

Dissertação de Mestrado

**Análise teórica de uma extensão Eletrodinâmica
envolvendo Axions e Fótons Escuros**

Mirian Reetz da Silva

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF

Rio de Janeiro - RJ

Dezembro de 2025



MINISTÉRIO DA
CIÊNCIA, TECNOLOGIA
E INOVAÇÃO



"ANÁLISE TEÓRICA DE UMA EXTENSÃO ELETRODINÂMICA ENVOLVENDO
AXIONS E FÓTONS ESCUROS"

MIRIAN REETZ DA SILVA

Dissertação de Mestrado em Física apresentada no
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do
Ministério da Ciência Tecnologia e Inovação.
Fazendo parte da banca examinadora os seguintes
professores:

Sebastião Alves Dias - Orientador/CBPF

Antônio Duarte Pereira Junior
Antonio Duarte Pereira Junior – UFF

Gabriel Luchini Martins – UFES

Rio de Janeiro, 16 de dezembro de 2025.

Agradecimentos

Belchior cantou: “Eu sou apenas um rapaz latino-americano, sem dinheiro no banco, sem parentes importantes e vindo do interior. Mas trago de cabeça uma canção do rádio, em que um antigo compositor baiano me dizia tudo é divino, tudo é maravilhoso!”. Assim sou eu e assim é a natureza para mim, divina e maravilhosa. Por isso sou imensamente grata a todos que contribuíram e contribuem para que eu possa diariamente realizar meu sonho de infância: me ocupar refletindo e buscando significado nos fenômenos naturais.

Agradeço imensamente a minha família, por existirem e darem luz a minha vida. Dona Tina minha princesa e musa inspiradora, Moranguinho meu pai e herói, e meus queridos Charlinho e Rodolfinho (vocês são os melhores e mais implicantes irmãos que eu poderia ter), amo todos vocês infinitamente.

Agradeço aos meus mestres e amigos, que tornam essa experiência na física uma experiência única e maravilhosamente sem igual. Obrigada José, Tião e Álvaro, por todo apoio, puxões de orelha, conversas e discussões, sem os quais eu não chegaria até aqui.

Agradeço pelo acolhimento me dado por essa entidade que é o Diracstão, muito mais que um espaço físico, é um modo de ver o mundo e fazer física, com o qual eu me identifico profundamente. Sou muito grata pela amizade da geração atual e pelas heranças das gerações anteriores. Seguimos na missão de socializar o conhecimento que produzimos e adquirimos.

Agradeço a todas as lindas mulheres que fizeram e fazem parte da minha vida, me inspirando, me fortalecendo, amparando. Não haveria esforço no mundo que me colocaria aqui se não fossem vocês! Um enorme agradecimento, tia Mara, Ilma, Fátima, Rosângela e Mãe.

Agradeço aos meus amigos por não me esquecerem, apesar da minha incrível ausência. Sinto muito a falta de vocês, e quem sabe assim que eu defender esta dissertação eu não tenha um pouco mais de tempo livre?! Obrigada por tudo sempre, Flávio, Fê, Karol, Deb, Herinho.

Agradeço a você, JP, cuja importância é tão imensa na minha vida que sinceramente simplesmente te definir como apenas meu namorado não faz jus a sua parceria. Sem palavras suficientes para demonstrar minha profunda gratidão a você!

Agradeço ao meu paciente e querido psicólogo, André, bem como ao meu amável psiquiatra Daniel. Tenho certeza que sem vocês estas páginas acabariam em branco, ainda que eu tivesse com o que preenchê-las.

Agradeço a dona Edna, a Val e a Mirian – minha chará – e aos queridos da segurança, sempre alegrando nossos dias e cuidando de nós (um salve especial para os dois vascaínos, ops, flamenguistas mais gente boa desse CBPF, Luciano e Bola). Agradeço a Cláudia, Elisete, Bete e Larissa, sempre solícitas e salvando a nossa pele. Vocês são uns queridos e sem vocês não tem CBPF!

Muito obrigada e vamos ao trabalho!

“Buscando representar a Natureza, a Física só alcança a sua plenitude quando se torna a nossa forma de confraternização.”

- José Abadalla Helayël-Neto

Resumo

Apesar do tremendo sucesso do Modelo Padrão das partículas elementares (MP), ainda existem questões que o tensionam, como, por exemplo, o enigma da energia escura e o espectro da matéria escura. Essas limitações abrem caminho para novas teorias físicas além do MP, dentre as quais podemos citar diversas extensões da eletrodinâmica (ED) usual de Maxwell. É dentro desse contexto de EDs estendidas que propomos a análise teórica de EDs envolvendo Axions e Fótons Escuros. Essa análise tem caráter exploratório, e buscamos nela identificar particularidades dessas teorias em comparação com a eletrodinâmica usual. Contemplamos equações de campo e leis de conservação, além de outros aspectos gerais dos modelos. Em seguida, repetimos a mesma análise considerando um fundo magnético constante e incluímos um estudo das propriedades ópticas e da propagação dessas ondas eletromagnéticas. Além disso, buscamos explorar o efeito Primakoff, que consiste na conversão de Axions em Fótons, bem como na conversão de Fótons em Fótons Escuros, na presença de campos magnéticos externos intensos. Axions e Fótons Escuros, apesar de hipotéticos, são fortemente motivados do ponto de vista teórico e constituem excelentes candidatos a compor o espectro da matéria escura. Os principais experimentos dedicados a essa busca baseiam-se justamente no efeito Primakoff. Por se tratar de um tema de pesquisa bastante ativo, novos pré-prints são publicados semanalmente; contudo, a literatura ainda não aborda de forma detalhada aspectos considerados mais básicos do tema. Assim, este trabalho de dissertação busca enriquecer a literatura com uma contribuição ao mesmo tempo didática e original, discutindo importantes aspectos dessas eletrodinâmicas modificadas.

Palavras-chave: Física Além do Modelo Padrão, Eletrodinâmica Estendida, Axions, Fótons Escuros, Efeito Primakoff.

Abstract

Despite the tremendous success of the Standard Model of elementary particles (SM), there remain open questions that challenge it, such as the enigma of dark energy and the spectrum of dark matter. These limitations pave the way for new physical theories beyond the SM, among which we can mention several extensions of Maxwell's usual electrodynamics (ED). Within this context of extended electrodynamics, we propose a theoretical analysis of EDs involving Axions and Dark Photons. This analysis has an exploratory character, aiming to identify specific features of these theories in comparison with conventional electrodynamics. We consider field equations and conservation laws, as well as other general aspects of the models. Next, we repeat the same analysis in the presence of a constant magnetic background and include a study of the optical properties and propagation of these electromagnetic waves. Furthermore, we explore the Primakoff effect, which consists of the conversion of Axions into Photons, as well as the conversion of Photons into Dark Photons, in the presence of intense external magnetic fields. Axions and Dark Photons, although hypothetical, are strongly motivated from a theoretical standpoint and constitute excellent candidates to compose the dark matter spectrum. The main experiments dedicated to this search are based precisely on the Primakoff effect. As this is an active research field, new preprints are published weekly; however, the literature still lacks a detailed discussion of some of the more fundamental aspects of the topic. Thus, this dissertation seeks to enrich the literature with a contribution that is both didactic and original, by addressing important features of these modified electrodynamics theories.

Keywords: Beyond Standard Model Physics, Extended Electrodynamics, Axions, Dark Photons, Primakoff Effect.

Sumário

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Contextualização | 1 |
| 2 | Eletrodinâmica Axiônica | 6 |
| 2.1 | O Modelo | 7 |
| 2.1.1 | Equações da Eletrodinâmica Axiônica | 11 |
| 2.1.2 | Diferentes Abordagens e Interpretações da ED Axiônica | 13 |
| 2.2 | O Modelo Expandido em Fundo Eletromagnético | 15 |
| 2.2.1 | Equações da ED Axiônica em um fundo Magnético Constante | 15 |
| 2.3 | A Onda Eletromagnética | 17 |
| 2.3.1 | Contando os Graus de Liberdade da ED Axiônica | 22 |
| 2.3.2 | Análise de Quantidades Ópticas | 26 |
| 3 | Eletrodinâmica na presença de Axions e Fótons Escuros | 34 |
| 3.1 | O Modelo Expandido em Fundo Eletromagnético | 36 |
| 3.1.1 | Equações da ED na presença de um Fundo Magnético Constante | 37 |
| 3.2 | As Relações de Dispersão Modificadas e Quantidades Ópticas Associadas | 39 |
| 3.2.1 | Caso do Fóton Escuro sem Massa | 39 |
| 3.2.2 | Caso do Fóton Escuro Massivo | 42 |
| 4 | Os Propagadores e o Efeito Primakoff | 45 |
| 4.1 | Os Propagadores para a ED Axiônica | 45 |
| 4.2 | Os Propagadores para a ED na presença de Axions e Fótons Escuros | 47 |
| 4.2.1 | O Caso Massivo | 47 |
| 4.2.2 | O Caso sem Massa | 48 |
| 4.3 | Efeito Primakoff | 50 |
| 5 | Considerações Finais | 55 |
| A | Levantamento de Extensões Eletrodinâmicas | 58 |
| B | Algumas Identidades, Convenções e Resultados | 62 |
| B.1 | Identidades Envolvendo o Tensor de Levi-Civita | 63 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| C | Tensor Energia-Momento | 67 |
| C.1 | Tensor Energia-Momento da ED Axiônica | 68 |
| C.2 | Tensor Energia-Momento da ED Axiônica em Fundo Magnético Constante | 71 |
| C.3 | Tensor Energia-Momento da ED na Presença de Axions e Fótons Escuros | 73 |
| C.4 | Tensor Energia-Momento da ED na presença de Axions e Fótons Escuros Expandida em Fundo Magnético Constante | 76 |
| D | Como Contar Graus de Liberdade em uma Teoria de Calibre Abeliana | 79 |
| E | Inversão de Matrizes em Blocos | 82 |
| | Referências | 88 |

Capítulo 1

Contextualização

O Modelo Padrão da Física de Partículas Elementares (MP) é, até o momento, a teoria física de maior sucesso já desenvolvida. Descrevendo com altíssima precisão muitos dos fenômenos que dizem respeito à matéria ordinária e às formas pelas quais a mesma interage. No entanto, além de não contemplar as interações gravitacionais, existem outras lacunas expostas por questões que tensionam o MP.

Algumas dessas questões são mais imediatas, como as evidências que sugerem a existência de matéria [1] e energia escura [2], assim como a assimetria matéria/anti-matéria [3, 4]. Por outro lado, temos questões menos imediatas, mas de igual importância, como a questão da origem da massa do bóson de Higgs e o problema da hierarquia de *gauge* [5]. Seja como for, é consenso na comunidade de física a ideia de que o MP não deve ser o final da história.

Essas tensões que evidenciam os limites do MP, ao mesmo tempo, abrem caminho para novas propostas que buscam descrever essas mensagens de física além do MP. Uma forma de buscar esse entendimento é através de extensões do Eletromagnetismo (EM). Existem diversas propostas para estender o EM, incluindo anisotropias espaço-temporais, efeitos de não linearidade, indo para dimensões mais altas ou mais baixas, ou mesmo realizando o acoplamento do fóton com partículas hipotéticas, como é o caso da Eletrodinâmica (ED) Axiônica e da ED na presença de Axions e Fótons Escuros. Um levantamento atualizado das propostas de extensões do EM pode ser encontrado no Apêndice A. Neste trabalho destacaremos o potencial das EDs acopladas a partículas hipotéticas como um excelente laboratório para perscrutar a física além do MP, seguindo a linha de trabalhos que já são realizados no nosso grupo de pesquisa, como por exemplo a possibilidade de considerar efeitos de não-linearidade em uma ED Axiônica [6, 7].

As partículas aqui chamadas genericamente de Axions podem ser Axions associados à Cromodinâmica Quântica (QCD) ou *Axion-like Particles* (ALPs), em português partículas tipo-Axion, surgidos naturalmente em cenários de teorias efetivas variadas. O Axion da QCD surge como um bóson pseudoescalar hipotético no final da década de 1970, proveniente da

quebra espontânea da simetria de Peccei-Quinn (PQ), introduzida através do mecanismo de PQ [8,9]. Esse mecanismo foi elaborado para buscar o entendimento sobre a invariância das interações fortes perante transformações de conjugação de carga e paridade (CP).

A aparente invariância das interações fortes perante transformações de CP constitui para uma boa parcela da comunidade uma outra questão importante que tensiona o MP. Assim como as interações fracas, as interações fortes são regidas por um grupo de simetria interna não-Abeliano. Portanto, possui uma degenerescência de vácuo [10]. Essa degenerescência é escrita na forma de um termo topológico regulado pelo parâmetro θ [10]. Esse é um termo violador de CP e, portanto, deveria se traduzir em um momento de dipolo elétrico (EDM) para o nêutron (d_n) [11]. No entanto, o incômodo surge justamente do fato de os experimentos limitarem superiormente o EDM do nêutron a um valor bem menor do que o esperado teoricamente, que seria da ordem de $d_n \sim 10^{-16}\theta e\cdot\text{cm}$ [12,13]. O limite experimental atual para o EDM do nêutron é $d_n < 1,8 \times 10^{-26} e\cdot\text{cm}$ [14]. Para reproduzir esse resultado, seria necessário que o parâmetro θ apresentasse um limite superior da ordem de $\theta \lesssim 10^{-10}$. Acontece que nada formulação da QCD justifica um valor tão pequeno para θ . Dessa forma, seria necessário um ajuste muito fino para reproduzir os dados experimentais ou encontrar outra forma para lidar com a degenerescência de vácuo da QCD. Isto posto, entra cena o mecanismo de PQ, pois ele resolve dinamicamente esse que é conhecido como o problema de CP forte.

O conceito de Axion se consolidou, ainda no fim da década de 1970, quando Frank Wilczek e Steven Weinberg, de maneira independente, analisaram as consequências físicas do mecanismo de PQ e identificaram as propriedades dessa nova partícula que surge naturalmente na QCD quando a simetria de PQ é implementada. Nos artigos publicados quase simultaneamente, ambos mostraram que o Axion seria uma partícula muito leve, de longa vida e com acoplamentos extremamente fracos às partículas conhecidas [15,16]. Para uma revisão contemporânea sobre o Axion da QCD veja [17].

Por outro lado, os ALPs são uma classe mais genérica de partículas que compartilham algumas propriedades com o Axion da QCD, mas não estão necessariamente ligados à QCD e ao problema de CP forte. Eles surgem em muitas teorias além do Modelo Padrão, como a supersimetria, a teoria de cordas, a dualidade com a 2-forma de *gauge* (ou campo de Kalb-Ramond), entre outros [18–25].

Uma diferença notável entre as duas versões do Axion é o espectro de massa, um ALP pode ter sua massa numa faixa muito mais ampla do que o Axion da QCD, que está restrita a faixa de micro a mili elétron-volts [26]. Em um acoplamento com fótons, por exemplo, podemos observar no mapa de exclusão, Figura 1, a enorme faixa de valores permitidos para a sua massa e constante de acoplamento. Já um ponto importante em comum é que ambas as classes de Axions são candidatas importantes para compor o espectro de matéria escura fria do universo [27–31]. Os Axions da QCD, como já mencionamos, são partículas muito leves que interagem de maneira sutil, assim como os ALPs para certas massas e acoplamentos. Partículas com

essas características poderiam ser abundantes sem interagir significativamente com a matéria ordinária.

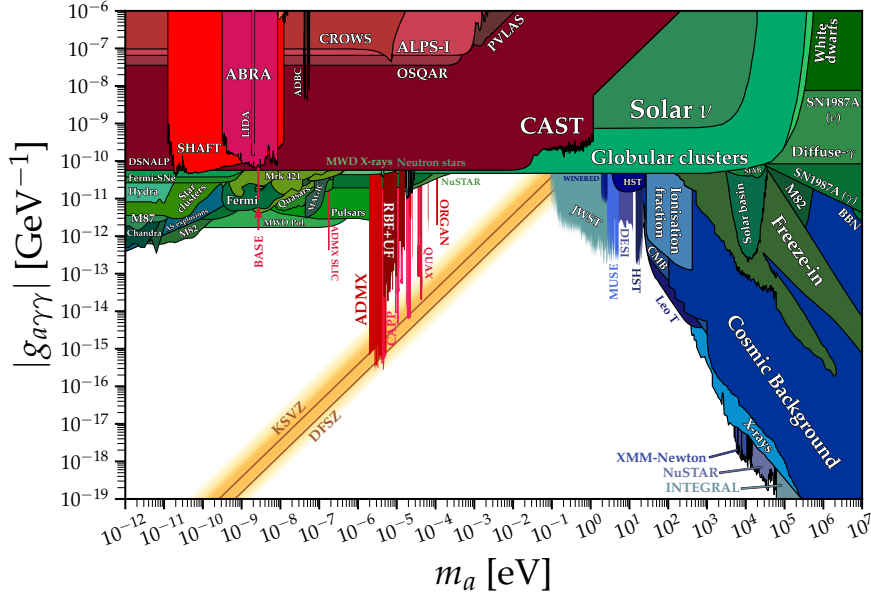


Figura 1 – Mapa de exclusão para massa e constante de acoplamento de ALPs acoplados com fótons [32].

Ambas as classes são amplamente estudadas, tanto teoricamente quanto experimentalmente, considerando seus possíveis acoplamentos. Muitos experimentos atuais são focados em detectar sinais de Axions da QCD e ALPs, especialmente no contexto de matéria escura [33–35]. A detecção de Axions é um desafio experimental significativo e várias técnicas foram propostas para buscar essa detecção, onde podemos citar como as principais classes de experimentos: haloscópios, helioscópios, experimentos *Light-Shining-Through-a-Wall*, telescópios de raios gama e raios X além de experimentos *tabletop*. Cada técnica aborda diferentes características dos Axions, sejam seus mecanismos de produção, conversão em fótons ou efeitos gravitacionais. Para referências específicas de cada tópico veja [32, 36–40].

De todos os acoplamentos possíveis para o Axion, a interação mais explorada experimentalmente é o seu acoplamento com dois Fótons, que aparece no modelo da ED Axiônica. Além de percorrer os cenários cosmológicos, astrofísicos e de altas energias, esse modelo tem ganhado espaço como teoria efetiva na física da matéria condensada [41–46]. Vale a pena ressaltar o trabalho de revisão [42], que aponta para as primeiras assinaturas de estados eletrônicos compatíveis com a dinâmica do Axion que já foram relatadas em sistemas de matéria condensada além de explorar os conceitos que introduzem os Axions como protagonistas destas realizações experimentais.

Entender as modificações que o acoplamento Axion-Fóton proporciona à ED usual abre portas para a exploração de novos fenômenos físicos ou mesmo a correção de resultados conhecidos devido à presença sutil do Axion. Nesse sentido, o Capítulo 2 deste trabalho é elaborado buscando formalizar resultados teóricos a partir de primeiros princípios, contribuindo

com uma discussão detalhada do ponto de vista teórico da ED Axiônica. Em seguida, estendemos as ideias discutidas no Capítulo 2 para um modelo mais geral, uma ED na presença de Axions e Fótons Escuros, apresentado no Capítulo 3. De forma geral, essa eletrodinâmica se resume a uma ED Axiônica usual e uma ED Axiônica para o Fóton Escuro, misturadas através de um vértice de interação entre o Axion, Fóton e Fóton Escuro. Esse vértice funciona como um portal entre o setor ordinário e o setor escuro do universo, o que tornará possível a discussão do Efeito Primakoff no Capítulo 4.

O Fóton Escuro é um bóson vetorial cuja existência foi conjecturada à imagem e semelhança dos bósons de *gauge* do MP. Essa nova partícula é dita escura, pois se apresenta como um mediador associado a um novo grupo de simetria, $U(1)_{\text{Escuro}}$, sem relação imediata com as interações do MP. A ideia de considerar um novo bóson de *gauge*, semelhante ao fóton, foi introduzida pela primeira vez no contexto da supersimetria [47, 48], sendo generalizada mais tarde. Uma excelente introdução à física do Fóton Escuro pode ser encontrada no livro [49], além de excelentes revisões sobre o tema disponíveis nos artigos [50, 51].

Uma forma de acessar e sondar esse setor escuro é por meio da mistura cinética do Fóton Escuro com o Fóton ordinário, proposta em diferentes cenários [52–56]. Aqui trabalhamos com o modelo explorado na referência [54]. Esse modelo é diagonalizado nos setores cinéticos de *gauge* ordinário e escuro, apresentando mistura entre estes dois setores devido à presença de um termo de interação com o Axion. O modelo faz distinção entre o Fóton Escuro massivo e o Fóton Escuro sem massa, onde a priori, como veremos no Capítulo 3, o Fóton Escuro massivo se acopla diretamente às correntes do MP, o que o torna mais acessível experimentalmente. Na Figura 2 podemos observar o mapa de exclusão (construído a partir dos dados mais recentes) para o Fóton Escuro massivo, considerando o espaço de parâmetros formado pelo fator de mistura cinética com o Fóton usual e sua massa. Ao longo dos Capítulos 3 e 4 temos o cuidado de considerar separadamente cada um dos casos.

Assim como o Axion, o Fóton Escuro é um dos possíveis candidatos a compor o setor de matéria escura leve do universo e vem sendo procurado em diferentes frentes experimentais, que incluem desde balanças de torção e interferometria atômica até experimentos especializados como ABRACADABRA, DM Radio, HAYSTAC e ADMX. Para mais informações sobre as buscas experimentais dessa partícula, veja [57–66]. Outra característica em comum com o Axion é que essa partícula surge naturalmente em alguns cenários de teoria de cordas e possui um paralelo com o campo de Kalb-Ramond massivo [24, 25, 67]. Ademais, modelos com Fótons Escuros já encontram uma excelente resposta na análise de dados da QCD na rede [68–70].

Uma forma de explorar a nova Física que pode advir dessas duas novas classes de partículas, Axions (ALPs) e Fótons Escuros (Fótons escondidos, Parafótons), é através da ED modificada em sua presença. Dessa forma, elaboramos no Capítulo 3, assim como fizemos no Capítulo 2, o modelo da ED na presença de Axions e Fótons Escuros, explorando suas equações de campo, o tensor Energia-Momento e, em um segundo momento, realizamos a expansão do

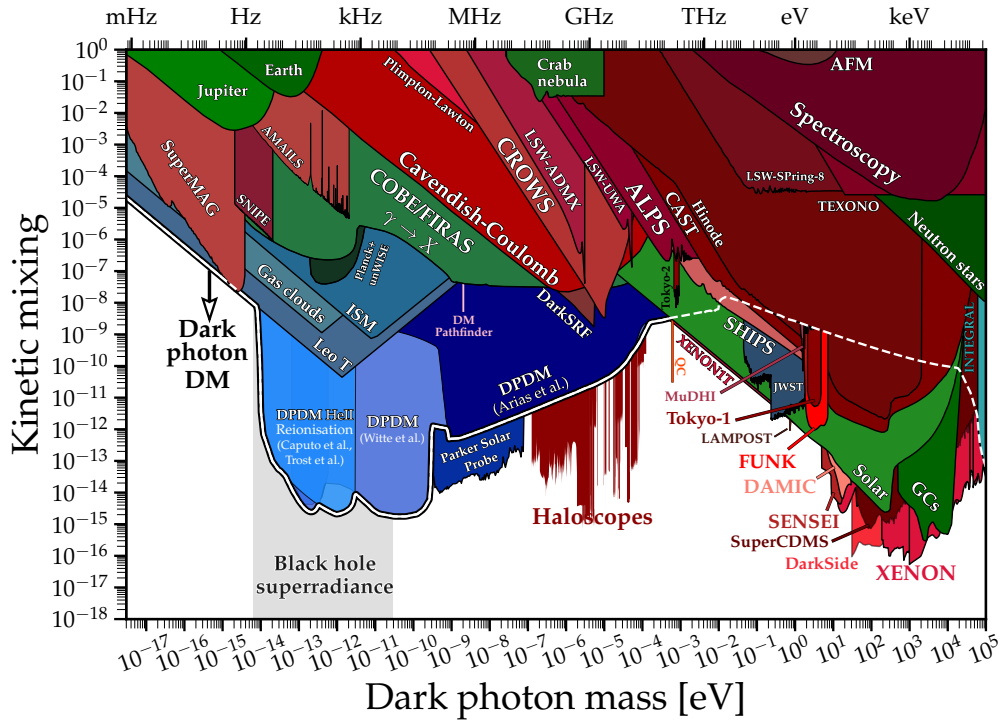


Figura 2 – Mapa de exclusão para massa do Fóton Escuro e parâmetro de mistura cinética de Fótons e Fótons Escuros [57].

modelo em fundo eletromagnético, nos restringindo ao caso de um campo magnético constante. Nesse cenário, obtemos as equações de campo, agora linearizadas, bem como o tensor Energia-Momento, que apresenta modificações no cenário com anisotropia. Por fim, exploramos a relação de dispersão modificada e quantidades ópticas associadas para os casos não massivos e massivos.

Em seguida, no Capítulo 4, exploramos as matrizes de mistura de ambos os modelos e buscamos pelos propagadores modificados da teoria, bem como os propagadores mistos, a partir dos quais conduzimos uma discussão sobre a possibilidade de transição Fóton-Axion, Axion-Fóton Escuro e a transição Fóton-Fóton Escuro mediada pela presença do Axion, que funciona como um portal entre o setor ordinário e o setor escuro. Essa possibilidade de transição entre as partículas é conhecida como Efeito Primakoff e fazemos uma pequena discussão trazendo alguns aspectos bastante discutidos na literatura sobre esse efeito.

Por fim, no Capítulo 5, finalizamos o trabalho discutindo algumas consequências da exploração realizada, ressaltando aspectos interessantes e originais, bem como algumas limitações da nossa abordagem. Dessa forma, encerramos trazendo algumas perspectivas futuras.

Começamos o trabalho utilizando unidades no Sistema Internacional (SI), para fins de didática. Posteriormente, transicionamos para o sistema de unidades naturais, considerando $\hbar = c = 1$. Ademais, adotamos a assinatura da métrica de Minkowski como $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -)$.

Capítulo 2

Eletrodinâmica Axiônica

A Eletrodinâmica Axiônica emerge como uma extensão da Eletrodinâmica tradicional, modificada pela adição de um termo topológico do tipo $\sim aF_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$, que guarda o conteúdo da dinâmica de um campo Axiônico — ou do tipo Axion — acoplado ao setor eletromagnético. A primeira proposta de ED Axiônica foi feita por Frank Wilczek, em 1978, no trabalho [16], sendo motivada pela tentativa de compreender que tipo de física poderia emergir como consequência da introdução de um novo pseudoescalar, que surge naturalmente da quebra espontânea da simetria de Peccei–Quinn, formulada para justificar a aparente não violação de CP na QCD. Esse acoplamento modifica as equações de Maxwell de forma sutil, mas potencialmente observável, especialmente na presença de campos magnéticos intensos ou em ambientes astrofísicos extremos.

Como vimos no Capítulo 1, atualmente a ED Axiônica encontra aplicações em diversas frentes da física: na cosmologia, fornece uma das candidatas mais bem motivadas à matéria escura e pode ter desempenhado papel relevante na magnetogênese; na astrofísica, afeta a propagação de Fótons em meios magnetizados, sendo relevante para o estudo de pulsares, magnetares e núcleos estelares; e na física experimental de partículas, guia o desenho de experimentos de busca direta por Axions ou partículas similares, como CAST, ADMX e IAXO. Além disso, versões efetivas dessa teoria têm sido utilizadas na matéria condensada, especialmente no contexto de isolantes topológicos tridimensionais, onde o termo $\theta F\tilde{F}$ surge como uma descrição emergente da resposta eletromagnética. A ED Axiônica, portanto, não apenas conecta diferentes escalas e regimes da física, como também oferece uma janela teórica e experimental para além do Modelo Padrão.

Nesse sentido, exploramos, neste capítulo, uma revisão do modelo da ED axiônica, destacando alguns aspectos teóricos relevantes, tais como as simetrias de calibre e paridade. Obtemos as regras de Feynman e analisamos a renormalizabilidade do modelo via contagem de potências. Em seguida, obtemos explicitamente as equações de Maxwell modificadas, as equações de onda e o tensor Energia-Momento. Exploramos, ainda, algumas possibilidades de como esses resultados podem ser interpretados em diferentes escalas de energia. Dentre essas

possibilidades, adotamos a expansão do modelo na presença de um campo eletromagnético de fundo, restringindo-nos ao caso de um campo magnético constante como uma estratégia de linearização do modelo, e exploramos as consequências teóricas e fenomenológicas desse cenário, através do estudo das equações de campo, do tensor Energia-Momento modificado, das relações de dispersão modificadas e das quantidades ópticas associadas.

