



CBPF - CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

**Um estudo da anomalia de calibre na Eletrodinâmica Quântica
Vetorial em $(1 + 1)$ -dimensões**

CAIRO HENRIQUE DUQUE DA SILVA

Orientador: Sebastião Alves Dias

Coorientador: Philipe de Fabritiis

RIO DE JANEIRO

2026

Cairo Henrique Duque da Silva

**Um estudo da anomalia de calibre na Eletrodinâmica Quântica
Vetorial em $(1 + 1)$ -dimensões**

Dissertação de Mestrado submetida para o programa de pós-graduação em Física do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF) como parte dos requerimentos para a obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Sebastião Alves Dias

Coorientador: Philipe de Fabritiis

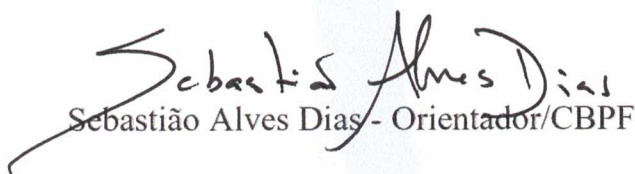
RIO DE JANEIRO

2026

"UM ESTUDO DA ANOMALIA DE CALIBRE NA ELETRODINÂMICA QUÂNTICA
VETORIAL EM (1+1)-DIMENSÕES"

CAIRO HENRIQUE DUQUE DA SILVA

Dissertação de Mestrado em Física apresentada no
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do
Ministério da Ciência Tecnologia e Inovação.
Fazendo parte da banca examinadora os seguintes
professores:



Sebastião Alves Dias - Orientador/CBPF

Philippe Osório de Fabritiis – Coorientador/CBPF

Documento assinado digitalmente
 **GUSTAVO PAZZINI DE BRITO**
Data: 17/04/2026 13:54:21-0300
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

Gustavo Pazzini de Brito - UNESP

Documento assinado digitalmente
 **FELIPE SIQUEIRA DE SOUZA DA ROSA**
Data: 10/05/2026 20:36:53-0300
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

Felipe Siqueira de Souza da Rosa – UFRJ

Rio de Janeiro, 10 de abril de 2026.

Resumo

Neste trabalho, usando o formalismo da integração funcional, são calculadas funções de correlação envolvendo a anomalia de calibre e operadores invariantes e não-invariantes de calibre, no contexto do modelo de Schwinger anômalo. Os resultados são similares aos obtidos anteriormente no âmbito do modelo de Schwinger quiral.

Abstract

In this work, using the functional integral approach, we compute correlation functions involving the gauge anomaly and gauge invariant and non invariant operators, in the context of the anomalous Schwinger model. The results are similar to the ones obtained previously in the chiral Schwinger model.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todo o pessoal do CBPF, em especial, aos meus orientadores, os pesquisadores Sebastião e Philipe.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 131074/2022-9.

Sumário

1	Introdução	1
2	Aspectos da Teoria de Campos	4
2.1	Formalismo Lagrangiano	4
2.1.1	O Teorema de Noether	5
2.1.2	Método Funcional	7
2.2	Álgebra de Clifford	9
2.2.1	Os Operadores de Projeção	10
2.3	A Anomalia de Calibre	12
2.3.1	O Cancelamento da Anomalia de Calibre	15
3	O Modelo de Schwinger	17
3.1	Conceitos Iniciais	17
3.2	A Ação Efetiva	18
3.2.1	Função de Green Fermiônica	20
3.2.2	Cálculo da Ação Efetiva	23
3.3	Análise do Campo de Calibre	27
3.3.1	Cálculo da Inversa $(\Omega^{-1})_{\mu\nu}(k)$	29
3.4	Cálculo da Anomalia de Calibre	31
4	Funções de Correlação	33
4.1	Funções de Correlação Bosônicas	34
4.2	Funções de Correlação Fermiônicas	35
5	Conclusão	41

Capítulo 1

Introdução

Nem toda simetria que ocorre em uma teoria clássica é preservada após sua quantização. Quando acontece da simetria ser violada no nível quântico, diz-se que tal simetria é *anômala*. Anomalias podem ocorrer em diversos tipos de simetrias [1]. No caso de simetrias contínuas, elas são caracterizadas por um operador $\mathcal{A}$ que representa a quadridivergência de uma corrente de Noether, impedindo-a de ser nula. No entanto, devido ao papel central que desempenha na compreensão das interações fundamentais entre partículas elementares, é comum exigir que a simetria de calibre seja preservada no nível quântico, ou seja, que $\mathcal{A} = 0$. Caso isso não aconteça, identidades muito importantes (Ward-Takahashi, no caso abeliano, e de Slavnov-Taylor, no caso não abeliano) não são satisfeitas e, conseqüentemente, não há o cancelamento das divergências necessário para tornar a teoria perturbativamente renormalizável [2, 3]. Este raciocínio desembocou na condição de cancelamento das anomalias de calibre, que foi importante para a previsão, no nível do Modelo Padrão, de que o número de famílias de léptons (agrupados em dubletos de $SU(2)_I$) tivesse que ser igual ao número de famílias de quarks (agrupados da mesma forma) [4].

Na década de 1980, no entanto, surgiram vários trabalhos que, embora tratassem de modelos bidimensionais, indicaram a possibilidade de uma teoria quântica de campos com anomalia na simetria de calibre ser consistente, i.e., ser unitária e renormalizável. O trabalho seminal foi o de Jackiw e Rajaraman [5] que mostrou a unitariedade da Eletrodinâmica Quântica Quiral em $(1 + 1)$ -dimensões (também chamada de modelo de Schwinger Quiral (MSQ), ver seção 2.3) quando a teoria é completamente quantizada. Faddeev e Shatashvili [6] e pouco depois, Harada e Tsutsui [7] e Babelon, Schaposnik e Viallet [8] desvendaram um mecanismo de restauração da simetria de calibre que nos dá uma imagem das teorias de calibre anômalas mapeadas em teorias sem anomalias que, em princípio, não teriam problemas com renormalizabilidade. Ainda em $(1 + 1)$ -dimensões, foi analisada a relação entre a teoria original e a teoria mapeada, mostrando, de diversas maneiras, a sua equivalência [9]. Também foi realizada a renormalização exata de modelos com simetria de calibre anômala abelianos e não massivos em $(1 + 1)$ -dimensões, como o

já citado MSQ [10].

Com estes trabalhos, nasceu a expectativa da restauração da simetria de calibre ao quantizar completamente – ou seja, considerando o campo de calibre dinâmico e não externo – uma teoria anômala em dimensão arbitrária. Neste sentido, Lima, Chaves e Dias [11] conseguiram mostrar, usando argumentos baseados em propriedades simples da integração funcional, que o valor esperado no vácuo da anomalia de calibre é nulo, numa teoria na qual férmions quirais interagem minimamente com campos de calibre abelianos ou não-abelianos, qualquer que seja a dimensão considerada. Além disso, os mesmos autores mostraram que a inserção da anomalia em funções de correlação de operadores invariantes de calibre se anula. No entanto, nada podia ser afirmado conclusivamente em relação a inserções similares em funções de correlação de operadores não-invariantes de calibre. A investigação desta questão em dimensões arbitrárias ainda está por ser estudada.

Tais resultados remeteram a questão, novamente, para $(1+1)$ -dimensões onde, devido à solubilidade exata de várias teorias, há como investigar o comportamento da anomalia de maneira exata. Isso levou à consideração do MSQ, com cálculos explícitos confirmando os resultados gerais e com resultados não-nulos para a inserção da anomalia de calibre em funções de correlação de operadores não-invariantes de calibre [12]. Neste modelo, a anomalia nunca se anula pois não há um esquema de regularização que preserve a simetria de calibre. Uma questão importante apareceu: qual seria o comportamento da anomalia em um modelo bidimensional onde a presença da simetria de calibre pudesse ser vista como opcional – ou seja, onde exista uma prescrição de regularização que preserve a simetria de calibre? Tal modelo é exatamente a Eletrodinâmica Quântica Veorial, também conhecida como modelo de Schwinger. Caso fosse utilizado um método de regularização formalmente invariante de calibre, ter-se-ia simetria de calibre quântica (e, portanto, anomalia nula). Caso contrário, obter-se-ia uma anomalia de calibre. O modelo de Schwinger, com anomalia de calibre, é chamado de Eletrodinâmica Quântica Vetorial Anômala, ou modelo de Schwinger Anômalo (MSA).

Neste trabalho, foi considerado o comportamento da anomalia de calibre quando inserida em funções de correlação gerais, no MSA. Um resultado nulo destas inserções poderia indicar a trivialidade do MSA pois, com todas as funções de correlações envolvendo a anomalia sendo nulas, a própria anomalia deveria ser nula, o que levaria a um passo da nulidade do próprio campo de calibre, situação na qual não haveria interação. Os resultados encontrados por meio dessas análises serão exibidos mais adiante.

A discussão foi organizada como descrito a seguir. No capítulo 2, serão revisados alguns conceitos fundamentais da teoria de campos, no que diz respeito às simetrias e à sua violação. Assim, na seção 2.1, será discutido o formalismo Lagrangiano dentro do qual destaca-se o teorema de Noether. Na seção 2.2, serão feitas algumas considerações sobre a álgebra de Clifford do espaço de Minkowski bidimensional, sendo demonstradas várias

identidades peculiares desta dimensão, que serão úteis para os cálculos subsequentes. Na seção 2.3, será discutida a anomalia de calibre em teorias abelianas. Por sua vez, no capítulo 3, será apresentado o modelo de Schwinger, tanto na sua versão clássica como quântica (MSA). Dessa maneira, na seção 3.1, será discutida com mais detalhes a ação da teoria. A seção 3.2 apresentará um cálculo minucioso da ação efetiva do modelo. Devido ao fato de estar em $(1 + 1)$ -dimensões, é possível encontrar uma dependência quadrática no campo de calibre no funcional gerador, o que será feito na seção 3.3. Na seção 3.4, encontrar-se-á o operador que representa a anomalia de calibre. Finalmente, no capítulo 4, serão calculadas explicitamente várias funções de correlação do MSA, tanto bosônicas (seção 4.1) quanto fermiônicas (seção 4.2). O último capítulo apresentará a conclusão e as perspectivas futuras.

Ao longo de toda a dissertação, será utilizada a convenção da soma de Einstein. Além disso, as letras gregas pertencerão ao conjunto $\{0, 1\}$.

Capítulo 2

Aspectos da Teoria de Campos

Neste capítulo, estão reunidos vários tópicos concernentes à teoria de campos que serão importantes neste trabalho. Quando a teoria é relativística, os campos são definidos no espaço-tempo de Minkowski n -dimensional. Neste contexto, as coordenadas espaço-temporais são denotadas por

$$x^\mu = (t, \mathbf{x}) = (x^0, x^1, \dots, x^{n-1}) \quad (2.1)$$

enquanto o operador gradiente é dado por

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_t, \nabla). \quad (2.2)$$

Como foi dito na introdução, serão considerados modelos bidimensionais. Ou seja, ao longo de toda a dissertação, vamos considerar $n = 2$, a não ser que se diga o contrário. Além disso, será assumida a assinatura $(+, -)$.

2.1 Formalismo Lagrangiano

Uma teoria clássica de campos consiste em um sistema mecânico descrito por um conjunto com um número infinito e contínuo de graus de liberdade. Neste caso, a Lagrangiana é um funcional dos campos $L = L[\phi_a(x), \dot{\phi}_a(x)]$ – i.e., uma aplicação de valor real cujo domínio é algum espaço de funções. Ao longo de todo o texto, serão consideradas apenas teorias de campos locais, cuja Lagrangiana L pode ser escrita como a integral sobre um funcional $\mathcal{L} = \mathcal{L}[\phi_a, \partial_\mu \phi_a]$ dependente dos campos ϕ_a e de suas derivadas primeiras $\partial_\mu \phi_a$, conhecido como densidade Lagrangiana:

$$L(t) = \int dx \mathcal{L}[\phi_a, \partial_\mu \phi_a]. \quad (2.3)$$

Naturalmente, no caso de uma teoria relativística, a densidade Lagrangiana deve ser

um escalar de Lorentz. Os termos bilineares, isto é, que possuem exatamente dois campos, são chamados de cinéticos. São estes termos que descrevem o comportamento do campo livre (não-interagente). Além disso, quando um campo possui derivadas temporais em seu termo cinético, diz-se que ele é dinâmico ou propagante. Por sua vez, as interações são descritas por termos com mais de dois campos.

O chamado princípio da mínima ação diz que quando um sistema físico evolui de uma dada configuração para uma outra no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$, ele percorre o caminho no espaço de configurações que faz da ação

$$S \equiv \int dt L(t) = \int d^2x \mathcal{L}[\phi_a, \partial_\mu \phi_a] \quad (2.4)$$

um extremo (em geral, um mínimo), i.e., $\frac{\delta S}{\delta \phi_a} = 0$. Assim, os campos $\phi_a(x)$ que compõem tal sistema físico devem obedecer à equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \right) = 0. \quad (2.5)$$

Com efeito, a variação da ação é dada por

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^2x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} \delta \phi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \delta (\partial_\mu \phi_a) \right] \\ &= \int d^2x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} \delta \phi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \partial_\mu (\delta \phi_a) \right] \\ &= \int d^2x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} \delta \phi_a + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \delta \phi_a \right) - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \right) \delta \phi_a \right]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Agora, assumindo que os campos anulam-se tanto no infinito temporal como no espacial, pode-se desprezar os termos de superfície e a variação δS reduz-se a

$$\delta S = \int d^2x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \right) \right] \delta \phi_a. \quad (2.7)$$

Portanto, como por hipótese os campos são todos independentes, a equação de Euler-Lagrange (2.5) decorre do princípio da mínima ação.

