenas em universos planos e hiperbólicos. Ao contrário do universo dominado por matéria, onde a curvatura k é determinada pela densidade de energia, no espaço-tempo de de Sitter as três configurações são possíveis independentemente do valor de ρ_Λ . Portanto, elas descrevem o mesmo espaço-tempo físico, porém em diferentes sistemas de coordenadas. Outro fato importante é que um universo de Sitter não possui uma singularidade inicial. Mesmo no caso $k = -1$, onde o fator de escala evolui com $a \propto \sinh^2 H_\Lambda t$, o ponto $t = 0$ não representa uma singularidade física, mas uma situação onde o sistema de coordenadas se torna singular. A bem da verdade, em um espaço-tempo de de Sitter puro não há uma evolução real. Não existe um sistema de coordenadas estático que cubra uma região maior do que H_Λ^{-1} em um universo de de Sitter, sendo, portanto, a expansão apenas aparente.

O horizonte de partículas em um universo de Sitter plano é dado por

$$d_p(t) = \exp(H_\Lambda t) \int_{t_i}^t \exp(-H_\Lambda t) = \frac{\exp[H_\Lambda(t - t_i)] - 1}{H_\Lambda} \quad (2.32)$$

Para $t - t_i \gg H_\Lambda^{-1}$, o tamanho de uma região causalmente conectada cresce exponencialmente, enquanto que a escala de Hubble H_Λ^{-1} permanece

constante. Esse fato será de extrema importância quando discutirmos no próximo capítulo o período inflacionário. Além do horizonte de partículas, temos também que o horizonte de eventos em um espaço de Sitter plano é igual a

$$d_e(t) = \exp(H_\Lambda t) \int_t^\infty \exp(-H_\Lambda t) = H_\Lambda^{-1}. \quad (2.33)$$

O comprimento do horizonte de eventos é então igual à escala de Hubble. Qualquer evento que ocorra em uma região situada a uma distância maior do que H_Λ^{-1} jamais será visto por um observador e, por conseguinte, não poderá influenciar o seu futuro, pois o espaço está se expandindo muito rapidamente. Por isso, essa situação é chamada de expansão superlumínica.

Como não há a presença de uma singularidade inicial em um espaço de Sitter, a idade de um universo vazio com constante cosmológica é então infinita. No entanto, se $\Omega_m \neq 0$, temos que a matéria domina quando o fator de escala é muito pequeno, havendo portanto uma singularidade. A idade de um universo com constante cosmológica e matéria é dada por [32]

$$t_0 = \frac{2}{3} H_0^{-1} \left[\frac{1}{2\sqrt{\Omega_\Lambda}} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{\Omega_\Lambda}}{1 - \sqrt{\Omega_\Lambda}} \right) \right], \quad (2.34)$$

que pode inclusive ser maior do que H_0^{-1} se tivermos $\Omega_\Lambda > 0,71$. Os valores atuais dos observáveis H_0 e Ω_Λ nos dão uma idade ao universo de aproximadamente 13,7 bilhões de anos.

O Modelo Padrão da Cosmologia corrente, baseado no princípio cosmológico e com a adição de matéria e energia escuras, é chamado em geral de Modelo Λ -CDM⁶. Como os componentes escuros correspondem a aproximadamente 96% da constituição do universo e são inferidos apenas por seus efeitos gravitacionais, temos que o modelo corresponde a um ajuste fenomenológico para explicar uma dinâmica não prevista pela Relatividade Geral.

⁶A sigla, em inglês, se refere à matéria escura fria.

Uma outra questão que ainda não foi abordada aqui se refere a problemas de condições iniciais do universo. A solução mais atraente para essas dificuldades é a proposta de que houve um período de expansão exponencial chamado de *inflação* em um momento anterior a $t = 10^{-30}$ s. O mecanismo inflacionário será discutido com mais detalhes no próximo capítulo e é o período que desejamos abordar com o presente trabalho. Alguns autores já incluem o período inflacionário como parte do Modelo Padrão, mas gostaríamos de manter esses dois conceitos em separado.

Capítulo 3

Inflação

Inflação cosmológica é o nome dado à fase de expansão acelerada, que teria ocorrido nos períodos iniciais do universo. Quando dizemos “iniciais”, nos referimos à época em que o universo emerge de uma fase quântica, dita também *Planckiana*, quando a noção de espaço-tempo perde seu sentido usual em Relatividade. Anteriormente a isso, faz-se necessária uma teoria quântica da gravitação, que a física atual não possui embasamento suficiente para um estudo mais aprofundado. A adição do mecanismo inflacionário ao Modelo Padrão da Cosmologia se deve à necessidade de livrar o universo de condições iniciais extremamente rigorosas.

3.1 Problemas de Condições Iniciais

Observamos um universo atual bastante homogêneo e isotrópico (com precisão de uma parte em 10^4) [19]. Sabendo que um universo em expansão desacelerada não é capaz de reduzir desvios na homogeneidade [1], percebe-se que o universo primordial era arbitrariamente homogêneo.

Além disso, essa homogeneidade deve estar presente em dimensões muito maiores do que o horizonte causal [3] no período logo após a era planckiana. Sabendo que o horizonte de partículas atual é $ct_0 \sim 10^{28}$ cm, temos que o

universo em um tempo t_i deveria ser homogêneo em escalas

$$l_i \sim ct_0 \frac{a_i}{a_0}. \quad (3.1)$$

Comparando essa escala com o horizonte causal $l_c \sim ct_i$ do mesmo período, temos que a razão entre este e a extensão da região homogênea deve ser

$$\frac{l_i}{l_c} \sim \frac{t_0}{t_i} \frac{a_i}{a_0}, \quad (3.2)$$

que resulta em uma razão de 10^{28} no fim da era planckiana, com $t_{\text{pl}} \sim 10^{-43}$ s e $a_i/a_0 \sim 10^{-32}$. Havia então 10^{84} regiões causalmente desconectadas quando o universo entrou na era dominada pela radiação. Essa enorme diferença apresenta uma enorme dificuldade para o Modelo Padrão, e é conhecida pelo nome de *problema do horizonte*. Supondo que o fator de escala evolui como uma lei de potência do tempo, podemos substituir $\dot{a} \sim a/t$ na equação (3.2), o que nos dá

$$\frac{l_i}{l_c} \sim \frac{\dot{a}_i}{\dot{a}_0}. \quad (3.3)$$

O caráter atrativo da gravidade garante um universo desacelerado, e portanto o horizonte causal sempre foi menor do que a escala de homogeneidade. Na época da recombinação, temos que havia 10^5 regiões sem contato causal, embora seja visível nas observações da radiação cósmica de fundo uma homogeneidade em larga escala.

Uma outra adversidade encontrada pelo Modelo Padrão é o que chamamos de *problema da planeza* [4]. O universo atualmente possui uma densidade crítica de energia ρ_0 bem próxima do valor crítico $\rho_c = 3H^2/8\pi G$ que define uma seção espacial plana. As equações de Friedmann nos dão

$$\Omega(t) - 1 = \frac{k}{(Ha)^2}, \quad (3.4)$$

onde $\Omega = \rho/\rho_c$. Como $Ha = \dot{a}$, temos que em um universo desacelerado o valor da densidade de energia se afasta com o tempo da unidade. O resultado é que um universo plano hoje já foi muito mais plano no passado. Em termos

quantitativos, o universo deveria possuir uma densidade de energia relativa $\Omega = 1$ com precisão não menor do que de uma parte em 10^{59} [6]. Isso implica na necessidade de um enorme ajuste fino na curvatura espacial do universo primordial.

Ambas as considerações acima sugerem que o universo teve uma fase primitiva com características bastante improváveis. Pode-se argumentar que probabilidade é um conceito que não se aplica à cosmologia, visto que o universo é um fenômeno único e não se pode repetir o “experimento”. Mas cabe à Cosmologia procurar uma explicação para o estado atual do universo através de mecanismos físicos partindo de condições iniciais genéricas. Há diversos argumentos postulando que o universo pode sim ter tido tais condições peculiares em seu início¹, mas temos um bom candidato físico na inflação cosmológica.

Os problemas mencionados acima podem ser resolvidos se o universo atravessou uma fase do tipo de Sitter logo após emergir de uma fase quântica [5]. Durante uma fase de Sitter, o fator de escala $a(t)$ cresce exponencialmente com o tempo, o que representa um cosmos acelerado. No caso do problema da planeza, vemos que na equação (3.4) o termo do lado direito decai rapidamente se $a \propto \exp(Ht)$, resolvendo a questão do ajuste fino necessário nas condições iniciais. No problema do horizonte, temos também que um universo se expandindo exponencialmente pode ter um passado causalmente conectado que porém se estende hoje por uma região maior do que o horizonte de partículas dado por (2.32). O problema do horizonte então desaparece, visto que o horizonte causal pode ter aumentado de volume em uma ordem de 10^{90} vezes, de forma que partículas hoje afastadas por uma distância maior do que o universo observável outrora puderam estar em uma região conectada. Isso é possível desde que o período inflacionário tenha tido uma duração suficiente para resolver tais problemas. Falaremos sobre o assunto

¹Uma discussão mais elucidativa sobre o assunto pode ser encontrada em [33].

mais a seguir.

3.2 O Mecanismo Inflacionário

A ideia de um universo em expansão acelerada representa uma situação onde a gravidade se torna repulsiva, em vez de atrativa. De acordo com a equação de Friedmann²

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3m_{Pl}^2}(\rho + 3p)a, \quad (3.5)$$

vemos que um cosmos acelerado só pode ocorrer se houver o domínio de algum componente material exótico que viole a condição de energia forte $\rho + 3p > 0$. Especificamente, esse componente deve possuir pressão negativa $p < -\rho/3$. Um tipo de tal matéria exótica já é conhecido de longa data dos cosmólogos: a constante cosmológica, que possui equação de estado $\rho = -p$. No entanto, uma constante cosmológica forte o suficiente para provocar inflação não permite que o universo, em um momento posterior, entre em uma fase dominada pela radiação, deixando-o eternamente na configuração de de Sitter. Precisa-se aqui de um fluido de matéria com equação de estado $\rho = -p$ e que decaia com o tempo, de forma que o universo possa então adquirir o caráter Friedmann-Robertson-Walker desacelerado, onde se assentam a grande maioria das previsões observacionalmente comprovadas do Modelo Padrão.

Um campo escalar ϕ é um candidato natural para exercer o papel, e por isso também é chamado de *inflaton*. Em uma geometria FRW, o tensor momento-energia do campo possui a mesma forma de a de um fluido perfeito, ou seja,

$$T_{\mu\nu} = \phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}[\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha} - 2V(\phi)], \quad (3.6)$$

²Utilizaremos como unidade nesse capítulo $G = 1/m_{Pl}^2$, onde m_{Pl} corresponde à massa de Planck que é igual a $1,2 \cdot 10^{19}$ GeV. Dessa forma, $\kappa = 8\pi/m_{Pl}^2$.

e a densidade de energia e pressão do fluido são

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^\alpha\phi_{,\alpha} + V(\phi) \quad \text{e} \quad p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^\alpha\phi_{,\alpha} - V(\phi). \quad (3.7)$$

É óbvio pelas equações acima que o campo escalar somente possui a equação de estado $\rho \simeq -p$ se o termo cinético $\dot{\phi}^\alpha\phi_{,\alpha}$ for muito menor do que o potencial $V(\phi)$. Isso resulta em $V(\phi) \approx$ constante durante um período chamado de *slowroll*, quando o campo varia lentamente na curva do potencial. Dada a equação de Friedmann

$$H^2 = \frac{8\pi}{3m_{pl}^2}\rho \quad \rightarrow \quad a(t) \sim a_i \exp\left(\int_{t_i}^{t_f} \sqrt{\frac{8\pi V(\phi)}{3m_{pl}^2}} dt\right), \quad (3.8)$$

resultando em uma fase de de Sitter. Nas equações acima, utilizamos $\rho \simeq V(\phi)$ a partir de (3.7), e t_f é tempo quando a inflação termina. Para obtermos inflação suficiente para eliminar o problema do horizonte, devemos ter $a_f/a_i \sim 10^{30}$, o que leva a³

$$\frac{a_f}{a_i} \sim \exp(H_i\Delta t) > 10^{30}, \quad (3.9)$$

de onde podemos concluir que o período inflacionário deverá durar um tempo maior do que $70H_i^{-1}$ (ou 70 tempos de Hubble ou *e-folds*). Um crescimento dessa ordem reduz também a curvatura espacial drasticamente, resolvendo o problema da planeza, por conseguinte.

3.2.1 Dinâmica do Campo

A equação de Klein-Gordon do campo escalar é obtida a partir da conservação do tensor momento-energia (3.6), ou seja $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$, resultando em

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0. \quad (3.10)$$

³Visto que o potencial $V(\phi)$ se mantém quase constante durante a inflação, aproximamos $\int H dt \approx H\Delta t$.

Na equação acima, $V'(\phi)$ é a derivada do potencial em relação a ϕ . Assumimos que o inflaton é espacialmente homogêneo, de forma que não há qualquer contribuição de gradientes em ρ ou p . Termos de gradiente podem ser importantes para analisar se há ou não inflação, mas uma vez começada, esses termos decaem rapidamente [6]. A equação (3.10) é idêntica à equação de uma bola rolando uma rampa com atrito, onde este depende tanto da posição quanto (às vezes) da velocidade, pois $H = \sqrt{[8\pi(\dot{\phi}^2/2 + V)]/3m_{Pl}^2}$. Durante a fase de *slowroll*, temos que o termo de atrito em (3.10) domina, resultando em $\ddot{\phi}$ desprezível e $H \approx \sqrt{8\pi V/3m_{Pl}^2}$ [35]. A equação de Klein-Gordon acima então nos dá

$$\dot{\phi} = -\frac{V'(\phi)}{3H} = \frac{V'(\phi)}{\sqrt{24\pi V(\phi)}} m_{Pl}. \quad (3.11)$$

Durante a fase *slowroll*, o termo de atrito é contrabalançado pela inclinação do potencial. A partir da equação anterior, obtemos para $\dot{\phi}$ [36]

$$\frac{\ddot{\phi}}{3H\dot{\phi}} = \frac{V''(\phi)}{9H^2} + \frac{V'^2(\phi)}{48\pi V^2(\phi)} m_{Pl}, \quad (3.12)$$

o que significa que desprezar o termo de força $\ddot{\phi}$ só é consistente se as condições

$$|V''(\phi)| < 9H^2 \quad \text{e} \quad \frac{V'(\phi)m_{Pl}}{V(\phi)} < \sqrt{48\pi} \quad (3.13)$$

forem satisfeitas. Essas são as condições de *slowroll*, e ambas implicam que o potencial do campo escalar deve ser plano. Elas também garantem que $\dot{\phi}/2 < V(\phi)$, fazendo com que $H^2 \approx (8\pi/3m_{Pl})V(\phi)$ durante essa fase.

Durante a fase de *slowroll*, o universo está aproximadamente em um estado de de Sitter, com temperatura Hawking de $H/2\pi$ [37], que gera flutuações na densidade de energia de ordem [38]

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \approx \frac{H^2}{\dot{\phi}} \approx \frac{3H^3}{V'} \approx \sqrt{\frac{8^3\pi^3}{3}} \frac{V^{3/2}}{m_{Pl}^3 V'} \quad (3.14)$$

onde fizemos uso de (3.11). As observações da radiação cósmica de fundo pelo WMAP [19] nos dá um limite superior para a expressão (3.14) de $\delta\rho/\rho < 10^{-4}$.

A fase de *slowroll* onde temos o período inflacionário também deve durar tempo o suficiente para resolver os problemas do Modelo Padrão - leia-se, deve durar mais do que 70 *e-folds* (N). O potencial do campo deve então obedecer à restrição [39]

$$N = \int_{t_i}^{t_f} H dt = -\frac{8\pi}{m_{Pl}^2} \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{V(\phi)}{V'(\phi)} d\phi > 70, \quad (3.15)$$

onde ϕ_f é o valor do campo ao fim da inflação, quando este deixa de obedecer às condições de *slowroll*. As equações (3.13), (3.14), com $\delta\rho/\rho < 10^{-4}$, e (3.15) nos impõem um conjunto de restrições sobre o potencial e sobre o valor inicial do campo ϕ .