2.1 O Modelo

A ação que descreve a eletrodinâmica Axiônica em unidades do SI é dada por

$$S = \frac{1}{c} \int d^4x \left(-\frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial^\mu a \partial_\mu a - \frac{1}{2} \xi a^2 - \frac{1}{4\mu_0} G_{\alpha\gamma\gamma} a \tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - A_\mu J^\mu \right), \quad (2.1)$$

onde c é a velocidade da luz e μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo. Essa ação é invariante perante transformações de calibre, uma vez que o Fóton é não massivo e o Axion é um campo escalar real (não carregado eletricamente), ou seja, tem simetria de calibre trivialmente satisfeita. Podemos identificar que (2.1) é composta pela teoria eletrodinâmica de Maxwell,

$$\mathcal{L}_\gamma = -\frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - A_\mu J^\mu, \quad (2.2)$$

em que

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (2.3)$$

é o tensor de intensidade eletromagnética (*field strength*), e

$$A_\mu = \left(\frac{1}{c} \phi, -\mathbf{A} \right) \quad (2.4)$$

é o quadripotencial que representa o campo do Fóton. Sua componente temporal corresponde ao potencial escalar do eletromagnetismo, e sua componente espacial, ao potencial vetor. Lembrando que o campo elétrico \mathbf{E} pode ser expresso em termos dos potenciais como

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t \mathbf{A}, \quad (2.5)$$

e que o campo magnético \mathbf{B} é dado por

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (2.6)$$

podemos definir o invariante relativístico

$$\mathcal{F} \equiv -\frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2 \right). \quad (2.7)$$

Além desse termo, identificamos um segundo que descreve a interação da radiação com a matéria, em que

$$J_\mu = (c\rho, -\mathbf{j}), \quad (2.8)$$

é a quadricorrente eletromagnética, cuja componente temporal corresponde à densidade de carga e cuja componente espacial corresponde à densidade de corrente elétrica, de forma que

$$A_\mu J^\mu = \phi\rho - \mathbf{A} \cdot \mathbf{j}. \quad (2.9)$$

A partir dessa Lagrangiana, obtemos as equações de Maxwell não homogêneas. Para isso, basta aplicar o princípio variacional ao campo do Fóton ou, caso se prefira não utilizar a notação covariante, aplicar o mesmo princípio diretamente aos potenciais.

Nesta ação, também identificamos a densidade Lagrangiana de um campo escalar real, dada por

$$\mathcal{L}_a = \frac{1}{2} \partial^\mu a \partial_\mu a - \frac{1}{2} \xi a^2, \quad (2.10)$$

onde a é o campo do Axion e o parâmetro ξ corresponde ao quadrado do inverso do comprimento de Compton do Axion λ_a , identificado como*

$$\xi \equiv \left(\frac{1}{\lambda_a}\right)^2 = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}, \quad (2.11)$$

sendo m a massa do Axion e \hbar a constante de Planck dividida por 2π .

Por fim, há uma Lagrangiana de interação,

$$\mathcal{L}_{a\gamma\gamma} = -\frac{1}{4\mu_0} G_{a\gamma\gamma} a \tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (2.12)$$

onde $G_{a\gamma\gamma}$ é a constante de acoplamento Axion-Fóton-Fóton. A forma e o valor dessa constante são dependentes do modelo, e variam conforme o mecanismo de produção do Axion e se ele corresponde a um Axion da QCD ou a um ALP [31]. Já $\tilde{F}^{\mu\nu}$ é o dual do *field strength*, dado por

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}, \quad (2.13)$$

de maneira que podemos definir um segundo invariante relativístico para o eletromagnetismo,

$$\mathcal{G} \equiv -\frac{1}{4\mu_0} \tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = c\varepsilon_0 \mathbf{B} \cdot \mathbf{E}, \quad (2.14)$$

onde ε_0 é a permissividade elétrica do vácuo.

A ação de uma teoria contém todo seu conteúdo físico. Dessa forma, antes de nos voltarmos às equações de movimento, exploraremos algumas consequências físicas ainda no nível da ação. Em particular, estamos interessados no acoplamento Axion-Fóton-Fóton.

Nesse caso, o primeiro ponto de interesse é entender as consequências da invariância do vértice sob transformações de paridade \mathcal{P} , que levam \mathbf{x} em $-\mathbf{x}$. Devemos analisar como o invariante relativístico \mathcal{G} se comporta sob esse tipo de transformação,

$$\mathcal{P}\mathcal{G} = c\varepsilon_0 \mathcal{P}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{E}) = c\varepsilon_0 \mathcal{P}\mathbf{B} \cdot \mathcal{P}\mathbf{E}. \quad (2.15)$$

*Para chegar a essa conclusão, basta considerar a equação de onda do campo escalar no espaço dos *momentos* e compará-la com a relação de dispersão relativística, levando em conta as relações de de Broglie.

Uma vez que campo elétrico é de natureza vetorial

$$\mathcal{P}\mathbf{E} = -\mathbf{E},$$

e o campo magnético é pseudo-vetorial

$$\mathcal{P}\mathbf{B} = \mathbf{B},$$

conclui-se que o invariante relativístico \mathcal{G} deve ser um pseudo-escalar

$$\mathcal{P}\mathcal{G} = -c\varepsilon_0\mathbf{B} \cdot \mathbf{E} = -\mathcal{G}.$$

Assim fica claro que a transformação sobre o Axion deve ser tal que,

$$\mathcal{P}a = -a.$$

Ou seja, independentemente do mecanismo de produção ou quaisquer outras particularidades que possam ser assumidas para esse Axion, nesse modelo ele deve ser necessariamente um pseudo-escalar. Todavia, existem outros acoplamentos possíveis para os quais o Axion será um escalar genuíno, como por exemplo o acoplamento

$$\sim aF^{\mu\nu}F_{\mu\nu},$$

explorado em maiores detalhes em [71].

Outra consequência importante, emerge do fato de este vértice também ser um termo dito topológico, no sentido de que não há contração com a métrica,

$$\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu} \neq F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\beta\nu}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}.$$

Termos desse tipo, em cenários isotrópicos, não contribuem para o tensor energia-momento, já que o tensor depende explicitamente da variação da ação em relação à métrica. Dessa forma, podemos prever que o tensor energia-momento da teoria será

$$T^\mu{}_\rho = (T_\gamma)^\mu{}_\rho + (T_a)^\mu{}_\rho,$$

ou seja, uma simples soma dos tensores da teoria eletromagnética de Maxwell e da teoria de um campo escalar real.

Ademais, considerando unidades naturais e performando uma análise dimensional do vértice, podemos observar que

$$[G_{a\gamma\gamma}] = M^{-1}.$$

A potência negativa na dimensão de massa da constante de acoplamento inverte o sinal do número de vértices $V_{a\gamma\gamma}$ na análise do grau superficial de divergência \mathcal{D} . Nesse caso, \mathcal{D} é dado explicitamente por

$$\mathcal{D} = V_{a\gamma\gamma} + 4 - B_E, \tag{2.16}$$

onde B_E é o número de pernas externas bosônicas. Um grau superficial de divergência com número de vértices positivo implica a não renormalizabilidade do modelo. Fixando o número de pernas externas $B_E = n$, é fácil perceber que, a partir de determinada ordem na expansão da função de n pontos, todos os diagramas tornar-se-ão progressivamente mais divergentes. Nesse caso, seriam necessários infinitos contratermos para renormalizar todos esses diagramas. Um modelo não renormalizável corresponde a uma teoria efetiva. Isso não representa um problema grave nem é motivo de pânico, como nos alertou Weinberg [72]. As teorias efetivas têm seu valor e são muito úteis dentro de um certo limite de energia. Esse limite superior dependerá das particularidades do Axion em questão e dos processos de interesse.

Por fim, podemos levar a ação para o espaço dos momentos (trabalhando com a frequência angular e o número de onda por meio das relações de de Broglie), escrevendo-a na forma

$$S = \frac{1}{c} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ -\frac{1}{2\mu_0} \tilde{A}_\mu(-k) \left[k^2 \eta^{\mu\nu} - (1-\alpha) k^\mu k^\nu \right] \tilde{A}_\nu(k) + \frac{1}{2} \tilde{a}(-k)(k^2 - \xi) \tilde{a}(k) + \frac{G_{a\gamma\gamma}}{2\mu_0} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} k_\mu k'_\alpha \tilde{a}(q) \tilde{A}_\nu(k) \tilde{A}_\beta(k') \right\}, \quad (2.17)$$

onde $q = -(k + k')$ e α é o parâmetro de fixação de calibre, responsável por quebrar a simetria de calibre que levaria à não inversibilidade do setor quadrático do fóton. As convenções utilizadas para a transformada de Fourier encontram-se no Apêndice B. A partir da ação (2.17), podemos obter as regras de Feynman. Invertendo os setores quadráticos do Fóton e do Axion, respectivamente, e multiplicando por i , obtemos

$$\text{~~~~~} = G^{\mu\nu}(k) = -\frac{i}{k^2} \left(\eta^{\mu\nu} - (1-\alpha) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) \quad (2.18)$$

o propagador livre do Fóton, assim como

$$\text{-----} = D(k) = \frac{i}{k^2 - \xi} \quad (2.19)$$

o propagador livre do Axion. Já a regra do vértice é obtida tomando-se derivadas funcionais do termo de interação Axion–Fóton–Fóton, de maneira que resta

$$i \frac{\delta^3 S_{\text{int}}}{\delta \tilde{a}(k_1) \delta \tilde{A}_\rho(k_2) \delta \tilde{A}_\lambda(k_3)} = \text{-----} \begin{array}{c} \nearrow k_2 \\ \text{~~~~~} \\ \searrow k_3 \end{array} \begin{array}{c} \rho \\ \lambda \end{array} = i \frac{G_{a\gamma\gamma}}{2\mu_0 c} \varepsilon_{\mu\alpha\rho\lambda} (k_3^\mu k_2^\alpha - k_2^\mu k_3^\alpha). \quad (2.20)$$

Como visto, todos os diagramas envolvendo *loops* apresentarão divergências; dessa forma, será necessário realizar o procedimento de renormalização para os processos de interesse até uma certa ordem ou estabelecer uma escala de corte na energia.

2.1.1 Equações da Eletrodinâmica Axiônica

Levando o modelo ao próximo nível de análise, realizamos a variação funcional da ação nos setores do Fóton e do Axion, o que nos conduz às equações de Maxwell não homogêneas

$$\partial_\mu(F^{\mu\nu} + G_{a\gamma\gamma}a\tilde{F}^{\mu\nu}) = \mu_0 J^\nu, \quad (2.21)$$

e à equação de Klein–Gordon não homogênea para o Axion

$$(\square + \xi)a = -\frac{1}{4\mu_0}G_{a\gamma\gamma}\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \quad (2.22)$$

Como não estamos considerando um cenário com monopolo magnético, permanece válida a identidade de Bianchi

$$\partial_\mu\tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \quad (2.23)$$

ou, escrita de outra forma,

$$\partial_\mu F_{\nu\kappa} + \partial_\kappa F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\kappa\mu} = 0, \quad (2.24)$$

onde ambas as formas são completamente equivalentes, como mostrado no Apêndice B. A identidade de Bianchi corresponde às equações de Maxwell homogêneas.

Em um cenário de eletrodinâmica não modificada, no vácuo, pode-se observar a simetria de dualidade das equações de Maxwell, fazendo

$$\tilde{F}^{\mu\nu} \leftrightarrow F^{\mu\nu},$$

já que

$$\partial_\mu\tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad \text{e} \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0.$$

Agora, no caso da eletrodinâmica Axiônica observamos uma quebra explícita da simetria de dualidade, mesmo no vácuo, uma vez que

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -G_{a\gamma\gamma}(\partial_\mu a)\tilde{F}^{\mu\nu}.$$

Existe ao menos uma proposta para se recuperar a simetria de dualidade para esse modelo explorada em detalhes na referência [73]. No artigo, o autor introduz um monopolo magnético nas equações de Maxwell da ED axiônica. Em seguida, realiza uma redefinição de campos por meio de uma rotação e, então, escolhe um ângulo de rotação tal que a presença do monopolo magnético não é percebida, porém remanesce a simetria dual.

A forma vetorial das equações de Maxwell é dada, para a Lei de Gauss do campo elétrico, como

$$\nabla \cdot \mathbf{E} + c G_{a\gamma\gamma} \nabla a \cdot \mathbf{B} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (2.25)$$

para a lei de Faraday-Lenz,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad (2.26)$$

para a lei de Gauss do campo magnético,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.27)$$

além de,

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} G_{a\gamma\gamma} \nabla a \times \mathbf{E} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E} + \frac{1}{c} G_{a\gamma\gamma} (\partial_t a) \mathbf{B}, \quad (2.28)$$

para a lei de Ampère-Maxwell. As equações de onda, por sua vez, são dadas por

$$\square \mathbf{E} = -\frac{1}{c} G_{a\gamma\gamma} \partial_t [\nabla a \times \mathbf{E} + (\partial_t a) \mathbf{B}] + c G_{a\gamma\gamma} \nabla (\nabla a \cdot \mathbf{B}), \quad (2.29)$$

além de

$$\square \mathbf{B} = \frac{1}{c} G_{a\gamma\gamma} \nabla \times [\nabla a \times \mathbf{E} + (\partial_t a) \mathbf{B}], \quad (2.30)$$

e, por fim,

$$(\square + \xi)a = c \varepsilon_0 G_{a\gamma\gamma} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{E}). \quad (2.31)$$

A partir da ação (2.1), podemos também obter as leis de conservação da ED Axiônica. Para tanto, precisamos escrever a equação da continuidade

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = F_{\mu\nu} J^\nu, \quad (2.32)$$

onde $T^{\mu\nu}$ é o tensor Energia-Momento da teoria. Quando (2.32) é igual a zero, temos a conservação do tensor Energia-Momento, devido as simetrias de translação temporal e espacial presentes na ação. Em geral, a forma de se obter o tensor Energia-Momento é via tensor canônico de Noether, que pode ser obtido a partir da aplicação do Teorema de Noether, para mais detalhes consulte, por exemplo, a referência [74].

Antes de seguir com a discussão do modelo, vale ressaltar que este ano completam-se 90 anos do fim da breve vida de Amalie Emmy Noether, assim como 107 anos da publicação do artigo [75], “*Invariante Variationsprobleme*”, de 1918, no qual são apresentados os dois teoremas de Noether. Ela nos guiou à compreensão da origem fundamental das leis de conservação na física: às simetrias! Considerados uma das mais importantes conquistas do século XX para a Física, seus teoremas colocaram o conceito de simetria nas bases de toda a construção do Modelo-Padrão das Partículas Elementares, reconhecido como a teoria mais bem-sucedida da física até o momento. Suas contribuições inestimáveis continuam repercutindo até hoje, diariamente, no trabalho de inúmeros físicos e matemáticos, nesse sentido, recomendamos as leituras bastante didáticas [76, 77] que complementam esse breve comentário.

De qualquer maneira, como vimos, o tensor Energia-Momento da ED Axiônica resume-se a simples soma dos tensores individuais dos campos do Fóton e do Axion. O tensor referente ao Axion é trivialmente obtido via tensor canônico de Noether,

$$(T_a)^\mu{}_\rho = (\partial^\mu a)(\partial_\rho a) - \frac{1}{2}\delta^\mu{}_\rho \left((\partial^\nu a)(\partial_\nu a) - \xi a^2 \right), \quad (2.33)$$

enquanto o tensor referente ao Fóton, embora seja obtido a partir do tensor canônico, requer um procedimento extra de simetrização - o procedimento de Belinfante - resultando em

$$(T_\gamma)^\mu{}_\rho = \frac{1}{\mu_0} \left(F^{\mu\nu} F_{\nu\rho} + \frac{1}{4}\delta^\mu{}_\rho F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right). \quad (2.34)$$

Uma forma alternativa para a obtenção desses resultados pode ser vista no Apêndice C.

Também veremos a seguir, na seção 2.2.1, que em um cenário com anisotropias, diferentemente do caso atual, teremos modificações no tensor Energia-Momento da teoria, o que resultará em modificações nas nossas leis de conservação, modificando por exemplo a força de Lorentz. Essas modificações abrirão caminho para novas possibilidades de exploração de física além do MP.

2.1.2 Diferentes Abordagens e Interpretações da ED Axiônica

Uma forma de interpretar as equações de Maxwell para a ED Axiônica é comparando-as às equações da ED de Maxwell em meios materiais. Ou seja, devido ao acoplamento com o Axion, podemos num primeiro momento interpretar o vácuo como um meio material. Reorganizando a Lei de Gauss para o campo elétrico obtemos

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{livre}, \quad (2.35)$$

de forma que identificamos o vetor deslocamento \mathbf{D} como

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P},$$

onde \mathbf{P} é o vetor de polarização dado por

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 G_{a\gamma\gamma} a c \mathbf{B}.$$

Por outro lado, temos a equação de Ampère-Maxwell, que pode ser reescrita como

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_{livre} + \partial_t \mathbf{D}, \quad (2.36)$$

onde o vetor intensidade magnética \mathbf{H} é identificado como

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M},$$

onde \mathbf{M} é o vetor de magnetização, identificado como

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\mu_0} G_{a\gamma\gamma} a \frac{\mathbf{E}}{c}.$$

A forma da polarização e da magnetização corresponde a um meio linear, homogêneo e isotrópico. Pensando apenas no vácuo, ignorando as cargas e correntes livres, estaríamos atribuindo uma suscetibilidade elétrica e magnética, $\chi = G_{a\gamma\gamma}a$, a esse vácuo. Quer dizer, o conteúdo desse vácuo não seriam apenas Pósitrons e Elétrons, mas também Axions, e a interação dos fótons com o vácuo excitaria todas essas partículas, gerando uma polarização e magnetização efetivas.

Por outro lado, se saímos do domínio de altas energias e vamos para um cenário de Física da Matéria Condensada, podemos encontrar alguns trabalhos que utilizam essa abordagem da eletrodinâmica Axiônica como um eletromagnetismo efetivo para descrever fenômenos em materiais topológicos, em geral tratando o Axion não mais como um campo mas como um parâmetro que guarda informação sobre a topologia do material ou como um condensado, de forma que podemos escrever densidades de carga e corrente efetivas. Alguns trabalhos nessa linha, onde pode-se obter mais detalhes sobre essa abordagem são [41–46].

Seguindo uma linha um pouco diferente da anterior, uma outra forma de interpretar a ED Axiônica, é relacionando alguns casos particulares dessa ED à ED de Carroll-Field-Jackiw (CFJ), onde a Lagrangiana que descreve a ED de CFJ é dada por [78],

$$\mathcal{L}_{\text{CFJ}} = -\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\mu_0}v_\mu\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}A_\nu F_{\alpha\beta} - J_\mu A^\mu, \quad (2.37)$$

onde k_μ é um quadri-vetor constante, CPT-ímpar, que define uma direção privilegiada no espaço-tempo. Portanto, seguindo a linha dos trabalhos [79–81], uma vez que o teorema de CPT é violado por esse quadri-vetor, há violação da simetria de Lorentz. A variação da ação leva às equações de movimento

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + v_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu. \quad (2.38)$$

Comparando (2.38) com (2.21), podemos mapear

$$v_\mu \rightarrow G_{a\gamma\gamma}(\partial_\mu a), \quad (2.39)$$

quando $\partial_\mu a$ for constante. Por exemplo, um trabalho que aborda a interface entre essas duas teorias, no estudo do Efeito Magnético Quiral, é dado na referência [82].

Além das abordagens citadas, uma possibilidade muito interessante, que é o viés adotado na elaboração das demais seções deste Capítulo, é a de considerar a expansão do modelo em um fundo eletromagnético constante ou variável. Essa abordagem é vantajosa pois, além de nos permitir fazer uma aproximação que lineariza as equações de campo da ED Axiônica [6], trabalhar nessa abordagem também é útil para simular meios astrofísicos, ou um cenário de campos primordiais, além de experimentos terrestres, cujos laboratórios que os realizam possuem aparatos para produzir campos apreciáveis. Ademais, existe um esforço experimental e teórico significativo baseado na possibilidade de conversão entre Fótons e Axions, prevista para ocorrer justamente em cenários com campos eletromagnéticos intensos [33, 34]. Essa conversão Axion-Fóton é conhecida na literatura como Efeito Primakoff. Uma discussão mais detalhada sobre esse tópico será feita no Capítulo 4 deste trabalho.

2.2 O Modelo Expandido em Fundo Eletromagnético

Podemos analisar o modelo na presença de um fundo eletromagnético. A expansão no fundo é feita simplesmente expandindo o *field strength*,

$$F^{\mu\nu} = F_B^{\mu\nu} + f^{\mu\nu}, \quad (2.40)$$

onde os tensores eletromagnéticos,

$$f^{\mu\nu} = \partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial^\nu \mathcal{A}^\mu, \quad F_B^{\mu\nu} = \partial^\mu A_B^\nu - \partial^\nu A_B^\mu, \quad (2.41)$$

correspondem, respectivamente, ao campo propagante e ao campo de fundo. Particularmente,

$$\mathcal{A}^\mu = \left(\frac{\varphi}{c}, \mathbf{A} \right).$$

Considerando a expansão, o modelo fica

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4\mu_0} f^{\mu\nu} f_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial^\mu a \partial_\mu a - \frac{1}{2} \xi a^2 - \frac{1}{4\mu_0} G_{a\gamma\gamma} a \tilde{F}_B^{\mu\nu} F_{B\mu\nu} + \\ & -\frac{1}{4\mu_0} G_{a\gamma\gamma} a \tilde{f}^{\mu\nu} f_{\mu\nu} - \frac{1}{2\mu_0} G_{a\gamma\gamma} a \tilde{F}_B^{\mu\nu} f_{\mu\nu} - \mathcal{A}_\mu J^\mu. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Linearizando o modelo a nível de ação, ou seja desprezando o termo cúbico em (2.42) - uma vez que os campos propagantes podem ser considerados apenas pequenas perturbações em comparação com o fundo, obtemos

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} f^{\mu\nu} f_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial^\mu a \partial_\mu a - \frac{1}{2} \xi a^2 - \frac{1}{4\mu_0} G_{a\gamma\gamma} a \tilde{F}_B^{\mu\nu} F_{B\mu\nu} - \frac{1}{2\mu_0} G_{a\gamma\gamma} a \tilde{F}_B^{\mu\nu} f_{\mu\nu} - \mathcal{A}_\mu J^\mu. \quad (2.43)$$

Considerando a Lagrangiana (2.43), obteremos equações de campo linearizadas, como veremos a seguir.

2.2.1 Equações da ED Axiônica em um fundo Magnético Constante

Via princípio variacional, obtemos a partir de (2.43), para o setor do fóton, o conjunto de equações

$$\partial_\mu f^{\mu\nu} + G_{a\gamma\gamma} (\partial_\mu a) \tilde{F}_B^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu, \quad (2.44)$$

e para o axion

$$(\square + \xi)a = -\frac{1}{4\mu_0} G_{a\gamma\gamma} \tilde{F}_B^{\mu\nu} F_{B\mu\nu} - \frac{1}{2\mu_0} G_{a\gamma\gamma} \tilde{F}_B^{\mu\nu} f_{\mu\nu}. \quad (2.45)$$

Em particular, se consideramos um campo magnético constante de fundo, $\tilde{F}_B^{i0} = \mathbf{B}_i$, e um campo elétrico trivial, $\tilde{F}_B^{ij} = \varepsilon_{ijk} \mathbf{E}_k = 0$, então teremos

$$(\square + \xi)a = -\frac{1}{2\mu_0} G_{a\gamma\gamma} \tilde{F}_B^{\mu\nu} f_{\mu\nu}. \quad (2.46)$$

Como não estamos considerando um cenário com monopolo magnético, permanece válida a identidade de Bianchi,

$$\partial_\mu \tilde{f}^{\mu\nu} = 0. \quad (2.47)$$

As equações de Maxwell linearizadas, na forma vetorial, são dadas por

$$\nabla \cdot \mathbf{e} + c G_{a\gamma\gamma} \nabla a \cdot \mathbf{B} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (2.48)$$

$$\nabla \times \mathbf{e} = -\partial_t \mathbf{b}, \quad (2.49)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0, \quad (2.50)$$

$$\nabla \times \mathbf{b} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{e} + \frac{1}{c} G_{a\gamma\gamma} (\partial_t a) \mathbf{B}. \quad (2.51)$$

Enquanto as equações de onda são dadas na forma

$$\square \mathbf{e} = -\frac{1}{c} G_{a\gamma\gamma} (\partial_t^2 a) \mathbf{B} + c G_{a\gamma\gamma} \nabla (\nabla a \cdot \mathbf{B}), \quad (2.52)$$

$$\square \mathbf{b} = \frac{1}{c} G_{a\gamma\gamma} \partial_t (\nabla a \times \mathbf{B}), \quad (2.53)$$

$$(\square + \xi) a = c \varepsilon_0 G_{a\gamma\gamma} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}). \quad (2.54)$$

Vale ressaltar que, independente de qual momento que se escolha para fazer a aproximação que lineariza a teoria – seja a nível de ação, equações de Maxwell ou mesmo equações de onda – os resultados serão os mesmos.

Assim como no caso em que não consideramos a expansão no campo magnético de fundo, dado na seção 2.1.1, podemos obter as leis de conservação para o modelo nesse novo cenário, escrevendo a equação da continuidade

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = f_{\mu\nu} J^\nu. \quad (2.55)$$

Nesse novo cenário, $T^{\mu\nu}$ conta com a contribuição de mistura dos campos do Fóton e do Axion, o cálculo explícito de $T^{\mu\nu}$, que nos leva a esse resultado, encontra-se na seção C.2 do Apêndice C. Dessa forma, escrevemos $T^\mu{}_\rho$ como

$$T^\mu{}_\rho = (T_\gamma)^\mu{}_\rho + (T_a)^\mu{}_\rho + (T_{a\gamma\gamma})^\mu{}_\rho, \quad (2.56)$$

onde $(T_a)^\mu{}_\rho$ e $(T_\gamma)^\mu{}_\rho$ são os resultados usuais para o tensor Energia-Momento de um campo escalar real bem como da teoria eletromagnética, dados respectivamente pelas expressões (2.33) e (2.34), e $(T_{a\gamma\gamma})^\mu{}_\rho$ é dado explicitamente na forma

$$(T_{a\gamma\gamma})^\mu{}_\rho = -\frac{1}{\mu_0} G_{a\gamma\gamma} a \tilde{f}^{\mu\nu} F_{B\nu\rho}. \quad (2.57)$$

Ou ainda, em termos de suas componentes,

$$(T_{a\gamma\gamma})^\mu{}_\rho = \begin{pmatrix} 0 & -G_{a\gamma\gamma} a (\mathbf{B} \times \mathbf{b}) \\ 0 & G_{a\gamma\gamma} a (\mathbf{B}_i \mathbf{e}_j - \delta^i_j (\mathbf{B} \cdot \mathbf{e})) \end{pmatrix}. \quad (2.58)$$

Quando escrevemos $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, obtemos as leis de conservação para a energia e o momento, nas componentes $\nu = 0$ e $\nu = i$ respectivamente. Agora, se abrimos as componentes da equação de continuidade (2.55), encontramos para a componente $\nu = 0$ o teorema de Poynting, e para a componente $\nu = i$ obtemos a expressão da força de Lorentz.

Devido a natureza do nosso fundo – um campo magnético constante – o teorema de Poynting não é afetado pelo termo de mistura (2.57), uma vez que não há contribuição desse termo para a densidade de energia nem para o vetor de Poynting. Porém, a força de Lorentz é modificada, como consequência da anisotropia provocada pela presença do campo magnético de fundo, que define uma direção preferencial no espaço permeado por esse campo.

Explicitamente, escrevemos a modificação para a densidade da força de Lorentz proveniente do termo de mistura, como

$$\partial_t \mathbf{p}_\gamma - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_\gamma = (\rho_\gamma + \rho_{a\gamma\gamma})\mathbf{e} + (\mathbf{j}_\rho + \mathbf{j}_{a\gamma\gamma}) \times \mathbf{b} \quad (2.59)$$

onde \mathbf{p}_γ e $\boldsymbol{\tau}_\gamma$ são, respectivamente, a densidade de momento linear e o tensor de estresse eletromagnético. As quantidades ρ_γ e \mathbf{j}_γ são a densidade de carga e a densidade de corrente eletromagnética usuais, e as novas contribuições de mistura são dadas por

$$\rho_{a\gamma\gamma} = G_{a\gamma\gamma}(\nabla a) \cdot \mathbf{B}, \quad (2.60)$$

$$\mathbf{j}_{a\gamma\gamma} = G_{a\gamma\gamma}(\partial_t a)\mathbf{B}. \quad (2.61)$$

Portanto, podemos escrever uma densidade de força de Lorentz modificada como

$$\mathbf{f} = (\rho_\gamma + \rho_{a\gamma\gamma})\mathbf{e} + (\mathbf{j}_\rho + \mathbf{j}_{a\gamma\gamma}) \times \mathbf{b}. \quad (2.62)$$

Olhando para o resultado (2.62), a priori elencamos duas perspectivas para explorá-lo. A primeira ampara-se no fato de que o Axion é esperado para ser observado em um cenário de altíssimas energias, bastante acima da escala de quebra eletrofraca, como consequência, o acoplamento $G_{a\gamma\gamma}$ é previsto para ser muito menor que um, ou seja muito fraco, muito sutil. Dessa forma, se escolhermos um valor de campo magnético para o fundo na ordem de $|\mathbf{B}| \sim T$, o produto $G_{a\gamma\gamma}|\mathbf{B}|$ não deve trazer contribuições apreciáveis para a densidade de força de Lorentz. Partindo dessa hipótese, podemos limitar superiormente o valor de $G_{a\gamma\gamma}$. Por outro lado, a segunda perspectiva é aquela na qual consideramos campos magnéticos bastante intensos, como campos de magnetares, que estão na ordem de $|\mathbf{B}| \sim 10^{10} T$, onde o produto $G_{a\gamma\gamma}|\mathbf{B}|$ pode começar a ter efeitos mensuráveis, de forma que talvez seja possível observar o desvio da trajetória esperada para uma partícula carregada nesse cenário.