2.1.1 O Teorema de Noether

O famoso teorema de Noether diz que a cada transformação de simetria global contínua associa-se uma lei de conservação. Mais especificamente, se um grupo de transformações contínuas dos campos ϕ_a altera a densidade Lagrangiana $\mathcal{L}$, no máximo, por uma divergência, isto é,

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \delta \mathcal{L}, \text{ com } \delta \mathcal{L} = \partial_\mu S^\mu, \quad (2.8)$$

então

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad (2.9)$$

em que

$$j^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \delta \phi_a - S^\mu. \quad (2.10)$$

De fato, seja

$$\phi_a(x) \longrightarrow \phi'_a(x) = \phi_a(x) + \delta \phi_a(x) \quad (2.11)$$

uma transformação infinitesimal tal que $\delta \mathcal{L} = \partial_\mu S^\mu$. Usando as equações de Euler-Lagrange, tem-se

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} \delta \phi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \delta(\partial_\mu \phi_a) \\ &= \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \right) \right] \delta \phi_a + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \delta \phi_a \right) \\ &= \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \delta \phi_a \right). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Por sua vez, como a densidade Lagrangiana pode ser alterada pela divergência de um vetor S^μ , conclui-se que

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \delta \phi_a \right) = \partial_\mu S^\mu, \quad \text{i.e.,} \quad \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \delta \phi_a - S^\mu \right) = 0. \quad (2.13)$$

Nota-se que para ser obtido um resultado não trivial, S^μ deve ser determinado sem o uso das equações de movimento. Como consequência do teorema, é conservada a seguinte grandeza

$$Q \equiv \int dx j_0(x), \quad (2.14)$$

conhecida como carga de Noether. Isto pode ser visto da seguinte maneira: devido à conservação da corrente de Noether, tem-se

$$\int dx \partial^\mu j_\mu = 0. \quad (2.15)$$

Por outro lado, supondo que os campos tendam a zero no infinito de forma suficientemente forte, vale que

$$\begin{aligned} \int dx \partial^\mu j_\mu &= \int dx \partial^0 j_0 + \int dx (\nabla \cdot \mathbf{j}) \\ &= \frac{d}{dx_0} \int dx j_0 + \oint dS \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \\ &= \frac{d}{dx_0} \int dx j_0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Por fim, substituindo (2.16) em (2.15), conclui-se que

$$\frac{d}{dx_0} \int dx j_0(x) = 0, \quad \text{i.e.,} \quad \partial_t Q = 0. \quad (2.17)$$

2.1.2 Método Funcional

Equivalente ao processo de quantização canônica, na década de 1940, Feynman [13] propôs um novo método de quantização de uma teoria clássica descrita por determinada Lagrangiana. Tal método baseia-se na integração funcional através da soma de todas as configurações possíveis dos campos. Por simplicidade, considere um campo escalar real. Neste caso, as funções de Green da teoria são dadas por

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | T [\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)] | 0 \rangle, \quad (2.18)$$

em que $|0\rangle$ denota o estado fundamental (vácuo). Devido ao operador de ordenamento temporal T , tem-se

$$G_n(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = G_n(x_1, \dots, x_n), \quad (2.19)$$

para toda permutação $\sigma \in S_n$, em que S_n denota a coleção de todas as bijeções do conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$. Além disso, como o vácuo é invariante por translações, qualquer que seja o vetor a^μ , vale a seguinte identidade

$$G_n(x_1 + a, \dots, x_n + a) = G_n(x_1, \dots, x_n) \quad (2.20)$$

de modo que G_n depende apenas das diferenças $x_i - x_j$ das coordenadas. A princípio, a teoria pode ser reconstruída conhecendo-se todas as suas funções de correlação ou, equivalentemente, o funcional gerador $Z[J]$ da teoria, definido por

$$\begin{aligned} Z[J] &\equiv \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^m}{m!} \int d^2x_1 \dots d^2x_m J(x_1) \dots J(x_m) G_m(x_1, \dots, x_m) \\ &\equiv \left\langle 0 \left| T \exp \left[i \int d^2x J(x) \varphi(x) \right] \right| 0 \right\rangle, \end{aligned} \quad (2.21)$$

sendo $J(x)$ uma função escalar. De fato, é possível obter qualquer uma das funções de n pontos por meio das derivadas funcionais de $Z[J]$ com relação a J :

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = (-i)^n \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}. \quad (2.22)$$

Para verificar isso, basta substituir a expressão (2.21) em (2.22) e fazer as derivadas

funcionais:

$$\begin{aligned}
& (-i)^n \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0} = \\
& = (-i)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^m}{m!} \int d^2 y_1 \dots d^2 y_m G_m(y_1, \dots, y_m) \frac{\delta^n}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} J(y_1) \dots J(y_m) \Big|_{J=0} \\
& = (-i)^n \frac{i^n}{n!} \int d^2 y_1 \dots d^2 y_n G_n(y_1, \dots, y_n) \frac{\delta^n}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} J(y_1) \dots J(y_n) \\
& = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} G_n(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = G_n(x_1, \dots, x_n). \tag{2.23}
\end{aligned}$$

Na antepenúltima igualdade, foi utilizado o fato das derivadas funcionais serem nulas quando $n > m$ e anularem-se ao colocar $J = 0$ quando $n < m$; enquanto na última igualdade foi utilizada a Relação (2.19). No entanto, é evidente que para a equação (2.22) ter alguma utilidade, o funcional gerador deve ser calculado sem o emprego das funções de Green. Isso é possível com o auxílio da integral funcional na medida em que pode-se mostrar que o funcional gerador é dado por [14, 15]

$$Z[J] = N \int d\varphi \exp \left[iS[\varphi] + i \int d^2 x J(x) \varphi(x) \right] \tag{2.24}$$

sendo N um fator de normalização. Usualmente, escolhe-se N de forma a assegurar que $Z[0] = 1$. Neste caso, tem-se

$$N = \frac{1}{\int d\varphi e^{iS[\varphi]}}. \tag{2.25}$$

Dessa maneira, substituindo esta nova expressão do funcional gerador em (2.22), obtém-se

$$\begin{aligned}
G_n(x_1, \dots, x_n) & = (-i)^n N \int d\varphi \frac{\delta^n}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \exp \left(iS[\varphi] + i \int d^2 y J(y) \varphi(y) \right) \Big|_{J=0} \\
& = N \int d\varphi e^{iS[\varphi]} \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n). \tag{2.26}
\end{aligned}$$

Os casos espinorial e vetorial são inteiramente análogos. No entanto, considerando que os campos espinoriais devem obedecer a estatística de Fermi, as funções de Green da teoria devem ser antissimétricas e, para garantir isso, os campos ψ e $\bar{\psi}$ são acoplados com as fontes $\bar{\eta}$ e η , respectivamente, que tomam valores na álgebra de Grassmann:

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = \left\langle 0 \left| T \exp \left[i \int d^2 x (\bar{\eta}(x) \psi(x) + \bar{\psi}(x) \eta(x)) \right] \right| 0 \right\rangle. \tag{2.27}$$

Por outro lado, ao quantizar qualquer teoria de calibre deve-se primeiro fixar o calibre a fim de evitar as redundâncias geradas por esta simetria.

2.2 Álgebra de Clifford

Nesta seção, serão demonstradas algumas identidades relacionadas à álgebra de Clifford do espaço de Minkowski bidimensional que serão úteis posteriormente. Tal álgebra é gerada pelas matrizes de Dirac γ^μ que, por definição, satisfazem a relação

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}. \quad (2.28)$$

Ao longo de todo o texto, serão usadas as seguintes representações das matrizes de Dirac:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_1; \quad (2.29a)$$

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -i\sigma_2; \quad (2.29b)$$

sendo $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ as matrizes de Pauli. Assim, observa-se que a matriz γ^0 é hermitiana enquanto γ^1 é anti-hermitiana:

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0; \quad (2.30a)$$

$$(\gamma^1)^\dagger = -\gamma^1. \quad (2.30b)$$

Por sua vez, usando as matrizes de Dirac, define-se o operador de quiralidade γ^5 por

$$\gamma^5 \equiv \gamma^0 \gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_3. \quad (2.31)$$

Esta matriz goza das seguintes propriedades:

$$(\gamma^5)^2 = I_2; \quad (2.32a)$$

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5; \quad (2.32b)$$

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0; \quad (2.32c)$$

em que I_2 denota a matriz identidade de ordem 2. Com o auxílio da equação (2.28), é possível mostrar esta última propriedade. No caso em que $\mu = 0$, tem-se

$$\begin{aligned} \{\gamma^5, \gamma^0\} &= \gamma^5 \gamma^0 + \gamma^0 \gamma^5 \\ &= (\gamma^0 \gamma^1) \gamma^0 + \gamma^0 (\gamma^0 \gamma^1) \\ &= \gamma^0 (-\gamma^0 \gamma^1) + (\gamma^0)^2 \gamma^1 \\ &= -\gamma^1 + \gamma^1 = 0. \end{aligned} \quad (2.33)$$

De maneira análoga, demonstra-se que $\{\gamma^5, \gamma^1\} = 0$. Agora, introduzindo o tensor antissimétrico de Levi-Civita $\epsilon_{\mu\nu}$, em que $\epsilon_{01} = -\epsilon^{01} = 1$, pode-se verificar também a validade da identidade abaixo:

$$\gamma_\mu \gamma^5 = \epsilon_{\mu\nu} \gamma^\nu. \quad (2.34)$$

Tal tensor aparece também na relação de comutação das matrizes de Dirac, que é igual a

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = -2\epsilon^{\mu\nu} \gamma^5. \quad (2.35)$$

Assim, lembrando da relação de Clifford (2.28), pode-se escrever

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = \frac{1}{2} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} + \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \eta^{\mu\nu} - \epsilon^{\mu\nu} \gamma^5. \quad (2.36)$$

Além disso, outras propriedades úteis das matrizes de Dirac são aquelas relacionadas aos seus traços. Primeiramente, deve-se observar que o traço de tais matrizes são nulos como também é o da matriz γ^5 . Dessa forma, segue da identidade (2.36) as seguintes propriedades:

$$\text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 2\eta^{\mu\nu} \quad (2.37)$$

e

$$\text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5) = -2\epsilon^{\mu\nu}. \quad (2.38)$$

Para finalizar, mais uma propriedade básica das matrizes de Dirac que será utilizada posteriormente é a seguinte:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu = \square, \quad (2.39)$$

sendo $\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu$ o operador d'Alembertiano. De fato, utilizando mais uma vez a relação de Clifford (2.28), tem-se que

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu &= \frac{1}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu + \frac{1}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu \\ &= \frac{1}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu + \frac{1}{2} \gamma^\nu \gamma^\mu \partial_\nu \partial_\mu \\ &= \frac{1}{2} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \partial_\mu \partial_\nu \\ &= \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \square. \end{aligned} \quad (2.40)$$

2.2.1 Os Operadores de Projeção

Sabe-se que a representação de Dirac ψ do grupo de Lorentz é redutível e pode ser escrita em termos de duas representações bidimensionais irredutíveis, conhecidas como espinores de Weyl, como

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

Pode-se criar projetores nos espaços dos espinores de Weyl com o auxílio do operador de quiralidade γ^5 :

$$P_{\pm} \equiv \frac{1}{2}(\mathbb{1} \pm \gamma^5). \quad (2.42)$$

Com efeito, o leitor pode verificar a validade das seguintes propriedades

$$P_{\pm}^2 = P_{\pm}; \quad (2.43a)$$

$$P_+ + P_- = \mathbb{1}; \quad (2.43b)$$

$$P_{\pm}P_{\mp} = 0; \quad (2.43c)$$

como também as projeções

$$\psi_L = P_+\psi; \quad (2.44a)$$

$$\psi_R = P_-\psi. \quad (2.44b)$$

Assim, segue diretamente da identidade (2.43c) que

$$P_-\psi_L = P_+\psi_R = 0. \quad (2.45)$$

Agora, usando os resultados (2.32a) e (2.44), observa-se que os férmions de Weyl são autoestados de γ^5 com autovalores iguais a 1 e -1 , respectivamente, i.e.,

$$\gamma^5\psi_L = \psi_L; \quad (2.46a)$$

$$\gamma^5\psi_R = -\psi_R. \quad (2.46b)$$

Além disso, ψ_L é autoestado de P_+ enquanto ψ_R é autoestado de P_- , com ambos autovalores iguais a 1:

$$P_+\psi_L = P_+(P_+\psi) = P_+^2\psi = P_+\psi = \psi_L; \quad (2.47a)$$

$$P_-\psi_R = P_-(P_-\psi) = P_-^2\psi = P_-\psi = \psi_R. \quad (2.47b)$$

Por sua vez, tendo em vista a relação de anticomutação (2.32c), as partes esquerda e direita do espinor $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ são dadas, respectivamente, por

$$\bar{\psi}_L = \bar{\psi}P_-; \quad (2.48a)$$

$$\bar{\psi}_R = \bar{\psi}P_+; \quad (2.48b)$$

de modo que

$$\bar{\psi}_L\psi_L = \bar{\psi}_R\psi_R = 0; \quad (2.49a)$$

$$\bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_R = \bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_L = 0. \quad (2.49b)$$

2.3 A Anomalia de Calibre

Nesta seção, serão analisados aspectos relacionados à anomalia de calibre em uma teoria de calibre abeliana bidimensional, cuja ação típica é dada por

$$S[A_\mu, \psi, \bar{\psi}] = S_G[A_\mu] + S_M[A_\mu, \psi, \bar{\psi}], \quad (2.50)$$

em que $S_G[A_\mu]$ denota o termo cinético do campo de calibre, i.e.,

$$S_G[A_\mu] = \int d^2x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right), \quad (2.51)$$

enquanto $S_M[A_\mu, \psi, \bar{\psi}]$ representa a parte de matéria e sua interação com o campo de calibre, sendo escrita como

$$S_M[A_\mu, \psi, \bar{\psi}] = \int d^2x \bar{\psi} \not{D} \psi. \quad (2.52)$$

O operador diferencial $\not{D}$ é conhecido como operador de Dirac e, no modelo de Schwinger, ele é dado por

$$\not{D} = \not{D}_V \equiv i\not{\partial} + e\not{A}, \quad (2.53)$$

sendo e a carga elétrica do férmion. Neste modelo, ambos os férmions quirais acoplam-se ao campo de calibre na medida em que

$$\bar{\psi} \not{D}_V \psi = \bar{\psi}_L \not{D}_V \psi_L + \bar{\psi}_D \not{D}_V \psi_D. \quad (2.54)$$

Por outro lado, no chamado modelo de Schwinger quiral ou de Jackiw-Rajaraman, apenas um dos campos de Weyl acoplam-se com o campo de calibre e, neste caso, o operador de Dirac assume a forma

$$\not{D} = \not{D}_Q = i\not{\partial} + e\not{A}P_\pm. \quad (2.55)$$

Com efeito, escolhendo-se o operador com P_+ , observa-se que apenas o campo ψ_L é acoplado a A_μ :

$$\bar{\psi} \not{D}_Q \psi = \bar{\psi}_L \not{D}_Q \psi_L + \bar{\psi}_R i\not{\partial} \psi_R. \quad (2.56)$$

Pode-se mostrar que a ação do caso vetorial é invariante sob a seguinte transformação de calibre:

$$\psi(x) \longrightarrow \psi^{g_V}(x) = g_V \psi(x); \quad (2.57a)$$

$$\bar{\psi}(x) \longrightarrow \bar{\psi}^{g_V}(x) = \bar{\psi}(x)g_V^{-1}; \quad (2.57b)$$

$$A_\mu(x) \longrightarrow A_\mu^{g_V}(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x); \quad (2.57c)$$

sendo $g_V \equiv \exp(i\theta(x))$. Por sua vez, a ação do caso quiral é invariante sob uma transformação análoga mas com $g_Q \equiv \exp(i\theta(x)P_\pm)$ ao invés de g_V . Entretanto, se o método de regularização utilizado não for invariante de calibre, esta simetria não é conservada no nível quântico fazendo com que a teoria seja anômala. No formalismo das integrais funcionais, isto significa que a medida fermiônica não é invariante sob tal transformação [4], isto é,

$$d\psi^g d\bar{\psi}^g = J[A_\mu, g] d\psi d\bar{\psi}. \quad (2.58)$$

O jacobiano $J[A_\mu, g]$ depende do processo de regularização da teoria mas enquanto no caso quiral não existe nenhum processo que preserve a medida fermiônica, no caso vetorial, é possível regularizar a teoria de modo que $J[A_\mu, g] = 1$ e, por isso, diz-se que a anomalia é removível. Este é o método usualmente encontrado na literatura. No entanto, neste trabalho, o modelo de Schwinger será regularizado de modo a não preservar a medida fermiônica colocando, neste ponto, ambas as teorias em pé de igualdade.