3.2.2 Classes de Inflação

O primeiro modelo inflacionário proposto por Guth [5], também chamado de *inflação antiga*, provinha da aplicação de Teorias de Grande Unificação (GUT) [40] na Cosmologia. O modelo se baseava nas proposições:

1. O universo se expande inicialmente em alta temperatura com simetria das interações e campo $\phi = 0$.⁴
2. O potencial possui um mínimo estável em $\phi = 0$, logo o universo possui tensor momento-energia $T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}V(0)$, mesmo em baixas temperaturas. Esse estado permanece durante um longo tempo e o universo se expande exponencialmente.
3. A inflação continua até o fim de uma transição de fase onde $\phi \neq 0$. O processo termina com a criação de bolhas contendo o campo não-nulo. O universo reaquece através das colisões entre as paredes das bolhas, gerando o cenário *Big Bang* do Modelo Padrão.

⁴Em GUT, o campo escalar é responsável por dar massa aos mésons de interação. Enquanto o campo possui valor $\phi = 0$, as interações são equivalentes. O campo surge após uma quebra de simetria a uma determinada temperatura, e as interações se distinguem.

O modelo foi abandonado porque a criação de bolhas é bastante aleatória e as colisões entre elas destruiria qualquer homogeneidade produzida anteriormente. Mas o trabalho de Guth assentou na Cosmologia a noção de que o universo necessariamente teria atravessado uma fase de crescimento exponencial, de forma a eliminar os problemas de condições iniciais.

Os modelos de *inflação nova* [35] se distinguem do modelo de Guth ao propor que o campo ϕ não-nulo pode exercer o papel de inflaton. De acordo com a GUT, o processo de inflação pode ocorrer dentro de uma das bolhas, que abrigaria todo o universo observável. O processo é inteiramente governado pela dinâmica do campo escalar ϕ , e ao final as equações dinâmicas criam um universo homogêneo.

Nesse cenário, o campo se encontra no topo de um potencial extremamente plano, e então desliza lentamente de seu valor inicial $\phi = 0$ até um mínimo σ , onde $V(\sigma) = 0$. A inflação ocorre durante esse deslizamento (*slowroll*), e o potencial deve ser plano o suficiente para que esse processo dure por dezenas de tempos de Hubble. À medida que o campo se aproxima do valor σ , a curva do potencial se acentua e ϕ rola mais rapidamente e o processo se encerra. A inflação finalmente termina com o campo oscilando ao redor de σ no mínimo do potencial, onde decai em pares férmions-antiférmions reaquentando o universo.

Um exemplo de potencial de *inflação nova* é

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - \sigma^2)^2. \quad (3.16)$$

A condição de inflação suficiente (3.15) nos dá, com $\phi_i \ll \sigma$ e $\phi_f \approx \sigma$,

$$N \approx 2\pi \frac{\sigma^2}{m_{Pl}^2} \left[\ln \left(\frac{\sigma}{\phi_i} \right) + \frac{1}{2} \right] > 70. \quad (3.17)$$

Supondo que $\sigma \sim m_{Pl}$, temos que a equação acima restringe superiormente o valor inicial ϕ_i , mais precisamente $\phi_i \sim \sigma \cdot \exp(-N/2\pi) < 10^{-5}\sigma$. Caso $\sigma < m_{Pl}$, o valor máximo de ϕ_i é ainda mais restritivo. Quanto às restrições nas

flutuações (3.14), devemos antes mencionar que elas se referem ao momento quando as perturbações cruzam o horizonte [38], o que ocorre em 60 tempos de Hubble antes do fim da inflação. Temos então

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \approx \sqrt{\frac{8\pi^3\lambda}{3}} \left(\frac{\sigma^3}{m_{Pl}^3} \right) \frac{\sigma}{\phi_\star} < 10^{-4}, \quad (3.18)$$

onde ϕ_\star é o valor do campo escalar no momento que as perturbações cruzam o horizonte. A ideia de que ϕ deve possuir um valor muito próximo de zero é bastante complicada e argumenta-se que isso é improvável de ocorrer após uma transição de fase de GUT [42].

Outra questão é que a constante de acoplamento λ deve ser extremamente pequena para satisfazer as condições (3.14) e (3.15). Supondo que a inflação não durou muito mais tempo do que o mínimo necessário, temos que $\phi_i \sim \phi_\star$, e aplicando $\phi_i \sim \sigma \cdot \exp(-N/2\pi)$ na equação (3.18), obtemos

$$\lambda < \frac{3}{8\pi^3} \exp\left(-\frac{N}{\pi}\right) \times 10^{-8} < 2,5 \times 10^{-20}. \quad (3.19)$$

Não há em qualquer modelo de GUT um potencial com constante de acoplamento tão pequena de forma que a inclinação seja plana o suficiente para uma inflação duradoura. Vemos então que a *inflação nova* requer valores muito pequenos, tanto em ϕ quanto em λ , o que significa uma necessidade de ajuste fino nas condições iniciais. Assim sendo, pode-se dizer que *inflação nova* não é genérica.

Pouco tempo depois, Linde propõe um modelo inflacionário bastante simples, chamado de *inflação caótica* [43]. O modelo necessita apenas de um campo escalar clássico com um potencial em lei de potência, e não há o requerimento de qualquer estágio térmico anterior. Com um potencial expresso na forma $V(\phi) \propto \phi^n$, temos que a condição (3.15) nos dá

$$\phi_i \geq \sqrt{\frac{70n}{4\pi} + 1} m_{Pl}, \quad (3.20)$$

onde fizemos $\phi_f = m_{Pl}$. Vemos que para um potencial quártico $\lambda\phi^4/4$ resulta em $\phi_i > 4,8m_{Pl}$, e para um potencial quadrático de um campo

massivo $m\phi^2/2$ obtemos $\phi_i > 3,5m_{Pl}$. Embora essas condições pareçam simples, o mesmo não acontece com a condição relacionada às perturbações de energia. Assim como na *inflação nova*, as flutuações restringem seriamente as constantes de acoplamento λ ou m . A partir de (3.14), obtemos

$$\lambda \approx 10^{-14}, \text{ para } V(\phi) = \frac{\lambda}{4}\phi^4 \quad \text{e} \quad m^2 \approx 10^{-13}m_{Pl}^2, \text{ para } V(\phi) = \frac{m^2\phi^2}{2}. \quad (3.21)$$

Embora pelas condições (3.21) a *inflação caótica* careça de um ajuste fino nas constantes de acoplamento, ela pode ser considerada genérica. Se o nosso universo consistiu em numerosas regiões onde o campo ϕ era caoticamente distribuído, então aquelas onde o campo não possui o valor mínimo para a inflação nunca se expandiu de forma exponencial. A grande contribuição ao volume do universo provem das regiões que tiveram inflação, ou seja, que originalmente possuíam um valor apropriado do campo. Essa situação cria diversas ilhas homogêneas a partir de uma configuração inicialmente caótica (e daí o nome *inflação caótica*). Cada ilha dessas é bem maior do que a parte observável do universo, e portanto ficamos com a impressão de vivermos em um universo homogêneo.

3.3 Reaquecimento

Quando as condições de *slowroll* (3.13), (3.14) e (3.15) não mais são satisfeitas, temos que a fase inflacionária se encerra. O campo ϕ atinge o mínimo do potencial e começa a oscilar ao seu redor. Nesse ponto, o termo de atrito é desprezível e o inflaton oscila harmonicamente. Nessa oscilação, o campo decai em pares férmion-antiférmion ou bósons de calibre [44, 45], provocando um reaquecimento do universo a uma temperatura $T \leq V^{1/4}$ [35]. O potencial próximo ao mínimo é $V(\phi) \propto (\phi - \phi_m)^n$ com $\phi_m = 0$ e $n = 2$ para inflação caótica; $\phi_m = \sigma$ e $n = 4$ para inflação nova.

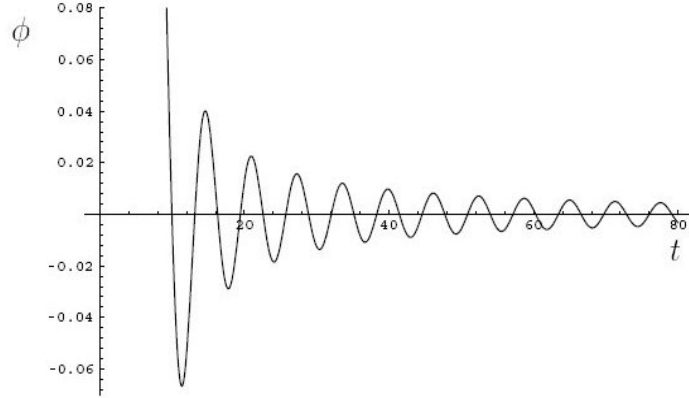


Figura 3.1: Oscilação do inflaton a partir do fim da inflação para um potencial $m^2\phi^2/2$ quando $\phi < m_{Pl}$, em unidades de m_{Pl} . Percebe-se que após uma única oscilação, a amplitude do campo escalar já decai por um fator de ordem 10. A unidade de tempo é m^{-1} .

Nesse regime, a solução da (3.10) para um potencial $m^2\phi^2$ é

$$\phi(t) \sim \frac{m_{Pl}}{\sqrt{3\pi mt}} \cdot \text{sen}(mt) \equiv \Phi(t) \text{sen}(mt) \quad (3.22)$$

onde $\Phi(t)$ é a amplitude do campo, explicitada na Figura 3.1. Pode-se demonstrar [1] que nesse estágio o fator de escala evolui com $a(t) \propto t^{2/3}$. Logo, podemos ver diretamente que a energia do inflaton, dada por $\rho = \dot{\phi}^2 + m^2\phi^2/2$, é proporcional a $a^{-3}(t)$, o que significa que o campo se comporta como poeira. Sem qualquer acoplamento com outra matéria, o universo estaria nesse estado oscilatório para sempre, mas o contato do inflaton com a matéria ordinária permite o decaimento do campo e o reaquecimento do universo. Dado que a taxa de decaimento do inflaton seja Γ_ϕ , podemos modelar o processo ao adicionarmos um termo de atrito $\Gamma_\phi\dot{\phi}$ à equação (3.10). Obtemos então

$$\ddot{\phi} + (3H + \Gamma_\phi)\dot{\phi} + m^2\phi \simeq 0, \quad (3.23)$$

o que resulta em uma solução na forma⁵

$$\phi \approx \phi_0 \exp(imt) \cdot \exp \left[-\frac{1}{2}(3H + \Gamma_\phi)t \right] \quad (3.24)$$

A densidade de energia do campo é dada por

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}m^2\phi^2 \approx \bar{\rho}_\phi \exp(-\Gamma_\phi t), \quad (3.25)$$

onde $\bar{\rho}_\phi$ representa a porção que decai apenas com a expansão do universo, com o fator de atrito $\exp(-3Ht)$, sem considerar o decaimento do inflaton. A perda de energia do campo se deve à produção de partículas elementares. Uma análise mais extensa desse período pode ser encontrada em [46], mas explicitaremos aqui alguns pontos principais.

Se o decaimento consiste em pares de scalares (χ) e em spinores (ψ), temos as expressões conhecidas da física de partículas [1]

$$\Gamma(\phi \rightarrow \chi\chi) = \frac{g^2}{8\pi m_\phi} \quad \text{e} \quad \Gamma(\phi \rightarrow \psi\psi) = \frac{h^2 m_\phi}{8\pi}, \quad (3.26)$$

com $\Gamma_\phi = \Gamma(\phi \rightarrow \chi\chi) + \Gamma(\phi \rightarrow \psi\psi)$ e g, h sendo constantes de acoplamento. Como temos trabalhado com um campo escalar clássico, devemos obedecer às condições

$$\Gamma(\phi \rightarrow \psi\psi) \leq \frac{m_\phi^2}{m_{Pl}} \quad \text{e} \quad \Gamma(\phi \rightarrow \chi\chi) \leq m_\phi, \quad (3.27)$$

de forma a não haver correções quânticas no processo [41]. Como $m_\phi \ll m_{Pl}$, temos que a taxa de decaimento máxima para bósons (χ) é maior do que a taxa máxima para férmions (ψ) por um fator de ordem 10^6 . Esse valor provém de restrições sobre as flutuações na densidade de energia $\delta\rho/\rho \sim 10^{-4}$ na radiação cósmica de fundo (ver [41] para mais detalhes). A maior parte do inflaton irá decair no par $\chi\chi$, com a densidade numérica dos campos evoluindo com a expansão do universo na forma [1]

$$\frac{1}{a^3} \frac{d}{dt} (a^3 n_\phi) = -\Gamma_\phi n_\phi. \quad ; \quad \frac{1}{a^3} \frac{d}{dt} (a^3 n_\chi) = 2\Gamma_\phi n_\phi, \quad (3.28)$$

⁵Por simplicidade, ignoramos a dependência temporal de H .

com $\Gamma_\phi \simeq \Gamma(\phi \rightarrow \chi\chi)$. O fator 2 no lado direito da segunda expressão acima vem do fato de cada partícula ϕ decair em duas partículas χ .

O período de reaquecimento termina quando H se torna menor do que Γ_ϕ . Como o campo nessa época se comporta como poeira, fazendo o universo se expandir com $a \propto t^{2/3}$, temos que o parâmetro de Hubble é então $H = 2/3t$. O fim do reaquecimento então é dado por $t_r \sim 2/(3\Gamma_\phi)$. Obtemos da equação de Friedmann (2.6) a densidade de energia nesse instante, com $H \sim \Gamma_\phi$, expressa na forma

$$\rho_\phi(t_r) \simeq \frac{3\Gamma_\phi^2 m_{Pl}^2}{8\pi}. \quad (3.29)$$

Em equilíbrio termodinâmico, a temperatura é relacionada à densidade de energia através da relação [41]

$$\rho_\phi(t_r) = \frac{\pi^2 N(T_r)}{30} T_r^4, \quad (3.30)$$

onde T_r é a temperatura do universo ao final do período de reaquecimento e $N(T_r)$ é o número de graus de liberdade à temperatura T_r . Em modelos realísticos, podemos esperar $N(T_r) \sim 10^2 - 10^3$. Na segunda igualdade acima, supusemos que o universo entra em equilíbrio térmico rapidamente após o decaimento do inflaton. Assim, temos uma estimativa da temperatura de reaquecimento dada por $T_r \simeq 0.2\sqrt{\Gamma_\phi m_{Pl}}$, que não depende do valor inicial do campo escalar ϕ . Ela depende apenas de parâmetros da teoria de partículas elementares.

A descrição elementar do período de reaquecimento descrita aqui é bastante elucidativa apesar da simplicidade. Ela nos diz que há uma saída suave do período inflacionário, consistindo em uma repopulação do universo por partículas elementares e uma termalização a uma temperatura aprazível para o modelo de *Big Bang*. Assim, as previsões do Modelo Padrão da Cosmologia, incluindo a nucleossíntese e a radiação cósmica em microondas, são conciliadas à teoria inflacionária. No entanto, a comparação entre os parâmetros cosmológicos e os do modelo de inflação ainda não ocorreram em

uma forma conclusiva. Uma análise mais extensa sobre o reaquecimento e possível verificação observacional podem ser encontradas em [1, 41, 46].