2.3 A Onda Eletromagnética

O primeiro passo para estudar a configuração e propagação da onda eletromagnética (no vácuo) proveniente da ED Axiônica expandida em fundo magnético constante, é olhar para

as equações de campo no espaço dos *momenta*. Nesse sentido, partimos do ponto de vista em que Fóton e Axion estão misturados, portanto se propagam juntos – com o mesmo momento – o que equivale a dizer que se propagam na mesma direção, como um único pacote. Com isso em mente, realizamos uma transformada de Fourier nos campos seguindo a prescrição dada no Apêndice B, o que nos leva às equações de Maxwell no espaço dos momentos,

$$\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{e}} = -cG_{a\gamma\gamma}\tilde{a}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}), \quad (2.63)$$

$$\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{e}} = \omega\tilde{\mathbf{b}}, \quad (2.64)$$

$$\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{b}} = 0, \quad (2.65)$$

$$\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{b}} = -\mu_0\varepsilon_0\omega\tilde{\mathbf{e}} - \frac{1}{c}\omega G_{a\gamma\gamma}\tilde{a}\mathbf{B}. \quad (2.66)$$

A partir das equações de Maxwell, obtemos as equações de onda para \mathbf{e} e \mathbf{b} , ou equivalentemente, podemos passar diretamente as equações de onda no espaço das configurações para o espaço dos momentos, o resultado é invariante e dado na forma,

$$k^2\tilde{\mathbf{e}} = -\frac{1}{c}\omega^2 G_{a\gamma\gamma}\tilde{a}\mathbf{B} + cG_{a\gamma\gamma}\tilde{a}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})\mathbf{k}, \quad (2.67)$$

$$k^2\tilde{\mathbf{b}} = -\frac{1}{c}\omega G_{a\gamma\gamma}\tilde{a}(\mathbf{k} \times \mathbf{B}), \quad (2.68)$$

$$(k^2 - \xi)\tilde{a} = -c\varepsilon_0 G_{a\gamma\gamma}(\mathbf{B} \cdot \tilde{\mathbf{e}}), \quad (2.69)$$

onde $k^2 = k^\mu k_\mu = (\frac{\omega^2}{c^2} - \mathbf{k}^2)$. Como estamos trabalhando no SI é importante lembrar que tanto a frequência ω quanto o vetor de onda \mathbf{k} , encontram relação com a energia E e o momento \mathbf{p} , respectivamente, através das relações de Einstein e de Broglie,

$$E = \hbar\omega,$$

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}.$$

Agora, dadas as equações de campo, um bom ponto de partida é entender quais as configurações geométricas possíveis para essa onda eletromagnética, no sentido de questionar como os campos se comportam uns em relação aos outros e à direção de propagação. Por exemplo, o fato dos campos $\tilde{\mathbf{e}}$ e $\tilde{\mathbf{b}}$ serem ortogonais constitui uma relação. O conjunto de todas as relações entre os diferentes campos (e dos campos com a direção de propagação) determina uma configuração geométrica. Como veremos, haverá inúmeras configurações possíveis. Com isso em mente, devemos explorar as equações de Maxwell em busca de todas as relações possíveis.

Começando pela lei de Faraday-Lenz, (2.64), recuperamos as relações de perpendicularidade

$$\mathbf{k} \perp \tilde{\mathbf{b}}, \quad (2.70)$$

$$\tilde{\mathbf{e}} \perp \tilde{\mathbf{b}}, \quad (2.71)$$

que são comuns ao eletromagnetismo usual. É fácil mostrar essas relações quando escrevemos a equação (2.64) em termos de índices e, tomamos um produto escalar de (2.64) com \mathbf{k} (ou com

$\tilde{\mathbf{e}}$ de maneira perfeitamente análoga), nos levando a escrever

$$\varepsilon_{ijk} \mathbf{k}_i \mathbf{k}_j \tilde{\mathbf{e}}_k = \omega \mathbf{k}_i \tilde{\mathbf{b}}_i,$$

uma contração entre um objeto simétrico e um objeto antissimétrico, de maneira que o lado esquerdo da equação é necessariamente zero[†]. Como um produto escalar nulo entre vetores indica que esses vetores são perpendiculares, ficam então motivadas as relações de ortogonalidade (2.70) e (2.71). Da mesma forma, se considerarmos a lei de Gauss para o campo magnético, (2.65), recuperamos a relação (2.70). Podemos também, por outro lado, tomar um produto vetorial de \mathbf{B} com a equação (2.64), de forma a obter uma equação útil para análises posteriores,

$$\mathbf{B} \times (\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{e}}) = (\mathbf{B} \cdot \tilde{\mathbf{e}}) \mathbf{k} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{k}) \tilde{\mathbf{e}} = \omega \mathbf{B} \times \tilde{\mathbf{b}}. \quad (2.72)$$

Em seguida, considerando a lei de Ampère-Maxwell, (2.66), e tomando um produto escalar com $\tilde{\mathbf{b}}$, obtemos como consequência

$$\tilde{\mathbf{b}} \cdot (\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{b}}) = -\omega \mu_0 \varepsilon_0 (\tilde{\mathbf{b}} \cdot \tilde{\mathbf{e}}) - \frac{1}{c} \omega G_{a\gamma\gamma} \tilde{a} (\tilde{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{B}) = 0, \quad (2.73)$$

onde é válida a relação (2.71). Dessa forma, se supomos uma solução não trivial para a equação (2.73), somos levados a relação

$$\tilde{\mathbf{b}} \perp \mathbf{B}. \quad (2.74)$$

Com o resultado dado em (2.74), podemos voltar a analisar a equação (2.72), de forma a obter um vínculo sobre os produtos $\mathbf{B} \cdot \tilde{\mathbf{e}}$ e $\mathbf{B} \cdot \mathbf{k}$, uma vez que as relações $\mathbf{B} \perp \tilde{\mathbf{e}}$ e $\mathbf{B} \perp \mathbf{k}$ não podem ser verdadeiras simultaneamente. Agora, voltando a lei de Ampère-Maxwell, (2.66), se tomarmos um produto vetorial com $\tilde{\mathbf{e}}$, lembrando que o produto vetorial de vetores proporcionais é sempre zero[‡], obtemos

$$\tilde{\mathbf{e}} \times (\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{b}}) = (\tilde{\mathbf{e}} \cdot \tilde{\mathbf{b}}) \mathbf{k} - (\tilde{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{k}) \tilde{\mathbf{b}} = -\frac{1}{c} \omega G_{a\gamma\gamma} \tilde{a} (\tilde{\mathbf{e}} \times \mathbf{B}), \quad (2.75)$$

onde, levando em consideração mais uma vez a relação (2.71), concluímos que

$$(\tilde{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{k}) \tilde{\mathbf{b}} = \frac{1}{c} \omega G_{a\gamma\gamma} \tilde{a} (\tilde{\mathbf{e}} \times \mathbf{B}). \quad (2.76)$$

Ou seja, se o campo elétrico e o campo de fundo forem paralelos (ou antiparalelos) não haverá projeção do campo elétrico na direção do movimento.

Por fim, analisando a lei de Gauss para o campo elétrico, (2.63), a implicação direta da relação $\tilde{\mathbf{e}} \perp \mathbf{k}$ é que $\mathbf{B} \perp \mathbf{k}$ e, nesse caso, analisando a expressão (2.76), a relação $\tilde{\mathbf{e}} \perp \mathbf{k}$ implica em $\tilde{\mathbf{e}} \parallel \mathbf{B}$. Contudo, não há vínculo que obrigue a relação $\tilde{\mathbf{e}} \perp \mathbf{k}$ a ser verdadeira indiscriminadamente. De maneira geral, a relação entre $\tilde{\mathbf{e}}$ e \mathbf{k} dependerá da configuração da onda em relação ao fundo, que pode a priori ser qualquer.

[†]Para ver isso, basta fazer a troca $i \leftrightarrow j$, que é permitida já que os índices são mudos, e, em seguida fazer permutações para recuperar a forma original, notando que o resultado será algo como $x = -x$, o que implica em $x = 0$.

[‡]Se $\mathbf{x} = \alpha \mathbf{y}$, onde α é um escalar, temos, $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \alpha \mathbf{y} \times \mathbf{y}$, em notação de índices, $\alpha \varepsilon_{ijk} y_j y_k = 0$.

Com esses resultados em mente, retomando a equação (2.72), podemos analisar dois casos limites afim de nos ajudar a restringir o número de configurações possíveis para a onda em relação ao fundo. No primeiro deles enviamos nossa onda perpendicular ao campo de fundo. Nesse cenário, são válidas as relações $\tilde{\mathbf{e}} \perp \mathbf{k}$ e $\tilde{\mathbf{e}} \parallel \mathbf{B}$, de maneira que, em módulo, a expressão (2.72) se reduz a

$$|\mathbf{B}||\tilde{\mathbf{e}}||\mathbf{k}| = \omega|\mathbf{B}||\tilde{\mathbf{b}}| \sin \beta, \quad (2.77)$$

onde β é o ângulo entre \mathbf{B} e $\tilde{\mathbf{b}}$. Porém, dada a relação (2.74), β é necessariamente um ângulo reto, como estamos trabalhando em módulo, $\sin \beta = 1$. Dessa forma,

$$|\mathbf{v}_f| = \frac{|\tilde{\mathbf{e}}|}{|\tilde{\mathbf{b}}|}, \quad (2.78)$$

onde $|\mathbf{v}_f|$ é o módulo da velocidade de fase da onda, definido por

$$|\mathbf{v}_f| \equiv \frac{\omega}{|\mathbf{k}|}.$$

No segundo caso, escolhemos a situação particular em que a condição $(\mathbf{B} \cdot \tilde{\mathbf{e}}) = 0$ é satisfeita. Nesse caso, a equação (2.72), em módulo, resume-se a

$$|\mathbf{v}_f| = \frac{|\tilde{\mathbf{e}}|}{|\tilde{\mathbf{b}}|} \cos \theta, \quad (2.79)$$

onde θ é o ângulo entre \mathbf{B} e \mathbf{k} . Uma forma de comparar os dois casos limites, é tomando o produto escalar de \mathbf{B} com a equação de onda para o campo elétrico, (2.67),

$$k^2(\mathbf{B} \cdot \tilde{\mathbf{e}}) = -\frac{1}{c}\omega^2 G_{a\gamma\gamma} \tilde{a} \mathbf{B}^2 + c G_{a\gamma\gamma} \tilde{a} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})^2. \quad (2.80)$$

Assumindo $(\mathbf{B} \cdot \tilde{\mathbf{e}}) = 0$ e sabendo que nessas circunstâncias $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{k}) \neq 0$, explicitando o conteúdo dessa relação, resta que

$$-c G_{a\gamma\gamma} \tilde{a} \mathbf{B}^2 \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \mathbf{k}^2 \cos^2 \theta \right) = 0, \quad (2.81)$$

onde a solução não trivial nos conduz a

$$|\mathbf{v}_f| = c \cos \theta. \quad (2.82)$$

Comparando as equações (2.79) e (2.82), resta que

$$\frac{|\tilde{\mathbf{e}}|}{|\tilde{\mathbf{b}}|} = c. \quad (2.83)$$

Outro resultado importante para a nossa análise, que podemos obter a partir da equação (2.80), é a Relação de Dispersão (RD) associada ao campo do Axion. Se isolamos o termo $(\mathbf{B} \cdot \tilde{\mathbf{e}})$ na equação de onda do Axion, (2.69), e substituímos em (2.80), obtemos

$$\left[k^2(k^2 - \xi) - \varepsilon_0 \omega^2 \mathbf{G}^2 \mathbf{B}^2 + \varepsilon_0 c^2 \mathbf{G}^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})^2 \right] \tilde{a} = 0. \quad (2.84)$$

Temos em (2.84) a RD para o Axion, dada explicitamente por

$$\Delta \equiv k^2(k^2 - \xi) - \varepsilon_0\omega^2\mathbf{G}^2\mathbf{B}^2 + \varepsilon_0c^2\mathbf{G}^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})^2, \quad (2.85)$$

onde, por conveniência, adotamos a notação $\mathbf{G} \equiv G_{a\gamma\gamma}$.

Em seguida, devemos obter também a RD para o Fóton. Nesse sentido, é importante perceber que, a menos de uma operação, as equações de onda associadas aos campos magnético e elétrico são equivalentes, portanto nos levam a mesma RD que será associada ao campo do Fóton. Para ver isso, fazemos o produto vetorial entre \mathbf{k} e a equação de onda do campo elétrico, (2.67),

$$k^2(\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{e}}) = -\frac{1}{c}\omega^2 G_{a\gamma\gamma} \tilde{a}(\mathbf{k} \times \mathbf{B}), \quad (2.86)$$

de onde, dado o conteúdo da lei de Faraday-Lenz (2.64), obtemos a equação de onda para o campo magnético, (2.68). Dessa maneira, podemos seguir em busca da RD associada ao campo elétrico. Dando prosseguimento, isolamos \tilde{a} na equação de onda do Axion, (2.69), percebe que esse passo só é possível se pedirmos que $\tilde{\mathbf{e}}$ e \mathbf{B} não sejam ortogonais, caso contrário, obteríamos uma razão de zeros,

$$\tilde{a} = -\frac{c\varepsilon_0 G_{a\gamma\gamma}(\mathbf{B} \cdot \tilde{\mathbf{e}})}{(k^2 - \xi)}. \quad (2.87)$$

Com esse resultado em mãos, fazemos sua substituição na equação de onda para $\tilde{\mathbf{e}}$ e em seguida a escrevemos em termos de seus índices, explicitando seu conteúdo

$$\left[k^2\delta_{ij} - \frac{\varepsilon_0\omega^2\mathbf{G}^2}{(k^2 - \xi)}\mathbf{B}_i\mathbf{B}_j + \frac{\varepsilon_0c^2\mathbf{G}^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})}{(k^2 - \xi)}\mathbf{k}_i\mathbf{B}_j \right] \tilde{e}_j = 0. \quad (2.88)$$

Temos em (2.88) um sistema de equações para as componentes do campo elétrico. Como esperamos que essas componentes sejam quaisquer, precisamos que o nosso sistema seja possível e tenha infinitas soluções. A forma de garantir isso, é exigindo que a matriz dos coeficientes tenha determinante igual a zero. Esse determinante corresponde à relação de dispersão para o campo elétrico (e magnético), ou seja, no final do dia, corresponde à relação de dispersão para o Fóton. Diante disso, sabendo que uma matriz do tipo

$$M_{ij} = a\delta_{ij} + bu_iu_j + cv_iu_j, \quad (2.89)$$

possui determinante

$$\det M = a^2 \left[a + bu^2 + c(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) \right], \quad (2.90)$$

podemos calcular o determinante da nossa matriz que multiplica $\tilde{\mathbf{e}}_j$, chegando ao resultado

$$k^4(k^2(k^2 - \xi) - \varepsilon_0\omega^2\mathbf{G}^2\mathbf{B}^2 + \varepsilon_0c^2\mathbf{G}^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})^2) = 0. \quad (2.91)$$

Ou seja, temos duas situações a considerar. Uma primeira que corresponde ao eletromagnetismo usual, $k^4 = 0$, onde a relação de dispersão para o Fóton é simplesmente $k^2 = 0$ (com multiplicidade dois), portanto, há duas soluções idênticas, positivas, de ω em função de $|\mathbf{k}|$, dadas por

$\omega = c|\mathbf{k}|$. E temos uma segunda situação, onde vamos incorporar os efeitos do *mixing* à RD do fóton através da relação $\Delta = 0$, com Δ dado pela expressão (2.85).

É sabido que uma onda eletromagnética usual é caracterizada por dois graus de liberdade transversais, uma vez que o Fóton é uma partícula não massiva e portanto não há projeção dos campos elétrico e magnético na direção do movimento, ou seja, não há modos longitudinais. Se estivéssemos considerando um eletromagnetismo de Maxwell-Proca, nesse caso haveriam os dois modos transversais, bem como um modo longitudinal. De um ponto de vista mais fundamental, a simetria de calibre presente no eletromagnetismo de Maxwell funciona como um vínculo, e protege o Fóton de um grau de liberdade longitudinal. Enquanto que Maxwell-Proca não apresenta liberdade de calibre, devido ao termo de Proca, o que faz com que a onda eletromagnética nesse caso termine com três graus de liberdade [83]. Mostramos no Apêndice D como contamos esses graus de liberdade para o eletromagnetismo usual, pensando na teoria como uma teoria de calibre Abelian, decompondo o campo do Fóton em termos de uma base de polarização.

Agora, quando olhamos para as equações de campo da ED Axiônica, em um primeiro momento essa questão pode ser um pouco ambígua, ou apenas confusa. Seja como for, somos levados a pensar que essa ED poderia apresentar modos longitudinais, uma vez que pelas equações de Maxwell é permitido que o campo elétrico apresente uma projeção na direção do movimento. Como a convenção diz que quem carrega os graus de liberdade de uma onda eletromagnética é o campo elétrico, nesse caso somos induzidos a pensar que a onda possui dois modos transversais como era de se esperar, mas ao mesmo tempo apresenta um modo longitudinal, o que não era esperado, uma vez que partimos de uma teoria com Fóton não massivo. O que poderia estar acontecendo nesse caso? O Fóton está ganhando uma massa efetiva nesse cenário em que fazemos a expansão em um fundo magnético ou seria apenas um grau de liberdade virtual?

2.3.1 Contando os Graus de Liberdade da ED Axiônica

Como discutido no Apêndice D, pensando no eletromagnetismo como uma teoria de calibre Abelian, de partida o campo do Fóton apresenta quatro graus de liberdade. Isso, somado ao grau de liberdade carregado pelo Axion, nos deixa com cinco graus de liberdade. Sabemos, no entanto, que nem todos estes são físicos e a forma de reduzi-los aos graus físicos é usando dos vínculos da teoria. Nesse caso, os vínculos se apresentam na forma da simetria de calibre para o campo do Fóton e nas equações de movimento do Fóton e do Axion.

O vínculo imposto pela simetria de calibre é expresso através da transformação de calibre do campo Fotônico, que é dada na forma $\mathcal{A}'_\mu = \mathcal{A}_\mu + \partial_\mu\alpha$. Levando essa expressão para o espaço dos momentos, resta que,

$$\tilde{\mathcal{A}}'_\mu = \tilde{\mathcal{A}}_\mu - ik_\mu\tilde{\alpha}, \quad (2.92)$$

onde \tilde{a} é um parâmetro complexo e arbitrário. Enquanto que para as equações de campo, afim de expressá-las de maneira mais adequada à análise, é necessário que as escrevamos explicitando o conteúdo do *field strength* em termos do campo \mathcal{A}_μ . Tendo isso em consideração, reescrevemos as equações (2.44) e (2.46) nas respectivas formas

$$(\square\eta^{\mu\nu} - \partial^\nu\partial^\mu)\mathcal{A}_\mu + G_{a\gamma\gamma}\tilde{F}_B^{\mu\nu}\partial_\mu a = \mu_0 J^\nu, \quad (2.93)$$

$$(\square + \xi)a = -\frac{1}{\mu_0}G_{a\gamma\gamma}\tilde{F}_B^{\mu\nu}\partial_\mu\mathcal{A}_\nu. \quad (2.94)$$

No espaço dos momentos essas equações tornam-se

$$(k^2\eta^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu)\tilde{\mathcal{A}}_\mu - iG_{a\gamma\gamma}L^\nu\tilde{a} = -\mu_0\tilde{J}^\nu, \quad (2.95)$$

$$(k^2 - \xi)\tilde{a} = \frac{i}{\mu_0}G_{a\gamma\gamma}L^\mu\tilde{\mathcal{A}}_\mu, \quad (2.96)$$

com L^μ definido por

$$L^\mu \equiv \tilde{F}_B^{\mu\nu}k_\nu = \left(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}, \frac{\omega}{c}\mathbf{B}\right). \quad (2.97)$$

Como o campo \mathcal{A}^μ é um campo vetorial definido no espaço-tempo de Minkowski, podemos expressá-lo em termos de uma base ortogonal de vetores de polarização

$$k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k}\right), \quad (2.98)$$

$$\bar{k}^\mu = \left(|\mathbf{k}|, \frac{\omega}{c}\hat{\mathbf{k}}\right), \quad (2.99)$$

$$\varepsilon_I^\mu(k) = (0, \varepsilon_I); \quad I = 1, 2. \quad (2.100)$$

Essa base apenas pode ser utilizada para um Fóton cuja a relação $k^2 \neq 0$ seja satisfeita, sendo normalmente utilizada para expandir o campo de um Fóton massivo. Ainda que nosso Fóton permaneça sem massa, a RD $\Delta = 0$, dada por (2.84), nos permite o uso dessa base, uma vez que $\Delta = 0$ e $k^2 = 0$ não podem ser simultaneamente satisfeitas. Nessa base, os vetores k^μ e \bar{k}^μ , carregam os graus de liberdade longitudinais, enquanto que os vetores ε_I^μ carregam os graus de liberdade transversais. Em particular, o produto escalar

$$\mathbf{k} \cdot \varepsilon_I = 0, \quad (2.101)$$

e os vetores transversais são ortonormalizados entre si, ou seja

$$\varepsilon_I \cdot \varepsilon_{I'} = -\varepsilon_I \cdot \varepsilon_{I'} = -\delta_{II'}.$$

Se expandimos o campo $\tilde{\mathcal{A}}^\mu$ nessa base, obtemos

$$\tilde{\mathcal{A}}^\mu = ak^\mu + b\bar{k}^\mu + c_I\varepsilon_I^\mu(\mathbf{k}). \quad (2.102)$$

Levando essa expansão na expressão (2.92), vem que

$$a'k^\mu + b'\bar{k}^\mu + c'_I\varepsilon_I^\mu(\mathbf{k}) = (a - i\tilde{\alpha})k^\mu + b\bar{k}^\mu + c_I\varepsilon_I^\mu(\mathbf{k}). \quad (2.103)$$

Podemos fixar o calibre da nossa teoria de maneira que $a - i\tilde{\alpha} = 0$, ou seja, $\tilde{\alpha} = -ia$. Dessa forma, eliminamos um grau de liberdade virtual do campo \mathcal{A}_μ . Nos restam então outros três graus de liberdade, um longitudinal e dois transversais, de maneira que o campo fica escrito como

$$\tilde{\mathcal{A}}^\mu = b\bar{k}^\mu + c_I \varepsilon_I^\mu(\mathbf{k}). \quad (2.104)$$

Se substituirmos a expansão do campo $\tilde{\mathcal{A}}^\mu$ dada em (2.104) na equação de campo da ED Axiônica (no vácuo), podemos observar que

$$b[k^2\bar{k}^\nu - (k \cdot \bar{k})k^\nu] + c_I[k^2\varepsilon_I^\nu - (k \cdot \varepsilon_I)k^\nu] = iG_{a\gamma\gamma}L^\nu\tilde{a}, \quad (2.105)$$

onde $k \cdot \varepsilon_I = 0$ e $k \cdot \bar{k} = 0$. Então resta que

$$b\bar{k}^\nu + c_I\varepsilon_I^\nu = i\frac{G_{a\gamma\gamma}L^\nu}{k^2}\tilde{a}. \quad (2.106)$$

Na componente temporal, $\nu = 0$, obtemos da equação da ED Axiônica (2.106) o valor de b em termos do Axion,

$$b = i\frac{G_{a\gamma\gamma}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})}{|\mathbf{k}|k^2}\tilde{a}. \quad (2.107)$$

Por outro lado, na componente espacial $\nu = i$, a equação (2.106) fica

$$c_I\varepsilon_I = iG_{a\gamma\gamma}\frac{\omega}{ck^2}(\mathbf{B} - |\mathbf{B}|^2\cos^2\theta\mathbf{k})\tilde{a}, \quad (2.108)$$

onde θ é o ângulo entre \mathbf{B} e \mathbf{k} . Mas, o campo magnético \mathbf{B} pode ser decomposto na soma $\mathbf{B} = \mathbf{B}_T + \mathbf{B}_L$, onde $\mathbf{B}_T = |\mathbf{B}_1|\hat{\varepsilon}_1 + |\mathbf{B}_2|\hat{\varepsilon}_2$ é a componente transversal e $\mathbf{B}_L = |\mathbf{B}|\cos\theta\hat{\mathbf{k}}$ é a componente longitudinal. É claro que nesse caso $\mathbf{B}_T \cdot \mathbf{B}_L = 0$, bem como $\mathbf{B}_T \cdot \mathbf{k} = 0$. Da equação (2.108) obtemos os coeficientes c_I fazendo um produto escalar com $\varepsilon_{I'}$,

$$c_{I'} = iG_{a\gamma\gamma}\frac{\omega}{ck^2}|\mathbf{B}_{I'}|\tilde{a}. \quad (2.109)$$

Além disso, fazendo a expansão do campo magnético na expressão de b dada em (2.107), obtemos

$$b = i\frac{G_{a\gamma\gamma}|\mathbf{B}_L|}{k^2}\tilde{a}. \quad (2.110)$$

Em seguida, devemos expandir o campo do Fóton que aparece na equação do Axion, de forma a eliminar a dependência no Axion que os coeficientes b e c_I apresentam,

$$\tilde{a} = -i\frac{G_{a\gamma\gamma}}{\mu_0(k^2 - \xi)}\left(b(\mathbf{B} \cdot \mathbf{k})\frac{k^2}{|\mathbf{k}|} + c_I(\mathbf{B} \cdot \varepsilon_I)\frac{\omega}{c}\right). \quad (2.111)$$

Substituindo esse resultado em cada uma das equações dos coeficientes, (2.107) e (2.109), respectivamente, obtemos

$$c_1 = \frac{|\mathbf{B}_1|}{|\mathbf{B}_2|}c_2, \quad (2.112)$$

de maneira que

$$b = \frac{|\mathbf{B}_L|}{|\mathbf{B}_1|} \frac{c}{\omega} c_1 = \frac{|\mathbf{B}_L|}{|\mathbf{B}_2|} \frac{c}{\omega} c_2. \quad (2.113)$$

Daqui concluímos que a teoria apresenta um grau de liberdade longitudinal para além dos usuais dois graus de liberdade transversais. A única maneira de b ser igual a zero, portanto “eliminando” o grau de liberdade longitudinal, é caso a componente \mathbf{B}_L do campo magnético seja zero, mas esse argumento se perde uma vez que o campo magnético está distribuído de maneira homogênea em uma certa região do espaço na qual estamos avaliando a teoria. Sempre é possível produzir um $\mathbf{B} \cdot \mathbf{k} \neq 0$, basta que a onda seja enviada numa direção tal que essa condição seja satisfeita. Ou seja, de fato a teoria apresenta um terceiro grau de liberdade genuíno, a questão é que essa conclusão é um reflexo da mistura Fóton-Axion induzida pelo campo de fundo, como se estivéssemos produzindo uma ED de Maxwell-Proca que possui simetria de calibre. Podemos pensar na Eletrodinâmica Axiônica expandida no fundo magnético como um mecanismo de Stueckelberg reverso. Afinal, esse eletromagnetismo nos leva a uma onda com três modos de polarização, onde o Fóton contribui com os dois modos de polarização transversal e o Axion funciona como o modo de polarização longitudinal, porém nesse caso a teoria apresenta simetria de calibre genuína e um Fóton genuinamente sem massa.

Seguindo essa linha de argumentação, podemos construir explicitamente o campo elétrico a partir da sua relação com os potenciais, mostrando explicitamente que sua componente longitudinal depende exclusivamente da dinâmica do Axion. Dadas as relações (2.110) e (2.109), o campo do Fóton fica escrito como

$$\tilde{\mathcal{A}}^\mu = iG_{a\gamma\gamma}\tilde{a} \left(\frac{1}{k^2} |\mathbf{B}_L| \bar{k}^\mu + \frac{\omega}{ck^2} |\mathbf{B}_1| \varepsilon_1^\mu(\mathbf{k}) + \frac{\omega}{ck^2} |\mathbf{B}_2| \varepsilon_2^\mu(\mathbf{k}) \right) = \left(\frac{\tilde{\varphi}}{c}, \tilde{\mathcal{A}} \right). \quad (2.114)$$

Para a componente temporal, obtemos

$$\frac{\tilde{\varphi}}{c} = \frac{iG_{a\gamma\gamma}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{k})\tilde{a}}{k^2}, \quad (2.115)$$

e para a componente espacial

$$\tilde{\mathcal{A}} = \frac{iG_{a\gamma\gamma}\omega\tilde{a}}{ck^2} (|\mathbf{B}_1|\hat{\varepsilon}_1 + |\mathbf{B}_2|\hat{\varepsilon}_2 + |\mathbf{B}_L|\hat{\mathbf{k}}). \quad (2.116)$$

Se no espaço das configurações, o campo elétrico é dado por $\mathbf{e} = -\nabla\varphi - \partial_t\mathcal{A}$, no espaço dos momentos o campo será

$$\tilde{\mathbf{e}} = i\omega\tilde{\mathcal{A}} - i\mathbf{k}\varphi. \quad (2.117)$$

Substituindo a forma explícita dos potenciais obtemos a equação de onda para o campo elétrico,

$$k^2\tilde{\mathbf{e}} = -cG_{a\gamma\gamma}\tilde{a} \left(\frac{\omega^2}{c^2} |\mathbf{B}_1|\hat{\varepsilon}_1 + \frac{\omega^2}{c^2} |\mathbf{B}_2|\hat{\varepsilon}_2 + \frac{\omega^2}{c^2} |\mathbf{B}_L|\hat{\mathbf{k}} - |\mathbf{B}_L||\mathbf{k}|^2\hat{\mathbf{k}} \right), \quad (2.118)$$

onde as equações correspondentes a cada uma das componentes são dadas por

$$k^2 \tilde{\mathbf{e}}_1 = -G_{a\gamma\gamma} \tilde{a} \frac{\omega^2}{c} |\mathbf{B}_1| \hat{\mathbf{e}}_1, \quad (2.119)$$

$$k^2 \tilde{\mathbf{e}}_2 = -G_{a\gamma\gamma} \tilde{a} \frac{\omega^2}{c} |\mathbf{B}_2| \hat{\mathbf{e}}_2, \quad (2.120)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_L = -c G_{a\gamma\gamma} \tilde{a} |\mathbf{B}_L| \hat{\mathbf{k}}. \quad (2.121)$$

Observa-se então que a componente longitudinal do campo elétrico não possui uma equação de onda própria, dependendo única e exclusivamente da propagação do Axion.