Como a não preservação da simetria de calibre está relacionada ao processo de quantização dos férmions, é conveniente trabalhar com uma ação efetiva na qual apenas os campos fermiônicos são quantizados ao passo que o de calibre permanece como campo clássico externo. Assim, a ação efetiva é definida por

$$\exp(iW[A_\mu]) \equiv \int d\psi d\bar{\psi} \exp(iS_M[A_\mu, \psi, \bar{\psi}]). \quad (2.59)$$

Agora, realizando uma transformação de calibre (2.57c) apenas no campo A_μ , tem-se

$$\begin{aligned} \exp(iW[A_\mu^g]) &= \int d\psi d\bar{\psi} \exp(iS_M[A_\mu^g, \psi, \bar{\psi}]) \\ &= \int d\psi^g d\bar{\psi}^g \exp(iS_M[A_\mu^g, \psi^g, \bar{\psi}^g]), \end{aligned} \quad (2.60)$$

em que na segunda igualdade foi utilizado o fato dos campos fermiônicos serem variáveis de integração mudas. Assim, em virtude da expressão (2.58) e da invariância de calibre da ação, segue que

$$\exp(iW[A_\mu^g]) = \int J[A_\mu, g] d\psi d\bar{\psi} \exp(iS_M[A_\mu, \psi, \bar{\psi}]). \quad (2.61)$$

É importante notar que se for realizado um processo de regularização no qual o jacobiano é igual a 1, a expressão anterior implica em uma ação efetiva invariante de calibre,

i.e., $W[A_\mu^g] = W[A_\mu]$. Por sua vez, a partir dela, geralmente, tem-se

$$J_\mu[A_\mu, g] = \exp(iW[A_\mu^g] - iW[A_\mu]) \quad (2.62)$$

e, definindo o chamado termo de Wess-Zumino por

$$\alpha_1[A_\mu, g] \equiv W[A_\mu^g] - W[A_\mu], \quad (2.63)$$

pode-se escrever

$$J[A_\mu, g] = \exp(i\alpha_1[A_\mu, g]). \quad (2.64)$$

Dessa forma, a anomalia de calibre é definida por

$$\mathcal{A}[A_\mu] \equiv \left. \frac{\delta\alpha_1[A_\mu, g]}{\delta\theta(x)} \right|_{\theta=0} \quad (2.65)$$

de modo que, para transformações infinitesimais, levando em conta que $\alpha_1[A_\mu, 1] = 0$, o termo de Wess-Zumino pode ser expandido na seguinte série de potências funcional

$$\begin{aligned} \alpha_1[A_\mu, g] &= \alpha_1[A_\mu, 1] + \int d^2x \delta\theta(x) \left. \frac{\delta\alpha_1[A_\mu, g]}{\delta\theta(x)} \right|_{\theta=0} \\ &= \int d^2x \delta\theta(x) \mathcal{A}[A_\mu]. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Agora, em acordo com a Definição (2.63), tem-se

$$\begin{aligned} \exp(iW[A_\mu^g]) &= \exp(iW[A_\mu] + i\alpha_1[A_\mu, g]) \\ &= \exp(iW[A_\mu]) \left(1 + i \int d^2x \delta\theta(x) \mathcal{A}[A_\mu] \right). \end{aligned} \quad (2.67)$$

Por outro lado, usando a expressão explícita de $W[A_\mu^g]$, obtém-se

$$\begin{aligned} \exp(iW[A_\mu^g]) &= \int d\psi d\bar{\psi} \exp(iS_M[A_\mu^g, \psi, \bar{\psi}]) \\ &= \int d\psi d\bar{\psi} \exp(iS_M[A_\mu, \psi, \bar{\psi}]) \exp\left(-i \int d^2x \bar{\psi} (\not{\partial} \delta\theta(x)) \psi\right) \\ &= \int d\psi d\bar{\psi} \exp(iS_M[A_\mu, \psi, \bar{\psi}]) \left[1 - i \int d^2x (\partial_\mu \delta\theta(x)) j^\mu(x) \right], \end{aligned} \quad (2.68)$$

em que $j^\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x)$ é a corrente de Noether associada a transformação de calibre (2.57). Realizando uma integração por partes e desprezando o termo de superfície, a

expressão (2.68) torna-se

$$\exp(iW[A_\mu^g]) = \exp(iW[A_\mu]) + i \int d^2x \delta\theta(x) \int d\psi d\bar{\psi} \partial_\mu j^\mu(x) \exp(iS_M[A_\mu, \psi, \bar{\psi}]). \quad (2.69)$$

Portanto, substituindo (2.69) em (2.67), devido a arbitrariedade de $\delta\theta(x)$, conclui-se:

$$\mathcal{A}[A_\mu] = \frac{\langle 0 | (\partial_\mu j^\mu(x)) | 0 \rangle_{A_\mu}}{\langle 0 | 0 \rangle_{A_\mu}}. \quad (2.70)$$

O rótulo “ A_μ ” colocado nos valores esperados indica que o campo de calibre não é quantizado. Esta expressão mostra claramente a não conservação do operador de corrente no caso quântico devido à anomalia $\mathcal{A}[A_\mu]$. Se o Jacobiano for igual a 1, segue da expressão (2.64) que $\alpha_1 \equiv 0$ e, portanto, em acordo com a expressão (2.65), tem-se que $\mathcal{A} \equiv 0$. Consequentemente, neste caso, há conservação da corrente no nível quântico.

2.3.1 O Cancelamento da Anomalia de Calibre

Como foi visto anteriormente, a anomalia surge efetivamente como consequência da quantização dos férmions, com o campo de calibre permanecendo clássico. A fim de finalizar esta seção, será analisado o comportamento da anomalia na teoria completamente quantizada, isto é, em que a integração funcional é realizada nos campos fermiônicos e de calibre. Mais especificamente, será considerada a inserção da anomalia em funções de correlação com operadores O_i invariantes de calibre. Neste contexto, o funcional gerador é dado por

$$Z[\lambda_i] = \int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} \exp \left(iS[A_\mu, \psi, \bar{\psi}] + i \int d^2x \lambda_i O_i[A_\mu, \psi, \bar{\psi}] \right). \quad (2.71)$$

Fazendo a transformação de calibre (2.57c) apenas no campo A_μ , como tanto a ação como os operadores são invariantes de calibre, em vista da invariância da medida do campo bosônico [16] e da expressão (2.58) para a medida fermiônica, o funcional gerador fica sendo dado por

$$Z[\lambda_i] = \int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} \exp \left(iS[A_\mu, \psi, \bar{\psi}] + i \int d^2x \lambda_i O_i[A_\mu, \psi, \bar{\psi}] - i\alpha_1[A_\mu, g^{-1}] \right). \quad (2.72)$$

Infinitesimalmente, como

$$\alpha_1[A_\mu, -\delta\theta] = - \int d^2x \delta\theta(x) \mathcal{A}[A_\mu], \quad (2.73)$$

a equação (2.72) torna-se

$$\begin{aligned} Z[\lambda_i] &= \int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} \exp \left(iS[A_\mu, \psi, \bar{\psi}] + i \int d^2x \lambda_i O_i[A_\mu, \psi, \bar{\psi}] \right) e^{(i \int d^2x \delta\theta(x) \mathcal{A}[A_\mu])} \\ &= Z[\lambda_i] + i \int d^2x \delta\theta(x) \int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} \mathcal{A}[A_\mu] e^{(iS[A_\mu, \psi, \bar{\psi}] + i \int d^2x \lambda_i O_i[A_\mu, \psi, \bar{\psi}])} \end{aligned} \quad (2.74)$$

de modo que

$$\int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} \mathcal{A}[A_\mu] \exp \left(iS[A_\mu, \psi, \bar{\psi}] + i \int d^2x \lambda_i O_i[A_\mu, \psi, \bar{\psi}] \right) = 0. \quad (2.75)$$

Daí, conclui-se que a inserção da anomalia de calibre em funções de correlação compostas de operadores invariantes de calibre arbitrários é nula:

$$\langle 0 | T[\mathcal{A}(A_\mu) O_1(x_1) \dots O_n(x_n)] | 0 \rangle = 0. \quad (2.76)$$

Em particular,

$$\langle 0 | \mathcal{A}[A_\mu] | 0 \rangle = 0. \quad (2.77)$$

Este resultado abre a possibilidade da anomalia ser nula no subespaço de Hilbert formado pelos estados físicos. Entretanto, quando os operadores não são invariantes de calibre, deve-se obter algum resultado não-nulo para que a teoria não corra o risco de ser trivial.

Capítulo 3

O Modelo de Schwinger

3.1 Conceitos Iniciais

Como foi visto na Seção 2.3, a eletrodinâmica em $(1 + 1)$ -dimensões que descreve férmions de Dirac sem massa acoplados minimamente com um campo de calibre, também conhecida como modelo de Schwinger, é dada pela seguinte ação

$$S[A_\mu, \bar{\psi}, \psi] = \int d^2x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} \not{D} \psi \right], \quad (3.1)$$

sendo o operador de Dirac $\not{D}$ definido por

$$\not{D} \equiv i\not{\partial} + e\not{A}. \quad (3.2)$$

Neste caso, realizando a análise dimensional da parte livre da ação, observa-se que os campos possuem as seguintes dimensões naturais

$$[A_\mu] = 0 \quad \text{e} \quad [\bar{\psi}] = [\psi] = \frac{1}{2}, \quad (3.3)$$

enquanto a constante de acoplamento eletromagnética, diferentemente do caso quadridimensional, possui dimensão $[e] = 1$. De acordo com as equações de Euler-Lagrange (2.5), as equações de movimento para os campos $\bar{\psi}$, ψ e A_μ são dadas, respectivamente, por

$$(i\not{\partial} + e\not{A}) \psi = 0; \quad (3.4a)$$

$$\bar{\psi} (i \overleftarrow{\not{\partial}} - e\not{A}) = 0; \quad (3.4b)$$

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \equiv ej^\mu. \quad (3.4c)$$

Deve-se destacar que a corrente vetorial $j^\mu \equiv \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ é conservada, isto é, $\partial_\mu j^\mu = 0$. De fato, ela é a corrente de Noether associada à invariância da ação sob a transformação (2.57) quando considerado o caso particular em que θ é uma constante.

Além disso, como os férmions descritos pelo modelo não possuem massa, a ação (3.1) também é invariante sob a transformação quiral global, que atua da seguinte maneira¹:

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{i\beta\gamma^5}\psi(x); \quad (3.5a)$$

$$\bar{\psi}(x) \longrightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)e^{i\beta\gamma^5}; \quad (3.5b)$$

em que β é alguma contante. A corrente de Noether associada a esta transformação,

$$j_5^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi, \quad (3.6)$$

é conhecida como corrente axial. No entanto, em uma teoria que contém férmions massivos, esta corrente não é conservada. Em virtude da identidade (2.33), as correntes vetorial e axial são conectadas pelo tensor de Levi-Civita como

$$j^\mu = \epsilon^{\mu\nu}j_\nu^5; \quad (3.7a)$$

$$j_5^\mu = \epsilon^{\mu\nu}j_\nu. \quad (3.7b)$$

É importante enfatizar que, em $(1+1)$ -dimensões, o tensor de Maxwell $F^{\mu\nu}$ possui apenas uma componente independente. Assim, o campo elétrico associado ao fóton é definido, de forma análoga ao caso quadridimensional², por $E \equiv F^{10}$ mas não é possível definir o campo magnético. Com efeito, naquele caso, o campo magnético é definido por meio do tensor de Levi-Civita nos índices espaciais – isto é, $B_i \equiv -\epsilon_{ijk}\partial_j A_k$ – mas, por ser totalmente antissimétrico, tal objeto é identicamente nulo em apenas uma dimensão espacial. Além disso, não há identidades de Bianchi já que o dual de Hodge do tensor de Maxwell também é identicamente nulo. Dessa forma, denotando $J^0 \equiv \rho$ e $J^1 \equiv J$, pode-se escrever as equações de Maxwell (3.4c) da seguinte forma:

$$\partial_x E = -e\rho; \quad (3.8a)$$

$$\partial_t E = eJ. \quad (3.8b)$$

3.2 A Ação Efetiva

O funcional gerador das funções de Green do modelo de Schwinger é dado por

$$Z[J_\mu, \bar{\eta}, \eta] = \frac{1}{N} \int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} \exp \left[iS[A_\mu, \psi, \bar{\psi}] + i \int d^2x (J^\mu A_\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta) \right], \quad (3.9)$$

sendo $N = N_{A_\mu} N_\psi$ o fator de normalização que garante que $Z[0, 0, 0] = 1$. A fim de avaliar a parte fermiônica da integral que aparece na expressão do funcional gerador acima, será

¹Neste caso, o espinor de mão esquerda ψ_L se transforma como $\psi_L \rightarrow e^{i\beta}\psi_L$ enquanto $\psi_R \rightarrow e^{-i\beta}\psi_R$.