3.4 Inflação como Atrator

Em um universo homogêneo e isotrópico com a presença de um campo escalar também homogêneo, devemos analisar quais os possíveis valores que o termo cinético e o potencial do inflaton podem assumir. Substituindo o parâmetro de Hubble durante a inflação na equação de Klein-Gordon do campo (3.10), obtemos

$$\ddot{\phi} + \dot{\phi} \sqrt{\frac{12\pi}{m_{Pl}^2}(\dot{\phi}^2 + m^2\phi^2)} + m^2\phi = 0, \quad (3.31)$$

para um universo em expansão, com $H > 0$. Como o tempo não aparece explicitamente nessa equação, podemos então reduzi-la a uma equação diferencial de primeira ordem para $\dot{\phi}(\phi)$ ao fazermos

$$\ddot{\phi} = \dot{\phi} \frac{d\dot{\phi}}{d\phi}. \quad (3.32)$$

Assim sendo, a equação (3.31) se reduz a

$$\frac{d\dot{\phi}}{d\phi} = -\frac{1}{\dot{\phi}} \left[\dot{\phi} \sqrt{\frac{12\pi}{m_{Pl}^2}(\dot{\phi}^2 + m^2\phi^2)} + m^2\phi \right]. \quad (3.33)$$

Dependendo da intensidade dos termos dentro dos colchetes, a equação de estado do campo escalar será diferente.

Quando $|\dot{\phi}| \gg m\phi$, o termo cinético domina a dinâmica, e vemos em (3.7) que a equação de estado é $p = \rho$. A equação (3.31) se reduz à forma aproximada

$$\frac{d\dot{\phi}}{d\phi} = \frac{\sqrt{12\pi}}{m_{Pl}} \dot{\phi}, \quad (3.34)$$

que pode ser facilmente integrada, resultando em $\dot{\phi} = C \exp(\phi)$, onde $C < 0$ é uma constante de integração. Resolvendo essa expressão para t , obtemos

$$\phi = \text{Const.} - \frac{m_{Pl}}{\sqrt{12\pi}} \ln t \quad (3.35)$$

A equação de Friedmann (2.6) nesse regime é $H^2 = (4\pi/3m_{Pl}^2)\dot{\phi}^2 = 1/(9t^2)$, o que nos leva a $a \propto t^{1/3}$. De (2.7), obtemos também que $\rho_\phi \propto a^{-6}$.

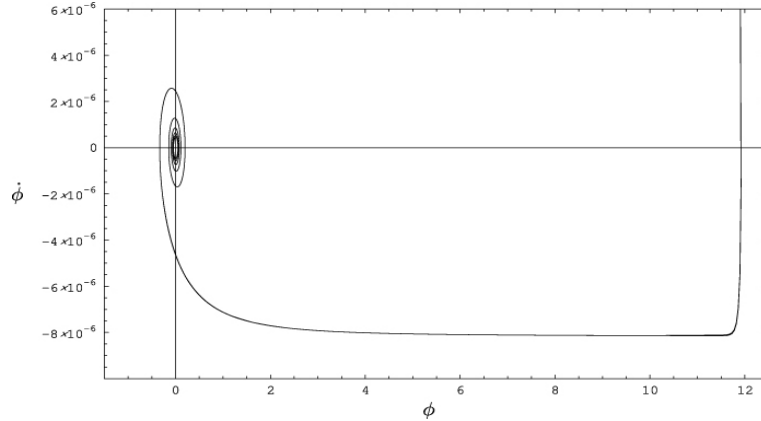


Figura 3.2: Comportamento no espaço de fase do campo escalar ϕ . O valor inicial do termo cinético é $\dot{\phi}_i = 10$, em unidades planckianas. Vê-se que o inflaton decai rapidamente até atingir as condições de inflação. A linha quase horizontal representa a fase *slowroll*, seguida do movimento oscilatório da época de reaquecimento.

A expressão $\dot{\phi} \propto \exp(\phi)$ nos diz que o termo cinético decai exponencialmente mais rapidamente do que o próprio campo. Assim, o alto valor inicial de $\dot{\phi}$ diminui em um curto intervalo, sem que ϕ tenha se alterado significativamente. Essa solução é ilustrada na Figura 3.2.

O decaimento de $\dot{\phi}$ continua até que as condições de *slowroll* sejam satisfeitas, e o processo inflacionário tem início. Esse período é representado pela linha horizontal na Figura 3.2, e constitui um atrator no plano $\dot{\phi} \times \phi$. Esse comportamento continua até que o campo atinja a região central e comece a oscilar, dando início ao período de reaquecimento. Pode-se ver que a única condição inicial necessária para as intensidades do campo é sobre o valor de ϕ_i , como demonstrado pela equação (3.20).

3.5 Conjectura “No-Hair”

Até aqui, vimos que um universo tipo de Sitter é capaz de eliminar alguns problemas de condições iniciais do Modelo Padrão através de uma expansão exponencial, englobando todo o universo dentro de um único horizonte e rareando a curvatura espacial. No entanto, ainda é passível de discussão a forma como se atinge essa configuração quase de Sitter. A resposta para essa questão é a conjectura “no-hair” da inflação. Ela afirma que a presença de um termo de expansão nas equações dinâmicas gera assintoticamente um espaço-tempo de Sitter. Como todas as contribuições na densidade de energia e na geometria decaem com alguma potência do fator de escala a , para um tempo longo o suficiente, um termo constante acaba por dominar posteriormente. Inicialmente, essa conjectura levava em consideração apenas a constante cosmológica Λ , mas com o surgimento dos modelos inflacionários com $V(\phi) \sim \text{constante}$, aborda-se o processo inflacionário com o mesmo escopo.

Um primeiro estudo sobre decaimento de anisotropias foi feito em [47], embora o cenário descrito seja o de um universo preenchido por um campo de criação de matéria. Para um universo homogêneo porém anisotrópico, dotado de constante cosmológica, já foi demonstrado que a geometria tende ao estado de de Sitter com o tempo [48]. Também chamado de *universos de Bianchi*, esses cenários possuem uma métrica na forma

$$ds^2 = dt^2 - g_{ij}(t)dx^i dx^j, \quad \text{onde } i, j = 1, 2, 3, \quad (3.36)$$

e o fator de expansão H , uma generalização do parâmetro de Hubble usual de uma geometria FRW, é definido como

$$3H \equiv \frac{(\sqrt{g})'}{\sqrt{g}}. \quad (3.37)$$

A quantidade g é o determinante da métrica tridimensional g_{ij} . As equações

de Friedmann podem ser escritas no formalismo ADM, em 3 + 1 dimensões [10]

$$H^2 = \frac{8\pi}{3m_{Pl}^2}\rho + \frac{1}{6}\sigma_{ij}\sigma^{ij} - \frac{{}^{(3)}R}{6} + \frac{\Lambda}{3} \quad (3.38)$$

$$\dot{H} = -H^2 - \frac{8\pi}{3m_{Pl}^2}\left(\rho - \frac{1}{2}\text{Tr } T\right) - \frac{1}{3}\sigma_{ij}\sigma^{ij} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (3.39)$$

onde ${}^{(3)}R$ é o escalar de curvatura tridimensional, σ_{ij} é o cisalhamento, correspondendo à parte sem traço da curvatura extrínseca K_{ij} . Esta última é definida no contexto cosmológico como a derivada temporal da métrica tridimensional g_{ij} , e portanto seu traço descreve a taxa de expansão (ou contração) na forma $H = \text{Tr}K/3$. Por outro lado, temos que a quantidade σ_{ij} descreve a variação na anisotropia do universo. A partir de (3.36), pode-se demonstrar também que [48]

$${}^{(3)}R \leq 0 \quad (3.40)$$

para todas as geometrias de Bianchi, exceto Bianchi IX. Utilizando a condição de energia forte [11]

$$\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} \text{Tr } T\right)n^\mu n^\nu \geq 0, \quad (3.41)$$

onde n^μ é um vetor normal tipo tempo, e a equação (3.40), obtemos de (3.38) e (3.39), sabendo que a densidade de energia é dada por $\rho = T_{\mu\nu}n^\mu n^\nu$, as relações

$$-\dot{H} \geq H^2 - \frac{\Lambda}{3} \geq 0. \quad (3.42)$$

A primeira desigualdade é encontrada a partir de (3.39), enquanto que a segunda provém de (3.38). Vemos então que $H^2 \geq \Lambda/3$ e portanto H não pode passar por zero. Isso implica em, se H é positivo em algum momento inicial, $H > 0$ por todo o tempo futuro. Em outras palavras, um universo inicialmente em expansão se expandirá para sempre. Já na primeira igualdade, obtemos

$$\frac{1}{\Lambda - 3H^2} \frac{dH}{dt} \geq \frac{1}{3}, \quad (3.43)$$

que, integrando, possui como solução

$$H \leq \frac{\sqrt{\Lambda/3}}{\tanh(t\sqrt{\Lambda/3})}. \quad (3.44)$$

Ou seja, a taxa de expansão H está “espremida” entre limite inferior $\sqrt{\Lambda/3}$ e o limite superior, que exponencialmente se aproxima de $\sqrt{\Lambda/3}$. Temos então que H rapidamente atinge o valor de de Sitter como comportamento assintótico. Com esses limites sobre a taxa de expansão, a partir de (3.38) e (3.41) podemos obter também a seguinte relação para a anisotropia

$$\sigma_{ij}\sigma^{ij} \leq 6H^2 - 2\Lambda \quad \rightarrow \quad \sigma_{ij}\sigma^{ij} \leq \frac{2\Lambda}{\sinh^2(t\sqrt{\Lambda/3})}, \quad (3.45)$$

onde nessa última passagem utilizamos a relação $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$. Vemos que a anisotropia rapidamente se aproxima de zero. A geometria tridimensional pode ser expressa por $g_{ij}(t) = \exp[2(t - t_0)\sqrt{\Lambda/3}] g_{ij}(t_0)$, onde pode-se reescalonar as coordenadas e obter um espaço-tempo de de Sitter. Similarmente, obtemos para a densidade de energia o limite

$$\rho \leq \frac{m_{Pl}^2}{8\pi} \frac{\Lambda}{\sinh^2(t\sqrt{\Lambda/3})}, \quad (3.46)$$

No caso não-homgêneo um problema se apresenta. A condição de curvatura negativa deve perdurar durante toda a evolução até o estado assintótico. Nesse detalhe capcioso é justamente onde a conjectura “no-hair” pode falhar, caso haja em alguma região do universo perturbações que comecem a crescer excessivamente, produzindo ${}^{(3)}R > 0$. No entanto, pode-se demonstrar [49, 50] que perturbações decaem em um universo se expandindo com Λ positivo, e então podemos assumir que ${}^{(3)}R$ permanecerá negativo e a conjectura “no-hair” terá validade⁶. Dessa forma, mostra-se que a conjectura “no-hair” pode ser enunciada como “o espaço-tempo de de Sitter

⁶No entanto, o decaimento das perturbações não é suficiente para garantir um universo com ${}^{(3)}R < 0$ inicial em todas as regiões, e portanto esse argumento deve ser levado em conta com um certo ceticismo.

é uma solução assintótica das equações de Einstein”. O caso não-homogêneo possui também uma solução exata para um universo preenchido por poeira e constante cosmológica, que tende assintoticamente a um espaço-tempo de Sitter dentro do horizonte de cada observador [51].

A conjectura “no-hair” tenta sugerir que uma vez iniciada a inflação, em um universo não-homogêneo e anisotrópico, qualquer desvio na homogeneidade e isotropia irá decair e desaparecer. No entanto, tudo o que foi enunciado aqui depende de algumas suposições específicas. Além de termos imposto ${}^{(3)}R < 0$ para todo o espaço, fizemos uma demonstração da conjectura assumindo que a condição de energia forte (3.41) atua sobre o tensor momento-energia. Porém, caso essa condição não seja válida, os teoremas “no-hair” perdem também sua validade [52]. Embora a condição de energia forte possa ter sido obedecida no período anterior à inflação, ela não o será durante o processo. pois vimos que $\rho_\phi = -p_\phi$ nessa fase. A questão que fica em aberto é por que o campo escalar pode violar a condição (3.41) enquanto as outras formas de matéria não o podem.

Os teoremas “no-hair” são baseados em um cenário com $\Lambda > 0$ e constante. Porém, nos modelos inflacionários, o que temos é uma constante cosmológica efetiva $V(\phi)$, variável no tempo. Os termos de gradiente do campo escalar $(\partial_i\phi)^2$ podem interferir e desviar o potencial de um valor constante, invalidando os teoremas.

Sobretudo, temos que a conjectura “no-hair” nos assegura o decaimento das perturbações em um universo inflacionário e sua estrutura assintótica. Mas ela só se aplica uma vez que a inflação já tenha começado, quando as sutilezas mencionadas acima já não se fazem mais presentes. Dessa forma, a conjectura não nos garante o início do processo inflacionário em um universo com condições iniciais genéricas, no que se refere à não-homogeneidade. Ademais, grandes inhomogeneidades não podem ser descritas pela teoria perturbativa, sendo necessária a análise das próprias equações de

Einstein para determinar se haverá ou não inflação. Esta é uma das maiores motivações do presente trabalho.

Ademais, o mecanismo inflacionário descrito por um campo escalar é diferente dos cenários onde a conjectura “no-hair” se aplica, onde há a presença de uma constante cosmológica positiva. Na inflação, o potencial $V(\phi)$ age como uma constante cosmológica efetiva, mas ele varia com o tempo, ainda que lentamente, durante o *slowroll*. A análise do período inflacionário deve levar essa variação em conta, de forma a obtermos um quadro mais realista. Os primeiros trabalhos sobre a validade da conjectura “no-hair” com campo escalar foram feitos em cosmologias homogêneas porém anisotrópicas, em espaços-tempos de Bianchi.

3.6 Cenário Anisotrópico

O decaimento de anisotropias primordiais já é assunto tratado na cosmologia muito tempo antes da proposta de inflação [53]. Escrevendo uma métrica como

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(e^{2\beta})_{ij} dx^i dx^j, \quad (3.47)$$

onde β_{ij} é uma matriz 3×3 sem traço, com $\det(e^{2\beta}) = 1$. Nessa geometria, $a(t)$ descreve a expansão volumétrica do universo, enquanto β_{ij} nos dá a evolução das anisotropias. Define-se a taxa de cisalhamento

$$\sigma^{ij} = \frac{1}{2} (e^{-\beta})^{ik} \left(\frac{\partial e^{-2\beta}}{\partial t} \right)_{kl} (e^{-\beta})^{lj}, \quad (3.48)$$

que é igual à parte sem traço da curvatura extrínseca K^{ij} . No caso em que β e $\partial\beta/\partial t$ comutam, como no caso onde β_{ij} é diagonal, temos que $\sigma_{ij} = \partial\beta_{ij}/\partial t$. Então vemos que é σ e não β quem descreve a anisotropia do universo, pois se β for constante, poderíamos simplesmente redefinir as coordenadas para recuperarmos a geometria FRW.

A dinâmica de σ_{ij} é dada pelas equações de Einstein no formalismo ADM, cujas equações da gravitação se encontram em [54]. Supondo uma métrica onde β_{ij} é diagonal, podemos definir

$$\beta_{11} = \beta_+ + \sqrt{3}\beta_-, \quad \beta_{22} = \beta_+ - \sqrt{3}\beta_- \quad \text{e} \quad \beta_{33} = -2\beta_+. \quad (3.49)$$

Em comparação com o formalismo ADM, temos que a função lapso é $N = 1$, enquanto que a função deslocamento é $N^i = 0$. A métrica tridimensional γ_{ij} é identificada com $(e^{2\beta})_{ij}$, como visto diretamente em (3.47). A evolução das quantidades β_+ e β_- é então dada pela equação que descreve a variação da tri-métrica, ou seja,

$$\frac{\partial(e^{2\beta})_{ij}}{\partial t} = -2(e^{2\beta})_{ik}\sigma^k_j, \quad (3.50)$$

que por sua vez resulta em

$$\frac{\partial\beta_+}{\partial t} = \frac{\sigma_3^3}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial\beta_-}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-\sigma_1^1 - \frac{\sigma_2^2}{2} \right). \quad (3.51)$$

Por outro lado, a evolução do termo de cisalhamento é dada pela equação de Friedmann do formalismo ADM, ou mais especificamente

$$\frac{\partial\sigma_j^i}{\partial t} = {}^{(3)}R_j^i - 3H\sigma_j^i. \quad (3.52)$$

Para obtermos uma análise mais qualitativa, iremos simplificar o problema ainda mais fazendo ${}^{(3)}R_{ij} = 0$, como no caso Bianchi I. Dessa forma, obtemos a partir de (3.52) que os termos de cisalhamento σ_1^1 , σ_2^2 e σ_3^3 decaem $\propto a^{-3}$. Na equação de Friedmann (3.38), vemos então que o termo responsável pela anisotropia se comporta como um fluido de matéria que decai $\propto a^{-6}$. Resultados semelhantes podem ser obtidos para métricas mais gerais. Esse é o principal resultado na análise de anisotropias durante o processo inflacionário.