Agora que já entendemos de maneira mais fundamental quais são os graus de liberdade da onda eletromagnética quando há mistura de Fóton e Axion, no regime em que $\Delta = 0$, partimos para a última etapa da nossa análise que consistirá em explorar algumas quantidades ópticas.

2.3.2 Análise de Quantidades Ópticas

Dentre uma série de possibilidades de análises que podem ser feitas do ponto de vista óptico, vamos no restringir neste trabalho a analisar a causalidade da ED Axiônica na presença do campo de fundo. Algumas quantidades ópticas de bastante interesse são a velocidade de grupo, velocidade de fase e índice de refração, uma vez que essas quantidades são capazes de nos fornecer um bom panorama inicial sobre os possíveis comportamentos da onda eletromagnética que carrega a contribuição Axiônica.

Antes de mais nada, devemos retomar a relação de dispersão modificada Δ correspondente ao estado de mistura dos campos Fotônico e Axiônico. Resolvendo a equação (2.85) para $\Delta = 0$, na variável ω , obtemos as soluções positivas de ω em função de $|\mathbf{k}|$ na forma

$$\omega = \frac{c}{\sqrt{2}} \sqrt{2\mathbf{k}^2 + \varepsilon_0 c^2 \mathbf{G}^2 \mathbf{B}^2 + \xi \pm \sqrt{(\varepsilon_0 c^2 \mathbf{G}^2 \mathbf{B}^2 + \xi)^2 + 4\varepsilon_0 c^2 \mathbf{G}^2 \mathbf{B}^2 \mathbf{k}^2 \sin^2 \theta}}, \quad (2.122)$$

onde θ é o ângulo entre o campo magnético de fundo e a direção de propagação da onda eletromagnética $\hat{\mathbf{k}}$. No referencial de repouso (fazendo $|\mathbf{k}| = 0$), obtemos

$$\omega_0 = \frac{c}{\sqrt{2}} \sqrt{\varepsilon_0 c^2 \mathbf{G}^2 \mathbf{B}^2 + \xi \pm (\varepsilon_0 c^2 \mathbf{G}^2 \mathbf{B}^2 + \xi)}, \quad (2.123)$$

de onde identificamos duas soluções possíveis. Essas duas soluções são respectivamente

$$\omega_0^{(+)} = c \sqrt{\varepsilon_0 c^2 \mathbf{G}^2 \mathbf{B}^2 + \xi}, \quad (2.124)$$

$$\omega_0^{(-)} = 0. \quad (2.125)$$

Nesse caso, é possível distinguir a contribuição referente ao Axion, como sendo a solução de sinal positivo, e a contribuição referente ao Fóton como sendo a solução de sinal negativo. Mais uma vez lembrando que o eletromagnetismo Axiônico (quando a mistura está acontecendo) é um eletromagnetismo massivo, no sentido de que possui três modos de polarização, incluindo

um modo de polarização longitudinal como vimos na seção 2.3.1, embora essa massa seja exclusivamente devida ao Axion. Quando vamos para o referencial de repouso, escrevemos uma massa efetiva para esse eletromagnetismo de mistura, contudo o Fóton permanece sem massa e toda correção de massa continua sendo de responsabilidade do Axion. Vale ressaltar que fora do referencial de repouso, considerando $\Delta = 0$, não é correto afirmar a priori que as soluções de sinal positivo são referentes ao Axion e a solução de sinal negativo é referente ao Fóton. Cada caso deverá ser analisado de maneira independente, onde em geral não será possível fazer essa distinção, devido à mistura.

A partir das soluções de energia positiva para a relação de dispersão, dadas na equação (2.122), podemos obter o módulo da velocidade de fase, lembrando que $|v_f| = \omega/|\mathbf{k}|$, escrevemos

$$|v_f^{(\pm)}| = c \sqrt{1 + \frac{\varepsilon_0 c^2 \mathbf{G}^2 \mathbf{B}^2 + \xi}{2\mathbf{k}^2} \pm \sqrt{\frac{(\varepsilon_0 c^2 \mathbf{G}^2 \mathbf{B}^2 + \xi)^2}{4\mathbf{k}^4} + \frac{\varepsilon_0 c^2 \mathbf{G}^2 \mathbf{B}^2 \sin^2 \theta}{\mathbf{k}^2}}}. \quad (2.126)$$

Com esse resultado em mãos, podemos expressar a velocidade de frente de onda, ou *front velocity*, que representa a velocidade com que a frente de um sinal se propaga no espaço-tempo. Por descrever o limite mais rápido de propagação de qualquer perturbação, ela fornece um critério forte para a verificação da causalidade clássica. Diferentemente da velocidade de fase, que pode exceder a velocidade da luz sem implicar violação causal, a velocidade de frente de onda não pode ultrapassar o valor c sem que haja quebra real de causalidade. Por isso, sua análise é um bom ponto de partida para testar a consistência causal de teorias de campos. No presente caso, vamos denotar a velocidade de frente de onda por $v_{fr}^{(\pm)}$, com sinais (\pm) indicando os dois modos de propagação possíveis da onda. Sabendo que a velocidade de frente de onda é definida como sendo o limite da velocidade de fase com $|\mathbf{k}|$ tendendo a infinito, obtemos

$$v_{fr}^{(\pm)} \equiv \lim_{|\mathbf{k}| \rightarrow \infty} |v_f^{(\pm)}| = c. \quad (2.127)$$

Ou seja, ambos os modos da onda são causais desse ponto de vista.

A partir da velocidade de fase, também podemos obter o índice de refração. O índice de refração guarda a informação de como a onda responde (como se propaga) a um determinado meio. Para a ED Axiônica na presença do campo magnético de fundo, obtemos para o índice de refração as seguintes relações

$$n^\pm(|\mathbf{k}|) \equiv \frac{c}{|v_f^{(\pm)}|} = \left(1 + \frac{\varepsilon_0 c^2 \mathbf{G}^2 \mathbf{B}^2 + \xi}{2\mathbf{k}^2} \pm \sqrt{\frac{(\varepsilon_0 c^2 \mathbf{G}^2 \mathbf{B}^2 + \xi)^2}{4\mathbf{k}^4} + \frac{\varepsilon_0 c^2 \mathbf{G}^2 \mathbf{B}^2 \sin^2 \theta}{\mathbf{k}^2}} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.128)$$

Observamos que para além das inúmeras possibilidades para o valor do índice de refração, devido à dependência no ângulo entre a direção de propagação da onda e o campo magnético de fundo, possuímos a priori sempre dois valores para n , n^+ e n^- , para cada θ distinto. Esse resultado indica que o vácuo não é visto como vazio ou isotrópico, portanto os diferentes modos da onda podem apresentar diferentes respostas ao se propagar nesse meio. Nesse caso, uma forma conveniente de interpretar a situação física é justamente àquela na qual passamos a

entender o vácuo como um meio material devido à presença do Axion, onde esse meio material é um meio birrefringente.

A birrefringência do vácuo é um fenômeno previsto em várias extensões da eletrodinâmica clássica, que indicam que o vácuo poderia atuar como um meio anisotrópico quando submetido a campos externos intensos. Na eletrodinâmica não linear de Euler–Heisenberg, por exemplo, surgem índices de refração diferentes para polarizações ortogonais devido às correções quânticas da QED em campos fortes. Modelos como a eletrodinâmica de Born–Infeld ou teorias com Fóton massivo ou acoplamentos não lineares também preveem formas particulares de birrefringência ou ausência dela, dependendo da estrutura de suas equações constitutivas [6, 7]. Experimentalmente, iniciativas como o PVLAS [85] (na Itália) e o BMV [86] (na França) buscam detectar o minúsculo desdobramento dos índices de refração em campos magnéticos intensos, utilizando cavidades ópticas ultrasensíveis para amplificar efeitos de rotação e elipticidade da luz. A ED Axiônica conecta-se diretamente a esse cenário, uma vez que o termo de mistura modifica a propagação das ondas eletromagnéticas na presença desses campos externos, gerando sua própria assinatura de birrefringência. Ou seja, estudar os índices de refração da ED Axiônica oferece uma via complementar para a busca dessas partículas, estando nas nossas perspectivas futuras uma análise muito mais detalhada nesse sentido, incluindo um estudo de polarização e o cálculo do *Rotatory Power*.

Para além da velocidade de fase e do índice de refração, podemos obter a velocidade de grupo. A velocidade de grupo é a velocidade com a qual um pacote de onda se propaga, ou, de maneira perfeitamente equivalente, é a velocidade com que a informação se propaga, ou seja, testar o comportamento da velocidade de grupo para diferentes configurações e diferentes valores de $|\mathbf{k}|$ constitui também um bom teste de causalidade. Podemos obtê-la a partir da definição

$$(\mathbf{v}_g)_i = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}_i}. \quad (2.129)$$

Usualmente, o módulo da velocidade de grupo para a onda eletromagnética no vácuo é dada por $|\mathbf{v}_g| = c$. No caso da ED Axiônica, para os regimes em que $\Delta = 0$ é satisfeito, obtemos

$$(\mathbf{v}_g)_i^{(\pm)} = \frac{c^2}{\omega_{(\pm)}} \left(\mathbf{k}_i \pm \frac{\varepsilon_0 c^2 \mathbf{G}^2 (\mathbf{B}^2 \mathbf{k}_i - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{B}_i)}{\sqrt{\beta^2 + 4\varepsilon_0 c^2 \mathbf{G}^2 \mathbf{B}^2 \mathbf{k}^2 \sin^2 \theta}} \right), \quad (2.130)$$

em que $\omega_{(\pm)}$ é dado pela equação (2.122) e $\beta = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{G}^2 \mathbf{B}^2 + \xi$. Nesse caso, o módulo da velocidade de grupo é dado por

$$|\mathbf{v}_g^{(\pm)}| = c^2 \frac{|\mathbf{k}|}{\omega_{(\pm)}} \sqrt{1 + \sin^2 \theta \left(\frac{\varepsilon_0^2 c^4 \mathbf{G}^4 \mathbf{B}^4}{\beta^2 + 4\varepsilon_0 c^2 \mathbf{G}^2 \mathbf{B}^2 \mathbf{k}^2 \sin^2 \theta} \pm \frac{2\varepsilon_0 c^2 \mathbf{G}^2 \mathbf{B}^2}{\sqrt{\beta^2 + 4\varepsilon_0 c^2 \mathbf{G}^2 \mathbf{B}^2 \mathbf{k}^2 \sin^2 \theta}} \right)}. \quad (2.131)$$

Para analisar os possíveis comportamentos dessa onda, no âmbito da velocidade de grupo, inspirados pelo trabalho [87] vamos plotar gráficos de $|\mathbf{v}_g^{(\pm)}|$ em função de $|\mathbf{k}|$ (para essa tarefa

utilizaremos unidades naturais, fazendo $\hbar = c = 1$). Nesse sistema, a dimensão da constante de acoplamento \mathbf{G} é de inverso de energia, $[\mathbf{G}] = \text{eV}^{-1}$, enquanto que a dimensão da massa é igual a dimensão de energia, $[m] = \text{eV}$, ambas com valores possíveis entre os limites superiores e inferiores que podem ser observados no mapa de exclusão 1. Além de utilizar valores numéricos para a constante de acoplamento e a massa, precisamos escolher um valor, ou diferentes valores para a intensidade do campo magnético de fundo. Como vamos trabalhar com as grandezas físicas em unidades naturais, será necessário converter o valor do campo magnético para esse sistema de unidades. Para isso, notamos que no SI o campo magnético tem unidade de $[\mathbf{B}] = \text{T} = \text{N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{A}^{-1}$. No sistema de unidades naturais, buscamos expressar todas as grandezas em termos da dimensão de energia que, geralmente, no cenário de altas energias, será dada em eV. Então, do setor cinético da ação de Maxwell é fácil ver que em unidades naturais $[\mathbf{B}]_{\text{natural}} = \text{eV}^2$. Sabendo que no SI $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2}$, a densidade de energia armazenada em um campo magnético de 1T é aproximadamente $u_B \approx 3.95 \cdot 10^5 \text{ J} \cdot \text{m}^{-3} \approx 2.49 \cdot 10^{24} \text{ eV} \cdot \text{m}^{-3}$. Em unidades naturais, a densidade de energia tem dimensão eV^4 , então precisamos converter $\text{eV} \cdot \text{m}^{-3} \rightarrow \text{eV}^4$. Sabendo que $\hbar c \approx 1,97 \times 10^{-16} \text{ eV} \cdot \text{m}$ e que em unidades naturais $\hbar c = 1$, podemos calcular $1\text{m} \approx 5,07 \cdot 10^6 \text{ eV}^{-1}$. Assim o $u_B \approx 1,91 \cdot 10^4 \text{ eV}^4$. Então, da relação $\mathbf{B}^2 = 2u_B$ podemos expressar a energia armazenada em campo magnético de 1T como sendo aproximadamente $195,5 \text{ eV}^2$.

Em um primeiro cenário, vamos considerar um campo magnético \mathbf{B} da ordem de $10\text{T} \approx 19,55 \text{ eV}^2$, que é um campo factível em laboratórios e experimentos terrestres, por exemplo, a colaboração OSQAR no experimento LSW utiliza campos de magnitude de 9T [71]. Para a constante de acoplamento, estamos considerando o limite superior de $\mathbf{G} \approx 10^{-10} \text{ GeV}^{-1}$, ou seja, a contribuição mais apreciável. Por fim, para a massa consideramos um valor intermediário de $m_a \approx 0,5 \times 10^{-6} \text{ eV}$, que é um valor permitido dada a escolha \mathbf{G} , vide mapa de exclusão 1. Fazendo uso desses dados, o gráfico de $|\mathbf{v}_g^{(\pm)}|$ em função de $|\mathbf{k}|$ é dado pela Figura 3. Note que para essa situação ambas as partículas viajam bastante próximas da velocidade da luz qualquer que seja o ângulo θ entre \mathbf{k} e \mathbf{B} , mesmo para momentos consideravelmente baixos.

A teoria permanece “bem comportada” mesmo para campos magnéticos bastante intensos, como campos de magnetares que são da ordem de $\sim 10^{11}\text{T}$. Então, como uma forma de garantir a causalidade da teoria mesmo nos cenários mais extremos, considerando os mesmos valores de massa e acoplamento, extrapolamos o valor do campo magnético para a ordem de $10^{16}\text{T} \approx 195,5 \times 10^{16} \text{ eV}^2$, um campo mais intenso até mesmo do que aqueles produzidos em colisões de íons pesados, previstos para estarem na faixa de $\sim 10^{14} - 10^{15}\text{T}$ [88, 89]. Os gráficos da Figura 4 mostram na esquerda o comportamento da velocidade de grupo do modo advindo da solução com sinal positivo, enquanto que na direita encontra-se o modo advindo da solução com sinal negativo. Em ambos os casos há um comportamento causal bem estabelecido para todos os ângulos θ , além de que, nessas condições somos capazes de perceber diferenças nos modos propagantes, a depender do valor desse ângulo. Interpretamos o resultado para $\theta = 0$ como sendo o estado de mínima mistura, onde estamos investigando inclusive a possibilidade de

um desacoplamento entre Fóton e Axion. Em contrapartida, à medida que o campo magnético vai se tornando transversal vemos as curvas se aproximando, até finalmente coincidirem para o ângulo de $\pi/2$, que seria o estado de mistura máxima.

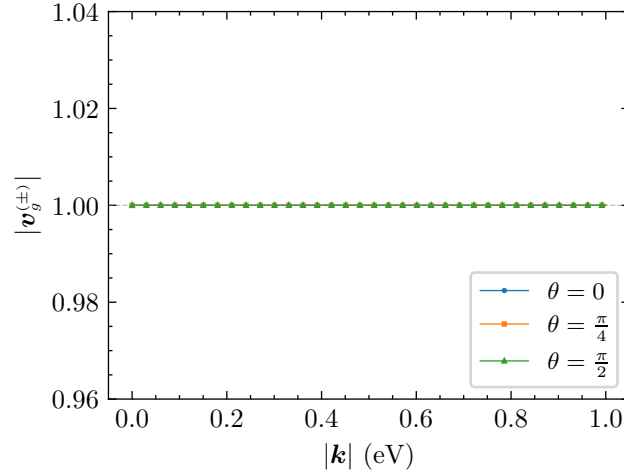


Figura 3 – Comportamento do módulo da velocidade de grupo $|\mathbf{v}_g^{(\pm)}|$ em função de $|\mathbf{k}|$, conforme a equação (2.131), em unidades naturais, $c = \hbar = 1$, para valores $|\mathbf{B}| = 10\text{T} \approx 19,55\text{eV}^2$, $G \approx 10^{-10}\text{GeV}^{-1}$ e $m_a \approx 0,5 \times 10^{-6}\text{eV}$. O ângulo θ é o ângulo entre \mathbf{k} e \mathbf{B} . Os sinais (\pm) de $|\mathbf{v}_g^{(\pm)}|$ estão associados com os dois modos propagantes possíveis, advindos da relação de dispersão modificada.

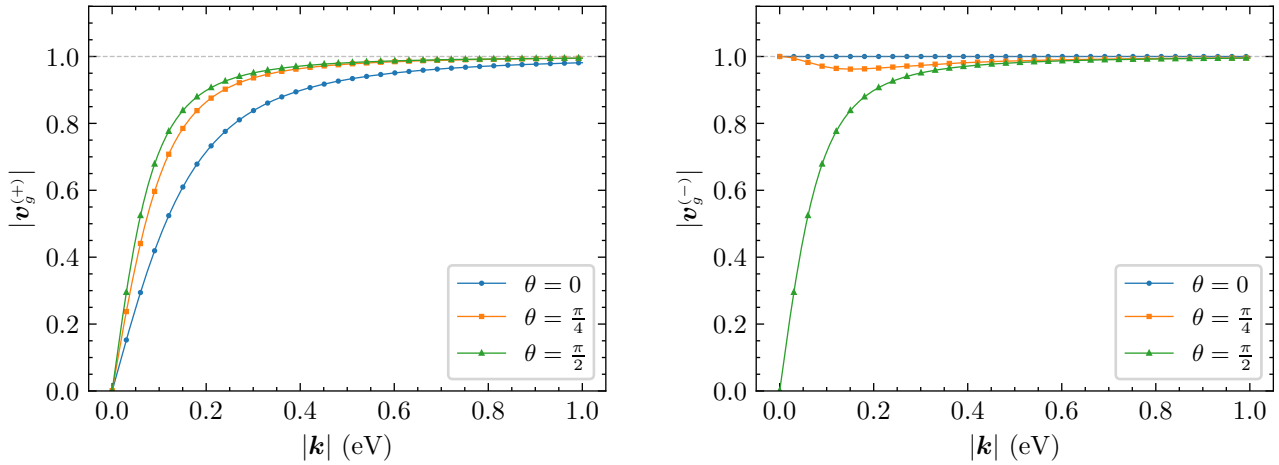


Figura 4 – Comportamento do módulo da velocidade de grupo $|\mathbf{v}_g^{(\pm)}|$ em função de $|\mathbf{k}|$, conforme a equação (2.131), em unidades naturais, $c = \hbar = 1$, para valores $|\mathbf{B}| \sim 10^{16}\text{T} \approx 195,5 \times \text{eV}^2$, $G \approx 10^{-10}\text{GeV}^{-1}$ e $m_a \approx 0,5 \times 10^{-6}\text{eV}$. O ângulo θ é o ângulo entre \mathbf{k} e \mathbf{B} . Os sinais (\pm) de $|\mathbf{v}_g^{(\pm)}|$ estão associados com os dois modos propagantes possíveis, advindos da relação de dispersão modificada.

Por fim, concatenando as análises realizadas até aqui, somos capazes de entender que a mistura do Axion com o Fóton na presença do campo magnético de fundo se dá por meio do campo elétrico, no sentido de que é por meio do campo elétrico que somos capazes de trazer a dinâmica do Axion para dentro das equações de Maxwell. Esse vínculo se apresenta na forma $\sim (\mathbf{B} \cdot \tilde{\mathbf{e}})$, de onde podemos concluir que a componente do campo elétrico responsável pela

mistura será aquela que se encontra na direção para a qual aponta o campo magnético de fundo. Na literatura, é comum o uso da notação $\tilde{\mathbf{e}}_{\parallel}$ para se referir a essa componente. Dessa forma, podemos pensar em um campo elétrico geral que é decomposto na forma

$$\tilde{\mathbf{e}} = \tilde{\mathbf{e}}_{\parallel} + \tilde{\mathbf{e}}_{\perp},$$

de onde resulta que $\mathbf{B} \cdot \tilde{\mathbf{e}} = |\mathbf{B}| |\tilde{\mathbf{e}}_{\parallel}|$, ou seja, $|\tilde{\mathbf{e}}_{\parallel}| = |\tilde{\mathbf{e}}| \cos \alpha$, onde α é o ângulo entre a direção do campo elétrico e a direção do campo de fundo.

Como a priori \mathbf{B} é geral, a relação que a onda eletromagnética Axiônica e, portanto, a relação que $\tilde{\mathbf{e}}$ apresentará em relação ao fundo é bastante variável, a depender de como a onda entra nesse meio. Na maioria dos casos é difícil dizer exatamente como as diferentes decomposições do campo elétrico se relacionam. Até agora, viemos utilizando uma decomposição do tipo

$$\tilde{\mathbf{e}} = \tilde{\mathbf{e}}_L + \tilde{\mathbf{e}}_T,$$

componente longitudinal mais componente transversal. Então, como podemos compatibilizar essa convenção com a normalmente seguida na literatura?

Podemos partir da lei de Gauss para o campo elétrico (2.63), de onde obtemos a relação

$$|\tilde{\mathbf{e}}| \cos \beta = -c G_{a\gamma\gamma} \tilde{a} |\mathbf{B}| \cos \theta, \quad (2.132)$$

onde β é o ângulo entre $\tilde{\mathbf{e}}$ e \mathbf{k} . Isolando \tilde{a} na equação (2.69) e substituindo em (2.132), obtemos

$$\cos \beta = \frac{c^2 \varepsilon_0 (G_{a\gamma\gamma})^2 |\mathbf{B}|^2}{(k^2 - \xi)} \cos \alpha \cos \theta. \quad (2.133)$$

Como existe uma transitividade entre os vetores do campo elétrico, campo magnético de fundo e direção de propagação, podemos escrever as seguintes relações entre os ângulos:

$$\text{se } \beta > \theta \text{ então } \alpha = \beta - \theta, \quad (2.134)$$

$$\text{se } \beta < \theta \text{ então } \alpha = 2\pi + \beta - \theta. \quad (2.135)$$

Como estamos interessados nesse momento somente no cosseno e no seno de alfa, vamos adotar simplesmente a relação (2.134).

Um caso limite a ser explorado é o caso em que \mathbf{B} é transversal. Nesse caso somos levados a concluir que $\cos \beta = 0$, portanto $\tilde{\mathbf{e}}$ também deve estar contido no plano transversal, embora a priori não seja possível concluir a partir da relação (2.133) qual deveria ser o ângulo α entre $\tilde{\mathbf{e}}$ e \mathbf{B} . Por outro lado, da equação (2.76) concluímos que se $\tilde{\mathbf{e}}$ for totalmente paralelo a \mathbf{B} , ou seja, $\alpha = 0$, obtemos que tanto \mathbf{B} quanto $\tilde{\mathbf{e}}$ são necessariamente transversais, e de fato a recíproca será verdadeira, se forem transversais serão necessariamente colineares. Somos capazes de afirmar isso uma vez que são válidas as relações (2.70), (2.71) e (2.74), como $\tilde{\mathbf{b}}$ está contido no plano transversal e é mutuamente ortogonal aos campos $\tilde{\mathbf{e}}$ e \mathbf{B} , estes dois últimos necessariamente devem ser paralelos ou anti-paralelos. Pela equação de onda do Axion,

concluimos então que nessa configuração a mistura do Fóton com o Axion é máxima, o que está de acordo com o resultado apresentado na Figura 4, que indica uma coesão entre as velocidades de grupo.

Outro caso limite que podemos explorar na nossa convenção é o caso em que $\hat{\mathbf{k}}$ está alinhado com \mathbf{B} , ou seja, $\theta = 0$. Nesse caso, a equação (2.133) se resume a

$$\cos \beta = \cos \alpha, \text{ e } \frac{c^2 \varepsilon_0 (G_{a\gamma\gamma})^2 |\mathbf{B}|^2}{(k^2 - \xi)} = 1. \quad (2.136)$$

Da condição (2.134), de fato verificamos a relação entre os cossenos dos ângulos e, a segunda consequência que extraímos da equação (2.133) é na verdade a nova relação de dispersão para o Axion. Para demonstrar essa afirmação, consideramos novamente a lei de Gauss (2.63), de onde escrevemos

$$|\tilde{\mathbf{e}}_L| = -c G_{a\gamma\gamma} \tilde{a} |\mathbf{B}|. \quad (2.137)$$

Mas, como $\mathbf{B} = |\mathbf{B}| \hat{\mathbf{k}}$, então $\tilde{\mathbf{e}}_{\parallel} = |\tilde{\mathbf{e}}_{\parallel}| \hat{\mathbf{k}} = |\tilde{\mathbf{e}}_L| \hat{\mathbf{k}}$. Por outro lado, a equação de onda do Axion se torna

$$(k^2 - \xi) \tilde{a} = -c \varepsilon_0 G_{a\gamma\gamma} |\mathbf{B}| |\tilde{\mathbf{e}}_{\parallel}|, \quad (2.138)$$

dessa forma, obtemos

$$(k^2 - \xi - c^2 \varepsilon_0 (G_{a\gamma\gamma})^2 |\mathbf{B}|^2) \tilde{a} = 0, \quad (2.139)$$

então $\Delta_a \equiv k^2 - \xi - c^2 \varepsilon_0 (G_{a\gamma\gamma})^2 |\mathbf{B}|^2 = 0$ é a nova relação de dispersão para o Axion. Da mesma forma, podemos verificar o que acontece com a relação de dispersão para o Fóton, nesse caso partimos da equação de onda para o campo elétrico, dada em (2.67), e substituímos o conteúdo do Axion, de forma a obter

$$k^2 \tilde{\mathbf{e}} - \frac{\varepsilon_0 (G_{a\gamma\gamma})^2 \omega^2 (\mathbf{B} \cdot \tilde{\mathbf{e}})}{(k^2 - \xi)} \mathbf{B} + \frac{c^2 \varepsilon_0 (G_{a\gamma\gamma})^2 (\mathbf{B} \cdot \tilde{\mathbf{e}}) (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})}{(k^2 - \xi)} \mathbf{k} = (0, 0, 0). \quad (2.140)$$

Para fins de resumo, vamos estudar de forma independente a componente transversa (total) e a componente longitudinal. Para a componente transversa, no cenário que $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}$, a relação de dispersão tem a forma

$$\Delta_{\gamma}^T \equiv k^2 = 0, \quad (2.141)$$

enquanto que para a componente longitudinal

$$\Delta_{\gamma}^L \equiv \Delta_{\gamma}^T \Delta_a = k^2 (k^2 - \xi - c^2 \varepsilon_0 (G_{a\gamma\gamma})^2 |\mathbf{B}|^2) = 0. \quad (2.142)$$

Ambas as relações de dispersão derivam de $\Delta = 0$ para o caso particular de $\theta = 0$, ou seja, quando a onda eletromagnética se propaga paralela ao campo de fundo, somos capazes de distinguir com clareza as contribuições do Fóton e do Axion, o que corresponde ao que chamamos

anteriormente de estado de mínima mistura. É fácil perceber que $k^2 = 0$, para $\theta = 0$ nos conduz a velocidade de grupo advinda da solução da relação de dispersão com o sinal negativo, enquanto que a nova relação de dispersão do Axion nos leva ao exato mesmo comportamento na Figura 5 observado para a velocidade de grupo advinda da solução com o sinal positivo na Figura 4.