²Em quatro dimensões espaço-temporais, define-se o campo elétrico como $E^i \equiv F^{i0}$.

feita a seguinte transformação de translação

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = \psi(x) - \int d^2y G(A_\mu; x, y) \eta(y); \quad (3.10a)$$

$$\bar{\psi}(x) \longrightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x) - \int d^2y \bar{\eta}(y) G(A_\mu; y, x); \quad (3.10b)$$

em que $G(A_\mu; x, y)$ denota a função de Green do operador de Dirac e, conseqüentemente, satisfaz a relação

$$\not{D}G(A_\mu; x, y) = G(A_\mu; x, y)\not{D} = \delta^{(2)}(x - y). \quad (3.11)$$

Dessa forma, usando a identidade (3.11), a ação pode ser escrita após tal translação como

$$\begin{aligned} S[A_\mu, \psi', \bar{\psi}'] &= \int d^2x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi}' \not{D} \psi' \right) \\ &= \int d^2x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} \not{D} \psi - \int d^2y' \bar{\psi} \not{D} G(A_\mu; x, y') \eta(y') \right. \\ &\quad \left. - \int d^2y \bar{\eta}(y) G(A_\mu; y, x) \not{D} \psi + \int d^2y d^2y' \bar{\eta}(y) G(A_\mu; y, x) \not{D} G(A_\mu; x, y') \eta(y') \right] \\ &= \int d^2x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} \not{D} \psi - \bar{\psi} \eta - \bar{\eta} \psi \right) \\ &\quad + \int d^2x d^2y \bar{\eta}(x) G(A_\mu; x, y) \eta(y) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Analogamente, o termo das correntes se transforma da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \int d^2x (J^\mu A_\mu + \bar{\eta} \psi' + \bar{\psi}' \eta) &= \int d^2x (J^\mu A_\mu + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta) \\ &\quad - 2 \int d^2x d^2y \bar{\eta}(x) G(A_\mu; x, y) \eta(y). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Assim, tendo em vista que a medida fermiônica é invariante sob qualquer translação, após a Transformação (3.10), o funcional gerador fica sendo dado por

$$\begin{aligned} Z[J_\mu, \bar{\eta}, \eta] &= \frac{1}{N} \int dA_\mu d\psi' d\bar{\psi}' \exp \left[iS[A_\mu, \psi', \bar{\psi}'] + i \int d^2x (J^\mu A_\mu + \bar{\eta} \psi' + \bar{\psi}' \eta) \right] \\ &= \frac{1}{N} \int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} \exp \left[i \int d^2x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + J^\mu A_\mu + \bar{\psi} \not{D} \psi \right) \right. \\ &\quad \left. - i \int d^2x d^2y \bar{\eta}(x) G(A_\mu; x, y) \eta(y) \right]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Agora, define-se a ação efetiva $W[A_\mu]$ por

$$\frac{1}{N_\psi} \int d\psi d\bar{\psi} \exp \left(i \int d^2x \bar{\psi} \not{D} \psi \right) = \frac{1}{N_\psi} \det(\not{D}) \equiv \exp(iW[A_\mu]) \quad (3.15)$$

e, com o intuito de remover as singularidades inerentes ao cálculo do determinante, escolhe-se o fator de normalização N_ψ como

$$N_\psi = \det\{i\cancel{\partial}\} \quad (3.16)$$

de modo que

$$\exp(iW[A_\mu]) = \frac{\det \cancel{D}}{\det(i\cancel{\partial})}. \quad (3.17)$$

Destarte, finalmente, obtém-se a seguinte expressão para o funcional gerador

$$Z[J_\mu, \bar{\eta}, \eta] = \frac{1}{N_{A_\mu}} \int dA_\mu \exp \left[i \int d^2x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + J^\mu A_\mu \right) + iW[A_\mu] + \right. \\ \left. -i \int d^2x d^2y \bar{\eta}(x) G(A_\mu; x, y) \eta(y) \right]. \quad (3.18)$$

Portanto, após a translação (3.10), pode-se ver em (3.18) que os efeitos dinâmicos dos férmions foram incorporados à função de Green $G(A_\mu; x, y)$ e à ação efetiva $W[A_\mu]$. Assim, tal ação é usada quando se deseja estudar problemas à luz apenas da quantização dos férmions. Por sua vez, para conhecê-la, é preciso encontrar $G(A_\mu; x, y)$. Como veremos a seguir, podemos obtê-la exatamente em $(1+1)$ -dimensões.

3.2.1 Função de Green Fermiônica

Nesta subseção, será realizado o cálculo da função de dois pontos fermiônica $G(A_\mu; x, y)$. Para isto, propõe-se o *ansatz*

$$G(A_\mu; x, y) = \exp[i(\phi(x) - \phi(y))] G_F(x - y), \quad (3.19)$$

sendo ϕ uma função e $G_F(x - y)$ a inversa do operador de Dirac $\cancel{D}$ quando $A_\mu = 0$, i.e.,

$$i\cancel{\partial} G_F(x - y) = \delta^{(2)}(x - y). \quad (3.20)$$

Primeiramente, observa-se que ϕ obedece a seguinte equação diferencial

$$\square \phi(x) - e (\eta^{\mu\nu} - \epsilon^{\mu\nu} \gamma^5) \partial_\mu A_\nu(x) = 0. \quad (3.21)$$

Com efeito, substituindo o *ansatz* (3.19) em (3.11), obtém-se

$$(i\cancel{\partial}^x + e\cancel{A}(x)) \exp[i(\phi(x) - \phi(y))] G_F(x - y) = \delta^{(2)}(x - y). \quad (3.22)$$

Agora, usando a regra do produto e a equação (3.20), o lado esquerdo da equação

acima pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
& (i\cancel{\partial}^x + e\cancel{A}(x)) e^{i[\phi(x)-\phi(y)]} G_F(x-y) = \\
& = -\cancel{\partial}^x \phi(x) e^{i[\phi(x)-\phi(y)]} G_F(x-y) + e^{i[\phi(x)-\phi(y)]} i\cancel{\partial}^x G_F(x-y) + e\cancel{A}(x) e^{i[\phi(x)-\phi(y)]} G_F(x-y) \\
& = [-\cancel{\partial}^x \phi(x) + e\cancel{A}(x)] G(A_\mu; x, y) + \delta^{(2)}(x-y),
\end{aligned} \tag{3.23}$$

de modo que, substituindo (3.23) em (3.22), tem-se

$$[\cancel{\partial}^x \phi(x) - e\cancel{A}(x)] G(A_\mu; x, y) = 0. \tag{3.24}$$

Consequentemente, vale a seguinte equação

$$\gamma^\nu \partial_\nu [\gamma^\mu \partial_\mu \phi(x) - e\gamma^\mu A_\mu(x)] = 0 \tag{3.25}$$

Por fim, substituindo as identidades (2.36) e (2.39) em (3.25), obtém-se a equação (3.21). Mais ainda, denotando $\tilde{\partial}_\mu \equiv \epsilon_{\mu\nu} \partial^\nu$, ela pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
\Box \phi(x) &= e (\eta_{\mu\nu} - \epsilon_{\mu\nu} \gamma^5) \partial^\mu A^\nu(x) \\
&= e \left(\partial_\nu + \gamma^5 \tilde{\partial}_\nu \right) A^\nu(x).
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Assim, o leitor pode verificar que a expressão

$$\phi(x) = e \int d^2 z D_F(x-z) \left(\partial_\mu^z + \gamma^5 \tilde{\partial}_\mu^z \right) A^\mu(z), \tag{3.27}$$

é solução da equação (3.26). Aqui, $D_F(x-y)$ representa a função de Green para o d'Alembertiano. No caso bidimensional, ela é dada por

$$D_F(x-y) = - \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2 + i\varepsilon}. \tag{3.28}$$

No entanto, usando as seguintes identidades,

$$\frac{1}{k^2 + i\varepsilon} = -i \int_0^\infty dt e^{it(k^2 + i\varepsilon)}, \quad \varepsilon > 0 \tag{3.29}$$

e

$$\int e^{i[k(x-y) + tk^2]} d^2 k = \frac{\pi}{t} e^{-\frac{i(x-y)^2}{4t}}, \tag{3.30}$$

a expressão (3.28) torna-se

$$D_F(x-y) = \frac{i}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dt e^{-t\varepsilon} \int d^2 k e^{i[k(x-y) + tk^2]}$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dt e^{-t\varepsilon} \left(\frac{\pi}{t} e^{-\frac{i(x-y)^2}{4t}} \right). \quad (3.31)$$

Dessa maneira, tomando o limite $\varepsilon \rightarrow 0$, conclui-se que

$$D_F(x-y) = \frac{i}{4\pi} \int_0^\infty \frac{dt}{t} \exp \left[-\frac{i(x-y)^2}{4t} \right]. \quad (3.32)$$

Nota-se que o propagador $D_F(x-y)$ é mal definido devido à singularidade que o integrando possui em $t = 0$, entretanto, tal problema não afeta as derivadas do propagador [12]. Para continuar o cálculo de $G(A_\mu; x, y)$, deve-se agora avaliar o propagador fermiônico livre $G_F(x-y)$. Em termos de $D_F(x-y)$, ele é dado por

$$G_F(x-y) = -i\cancel{\partial}^x D_F(x-y). \quad (3.33)$$

De fato, utilizando a identidade (2.39), verifica-se que esta expressão satisfaz a equação (3.20). Dessa forma, substituindo (3.32) em (3.33), obtém-se

$$\begin{aligned} G_F(x-y) &= \frac{1}{4\pi} \gamma^\mu \int_0^\infty \frac{dt}{t} \partial_\mu^x e^{-\frac{i(x-y)^2}{4t}} \\ &= \frac{-i}{8\pi} \gamma^\mu (x-y)_\mu \int_0^\infty \frac{dt}{t^2} e^{-\frac{i(x-y)^2}{4t}}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Agora, fazendo a mudança de variável $s = \frac{1}{t}$, conclui-se que

$$\begin{aligned} G_F(x-y) &= \frac{i}{8\pi} \gamma^\mu (x-y)_\mu \int_0^\infty ds e^{-\frac{is(x-y)^2}{4}} \\ &= \frac{i}{8\pi} \gamma^\mu (x-y)_\mu \left(\frac{4}{-i(x-y)^2} \right) \\ &= -\frac{\gamma^\mu (x-y)_\mu}{2\pi (x-y)^2}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Portanto, tendo em vista as equações (3.27) e (3.35), o ansatz (3.19) se torna

$$G(A_\mu; x, y) = \exp \left[ie \int d^2z S_\mu(z; x, y) A^\mu(z) \right] \left(-\frac{\gamma^\mu (x-y)_\mu}{2\pi (x-y)^2} \right), \quad (3.36)$$

onde definimos o operador S_μ como

$$S_\mu(z; x, y) \equiv [D_F(x-z) - D_F(y-z)] \left(\partial_\mu^z + \gamma^5 \tilde{\partial}_\mu^z \right). \quad (3.37)$$

Observa-se que $G_F(x-y)$ e, conseqüentemente, $G(A_\mu, x, y)$ são singulares quando $x = y$, o que acarretará divergências na teoria, como será visto a seguir.

3.2.2 Cálculo da Ação Efetiva

Conhecendo-se a função de Green fermiônica $G(A_\mu, x, y)$, pode-se calcular o determinante do operador $\mathcal{D}$. Formalmente, tem-se

$$\frac{d}{de} \ln(\det \mathcal{D}) = \frac{d}{de} \text{Tr}(\ln \mathcal{D}) = \text{Tr} \left(\frac{d}{de} \ln \mathcal{D} \right) = \text{Tr} \left(\mathcal{D}^{-1} \frac{d\mathcal{D}}{de} \right). \quad (3.38)$$

Por sua vez, como $\mathcal{D}^{-1} = G(A_\mu; x, y)$ e $\frac{d\mathcal{D}}{de} = \gamma^\mu A_\mu(x)$, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{de} \ln(\det \mathcal{D}) &= \text{Tr}[G(A_\mu; x, y) \gamma^\mu A_\mu(x)] \\ &= \int d^2x \text{tr}[G(A_\mu; x, x) \gamma_\mu] A^\mu(x), \end{aligned} \quad (3.39)$$

em que o traço remanescente deve ser feito sobre os índices espinoriais. A integral que aparece na expressão acima é divergente devido ao fato da função de Green $G(A_\mu; x, x)$ ser calculada no mesmo ponto. Assim, para contornar este problema, será realizada a regularização via separação de pontos. Para isso, toma-se o limite simétrico do traço:

$$\begin{aligned} \text{tr}[G(A_\mu; x, x) \gamma_\mu] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2} \text{tr} \left[G \left(A_\mu; x + \frac{\varepsilon}{2}, x - \frac{\varepsilon}{2} \right) \gamma_\mu \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \text{tr} \left[G \left(A_\mu; x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\varepsilon}{2} \right) \gamma_\mu \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Nesta regularização, a definição do traço é ambígua já que ele pode ser dado a menos de um operador que tenda à identidade quando $x \rightarrow y$. Dessa forma, tomar-se-á

$$\text{tr}[G(A_\mu; x, y) \gamma_\mu] \longrightarrow \text{tr} \left[G(A_\mu, x, y) \gamma_\mu \exp \left(iea \int_x^y A^\nu dz_\nu \right) \right], \quad (3.41)$$

sendo a um parâmetro arbitrário. Antes de mais nada, deve-se observar que o novo traço é formalmente invariante de calibre quando $a = 1$ e, por isso, este é o valor normalmente utilizado na literatura. Com efeito, sob a transformação de calibre

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu + e^{-1} \partial_\mu \Lambda, \quad (3.42)$$

o traço (3.41) torna-se

$$\begin{aligned} &\text{tr} \left[G(A'_\mu, x, y) \gamma_\mu \exp \left(iea \int_x^y A'^\nu dz_\nu \right) \right] = \\ &= \text{tr} \left\{ \exp \left[ie \int d^2z S_\mu(z; x, y) A'^\mu(z) \right] G_F(x - y) \gamma_\mu \exp \left(iea \int_x^y A'^\nu dz_\nu \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{tr} \left\{ G(A_\mu; x, y) \gamma_\mu \exp \left[iea \int_x^y A^\nu dz_\nu \right] \exp \left[i \int d^2 z S_\mu(z; x, y) \partial^\mu \Lambda(z) \right] \times \right. \\
&\quad \left. \times \exp \left[ia \int_x^y \partial^\nu \Lambda dz_\nu \right] \right\}, \tag{3.43}
\end{aligned}$$

tendo sido utilizada a expressão (3.36). Mas, como temos³

$$\begin{aligned}
&\int d^2 z S_\mu(z; x, y) \partial^\mu \Lambda(z) = \int d^2 z [D_F(x - z) - D_F(y - z)] \left(\partial_\mu + \gamma^5 \tilde{\partial}_\mu \right) \partial^\mu \Lambda(z) \\
&= \int d^2 z [D_F(x - z) - D_F(y - z)] \left(\square + \gamma^5 \epsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \partial^\mu \right) \Lambda(z) = \Lambda(x) - \Lambda(y) \tag{3.44}
\end{aligned}$$

e

$$\int_x^y \partial^\nu \Lambda dz_\nu = \Lambda(y) - \Lambda(x), \tag{3.45}$$

substituindo (3.44) e (3.45) em (3.43), chegamos ao seguinte resultado:

$$\text{tr} \left[G(A'_\mu; x, y) \gamma_\mu e^{iea \int_x^y A'^\nu dz_\nu} \right] = \text{tr} \left\{ G(A_\mu; x, y) \gamma_\mu e^{iea \int_x^y A^\nu dz_\nu} e^{i(1-a)(\Lambda(x)-\Lambda(y))} \right\} \tag{3.46}$$

Dessa forma, quando $a = 1$, segue da expressão anterior que o novo traço permanece invariante sob uma transformação de calibre. Agora, redefinindo o traço como em (3.41) e aplicando o limite simétrico, a expressão (3.39) torna-se

$$\begin{aligned}
\frac{d}{de} \ln(\det \mathcal{D}) &= \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int d^2 x \left\{ \text{tr} \left[G \left(A_\mu; x + \frac{\varepsilon}{2}, x - \frac{\varepsilon}{2} \right) \gamma_\mu \exp \left(iea \int_{x+\frac{\varepsilon}{2}}^{x-\frac{\varepsilon}{2}} A^\nu dz_\nu \right) \right] A^\mu(x) \right. \\
&\quad \left. + \text{tr} \left[G \left(A_\mu; x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\varepsilon}{2} \right) \gamma_\mu \exp \left(iea \int_{x-\frac{\varepsilon}{2}}^{x+\frac{\varepsilon}{2}} A^\nu dz_\nu \right) \right] A^\mu(x) \right\}. \tag{3.47}
\end{aligned}$$

Por sua vez, como

$$D_F \left(x + \frac{\varepsilon}{2} - z \right) - D_F \left(x - \frac{\varepsilon}{2} - z \right) \approx \varepsilon^\alpha \partial_\alpha^x D_F(x - z),$$

em primeira ordem em ε , tem-se

$$S_\mu \left(z; x + \frac{\varepsilon}{2}, x - \frac{\varepsilon}{2} \right) \approx \varepsilon^\alpha \partial_\alpha^x D_F(x - z) \left(\partial_\mu^z + \gamma^5 \tilde{\partial}_\mu^z \right).$$

Assim, substituindo a expressão anterior em (3.36), obtém-se

$$\begin{aligned}
G \left(A_\mu; x + \frac{\varepsilon}{2}, x - \frac{\varepsilon}{2} \right) &\approx \exp \left[ie \int d^2 z \varepsilon^\alpha \partial_\alpha^x D_F(x - z) \left(\partial_\mu^z + \gamma^5 \tilde{\partial}_\mu^z \right) A^\mu(z) \right] \left(\frac{-\gamma^\beta \varepsilon_\beta}{2\pi \varepsilon^2} \right) \\
&\approx \left[1 + ie \int d^2 z \varepsilon^\alpha \partial_\alpha^x D_F(x - z) \left(\partial_\mu^z + \gamma^5 \tilde{\partial}_\mu^z \right) A^\mu(z) \right] \left(\frac{-\gamma^\beta \varepsilon_\beta}{2\pi \varepsilon^2} \right). \tag{3.48}
\end{aligned}$$

³Na primeira igualdade foi usada a expressão (3.37).