Assim sendo, as anisotropias decaem rapidamente quando a expansão começa. Concomitantemente, o valor do campo escalar pouco varia pois $\dot{\phi}$ é muito pequeno devido ao grande termo de atrito em (3.10) durante essa fase,

pois $H \propto a^{-3}$ durante o domínio das anisotropias. O termo de potencial só viria a dominar após o decaimento das anisotropias, e então a inflação teria início. O valor do campo escalar não se altera significativamente e portanto a inflação caótica ainda permanece genérica. Já a inflação nova, como carece de um ajuste fino no valor inicial de ϕ , as condições iniciais necessárias podem não ser satisfeitas. Após a inflação terminada, a anisotropia permanecerá pequena por tempo longo o suficiente, de maneira que não entram em conflito com as observações atuais [55].

3.7 Cenário Não-Homogêneo

A análise de um cenário não-homogêneo durante o período inflacionário não é simples como no caso anisotrópico. Os efeitos de desvios de homogeneidade, se forem grandes o suficiente podem impedir a inflação de ocorrer. A abordagem que exporemos aqui é a de um campo escalar não-homogêneo presente em uma geometria FRW de fundo, sendo portanto bastante limitada. Assim, queremos analisar os efeitos dos termos de gradiente do inflaton sobre a dinâmica do universo, cuja evolução é descrita pela equação de Friedmann

$$H^2 = \frac{8\pi}{3m_{Pl}^2} \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) + \rho_{\nabla} \right]. \quad (3.53)$$

Para obtermos o processo inflacionário, temos que o potencial do campo deve dominar sobre o termo de gradiente, expresso na forma

$$\rho_{\nabla} \approx \left(\frac{\delta\phi}{a\Delta} \right)^2, \quad (3.54)$$

onde Δ é a escala comóvel das inhomogeneidades e $\delta\phi$ é a flutuação do campo de tamanho $a\Delta$ sobre uma parte homogênea. Podemos verificar que uma grande flutuação na homogeneidade pode impedir o processo inflacionário de ocorrer. Esse fato pode ser visto no seguinte argumento qualitativo: durante

a inflação, a expansão é ditada pela expressão

$$H^2 \simeq \frac{8\pi}{3m_{Pl}^2} V(\phi). \quad (3.55)$$

Assim sendo, a condição $V(\phi) > \rho_\Delta$ nos dá que

$$\frac{a\Delta}{H^{-1}} > \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \frac{\delta\phi}{m_{Pl}}, \quad (3.56)$$

indicando que, se $\delta\phi \sim \phi > m_{Pl}$, temos a necessidade de uma região homogênea de alguns raios de Hubble (H^{-1}) de extensão. Assim sendo, conclui-se que um desvio significativo na homogeneidade inicial pode impedir a inflação de ocorrer.

No entanto, a relação (3.56) leva em consideração apenas comparação das energias. Mas o termo de gradiente possui uma dinâmica própria cujos efeitos merecem um estudo mais cauteloso. Para tal, devemos estudar as equações de Einstein acopladas a um campo escalar não-homogêneo, e essa tarefa não é das mais fáceis. Para obtermos resultados analíticos, devemos empregar algumas aproximações, como a suposição de que somente o campo escalar não é homogêneo. Nesse caso, a inomogeneidade é descrita como a transformada de Fourier do campo, e somente uma componente é levada em consideração [56, 57, 58].

O campo é separado em uma parte homogênea Φ , que estabelece o seu valor médio, e uma componente de Fourier, resultando em $\phi = \Phi + \delta\phi \cdot \exp(ikx/a)$. O comprimento físico de inomogeneidade, dado por $a\lambda = 2a\pi/k$, é menor do que o horizonte, pois caso fosse maior poderíamos simplesmente colocar o termo não-homogêneo em Φ . É feita também a aproximação onde o termo $\delta\phi$ não participa do potencial $V(\Phi)$, assim como qualquer termo cruzado do tipo $\dot{\Phi}\delta\dot{\phi}$ é desprezado, de forma que a energia cinética possa ser separada entre ambas as partes do campo, tornando o problema mais simples.

Dessa forma, a equação de Klein-Gordon (3.10) é, no caso não-homogêneo,

agora escrita com o termo de gradiente

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \frac{\nabla^2\phi}{a^2} + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (3.57)$$

Na decomposição do campo escalar em partes homogênea e não-homogênea, temos que a equação acima se divide nas duas equações dinâmicas

$$\ddot{\Phi} + 3H\dot{\Phi} + \frac{dV}{d\Phi} = 0 \quad (3.58)$$

e

$$\delta\ddot{\phi} + 3H\delta\dot{\phi} + k^2\frac{\delta\phi}{a^2} = 0, \quad (3.59)$$

além da equação de Friedmann

$$H^2 = \frac{8\pi}{3m_{Pl}^2} \left[\frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 + V(\Phi) + \frac{1}{2}\delta\dot{\phi}^2 + k^2\frac{(\delta\phi)^2}{2a^2} \right] \quad (3.60)$$

Como o termo de gradiente decai com a^{-2} , espera-se que, uma vez iniciada a inflação, ele decresça exponencialmente, com o fator de escala de um espaço-tempo de Sitter $a \propto e^{Ht}$. Mas deve-se antes verificar se esse termo provoca qualquer efeito significativo nas condições necessárias para um processo inflacionário.

Consideremos o valor da parte homogênea como inicialmente apropriado para a inflação, ou seja, $\Phi >$ algumas $\times m_{Pl}$. Nesse caso, o universo inicia a expansão inflacionária, a não ser que a densidade de energia da parte não-homogênea

$$\rho_{\nabla} = \frac{(\delta\dot{\phi})^2}{2} + k^2\frac{(\delta\phi)^2}{2a^2} \quad (3.61)$$

domine sobre o potencial $V(\Phi)$, sendo o caso de um universo primordial dominado pelas inhomogeneidades. Assim, o fator de Hubble na equação (3.58) seria determinado por $\delta\phi$. A densidade de energia desse fluido e a evolução do fator de escala podem ser dados por $\rho_{\nabla} \propto a^{-3(1+\alpha)}$ e $a \propto t^{2/3(1+\alpha)}$ respectivamente [3], onde α provém da equação de estado $\rho_{\nabla} = \alpha p_{\nabla}$. O coeficiente do termo de atrito em (3.10) é então diferente, pois agora H varia

no tempo devido à evolução de $\delta\phi$, e portanto $\ddot{\Phi}$ não é mais desprezível. A contribuição desse termo pode ser representada por um novo coeficiente na equação (3.58) para *slowroll*, de forma a modelar a dinâmica, como a proposta realizada em [6]

$$c'H\dot{\Phi} \approx V'(\Phi), \quad \text{com} \quad c' = 3 + \frac{2}{3(1+\alpha)}. \quad (3.62)$$

A partir daí temos

$$\frac{d\Phi}{V'(\Phi)} = \frac{dt}{c'H} = \frac{dt}{c'} \sqrt{\frac{3m_{Pl}^2}{8\pi\rho}}, \quad (3.63)$$

onde ρ representa a densidade de energia total, incluindo as partes homogênea e não-homogênea. A integração do lado direito pode ser feita sabendo como a densidade de energia evolui com o tempo, como vimos acima. Assim, obtemos [6]

$$\int_{\Phi_0}^{\Phi} \frac{d\Phi}{V'(\Phi)} = \frac{1}{8(1+\alpha)\pi c'} \frac{m_{Pl}^2}{\rho} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right), \quad (3.64)$$

com ρ_0 e Φ_0 sendo os valores iniciais dessas quantidades. O intervalo de integração se estende até o valor de Φ que iguala a densidade de energia com o potencial. Após esse momento, a dinâmica do universo passa a ser dominada por $V(\Phi)$, e os termos não-homogêneos não são mais significativos. Explicitaremos o caso de *inflação caótica*, com um potencial na forma $V(\Phi) = m^2\Phi^2/2$. A equação (3.64) é escrita

$$\ln\left(\frac{\Phi}{\Phi_0}\right) = -\frac{1}{4(1+\alpha)\pi c'} \frac{m_{Pl}^2}{\Phi^2} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) \quad (3.65)$$

Podemos observar que $1/4(1+\alpha)\pi c' < 1$, $m_{Pl}^2/\Phi^2 < 1$ e também que $1 - \rho/\rho_0 < 1$. Dessa forma, obtemos que o valor da parte homogênea do inflaton pouco varia durante o domínio da parte não-homogênea. Supondo um valor para Φ inicialmente apropriado para a inflação, temos como provável um valor também apropriado após terminada essa fase.

Passemos agora para a análise da equação (3.59). Haverá dois regimes diferentes para essa equação, para perturbações menores do que o horizonte ($2\pi a/k < H^{-1}$):

1. Se $\delta\phi < m_{Pl}$. Nesse caso, vemos na equação (3.60) que H é desprezível em um universo dominado por $\delta\phi$, e a equação (3.59) se reduz à expressão de um oscilador

$$\delta\ddot{\phi} + \frac{k^2\delta\phi}{a^2} \simeq 0. \quad (3.66)$$

Definindo uma nova variável $v = a\delta\phi$, vemos que a equação acima possui como solução

$$\delta\phi = \frac{\delta\phi_0}{a} \cdot \exp\left(\frac{ikt}{a}\right). \quad (3.67)$$

A perturbação se comporta como radiação, com a amplitude decaindo com a^{-1} e conseqüentemente a densidade de energia é $\propto a^{-4}$. Como pressupomos $\rho_{\delta\phi} > \rho_{\Phi}$, essa época será semelhante à era dominada pela radiação, com $a \propto \sqrt{t}$. Esse período termina quando a densidade de energia se igualar ao potencial $V(\Phi)$. Vimos que a parte homogênea do inflaton não se altera muito durante essa época, então teremos um período inflacionário assim que ela termine. Ou seja, as perturbações decaem e não alteram significativamente as condições necessárias para o processo inflacionário.

2. Se $\delta\phi > m_{Pl}$. O lado direito da equação de Friedmann é então dominado pelo termo $k^2\delta\phi^2/2a^2$, e de (3.60) obtemos $H = \sqrt{4\pi/3} \cdot k\delta\phi/(m_{Pl}a)$. Temos então que a equação (3.59) nos dá

$$\delta\dot{\phi} = \sqrt{\frac{1}{12\pi}} \frac{m_{Pl}k}{a}, \quad (3.68)$$

Reescrevendo o termo cinético da perturbação na forma

$$\delta\dot{\phi} = aH \frac{d(\delta\phi)}{da} \quad (3.69)$$

podemos integrar a equação (3.68), obtendo a relação entre $\delta\phi$ e o fator de escala, ou mais explicitamente

$$\frac{a}{a_0} = \exp\left[\frac{2\pi(\delta\phi_0^2 - \delta\phi^2)}{m_{Pl}}\right]. \quad (3.70)$$

Daí, temos que um aumento exponencial do fator de escala não representa uma alteração muito grande no valor do gradiente $\delta\phi$. Da equação (3.61),

vemos que a densidade de energia da parte não-homogênea decresce com a^{-2} , resultando em $a \propto t$. Essa fase termina quando $\rho_{\delta\phi} = V(\Phi)$ ou quando $\delta\phi = m_{Pl}$, o que ocorrer primeiro. Na primeira situação, a inflação começa, enquanto que na segunda, temos que o campo inicia um movimento oscilatório, como vimos acima.

O valor da parte homogênea pouco se altera durante essa época. Podemos verificar essa afirmação se colocarmos $\alpha = 1/3$ (caso 1) ou $\alpha = -1/3$ (caso 2)⁷ na equação (3.65). A conclusão é então que os termos de gradiente de um campo escalar não-homogêneo não são, em geral, capazes de impedir a ocorrência do processo inflacionário, apesar do argumento qualitativo que demos no início do capítulo.

Por outro lado, o que fizemos até aqui foi um estudo baseado em dois casos limite. Em um primeiro momento, argumentamos que se o comprimento das perturbações for maior do que o horizonte, poderíamos simplesmente absorver o gradiente dentro da parte homogênea Φ . Em contrapartida, se o comprimento for menor do que o horizonte, os termos de gradiente não serão capazes de alterar de maneira considerável o cenário aprazível para a inflação.

A análise completa sobre a existência de um período inflacionário em um universo cuja escala de inhomogeneidade é da mesma ordem do que a do horizonte requer uma solução do conjunto completo das equações de Einstein. Obviamente, os cálculos não são simples e alguma aproximação ou simplificação deve ser empregada para a obtenção de qualquer resultado analítico. No entanto, alguns estudos numéricos já apresentaram resultados corroborando a necessidade de uma homogeneidade pré-existente [7, 59, 60].

O que faremos neste trabalho é uma abordagem analítica do problema de condições iniciais capazes de gerar inflação. Alguns estudos já foram

⁷A evolução dada por $a \propto t$ dessa época nos diz, através da equação de continuidade, que a equação de estado é $p = -\rho/3$. Os gradientes provocam uma pressão negativa.

realizados nesse contexto [61, 63, 64], sempre com alguma aproximação devido à complexidade dos cálculos, mas estando de acordo com os resultados numéricos. No nosso caso, empregaremos uma geometria esfericamente simétrica assintoticamente plana, pois assim podemos trabalhar com apenas uma coordenada espacial. A distribuição do campo em função da coordenada radial é deixada em uma forma geral. O desenvolvimento desse trabalho se encontra no próximo capítulo.

Capítulo 4

Inflação Esfericamente Simétrica

Vimos anteriormente que os problemas de planeza e do horizonte podem ser resolvidos pelo mecanismo de inflação cosmológica. A expansão exponencial do universo seria capaz de aumentar uma região causalmente conectada a um tamanho maior do que o horizonte atual. Além disso, qualquer desvio na densidade crítica de energia $\Omega_c = 1$ seria extremamente diminuído.

No entanto, um problema ainda persiste. A inflação não é capaz de explicar sozinha a formação de um universo extremamente homogêneo. É conhecido entre os cosmólogos o fato de que, para obtermos um período inflacionário em uma determinada região, é necessário uma homogeneidade que se estenda por uma área de alguns horizontes ao redor dela [6, 61], onde o valor do campo é maior do que algumas massas de Planck. Poder-se-ia utilizar o princípio antrópico para justificar essa configuração [62], mas ao evocá-lo estaríamos precisamente fazendo-o de maneira tardia. Afinal, esse mesmo princípio já seria capaz de resolver os problemas do Modelo Padrão que citamos anteriormente: planeza e horizonte. A diferença seria a extensão dessa homogeneidade, que é reduzida no caso inflacionário. No entanto, em um universo infinito e não-homogêneo, é bastante provável que haja alguma região com configuração causadora de inflação [43].

O que temos então é que o paradigma inflacionário atua no problema da homogeneidade, reduzindo a extensão necessária de uma região homogênea a alguns raios de Hubble. Esse resultado é conhecido na literatura, tanto em uma abordagem analítica [63, 64] quanto no caso numérico [7, 59, 60]. No presente trabalho [65], propomos analisar essa questão seguindo a linha desses estudos, utilizando um campo escalar não-homogêneo em um fundo esféricamente simétrico. A escolha dessa geometria é justificada no fato de podermos reduzir os graus de liberdade espaciais a apenas um. Os trabalhos numéricos fazem essa redução de forma a economizar em recursos computacionais, e desejamos poder comparar os nossos resultados com estes¹.