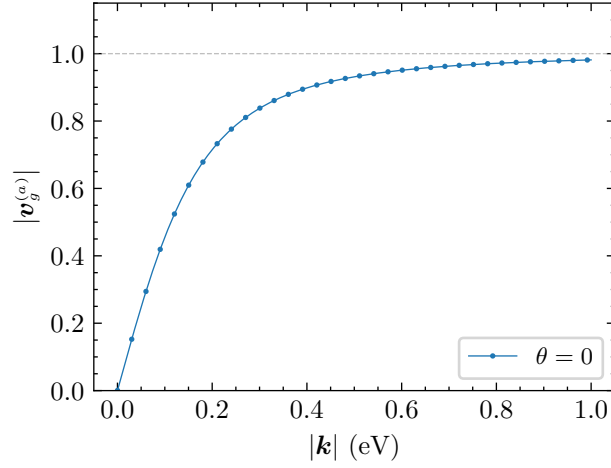


Figura 5 – Comportamento do módulo da velocidade de grupo $|v_g^{(a)}|$ em função de $|k|$, em unidades naturais, $c = \hbar = 1$, para valores $|\mathbf{B}| \sim 10^{16} \text{T} \approx 195,5 \times \text{eV}^2$, $G \approx 10^{-10} \text{GeV}^{-1}$ e $m_a \approx 0,5 \times 10^{-6} \text{eV}$.

Capítulo 3

Eletrodinâmica na presença de Axions e Fótons Escuros

Iniciamos a partir da mistura entre dois termos cinéticos Abelianos da eletrodinâmica descrita pela densidade Lagrangiana

$$\mathcal{L}_{\text{mistura}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\varepsilon}{2}F_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} - \frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu}, \quad (3.1)$$

onde $F_{\mu\nu}$ e $F'_{\mu\nu}$ representam os *field strengths* associados ao Fóton (γ), restrito ao grupo de calibre $U(1)_{\text{EM}}$, e ao Fóton Escuro (γ'), restrito ao grupo de calibre $U(1)_{\text{Escuro}}$, respectivamente. O parâmetro ε é adimensional e atua como um portal entre o eletromagnetismo do Modelo Padrão e um possível eletromagnetismo no setor escuro do universo. Essa mistura cinética, para um setor de Fóton Escuro sem massa, pode ser diagonalizada por meio das transformações de campo

$$A_\mu \rightarrow A_\mu, \quad (3.2)$$

$$A'_\mu \rightarrow A'_\mu + \varepsilon A_\mu. \quad (3.3)$$

Para um setor escuro massivo, a diagonalização ocorre com

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \varepsilon A'_\mu, \quad (3.4)$$

$$A'_\mu \rightarrow A'_\mu. \quad (3.5)$$

Finalmente, os termos de interação eventualmente serão dados por

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \begin{cases} -(A_\mu + \varepsilon A'_\mu)J^\mu - A'_\mu J'^\mu & \text{para } \gamma' \text{ massivo,} \\ -(A'_\mu + \varepsilon A_\mu)J'^\mu - A_\mu J^\mu & \text{para } \gamma' \text{ sem massa,} \end{cases} \quad (3.6)$$

onde A_μ e A'_μ são os campos do Fóton e do Fóton Escuro, respectivamente, e J_μ e J'_μ são os termos de corrente associados ao setor usual e ao setor de matéria escura, respectivamente.

Consideremos agora esse modelo diagonalizado na presença de termos de interação entre Axion, Fóton e os Fótons Escuros [54]. A ação então será dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_{\gamma'}^2 A'_\mu A'^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu a)(\partial^\mu a) - \frac{1}{2}m_a^2 a^2 \\ & + \frac{G_{a\gamma\gamma}}{4}aF_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} + \frac{G_{a\gamma\gamma'}}{4}aF'_{\mu\nu}\tilde{F}'^{\mu\nu} + \frac{G_{a\gamma'\gamma'}}{4}aF'_{\mu\nu}\tilde{F}'^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{\text{int}}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde o campo pseudoescalar a descreve o Axion. Tanto $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ quanto $\tilde{F}'^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F'_{\alpha\beta}$ são *field strengths* duais. As constantes $G_{a\gamma\gamma}$, $G_{a\gamma\gamma'}$ e $G_{a\gamma'\gamma'}$ são responsáveis pelos acoplamentos envolvendo o Axion com dois Fótons, o Axion com um Fóton e um Fóton Escuro, e o Axion com dois Fótons Escuros, respectivamente.

Devido à suposição de ausência de monopolos magnéticos tanto no setor do Fóton quanto no setor do Fóton Escuro, as identidades de Bianchi

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad \text{e} \quad \partial_\mu \tilde{F}'^{\mu\nu} = 0 \quad (3.8)$$

são preservadas. Já as equações de campo covariantes associadas ao Fóton assumem a forma

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = (\partial_\mu a) (G_{a\gamma\gamma}\tilde{F}^{\mu\nu} + G_{a\gamma\gamma'}\tilde{F}'^{\mu\nu}) + \mathcal{J}^\nu, \quad (3.9)$$

nas quais definimos

$$\mathcal{J}^\nu \equiv \begin{cases} J^\nu & \text{para } \gamma' \text{ massivo,} \\ \epsilon J^{\nu} + J^\nu & \text{para } \gamma' \text{ sem massa.} \end{cases} \quad (3.10)$$

No caso do Fóton escuro, tem-se

$$\partial_\mu F'^{\mu\nu} + m_{\gamma'}^2 A'^\nu = (\partial_\mu a) (G_{a\gamma\gamma'}\tilde{F}^{\mu\nu} + G_{a\gamma'\gamma'}\tilde{F}'^{\mu\nu}) + \mathcal{J}'^\nu, \quad (3.11)$$

com

$$\mathcal{J}'^\nu \equiv \begin{cases} \epsilon J^{\nu} + J'^\nu & \text{para } \gamma' \text{ massivo,} \\ J'^\nu & \text{para } \gamma' \text{ sem massa.} \end{cases} \quad (3.12)$$

Por fim, a equação de onda do Axion é dada por

$$(\square + m_a^2)a = \frac{G_{a\gamma\gamma}}{4}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} + \frac{G_{a\gamma\gamma'}}{2}F'_{\mu\nu}\tilde{F}'^{\mu\nu} + \frac{G_{a\gamma'\gamma'}}{4}F'_{\mu\nu}\tilde{F}'^{\mu\nu}. \quad (3.13)$$

Para além do que foi obtido em [54], nós derivamos o tensor energia-momento simétrico do modelo, $T^\mu{}_\rho$, seguindo os passos da Seção C.3 do Apêndice C. O mesmo pode então ser escrito na forma

$$\partial_\mu T^\mu{}_\rho = \mathcal{J}^\mu F_{\mu\rho} + \mathcal{J}'^\mu F'_{\mu\rho}, \quad (3.14)$$

com

$$T^\mu{}_\rho = (T_\gamma)^\mu{}_\rho + (T_{\gamma'})^\mu{}_\rho + (T_a)^\mu{}_\rho, \quad (3.15)$$

onde $(T_\gamma)^\mu{}_\rho$, $(T_{\gamma'})^\mu{}_\rho$ e $(T_a)^\mu{}_\rho$ são os tensores energia-momento canônicos associados aos campos do Fóton, Fóton Escuro e Axion, respectivamente, dados por

$$(T_\gamma)^\mu{}_\rho = F^{\mu\nu}F_{\nu\rho} + \frac{1}{4}\delta^\mu{}_\rho F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}, \quad (3.16)$$

$$(T_{\gamma'})^\mu{}_\rho = F'^{\mu\nu}F'_{\nu\rho} + m_{\gamma'}^2 A'^\mu A'_\rho + \frac{1}{4}\delta^\mu{}_\rho (F'^{\alpha\beta}F'_{\alpha\beta} - 2m_{\gamma'}^2 A'^\nu A'_\nu), \quad (3.17)$$

e

$$(T_a)^\mu{}_\rho = (\partial^\mu a)(\partial_\rho a) - \frac{1}{2}\delta^\mu{}_\rho ((\partial^\mu a)(\partial_\mu a) - m_a^2 a^2). \quad (3.18)$$

Como esperado, a natureza topológica dos termos de interação entre os campos de Axion, Fóton e Fóton Escuro implica que eles não contribuem para o tensor energia-momento.

3.1 O Modelo Expandido em Fundo Eletromagnético

Com motivações semelhantes as apresentadas na Seção 2.2, se decomposermos o quadripotencial A^μ de tal forma que

$$A^\mu = \mathcal{A}^\mu + A_B^\mu, \quad (3.19)$$

e identificarmos \mathcal{A}^μ como o campo do Fóton e A_B^μ como um quadripotencial de fundo, nesse arcabouço teremos que o *field strengths* será dado por

$$F^{\mu\nu} = f^{\mu\nu} + F_B^{\mu\nu}, \quad (3.20)$$

com $f^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = (\mathbf{e}^i, -\varepsilon^{ijk}\mathbf{b}^k)$ e $F_B^{\mu\nu} = \partial^\mu A_B^\nu - \partial^\nu A_B^\mu = (\mathbf{E}^i, -\varepsilon^{ijk}\mathbf{B}^k)$. Dessa forma, a Lagrangiana inicial assume a forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}f_{\mu\nu}f^{\mu\nu} - \frac{1}{2}f_{\mu\nu}F_B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{B\mu\nu}F_B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_{\gamma'}^2 A'_\mu A'^\mu \\ & + \frac{1}{2}(\partial_\mu a)(\partial^\mu a) - \frac{1}{2}m_a^2 a^2 + \frac{G_{a\gamma\gamma}}{4}a(f_{\mu\nu}\tilde{f}^{\mu\nu} + 2f_{\mu\nu}\tilde{F}_B^{\mu\nu} + F_{B\mu\nu}\tilde{F}_B^{\mu\nu}) \\ & + \frac{G_{a\gamma\gamma'}}{2}a(f^{\mu\nu} + F_B^{\mu\nu})\tilde{F}'_{\mu\nu} + \frac{G_{a\gamma'\gamma'}}{4}aF'_{\mu\nu}\tilde{F}'^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{\text{int}}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Assim, no vácuo, as equações de campo para o Fóton são

$$\partial_\mu (f^{\mu\nu} + F_B^{\mu\nu}) = (\partial_\mu a) [G_{a\gamma\gamma} (\tilde{f}^{\mu\nu} + \tilde{F}_B^{\mu\nu}) + G_{a\gamma\gamma'} \tilde{F}'^{\mu\nu}]. \quad (3.22)$$

Nesse cenário, a identidade de Bianchi permanece válida,

$$\partial_\mu \tilde{f}^{\mu\nu} = 0. \quad (3.23)$$

Além disso, pode-se também mostrar que as equações de campo do setor escuro são

$$\partial_\mu F'^{\mu\nu} = -m_{\gamma'}^2 A'^\nu + (\partial_\mu a) \left[G_{a\gamma\gamma'} \left(\tilde{f}^{\mu\nu} + \tilde{F}_B^{\mu\nu} \right) + G_{a\gamma'\gamma'} \tilde{F}'^{\mu\nu} \right]. \quad (3.24)$$

Aqui, também temos a identidade de Bianchi, de modo que

$$\partial_\mu \tilde{F}'^{\mu\nu} = 0. \quad (3.25)$$

Pode-se ainda obter a equação de onda para o campo do Axion em forma covariante,

$$\begin{aligned} (\square + m_a^2)a &= \frac{G_{a\gamma\gamma'}}{4} \left(f_{\mu\nu} \tilde{f}^{\mu\nu} + 2f_{\mu\nu} \tilde{F}_B^{\mu\nu} + F_{B\mu\nu} \tilde{F}_B^{\mu\nu} \right) \\ &+ \frac{G_{a\gamma'\gamma'}}{2} \left(f_{\mu\nu} + F_{B\mu\nu} \right) \tilde{F}'^{\mu\nu} + \frac{G_{a\gamma'\gamma'}}{4} F'_{\mu\nu} \tilde{F}'^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

No que segue, nos restringiremos mais uma vez ao caso de um campo magnético constante de fundo e conduziremos discussões semelhantes às do Capítulo anterior.

3.1.1 Equações da ED na presença de um Fundo Magnético Constante

Sempre que tivermos este caso particular, de um campo magnético de fundo constante, vamos adotar a notação simplificada

$$G_{a\gamma\gamma} \equiv \mathbf{G}, \quad (3.27)$$

$$G_{a\gamma'\gamma'} \equiv \mathbf{G}', \quad (3.28)$$

para as constantes de acoplamento. Neste caso, para o setor do Fóton temos que as equações de Maxwell modificadas no espaço de momento são dadas por

$$\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{G}\tilde{a}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}), \quad (3.29)$$

$$\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{b}} = -\omega(\tilde{\mathbf{e}} - \mathbf{G}\tilde{a}\mathbf{B}), \quad (3.30)$$

$$\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{b}} = 0, \quad (3.31)$$

$$\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{e}} = \omega\tilde{\mathbf{b}}. \quad (3.32)$$

As equações de Maxwell para o setor do Fóton Escuro são

$$i\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{E}}' = m_{\gamma'}^2 \tilde{\phi}' + i\mathbf{G}'\tilde{a}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}), \quad (3.33)$$

$$i\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{B}}' = m_{\gamma'}^2 \tilde{\mathbf{A}}' - i\omega(\tilde{\mathbf{E}}' - \mathbf{G}'\tilde{a}\mathbf{B}), \quad (3.34)$$

$$\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{B}}' = 0, \quad (3.35)$$

$$\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}}' = \omega\tilde{\mathbf{B}}'. \quad (3.36)$$

Estas equações nos levam às equações de onda para ambos os setores, tais que

$$(\omega^2 - \mathbf{k}^2)\tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{G}\omega^2\tilde{a}\mathbf{B} - \mathbf{G}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})\tilde{a}\mathbf{k}, \quad (3.37)$$

$$(\omega^2 - \mathbf{k}^2)\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{G}\omega\tilde{a}(\mathbf{k} \times \mathbf{B}), \quad (3.38)$$

e

$$(\omega^2 - \mathbf{k}^2 - m_{\gamma'}^2)\tilde{\mathbf{E}}' = G'\omega^2\tilde{a}\mathbf{B} - G'(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})\tilde{a}\mathbf{k}, \quad (3.39)$$

$$(\omega^2 - \mathbf{k}^2 - m_{\gamma'}^2)\tilde{\mathbf{B}}' = G'\omega\tilde{a}(\mathbf{k} \times \mathbf{B}). \quad (3.40)$$

No setor do Axion temos

$$(\omega^2 - \mathbf{k}^2 - m_a^2)\tilde{a} = G\tilde{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{B} + G'\tilde{\mathbf{E}}' \cdot \mathbf{B}. \quad (3.41)$$

Tomando o produto escalar das Eqs. (3.37) e (3.39) pelo campo magnético \mathbf{B} , isolando os resultados para obter $\tilde{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{B}$ e $\tilde{\mathbf{E}}' \cdot \mathbf{B}$ e substituindo na equação de onda do Axion, obtemos que equação de onda do Axion diagonalizada na forma

$$\begin{aligned} & \left\{ (\omega^2 - \mathbf{k}^2)(\omega^2 - \mathbf{k}^2 - m_a^2)(\omega^2 - \mathbf{k}^2 - m_{\gamma'}^2) \right. \\ & \left. + \left[(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})^2 - \omega^2 \mathbf{B}^2 \right] \left[(G_{a\gamma\gamma})^2(\omega^2 - \mathbf{k}^2 - m_{\gamma'}^2) + (G_{a\gamma\gamma'})^2(\omega^2 - \mathbf{k}^2) \right] \right\} \tilde{a} = 0. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Desse resultado, podemos ler a relação de dispersão modificada para o modelo para o caso de um Fóton Escuro massivo dada por

$$\begin{aligned} \Delta_{m_{\gamma'}} &= (\omega^2 - \mathbf{k}^2)(\omega^2 - \mathbf{k}^2 - m_a^2)(\omega^2 - \mathbf{k}^2 - m_{\gamma'}^2) \\ &+ \left[(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})^2 - \omega^2 \mathbf{B}^2 \right] \left[(G_{a\gamma\gamma})^2(\omega^2 - \mathbf{k}^2 - m_{\gamma'}^2) + (G_{a\gamma\gamma'})^2(\omega^2 - \mathbf{k}^2) \right]. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Tomando o limite de massa zero para o Fóton Escuro na equação (3.43), obtemos a relação de dispersão para este caso na forma

$$\Delta' = (\omega^2 - \mathbf{k}^2) \left\{ (\omega^2 - \mathbf{k}^2)(\omega^2 - \mathbf{k}^2 - m_a^2) + (G^2 + G'^2) \left[(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})^2 - \omega^2 \mathbf{B}^2 \right] \right\}. \quad (3.44)$$

Alternativamente, vamos obter a relação de dispersão modificada através de um procedimento mais convencional ao buscar pela equação de onda homogênea para o campo elétrico do setor fotônico $\tilde{\mathbf{e}}$. Para isso, primeiramente, isolamos o campo elétrico do Fóton Escuro na equação (3.39) e levamos o mesmo na equação de onda para o Axion (3.41) para obter o campo do Axion inteiramente em função de $\tilde{\mathbf{e}}$. Ao isolar o campo Axion nesse procedimento e substituir o mesmo na equação de onda do campo $\tilde{\mathbf{e}}$ podemos escrever

$$\begin{aligned} & \left\{ (\omega^2 - \mathbf{k}^2) \left[(\omega^2 - \mathbf{k}^2 - m_a^2)(\omega^2 - \mathbf{k}^2 - m_{\gamma'}^2) - G'^2\omega^2\mathbf{B}^2 + G'^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})^2 \right] \delta_{ij} \right. \\ & \left. - (\omega^2 - \mathbf{k}^2 - m_{\gamma'}^2) \left[G^2\omega^2\mathbf{B}_i\mathbf{B}_j - G^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})\mathbf{k}_i\mathbf{B}_j \right] \right\} \tilde{e}_j = 0. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Tomando o determinante da matriz que atua em \tilde{e}_j , regatamos as relações de dispersão (3.43) e (3.44), a última no limite em que $m_{\gamma'} \rightarrow 0$.

Adicionalmente, podemos agora reobter o tensor energia-momento seguindo os passos da Seção C.4 do Apêndice C. Assim, somos levados a escrever esse tensor decomposto na soma

$$T^\mu{}_\rho = (T_\gamma)^\mu{}_\rho + (T_{\gamma'})^\mu{}_\rho + (T_a)^\mu{}_\rho + (T_{a\gamma\gamma})^\mu{}_\rho + (T_{a\gamma\gamma'})^\mu{}_\rho, \quad (3.46)$$

onde $(T_\gamma)^\mu{}_\rho$, $(T_{\gamma'})^\mu{}_\rho$ e $(T_a)^\mu{}_\rho$ são dados por (3.16), (3.17) e (3.18), respectivamente. Os novos termos provenientes da anisotropia de fundo são dados por

$$(T_{a\gamma})^\mu{}_\rho = G a \tilde{f}^{\mu\nu} F_{B\nu\rho}, \quad (3.47)$$

e

$$(T_{a\gamma'})^\mu{}_\rho = G' a \tilde{F}^{\mu\nu} F_{B\nu\rho}. \quad (3.48)$$

3.2 As Relações de Dispersão Modificadas e Quantidades Ópticas Associadas

Daqui em diante, extrairemos informações físicas importantes das relações de dispersão modificadas para os casos do Fóton Escuro sem massa e com massa.

3.2.1 Caso do Fóton Escuro sem Massa

Como vimos, neste caso, a relação de dispersão modificada é dada por

$$\Delta' = (\omega^2 - \mathbf{k}^2) \left\{ (\omega^2 - \mathbf{k}^2)(\omega^2 - \mathbf{k}^2 - m_a^2) + (G^2 + G'^2) \left[(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})^2 - \omega^2 \mathbf{B}^2 \right] \right\} = 0. \quad (3.49)$$

Ao resolver esta equação para ω em termos de \mathbf{k} obtemos seis soluções, das quais três são soluções de energia positiva. A primeira delas é a solução típica de um Fóton sem massa, escrita como

$$\omega = |\mathbf{k}|, \quad (3.50)$$

e as demais soluções são soluções típicas do eletromagnetismo Axiônico, dadas por

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2\mathbf{k}^2 + (G^2 + G'^2)\mathbf{B}^2 + m_a^2 \pm \sqrt{((G^2 + G'^2)\mathbf{B}^2 + m_a^2)^2 + 4(G^2 + G'^2)\mathbf{B}^2\mathbf{k}^2 \sin^2 \theta}}, \quad (3.51)$$

onde θ é o ângulo entre o campo magnético de fundo e a direção de propagação da onda eletromagnética $\hat{\mathbf{k}}$. No referencial de repouso (fazendo $|\mathbf{k}| = 0$), obtemos

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(G^2 + G'^2)\mathbf{B}^2 + m_a^2 \pm ((G^2 + G'^2)\mathbf{B}^2 + m_a^2)}, \quad (3.52)$$

de onde identificamos duas soluções possíveis. Essas duas soluções são respectivamente

$$\omega_0^{(+)} = \sqrt{(G^2 + G'^2)\mathbf{B}^2 + m_a^2}, \quad (3.53)$$

$$\omega_0^{(-)} = 0, \quad (3.54)$$

onde identificamos $\omega_0^{(+)}$ com uma massa efetiva para o Axion. Esse termo de massa tem a mesma forma que o termo que aparece na ED Axiônica pura, mas aqui leva-se em conta a constante de acoplamento G' . Como veremos, a presença de G' funciona como um amplificador

para a massa efetiva do Axion e também funcionará como um amplificador dos possíveis efeitos ópticos para essa eletrodinâmica em comparação com a ED Axiônica.

Prosseguindo, observamos que existem três modos de velocidade de fase. Um desses modos é o usual dado por $|v_f| = 1$, enquanto os demais, correspondentes aos sinais de (\pm) , são dados por

$$|v_f^{(\pm)}| = \sqrt{1 + \frac{(G^2 + G'^2)\mathbf{B}^2 + m_a^2}{2\mathbf{k}^2} \pm \sqrt{\frac{((G^2 + G'^2)\mathbf{B}^2 + m_a^2)^2}{4\mathbf{k}^4} + \frac{(G^2 + G'^2)\mathbf{B}^2 \sin^2 \theta}{\mathbf{k}^2}}}. \quad (3.55)$$

Nesse caso, para a velocidade de frente de onda $v_{fr}^{(\pm)}$, com sinais (\pm) indicando os dois modos de propagação não usuais da onda, obtemos

$$v_{fr}^{(\pm)} \equiv \lim_{|\mathbf{k}| \rightarrow \infty} |v_f^{(\pm)}| = 1. \quad (3.56)$$

Ou seja, ambos os modos são causais desse ponto de vista. A partir da velocidade de fase, também podemos obter o índice de refração. Para a ED na presença de Axions e Fótons Escuros, imersos no campo magnético constante de fundo, obtemos para o índice de refração

$$n^{(\pm)} = \left(1 + \frac{(G^2 + G'^2)\mathbf{B}^2 + m_a^2}{2\mathbf{k}^2} \pm \sqrt{\frac{((G^2 + G'^2)\mathbf{B}^2 + m_a^2)^2}{4\mathbf{k}^4} + \frac{(G^2 + G'^2)\mathbf{B}^2 \sin^2 \theta}{\mathbf{k}^2}}\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.57)$$

Aqui, assim como no caso da ED Axiônica, observamos que possuímos a priori sempre dois valores para n , n^+ e n^- , para cada θ distinto, mais uma vez indicando uma possível birrefringência.

Continuando com a nossa análise de causalidade da teoria devemos em sequência obter as componentes da velocidade de grupo. Para o modo usual, obtêm-se

$$(\mathbf{v}_g)_i = \frac{\mathbf{k}_i}{\omega}, \quad (3.58)$$

já para os demais modos obtemos,

$$(\mathbf{v}_g)_i^{(\pm)} = \frac{1}{\omega_{(\pm)}} \left(\mathbf{k}_i \pm \frac{(G^2 + G'^2)(\mathbf{B}^2 \mathbf{k}_i - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{B}_i)}{\sqrt{((G^2 + G'^2)\mathbf{B}^2 + m_a^2)^2 + 4(G^2 + G'^2)\mathbf{B}^2 \mathbf{k}^2 \sin^2 \theta}} \right). \quad (3.59)$$

Dessa forma, os respectivos módulos da velocidade de grupo correspondem a

$$|\mathbf{v}_g| = 1, \quad (3.60)$$

e

$$|\mathbf{v}_g^{(\pm)}| = \frac{|\mathbf{k}|}{\omega_{(\pm)}} \sqrt{1 + \sin^2 \theta \left(\frac{(G^2 + G'^2)^2 \mathbf{B}^4}{\Xi^2} \pm \frac{2(G^2 + G'^2)\mathbf{B}^2}{\Xi} \right)}, \quad (3.61)$$

onde Ξ , é dado por

$$\Xi = \sqrt{((G^2 + G'^2)\mathbf{B}^2 + m_a^2)^2 + 4(G^2 + G'^2)\mathbf{B}^2 \mathbf{k}^2 \sin^2 \theta}. \quad (3.62)$$

Como no caso da ED Axiônica, a partir dos gráficos do módulo da velocidade de grupo em função do módulo do momento, podemos analisar o comportamento da propagação da informação considerando diferentes cenários, afim de varrer uma gama de cenários possíveis e descobrir se algum deles fere a causalidade. Começando por campos magnéticos de experimentos terrestres, utilizando os mesmos dados utilizados no caso do acoplamento realizado unicamente com o Axion, podemos explorar diferentes valores para o acoplamento G' . A Figura 6 contempla o caso de um campo magnético da ordem de $|\mathbf{B}| \sim 10$ T, como os utilizados em experimentos como o LSW, onde observamos o mesmo comportamento apresentado na ED Axiônica, para todo G' menor ou igual a $G' \sim 10^{-2} \text{ GeV}^{-1}$.

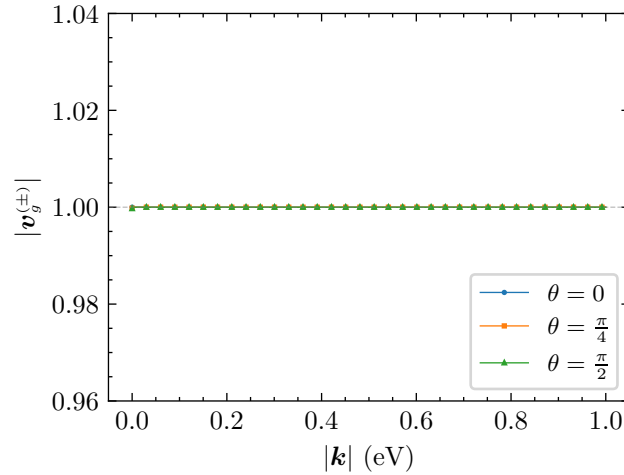


Figura 6 – Comportamento do módulo da velocidade de grupo $|v_g^{(\pm)}|$ em função de $|k|$, conforme a equação (3.61), para valores de campos magnéticos terrestres com $|\mathbf{B}| = 10\text{T} \approx 1955 \text{ eV}^2$, $G \approx 10^{-10} \text{ GeV}^{-1}$, $m_a \approx 0,5 \times 10^{-6} \text{ eV}$ e valores iguais ou menores que $G' \approx 10^{-2} \text{ GeV}^{-1}$. O ângulo θ é o ângulo entre \mathbf{k} e \mathbf{B} . Os sinais (\pm) de $|v_g^{(\pm)}|$ estão associados com os dois modos propagantes possíveis, advindos da relação de dispersão modificada.

A medida que vamos aumentando o campo magnético, mantendo $G' \sim 10^{-2} \text{ GeV}^{-1}$, podemos observar o comportamento das curvas se modificando para valores de momento bastante baixos, mas nada ainda apreciável. Agora, indo para valores de campos magnéticos de objetos astrofísicos, como magnetares, da ordem de $|\mathbf{B}| \sim 10^{10} \text{ T}$, observamos o comportamento apresentado na Figura 7, onde os perfis das curvas coincidem perfeitamente com àqueles apresentados na Figura 4 no Capítulo 2. Embora, seja válido notar a amplificação desse comportamento, tanto porque é notável para valores de campos astrofísicos, que no caso da ED Axiônica não era, quanto em termos de valores de momento, pois nesse caso vemos esse comportamento para momentos duas ordens de grandeza maiores do que no caso anterior. Quando consideramos o valor de $G' \sim 10^{-4} \text{ GeV}^{-1}$ observamos o exato mesmo comportamento dado na Figura 4, só que para um campo magnético seis ordens de grandeza menor. Isso nos leva, ingenuamente, a creditar que se o acoplamento Axion-Fóton-Fóton ocorrer ao mesmo tempo que o acoplamento Axion-Fóton-Fóton Escuro, considerando a presença do campo magnético externo, seríamos capazes de observar efeitos ópticos, ainda que bastante sensíveis, na presença

de campos magnéticos presentes no meio astrofísico.