Além disso, também em primeira ordem em ε , pode-se escrever

$$\exp \left(iea \int_{x+\frac{\varepsilon}{2}}^{x-\frac{\varepsilon}{2}} A^\nu dz_\nu \right) \approx 1 - iea\varepsilon_\gamma A^\gamma(x). \quad (3.49)$$

Agora, substituindo as equações (3.48) e (3.49) em (3.47) e fazendo a distributiva⁴, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{de} \ln(\det \mathcal{D}) &= \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int d^2x \operatorname{tr} \left\{ \left(\frac{-\gamma^\beta \varepsilon_\beta}{2\pi\varepsilon^2} \right) \gamma_\mu + \left(\frac{-\gamma^\beta \varepsilon_\beta}{2\pi\varepsilon^2} \right) \gamma_\mu [-iea\varepsilon_\gamma A^\gamma(x)] + \right. \\ &\quad + \left[ie \int d^2z \varepsilon^\alpha \partial_\alpha^x D_F(x-z) \left(\partial_\nu^z + \gamma^5 \tilde{\partial}_\nu^z \right) A^\nu(z) \right] \left(\frac{-\gamma^\beta \varepsilon_\beta}{2\pi\varepsilon^2} \right) \gamma_\mu \Big\} A^\mu(x) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int d^2x \operatorname{tr} \left\{ \left(\frac{\gamma^\beta \varepsilon_\beta}{2\pi\varepsilon^2} \right) \gamma_\mu + \left(\frac{\gamma^\beta \varepsilon_\beta}{2\pi\varepsilon^2} \right) \gamma_\mu [iea\varepsilon_\gamma A^\gamma(x)] + \right. \\ &\quad + \left[-ie \int d^2z \varepsilon^\alpha \partial_\alpha^x D_F(x-z) \left(\partial_\nu^z + \gamma^5 \tilde{\partial}_\nu^z \right) A^\nu(z) \right] \left(\frac{\gamma^\beta \varepsilon_\beta}{2\pi\varepsilon^2} \right) \gamma_\mu \Big\} A^\mu(x) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int d^2x \left\{ \frac{iea\varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma}{2\pi\varepsilon^2} \operatorname{tr}(\gamma^\beta \gamma^\mu) A^\gamma(x) + \right. \\ &\quad \left. - \frac{ie\varepsilon_\beta \varepsilon^\alpha}{2\pi\varepsilon^2} \int d^2z \partial_\alpha^x D_F(x-z) \left[\operatorname{tr}(\gamma^\beta \gamma^\mu) \partial_\nu^z + \operatorname{tr}(\gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^5) \tilde{\partial}_\nu^z \right] A^\nu(z) \right\} A_\mu(x) \\ &= \frac{ie}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int d^2x A_\mu(x) \left\{ \frac{a\varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma}{\varepsilon^2} \eta^{\beta\mu} A^\gamma(x) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\varepsilon_\beta \varepsilon^\alpha}{\varepsilon^2} \int d^2z \partial_\alpha^x D_F(x-z) \left[\eta^{\beta\mu} \partial_\nu^z - \epsilon^{\beta\mu} \tilde{\partial}_\nu^z \right] A^\nu(z) \right\}, \quad (3.50) \end{aligned}$$

em que na última igualdade foram utilizadas as identidades (2.37) e (2.38). É importante notar também que o termo divergente foi cancelado devido à simetrização do limite. Por sua vez, usando a identidade $\varepsilon^\mu \varepsilon^\nu = \frac{1}{2} \varepsilon^2 \eta^{\mu\nu}$, a expressão acima pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \frac{d}{de} \ln(\det \mathcal{D}) &= \\ &= \frac{ie}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int d^2x A_\mu(x) \left\{ \frac{a\eta_{\beta\gamma} \eta^{\beta\mu}}{2} A^\gamma(x) - \frac{\eta_{\beta\rho} \eta^{\rho\alpha}}{2} \int d^2z \partial_\alpha^x D_F(x-z) \left[\eta^{\beta\mu} \partial_\nu^z - \epsilon^{\beta\mu} \tilde{\partial}_\nu^z \right] A^\nu(z) \right\} \\ &= \frac{ie}{2\pi} \int d^2x A_\mu(x) \left\{ aA^\mu(x) - \int d^2z \partial_\alpha^x D_F(x-z) \left[\eta^{\alpha\mu} \partial_\nu^z - \epsilon^{\alpha\mu} \tilde{\partial}_\nu^z \right] A^\nu(z) \right\} \\ &= \frac{ie}{2\pi} \int d^2x A_\mu(x) \left[a\eta^{\mu\nu} A_\nu(x) - \int d^2z \partial_\alpha^x D_F(x-z) \partial_z^\nu A_\nu(z) + \right. \\ &\quad \left. + \epsilon^{\alpha\mu} \epsilon^{\nu\beta} \int d^2z \partial_\alpha^x D_F(x-z) \partial_\beta^z A_\nu(z) \right]. \quad (3.51) \end{aligned}$$

⁴O quarto termo já foi desconsiderado na medida em que ele é linear em ε e, portanto, tende a zero quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Integrando por partes, o segundo termo da expressão anterior pode ser reescrito como⁵

$$\begin{aligned} \int d^2 z \partial_x^\mu D_F(x-z) \partial_z^\nu A_\nu(z) &= - \int d^2 z \partial_z^\mu D_F(x-z) \partial_z^\nu A_\nu(z) \\ &= \int d^2 z D_F(x-z) \partial_z^\mu \partial_z^\nu A_\nu(z) \equiv \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} A_\nu(x). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Usando a identidade $\epsilon^{\alpha\mu} \epsilon^{\nu\beta} = \eta^{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu} - \eta^{\alpha\nu} \eta^{\mu\beta}$, obtemos para o terceiro termo:

$$\epsilon^{\alpha\mu} \epsilon^{\nu\beta} \frac{\partial_\alpha \partial_\beta}{\square} A_\nu(x) = (\eta^{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu} - \eta^{\alpha\nu} \eta^{\mu\beta}) \frac{\partial_\alpha \partial_\beta}{\square} A_\nu(x) = \left(\eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} \right) A_\nu(x). \quad (3.53)$$

Assim, substituindo as expressões (3.52) e (3.53) em (3.51), tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{d}{de} \ln(\det \not{D}) &= \frac{ie}{2\pi} \int d^2 x A_\mu(x) \left[a \eta^{\mu\nu} A_\nu(x) - \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} A_\nu(x) + \left(\eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} \right) A_\nu(x) \right] \\ &= \frac{ie}{2\pi} \int d^2 x A_\mu(x) \left[(a+1) \eta^{\mu\nu} - 2 \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} \right] A_\nu(x). \end{aligned} \quad (3.54)$$

Por fim, integrando em e , obtém-se

$$\begin{aligned} \int_0^e de \left[\frac{d}{de} \ln(\det \not{D}) \right] &= \ln(\det \not{D})|_0^e = \ln \left(\frac{\det \not{D}}{\det(i\not{\partial})} \right) = iW[A_\mu] \\ &= \frac{ie^2}{2\pi} \int d^2 x A_\mu(x) \left[\frac{1}{2}(a+1) \eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} \right] A_\nu(x). \end{aligned} \quad (3.55)$$

Portanto, a ação efetiva da teoria de Schwinger é dada por

$$W[A_\mu] = \int d^2 x \frac{1}{2} A_\mu(x) \left[m^2 \eta^{\mu\nu} - 2\lambda \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} \right] A_\nu(x), \quad (3.56)$$

com

$$\lambda \equiv \frac{e^2}{2\pi} \quad \text{e} \quad m^2 \equiv \lambda(a+1). \quad (3.57)$$

Pode-se verificar que a ação efetiva não é invariante de calibre quando $a \neq 1$. Entretanto, a teoria é consistente e unitária, da mesma forma que ocorre para o modelo de Jackiw-Rajaraman. Por outro lado, para que a teoria não contenha táquions, exige-se que $a \geq -1$.

⁵O segundo e o terceiro termos possuem estruturas de derivadas iguais de modo que este pode ser reescrito de maneira semelhante.

3.3 Análise do Campo de Calibre

O integrando do funcional gerador (3.18), depois de uma transformação de calibre, pode ser escrito na forma quadrática em A_μ . Com efeito, podemos reescrever

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\
&= -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\
&= -\frac{1}{2}\partial_\mu[A_\nu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)] + \frac{1}{2}A_\nu(\square A^\nu - \partial_\mu \partial^\mu A^\mu) \\
&= -\frac{1}{2}\partial_\mu[A_\nu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)] + \frac{1}{2}A_\mu(\square \eta^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu)A_\nu, \tag{3.58}
\end{aligned}$$

desprezando termos de superfície na ação, tem-se que

$$\begin{aligned}
\int d^2x \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \right) + W[A_\mu] &= \int d^2x \frac{1}{2}A_\mu \left[(\square + m^2) \eta^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu - 2\lambda \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} \right] A_\nu \\
&\equiv \int d^2x \frac{1}{2}A_\mu \Omega^{\mu\nu} A_\nu, \tag{3.59}
\end{aligned}$$

sendo o operador $\Omega^{\mu\nu}$ definido por

$$\Omega^{\mu\nu} \equiv (\square + m^2) \eta^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu - 2\lambda \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square}. \tag{3.60}$$

Assim, a fim de avaliar a integral funcional em A_μ , realiza-se a seguinte transformação

$$A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \int d^2y (\Omega^{-1})_{\mu\nu}(x, y) J^\nu(y), \tag{3.61}$$

em que $(\Omega^{-1})_{\mu\nu}$ é a inversa do operador $\Omega^{\mu\nu}(x, y) \equiv \Omega^{\mu\nu} \delta^{(2)}(x - y)$. Isso significa que

$$\int d^2z (\Omega^{-1})_{\mu\rho}(x, z) \Omega^{\rho\nu}(z, y) = \delta_\mu^\nu \delta^{(2)}(x - y). \tag{3.62}$$

Portanto, levando em consideração a expressão (3.59) e que a medida é invariante sob translações, após a transformação (3.61) e algumas manipulações algébricas, o funcional gerador (3.18) assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
Z[J_\mu, \bar{\eta}, \eta] &= \\
&= \frac{1}{N_{A_\mu}} \int dA'_\mu \exp \left[i \int d^2x \left(\frac{1}{2} A'_\mu \Omega^{\mu\nu} A'_\nu + J^\mu A'_\mu \right) - i \int d^2x d^2y \bar{\eta}(x) G(A'_\mu; x, y) \eta(y) \right] \\
&= \frac{1}{N_{A_\mu}} \int dA_\mu \exp \left\{ i \left[\int d^2x \frac{1}{2} A_\mu \Omega^{\mu\nu} A_\nu - \frac{1}{2} \int d^2x d^2y' A_\mu \Omega^{\mu\nu} (\Omega^{-1})_{\nu\beta}(x, y') J^\beta(y') + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \int d^2x d^2y (\Omega^{-1})_{\mu\alpha}(x, y) J^\alpha(y) \Omega^{\mu\nu} A_\nu + \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int d^2x d^2y d^2y' (\Omega^{-1})_{\mu\alpha}(x, y) J^\alpha(y) \Omega^{\mu\nu}(\Omega^{-1})_{\nu\beta}(x, y') J^\beta(y') + \int d^2x J^\mu A_\mu + \\
& - \int d^2x d^2y J^\mu(x) (\Omega^{-1})_{\mu\nu}(x, y) J^\nu(y) - \int d^2x d^2y \bar{\eta}(x) G(A'_\mu; x, y) \eta(y) \Big] \Big\}. \quad (3.63)
\end{aligned}$$

Agora, usando a delta de Dirac e fazendo as integrais pertinentes, pode-se reescrever a expressão anterior como

$$\begin{aligned}
Z[J_\mu, \bar{\eta}, \eta] &= \frac{1}{N_{A_\mu}} \int dA_\mu \exp \left\{ i \left[\int d^2x \frac{1}{2} A_\mu \Omega^{\mu\nu} A_\nu + \right. \right. \\
& - \frac{1}{2} \int d^2x d^2y' \left(\int d^2y A_\nu(y) \delta^{(2)}(x - y) \right) \Omega^{\mu\nu}(\Omega^{-1})_{\nu\beta}(x, y') J^\beta(y') + \\
& - \frac{1}{2} \int d^2x d^2y (\Omega^{-1})_{\mu\alpha}(x, y) J^\alpha(y) \Omega^{\mu\nu} \left(\int d^2y' A_\nu(y') \delta^{(2)}(x - y') \right) + \\
& + \frac{1}{2} \int d^2x d^2y d^2y' (\Omega^{-1})_{\mu\alpha}(x, y) \left(\int d^2z J^\alpha(z) \delta^{(2)}(z - y) \right) \Omega^{\mu\nu}(\Omega^{-1})_{\nu\beta}(x, y') J^\beta(y') + \\
& + \left. \int d^2x J^\mu A_\mu - \int d^2x d^2y J^\mu (\Omega^{-1})_{\mu\nu}(x, y) J^\nu(y) - \int d^2x d^2y \bar{\eta}(x) G(A'_\mu; x, y) \eta(y) \right] \Big\} \\
&= \frac{1}{N_{A_\mu}} \int dA_\mu \exp \left\{ i \left[\int d^2x \frac{1}{2} A_\mu \Omega^{\mu\nu} A_\nu \right. \right. \\
& - \frac{1}{2} \int d^2x d^2y' d^2y A_\mu(y) \Omega^{\mu\nu}(x, y) (\Omega^{-1})_{\nu\beta}(x, y') J^\beta(y') \\
& - \frac{1}{2} \int d^2x d^2y d^2y' (\Omega^{-1})_{\mu\alpha}(x, y) J^\alpha(y) \Omega^{\mu\nu}(x - y') A_\nu(y') \\
& + \frac{1}{2} \int d^2x d^2y d^2y' d^2z (\Omega^{-1})_{\mu\alpha}(x, y) J^\alpha(z) \Omega^{\mu\nu}(z, y) (\Omega^{-1})_{\nu\beta}(x, y') J^\beta(y') + \int d^2x J^\mu A_\mu \\
& - \left. \int d^2x d^2y J^\mu (\Omega^{-1})_{\mu\nu}(x, y) J^\nu(y) - \int d^2x d^2y \bar{\eta}(x) G(A'_\mu; x, y) \eta(y) \right] \Big\}. \quad (3.64)
\end{aligned}$$

Por fim, usando a Relação (3.62), conclui-se que

$$\begin{aligned}
Z[J_\mu, \bar{\eta}, \eta] &= \frac{1}{N_{A_\mu}} \int dA_\mu \exp \left[i \int d^2x \frac{1}{2} A_\mu \Omega^{\mu\nu} A_\nu - \frac{i}{2} \int d^2x d^2y J^\mu(x) (\Omega^{-1})_{\mu\nu}(x, y) J^\nu(y) + \right. \\
& \left. - i \int d^2x d^2y \bar{\eta}(x) G \left(A_\mu - \int d^2y' (\Omega^{-1})_{\mu\nu}(x, y') J^\nu(y'); x, y \right) \eta(y) \right]. \quad (3.65)
\end{aligned}$$

Esta é forma do funcional gerador utilizada para o cálculo das funções de correlação mas, para isso, é necessário primeiro conhecer o operador inverso $(\Omega^{-1})_{\mu\nu}(x, y)$.