4.1 O Modelo

O modelo consiste em um universo assintoticamente plano, com seção espacial aberta e simetria esférica. Entre as diversas formas possíveis para uma métrica com essa configuração [66], escolhemos uma bastante geral

$$ds^2 = e^{2\alpha(\eta,r)} [-d\eta^2 + dr^2 + e^{2\beta(\eta,r)} r^2 d\Omega]. \quad (4.1)$$

Utilizamos η , o tempo conforme, como coordenada temporal. As funções α e β são arbitrárias e dependem apenas de η e r . O conteúdo material do universo é um campo escalar minimamente acoplado à gravidade, cujo tensor momento-energia é dado por

$$T_{\mu\nu} = \Phi_{,\mu} \Phi_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} [\Phi^{,\alpha} \Phi_{,\alpha} + m^2 \Phi^2]. \quad (4.2)$$

A partir de agora, utilizaremos unidades onde $16\pi = m_{Pl}^{-2} = 1$. Nessa escolha, a constante que usamos no Capítulo 2 é $\kappa = 1/2$. Fazemos isso

¹Argumenta-se em [6] que essa escolha de simetria esférica poderia ser problemática se considerarmos a presença de radiação gravitacional. No entanto, nessa mesma referência demonstra-se que essa radiação decai rapidamente em um universo em expansão.

por clareza dos cálculos, pois teríamos que arrastar as constantes por todo o capítulo, sem que isso representasse qualquer mudança nos resultados. Dessa forma, temos que η e r possuem dimensões de comprimento, enquanto m e Φ possuem dimensões de inverso de comprimento. A partir dessas duas expressões, as equações de Einstein nos dão duas equações dinâmicas e dois vínculos, referentes às funções α e β . As equações de vínculo são as componentes (00) e (01) do tensor de Einstein, enquanto as equações dinâmicas são as componentes (11) e (22). As demais componentes são triviais, devido à simetria esférica do modelo, excetuando a componente (33), que é idêntica à (22). As equações de vínculo são portanto

$$\begin{aligned} 3\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 - 4\dot{\alpha}\dot{\beta} + 2\beta'' - 2\alpha'' - \alpha'^2 - 3\beta'^2 + 4\alpha'\beta' \\ + 6r^{-1}\beta' - 4r^{-1}\alpha' - r^{-2}(1 - e^{2\beta}) = \frac{1}{4}(\dot{\Phi}^2 + \Phi'^2 + m^2 e^{2\alpha}\Phi^2) \end{aligned} \quad (4.3)$$

e

$$\dot{\alpha}' - r^{-1}\dot{\beta} - \dot{\beta}' - \dot{\alpha}\alpha' + \dot{\beta}\beta' = \frac{1}{4}\dot{\Phi}\Phi', \quad (4.4)$$

onde os primos e pontos representam derivadas simples em relação às coordenadas radial e temporal respectivamente. Como equações dinâmicas, usaremos combinações das equações referentes às componentes (11) e (22) do tensor de Einstein. A primeira equação dinâmica é dada pela diferença entre as equações (22) e (11), que resulta em

$$r^{-2}(1 - e^{2\beta}) + 2r^{-1}\alpha' + 2\alpha'^2 - 2\alpha'' + \ddot{\beta} + \beta'' + 2\dot{\alpha}\dot{\beta} - 2\alpha'\beta' - 2\dot{\beta}^2 = \frac{1}{2}\Phi'^2. \quad (4.5)$$

Ao mesmo tempo, a segunda equação dinâmica é a diferença entre o dobro da equação (22) e a equação (11), e fica na forma

$$\begin{aligned} -2\ddot{\alpha} + 4\alpha'' - \dot{\alpha}^2 + \alpha'^2 - 2r^{-1}\beta' - 2\beta'' + \dot{\beta}^2 + \beta'^2 \\ - r^{-2}(1 - e^{2\beta}) = \frac{1}{4}(\dot{\Phi}^2 - 3\Phi'^2 - m^2 e^{2\alpha}\Phi^2). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Por completeza do sistema, temos que a equação de Klein-Gordon do campo escalar, dada por $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$, é expressa por

$$\ddot{\Phi} - \Phi'' + 2(\dot{\alpha} - \dot{\beta})\dot{\Phi} - 2(\alpha' - \beta' - r^{-1})\Phi' + m^2 e^{2\alpha}\Phi = 0. \quad (4.7)$$

A escolha de uma hipersuperfície com condições iniciais $\alpha \sim \text{constante}$, $\Phi \sim \Phi_0$ e $\beta = 0$ nos recupera o caso homogêneo onde toda a teoria de inflação se assenta. Nessa situação, é fácil demonstrar as condições necessárias para a ocorrência do processo inflacionário, como $\Phi_0 \gg 3, 5$, em unidades planckianas.

4.2 Condições Iniciais

A escolha de condições iniciais depende da verificação se o problema é bem posto [11], ou seja, que as condições escolhidas são auto-consistentes. Isso é feito verificando se essas condições satisfazem as equações de vínculo do sistema. Entre as escolhas mais simples, podemos colocar $\dot{\Phi} = 0$ e $\beta = \dot{\beta} = 0$ em nossa hipersuperfície inicial.

As condições $\beta = \dot{\beta} = 0$ estão de acordo com a conjectura de curvatura de Weyl [67], que afirma que o universo deve ser conformalmente plano no início. Isso se baseia na suposição de que a entropia gravitacional é dada pelo tensor de Weyl, e dizer que ele é zero inicialmente significa então dizer que o universo teve um estado inicial de entropia mínima. Isso vai de acordo com a conjectura de Boltzman, de forma a justificar a seta do tempo.

Já a escolha da condição $\dot{\Phi} = 0$ está de acordo com o comportamento do campo estudado na Seção 3.4, onde vimos que o termo cinético decai rapidamente em uma geometria em expansão. Além disso, considerar $\dot{\Phi} \neq 0$ na hipersuperfície inicial apenas torna mais difícil a ocorrência de inflação, pois esta só terá início quando o termo cinético for desprezível em comparação com o potencial. O resultado a ser encontrado é, portanto, um requisito mínimo para obtermos um período inflacionário em uma geometria com simetria esférica sob a hipótese de curvatura de Weyl.

No que diz respeito à forma inicial do campo escalar, tentaremos manter a possibilidade mais geral possível, e então escrevemos a seguinte expressão

para Φ no tempo η_0

$$\Phi(\eta_0, r) = \Phi_0 + f(r), \quad (4.8)$$

onde Φ_0 representa a parte homogênea do campo, e a função $f(r)$ é a sua distribuição espacial, com $f(r \rightarrow \infty) = 0$. Com isso em mãos, na hipersuperfície $\eta = \eta_0$, a equação (4.4) se reduz a

$$\dot{\alpha}' - \dot{\alpha}\alpha' = 0. \quad (4.9)$$

Dividindo essa equação por $\dot{\alpha}$, podemos reescrevê-la como

$$(\ln \dot{\alpha})' - \alpha' = 0 \quad (4.10)$$

A solução dessa equação é $\dot{\alpha} = Ce^\alpha$. A constante de integração C pode ser facilmente fixada pela consistência das equações quando nos afastamos da origem. Como escolhemos uma geometria assintoticamente plana, a equação (4.4) se simplifica bastante, quando fazemos $r \rightarrow \infty$, sendo deixada na forma

$$3\dot{\alpha}^2 = \frac{1}{4}m^2\Phi_0^2e^{2\alpha} \quad \rightarrow \quad \dot{\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{3}}m\Phi_0e^\alpha. \quad (4.11)$$

Colocando esse resultado na equação de vínculo (4.4), desta vez considerando todos os termos, obtemos a evolução radial de α , dada por

$$2\alpha'' + \alpha'^2 + 4r^{-1}\alpha' = -\frac{1}{4}[\Phi'^2 + m^2(\Phi^2 - \Phi_0^2)e^{2\alpha}]. \quad (4.12)$$

A equação acima possui uma solução como lei de potência, na forma $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 r + \alpha_2 r^2 + \dots$. Próximo à origem $r = 0$, temos que os termos com potência ≥ 3 são nulos e que $\alpha_1 = 0$, de forma que não haja termos divergentes. A solução é então

$$\alpha \sim \bar{\alpha} - \frac{1}{24} \left[m^2\Phi_0e^{2\bar{\alpha}}\bar{f} + \frac{1}{2}(\bar{f}' + \bar{f}^2) \right] r^2, \quad (4.13)$$

onde as barras sobre f e α representam os valores dessas funções quando $r = 0$. Em regiões mais afastadas da origem, a equação (4.12) tem que possuir uma solução exata de forma que o sistema seja auto-consistente. Um

exemplo pode ser encontrado em [61], onde $f(r) = \Delta e^{-\gamma r}$. Utilizando o ansatz $\alpha = \bar{\alpha} + \ln(g/r)^2$, a equação (4.12) pode ser reescrita como

$$\frac{d^2 g}{dr^2} + \left[\frac{a}{4} e^{-\gamma r} + \frac{b}{4} e^{-2\gamma r} \right] g = 0, \quad (4.14)$$

com $a = m^2 \Phi_0 \Delta e^{2\bar{\alpha}}$ e $b = \Delta^2 (\gamma^2 + m^2 e^{2\bar{\alpha}})/4$. Após uma nova redefinição na forma

$$A = \frac{1}{2} - \frac{ia}{4\gamma\sqrt{b}}, \quad y = -i\frac{\sqrt{b}}{\gamma} e^{-\gamma r}, \quad h(y) = e^{y/2} g(y), \quad (4.15)$$

temos que a equação (4.14) pode ser expressa como

$$y \frac{d^2 h}{dy^2} + (1-y) \frac{dh}{dy} - Ah = 0, \quad (4.16)$$

com a condição $h(r=0) = 0$. A equação acima é uma hipergeométrica confluyente [68], cuja solução é dada por

$$h(y) = K[M(A, 1, -i\sqrt{b}/\gamma)U(A, 1, y) - U(A, 1, -i\sqrt{b}/\gamma)M(A, 1, y)], \quad (4.17)$$

onde K é uma constante e $M(A, B, C)$ e $U(A, B, C)$ são funções de Kummer.

Com a nossa escolha de condições iniciais, a equação de Klein-Gordon (4.7), próximo da origem $r = 0$, pode ser reescrita como

$$\ddot{\Phi} - \frac{1}{r}(r\Phi)'' + \omega^2 \Phi = 0, \quad (4.18)$$

onde $\omega^2 = m^2 e^{2\bar{\alpha}}$. A parte homogênea do campo é evidente quando fazemos $\Phi' = 0$ em (4.18), nos deixando com $\Phi = \Phi_0 \cos(\omega t)$. Já a solução geral é alcançada mais facilmente se fizermos a substituição $y = r\Phi$, resultando em

$$\ddot{y} - y'' + \omega^2 y = 0 \quad (4.19)$$

Com uma transformada de Fourier, passamos ao espaço de k , na forma

$$\ddot{y}_k + (k^2 + \omega^2)y_k = 0 \quad \rightarrow \quad y_k(t, k) = A(k)e^{i\omega_k t} + B(k)e^{-i\omega_k t}, \quad (4.20)$$

sendo $\omega_k^2 = k^2 + \omega^2$. A função $y(t, r)$ pode ser obtida fazendo a transformada inversa de Fourier

$$y(t, r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} y_k(t, k) d^3\vec{k} \quad (4.21)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty e^{ikr\cdot\cos\theta} y_k(t, k) k^2 \sin\theta dk d\theta d\varphi \quad (4.22)$$

Fazendo a substituição de variáveis $u = \cos\theta$ (com $du = -\sin\theta d\theta$), ficamos com

$$y(t, r) = -\sqrt{2\pi} \int_1^{-1} \int_0^\infty e^{ikru} y_k(t, k) k^2 dk du, \quad (4.23)$$

onde já integramos na variável φ . A integração em u pode ser facilmente realizada, por se tratar de uma função exponencial, resultando em

$$y(t, r) = \sqrt{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{ikr} [e^{-ikr} - e^{ikr}] y_k(t, k) k^2 dk \quad (4.24)$$

$$= \frac{2\sqrt{2\pi}}{r} \int_0^\infty y_k(t, k) k \operatorname{sen}(kr) dk. \quad (4.25)$$

Inserindo a solução $y_k(t, k)$ na equação acima, e fazendo $A(k) = B(k)$ por simplicidade, ficamos então com a solução

$$y(t, r) = \frac{\sqrt{2\pi}}{r} \int_0^\infty F(k) \operatorname{sen}(kr) \cos(\omega_k t) dk. \quad (4.26)$$

A função $F(k) = kA(k)$ deve ser escolhida de acordo a recuperar a distribuição inicial $f(r)$ desejada em (4.8) quando $t = 0$. Tomando como exemplo $f(r) \propto \cos(\gamma r)/r$, temos que $F(k) = kr/(\gamma^2 - k^2)^2$, e a solução total para $\Phi(t, r)$, incluindo as partes homogênea e não-homogênea, fica na forma

$$\Phi(t, r) = \Phi_0 \cos(\omega t) + \frac{A}{r} \int_0^\infty \frac{k}{(\gamma^2 - k^2)^2} \operatorname{sen}(kr) \cos(\omega_k t) dk, \quad (4.27)$$

onde A é uma constante. Esse exemplo não resulta em um campo bem comportado próximo à origem ($r = 0$) e portanto não é muito apropriado. Outras funções, como $f(r) \propto e^{-r}$, não apresentam esse problema [61], sendo melhores candidatas para a distribuição espacial do campo escalar.

4.3 Condições para Inflação

Primeiramente, devemos manter em mente que existem condições sobre o valor da parte homogênea do campo escalar relacionadas às observações astronômicas. As flutuações na radiação cósmica de fundo [19] impõem um limite em Φ_0 , de acordo com (3.14). Com nossa escolha de unidades, lembrando $16\pi = m_{Pl} = 1$, obtemos

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \approx \frac{1}{\sqrt{24}} \frac{V^{3/2}}{V'} = \frac{1}{8\sqrt{3}} m\Phi_0^2 < 10^{-4} \quad (4.28)$$

resultando em $m\Phi_0^2 < 10^{-4} \times 8\sqrt{3}$. Por outro lado, temos que o requisito de duração suficiente para a inflação (3.15) de 70 *e-folds* estabelece um valor mínimo ao campo escalar. De acordo com a equação (3.20), temos

$$\Phi_0 \geq \sqrt{561}, \quad (4.29)$$

onde mais uma vez lembramos que $4\pi = 1/4$ em nossas escolhas de constantes. Passemos agora às condições relacionadas ao nosso modelo.

Da equação (4.5), eliminando os termos que envolvem β e $\dot{\beta}$ de acordo com nossas escolhas de condições iniciais, obtemos, perto da origem,

$$\ddot{\beta} = \frac{1}{2}\Phi'^2 \sim \frac{1}{2}\bar{f}'^2. \quad (4.30)$$

Como \bar{f}' é uma constante, podemos redefinir uma coordenada temporal como $d\mathcal{T} = \bar{f}'d\eta$. A equação acima nos diz então que $\beta \sim \mathcal{T}^2/4$ (pois temos a condição $\dot{\beta} = 0$, para eliminarmos uma constante de integração). Assim, temos que o valor de β não aumentará para um intervalo de tempo $\mathcal{T} < 1$. Concluimos então que β continuará pequeno, em nossa coordenada original η , por um tempo físico $\tau = e^\alpha\eta$ inferior a

$$\tau_\beta \sim \frac{e^\alpha}{\bar{f}'}. \quad (4.31)$$

A primeira condição para inflação em nosso modelo é que β permaneça pequeno durante uma *e-fold*, ou seja, $\tau_\beta > H^{-1}$. Uma vez iniciado o processo

inflacionário, qualquer anisotropia provavelmente irá decair de acordo com a conjectura “no-hair”, como visto na Seção 3.5. Veremos até o final da seção que essa condição é menos restritiva do que aquelas relacionadas à função α da métrica (4.1).