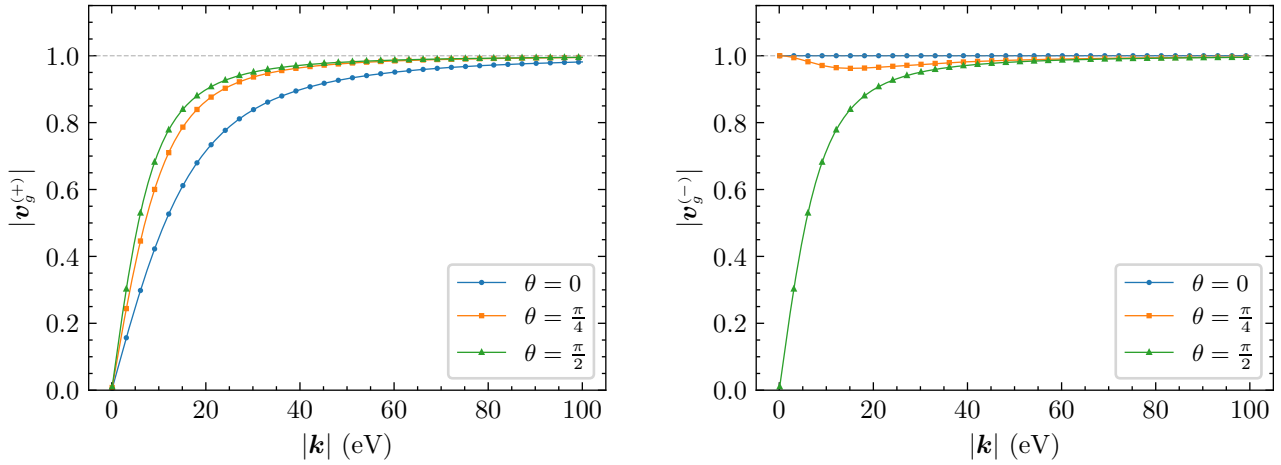


Figura 7 – Comportamento do modulo da velocidade de grupo $|v_g^{(\pm)}|$ em função de $|k|$, conforme a equação (3.61), para valores de campos magnéticos astrofísicos com $|\mathbf{B}| \sim 10^{10}\text{T} \approx 195,5 \times 10^{10} \text{ eV}^2$, $G \approx 10^{-10} \text{ GeV}^{-1}$, $m_a \approx 0,5 \times 10^{-6} \text{ eV}$ e $G' \approx 10^{-2} \text{ GeV}^{-1}$. O ângulo θ é o ângulo entre \mathbf{k} e \mathbf{B} . Os sinais (+) e (-) que aparecem como índices no modulo da velocidade de grupo estão associados respectivamente com os modos propagantes advindos das soluções da relação de dispersão modificada que carregam os sinais positivo e negativo.

Assim como no caso da ED Axiônica, mesmo extrapolando o valor do campo magnético, não observamos nenhuma violação da causalidade. Obtemos sempre os mesmos perfis de curva, variando apenas a faixa de momento a depender do valor de G' . Na seção a seguir, iremos explorar a relação de dispersão para o caso do Fóton Escuro massivo.

3.2.2 Caso do Fóton Escuro Massivo

Para o caso do Fóton Escuro massivo temos que a relação de dispersão modificada é dada por

$$\Delta_{m_{\gamma'}} = (\omega^2 - \mathbf{k}^2)(\omega^2 - \mathbf{k}^2 - m_a^2)(\omega^2 - \mathbf{k}^2 - m_{\gamma'}^2) + \left[(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})^2 - \omega^2 \mathbf{B}^2 \right] \left[(G_{a\gamma\gamma})^2 (\omega^2 - \mathbf{k}^2 - m_{\gamma'}^2) + (G_{a\gamma\gamma'})^2 (\omega^2 - \mathbf{k}^2) \right] = 0. \quad (3.63)$$

Resolvendo esta equação para ω , obtemos três soluções positivas: uma real e duas complexas. Essas soluções têm a forma

$$\omega_I = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3\mathbf{k}^2 + \beta + \beta' + \Lambda_I \frac{2^{\frac{1}{3}}}{\Omega^{\frac{1}{3}}} \left((\beta + \beta')^2 + 3(G^2 + G'^2) \mathbf{B}^2 \mathbf{k}^2 \sin^2 \theta - 3m_{\gamma'}^2 \beta \right) + \Lambda_I^* \frac{\Omega^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}}}, \quad (3.64)$$

com β e β' dados por

$$\beta = G^2 \mathbf{B}^2 + m_a^2, \quad (3.65)$$

$$\beta' = G'^2 \mathbf{B}^2 + m_{\gamma'}^2, \quad (3.66)$$

e Ω dado como

$$\Omega = A + \sqrt{A^2 - 4 \left((\beta + \beta')^2 + 3(G^2 + G'^2) \mathbf{B}^2 \mathbf{k}^2 \sin^2 \theta - 3m_{\gamma'}^2 \beta \right)^3}, \quad (3.67)$$

onde A é explicitamente dado por

$$A = (\beta + \beta') \left[9(G^2 + G'^2) \mathbf{B}^2 \mathbf{k}^2 \sin^2 \theta - 9m_{\gamma'}^2 \beta + 2(\beta + \beta')^2 \right] - 27m_{\gamma'}^2 G^2 \mathbf{B}^2 \mathbf{k}^2 \sin^2 \theta. \quad (3.68)$$

O índice $I = 1, 2, 3$, identifica cada solução, e os coeficientes Λ_I são dados por

$$\Lambda_1 = 1, \quad (3.69)$$

$$\Lambda_2 = - \left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right), \quad (3.70)$$

$$\Lambda_3 = - \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right). \quad (3.71)$$

A priori, tendo em vista a dificuldade adicional de analisar as expressões complexas, vamos nos ater a análise da solução real, que em um limite de G' , $m_{\gamma'}$ e $|\mathbf{k}|$ tendendo a zero, nos leva à massa efetiva do Axion, na ED Axionica. A expressão real é simplesmente dada como

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3\mathbf{k}^2 + \beta + \beta' + \frac{2^{\frac{1}{3}}}{\Omega^{\frac{1}{3}}} \left((\beta + \beta')^2 + 3(G^2 + G'^2) \mathbf{B}^2 \mathbf{k}^2 \sin^2 \theta - 3m_{\gamma'}^2 \beta \right) + \frac{\Omega^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}}}. \quad (3.72)$$

No referencial de repouso, obtemos a massa efetiva para o Axion,

$$(\omega_1)_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{2^{\frac{1}{3}} \Omega_0^{\frac{1}{3}} (\beta + \beta') + 2^{\frac{2}{3}} \left((\beta + \beta')^2 - 3m_{\gamma'}^2 \beta \right) + \Omega_0^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{1}{3}} \Omega_0^{\frac{1}{3}}}}, \quad (3.73)$$

com Ω_0 dado por

$$\Omega_0 = 2(\beta + \beta')^3 - 3m_{\gamma'}^2 \beta \left(3(\beta + \beta') - \sqrt{12m_{\gamma'}^2 \beta - 3(\beta + \beta')^2} \right). \quad (3.74)$$

A velocidade de fase fica escrita como

$$|v_f| = \sqrt{1 + \frac{(\beta + \beta')}{3\mathbf{k}^2} + \frac{2^{\frac{1}{3}}}{\Omega^{\frac{1}{3}}} \left(\frac{(\beta + \beta')^2}{3\mathbf{k}^2} + (G^2 + G'^2) \mathbf{B}^2 \sin^2 \theta - \frac{m_{\gamma'}^2 \beta}{\mathbf{k}^2} \right) + \frac{\Omega^{\frac{1}{3}}}{3\mathbf{k}^2 2^{\frac{1}{3}}}}, \quad (3.75)$$

onde o limite de $|\mathbf{k}|$ tendendo a infinito, retorna

$$v_{fr} \equiv \lim_{|\mathbf{k}| \rightarrow \infty} |v_f| = 1. \quad (3.76)$$

O índice de refração fica dado por

$$n = \left[1 + \frac{(\beta + \beta')}{3\mathbf{k}^2} + \frac{2^{\frac{1}{3}}}{\Omega^{\frac{1}{3}}} \left(\frac{(\beta + \beta')^2}{3\mathbf{k}^2} + (G^2 + G'^2) \mathbf{B}^2 \sin^2 \theta - \frac{m_{\gamma'}^2 \beta}{\mathbf{k}^2} \right) + \frac{\Omega^{\frac{1}{3}}}{3\mathbf{k}^2 2^{\frac{1}{3}}} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.77)$$

A velocidade de grupo, em suas componentes, é dada como

$$\mathbf{v}_{g_i} = \frac{1}{\omega_1} \left(\mathbf{k}_i + (\mathbf{G}^2 + \mathbf{G}'^2)(\mathbf{B}^2 \mathbf{k}_i - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{B}_i) \Gamma \right), \quad (3.78)$$

onde Γ é dado por

$$\Gamma = \frac{2^{\frac{1}{3}}}{\Omega^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{\sqrt{\mathbf{A}^2 - 4\Pi^3}} \left((\beta + \beta') - \frac{2\Pi^2}{\Omega} - \frac{3\mathbf{G}^2 m_{\gamma'}^2}{(\mathbf{G}^2 + \mathbf{G}'^2)} \right) \left(\frac{2^{\frac{1}{3}}}{\Omega^{\frac{1}{3}}} \Pi - \frac{\Omega^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}} \right), \quad (3.79)$$

onde Π é dado por

$$\Pi = (\beta + \beta')^2 + 3(\mathbf{G}^2 + \mathbf{G}'^2) \mathbf{B}^2 \mathbf{k}^2 \sin^2 \theta - 3m_{\gamma'}^2 \beta. \quad (3.80)$$

Por fim, o modulo da velocidade de grupo fica dado como

$$|\mathbf{v}_g| = \frac{|\mathbf{k}|}{\omega_1} \sqrt{1 + \sin^2 \theta \left((\mathbf{G}^2 + \mathbf{G}'^2)^2 \mathbf{B}^4 \Gamma^2 + 2(\mathbf{G}^2 + \mathbf{G}'^2) \mathbf{B}^2 \Gamma \right)}. \quad (3.81)$$

A expressão (3.64) é bastante intrincada, guardando desafios mesmo na solução que a priori é real. Olhando com mais atenção para nossa expressão da velocidade de grupo (3.81), percebemos que, a depender dos valores das variáveis envolvidas, obteremos raízes quadradas de números negativos, de forma a termos que nos voltar novamente ao corpo dos complexos. Nesse cenário, não será possível realizar uma análise nos mesmos moldes anteriores, as expressões para o Fóton Escuro massivo requerem um tratamento mais atencioso e rigoroso.

Embora esse seja um caso mais desafiador, é também um cenário bastante rico do ponto de vista óptico, partes imaginárias presentes nas quantidades ópticas podem nos levar a uma série de novos fenômenos que não estão presentes para soluções reais, como o dicroísmo, por exemplo, ou efeitos de atenuação na velocidade de grupo, dando origem a uma onda evanescente, entre outras coisas. Por toda essa riqueza contida nessas soluções, está em nossas perspectivas explorar esses e outros aspectos da ED na presença de Axions e Fótons Escuros massivos em trabalhos futuros.

Capítulo 4

Os Propagadores e o Efeito Primakoff

Neste Capítulo são calculados os propagadores do Fóton, do Axion e do Fóton Escuro na presença de um fundo magnético constante. Além do mais, também são obtidas as expressões dos propagadores mistos do tipo Fóton–Axion, Fóton–Fóton Escuro e Axion–Fóton Escuro. Tudo é examinado tanto no caso do Fóton Escuro massivo quanto no caso não massivo. Por fim, comentamos como estes propagadores mistos podem levar a uma amplitude de transição que nos permite calcular a probabilidade da conversão de Fótons em Axions, Fótons em Fótons Escuros e Axions em Fótons Escuros. Tal conversão é conhecida como efeito Primakoff.

4.1 Os Propagadores para a ED Axiônica

Vamos poder obter os propagadores da eletrodinâmica Axiônica expandida em fundo magnético constante partindo da Lagrangiana quadrática

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} f^{\mu\nu} f_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial^\mu a \partial_\mu a - \frac{1}{2} \xi a^2 - \frac{1}{2\mu_0} G_{a\gamma\gamma} a \tilde{F}_B^{\mu\nu} f_{\mu\nu} - \frac{1}{2\mu_0 \alpha} (\partial_\mu \mathcal{A}^\mu)^2, \quad (4.1)$$

e reescrevendo-a na forma matricial

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\mu_0} \begin{pmatrix} A^\nu & \sqrt{\mu_0} a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \square \eta_{\mu\nu} + \chi \partial_\mu \partial_\nu & -\frac{1}{\sqrt{\mu_0}} G_{a\gamma\gamma} \tilde{F}_{B\nu\alpha} \partial^\alpha \\ \frac{1}{\sqrt{\mu_0}} G_{a\gamma\gamma} \tilde{F}_{B\mu\beta} \partial^\beta & -\square - \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^\mu \\ \sqrt{\mu_0} a \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

onde $\chi = (\alpha^{-1} - 1)$. Neste primeiro caso, estamos adotando o SI, afim de tornar o cálculo acessível para aqueles que não utilizam usualmente o sistema de unidades naturais.

A matriz presente na equação (4.2) é denominada matriz de *mixing*, cuja a inversa nos dá os operadores necessários para construir os propagadores. Para realizar a inversão dessa matriz de forma consistente devemos ir para o espaço dos momentos. Lembrando que a ação no espaço das configurações tem a forma

$$S = \frac{1}{c} \int d^4x \mathcal{L},$$

no espaço dos momentos a ação será dada por

$$S = \frac{1}{c} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{2\mu_0} [\tilde{A}^\nu(k)(-k^2\eta_{\mu\nu} - \chi k_\mu k_\nu)\tilde{A}^\mu(-k) + \sqrt{\mu_0} \tilde{a}(k)(k^2 - \xi)\sqrt{\mu_0} \tilde{a}(-k) + \sqrt{\mu_0} \tilde{a}(k) \frac{1}{\sqrt{\mu_0}}(iG_{a\gamma\gamma}L_\mu)\tilde{A}^\mu(-k) + \tilde{A}^\nu(k) \frac{1}{\sqrt{\mu_0}}(-iG_{a\gamma\gamma}L_\nu)\sqrt{\mu_0} \tilde{a}(-k)], \quad (4.3)$$

onde $k^2 = k^\mu k_\mu = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \mathbf{k}^2\right)$ e

$$L_\mu \equiv \tilde{F}_{B\mu\beta} k^\beta. \quad (4.4)$$

Na forma matricial podemos escrever a equação (4.3) compactamente,

$$S = \frac{1}{c} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{2\mu_0} \begin{pmatrix} \tilde{A}^\nu(k) & \sqrt{\mu_0} \tilde{a}(k) \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} \tilde{A}^\mu(-k) \\ \sqrt{\mu_0} \tilde{a}(-k) \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

onde

$$M = \begin{pmatrix} -k^2\eta_{\mu\nu} - \chi k_\mu k_\nu & -\frac{1}{\sqrt{\mu_0}}iG_{a\gamma\gamma}L_\nu \\ \frac{1}{\sqrt{\mu_0}}iG_{a\gamma\gamma}L_\mu & k^2 - \xi \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Para encontrar os propagadores, iM^{-1} , precisamos inverter a matriz (4.6). Seguindo o roteiro do Apêndice E, para inversão de matrizes estruturadas na forma de blocos, para a matriz (4.6) chegamos à inversa dada por

$$(M^{-1})^{\nu\rho} = \frac{1}{k^4\Delta} \begin{pmatrix} -k^2\Delta\eta^{\nu\rho} + (1-\alpha)\Delta k^\nu k^\rho + k^2\mathbf{G}^2L^\nu L^\rho & -\frac{1}{\sqrt{\mu_0}}ik^4\mathbf{G}L^\rho \\ \frac{1}{\sqrt{\mu_0}}ik^4\mathbf{G}L^\nu & k^6 \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

onde verificamos que Δ , dado pela equação (2.84), é de fato a relação de dispersão modificada para os campos do Fóton e do Axion misturados, uma vez que Δ é o polo do propagador misto. Explicitamente, nossos propagadores são dados por

$$\langle \mathcal{A}^\nu \mathcal{A}^\rho \rangle = -\frac{i}{k^2} \left(\eta^{\nu\rho} + \frac{(\alpha-1)k^\nu k^\rho}{k^2} - \frac{\mathbf{G}^2L^\nu L^\rho}{\Delta} \right), \quad (4.8)$$

$$\langle aa \rangle = i\frac{k^2}{\Delta}, \quad (4.9)$$

$$\langle \mathcal{A}^\nu a \rangle = \frac{1}{\sqrt{\mu_0}} \frac{\mathbf{G}L^\nu}{\Delta}, \quad (4.10)$$

$$\langle a \mathcal{A}^\rho \rangle = -\frac{1}{\sqrt{\mu_0}} \frac{\mathbf{G}L^\rho}{\Delta}. \quad (4.11)$$

4.2 Os Propagadores para a ED na presença de Axions e Fótons Escuros

No caso da ED na presença de Axions e Fótons escuros, adotamos, por conveniência, o sistema de unidades naturais. Além disso, será importante para esse processo diferenciar os casos do Fóton Escuro massivo e não massivo, uma vez que a ação para o Fóton Escuro massivo tem a sua simetria de calibre quebrada e o não massivo a preserva. Como vimos, no caso de um fóton não massivo, precisamos inserir um termo de fixação de calibre na ação, enquanto que para o caso massivo esse procedimento não é necessário. Dessa forma, obteremos diferentes ações a partir das quais chegaremos aos operadores que nos dão nossos propagadores da teoria.

4.2.1 O Caso Massivo

Restringindo a Lagrangiana (3.21) para o caso de um Fóton Escuro massivo e um campo magnético de fundo constante, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{m_{\gamma'}} = & -\frac{1}{4}f_{\mu\nu}f^{\mu\nu} - \frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_{\gamma'}^2 A'_\mu A'^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu a)(\partial^\mu a) - \frac{1}{2}m_a^2 a^2 + \\ & + \frac{1}{2}G a f_{\mu\nu} \tilde{F}_B^{\mu\nu} + \frac{1}{2}G' a F_B^{\mu\nu} \tilde{F}'_{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu \mathcal{A}^\mu)(\partial^\mu \mathcal{A}_\mu). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Assim como no caso da eletrodinâmica Axiônica, é conveniente escrever a Lagrangiana $\mathcal{L}_{m_{\gamma'}}$ na forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{m_{\gamma'}} = & \frac{1}{2} \left[\mathcal{A}^\mu (\eta_{\mu\nu} \square + \chi \partial_\mu \partial_\nu) \mathcal{A}^\nu + A'^\mu (\eta_{\mu\nu} (\square + m_{\gamma'}^2) - \partial_\mu \partial_\nu) A'^\nu + \mathcal{A}^\mu (G \tilde{F}_{B\mu\beta} \partial^\beta) a + \right. \\ & \left. + a (G \tilde{F}_{B\alpha\nu} \partial^\alpha) \mathcal{A}^\nu + a (-\square - m_a^2) a + A'^\mu (G' \tilde{F}_{B\mu\beta} \partial^\beta) a + a (G' \tilde{F}_{B\alpha\nu} \partial^\alpha) A'^\nu \right]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

No espaço dos momentos, a ação poderá então ser escrita na forma

$$\begin{aligned} S_{m_{\gamma'}} = & \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\tilde{\mathcal{A}}^\mu (-\eta_{\mu\nu} k^2 - \chi k_\mu k_\nu) \tilde{\mathcal{A}}^\nu + \tilde{A}'^\mu (-\eta_{\mu\nu} (k^2 - m_{\gamma'}^2) + k_\mu k_\nu) \tilde{A}'^\nu + \right. \\ & + \tilde{\mathcal{A}}^\mu (-iG \tilde{F}_{B\mu\beta} k^\beta) \tilde{a} + \tilde{a} (-iG \tilde{F}_{B\alpha\nu} k^\alpha) \tilde{\mathcal{A}}^\nu + \tilde{a} (k^2 - m_a^2) \tilde{a} + \\ & \left. + \tilde{A}'^\mu (-iG' \tilde{F}_{B\mu\beta} k^\beta) \tilde{a} + \tilde{a} (-iG' \tilde{F}_{B\alpha\nu} k^\alpha) \tilde{A}'^\nu \right]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Podemos ainda adotar uma notação mais econômica e escrever

$$S_{m_{\gamma'}} = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{A}}^\nu(k) & \tilde{A}'^\nu(k) & \tilde{a}(k) \end{pmatrix} M_{m_{\gamma'}} \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{A}}^\nu(-k) \\ \tilde{A}'^\nu(-k) \\ \tilde{a}(-k) \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

onde

$$M_{m_{\gamma'}} = \begin{pmatrix} -\eta_{\mu\nu} k^2 - \chi k_\mu k_\nu & 0 & -iG L_\mu \\ 0 & -\eta_{\mu\nu} (k^2 - m_{\gamma'}^2) + k_\mu k_\nu & -iG' L_\mu \\ iG L_\nu & iG' L_\nu & k^2 - m_a^2 \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

em que L_μ é a estrutura definida na equação (4.4).

Uma forma de inverter a matriz (4.16) é apresentada no Apêndice E e o resultado dessa inversa nos leva aos propagadores,

$$iM_{m_{\gamma'}}^{-1} = \begin{pmatrix} \langle \tilde{\mathcal{A}}^\mu \tilde{\mathcal{A}}^\nu \rangle_{m_{\gamma'}} & \langle \tilde{\mathcal{A}}^\mu \tilde{\mathcal{A}}^{\prime\nu} \rangle_{m_{\gamma'}} & \langle \tilde{\mathcal{A}}^\mu \tilde{a} \rangle_{m_{\gamma'}} \\ \langle \tilde{\mathcal{A}}^{\prime\mu} \tilde{\mathcal{A}}^\nu \rangle_{m_{\gamma'}} & \langle \tilde{\mathcal{A}}^{\prime\mu} \tilde{\mathcal{A}}^{\prime\nu} \rangle_{m_{\gamma'}} & \langle \tilde{\mathcal{A}}^{\prime\mu} \tilde{a} \rangle_{m_{\gamma'}} \\ \langle \tilde{a} \tilde{\mathcal{A}}^\mu \rangle_{m_{\gamma'}} & \langle \tilde{a} \tilde{\mathcal{A}}^{\prime\mu} \rangle_{m_{\gamma'}} & \langle \tilde{a} \tilde{a} \rangle_{m_{\gamma'}} \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Explicitamente, temos no setor diagonal para o caso do Fóton Escuro massivo o propagador modificado do Fóton dado na forma

$$\langle \tilde{\mathcal{A}}^\mu \tilde{\mathcal{A}}^\nu \rangle_{m_{\gamma'}} = \frac{-i}{k^2} \left[\left(\eta^{\mu\nu} - (1 - \alpha) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) - G^2 (k^2 - m_{\gamma'}^2) \frac{L^\mu L^\nu}{\Delta_{m_{\gamma'}}} \right], \quad (4.18)$$

além do propagador do Fóton Escuro

$$\langle \tilde{\mathcal{A}}^{\prime\mu} \tilde{\mathcal{A}}^{\prime\nu} \rangle_{m_{\gamma'}} = \frac{-i}{(k^2 - m_{\gamma'}^2)} \left[\left(\eta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{m_{\gamma'}^2} \right) - G'^2 k^2 \frac{L^\mu L^\nu}{\Delta_{m_{\gamma'}}} \right], \quad (4.19)$$

e o propagador do Axion

$$\langle \tilde{a} \tilde{a} \rangle_{m_{\gamma'}} = i \frac{k^2 (k^2 - m_{\gamma'}^2)}{\Delta_{m_{\gamma'}}}. \quad (4.20)$$

O setor fora da diagonal fornece os propagadores mistos Fóton–Fóton Escuro e Fóton Escuro–Fóton

$$\langle \tilde{\mathcal{A}}^\mu \tilde{\mathcal{A}}^{\prime\nu} \rangle_{m_{\gamma'}} = \langle \tilde{\mathcal{A}}^{\prime\nu} \tilde{\mathcal{A}}^\mu \rangle_{m_{\gamma'}} = i \frac{GG'}{\Delta_{m_{\gamma'}}} L^\mu L^\nu, \quad (4.21)$$

os mistos Axion–Fóton e Fóton–Axion

$$\langle \tilde{\mathcal{A}}^\mu \tilde{a} \rangle_{m_{\gamma'}} = -\langle \tilde{a} \tilde{\mathcal{A}}^\mu \rangle_{m_{\gamma'}} = \frac{G(k^2 - m_{\gamma'}^2)}{\Delta_{m_{\gamma'}}} L^\mu, \quad (4.22)$$

e, por fim, os mistos Axion–Fóton Escuro e Fóton Escuro–Axion

$$\langle \tilde{\mathcal{A}}^{\prime\mu} \tilde{a} \rangle_{m_{\gamma'}} = -\langle \tilde{a} \tilde{\mathcal{A}}^{\prime\mu} \rangle_{m_{\gamma'}} = \frac{G'k^2}{\Delta_{m_{\gamma'}}} L^\mu. \quad (4.23)$$

Em todos os resultados temos que $\Delta_{m_{\gamma'}}$ é a estrutura definida pela relação de dispersão da equação (3.43). Isso reforça, como foi no caso da eletrodinâmica Axiônica, o fato de que a relação de dispersão advém do polo dos propagadores.

4.2.2 O Caso sem Massa

No caso sem massa a Lagrangiana num fundo magnético constante é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' = & -\frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\partial_\mu a) (\partial^\mu a) - \frac{1}{2} m_a^2 a^2 + \frac{1}{2} G a f_{\mu\nu} \tilde{F}_B^{\mu\nu} \\ & + \frac{1}{2} G' a F_B^{\mu\nu} \tilde{F}'_{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu \mathcal{A}^\mu) (\partial^\mu \mathcal{A}_\mu) - \frac{1}{2\alpha'} (\partial_\mu A'^\mu) (\partial^\mu A'_\mu). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Como nos casos anteriores, a mesma pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' = \frac{1}{2} & \left[\mathcal{A}^\mu (\eta_{\mu\nu} \square + \chi \partial_\mu \partial_\nu) \mathcal{A}^\nu + A'^\mu (\eta_{\mu\nu} \square + \chi' \partial_\mu \partial_\nu) A'^\nu + \mathcal{A}^\mu (\mathbf{G} \tilde{F}_{B\mu\beta} \partial^\beta) a + \right. \\ & \left. + a (\mathbf{G} \tilde{F}_{B\alpha\nu} \partial^\alpha) \mathcal{A}^\nu + a (-\square - m_a^2) a + A'^\mu (\mathbf{G}' \tilde{F}_{B\mu\beta} \partial^\beta) a + a (\mathbf{G}' \tilde{F}_{B\alpha\nu} \partial^\alpha) A'^\nu \right]. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Com isso podemos escrever a ação nos espaço dos momentos,

$$\begin{aligned} S' = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} & \left[\tilde{\mathcal{A}}^\mu (-\eta_{\mu\nu} k^2 - \chi k_\mu k_\nu) \tilde{\mathcal{A}}^\nu + \tilde{A}'^\mu (-\eta_{\mu\nu} k^2 - \chi' k_\mu k_\nu) \tilde{A}'^\nu + \tilde{\mathcal{A}}^\mu (-i \mathbf{G} \tilde{F}_{B\mu\beta} k^\beta) \tilde{a} + \right. \\ & \left. + \tilde{a} (-i \mathbf{G} \tilde{F}_{B\alpha\nu} k^\alpha) \tilde{\mathcal{A}}^\nu + \tilde{a} (k^2 - m_a^2) \tilde{a} + \tilde{A}'^\mu (-i \mathbf{G}' \tilde{F}_{B\mu\beta} k^\beta) \tilde{a} + \tilde{a} (-i \mathbf{G}' \tilde{F}_{B\alpha\nu} k^\alpha) \tilde{A}'^\nu \right]. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Adotando uma representação matricial para a ação, escrevemos

$$S' = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{A}}^\nu(k) & \tilde{A}'^\nu(k) & \tilde{a}(k) \end{pmatrix} M' \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{A}}^\nu(-k) \\ \tilde{A}'^\nu(-k) \\ \tilde{a}(-k) \end{pmatrix}, \quad (4.27)$$

onde

$$M' = \begin{pmatrix} -\eta_{\mu\nu} k^2 - \chi k_\mu k_\nu & 0 & -i \mathbf{G} L_\mu \\ 0 & -\eta_{\mu\nu} k^2 - \chi' k_\mu k_\nu & -i \mathbf{G}' L_\mu \\ i \mathbf{G} L_\nu & i \mathbf{G}' L_\nu & k^2 - m_a^2 \end{pmatrix}. \quad (4.28)$$

Como no caso do Fóton Escuro massivo, uma proposta de inversão para a matriz (4.28) é dada no Apêndice E e sua inversa nos leva aos propagadores

$$i M^{-1} = \begin{pmatrix} \langle \tilde{\mathcal{A}}^\mu \tilde{\mathcal{A}}^\nu \rangle & \langle \tilde{\mathcal{A}}^\mu \tilde{A}'^\nu \rangle & \langle \tilde{\mathcal{A}}^\mu \tilde{a} \rangle \\ \langle \tilde{A}'^\mu \tilde{\mathcal{A}}^\nu \rangle & \langle \tilde{A}'^\mu \tilde{A}'^\nu \rangle & \langle \tilde{A}'^\mu \tilde{a} \rangle \\ \langle \tilde{a} \tilde{\mathcal{A}}^\mu \rangle & \langle \tilde{a} \tilde{A}'^\mu \rangle & \langle \tilde{a} \tilde{a} \rangle \end{pmatrix}. \quad (4.29)$$

O setor diagonal da matriz (4.29) é composto pelo propagador modificado do Fóton

$$\langle \tilde{\mathcal{A}}^\mu \tilde{\mathcal{A}}^\nu \rangle = \frac{-i}{k^2} \left[\left(\eta^{\mu\nu} - (1 - \alpha) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) - \mathbf{G}^2 k^2 \frac{L^\mu L^\nu}{\Delta'} \right], \quad (4.30)$$

pelo propagador do Fóton Escuro sem massa

$$\langle \tilde{A}'^\mu \tilde{A}'^\nu \rangle = \frac{-i}{k^2} \left[\left(\eta^{\mu\nu} - (1 - \alpha') \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) - \mathbf{G}'^2 k^2 \frac{L^\mu L^\nu}{\Delta'} \right], \quad (4.31)$$

e pelo propagador do Axion

$$\langle \tilde{a} \tilde{a} \rangle = i \frac{k^4}{\Delta'}. \quad (4.32)$$

No setor fora da diagonal, temos as contribuições mistas para os propagadores Fóton–Fóton Escuro e Fóton Escuro–Fóton

$$\langle \tilde{\mathcal{A}}^\mu \tilde{A}'^\nu \rangle = \langle \tilde{A}'^\mu \tilde{\mathcal{A}}^\nu \rangle = i \frac{\mathbf{G} \mathbf{G}'}{\Delta'} L^\mu L^\nu, \quad (4.33)$$

as contribuições Fóton Escuro–Axion e Axion–Fóton Escuro

$$\langle \tilde{A}'^\mu \tilde{a} \rangle = -\langle \tilde{a} \tilde{A}'^\mu \rangle = \frac{G'k^2}{\Delta'} L^\mu, \quad (4.34)$$

além das contribuições Fóton–Axion e Axion–Fóton

$$\langle \tilde{A}^\mu \tilde{a} \rangle = -\langle \tilde{a} \tilde{A}^\mu \rangle = \frac{Gk^2}{\Delta'} L^\mu. \quad (4.35)$$

Como antes, vale ressaltar que Δ' dado pela relação de dispersão da equação (3.44) é polo dos propagadores para o caso do Fóton Escuro sem massa.