3.3.1 Cálculo da Inversa $(\Omega^{-1})_{\mu\nu}(k)$

A fim de calcular o operador inverso $(\Omega^{-1})_{\mu\nu}(x-y)$, será utilizada sua representação em Fourier, dada por

$$(\Omega^{-1})_{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} (\Omega^{-1})_{\mu\nu}(k) e^{ik(x-y)}. \quad (3.66)$$

Por definição, a inversa $(\Omega^{-1})_{\mu\nu}(x-y)$ satisfaz a equação (3.62), isto é,

$$\int d^2z \Omega^{\mu\rho}(x-z)(\Omega^{-1})_{\rho\nu}(z-y) = \delta^\mu_\nu \delta^{(2)}(x-y) = \delta^\mu_\nu \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{ik(x-y)}. \quad (3.67)$$

No entanto, usando a expressão (3.60) e a representação de Fourier de $(\Omega^{-1})_{\mu\nu}(x-y)$, o lado esquerdo da equação (3.67) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} & \int d^2z \Omega^{\mu\rho}(x-z)(\Omega^{-1})_{\rho\nu}(z-y) = \\ &= \int d^2z \left[(\square + m^2) \eta^{\mu\rho} - \partial^\mu \partial^\rho - 2\lambda \frac{\partial^\mu \partial^\rho}{\square} \right] \delta^{(2)}(x-z) \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} (\Omega^{-1})_{\rho\nu}(k) e^{ik(z-y)} \\ &= \int d^2z \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} (\Omega^{-1})_{\rho\nu}(k) \left\{ [(\square + m^2) \eta^{\mu\rho} - \partial^\mu \partial^\rho] \delta^{(2)}(x-z) - 2\lambda \frac{\partial^\mu \partial^\rho}{\square} \square D_F(x-z) \right\} e^{ik(z-y)} \\ &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} (\Omega^{-1})_{\rho\nu}(k) \left\{ [(\square + m^2) \eta^{\mu\rho} - \partial^\mu \partial^\rho] e^{ik(x-y)} - 2\lambda \int d^2z \partial^\mu \partial^\rho D_F(x-z) e^{ik(z-y)} \right\}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Realizando integrações por partes e usando o resultado (3.28), o segundo termo da expressão anterior resulta em

$$\begin{aligned} \int d^2z \partial_z^\mu \partial_z^\rho D_F(x-z) e^{ik(z-y)} &= \int d^2z D_F(x-z) \partial_z^\mu \partial_z^\rho e^{ik(z-y)} \\ &= \int d^2p \int \frac{d^2z}{(2\pi)^2} e^{i(k-p)z} \frac{k^\mu k^\rho}{p^2 + i\varepsilon} e^{i(p(x-y))} \\ &= \frac{k^\mu k^\rho}{k^2 + i\varepsilon} e^{ik(x-y)}, \end{aligned} \quad (3.69)$$

de modo que, substituindo (3.69) em (3.68), obtém-se

$$\begin{aligned} & \int d^2z \Omega^{\mu\rho}(x-z)(\Omega^{-1})_{\rho\nu}(z-y) = \\ &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} (\Omega^{-1})_{\rho\nu}(k) \left[(-k^2 + m^2) \eta^{\mu\rho} + k^\mu k^\rho - 2\lambda \frac{k^\mu k^\rho}{k^2 + i\varepsilon} \right] e^{ik(x-y)}. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Destarte, comparando as expressões (3.70) e (3.67), conclui-se que

$$\left[(-k^2 + m^2) \eta^{\mu\rho} + k^\mu k^\rho - 2\lambda \frac{k^\mu k^\rho}{k^2} \right] (\Omega^{-1})_{\rho\nu}(k) = \delta^\mu_\nu. \quad (3.71)$$

Um método para encontrar $(\Omega^{-1})_{\rho\nu}(k)$ seria escrever sua estrutura tensorial mais geral, que neste caso seria

$$(\Omega^{-1})_{\rho\nu}(k) = \alpha(k^2) \eta_{\rho\nu} + \beta(k^2) k_\rho k_\nu, \quad (3.72)$$

e encontrar as funções α e β a partir da equação (3.71). Entretanto, em $(1+1)$ -dimensões, é possível simplesmente inverter a matriz $\Omega^{\mu\rho}(k)$ que, de acordo com a própria equação (3.71), é dada por

$$\Omega^{\mu\rho}(k) = (-k^2 + m^2) \eta^{\mu\rho} + k^\mu k^\rho - 2\lambda \frac{k^\mu k^\rho}{k^2}. \quad (3.73)$$

Agora, como a matriz $\Omega^{\mu\rho}(k)$ é simétrica, a sua inversa $(\Omega^{-1})_{\rho\nu}(k)$ também deve ser simétrica em relação a ρ e ν . Por outro lado, da teoria matricial, sabe-se que se a matriz

$$\Omega = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \quad (3.74)$$

possui determinante não-nulo, então sua inversa é dada por

$$\Omega^{-1} = \frac{1}{ab - c^2} \begin{pmatrix} b & -c \\ -c & a \end{pmatrix}. \quad (3.75)$$

Explicitamente, os elementos da matriz $\Omega^{\mu\rho}(k)$, são dados por

$$\begin{aligned} \Omega^{00}(k) &= (-k^2 + m^2) + (k^0)^2 - 2\lambda \frac{(k^0)^2}{k^2} \\ &= (k^1)^2 + m^2 - 2\lambda \frac{(k^0)^2}{k^2}; \end{aligned} \quad (3.76a)$$

$$\begin{aligned} \Omega^{11}(k) &= (k^2 - m^2) + (k^1)^2 - 2\lambda \frac{(k^1)^2}{k^2} \\ &= (k^0)^2 - m^2 - 2\lambda \frac{(k^1)^2}{k^2}; \end{aligned} \quad (3.76b)$$

$$\Omega^{01}(k) = k^0 k^1 - 2\lambda \frac{k^0 k^1}{k^2} = \left(1 - \frac{2\lambda}{k^2}\right) k^0 k^1 = \Omega^{10}(k); \quad (3.76c)$$

de maneira que seu determinante, após algumas manipulações algébricas, é igual a

$$\begin{aligned} \det(\Omega(k)) &= \left[(k^1)^2 + m^2 - 2\lambda \frac{(k^0)^2}{k^2} \right] \left[(k^0)^2 - m^2 - 2\lambda \frac{(k^1)^2}{k^2} \right] - \left(1 - \frac{2\lambda}{k^2}\right)^2 (k^0 k^1)^2 \\ &= (m^2 - 2\lambda) (k^2 - m^2) = \lambda(a - 1) (k^2 - m^2). \end{aligned} \quad (3.77)$$

Por fim, em acordo com (3.75), os termos da matriz inversa $(\Omega^{-1})_{\rho\nu}(k)$ são

$$(\Omega^{-1})_{00}(k) = \frac{1}{\det(\Omega(k))} \left[(k_0)^2 - m^2 - 2\lambda \frac{(k_1)^2}{k^2} \right]; \quad (3.78a)$$

$$(\Omega^{-1})_{11}(k) = \frac{1}{\det(\Omega(k))} \left[(k_1)^2 + m^2 - 2\lambda \frac{(k_0)^2}{k^2} \right]; \quad (3.78b)$$

$$(\Omega^{-1})_{01}(k) = \frac{1}{\det(\Omega(k))} \left(1 - \frac{2\lambda}{k^2} \right) k_0 k_1 = (\Omega^{-1})_{10}(k). \quad (3.78c)$$

ou, em notação covariante, escreve-se

$$\begin{aligned} (\Omega^{-1})_{\rho\nu}(k) &= \frac{1}{\lambda(a-1)(k^2 - m^2)} \left[k_\rho k_\nu - m^2 \eta_{\rho\nu} - 2\lambda \frac{(k_\rho k_\nu - k^2 \eta_{\rho\nu})}{k^2} \right] \\ &= \frac{1}{\lambda(a-1)(k^2 - m^2)} \left[\left(1 - \frac{2\lambda}{k^2} \right) k_\rho k_\nu - \lambda(a-1) \eta_{\rho\nu} \right]. \end{aligned} \quad (3.79)$$

3.4 Cálculo da Anomalia de Calibre

De posse da ação efetiva da teoria, é possível calcular o termo de Wess-Zumino, definido pela expressão (2.63). Assim, usando a expressão (3.56) da ação efetiva, tem-se

$$\begin{aligned} W[A_\mu^g] &= \int d^2x \frac{1}{2} \left(A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \theta \right) \left[m^2 \eta^{\mu\nu} - 2\lambda \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} \right] \left(A_\nu - \frac{1}{e} \partial_\nu \theta \right) \\ &= W[A_\mu] - \frac{1}{2e} \int d^2x A_\mu \left[m^2 \eta^{\mu\nu} - 2\lambda \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} \right] \partial_\nu \theta + \\ &\quad - \frac{1}{2e} \int d^2x \partial_\mu \theta \left[m^2 \eta^{\mu\nu} - 2\lambda \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} \right] A_\nu \\ &\quad + \frac{1}{2e^2} \int d^2x \partial_\mu \theta \left[m^2 \eta^{\mu\nu} - 2\lambda \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} \right] \partial_\nu \theta. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Agora, realizando integrações por partes e desprezando os termos de superfície, tem-se

$$\begin{aligned} W[A_\mu^g] &= W[A_\mu] + \frac{1}{e} (m^2 - 2\lambda) \int d^2x \theta \partial^\mu A_\mu - \frac{1}{2e^2} (m^2 - 2\lambda) \int d^2x \theta \square \theta \\ &= W[A] + \frac{\lambda}{e} (a-1) \int d^2x \theta \partial^\mu A_\mu - \frac{\lambda}{2e^2} (a-1) \int d^2x \theta \square \theta, \end{aligned} \quad (3.81)$$

de maneira que o termo de Wess-Zumino é dado por

$$\alpha_1[A_\mu, g] = \frac{\lambda}{e^2} (a-1) \int d^2x \left[e \theta \partial^\mu A_\mu - \frac{1}{2} \theta \square \theta \right]. \quad (3.82)$$

Consequentemente, em acordo com a expressão (2.65), obtém-se

$$\mathcal{A}(x) = \frac{\lambda}{e} (a-1) \int d^2y \delta(y-x) \partial^\mu A_\mu = \frac{\lambda}{e} (a-1) \partial^\mu A_\mu. \quad (3.83)$$

Assim, definindo o operador diferencial

$$h_\mu \equiv \frac{\lambda}{e}(a-1)\partial_\mu, \quad (3.84)$$

a anomalia de calibre escreve-se como

$$\mathcal{A}(x) = h_\mu A^\mu(x). \quad (3.85)$$

Antes de prosseguir para o cálculo das funções de correlação com inserção da anomalia, será demonstrado um resultado extensivamente utilizado no próximo capítulo:

$$h_\mu^x (\Omega^{-1})^{\mu\nu}(x-y) = \frac{1}{e} \partial_x^\nu \delta^{(2)}(x-y). \quad (3.86)$$

De fato, utilizando as expressões (3.84) e (3.66), tem-se que

$$\begin{aligned} h_\mu^x (\Omega^{-1})^{\mu\nu}(x-y) &= \frac{\lambda}{e}(a-1)\partial_\mu^x \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} (\Omega^{-1})^{\mu\nu}(k) e^{ik(x-y)} \\ &= \frac{\lambda}{e}(a-1) \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} (\Omega^{-1})^{\mu\nu}(k) (ik_\mu) e^{ik(x-y)}. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Por fim, substituindo o resultado (3.79) na expressão acima, após alguma álgebra, conclui-se que

$$\begin{aligned} h_\mu^x (\Omega^{-1})^{\mu\nu}(x-y) &= \frac{i}{e} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} k^\nu e^{ik(x-y)} \\ &= \frac{i}{e} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} (-i) \partial_x^\nu e^{ik(x-y)} \\ &= \frac{1}{e} \partial_x^\nu \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{ik(x-y)} = \frac{1}{e} \partial_x^\nu \delta^{(2)}(x-y). \end{aligned} \quad (3.88)$$

Capítulo 4

Funções de Correlação

Na seção 2.3, foi visto que as funções de correlação de operadores invariantes de calibre são sempre nulas quando há a inserção da anomalia $\mathcal{A}[A_\mu]$. De posse da ação efetiva e da anomalia do modelo de Schwinger, calculadas no capítulo anterior, é possível verificar explicitamente este resultado, corroborando as manipulações formais feitas na seção 2.3 com o uso da integral funcional. Por exemplo, considere a seguinte função de Green:

$$K^{\mu\nu}(x, y) \equiv \langle 0 | T [\mathcal{A}(x) F^{\mu\nu}(y)] | 0 \rangle. \quad (4.1)$$

Utilizando as expressões (3.65) e (3.85), tem-se

$$\begin{aligned} K^{\mu\nu}(x, y) &= \langle 0 | T [h_\rho^x A^\rho(x) (\partial_y^\mu A^\nu(y) - \partial_y^\nu A^\mu(y))] | 0 \rangle \\ &= h_\rho^x \left\{ (-i) \frac{\delta}{\delta J_\rho(x)} \left[\partial_y^\mu (-i) \frac{\delta}{\delta J_\nu(y)} - \partial_y^\nu (-i) \frac{\delta}{\delta J_\mu(y)} \right] Z[J_\mu, 0, 0] \right\} \Big|_{J_\mu=0} \\ &= -h_\rho^x \left\{ \frac{\delta}{\delta J_\rho(x)} \left[\partial_y^\mu \frac{\delta}{\delta J_\nu(y)} - \partial_y^\nu \frac{\delta}{\delta J_\mu(y)} \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^2x' d^2y' J_\alpha(x') (\Omega^{-1})^{\alpha\beta} (x' - y') J_\beta(y') \right] \right\} \Big|_{J_\mu=0}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Assim, fazendo as derivadas funcionais dadas acima e colocando $J_\mu = 0$, obtém-se

$$K^{\mu\nu}(x, y) = i \partial_y^\mu h_\rho^x (\Omega^{-1})^{\rho\nu} (x - y) - i \partial_y^\nu h_\rho^x (\Omega^{-1})^{\rho\mu} (x - y). \quad (4.3)$$

Por fim, usando o resultado (3.86), conclui-se que

$$K^{\mu\nu}(x, y) = \frac{i}{e} (\partial_y^\mu \partial_x^\nu - \partial_y^\nu \partial_x^\mu) \delta^{(2)}(x - y) = 0. \quad (4.4)$$

Mais geralmente, obtém-se

$$K^{\mu_1\nu_1 \dots \mu_n\nu_n}(x, x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | T [\mathcal{A}(x) F^{\mu_1\nu_1}(x_1) \dots F^{\mu_n\nu_n}(x_n)] | 0 \rangle = 0. \quad (4.5)$$

De fato, quando n é par não há o emparelhamento das derivadas funcionais com os termos J_α de $Z[J_\mu, 0, 0]$, e a função é nula. Nas próximas seções, serão analisadas as funções de correlação de operadores não-invariantes de calibre. Para que não se tenha uma chance significativa de ter uma teoria trivial, as inserções da anomalia nestas funções devem ser não-nulas.