A equação (4.6), com nossas condições iniciais, fica

$$2\ddot{\alpha} - 4\alpha'' + \dot{\alpha}^2 + \alpha'^2 = \frac{1}{4}(3\Phi'^2 + m^2 e^{2\alpha} \Phi^2). \quad (4.32)$$

Substituindo a solução radial (4.13) para α na equação acima, obtemos a equação dinâmica

$$8\ddot{\alpha} + 4\dot{\alpha}^2 = 3\bar{f}'^2 + 16\alpha'' + m^2(\Phi_0\bar{f} + \bar{f}^2)e^{2\bar{\alpha}} + \Phi_0^2 m^2 e^{2\bar{\alpha}} \quad (4.33)$$

pois, de acordo com essa solução, o termo α'^2 é desprezado quando nos aproximamos da origem. O último termo no lado direito da equação (4.33) é o potencial do campo homogêneo. Para obtermos um processo inflacionário, é necessário que esse termo domine a dinâmica sobre os termos que caracterizam os desvios da homogeneidade dados por α e f . Essa exigência nos leva às seguintes relações

$$\Phi_0 e^{\bar{\alpha}} > \frac{4\sqrt{\alpha''}}{m}, \quad \Phi_0 > \sqrt{\Phi_0\bar{f} + \bar{f}^2} \quad \text{e} \quad \frac{\Phi_0}{\bar{f}'} e^{\bar{\alpha}} > \frac{\sqrt{3}}{m} \quad (4.34)$$

Lembremos que essas condições, próximo à origem, envolvem apenas constantes.

A razão Φ'/Φ_0 possui unidade de [comprimento]⁻¹. Essa grandeza define uma escala de comprimento da variação espacial do campo Φ sobre a parte homogênea. Se definirmos a escala física de inomogeneidades como $\mathcal{D} \sim |\Phi_0/\Phi'|e^\alpha$, obtemos da terceira desigualdade em (4.34)

$$\mathcal{D} > \frac{\sqrt{3}}{m}, \quad (4.35)$$

onde lembramos que $\Phi' = f'$. A massa do campo escalar é relacionada com a escala do horizonte H^{-1} durante inflação através das equações de Friedmann

para expansão inflacionária

$$H^2 = \frac{1}{6}V(\Phi_0) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{m} \sim \frac{1}{\sqrt{12}}\Phi_0 H^{-1}. \quad (4.36)$$

Tendo cumprido com todos os requerimentos listados acima, podemos agora concluir que, da condição de inflação suficiente (4.29) e das relações (4.35) e (4.36), que a perturbação inicial deve ser maior do que alguns horizontes, ou mais especificamente

$$\mathcal{D} > 11,83H^{-1}. \quad (4.37)$$

Esse resultado independe da forma espacial inicial do campo escalar inhomogêneo. Os únicos requisitos para esse resultado são as condições iniciais $\dot{\Phi} = \beta = \dot{\beta} = 0$ na hipersuperfície η_0 . A condição para β é consequentemente satisfeita, pois a partir da definição de \mathcal{D} e (4.31), temos que

$$\tau_\beta \sim \frac{\mathcal{D}}{\Phi_0}, \quad (4.38)$$

de onde obtemos $\tau_\beta > 3,54H^{-1}$.

Em suma, vemos que a necessidade de uma região homogênea maior do que dez horizontes se faz necessária para a ocorrência de inflação e consequentemente para a formação de um universo causalmente conectado. A adoção da simetria esférica por esse modelo pode ser considerada uma simplificação bastante severa, porém na ausência de simetrias impostas no cenário, é provável que a situação se torne pior, necessitando de uma região homogênea ainda mais extensa. As condições iniciais escolhidas não são injustificadas, sendo estas baseadas na hipótese de um tensor de Weyl inicialmente nulo [67].

Capítulo 5

Alternativas à Inflação

Como vimos, o processo inflacionário depende de condições iniciais bastante específicas, e portanto é duvidoso que ele possa ser dito genérico. Essas condições recaem sobre o campo escalar, que deve ser homogêneo por extensas regiões e possuir um valor acima de algumas massas de Planck. Dessa forma, a inflação é capaz de aliviar os problemas de condições iniciais do universo mas não é suficiente para solucioná-los. Não é possível se aprofundar sobre essa questão sem o conhecimento de como o universo emerge de sua fase planckiana, seja através de uma teoria quântica da gravitação e/ou de uma teoria de condições iniciais. Além dessa dificuldade, o próprio campo escalar causador da inflação não é imediatamente compatível com a teoria da física de partículas e não possui qualquer evidência observacional.

Nesse contexto, sem o conhecimento das condições do universo primordial, podemos visualizar duas possibilidades. A primeira, mais popular, é a modificação da Relatividade Geral, onde a evolução do universo seria dada por uma nova teoria da gravitação capaz de gerar um processo inflacionário sem a presença de um campo escalar. Essa abordagem ainda se apresenta como um candidato a explicar a aceleração atual do universo. Uma outra possibilidade é um modelo de universo eterno, onde as condições iniciais poderiam ser colocadas em um tempo bastante remoto, de modo a contornar

os problemas do Modelo Padrão. Dentro dessa segunda possibilidade, há ainda a ramificação entre universos eternos, que assintoticamente tendem a um volume finito no passado, e os universos que sofrem um *ricochete*, que atravessaram uma longa fase de contração antes de começarem a se expandir novamente. Nos modelos de universo eterno não há a presença de uma singularidade inicial, que é um problema não atacado pela inflação. Notemos ainda que esses modelos podem ser gerados por modificações da gravitação, unificando assim as possibilidades aqui citadas. Passemos adiante aos detalhes de cada abordagem.

5.1 Modificações da Relatividade Geral

A modificação da Relatividade Geral usualmente é realizada através do formalismo lagrangiano da teoria. A lagrangiana gravitacional usual, identificada com o escalar de Ricci R , dá origem às equações de Einstein através do princípio variacional sobre a ação de Einstein-Hilbert

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad \text{impondo} \quad \delta S = 0 \quad \rightarrow \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0 \quad (5.1)$$

no vácuo. Caso haja a presença de matéria, a ação inclui um termo S_m , definido de forma que sua variação funcional nos apresenta o tensor momento-energia, expresso por

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial S_m}{\partial g^{\mu\nu}}. \quad (5.2)$$

O que se propõe então é a substituição dessa lagrangiana por uma função arbitrária de escalares construídos a partir do tensor de curvatura, na forma

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(R, R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}, R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu}, \dots) + S_m. \quad (5.3)$$

A escolha apropriada da lagrangiana resultaria em equações de movimento com termos capazes de gerar uma dinâmica compatível com as observações, como um universo atual acelerado ou com uma fase inflacionária. No entanto,

pode-se demonstrar que ações que utilizam escalares diferentes de R sofrem de um problema conhecido como *instabilidade de Ostrogradsky* [69], além de provocarem o aparecimento de campos fantasmas [70], ou seja, modos com energia cinética negativa. Sendo assim, de modo a evitar esses problemas, trabalharemos nesse momento apenas com ações na forma

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + S_m. \quad (5.4)$$

Por sua vez, os escalares $G = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu}$, chamado de escalar de Gauss-Bonnet, e $R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu*}$, onde o (*) representa o par dual, não apresentam os problemas citados acima, sendo também bons candidatos.

A aplicação do princípio variacional sobre a ação (5.4) nos dá como novas equações do campo gravitacional¹

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - [\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu}\square] f(R) = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (5.5)$$

onde incluímos matéria. O primo (') representa a derivada da função em relação ao seu argumento. Estas são equações diferenciais parciais de quarta ordem em relação à métrica $g_{\mu\nu}$, pois R já inclui derivadas segundas sobre esta. Além disso, pode-se demonstrar que o lado esquerdo possui divergência nula, o que garante a conservação do tensor momento-energia.

Obviamente, podemos reescrever a equação (5.5) como a equação usual da gravitação acrescida de um tensor momento-energia efetivo no lado direito da igualdade, na forma

$$G_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{f'(R)}(T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{\text{eff}}). \quad (5.6)$$

Isso no entanto é indesejável no sentido de que a teoria não é mais a Relatividade Geral, e portanto não há motivo para manter a sua estética.

¹O formalismo apresentado aqui é conhecido como *formalismo métrico*, onde a variação funcional é realizada sobre a métrica $g_{\mu\nu}$. Há outros formalismos presentes na literatura, como o de Palatini e o métrico-afim [71].

Mas essa maneira de olhar as equações na prática pode ser útil para teorias escalar-tensorial da gravitação [72, 73]. Esse novo tensor momento-energia efetivo é dado por

$$T_{\mu\nu}^{\text{eff}} = \frac{1}{\kappa} \left[\frac{f(R) - Rf'(R)}{2} g_{\mu\nu} + \nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) - g_{\mu\nu} \square f'(R) \right]. \quad (5.7)$$

Como a derivada primeira do campo $f'(R)$ não aparece na forma quadrática, mas havendo um termo linear de derivada segunda, modos de energia negativa podem surgir a partir de (5.7), violando as condições de energia. Essa situação é evitada impondo $f'(R) > 0$, o que equivale nas teorias escalar-tensorial à condição $\kappa^{\text{eff}} = \kappa/f'(R) > 0$, de forma a evitar campos fantasmas.

Uma outra forma de expressar as teorias $f(R)$ é através da redefinição da ação em termos de um campo escalar fictício [74]. Colocando um campo auxiliar $R = s$ na ação (5.4), obtemos

$$S(g_{\mu\nu}, \psi, s, \phi) = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} [f(s) - \phi(s - R)] + S_m(g_{\mu\nu}, \psi), \quad (5.8)$$

onde ϕ é o multiplicador de Lagrange associado ao novo vínculo e ψ representa os campos materiais. Ao introduzirmos esse novo campo, convertemos o sistema a duas equações de segunda ordem, no lugar de uma equação de quarta ordem. A extremização da ação (5.8) em relação à variável s nos dá $\phi = f'(s)$, e colocando esse novo vínculo na ação, obtemos

$$S_J(g_{\mu\nu}, \psi, s) = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} [f'(s)R - V(s)] + S_m(g_{\mu\nu}, \psi), \quad (5.9)$$

onde $V(s) = sf'(s) + f(s)$. Essa expressão é a ação gravitacional no *frame* de Jordan, pertencendo à categoria de teorias escalar-tensorial da gravitação [75]. Ela também é equivalente à teoria de Brans-Dicke [3] com parâmetro de Brans-Dicke $\omega_0 = 0$.

Mediante uma transformação conforme na métrica na forma

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = f'(s)g_{\mu\nu}. \quad \rightarrow \quad R = f'(s) \left[\tilde{R} + 3\tilde{\square}(\ln f') - \frac{3}{2}\tilde{\partial}^\alpha(\ln f')\tilde{\partial}_\alpha(\ln f') \right], \quad (5.10)$$

onde \tilde{R} , $\tilde{\partial}$ e $\tilde{\square}$ são definidos a partir de $\tilde{g}_{\mu\nu}$, chegamos à ação no *frame* de Einstein, dada por

$$S_E(\tilde{g}_{\mu\nu}, \tilde{\phi}, \psi) = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{\tilde{R}}{2\kappa} - \frac{1}{2}(\tilde{\partial}^i \tilde{\phi} \tilde{\partial}_i \tilde{\phi}) - V(\tilde{\phi}) \right] + S_m(g_{\mu\nu} = e^{-\sqrt{2\kappa/3}\tilde{\phi}} \tilde{g}_{\mu\nu}, \psi), \quad (5.11)$$

onde o potencial e o campo escalar $\tilde{\phi}$, também chamado de *scalon*, são dados em termos de s por

$$V(s) = \frac{s f'(s) - f(s)}{2(f'(s))^2} \quad \text{e} \quad \tilde{\phi}(s) = \sqrt{\frac{3}{2\kappa}} \ln f'(s). \quad (5.12)$$

Vemos então que a ação do sistema é idêntica à ação de Einstein-Hilbert, porém acrescida de um campo escalar minimamente acoplado. Dependendo da função $f(R)$, é extremamente mais fácil lidar com o problema fazendo essa separação. Ao variar a ação (5.11) em relação a $\tilde{g}_{\mu\nu}$ obtemos

$$\tilde{G}_{\mu\nu} - \kappa T_{\mu\nu} = \exp \left[-\sqrt{\frac{2\kappa}{3}} \tilde{\phi} \right] \kappa T_{\mu\nu}^m, \quad (5.13)$$

onde

$$T_{\mu\nu} = \tilde{\partial}_\mu \tilde{\phi} \tilde{\partial}_\nu \tilde{\phi} - \tilde{g}_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} \tilde{\partial}^\alpha \tilde{\phi} \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\phi} + V(\tilde{\phi}) \right] \quad \text{e} \quad T_{\mu\nu}^m = -\frac{2}{\sqrt{-\tilde{g}}} \frac{\delta S_m}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}}. \quad (5.14)$$

Devemos salientar que essa é a apenas uma maneira diferente de escrever as equações de movimento de uma mesma teoria. A equivalência entre as duas representações só se sustenta se a condição $f'(s) > 0$ for satisfeita, como visto na definição de $\tilde{\phi}(s)$ em (5.10). Vemos também que o limite $f' \rightarrow 1$ de Einstein é bem definido.

A motivação mais recente para se estudar modificações na teoria da gravitação provém prioritariamente da necessidade de descrever a dinâmica do universo observada sem a adição de um componente material ainda não-observado. No caso da aceleração atual do universo, isso significa tentar não recorrer à existência de energia escura, enquanto que no período inflacionário

o mesmo se aplica ao campo escalar *inflaton*. Isso é na realidade um desafio bastante complicado, pois uma única lagrangiana terá que ser apropriada para determinar a evolução do universo de acordo com o Modelo Padrão da Cosmologia, encompassando a fase inflacionária, a dominada por radiação (nucleossíntese), a dominada por matéria (formação de estruturas) e a fase acelerada atual.

Em uma geometria FRW plana², as equações dinâmicas (5.5) nos dão

$$H^2 = \frac{\kappa}{3f'} \left[\rho + \frac{Rf' - f}{2} - 3H\dot{R}f'' \right], \quad (5.15)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -\frac{\kappa}{f'} \left[p + \dot{R}^2 f''' + 2H\dot{R}f'' + \ddot{R}f'' + \frac{1}{2}(f - Rf') \right]. \quad (5.16)$$

onde assumimos um universo preenchido por um fluido perfeito. As equações de movimento são claramente de quarta ordem em $a(t)$. Como a motivação mais habitual para teorias de $f(R)$ é a aceleração atual do universo, vejamos como isso é feito nesse contexto. Define-se uma densidade de energia e uma pressão efetivas

$$\rho_{eff} = \frac{Rf' - f}{2f'} - \frac{3H\dot{R}f''}{f'} \quad (5.17)$$

$$p_{eff} = \frac{\dot{R}^2 f''' + 2H\dot{R}f'' + \ddot{R}f'' + \frac{1}{2}(f - Rf')}{f'} \quad (5.18)$$

A densidade de energia efetiva é positivamente definida, como se pode ver da equação (5.15) quando fazemos o limite $\rho \rightarrow 0$. No período inflacionário ou em estágios muito tardios da evolução do universo, pode-se desprezar o domínio material e atribuir a dinâmica às correções de $f(R)$. No vácuo, onde $\rho = p = 0$, as equações se reduzem à forma de Friedmann

$$H^2 = \frac{\kappa}{3}\rho_{eff} \quad \text{e} \quad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{6}[\rho_{eff} - 3p_{eff}], \quad (5.19)$$

de forma que as correções provenientes da curvatura R podem ser vistas como um fluido adicional. A equação de estado do universo é obtida a partir

²Pode-se demonstrar que o princípio cosmológico também é válido para a gravitação descrita por uma lagrangiana $f(R)$ [76].

das definições de densidade de energia e pressão efetivas, dadas por (5.17) e (5.18). Ela é expressa por

$$w_{eff} = \frac{p_{eff}}{\rho_{eff}} = \frac{\dot{R}^2 f''' + 2H\dot{R}f'' + \ddot{R}f'' + \frac{1}{2}(f - Rf')}{\frac{Rf' - f}{2} - 3H\dot{R}f''}. \quad (5.20)$$

No caso do período inflacionário, devemos impor a condição $w = -1$ de forma a obter um espaço-tempo quase de Sitter, capaz de resolver os problemas do Modelo Padrão citados na Seção 3.1. O denominador em (5.20) é positivo, como já visto, de forma que o sinal de w_{eff} é dado pelo numerador. Assim obtemos

$$w_{eff} = -1 \quad \rightarrow \quad \frac{f'''}{f''} = \frac{\dot{R}H - \ddot{R}}{\dot{R}^2} \quad (5.21)$$

Há diversas formas de funções que podem ser encontrados na literatura gerando inflação. Como exemplo, consideramos ações na forma $f(R) \propto R^n$. A derivação da expressão (5.21) é bastante direta se assumirmos que o fator de escala evolui com $a(t) = a_0 t^\alpha$. Uma forma mais geral de $a(t)$ nos levaria a uma equação de estado w dependente do tempo. Assim, ficamos com [77]

$$w_{eff} = -\frac{6n^2 - 7n - 1}{6n^2 - 9n + 3}, \quad \text{onde} \quad \alpha = \frac{-2n^2 + 3n - 1}{n - 2} \quad (5.22)$$

A escolha apropriada de n nos dá o a equação de estado desejada. O caso mais conhecido é $n = 2$, levando a $w_{eff} = -1$ e $\alpha \rightarrow \infty$. Esse resultado já é conhecido da chamada inflação de Starobinsky [78], onde a lagrangiana gravitacional é dada por $R + R^2/(6M^2)$, com M possuindo unidade de massa.