4.3 Efeito Primakoff

Como já mencionado, o efeito Primakoff trata da possibilidade de oscilação entre partículas. De um ponto de vista mais fundamental, partindo dos propagadores, essa possibilidade advém dos propagadores mistos. Para ambas as eletrodinâmicas, Axiônica e na presença de Axions e Fótons Escuros, fomos capazes de obter tais propagadores, como vimos nas seções anteriores.

No caso da ED Axiônica, o propagador misto tem a forma

$$\langle \mathcal{A}^\nu a \rangle = \frac{1}{\sqrt{\mu_0}} \frac{GL^\nu}{\Delta}, \quad (4.36)$$

de onde se lê: existe uma probabilidade associada ao modulo quadrático desse propagador que fala sobre a possibilidade de um Fóton ser criado em certo instante e num certo ponto do espaço e posteriormente ser destruído como um Axion em outro ponto do espaço. Esse processo só é possível na presença do campo magnético de fundo e é representado pelo diagrama da Figura 8.

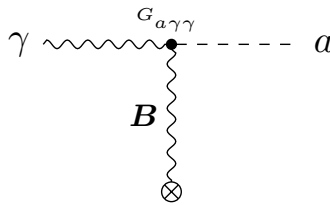


Figura 8 – Diagrama de Feynman associado com o efeito Primakoff (conversão Axion–Fóton). As linhas tracejadas estão associadas com o propagador do Axion enquanto as linhas onduladas representam o Fóton e uma fonte de campo magnético \mathbf{B} externo.

O mesmo processo é permitido para a ED na presença de Axions e Fótons Escuros, tanto no caso massivo quanto no caso sem massa. Para além deste, surgem dois novos processos. O primeiro deles é dado pelos propagadores

$$\langle \tilde{a} \tilde{A}'^\mu \rangle_{m_{\gamma'}} = -\frac{G'k^2}{\Delta_{m_{\gamma'}}} L^\mu, \quad (4.37)$$

$$\langle \tilde{a} \tilde{A}^\mu \rangle = -\frac{G'k^2}{\Delta'} L^\mu, \quad (4.38)$$

e é representado pelo diagrama da Figura 9. Esse processo é de grande importância pois possibilitará uma transição direta entre Fótons e Fótons Escuros.

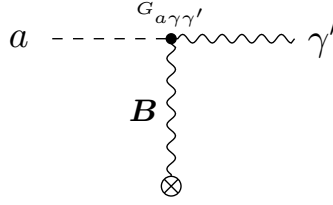


Figura 9 – Diagrama de Feynman associado com o efeito Primakoff (conversão Axion-Fóton Escuro). As linhas tracejadas estão associadas com o propagador do Axion enquanto as linhas onduladas representam o Fóton Escuro e uma fonte de campo magnético \mathbf{B} externo.

Unindo os dois processos anteriores, podemos construir o diagrama dado na Figura 10. Esse diagrama, descreve o processo possibilitado pelos propagadores

$$\langle \tilde{\mathcal{A}}^\mu \tilde{\mathcal{A}}'^\nu \rangle_{m_{\gamma'}} = i \frac{GG'}{\Delta_{m_{\gamma'}}} L^\mu L^\nu, \quad (4.39)$$

$$\langle \tilde{\mathcal{A}}^\mu \tilde{\mathcal{A}}'^\nu \rangle = i \frac{GG'}{\Delta'} L^\mu L^\nu. \quad (4.40)$$

Esse processo é particularmente interessante pois não há mistura a priori entre Fótons e Fótons Escuros, e é o Axion quem medeia essa transição.

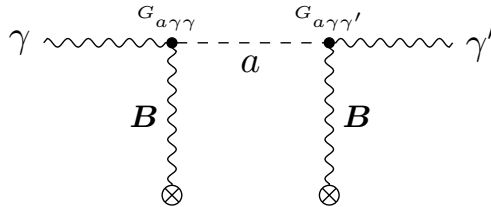


Figura 10 – Diagrama de Feynman associado com o efeito Primakoff (conversão Fóton-Axion-Fóton Escuro). As linhas tracejadas estão associadas com o propagador do Axion enquanto as linhas onduladas representam o Fóton, Fóton Escuro e uma fonte de campo magnético \mathbf{B} externo.

É interessante notar, que o propagador do Fóton é modificado em ambas as eletrodinâmicas, subtraindo a informação do propagador misto com o Axion. Nesse caso, a probabilidade de um Fóton ser criado, propagado e destruído como Fóton, não será de cem por cento. Ou seja, olhar para o propagador do Fóton é outra forma de obter informação sobre o efeito Primakoff.

A seguir, vamos apresentar uma proposta de como obter expressões para essas probabilidades de transição usando os propagadores mistos, numa tentativa de reobter a expressão presente na literatura para primeira ordem em $G^2 \mathbf{B}^2$ [34, 71]. Uma vez que obtivermos a expressão em primeira ordem, poderemos generalizar o procedimento para todas as ordens no produto $G^2 \mathbf{B}^2$, que seria um resultado inédito. Como caso ilustrativo, vamos considerar o termo

de propagador misto do tipo Axion-Fóton dado por

$$\langle a(k)A_\mu(-k) \rangle = i\mathcal{M}_\mu(k) = iG \frac{L_\mu}{\Delta}, \quad (4.41)$$

em que

$$L_\mu \equiv \tilde{F}_{B\mu\nu}k^\nu = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{k}, -\mathbf{B}_i\omega) \quad (4.42)$$

e a relação de dispersão Δ fatorizada como

$$\Delta = [\omega^2 - (X + Y)][\omega^2 - (X - Y)], \quad (4.43)$$

com $(X + Y)$ e $(X - Y)$ em primeira ordem de $G^2\mathbf{B}^2$ dados por (em que θ é o ângulo entre \mathbf{k} e \mathbf{B})

$$(X + Y) \approx \mathbf{k}^2 + m_a^2 + \frac{G^2\mathbf{B}^2}{2} \left(2 + \frac{\mathbf{k}^2}{m_a^2} \sin^2 \theta \right), \quad (4.44)$$

$$(X - Y) \approx \mathbf{k}^2 + \frac{G^2\mathbf{B}^2}{2} \frac{\mathbf{k}^2}{m_a^2} \sin^2 \theta. \quad (4.45)$$

Assim, em primeira ordem de $G^2\mathbf{B}^2$, temos que

$$\frac{1}{\Delta} \approx \frac{1}{(\omega^2 - \mathbf{k}^2)} \frac{1}{(\omega^2 - \mathbf{k}^2 - m_a^2)}. \quad (4.46)$$

Levando isso em consideração e tomando $\mu = 0$ no propagador misto obteremos

$$\langle a(k)A_i(-k) \rangle = i\mathcal{M}_i(k) = -i \frac{G\mathbf{B}_i\omega}{(\omega^2 - \mathbf{k}^2)(\omega^2 - \mathbf{k}^2 - m_a^2)}. \quad (4.47)$$

Supondo que na transição Axion-Fóton o momento aproximadamente não varia, estaremos interessados numa amplitude puramente temporal. Para obter essa amplitude, contraímos o propagador (4.47) com o vetor de polarização associado ao campo do Fóton e tomamos uma transformada de Fourier inversa dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(t) &= \epsilon_i \mathcal{M}_i(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \mathcal{M}_i(k) e^{-i\omega t} \\ &= -G\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{B} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\omega e^{-i\omega t}}{(\omega^2 - \mathbf{k}^2)(\omega^2 - \mathbf{k}^2 - m_a^2)}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Essa integral tem polos em

$$\omega = \pm\omega_\gamma = \pm|\mathbf{k}|, \quad (4.49)$$

$$\omega = \pm\omega_a = \pm\sqrt{\mathbf{k}^2 + m_a^2}. \quad (4.50)$$

Portanto, temos que calcular a integral

$$I(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\omega e^{-i\omega t}}{(\omega - \omega_\gamma)(\omega + \omega_\gamma)(\omega - \omega_a)(\omega + \omega_a)}. \quad (4.51)$$

Em frações parciais, temos

$$\frac{\omega}{(\omega^2 - \omega_\gamma^2)(\omega^2 - \omega_a^2)} = \frac{1}{2(\omega_\gamma^2 - \omega_a^2)} \left[\frac{1}{\omega - \omega_\gamma} + \frac{1}{\omega + \omega_\gamma} - \frac{1}{\omega - \omega_a} - \frac{1}{\omega + \omega_a} \right], \quad (4.52)$$

de maneira que precisaremos calcular integrais com polos simples dadas por

$$I_1(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega - \omega_\gamma} = \begin{cases} ie^{-\omega_\gamma t} & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}, \quad (4.53)$$

$$I_2(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega + \omega_\gamma} = \begin{cases} 0 & \text{se } t > 0 \\ ie^{\omega_\gamma t} & \text{se } t < 0 \end{cases}, \quad (4.54)$$

$$I_3(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega - \omega_a} = \begin{cases} ie^{-\omega_a t} & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}, \quad (4.55)$$

$$I_4(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega + \omega_a} = \begin{cases} 0 & \text{se } t > 0 \\ ie^{\omega_a t} & \text{se } t < 0 \end{cases}. \quad (4.56)$$

Portanto,

$$I(t) = \frac{i}{2(\omega_\gamma^2 - \omega_a^2)} \times \begin{cases} e^{-i\omega_\gamma t} - e^{-i\omega_a t} & \text{se } t > 0 \\ e^{i\omega_\gamma t} - e^{i\omega_a t} & \text{se } t < 0 \end{cases}. \quad (4.57)$$

Em geral, podemos escrever

$$e^{\pm i\omega_\gamma t} - e^{\pm i\omega_a t} = \pm 2i \sin\left(\frac{(\omega_\gamma - \omega_a)t}{2}\right) e^{\pm i(\omega_\gamma + \omega_a)t/2}. \quad (4.58)$$

Assim, podemos escrever

$$I(t) = \frac{\mp 2}{2(\omega_\gamma^2 - \omega_a^2)} \times \begin{cases} \sin\left(\frac{(\omega_\gamma - \omega_a)t}{2}\right) e^{+i(\omega_\gamma + \omega_a)t/2} & \text{se } t > 0 \\ \sin\left(\frac{(\omega_\gamma - \omega_a)t}{2}\right) e^{-i(\omega_\gamma + \omega_a)t/2} & \text{se } t < 0 \end{cases}. \quad (4.59)$$

Então, de forma geral para todo t obtemos

$$I(t) = \frac{1}{(\omega_a^2 - \omega_\gamma^2)} \sin\left(\frac{(\omega_\gamma - \omega_a)t}{2}\right) e^{i(\omega_\gamma + \omega_a)t/2}. \quad (4.60)$$

Com esse resultado a amplitude toma a forma

$$\mathcal{M}(t) = -\frac{G\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{B}}{(\omega_a^2 - \omega_\gamma^2)} \sin\left(\frac{(\omega_\gamma - \omega_a)t}{2}\right) e^{i(\omega_\gamma + \omega_a)t/2}. \quad (4.61)$$

Desse resultado, podemos escrever a probabilidade de transição Axion-Fóton sob a forma

$$P_{a \rightarrow \gamma} = |\mathcal{M}^*(t)\mathcal{M}(t)| = \frac{G^2(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{B})^2}{(\omega_a^2 - \omega_\gamma^2)^2} \sin^2\left(\frac{(\omega_\gamma - \omega_a)t}{2}\right). \quad (4.62)$$

Para deixar essa expressão na forma do que é apresentado na literatura, vamos definir a quantidade

$$q \equiv \omega_a - \omega_\gamma = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_a^2} - |\mathbf{k}|. \quad (4.63)$$

Como esperamos que $m_a \ll 1$ eV, podemos escrever

$$\sqrt{\mathbf{k}^2 + m_a^2} \approx |\mathbf{k}| + \frac{m_a^2}{2|\mathbf{k}|}. \quad (4.64)$$

Portanto,

$$q \approx \frac{m_a^2}{2|\mathbf{k}|}. \quad (4.65)$$

Por outro lado, teremos

$$\begin{aligned} \omega_a^2 - \omega_\gamma^2 &= (\omega_a + \omega_\omega)(\omega_a - \omega_\omega) \\ &= q(\omega_a + \omega_\omega) \end{aligned} \quad (4.66)$$

$$= q(q + 2|\mathbf{k}|) \quad (4.67)$$

$$= q \left(q + 2|\mathbf{k}| \frac{m_a^2}{m_a^2} \right) \quad (4.68)$$

$$= q \left(q + \frac{m_a^2}{q} \right) \quad (4.69)$$

$$= (q^2 + m_a^2). \quad (4.70)$$

Dessa forma, em ordem mais baixa de expansão em m_a , vem que

$$\frac{1}{(\omega_a^2 - \omega_\gamma^2)^2} \approx \frac{1}{q^4} \left(1 - \frac{2m_a^2}{q^2} \right). \quad (4.71)$$

Com estes resultados, a expressão da probabilidade assume a forma

$$P_{a \rightarrow \gamma} \approx \frac{G^2(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{B})^2}{q^4} \sin^2 \left(\frac{qt}{2} \right). \quad (4.72)$$

No experimento *Light Shining Through a Wall* (LSW) [71], o feixe percorre uma distância L na presença do campo \mathbf{B} . Acontece que, devido a massa muito pequena do Axion, a distância L está diretamente ligada ao tempo t ,

$$L \approx t, \quad (4.73)$$

uma vez que $c = 1$. Levando isso em consideração, podemos escrever a probabilidade na forma

$$\begin{aligned} P_{a \rightarrow \gamma} &= \frac{1}{q^2} \frac{G^2(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{B})^2}{q^2 \frac{4L^2}{4L^2}} \sin^2 \left(\frac{qL}{2} \right) \\ &= \frac{1}{q^2} \left(\frac{G|\mathbf{B}|L}{2} \right)^2 \left[\frac{2}{qL} \sin \left(\frac{qL}{2} \right) \right]^2. \end{aligned} \quad (4.74)$$

A menos de um fator q^2 , destacado em vermelho, recuperamos o resultado da literatura. Acreditamos que deve haver um fator de normalização a ser levado em conta no nosso cálculo, embora, neste momento, não saibamos identificar como ele seria introduzido. Uma vez que essa dificuldade for superada, estaremos aptos a generalizar o procedimento para todas as ordens no produto $G^2 \mathbf{B}^2$.

Capítulo 5

Considerações Finais

A presente dissertação se apresenta como uma revisão bastante técnica da ED Axiônica e da ED na presença de Axions e Fótons Escuros. Apesar de carecer de aplicações fenomenológicas que nos permitam vincular os novos parâmetros explorados com base nos dados experimentais/observacionais mais recentes, toda a nossa discussão deixa um caminho bem pavimentado para que isso seja feito como decorrência imediata do que apresentamos ao longo do texto. Mas antes de apresentar essas novas perspectivas, é importante mencionar que toda essa tecnicidade cumpre certas lacunas da literatura e é passível de publicação.

No Capítulo 2, revisamos os principais aspectos da ED Axiônica destacando o seu caráter não renormalizável e sua interpretação como uma teoria efetiva que funciona bem até um corte na escala de energia. Além disso, apontamos como o Axion pode agir como gerador de vetores de polarização e magnetização não triviais, fazendo com que o vácuo se comporte como um meio material. Destacamos também a relação entre a ED Axiônica e a ED anisotrópica de CFJ. As equações de Maxwell modificadas se apresentaram como equações diferenciais não-lineares. Propomos uma saída, com argumentos físicos factíveis, para um tratamento matemático mais amigável para essa situação, propondo a expansão em um fundo eletromagnético intenso o suficiente para que os campos propagantes sejam apenas pequenas flutuações nesse meio. Até aqui, o trabalho seguiu o caminho padrão da literatura, mas cumprimos uma lacuna na literatura ao explorar a contribuição não-trivial do termo que mistura Axion e Fóton no tensor energia-momento, por exemplo. Isso abre a possibilidade de estudar, entre outras coisas, o movimento de uma partícula carregada numa região em que a força de Lorentz modificada dada pela equação (2.62) seja operante. Uma das situações factíveis seria estudar o papel do Axion na emissão de radiação ciclotron por elétron sob a influência da equação (2.62).

Ainda no Capítulo 2, seguimos com uma análise detalhada de como esses graus de liberdade (do Fóton e do Axion) se relacionam quando nos restringimos ao fundo magnético constante. Essa configuração de fundo nos permitiu acessar um setor cinético que mistura

Axion e o Fóton, mas não evitou a não homogeneidade da lei de Gauss para o campo elétrico. Isso, a priori, poderia nos levar a concluir a favor de uma massa efetiva para o Fóton. No entanto, contribuímos no sentido de contar os graus de liberdade propagantes, explorar a relação de dispersão modificada (equação (2.85)) e as configurações geométricas para as ondas eletromagnéticas neste cenário, de tal maneira que pudemos mostrar que o Fóton fica protegido de um grau de liberdade longitudinal propagante (com era de se esperar já que não perdemos a simetria de calibre), com o grau de liberdade do Axion, junto do campo magnético de fundo, trazendo uma parte longitudinal que não se propaga para o campo elétrico, como vimos na equação (2.121). Por fim, seguimos explorando a relação de dispersão modificada e mostramos que a causalidade clássica da teoria é mantida mesmo em situações extremas como as de um campo magnético de fundo da ordem de $|\mathbf{B}| \sim 10^{16}$ T, como fica evidente dos gráficos de velocidade de grupo da Figura 4. A Figura 4 também nos leva a concluir a favor de um efeito de birrefringência do vácuo nessa situação extrema de campo magnético.

É importante ressaltar que no âmbito da relação de dispersão modificada (2.85) há uma óptica rica a ser explorada. Para isso, devemos realizar um estudo das configurações de modos de polarização compatíveis com as equações de Maxwell modificadas (2.63), (2.64), (2.65) e (2.66). Confluindo a favor de ondas circularmente ou elipticamente polarizadas, podemos estudar melhor os fenômenos da birrefringência e o índice de refração. No caso do índice de refração podemos calcular o *rotatory power*, que advém da diferença das partes reais dos índices de refração associados com ondas circularmente polarizadas à direita e à esquerda e mede a rotação do plano de oscilação do campo elétrico da luz linearmente polarizada por unidade de comprimento percorrido no meio [84], aumentando a nossa compreensão da dispersão óptica nesse meio.

O Capítulo 3 se apresenta como uma proposta de fazer análises similares às do Capítulo 2, mas agora em um cenário diagonalizado proveniente de uma mistura do setor cinético dos Fótons com os Fótons Escuros, e admitindo que esses campos se acoplem ao Axion. Uma proposta amplamente discutida na literatura já que torna viável acessar efeitos da física do setor escuro do universo através da física do Fóton usando o Axion com um portal [52–56]. Como antes, ao diagonalizar esse modelo em campo magnético constante de fundo, fomos além dos esforços presentes na literatura e capazes de escrever as relações de dispersão modificadas para o caso de Fóton Escuro massivo e não massivo, dadas pelas equações (3.43) e (3.44), respectivamente. Mais uma vez, acessamos também uma contribuição nova para o tensor energia-momento que pode nos permitir escrever a força de Lorentz modificada. Aqui podemos novamente estudar o movimento de partícula carregada, agora de maneira a obter os efeitos dos Fótons Escuros (massivos e não massivos) na radiação ciclotron.

A análise das relações de dispersão modificadas do Capítulo 3 se mostrou interessante no caso do Fóton Escuro sem massa e bastante complicada no caso massivo, devido à forma extensa das expressões para este caso. Na seção 3.2.1, por exemplo, ao resolver a equação (3.44) para $\omega(\mathbf{k})$, obtivemos três soluções de energia positiva, sendo que uma é usual, $\omega = |\mathbf{k}|$, e as

outras duas, que trazem respostas mais elaboradas, carregam informações do fundo magnético constante e dos acoplamentos $G_{a\gamma\gamma}$ e $G_{a\gamma\gamma'}$, equação (3.51). Com isso, obtivemos expressões para o índice de refração, para a velocidade de fase e mostramos que a velocidade de frente vai a 1 no limite em que $|\mathbf{k}|$ vai a infinito, como um primeiro teste positivo para a causalidade clássica do modelo. Em seguida, plotamos o módulo da velocidade de grupo em função de $|\mathbf{k}|$ e mostramos que mesmo em situações extremas de campo magnético de fundo a causalidade clássica é mantida. Gostaríamos de ressaltar que essas expressões para relações de dispersão para o caso sem massa ainda carecem de análises adicionais. Por exemplo, podemos buscar pelo *rotatory power* e sujeitar também os índices de refração aos dados para birrefringência magnética do vácuo do experimento PVLAS-FE, em que se mede a diferença entre os índices de refração para as configurações de campo elétrico propagante perpendicular e paralelo ao fundo magnético obtendo um resultado da ordem de $\frac{\Delta n^{\text{PVLAS-FE}}}{|\mathbf{B}|^2} = (+19 \pm 27) \times 10^{-24} \text{ T}^{-2}$, com $|\mathbf{B}| = 2,5 \text{ T}$ [85]. Esse resultado é usado para impor limites no acoplamento $G_{a\gamma\gamma}$ [6, 85] e podemos estender as análises para impor limites para $G_{a\gamma\gamma'}$. As mesmas considerações podem ser feitas para o caso do Fóton Escuro massivo. Contudo, neste caso, uma análise mais completa da causalidade clássica via velocidade de grupo fica em perspectiva, visto que as expressões são demasiadamente complicadas e uma análise cuidadosa se faz necessária. Adicionalmente, buscaremos fazer um estudo detalhado sobre o dicroísmo, visto que a equação (3.64) admite a possibilidade de relações de dispersão com termos complexos.

No Capítulo 4 além dos propagadores livres modificados do tipo Fóton–Fóton, Axion–Axion e Fóton Escuro–Fóton Escuro, obtivemos também os propagadores mistos do tipo Fóton–Axion, Axion–Fóton Escuro e Fóton–Fóton Escuro. Estes propagadores mistos são muito interessantes, pois os mesmos guardam informações preciosas do chamado efeito Primakoff que diz respeito à probabilidade de conversão de uma partícula em outra na presença de campo magnético de fundo. Em geral, na literatura se faz uma construção baseada em argumentos fenomenológicos para a expressão dessa probabilidade [33, 34]. Nós, por outro lado, argumentamos a favor de uma obtenção dessa mesma expressão a partir de primeiros princípios (o módulo quadrático dos propagadores mistos) e de forma mais compreensível. No entanto, esbarramos em problemas técnicos relacionados a como normalizar apropriadamente a nossa expressão para amplitude de probabilidade, o que deverá ser superado como um trabalho futuro.

Por fim, gostaríamos de comentar que, inspirados no que foi feito na referência [87], ao estudar a unitariedade para o propagador do fóton livre modificado por um termo de derivadas superiores de dimensão cinco e ímpar sob CPT, pretendemos buscar entender sob quais circunstâncias os propagadores por nós obtidos no Capítulo 4 são unitários. Essa análise é realizada por meio do chamado propagador saturado SP , definido como $SP \equiv J^\mu D_{\mu\nu} J^\nu$, onde J_μ é uma corrente real e conservada e $D_{\mu\nu}$ é a expressão do propagador. A unitariedade é então garantida se a parte imaginária do resíduo de SP , avaliada nos polos do propagador $D_{\mu\nu}$, for positiva.

Apêndice A

Levantamento de Extensões Eletrodinâmicas

Eletrodinâmica de Maxwell + 59 extensões

agrupadas por afinidade em 4 categorias

Categoria 1: extensões imediatas, sem nova física.

Maxwell + 14 extensões

1. ED de Maxwell;
2. ED com a introdução de monopólos magnéticos de Dirac (monopólos magnéticos em gelos de spin e em BECs);
3. ED com a introdução de monopólos magnéticos de Nambu;
4. ED de Maxwell/de Broglie-Proca (MdBp) (fóton massivo);
5. ED de portadores de carga escalares (ED escalar) (Majorana -Weisskopf - Pauli - Salam);
6. ED de portadores de carga vetoriais (Salam-Lee-Yang) (o problema da massa e o papel da unificação eletrofraca);
7. ED de portadores de carga com spin-2 (importância dos acoplamentos não-mínimos);
8. ED de Podolsky / Lee-Wick;
9. ED de Maxwell/Higgs (splitting fóton/ Z^0 , cordas cósmicas, vórtices magnéticos; modelo de Ginzburg-Landau);
10. ED de Kalb-Ramond (fóton escalar cordas energia escura);
11. ED de Maxwell / Kalb-Ramond (fóton massivo energia escura);
12. Pseudo-ED (versão clássica da Pseudo-QED);

13. ED de Weber;
14. ED Galileana;
15. Magneto-hidrodinâmica (Plasmas).

Categoria 2: extensões induzidas por nova Física além do Modelo-Padrão (bSM Φ).

14 extensões

1. Dirac's New Aether Electrodynamics (Nature, 1951);
2. ED com violação da simetria de Lorentz segundo o SME (Standard Model Extension, SME) proposto por Kostelecký e Colladay. (Origem em cordas fundamentais; birrefringência do vácuo);
3. ED da matéria quiral ED com violação da simetria de Lorentz (Semi-metais de Weyl e plasmas de quarks-glúons);
4. ED Axiônica (Isolantes e supercondutores topológicos);
5. ED estendida em presença de áxion e dark photon;
6. Bumblebee ED;
7. ED supersimétrica (fotino: LSP possível fonte de matéria escura);
8. ED com anisotropias induzidas pela SUSY em cenários com violação da simetria de Lorentz;
9. ED com correções de cordas fundamentais (Meyers-Pospelov);
10. ED com correções de loop quantum gravity (Gambini-Pullin);
11. ED com efeitos quântico-gravitacionais de recuo (Ellis – Mavromatos – Nanopoulos);
12. ED com anisotropia de escala (Hořava-Lifshitz);
13. ED kappa-deformada (k-Minkowski space ED) ;
14. ED com setor escondido (paraphotons, e portadores com milicarga elétrica).

Categoria 3: extensões não-lineares.

21 extensões

1. ED não-linear com termo de Euler-Heisenberg (efeitos de polarização do vácuo);
2. ED não-linear de Born-Infeld (redescoberta em cenário de supercordas);

3. ED Logarítmica;
4. ED ModMax;
5. ED MadMax;
6. ED Inversa;
7. ED com dualidade-T;
8. ED Duplamente Logarítmica (Double-Logarithmic ED);
9. ED Exponencial;
10. ED arcsin;
11. ED arctan;
12. ED de Hoffmann-Infeld;
13. ED conformalmente invariante;
14. ED não-linear de Bardeen com monopólos magnéticos;
15. ED não-linear de Bronnikov;
16. ED não-linear em materiais (topológicos) de Dirac;
17. ED não-linear gerada como modelo efetivo a partir de grávitons massivos;
18. ED não-linear com aceleração de Rindler (ED de HGM = Halilsoy, Gurtug, Mazharimou-savi) – alternativa à matéria escura;
19. ED não-linear não-comutativa (Gitman - Shabad/2011);
20. ED não-linear em cenário de teoria de gauge da totalidade;
21. ED estocástica.

Experimentos que testam e que poderão testar a não-linearidade através da investigação de propriedades do vácuo quântico:

PVLAS (Polarizzazione del Vuoto da LASERS)

LSW (Light Shining through Walls)

BMV (Biréfringence Magnétique du Vide/Toulouse)

VH (Colisor de Fótons = Vacuum Hohlräum)

XFELS (X-ray Free Electron LASERS)

ELI (Extreme Light Infrastructure)

SULF (Shanghai Ultra-Laser Facilities)

SEL (Station of Extreme Light, Shanghai, 2023)

XCELS (ExaWatt Centre for Extreme Light Studies, Rússia, 2026).