4.1 Funções de Correlação Bosônicas

Agora, serão consideradas funções de correlação formadas por operadores bosônicos não-invariantes de calibre com a inserção da anomalia:

$$K^{\mu_1 \dots \mu_n}(x, x_1, \dots, x_n) \equiv \langle 0 | T [\mathcal{A}(x) A^{\mu_1} A^{\mu_2} \dots A^{\mu_n}] | 0 \rangle. \quad (4.6)$$

Quando n é par não é possível realizar o pareamento de todas as derivadas funcionais e o valor de $K^{\mu_1 \dots \mu_n}(x, x_1, \dots, x_n)$ anula-se. Por sua vez, se n é ímpar, obtém-se um resultado não-nulo para tais funções de correlação, como mostrado explicitamente nos dois próximos resultados. Com efeito, considere a função de correlação bosônica de um único ponto com a inserção da anomalia, dada por

$$K^\nu(x, y) \equiv \langle 0 | T [\mathcal{A}(x) A^\nu(y)] | 0 \rangle. \quad (4.7)$$

Utilizando as expressões (3.65) e (3.85), tem-se

$$\begin{aligned} K^\nu(x, y) &= \langle 0 | T [h_\mu^x A^\mu(x) A^\nu(y)] | 0 \rangle \\ &= h_\mu^x (-i)^2 \frac{\delta^2}{\delta J_\mu(x) \delta J_\nu(y)} Z[J_\mu, 0, 0] \Big|_{J_\mu=0} \\ &= \frac{(-h_\mu^x) \delta^2}{\delta J_\mu(x) \delta J_\nu(y)} \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^2 x' d^2 y' J_\alpha(x') (\Omega^{-1})^{\alpha\beta} (x' - y') J_\beta(y') \right] \Big|_{J_\mu=0}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Assim, fazendo as derivadas funcionais e colocando $J_\mu = 0$, obtém-se

$$K^\nu(x, y) = i h_\mu^x (\Omega^{-1})^{\mu\nu} (x - y) = \frac{i}{e} \partial_x^\nu \delta^{(2)}(x - y), \quad (4.9)$$

em que na última igualdade foi utilizada a identidade (3.86). Agora, considere a função de correlação bosônica de três pontos com a inserção da anomalia:

$$K^{\mu_1 \mu_2 \mu_3}(x, x_1, x_2, x_3) \equiv \langle 0 | T [\mathcal{A}(x) A^{\mu_1}(x_1) A^{\mu_2}(x_2) A^{\mu_3}(x_3)] | 0 \rangle. \quad (4.10)$$

Usando as expressões (3.65) e (3.85), obtém-se

$$K^{\mu_1 \mu_2 \mu_3}(x, x_1, x_2, x_3) = \langle 0 | T [h_\mu^x A^\mu(x) A^{\mu_1}(x_1) A^{\mu_2}(x_2) A^{\mu_3}(x_3)] | 0 \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= h_\mu^x (-i)^4 \frac{\delta^4}{\delta J_\mu(x) \delta J_{\mu_1}(x_1) J_{\mu_2}(x_2) J_{\mu_3}(x_3)} Z[J_\mu, 0, 0] \Big|_{J_\mu=0} \\
&= h_\mu^x \frac{\delta^4}{\delta J_\mu(x) \delta J_{\mu_1}(x_1) J_{\mu_2}(x_2) J_{\mu_3}(x_3)} \times \\
&\quad \times \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^2x' d^2y' J_\alpha(x') (\Omega^{-1})^{\alpha\beta} (x' - y') J_\beta(y') \right] \Big|_{J_\mu=0}.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Mais uma vez, efetuando as derivadas funcionais e colocando $J_\mu = 0$, encontra-se

$$\begin{aligned}
K^{\mu_1\mu_2\mu_3}(x, x_1, x_2, x_3) &= \\
&= -h_\mu^x (\Omega^{-1})^{\mu\mu_1} (x - x_1) (\Omega^{-1})^{\mu_2\mu_3} (x_2 - x_3) - h_\mu^x (\Omega^{-1})^{\mu\mu_2} (x - x_2) (\Omega^{-1})^{\mu_1\mu_3} (x_1 - x_3) \\
&\quad - h_\mu^x (\Omega^{-1})^{\mu\mu_3} (x - x_3) (\Omega^{-1})^{\mu_1\mu_2} (x_1 - x_2) \\
&= -\frac{1}{e} \left[\partial_x^{\mu_1} \delta^{(2)}(x - x_1) (\Omega^{-1})^{\mu_2\mu_3} (x_2 - x_3) + \partial_x^{\mu_2} \delta^{(2)}(x - x_2) (\Omega^{-1})^{\mu_1\mu_3} (x_1 - x_3) \right. \\
&\quad \left. + \partial_x^{\mu_3} \delta^{(2)}(x - x_3) (\Omega^{-1})^{\mu_1\mu_2} (x_1 - x_2) \right],
\end{aligned} \tag{4.12}$$

em que na última igualdade foi utilizada a identidade (3.86). Portanto, por cálculos explícitos, conclui-se que as funções de correlação de operadores não-invariantes de calibre são não-nulas para n ímpar. Mais ainda, a estrutura das funções de correlações bosônicas encontrada é idêntica à do modelo de Jackiw-Rajaraman [12], apesar desta ser uma teoria genuinamente anômala enquanto aquela tem uma anomalia removível.

4.2 Funções de Correlação Fermiônicas

Considere agora funções de correlação fermiônicas com presença da anomalia, isto é, funções de Green do tipo

$$K(x, \bar{x}_1, x_1, \dots, \bar{x}_n, x_n) \equiv \langle 0 | T [\mathcal{A}(x) \bar{\psi}(\bar{x}_1) \psi(x_1) \dots \bar{\psi}(\bar{x}_n) \psi(x_n)] | 0 \rangle. \tag{4.13}$$

Para realizar o cálculo de correlações deste tipo, primeiro, é preciso encontrar a função de Green de 2 pontos fermiônica, dada por

$$K(\bar{x}, x) \equiv \langle 0 | T [\bar{\psi}(\bar{x}) \psi(x)] | 0 \rangle. \tag{4.14}$$

Em vista da expressão (3.65), tem-se

$$K(\bar{x}, x) = \left((-i) \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \bar{\eta}(x)} \right) Z[0, \eta, \bar{\eta}] \left((-i) \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \eta(\bar{x})} \right) \Big|_{\eta=\bar{\eta}=0}$$

$$= -\frac{1}{N_{A_\mu}} \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \bar{\eta}(x)} \int dA_\mu e^{\left[i \int d^2 x' \frac{1}{2} A_\mu \Omega^{\mu\nu} A_\nu - i \int d^2 x' d^2 \bar{x}' \bar{\eta}(x') G(A_\mu; x', \bar{x}') \eta(\bar{x}') \right]} \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \eta(\bar{x})} \Bigg|_{\eta=\bar{\eta}=0} \quad (4.15)$$

Após fazer as derivadas funcionais e colocar $\eta = \bar{\eta} = 0$, obtém-se

$$\begin{aligned} K(\bar{x}, x) &= \frac{i}{N_{A_\mu}} \int dA_\mu \exp \left[i \int d^2 x' \frac{1}{2} A_\mu \Omega^{\mu\nu} A_\nu \right] G(A_\mu; x, \bar{x}) \\ &= \frac{i}{N_{A_\mu}} \int dA_\mu \exp \left\{ i \int d^2 x' \left[\frac{1}{2} A_\mu \Omega^{\mu\nu} A_\nu + e S^\mu(x'; x, \bar{x}) A_\mu(x') \right] \right\} G_F(x - \bar{x}), \end{aligned} \quad (4.16)$$

em que na última igualdade foi usada a expressão (3.36). Agora, realizando a seguinte mudança de variável

$$A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - e \int d^2 y (\Omega^{-1})_{\mu\nu}(x, y) S^\nu(y; x, \bar{x}), \quad (4.17)$$

a função de Green fermiônica de 2 pontos torna-se

$$K(\bar{x}, x) = \exp \left[-\frac{ie^2}{2} \int d^2 x' d^2 y' S^\mu(x'; x, \bar{x}) (\Omega^{-1})_{\mu\nu}(x', y') S^\nu(y'; x, \bar{x}) \right] i G_F(x - \bar{x}). \quad (4.18)$$

Por sua vez, em acordo com (3.37), o termo dentro da exponencial é dado por

$$\begin{aligned} &\int d^2 x' d^2 y' S_\mu(x'; x, \bar{x}) (\Omega^{-1})^{\mu\nu}(x', y') S_\nu(y'; x, \bar{x}) = \\ &= - \int d^2 x' d^2 y' [D_F(x - x) - D_F(\bar{x} - x')] \left(\partial_\mu^{x'} + \gamma^5 \tilde{\partial}_\mu^{x'} \right) \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} (\Omega^{-1})^{\mu\nu}(k) e^{ik(x' - y')} \\ &\quad \times \left(\partial_\nu^{y'} + \gamma^5 \tilde{\partial}_\nu^{y'} \right) [D_F(x - y') - D_F(\bar{x} - y')] \\ &= \int d^2 x' d^2 y' [D_F(x - x') - D_F(\bar{x} - x')] \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} (\Omega^{-1})^{\mu\nu}(k) \times \\ &\quad \times (i) \left(k_\mu + \gamma^5 \tilde{k}_\mu \right) (-i) \left(k_\nu + \gamma^5 \tilde{k}_\nu \right) e^{ik(x' - y')} [D_F(x - y') - D_F(\bar{x} - y')]. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Mas como

$$\begin{aligned} &\left(k_\mu + \gamma^5 \tilde{k}_\mu \right) \left(k_\nu + \gamma^5 \tilde{k}_\nu \right) (\Omega^{-1})^{\mu\nu}(k) = \\ &= \frac{\left(k_\mu + \gamma^5 \tilde{k}_\mu \right)}{\lambda(a-1)[k^2 - \lambda(a+1)]} \left[\left(1 - \frac{2\lambda}{k^2} \right) k^2 k^\mu - \lambda(a-1)k^\mu - \lambda\gamma^5(a-1)\tilde{k}^\mu \right] \\ &= \frac{1}{\lambda(a-1)[k^2 - \lambda(a+1)]} \left[\left(1 - \frac{2\lambda}{k^2} \right) k^4 - \lambda(a-1)k^2 + \lambda(\gamma^5)^2(a-1)k^2 \right] \\ &= \frac{k^2(k^2 - 2\lambda)}{\lambda(a-1)[k^2 - \lambda(a+1)]}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

a expressão (4.19) fica sendo reescrita como

$$\begin{aligned} \int d^2x' d^2y' S_\mu(x'; x, \bar{x}) (\Omega^{-1})^{\mu\nu}(x', y') S_\nu(y'; x, \bar{x}) &= \int d^2x' d^2y' [D_F(x - x') - D_F(\bar{x} - x')] \\ &\times \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k^2(k^2 - 2\lambda)}{\lambda(a-1)[k^2 - \lambda(a+1)]} e^{ik(x'-y')} [D_F(x - y') - D_F(\bar{x} - y')]. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Além disso, considerando a expressão (3.28), tem-se

$$\begin{aligned} \int d^2x' d^2y' D_F(x - x') D_F(x - y') e^{ik(x'-y')} &= \\ = \int d^2x' d^2y' \int \frac{d^2p_1}{(2\pi)^2} \frac{e^{ip_1(x-x')}}{p_1^2 + i\varepsilon} \int \frac{d^2p_2}{(2\pi)^2} \frac{e^{ip_2(x-y')}}{p_2^2 + i\varepsilon} e^{ik(x'-y')} &= \\ = \int d^2p_1 d^2p_2 \int \frac{d^2x'}{(2\pi)^2} e^{i(k-p_1)x'} \int \frac{d^2y'}{(2\pi)^2} e^{-i(k+p_2)y'} \frac{e^{i(p_1+p_2)x}}{p_1^2 p_2^2} &= \frac{1}{k^4} \end{aligned} \quad (4.22)$$

e

$$\begin{aligned} \int d^2x' d^2y' D_F(x - x') D_F(\bar{x} - y') e^{ik(x'-y')} &= \\ = \int d^2x' d^2y' \int \frac{d^2p_1}{(2\pi)^2} \frac{e^{ip_1(x-x')}}{p_1^2 + i\varepsilon} \int \frac{d^2p_2}{(2\pi)^2} \frac{e^{ip_2(\bar{x}-y')}}{p_2^2 + i\varepsilon} e^{ik(x'-y')} &= \\ = \int d^2p_1 d^2p_2 \int \frac{d^2x'}{(2\pi)^2} e^{i(k-p_1)x'} \int \frac{d^2y'}{(2\pi)^2} e^{-i(k+p_2)y'} \frac{e^{i(p_1+p_2)\bar{x}}}{p_1^2 p_2^2} &= \frac{e^{ik(x-\bar{x})}}{k^4}; \end{aligned} \quad (4.23)$$

Dessa forma, a expressão (4.21) torna-se

$$\begin{aligned} \int d^2x' d^2y' S_\mu(x'; x, \bar{x}) (\Omega^{-1})^{\mu\nu}(x' - y') S_\nu(y'; x, \bar{x}) &= \\ = \frac{1}{\lambda(a-1)} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{\left(1 - \frac{2\lambda}{k^2}\right)}{k^2 - \lambda(a+1)} [2 - e^{ik(x-\bar{x})} - e^{ik(\bar{x}-x)}] &= \\ = \frac{2}{\lambda(a-1)} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{\left(1 - \frac{2\lambda}{k^2}\right)}{k^2 - \lambda(a+1)} [1 - \cos k(x - \bar{x})]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Por fim, substituindo a expressão anterior em (4.18), conclui-se que

$$K(\bar{x}, x) = \exp \left\{ \frac{-ie^2}{\lambda(a-1)} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{\left(1 - \frac{2\lambda}{k^2}\right)}{k^2 - \lambda(a+1)} [1 - \cos k(x - \bar{x})] \right\} iG_F(x - \bar{x}). \quad (4.25)$$