No *frame* de Einstein, a inflação de Starobinsky segue na seguinte maneira. A transformação conforme $\tilde{g}_{\mu\nu} = f'(s)g_{\mu\nu}$ nos dá o campo escalar efetivo, de acordo com (5.12), na forma

$$\tilde{\phi} = \sqrt{\frac{3}{2\kappa}} \ln \left(1 + \frac{R}{3M^2} \right), \quad (5.23)$$

enquanto que o potencial $V(\tilde{\phi})$ é dado por

$$V(\tilde{\phi}) = \frac{3M^2}{4\kappa} \left[1 - \exp \left(-\sqrt{\frac{2\kappa}{3}} \tilde{\phi} \right) \right]^2. \quad (5.24)$$

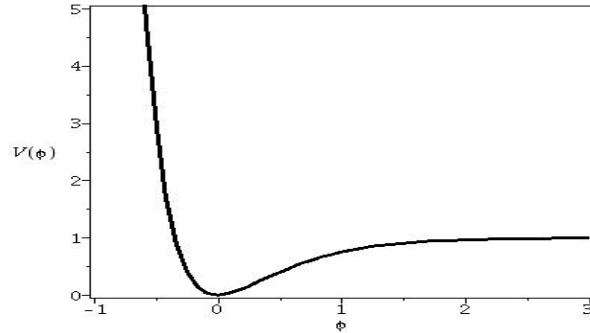


Figura 5.1: Forma do potencial $V(\tilde{\phi})$ do *frame* de Einstein para o modelo $f(R) = R + R^2/(6M^2)$.

Vemos na Figura 5.1 que, para um valor de $\tilde{\phi}$ muito grande, o potencial é quase constante e igual a $3M^2/4\kappa$, caracterizando o *slowroll*. No caso em que $\tilde{\phi} \ll 1$, o potencial é $V(\tilde{\phi}) \simeq M^2\tilde{\phi}^2/2$, e o campo oscila ao redor do mínimo, resultando na dinâmica característica do período de reaquecimento. Note no entanto que, sendo o campo fictício, o reaquecimento não ocorre via o decaimento de $\tilde{\phi}$. Pode-se demonstrar que a oscilação do scalaron é capaz de produzir um campo escalar real, e este seria o responsável pela repopulação do universo em partículas elementares [79].

5.2 Universo Eterno

Como vimos no Capítulo 2, as equações de Friedmann apontam para uma singularidade quando $t \rightarrow 0$, e é graças a esse comportamento que podemos afirmar que o universo teve um início. Mas a situação de um universo com idade finita é a causa de muitos dos problemas do Modelo Padrão, incluindo também a própria existência de uma singularidade inicial. Há modelos cosmológicos sem singularidade, e estes podem ser feitos se supusermos que a condição de energia $\rho+3p > 0$ possa ser violada quando o universo possuía um volume muito pequeno. Como também se trata de um requisito dos modelos

inflacionários, essa violação não constitui uma desvantagem para a hipótese de universos eternos. Os modelos não-singulares podem ser separados em duas categorias: universos com ricochete (*bounce*), onde a expansão atual sucede uma fase de contração anterior, ou universos com período pré-Big-Bang, cujo volume tenderia assintoticamente a um valor finito no passado.

Os modelos pré-Big-Bang são caracterizados por uma eterna expansão. À medida que voltamos no tempo, o volume assintoticamente se aproxima de um valor finito, indicando $\dot{a} \sim 0$. Esse comportamento representa uma situação quase estática, como o modelo cosmológico de Einstein citado no Capítulo 2. No entanto, sabemos das equações da Relatividade Geral, que tal configuração é instável para uma geometria homogênea e isotrópica. Dessa forma, devemos supor que a dinâmica do universo nesse cenário é dominada por interações quânticas, o que indica que o volume finito do passado é de ordens planckianas. Estudos nesse sentido são influenciados pela teoria de cordas [80], gravitação quântica de loops [81] ou através da interpretação de Bohm-de Broglie da mecânica quântica [82].

O caso de universos com ricochete apresentam uma grande vantagem sobre aqueles de pré-Big-Bang. As condições iniciais não mais precisam ser colocadas em uma região muito pequena, de dimensões planckianas, mas em um universo extremamente grande e plano. Pode-se então abordar os problemas da planeza e da homogeneidade por um ângulo diferente. Novamente, é preciso de uma física não convencional para evitar a singularidade, violando a condição de energia $\rho + p > 0^3$.

Vejamos como podem resolver os problemas de condições iniciais do Modelo Padrão, sem a necessidade de uma fase inflacionária [83]:

³Essa condição de energia é *chamada de condição de energia nula*, sendo mais restritiva do que a condição de energia forte $\rho + 3p > 0$; se a primeira for violada, a segunda necessariamente também o será. A teoria inflacionária necessita apenas que a condição forte não seja válida.

1. Singularidade inicial - Por construção, os universos com ricochete não apresentam uma singularidade, pois são geodesicamente completos. Lembramos que esse problema não é abordado na teoria inflacionária, e portanto esta é uma vantagem dos modelos não-singulares.

2. Horizonte - O horizonte de partículas é dado, como vimos, pela integral

$$d_H(t) = a(t) \int_{t_i}^t \frac{dt'}{a(t')}, \quad (5.25)$$

sendo t_i um momento inicial. Se o universo é dominado por um fluido com equação de estado $p = \alpha\rho$, temos que o fator de escala evolui com $a(t) \propto |t|^{2/3(1+\alpha)}$. Impomos que o ricochete ocorra em $t = 0$, com $t > 0$ representando a fase de expansão, enquanto $t < 0$ a fase de contração. A integral acima pode ser resolvida para nos dar

$$d_H(t) = \frac{3(1+\alpha)}{1+3\alpha} \left[|t_i|^{(1+3\alpha)/(3+3\alpha)} - |t|^{2/(3+3\alpha)} + t \right], \quad (5.26)$$

onde vemos que o horizonte de partículas diverge para $\alpha > -1/3$ quando colocamos $t_i \rightarrow -\infty$, como esperado para um universo com ricochete. Dessa forma, todas as regiões do universo estão em contato causal, e esse já era o caso mesmo antes de $t = 0$.

3. Planeza - Como no Capítulo 3, definimos a densidade de energia crítica como $\rho_c = 3H^2/\kappa$, de onde se obtém a relação (3.4). Ao derivarmos essa equação, ficamos com

$$\frac{d}{dt} |\Omega(t) - 1| = -2 \frac{\ddot{a}}{\dot{a}^3}, \quad (5.27)$$

onde escolhemos curvatura positiva. O valor de $\Omega(t)$ se afasta ou se aproxima do valor crítico dependendo dos sinais envolvidos. No caso de um universo em expansão desacelerada ($\dot{a} > 0$ e $\ddot{a} < 0$), como no Modelo Padrão, vemos que o lado esquerdo cresce com o tempo. De modo a resolver o problema da planeza, temos que observar em que regime a quantidade $|\Omega - 1|$ se aproxima do valor nulo. Isso pode ser obtido com um período de longa contração

acelerada, onde temos $\dot{a} < 0$ e $\ddot{a} < 0$. Logicamente, o mesmo resultado pode ser encontrado se supusermos uma fase inflacionária, com $\dot{a} > 0$ e $\ddot{a} > 0$. A solução do problema da planeza é obtida ao dizermos que o universo se expandiu muito menos após o ricochete do que teria se contraído em uma fase anterior.

4. Homogeneidade - Duas abordagens podem ser utilizadas nesse problema. A primeira é através de argumentos de condições iniciais, como a hipótese de curvatura de Weyl nula, vista no capítulo anterior. A segunda é propondo um mecanismo dinâmico que elimine quaisquer desvios na homogeneidade e isotropia, onde a inflação é o maior exemplo. O presente trabalho discorreu sobre uma combinação de ambas possibilidades. No caso de um universo com ricochete, as duas abordagens também são simultaneamente úteis. Situando nossas condições iniciais em um vasto universo em contração, temos que os coeficientes tanto do tensor de Ricci (pela baixa densidade de energia) quanto do de Weyl (pela conjectura recém-citada) serão pequenos. Nesse cosmos rarefeito e plano, qualquer flutuação rapidamente se dissipa, devido à pequena energia auto-gravitacional ($\rho \rightarrow 0$), o que não ocorreria com condições iniciais genéricas em um regime de alta densidade.

Vamos supor uma fase de contração dominada por matéria. Nesse cenário, a velocidade da poeira evolui com $v \propto a^{-1}$, enquanto sua densidade numérica com $n \propto a^{-3}$. O livre caminho médio, definido por $\lambda_M = (n\sigma)^{-1}$, onde σ é a seção de choque⁴, cresce então com $\propto a^3$. O comprimento de Jeans das inomogeneidades para um universo com tão baixa densidade pode ser enorme, maior do que o universo atual [1]. O tempo de dissipação de uma perturbação, cujo comprimento é menor do que o comprimento de Jeans, é dado por

$$t_d = \frac{\lambda}{v} \left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_M} \right). \quad (5.28)$$

⁴A seção de choque deve necessariamente ser pequena para matéria não-relativística.

Comparando com o tempo de Hubble t_H , obtemos

$$\frac{t_d}{t_H} \propto \frac{x}{y^{1/3}} \left(1 + C \frac{x}{y^2} \right), \quad (5.29)$$

onde

$$x = \frac{\lambda}{H_0^{-1}}, \quad y = \frac{R_H}{H_0^{-1}} = \frac{t_H}{T_0} \quad (5.30)$$

e C é uma constante, R_H é raio de Hubble e T_0 é o tempo de Hubble hoje. A análise da equação (5.29) indica que, dado um tempo de contração suficientemente longo, uma escala do tamanho de nosso universo se torna homogêneo. Somente flutuações quânticas, originadas do princípio de incerteza, sobreviveriam.

Obviamente, ambas as seções anteriores podem ser combinadas de forma a obtermos um universo eterno através de uma nova teoria gravitacional. Isso pode ser realizado tanto por uma lagrangiana cuja dinâmica possa violar as condições de energia no universo primordial [8, 9], como por uma ação na forma Born-Infeld

$$S_G = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \left[R - \sqrt{\beta^2 - I^2} + \beta \right], \quad (5.31)$$

que diretamente impõe um limite na curvatura. A quantidade β representa o valor máximo que o escalar I pode alcançar. Pode-se definir a aparição de uma singularidade no espaço-tempo a partir da divergência de escalares de curvatura [11], e portanto um universo regido por tal teoria da gravitação deve ser não-singular. No caso de $I = R$, recuperamos o caso de uma teoria $f(R)$ convencional, com

$$f(R) = R - \beta \sqrt{1 - \frac{R^2}{\beta^2}} + \beta \quad \rightarrow \quad f'(R) = 1 + \frac{R}{\sqrt{\beta^2 - R^2}}. \quad (5.32)$$

A componente (00) da equação (5.5), em uma geometria FRW, é

$$\left[1 + \frac{R}{\sqrt{\beta^2 - R^2}} \right] R_{00} - \frac{R - \sqrt{\beta^2 - R^2} + \beta}{2} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{R}{\sqrt{\beta^2 - R^2}} \right] = \kappa \rho. \quad (5.33)$$

Como o valor da curvatura R é limitado por β , devemos supor que um ricochete deva ocorrer justamente no regime $R \sim \beta$. Então fazemos a aproximação

$$R = \beta - \epsilon, \quad \text{com } 0 < \epsilon \ll 1. \quad (5.34)$$

Assim, substituindo a expressão acima na equação (5.33), ficamos com

$$\frac{3\beta}{\sqrt{2\beta\epsilon}} \left[\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}\dot{\epsilon}}{2a\epsilon} \right] \simeq \kappa\rho, \quad (5.35)$$

pois, como ϵ é muito pequeno, levamos em consideração apenas os termos dominantes proporcionais a $1/\sqrt{2\beta\epsilon}$. Multiplicando ambos os lados por $\sqrt{2\beta\epsilon}$, ficamos então com a simples expressão quando $\epsilon \rightarrow 0$

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}\dot{\epsilon}}{2a\epsilon} \propto \sqrt{\epsilon}, \quad (5.36)$$

onde supusemos que a densidade de energia do conteúdo material é grande, porém finita no ricochete. Fazendo a expansão de Taylor do fator de escala $a(t)$ em torno de $t = 0$, o momento do ricochete, que por sua vez deve possuir $\dot{a}(t = 0) = 0$ e $\ddot{a}(t = 0) > 0$, obtemos a expressão $a(t) = a_0(1 + a_2t^2 + a_3t^3)$. O escalar de Ricci é dado por

$$R = 6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right] \simeq 12a_2 + 36a_3t, \quad (5.37)$$

onde desprezamos termos de ordem $\mathcal{O}(t^2)$ ou superiores na vizinhança do ricochete. Como desejamos que este ocorra em $t = 0$, temos então que $\beta = 12a_2$ e $\epsilon = -36a_3t$, com a_3 necessariamente menor do que zero. No entanto, ao colocarmos a expansão do fator de escala na equação (5.36), ficamos com

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}\dot{\epsilon}}{2a\epsilon} \simeq 2a_2 + 6a_3t - \frac{2a_2t(-36a_3)}{2(-36a_3t)} = a_2 + 6a_3t, \quad (5.38)$$

que é sempre diferente de zero, e portanto inconsistente com a equação (5.36). Embora a presença do termo a_3t^3 seja incompatível com um ricochete, o

mesmo não ocorre para a expansão $a(t) = a_0(1 + a_2t^2 + a_4t^4)$. O escalar de Ricci é então dado por

$$\begin{aligned} R &= 6 \left[\frac{(2a_2 + 12a_4t^2)(1 + a_2t^2) + (2a_2t + 4a_4t^3)^2}{(1 + a_2t^2)^2} \right] \\ &\simeq 6 [2a_2 + (2a_2^2 + 12a_4)t^2], \end{aligned} \quad (5.39)$$

onde desprezamos termos de ordem $\mathcal{O}(t^3)$ ou superiores. Da expressão acima, como desejamos que a curvatura seja máxima em $t = 0$, podemos identificar $\beta = 12a_2$ e conseqüentemente $\epsilon = -12(a_2^2 + 6a_4)t^2$. Como devemos ter $\epsilon > 0$, obrigatoriamente o ansatz deve vir acompanhado da condição $a_4 < -a_2^2/6$. Substituindo na equação (5.36), e desprezando potências maiores do que t^2 , obtemos

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}\dot{\epsilon}}{2a\epsilon} \simeq 2a_2 - \frac{4a_2t^2}{2t^2} = 0, \quad (5.40)$$

Precisamos ver qual é o termo seguinte da quantidade expressa no lado esquerdo da equação acima. Se levarmos a expansão de $a(t)$ até ordem t^5 , na forma $a(t) = a_0(1 + a_2t^2 + a_4t^4 + a_5t^5)$. Assim, temos que $\epsilon = -12(a_2^2 + 6a_4)t^2 + 120a_5t^3$, e daí obtemos

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}\dot{\epsilon}}{2a\epsilon} \propto t \propto \sqrt{\epsilon}, \quad (5.41)$$

e portanto (5.36) é satisfeita.

Da expansão para $a(t)$ em torno do ricochete, vemos também que tanto \dot{a} quanto \ddot{a} não divergem em $t = 0$. Assim sendo, devemos ter que escalares criados a partir dos tensores de Ricci e de curvatura são bem comportados nesse sistema. Concluimos que para esta lagrangiana, são possíveis os ricochetes desde que o coeficiente a_3 da expansão do fator de escala seja nulo. Um modelo de pré-Big-Bang, onde não há singularidade e se obedece às condições $\ddot{a} > 0$ (no infinito passado) e $\dot{a} > 0$ (em todos os tempos), não sofre de quaisquer restrições provenientes da equação (5.36). Logo, esses modelos também podem ser bons candidatos para estudos fututros ao utilizarmos essa lagrangiana.

Capítulo 6

Conclusões

Os modelos inflacionários homogêneos são bastante genéricos, pois necessitam apenas de algumas condições iniciais específicas, especialmente sobre a intensidade do campo escalar $\Phi > (\text{algumas}) \times m_{pl}$. No entanto, se adotamos o campo escalar como não-homogêneo, como o caso mais geral indicaria, as flutuações em sua intensidade poderiam ser capazes de impedir o universo de inflar. Para pequenas flutuações, com comprimentos menores do que o horizonte de Hubble, não há qualquer dificuldade nesse sentido, visto que o campo apenas oscilaria e o universo iniciaria o processo inflacionário. Já em flutuações cuja extensão é muito maior do que o horizonte de Hubble, o campo pode ser simplesmente aproximado para o caso homogêneo e obtemos inflação. Porém, no caso de desvios de homogeneidade com comprimento físico da ordem do horizonte H^{-1} , a análise é mais complicada. É então preciso recorrer à análise de todo o conjunto das equações de Einstein, sem fazer quaisquer aproximações, sendo necessário utilizar métodos numéricos. O resultado é que uma distribuição genérica do campo escalar pode apresentar configurações que impedem o início da inflação, a menos que o comprimento das flutuações seja maior do que alguns horizontes. Isso significa que uma boa dose de homogeneidade na configuração inicial do campo é também necessária.

A nossa análise, apresentada nesse trabalho, é uma abordagem analítica desse problema, onde não fizemos qualquer aproximação à distribuição espacial do campo escalar, nem especificamos a intensidade das flutuações na densidade de energia. Nossas únicas escolhas em relação ao campo foram a hipótese de que ele é homogêneo em $r \rightarrow \infty$ e a de possuir um termo cinético inicialmente nulo. Essa última escolha nos parece bastante plausível, pois vimos na Seção 3.4 que a quantidade $\dot{\Phi}$ decai exponencialmente antes da inflação. Por outro lado, a nossa escolha de condições iniciais relativas à métrica (4.1) se baseiam na conjectura de curvatura de Weyl nula, proposta por Penrose em [67]. Esta hipótese nos diz que o tensor de Weyl deve ser nulo no início do universo, indicando então um universo conformalmente plano. Dessa forma, fizemos nosso estudo escolhendo $\beta = \dot{\beta} = 0$, como condição inicial. O problema de Cauchy para esse modelo é bem posto desde que a escolha de distribuição espacial do campo escalar $f(r)$ satisfaça as equações de vínculo apresentadas na Seção 4.2.

O principal resultado encontrado em nossa análise foi a corroboração analítica da necessidade de uma homogeneidade pré-existente no universo. Essa conclusão é totalmente independente da forma espacial do campo escalar, o que nos indica se tratar de um resultado bastante geral. Dessa maneira, vemos que o mecanismo inflacionário também carece de condições iniciais bastante específicas, sendo portanto duvidoso, porém ainda possível, que esse período da história do universo tenha ocorrido.

No entanto, esse requisito de uma extensa homogeneidade inicial pode não representar qualquer problema. Como proposto por Linde em [43], nas raras regiões onde o campo escalar possui um valor apropriado para a inflação por extensões maiores do que 11 horizontes, o seu centro se expandirá exponencialmente, se tornando maiores do que as não-homogêneas por um fator de ordem 10^{30} . Dessa forma, uma enorme parte do volume do universo deve ser preenchido por poucas regiões que inflaram e se tornaram um local

homogêneo e isotrópico por volumes maiores do que o horizonte, como o cenário que observamos.

Esse argumento possui um caráter bastante qualitativo e portanto deve ser lido com um certo ceticismo. Ele não leva em consideração a dinâmica das regiões fronteiriças não-homogêneas, que poderiam influenciar significativamente a expansão. As perturbações ali presentes se propagam para o interior da região homogênea podendo suprimir a inflação. A análise completa desses efeitos ainda não foi realizada, mas se trata de um estudo importante para a possível incorporação do paradigma inflacionário ao Modelo Padrão da Cosmologia.

Outra dificuldade com essa hipótese é o que chamamos de *problema da medida*. As condições iniciais propícias para a inflação podem ser bastante improváveis, com apenas uma em cada, digamos, 10^{40+} regiões se expandindo exponencialmente. Dessa forma, as regiões onde houve inflação suficiente corresponderiam a apenas uma parte em 10^{10+} do volume do universo, sendo então difícil crer que vivemos justamente nessas raras ilhas homogêneas. Não dispomos ainda de mecanismos suficientes para obtermos uma teoria de condições iniciais que ponha fim a essa questão. Carecemos ainda de uma teoria quântica da gravitação para nos aprofundarmos no estudo do universo primordial, de maneira a obtermos um esclarecimento maior sobre a configuração da época pré-inflacionária.

Dessa maneira, a teoria inflacionária baseada na dinâmica de um campo escalar ainda deve ser vista com desconfiança devido a seus problemas de condições iniciais. A proposta de substituir esse mecanismo por uma modificação da Relatividade Geral é um bom assunto a ser investigado. A nova dinâmica da gravitação é igualmente capaz de produzir um período inflacionário onde os problemas de condições iniciais se coloca de maneira diferente, ou ainda possibilitar a existência de universos eternos, sejam de pré-Big-Bang ou com ricochete. Nesses últimos, os problemas apresentados

no Modelo Padrão da Cosmologia são extremamente suavizados, visto que podemos postular condições iniciais em um universo extremamente grande, plano e longo. Já no cenário pré-Big-Bang, há a necessidade de um mecanismo capaz de criar um estado quase-estático que se estenda infinitamente no passado. Um bom candidato é a ação na forma Born-Infeld apresentada no Capítulo 5, que é capaz de criar um universo não-singular sem ricochete.

Nossa pesquisa prossegue então na investigação das possibilidades apresentadas pela teoria $f(r)$ expressa por (5.32). Os próximos passos são o estudo de condições iniciais dessa teoria, tanto no caso de um ricochete quanto em um universo com pré-Big-Bang. O foco de nosso trabalho deverá recair sobre o problema da homogeneidade, que consideramos ser o mais grave do Modelo Padrão da Cosmologia.

Referências Bibliográficas

- [1] V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge Univ. Press (2005);
- [2] S. Dodelson, *Modern Cosmology*, Academic Press (2003);
- [3] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, John Wiley & Sons (1972);
- [4] R.H. Dicke e P.J.E. Peebles, em *General Relativity: An Einstein Centenary Survey*, ed. S.W. Hawking e W. Israel, Cambridge Univ. Press (1979);
- [5] A. Guth, Phys.Rev. **D23** 347 (1981);
- [6] D.S. Goldwirth e T. Piran, Phys.Rep. **214** 4 (1992) 223-292;
- [7] D.S. Goldwirth e T. Piran, Phys.Rev.Lett. **64** 2852 (1990);
- [8] M. Novello e S.E. Perez Bergliaffa, Phys.Rep. **463** 127 (2008);
- [9] S. Carloni *et al.*, Class.Quant.Grav. **23** 1913 (2006);
- [10] C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman (1973);
- [11] R.M. Wald, *General Relativity*, Univ. Chicago Press (1984);
- [12] E. Hubble, *Annual Report of the Mount Wilson Observatory*, p.94 (1924);

- [13] E. Hubble, *Astrophys.J.* **64** 321 (1926);
- [14] R. Maartens *et al.*, *Astron.Astrophys.* **309** L7 (1996);
- [15] E.A. Milne, *Relativity, Gravitation and World Structure*, Oxford Univ. Press (1936);
- [16] A. Friedmann, *Gen.Rel.Grav.* **31** 1991 (1999);
- [17] E. Hubble, *Proceedings of the National Academy of Sciences* **15** (1929);
- [18] J.C. Mather *et al.*, *Astrophys.J.* **512** 511 (1999);
- [19] D.N. Spergel *et al.*, *Astrophys.J.Suppl.* **170** 377 (2007);
- [20] A.G Riess *et al.*, *Astron.J.* **116** 1009 (1998);
- [21] S. Perlmutter *et al.*, *Astrophys.J.* **517** 565 (1999);
- [22] D.N. Schramm e M.S. Turner, *Rev.Mod.Phys.* **70** 303 (1998);
- [23] S.G. Ryan *et al.*, *Astrophys.J.Lett.* **530** L57 (2000);
- [24] S. Burles e D. Tytler, *Astrophys.J.* **499** 699 (1998);
- [25] A.A. Penzias e R.W. Wilson, *Astrophys.J.* **142** 419 (1965);
- [26] F. Zwicky, *Phys.Acta* **6** 124 (1933);
- [27] K.N. Abazajian *et al.*, *Astron.J.* **126** 2081 (2003);
- [28] M. Colless *et al.*, *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.* **328** 1039 (2001);
- [29] J. Bekenstein e M. Milgrom, *Astrophys.J.* **286** 7 (1984);
- [30] V. Sahni e A. Starobinsky, *Int.J.Mod.Phys.* **D9** 373 (2000);
- [31] J.C. Fabris *et al.*, *Gen.Rel.Grav.* **34** 53 (2002);

- [32] E.W. Kolb e M.S. Turner, *The Early Universe*, Addison Wesley (1990);
- [33] G.F.R. Ellis, em *Philosophy of Physics*, ed. J. Butterfield e J. Earman, North Holland (2006);
- [34] K.A. Olive, Phys.Rep **190** 6 (1990) 307-403;
- [35] A.D. Linde, Phys.Lett. **108B** 389 (1982);
- [36] P.J. Steinhardt e M.S. Turner, Phys.Rev. **D29** 2162 (1984);
- [37] R.H. Brandenberger, Rev.Mod.Phys. **57** 1 (1985);
- [38] J.M. Bardeen *et al.*, Phys.Rev. **D28** 679 (1983);
- [39] A.R. Liddle e D.H. Lyth, *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*, Cambridge Univ. Press (2000);
- [40] H. Georgi e S. Glashow, Phys.Rev.Lett. **32** 438 (1974);
- [41] A.D. Linde, *Particle Physics and Inflationary Cosmology*, CRC Press (1990);
- [42] G.F. Mazenko *et al.*, Phys.Rev. **D31** 273 (1985);
- [43] A.D. Linde, Phys.Lett. **129B** 177 (1983);
- [44] D.V. Nanopoulos *et al.*, Phys.Lett. **127B** 30 (1983);
- [45] A. Albrecht *et al.*, Phys. Rev. Lett. **48** 1437 (1982);
- [46] L. Kofman *et al.*, Phys.Rev. **D56** 3258 (1997);
- [47] F. Hoyle e J.V. Narlikar, Proc.R.Soc. **A273** 1 (1963);
- [48] R.M. Wald, Phys.Rev. **D28** 2118 (1983);

- [49] J.D. Barrow, em *The Very Early Universe*, ed. G.W. Gibbons, S.W. Hawking e S.T.C. Siklos, Cambridge Univ. Press (1983);
- [50] W. Boucher e G.W. Gibbons, em *The Very Early Universe*, ed. G.W. Gibbons, S.W. Hawking e S.T.C. Siklos, Cambridge Univ. Press (1983);
- [51] J.D. Barrow e J.A. Stein-Schabes, Phys.Lett. **103A** 315 (1984);
- [52] J.D. Barrow, Phys.Lett. **180B** 335 (1986);
- [53] C.W. Misner, Astroph.J. **151** 431 (1968);
- [54] M. Alcubierre, *Introduction to 3+1 Numerical Relativity*, Oxford Univ. Press (2008);
- [55] L.G. Jensen e J.A. Stein-Schabes, Phys.Rev. **D34** 931 (1986);
- [56] D.S. Goldwirth, Phys.Rev. **D43** 3204 (1991);
- [57] T. Piran, Phys.Lett. **181B** 238 (1986);
- [58] J.H. Kung e R.H. Brandenberger, Phys.Rev. **D42** 1008 (1990);
- [59] P. Laguna *et al.*, Phys.Rev. **D44** 3077 (1991);
- [60] H. Kurki-Suonio *et al.*, Phys.Rev. **D48** 3611 (1993);
- [61] E. Calzetta e M. Sakellariadou, Phys.Rev. **D45** 2802 (1992);
- [62] A.D. Linde em *Science and Ultimate Reality: Quantum Theory, Cosmology and Complexity*, ed. J.D. Barrow, P.C.W. Davies e C.L. Harper, Jr., Cambridge Univ. Press (2004);
- [63] J.A. Stein-Schabes, Phys.Rev. **D35** 2345 (1987);
- [64] N. Deruelle and D. S. Goldwirth, Phys. Rev. **D51**, 1563 (1995);
- [65] R.S. Perez e N. Pinto-Neto, Grav.Cosmol. (a ser publicado);

- [66] L.D. Landau e E.M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Butterworth-Heinemann (1980);
- [67] R. Penrose, em *General Relativity: An Einstein Centenary Survey*, ed. S.W. Hawking e W. Israel, Cambridge Univ. Press (1979);
- [68] G.B. Arfken e H.J. Weber, *Física Matemática: Métodos Matemáticos para Engenharia e Física*, Campus/Elsevier (2007);
- [69] R.P. Woodard, Lect.Notes Phys. **720** 403 (2007);
- [70] K.S. Stelle, Gen.Rel.Grav. **9** 353 (1978);
- [71] T.P. Sotiriou e V. Faraoni, Rev.Mod.Phys. **82** 451 (2010);
- [72] R.V. Wagoner, Phys.Rev. **D1** 3209 (1970);
- [73] P.G. Bergmann, Int.J.Theor.Phys. **1** 25 (1968);
- [74] N. Deruelle *et al.*, Phys.Rev. **D80** 084032 (2009);
- [75] T. Damour e G. Esposito-Farese, Class.Quant.Grav. **9** 2093 (1992);
- [76] S. Rippl *et al.*, Gen.Rel.Grav. **28** 193 (1996);
- [77] S. Capozziello *et al.*, Recent Res.Dev.Astron.Astrophys. **1** 625 (2003);
- [78] A.A. Starobinsky, Phys.Lett. **91B** 99 (1980);
- [79] A. De Felice e S. Tsujikawa, Living Rev. Rel. **13** 3 (2010);
- [80] M. Gasperini e G. Veneziano, Phys. Rep. **373** 1 (2003);
- [81] D.J. Mulryne *et al.*, Phys.Rev. **D71** 123512 (2005);
- [82] F.T. Falciano *et al.*, Phys.Rev. **D76** 083521 (2007);
- [83] P. Peter e N. Pinto-Neto, Phys.Rev. **D78** 063506 (2008);

- [84] R.S. Perez, *Modificações da Relatividade Geral e a Aceleração do Universo* - Dissertação de Mestrado, ed. CBPF, Rio de Janeiro (2006).