Com este resultado em mãos, é possível calcular as funções de correlação fermiônicas com a inserção da anomalia. Assim, considere a seguinte função de Green:

$$K(x, \bar{x}_1, x_1) \equiv \langle 0 | T [\mathcal{A}(x) \bar{\psi}(\bar{x}_1) \psi(x_1)] | 0 \rangle. \quad (4.26)$$

Utilizando as expressões (3.65) e (3.85), tem-se

$$\begin{aligned} K(x, \bar{x}_1, x_1) &= \langle 0 | T [h_\mu(x) A^\mu(x) \bar{\psi}(\bar{x}_1) \psi(x_1)] | 0 \rangle \\ &= h_\mu(x) \left((-i) \frac{\vec{\delta}}{\delta J_\mu(x)} \right) \left((-i) \frac{\vec{\delta}}{\delta \bar{\eta}(x_1)} \right) Z[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] \left((-i) \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \eta(\bar{x}_1)} \right) \Big|_{J_\mu=\eta=\bar{\eta}=0} \\ &= i h_\mu(x) \frac{\vec{\delta}}{\delta J_\mu(x)} \frac{\vec{\delta}}{\delta \bar{\eta}(x_1)} \frac{1}{N_{A_\mu}} \int dA_\mu \exp \left\{ i \int d^2 y \frac{1}{2} A_\alpha \Omega^{\alpha\beta} A_\beta + \right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{2} \int d^2 y d^2 z J_\alpha(y) (\Omega^{-1})^{\alpha\beta} (y-z) J_\beta(z) \right. \\ &\quad \left. - i \int d^2 y d^2 z \bar{\eta}(y) G \left(A_\alpha(y) - \int d^2 y' (\Omega^{-1})_{\alpha\beta} (y-y') J^\beta(y'); y, z \right) \eta(z) \right\} \\ &\quad \times \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \eta(\bar{x}_1)} \Big|_{J_\mu=\eta=\bar{\eta}=0}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Fazendo as derivadas funcionais das variáveis de Grassmann e tomando $\eta = \bar{\eta} = 0$, tem-se

$$\begin{aligned} K(x, \bar{x}_1, x_1) &= h_\mu(x) \frac{\vec{\delta}}{\delta J_\mu(x)} \frac{1}{N_{A_\mu}} \int dA_\mu \exp \left[i \int d^2 y \frac{1}{2} A_\alpha \Omega^{\alpha\beta} A_\beta - \frac{i}{2} \int d^2 y d^2 z J_\alpha(y) \right. \\ &\quad \left. \times (\Omega^{-1})^{\alpha\beta} (y-z) J_\beta(z) \right] G \left(A_\alpha - \int d^2 y' (\Omega^{-1})_{\alpha\beta} (\cdot - y') J^\beta(y'); x_1, \bar{x}_1 \right) \Big|_{J_\mu=0}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Entretanto, utilizando a expressão (3.36), tem-se

$$\begin{aligned} G \left(A_\alpha - \int d^2 y' (\Omega^{-1})_{\alpha\beta} (\cdot - y') J^\beta(y'); x_1, \bar{x}_1 \right) &= \\ &= \exp \left\{ i e \int d^2 z S_\alpha(z; x_1, \bar{x}_1) \left[A^\alpha(z) - \int d^2 y' (\Omega^{-1})^{\alpha\beta} (z-y') J_\beta(y') \right] \right\} G_F(x_1 - \bar{x}_1) \\ &= \exp \left[-i e \int d^2 z d^2 y' S_\alpha(z; x_1, \bar{x}_1) (\Omega^{-1})^{\alpha\beta} (z-y') J_\beta(y') \right] G(A_\alpha; x_1, \bar{x}_1). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Portanto, pode-se substituir a expressão (4.29) em (4.27) e, após fazer a derivada funcional

restante e colocar $J_\mu = 0$, obtém-se

$$\begin{aligned}
K(x, \bar{x}_1, x_1) &= h_\mu(x) \frac{\vec{\delta}}{\delta J_\mu(x)} \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int d^2y d^2z J_\alpha(y) (\Omega^{-1})^{\alpha\beta} (y-z) J_\beta(z) + \right. \\
&\quad \left. -ie \int d^2z d^2y' S_\alpha(z; x_1, \bar{x}_1) (\Omega^{-1})^{\alpha\beta} (z-y') J_\beta(y') \right\} \times \\
&\quad \times \frac{1}{N_{A_\mu}} \int dA_\mu \left(i \int d^2y \frac{1}{2} A_\alpha \Omega^{\alpha\beta} A_\beta \right) G(A_\alpha; x_1, \bar{x}_1) |_{J_\mu=0} \\
&= -eh_\mu(x) \left[\int d^2z h_\mu(x) S_\alpha(z; x_1, \bar{x}_1) (\Omega^{-1})^{\alpha\mu} (z-x) \right] K(x_1, \bar{x}_1), \tag{4.30}
\end{aligned}$$

em que na última igualdade foi utilizada a expressão (4.16). Ademais, tendo em vista que

$$\begin{aligned}
&\int d^2z h_\mu(x) S_\alpha(z; x_1, \bar{x}_1) (\Omega^{-1})^{\alpha\mu} (z-x) = \int d^2z \frac{\lambda}{e} (a-1) \partial_\mu^x [D_F(x_1-z) - D_F(\bar{x}_1-z)] \times \\
&\quad \times \left(\partial_\alpha^z + \gamma^5 \tilde{\partial}_\alpha^z \right) \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} (\Omega^{-1})^{\alpha\mu} (k) e^{ik(z-x)} \\
&= \frac{\lambda(a-1)}{e} \int d^2z [D_F(x_1-z) - D_F(\bar{x}_1-z)] \times \\
&\quad \times \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} (\Omega^{-1})^{\alpha\mu} (k) (-ik_\mu) \left(ik_\alpha + i\gamma^5 \tilde{k}_\alpha \right) e^{ik(z-x)} \\
&= -\frac{\lambda(a-1)}{e} \int d^2z \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \left[\frac{e^{ip(x_1-z)}}{p^2 + i\varepsilon} - \frac{e^{ip(\bar{x}_1-z)}}{p^2 + i\varepsilon} \right] \times \\
&\quad \times \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} k_\mu \left(k_\alpha + \gamma^5 \tilde{k}_\alpha \right) (\Omega^{-1})^{\alpha\mu} (k) e^{ik(z-x)} \\
&= -\frac{\lambda(a-1)}{e} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \int d^2p \int \frac{d^2z}{(2\pi)^2} \overset{\delta^{(2)}(k-p)}{e^{i(k-p)z}} k_\mu \left(k_\alpha + \gamma^5 \tilde{k}_\alpha \right) (\Omega^{-1})^{\alpha\mu} (k) \times \\
&\quad \times \left[\frac{e^{i(px_1-kx)}}{p^2 + i\varepsilon} - \frac{e^{i(p\bar{x}_1-kx)}}{p^2 + i\varepsilon} \right] \\
&= -\frac{\lambda(a-1)}{e} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} k_\mu \left(k_\alpha + \gamma^5 \tilde{k}_\alpha \right) (\Omega^{-1})^{\alpha\mu} (k) \left[\frac{e^{ik(x_1-x)}}{k^2 + i\varepsilon} - \frac{e^{ik(\bar{x}_1-x)}}{k^2 + i\varepsilon} \right], \tag{4.31}
\end{aligned}$$

e como, após algumas manipulações algébricas, tem-se

$$\begin{aligned}
k_\mu \left(k_\alpha + \gamma^5 \tilde{k}_\alpha \right) (\Omega^{-1})^{\alpha\mu} (k) &= \frac{k_\mu \left(k_\alpha + \gamma^5 \tilde{k}_\alpha \right)}{\lambda(a-1)[k^2 - \lambda(a+1)]} \left[\left(1 - \frac{2\lambda}{k^2} \right) k^\alpha k^\mu - \lambda(a-1) \eta^{\alpha\mu} \right] \\
&= \frac{k^2}{\lambda(a-1)}, \tag{4.32}
\end{aligned}$$

substituindo (4.32) em (4.31), obtém-se

$$\int d^2z h_\mu(x) S_\alpha(z; x_1, \bar{x}_1) (\Omega^{-1})^{\alpha\mu} (z-x) = -\frac{1}{e} [\delta^{(2)}(x_1-x) - \delta^{(2)}(\bar{x}_1-x)]. \tag{4.33}$$

Portanto, substituindo (4.33) em (4.30), conclui-se que

$$K(x, \bar{x}_1, x_1) = [\delta^{(2)}(x_1 - x) - \delta^{(2)}(\bar{x}_1 - x)] K(x_1, \bar{x}_1). \quad (4.34)$$

Dessa forma, pode-se ver explicitamente a não-nulidade das funções de Green fermiônicas com a inserção da anomalia $\mathcal{A}[A_\mu]$.

Capítulo 5

Conclusão

As descobertas feitas ao longo dos anos de 1980 trouxeram uma visão das teorias com anomalia na simetria de calibre que indica a sua consistência (renormalizabilidade e unitariedade), apontando para uma dinâmica mais complexa do que a do caso não-anômalo. As limitações dessa análise são claras, ao permitir um aprofundamento das questões apenas no caso bidimensional. Tem-se pela frente a tarefa de formular perturbativamente uma teoria de calibre anômala, o que está longe de poder ser obtido. Para uma definição perturbativa da teoria é preciso ter um propagador livre para o campo de calibre. Mas este só pode ser obtido através de um procedimento de fixação de calibre, que não faz sentido para uma teoria anômala já que a ação efetiva não é invariante de calibre. Sem indicar uma solução para essa questão, a análise do caso de dimensões maiores que 2 permanece sem avançar.

Com isso, a fim de aprender mais sobre este fenômeno, é interessante voltar-se para o caso bidimensional, onde é possível explorar a solubilidade exata do modelo de Schwinger (quantizado sem preservar a simetria de calibre, para produzir uma “anomalia” artificial). De fato, dentro do formalismo da integração funcional, foi encontrada a ação efetiva da teoria e, de posse dela, foram calculadas funções de correlação explicitamente, tanto bosônicas quanto fermiônicas, com a inserção da anomalia. Ao encontrar um valor nulo para essa inserção em funções de correlação de operadores invariantes de calibre, foram corroboradas as manipulações formais que apontam para a nulidade do valor esperado da anomalia no vácuo e a possibilidade de restauração da simetria de calibre em uma teoria anômala completamente quantizada, qualquer que seja a dimensão. Por outro lado, a mesma inserção, em funções de correlação envolvendo operadores não-invariantes de calibre forneceu, mais uma vez, resultados não-nulos (como já havia acontecido no contexto do MSQ [12]). Isso reforça a visão de que a anomalia de calibre é um operador não-nulo, potencialmente ajudando a definir o próprio subespaço dos estados físicos (que seria aquele onde sua inserção em funções de correlação invariantes de calibre se anularia). Esse resultado coloca o MSA em um patamar semelhante ao do MSQ, embora a anomalia de calibre do primeiro caso seja apenas aparente.

Seria interessante utilizar o MSA como laboratório teórico para a definição de técnicas perturbativas de abordagem às suas funções de Green. Uma ideia a ser testada seria a de inserir um termo de fixação de calibre com um parâmetro de calibre regularizador (que vai a zero no final dos cálculos), sem utilizar a técnica de Faddeev-Popov. Este mecanismo já apareceu espontaneamente, como uma regularização de Pauli-Villars, dada a necessidade de regularizar divergências de origem não perturbativa no MSQ [17]. Sabe-se que tal inserção arbitrária deverá produzir divergências (através do propagador regularizado que, sendo o inverso do operador que comparece no termo quadrático, vai a infinito quando o parâmetro de calibre for a zero) que se espera que possam ser posteriormente renormalizadas. Uma indicação para seguir nesta direção vem do resultado obtido em [18], onde se mostrou, no caso abeliano em dimensões arbitrárias, que as identidades de Ward continuam tornando potencialmente possível relacionar as constantes de renormalização de função de onda e de carga. Se tal programa funcionar em duas dimensões, ele pode vir a ser testado em dimensões superiores.

Referências Bibliográficas

- [1] R. A. Bertlmann, *Anomalies in Quantum Field Theory*, Oxford University Press, Nova Iorque, 1996.
- [2] P. Pascual e R. Tarrach, *QCD: Renormalization for the Practitioner*, Lecture Notes in Physics vol. 194, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 1984.
- [3] J. Collins, *Renormalization*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.
- [4] K. Fujikawa e H. Suzuki, *Path Integrals and Quantum Anomalies*, International Series of Monographs on Physics (Oxford, 2004; edição *online*, Oxford Academic, 2007).
- [5] R. Jackiw e R. Rajaraman, *Vector-Meson Mass Generation by Chiral Anomalies*, Phys. Rev. Lett., **54** (1985), 1219.
- [6] L. D. Faddeev e S. L. Shatashvili, *Realization of the Schwinger term in the Gauss law and the possibility of correct quantization of a theory with anomalies*, Phys. Lett. **B167** (1986), 225.
- [7] K. Harada e I. Tsutsui, *On the Path-integral Quantization of Anomalous Gauge Theories*, Phys. Lett. **B183** (1987), 311.
- [8] O. Babelon, F. Schaposnik e C. M. Viallet, *Quantization of Gauge Theories with Weyl Fermions*, Phys. Lett. **B177** (1986), 385.
- [9] R. Casana e S. A. Dias, *On the Origin of Divergences in Massless QED₂*, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **27** (2001), 1501.
- [10] R. Casana e S. A. Dias, *Exact Renormalization of Massless QED₂*, Int. Jour. Mod. Phys. **A17**, No. 30 (2002), 4601.
- [11] G. L. S. de Lima, R. Chaves e S. A. Dias, *Gauge Anomaly Cancellation in Chiral Gauge Theories*, Ann. Phys. **327** (2012), 1435.
- [12] D. R. de Pontes, *Comportamento Operatorial da Anomalia de Calibre no Modelo de Jackiw-Rajaraman*, dissertação de Mestrado, CBPF, 2014.

- [13] R. P. Feynman, A. R. Hibbs e D. F. Styer, *Quantum Mechanics and Path Integrals, Emended Edition*, Dover Publications, Nova Iorque, 2010.
- [14] B. Hatfield, *Quantum Field Theory of Point Particles and Strings*, Westview Press, Boulder, 1998.
- [15] R. J. Rivers, *Path Integral Methods in Quantum Field Theory*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, Nova Iorque, 1988.
- [16] G. de Lima e Silva, T. J. Girardi e S. A. Dias, *On Gauge Invariance of the Bosonic Measure in Chiral Gauge Theories*, Universe **7** (2021), 283.
- [17] R. Casana e S. A. Dias, *On the Renormalizability of Theories with Gauge Anomalies*, Int. Jour. Mod. Phys. **A15**, No. 29 (2000), 4603.
- [18] A. P. C. R. Lima e S. A. Dias, *Ward Takahashi Identities for Abelian Chiral Gauge Theories*, Int. Jour. Mod. Phys. **A31**, No. 11 (2016), 1650062.