Categoria 4: extensões por dimensionalidade.

10 extensões

1. ED tensorial emergente em líquidos-U(1) de spin;
2. ED (planar) de Maxwell–Chern–Simons (EHQ, Spintrônica, High-Tc);
3. ED planar T-simétrica de Chern-Simons (Fractional Topological Insulators ou Chern Insulators);
4. ED planar quirial para o grafeno (Jackiw – Pi);
5. ED planar com separação spin-carga/simetria local, $SU(2)\times U(1)$: (Frölich-Marchetti);
6. ED Axiônica planar;
7. ED à la Kaluza–Klein (5D, Chern-Simons, supercondutores topológicos);
8. ED em dimensões fractais;
9. ED com dinâmica fracional;
10. ED em meios contínuos com métrica fractal (Balankin).

Apêndice B

Algumas Identidades, Convenções e Resultados

Aqui estão elencados algumas notações e prescrições utilizadas ao longo do texto além de alguns resultados complementares para a discussão do eletromagnetismo. Ao longo desse Apêndice, estamos utilizando unidades naturais e a assinatura da métrica como $\eta_{\mu\nu} = (+, -, -, -)$.

Para começar, utilizamos a seguinte prescrição para transitar entre o espaço das configurações e dos momentos

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{f}(k) e^{-ik \cdot x}, \\ \tilde{f}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} d^4x f(x) e^{+ik \cdot x}, \end{aligned}$$

onde

$$k \cdot x = k^\mu x_\mu = k_\mu x^\mu = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}.$$

Também utilizamos a representação de Fourier da delta de Dirac em 4 dimensões, dada por

$$\delta^{(4)}(k - k') = \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} e^{\pm i(k-k') \cdot x}.$$

O conteúdo explícito do *field strength* eletromagnético, na forma matricial, é dado por

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

Subindo os índices, obtemos a matriz

$$F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha} F_{\alpha\beta} \eta^{\beta\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

A partir de $F_{\mu\nu}$ definimos também o tensor eletromagnético dual $\tilde{F}^{\mu\nu}$, na forma

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}. \quad (\text{B.3})$$

Na representação matricial, temos

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.4})$$

Nas seção a seguir, apresentamos algumas identidades úteis envolvendo esses tensores, que serão utilizadas ao longo do desenvolvimento de alguns cálculos pertinentes a esta dissertação.

B.1 Identidades Envolvendo o Tensor de Levi-Civita

A definição do produto de dois tensores de Levi-Civita não contraídos, em quatro dimensões, é dada por

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\kappa\lambda\rho\sigma} = -\det \begin{pmatrix} \delta^\mu_\kappa & \delta^\mu_\lambda & \delta^\mu_\rho & \delta^\mu_\sigma \\ \delta^\nu_\kappa & \delta^\nu_\lambda & \delta^\nu_\rho & \delta^\nu_\sigma \\ \delta^\alpha_\kappa & \delta^\alpha_\lambda & \delta^\alpha_\rho & \delta^\alpha_\sigma \\ \delta^\beta_\kappa & \delta^\beta_\lambda & \delta^\beta_\rho & \delta^\beta_\sigma \end{pmatrix}. \quad (\text{B.5})$$

A partir dessa definição, podemos extrair todos os resultados para índices não contraídos

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\kappa\lambda\rho\sigma} &= \delta^\alpha_\sigma\delta^\nu_\kappa\left(\delta^\beta_\lambda\delta^\mu_\rho - \delta^\beta_\rho\delta^\mu_\lambda\right) + \delta^\alpha_\sigma\delta^\nu_\lambda\left(\delta^\beta_\rho\delta^\mu_\kappa - \delta^\beta_\kappa\delta^\mu_\rho\right) + \\ &+ \delta^\alpha_\sigma\delta^\nu_\rho\left(\delta^\beta_\kappa\delta^\mu_\lambda - \delta^\beta_\lambda\delta^\mu_\kappa\right) + \delta^\alpha_\rho\delta^\nu_\kappa\left(\delta^\beta_\sigma\delta^\mu_\lambda - \delta^\beta_\lambda\delta^\mu_\sigma\right) + \\ &+ \delta^\alpha_\rho\delta^\nu_\lambda\left(\delta^\beta_\kappa\delta^\mu_\sigma - \delta^\beta_\sigma\delta^\mu_\kappa\right) + \delta^\alpha_\rho\delta^\nu_\sigma\left(\delta^\beta_\lambda\delta^\mu_\kappa - \delta^\beta_\kappa\delta^\mu_\lambda\right) + \\ &+ \delta^\alpha_\lambda\delta^\nu_\kappa\left(\delta^\beta_\rho\delta^\mu_\sigma - \delta^\beta_\sigma\delta^\mu_\rho\right) + \delta^\alpha_\lambda\delta^\nu_\rho\left(\delta^\beta_\sigma\delta^\mu_\kappa - \delta^\beta_\kappa\delta^\mu_\sigma\right) + \\ &+ \delta^\alpha_\lambda\delta^\nu_\sigma\left(\delta^\beta_\kappa\delta^\mu_\rho - \delta^\beta_\rho\delta^\mu_\kappa\right) + \delta^\alpha_\kappa\delta^\nu_\lambda\left(\delta^\beta_\sigma\delta^\mu_\rho - \delta^\beta_\rho\delta^\mu_\sigma\right) + \\ &+ \delta^\alpha_\kappa\delta^\nu_\rho\left(\delta^\beta_\lambda\delta^\mu_\sigma - \delta^\beta_\sigma\delta^\mu_\lambda\right) + \delta^\alpha_\kappa\delta^\nu_\sigma\left(\delta^\beta_\rho\delta^\mu_\lambda - \delta^\beta_\lambda\delta^\mu_\rho\right), \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

para um índice contraído, fazendo $\sigma = \beta$,

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\kappa\lambda\rho\beta} = -1!\left[\delta^\mu_\kappa\left(\delta^\nu_\lambda\delta^\alpha_\rho - \delta^\nu_\rho\delta^\alpha_\lambda\right) + \delta^\mu_\lambda\left(\delta^\nu_\rho\delta^\alpha_\kappa - \delta^\nu_\kappa\delta^\alpha_\rho\right) + \delta^\mu_\rho\left(\delta^\nu_\kappa\delta^\alpha_\lambda - \delta^\nu_\lambda\delta^\alpha_\kappa\right)\right], \quad (\text{B.7})$$

para dois índices contraídos, fazendo $\sigma = \beta$ e, $\rho = \alpha$,

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\kappa\lambda\alpha\beta} = -2!\left(\delta^\mu_\kappa\delta^\nu_\lambda - \delta^\mu_\lambda\delta^\nu_\kappa\right), \quad (\text{B.8})$$

para três índices contraídos, fazendo $\sigma = \beta$, $\rho = \alpha$ e $\lambda = \nu$,

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\kappa\nu\alpha\beta} = -3!\delta^\mu{}_\kappa, \quad (\text{B.9})$$

e, finalmente, contraindo todos os índices,

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = -4!. \quad (\text{B.10})$$

Para demonstrar algumas identidade que seguem, será útil calcular o dual do dual,

$$\tilde{\tilde{F}}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\tilde{F}_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta\kappa\lambda}F^{\kappa\lambda},$$

como já sabemos o resultado (B.8), obtemos,

$$\tilde{\tilde{F}}^{\mu\nu} = -F^{\mu\nu}. \quad (\text{B.11})$$

ou ainda,

$$F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\tilde{F}_{\alpha\beta}. \quad (\text{B.12})$$

Usando o resultado para o dual do dual (B.12), podemos demonstrar a identidade

$$\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\nu\kappa} = -\frac{1}{4}\delta^\mu{}_\kappa\tilde{F}^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}.$$

Partindo de

$$\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\nu\kappa} = -\frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\nu\kappa\lambda\rho}F_{\alpha\beta}\tilde{F}^{\lambda\rho},$$

e utilizando o resultado (B.7), obtemos

$$\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\nu\kappa} = -\frac{1}{4}\left[\delta^\mu{}_\kappa(\delta^\alpha{}_\lambda\delta^\beta{}_\rho - \delta^\alpha{}_\rho\delta^\beta{}_\lambda) + \delta^\mu{}_\lambda(\delta^\alpha{}_\rho\delta^\beta{}_\kappa - \delta^\alpha{}_\kappa\delta^\beta{}_\rho) + \delta^\mu{}_\rho(\delta^\alpha{}_\kappa\delta^\beta{}_\lambda - \delta^\alpha{}_\lambda\delta^\beta{}_\kappa)\right]F_{\alpha\beta}\tilde{F}^{\lambda\rho},$$

ou ainda,

$$\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\nu\kappa} = -\frac{1}{2}\delta^\mu{}_\kappa\tilde{F}^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} - \tilde{F}^{\mu\rho}F_{\rho\kappa},$$

o que nos leva a

$$2\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\nu\kappa} = -\frac{1}{2}\delta^\mu{}_\kappa\tilde{F}^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta},$$

de onde resulta que

$$\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\nu\kappa} = -\frac{1}{4}\delta^\mu{}_\kappa\tilde{F}^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}. \quad (\text{B.13})$$

Existem outras duas possibilidades muito semelhantes, que nos levam a

$$F^{\mu\nu}F_{\nu\kappa} = \frac{1}{2}\delta^\mu{}_\kappa\tilde{F}^{\alpha\beta}\tilde{F}_{\alpha\beta} + \tilde{F}^{\mu\nu}\tilde{F}_{\nu\kappa},$$

onde

$$\tilde{F}^{\alpha\beta}\tilde{F}_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}\varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}\varepsilon_{\alpha\beta\lambda\nu}F_{\rho\sigma}F^{\lambda\nu},$$

com $\varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}\varepsilon_{\alpha\beta\lambda\nu} = -2(\delta^\rho_\lambda\delta^\sigma_\nu - \delta^\rho_\nu\delta^\sigma_\lambda)$, então

$$\tilde{F}^{\alpha\beta}\tilde{F}_{\alpha\beta} = -F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}. \quad (\text{B.14})$$

Nesse caso, a resposta final é

$$F^{\mu\nu}F_{\nu\kappa} = -\frac{1}{2}\delta^\mu_\kappa F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} + \tilde{F}^{\mu\nu}\tilde{F}_{\nu\kappa}. \quad (\text{B.15})$$

Já o caso oposto torna-se,

$$\tilde{F}^{\mu\nu}\tilde{F}_{\nu\kappa} = \frac{1}{2}\delta^\mu_\kappa F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} + F^{\mu\nu}F_{\nu\kappa}. \quad (\text{B.16})$$

Por fim, se considerarmos dois tensores distintos, $F^{\mu\nu}$ e $F'^{\mu\nu}$ é importante tomar alguns cuidados, vamos reproduzir o resultado (B.13) agora fazendo essa consideração,

$$\tilde{F}^{\mu\nu}F'_{\nu\rho} = -\frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\nu\rho\kappa\lambda}F_{\alpha\beta}\tilde{F}'^{\kappa\lambda} = -\frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\beta\alpha\nu}\varepsilon_{\kappa\lambda\rho\nu}F_{\alpha\beta}\tilde{F}'^{\kappa\lambda}, \quad (\text{B.17})$$

usando a identidade (B.7), obtemos

$$\tilde{F}^{\mu\nu}F'_{\nu\rho} = -\tilde{F}'^{\mu\nu}F_{\nu\rho} - \frac{1}{2}\delta^\mu_\rho\tilde{F}'^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}, \quad (\text{B.18})$$

onde

$$\tilde{F}'^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = \tilde{F}^{\alpha\beta}F'_{\alpha\beta}. \quad (\text{B.19})$$

Outro resultado interessante que pode ser obtido utilizando (B.7), é mostrar a compatibilidade entre as duas formas da Identidade de Bianchi, partindo da forma

$$\partial_\mu\tilde{F}^{\mu\nu} = 0,$$

podemos reescrevê-la propondo a contração

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\kappa\lambda\rho\nu}\partial_\mu\tilde{F}^{\mu\nu} &= -\frac{1}{2}\varepsilon_{\kappa\lambda\rho\nu}\varepsilon^{\nu\mu\alpha\beta}\partial_\mu F_{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{2}\left[\delta^\mu_\kappa\left(\delta^\alpha_\lambda\delta^\beta_\rho - \delta^\alpha_\rho\delta^\beta_\lambda\right) - \delta^\alpha_\kappa\left(\delta^\mu_\lambda\delta^\beta_\rho - \delta^\mu_\rho\delta^\beta_\lambda\right) + \delta^\beta_\kappa\left(\delta^\mu_\lambda\delta^\alpha_\rho - \delta^\mu_\rho\delta^\alpha_\lambda\right)\right]\partial_\mu F_{\alpha\beta} = 0, \end{aligned}$$

portanto

$$\partial_\kappa F_{\lambda\rho} + \partial_\rho F_{\kappa\lambda} + \partial_\lambda F_{\kappa\rho} = 0,$$

então fica mostrada a compatibilidade entre as duas formas da identidade de Bianchi.

Para cálculos explícitos envolvendo as equações de Maxwell na notação vetorial também serão úteis os produtos de Levi-Civita em três dimensões, dados pela definição

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \det \begin{pmatrix} \delta_{il} & \delta_{in} & \delta_{im} \\ \delta_{jl} & \delta_{jn} & \delta_{jm} \\ \delta_{kl} & \delta_{kn} & \delta_{km} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.20})$$

A partir desse resultado podemos calcular contrações desse produto. Ou seja, nenhum índice contraído

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \delta_{il}(\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kn}) - \delta_{in}(\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}) + \delta_{im}(\delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{kl}), \quad (\text{B.21})$$

a contração de um índice,

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn} = 1!(\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}), \quad (\text{B.22})$$

a contração de dois índices,

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijn} = 2!\delta_{kn}, \quad (\text{B.23})$$

e por fim, a contração de todos os três índices,

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 3!. \quad (\text{B.24})$$

Apêndice C

Tensor Energia-Momento

Uma estratégia para obter um tensor Energia-Momento simétrico para o eletromagnetismo, sem precisar do procedimento de Belinfante, é utilizar o método carinhosamente apelidado de Método Helayël, que consiste em contrair a equação de campo do Fóton com $F_{\nu\rho}$ e então a partir dessa nova configuração buscar escrever a nossa equação da continuidade a partir de manipulações matemáticas.

Dadas as equações de Maxwell não-homogêneas

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu, \quad (\text{C.1})$$

e a identidade de Bianchi, que é válida uma vez que não estamos considerando um cenário com monopolos magnéticos,

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \quad (\text{C.2})$$

o ponto de partida como mencionamos, é bem simples: devemos contrair as equações de Maxwell (C.1) com $F_{\nu\rho}$,

$$(\partial_\mu F^{\mu\nu}) F_{\nu\rho} = \mu_0 J^\nu F_{\nu\rho}, \quad (\text{C.3})$$

então buscamos escrever derivadas totais usando a regra do produto

$$\partial_\mu (F^{\mu\nu} F_{\nu\rho}) - F^{\mu\nu} \partial_\mu F_{\nu\rho} = \mu_0 J^\nu f_{\nu\rho}. \quad (\text{C.4})$$

Termos do tipo $\partial_\mu F_{\nu\rho}$ devem ser reescritos utilizando a identidade de Bianchi. Nesse caso, substituímos no nosso cálculo esse termo por

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} = -\partial_\rho F_{\mu\nu} - \partial_\nu F_{\rho\mu}, \quad (\text{C.5})$$

dessa forma resulta

$$\partial_\mu (F^{\mu\nu} F_{\nu\rho}) + F^{\mu\nu} \partial_\rho F_{\mu\nu} + F^{\mu\nu} \partial_\nu F_{\rho\mu} = \mu_0 J^\nu F_{\nu\rho}. \quad (\text{C.6})$$

Aqui mais uma vez usamos a regra do produto para escrever derivadas totais, onde

$$F^{\mu\nu}\partial_\rho F_{\mu\nu} \rightarrow \frac{1}{2}\partial_\rho(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}) = \partial_\mu\left(\frac{1}{2}\delta^\mu{}_\rho F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right), \quad (\text{C.7})$$

e, com algumas trocas de índices,

$$F^{\mu\nu}\partial_\nu F_{\rho\mu} \rightarrow \partial_\mu(F^{\mu\nu}F_{\nu\rho}) - (\partial_\mu F^{\mu\nu})F_{\nu\rho}, \quad (\text{C.8})$$

como estamos *on-shell* resta que

$$F^{\mu\nu}\partial_\nu F_{\rho\mu} \rightarrow \partial_\mu(F^{\mu\nu}F_{\nu\rho}) - \mu_0 J^\nu F_{\nu\rho}. \quad (\text{C.9})$$

Substituindo esses resultados em (C.6), ficamos com

$$\partial_\mu\left(F^{\mu\nu}F_{\nu\rho} + \frac{1}{4}\delta^\mu{}_\rho F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right) = \mu_0 J^\nu F_{\nu\rho}. \quad (\text{C.10})$$

Obtivemos uma equação da continuidade para o eletromagnetismo, cuja grandeza conservada é o tensor energia-momento $T^\mu{}_\rho$

$$T^\mu{}_\rho = \frac{1}{\mu_0}\left(F^{\mu\nu}F_{\nu\rho} + \frac{1}{4}\delta^\mu{}_\rho F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right). \quad (\text{C.11})$$

Levantando o índice ρ deixamos o tensor na forma mais comumente encontrada nos livros, para isso evidenciamos a métrica $\eta_{\nu\rho}$

$$\eta_{\nu\rho}T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}\left(\eta_{\nu\rho}F^{\mu\alpha}F_\alpha{}^\nu + \frac{1}{4}\eta_{\nu\rho}\eta^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right), \quad (\text{C.12})$$

ou seja,

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}\left(F^{\mu\alpha}F_\alpha{}^\nu + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right). \quad (\text{C.13})$$

C.1 Tensor Energia-Momento da ED Axiônica

Para obter o Tensor Energia-Momento precisamos das equações de campo do Fóton modificadas na presença do Axion

$$\partial_\mu(F^{\mu\nu} + G_{a\gamma\gamma}a\tilde{F}^{\mu\nu}) = \mu_0 J^\nu. \quad (\text{C.14})$$

Aqui permanece válida e inalterada a identidade de Bianchi. Também necessitamos da equação de campo para o Axion

$$(\square + \xi)a = -\frac{1}{4\mu_0}G_{a\gamma\gamma}\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \quad (\text{C.15})$$

Como vimos no caso do eletromagnetismo usual, o primeiro passo para obter o tensor é fazer a contração da equação de campo do fóton com o tensor eletromagnético

$$(\partial_\mu F^{\mu\nu})F_{\nu\rho} + G_{a\gamma\gamma}(\partial_\mu a)\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\nu\rho} = \mu_0 J^\nu F_{\nu\rho}, \quad (\text{C.16})$$

então buscamos escrever derivadas totais usando a regra do produto e assim por diante... Seguindo todos esses passos obtemos

$$\partial_\mu \left(F^{\mu\nu} F_{\nu\rho} + \frac{1}{4} \delta^\mu_\rho F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) + G_{a\gamma\gamma} (\partial_\mu a) \tilde{F}^{\mu\nu} F_{\nu\rho} = \mu_0 J^\nu F_{\nu\rho}. \quad (\text{C.17})$$

A novidade agora é o termo envolvendo a derivada do Axion, mas a estratégia segue sendo a mesma, vamos escrever uma derivada total do termo

$$\partial_\mu \left(F^{\mu\nu} F_{\nu\rho} + \frac{1}{4} \delta^\mu_\rho F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) + \partial_\mu (G_{a\gamma\gamma} a \tilde{F}^{\mu\nu} F_{\nu\rho}) - G_{a\gamma\gamma} a \tilde{F}^{\mu\nu} \partial_\mu F_{\nu\rho} = \mu_0 J^\nu F_{\nu\rho}, \quad (\text{C.18})$$

o termo extra que surge mais uma vez pede a identidade de Bianchi, de forma que

$$\partial_\mu \left(F^{\mu\nu} F_{\nu\rho} + \frac{1}{4} \delta^\mu_\rho F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + G_{a\gamma\gamma} a \tilde{F}^{\mu\nu} F_{\nu\rho} \right) + G_{a\gamma\gamma} a \tilde{F}^{\mu\nu} (\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\rho\mu}) = \mu_0 J^\nu F_{\nu\rho}. \quad (\text{C.19})$$

O primeiro termo fora da derivada total é reescrito como

$$G_{a\gamma\gamma} a \tilde{F}^{\mu\nu} \partial_\rho F_{\mu\nu} \rightarrow \partial_\mu \left(\frac{1}{2} \delta^\mu_\rho G_{a\gamma\gamma} a \tilde{F}^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) - \frac{1}{2} (\partial_\rho a) G_{a\gamma\gamma} \tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (\text{C.20})$$

novamente lembrando que estamos *on-shell*, usando a equação do Axion, podemos escrever

$$G_{a\gamma\gamma} \tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -4\mu_0 (\partial_\mu \partial^\mu a + \xi a), \quad (\text{C.21})$$

dessa forma, usando a regra do produto e manipulando índices, chegamos a

$$-\frac{1}{2} (\partial_\rho a) G_{a\gamma\gamma} \tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \partial_\mu \left(2\mu_0 (\partial^\mu a) (\partial_\rho a) - \delta^\mu_\rho \mu_0 [(\partial^\mu a) (\partial_\mu a) - \xi a^2] \right), \quad (\text{C.22})$$

então

$$G_{a\gamma\gamma} a \tilde{F}^{\mu\nu} \partial_\rho F_{\mu\nu} \rightarrow 2\mu_0 \partial_\mu \left((\partial^\mu a) (\partial_\rho a) + \frac{1}{4} \delta^\mu_\rho \left(\frac{1}{\mu_0} G_{a\gamma\gamma} a \tilde{F}^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} - 2(\partial_\mu a)^2 + 2\xi a^2 \right) \right). \quad (\text{C.23})$$

O segundo termo fora da derivada total, trocando os índices μ e ν , é reescrito como

$$G_{a\gamma\gamma} a \tilde{F}^{\mu\nu} \partial_\mu F_{\nu\rho} \rightarrow \partial_\mu (G_{a\gamma\gamma} a \tilde{F}^{\mu\nu} F_{\nu\rho}) - G_{a\gamma\gamma} (\partial_\mu a) \tilde{F}^{\mu\nu} F_{\nu\rho}, \quad (\text{C.24})$$

como

$$G_{a\gamma\gamma} (\partial_\mu a) \tilde{F}^{\mu\nu} F_{\nu\rho} = \mu_0 J^\nu F_{\nu\rho} - \partial_\mu \left(F^{\mu\nu} F_{\nu\rho} + \frac{1}{4} \delta^\mu_\rho F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right), \quad (\text{C.25})$$

resta que

$$G_{a\gamma\gamma} a \tilde{F}^{\mu\nu} \partial_\mu F_{\nu\rho} \rightarrow \partial_\mu (G_{a\gamma\gamma} a \tilde{F}^{\mu\nu} F_{\nu\rho}) - \mu_0 J^\nu F_{\nu\rho} + \partial_\mu \left(F^{\mu\nu} F_{\nu\rho} + \frac{1}{4} \delta^\mu_\rho F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right). \quad (\text{C.26})$$

Substituindo os resultados dados por (C.23) e (C.26) em (C.19), resulta

$$2\partial_\mu \left(F^{\mu\nu} F_{\nu\rho} + \frac{1}{4} \delta^\mu_\rho F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + G_{a\gamma\gamma} a \tilde{F}^{\mu\nu} F_{\nu\rho} \right) + 2\mu_0 \partial_\mu \left((\partial^\mu a) (\partial_\rho a) + \frac{1}{4} \delta^\mu_\rho \left(\frac{1}{\mu_0} G_{a\gamma\gamma} a \tilde{F}^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} - 2(\partial_\mu a)^2 + 2\xi a^2 \right) \right) = 2\mu_0 J^\nu F_{\nu\rho}. \quad (\text{C.27})$$

A equação da continuidade fica então escrita como

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left(\frac{1}{\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\nu\rho} + \frac{1}{\mu_0} G_{a\gamma\gamma} a \tilde{F}^{\mu\nu} F_{\nu\rho} + (\partial^\mu a)(\partial_\rho a) + \right. \\ \left. \frac{1}{4} \delta^\mu{}_\rho \left(\frac{1}{\mu_0} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + \frac{1}{\mu_0} G_{a\gamma\gamma} a \tilde{F}^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} - 2(\partial_\alpha a)^2 + 2\xi a^2 \right) \right) = J^\nu F_{\nu\rho}. \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

Como nesse caso é válida a identidade (B.13),

$$\tilde{F}^{\mu\nu} F_{\nu\rho} = -\frac{1}{4} \delta^\mu{}_\rho \tilde{F}^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}, \quad (\text{C.29})$$

o tensor energia-momento se resume a

$$T^\mu{}_\rho = \frac{1}{\mu_0} \left(F^{\mu\nu} F_{\nu\rho} + \frac{1}{4} \delta^\mu{}_\rho F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) + (\partial^\mu a)(\partial_\rho a) - \frac{1}{2} \delta^\mu{}_\rho \left((\partial^\nu a)(\partial_\nu a) - \xi a^2 \right), \quad (\text{C.30})$$

ou seja, a soma dos tensores livres

$$T^\mu{}_\rho = (T_\gamma)^\mu{}_\rho + (T_a)^\mu{}_\rho, \quad (\text{C.31})$$

com

$$(T_\gamma)^\mu{}_\rho = \frac{1}{\mu_0} \left(F^{\mu\nu} F_{\nu\rho} + \frac{1}{4} \delta^\mu{}_\rho F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right), \quad (\text{C.32})$$

e

$$(T_a)^\mu{}_\rho = (\partial^\mu a)(\partial_\rho a) - \frac{1}{2} \delta^\mu{}_\rho \left((\partial^\nu a)(\partial_\nu a) - \xi a^2 \right). \quad (\text{C.33})$$

Por um lado, explicitamente temos,

$$(T_\gamma)^{\mu\rho} = \begin{pmatrix} u_\gamma & \frac{1}{c} \mathbf{S}_\gamma^i \\ \frac{1}{c} \mathbf{S}_\gamma^i & -(\tau_\gamma)^{ij} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.34})$$

onde

$$u_\gamma = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2 \right), \quad (\text{C.35})$$

é a densidade de energia,

$$\mathbf{S}_\gamma^i = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}, \quad (\text{C.36})$$

é o vetor de Poynting e,

$$(\tau_\gamma)^{ij} = (\tau_\gamma)_{ij} = \varepsilon_0 \mathbf{E}_i \mathbf{E}_j + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_i \mathbf{B}_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \left(\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2 \right), \quad (\text{C.37})$$

é o tensor de stress. Por outro lado lado, temos, para o Axion,

$$(T_a)^{\mu\rho} = \begin{pmatrix} u_a & \frac{1}{c} \mathbf{S}_a^i \\ \mathbf{S}_a^i & (\tau_a)^{ij} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.38})$$

onde

$$u_a = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c^2} \dot{a}^2 + (\nabla a)^2 + \xi a^2 \right), \quad (\text{C.39})$$

é a densidade de energia para o campo do Axion,

$$\mathbf{S}_a^i = -\dot{a}(\nabla a), \quad (\text{C.40})$$

é o vetor de Poynting Axiônico e,

$$(\tau_a)^{ij} = (\tau_a)_{ij} = \nabla_i a \nabla_j a + \frac{1}{2} \delta_{ij} \left(\frac{1}{c^2} \dot{a}^2 - (\nabla a)^2 - \xi a^2 \right), \quad (\text{C.41})$$

é o tensor de stress do campo do Axion.

C.2 Tensor Energia-Momento da ED Axiônica em Fundo Magnético Constante

Para obter o Tensor Energia-Momento precisamos das equações de campo do Fóton modificadas na presença do fundo

$$\partial_\mu f^{\mu\nu} + G_{a\gamma\gamma} (\partial_\mu a) \tilde{F}_B^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu, \quad (\text{C.42})$$

onde consideramos um campo magnético constante de fundo, $\tilde{F}_B^{i0} = \mathbf{B}_i$, e um campo elétrico trivial, $\tilde{F}_B^{ij} = \varepsilon_{ijk} \mathbf{E}_k = 0$. Mais uma vez, permanece válida a identidade de Bianchi,

$$\partial_\mu \tilde{f}^{\mu\nu} = 0, \quad (\text{C.43})$$

ou,

$$\partial_\mu f_{\nu\kappa} + \partial_\kappa f_{\mu\nu} + \partial_\nu f_{\kappa\mu} = 0, \quad (\text{C.44})$$

e também necessitamos da equação de campo para o Axion

$$(\square + \xi)a = -\frac{1}{2\mu_0} G_{a\gamma\gamma} \tilde{F}_B^{\mu\nu} f_{\mu\nu}. \quad (\text{C.45})$$

Como vimos no caso do eletromagnetismo usual, o primeiro passo para obter o tensor é fazer a contração da equação de campo do fóton com o tensor eletromagnético

$$(\partial_\mu f^{\mu\nu}) f_{\nu\rho} + G_{a\gamma\gamma} (\partial_\mu a) \tilde{F}_B^{\mu\nu} f_{\nu\rho} = \mu_0 J^\nu f_{\nu\rho}, \quad (\text{C.46})$$

então buscamos escrever derivadas totais usando a regra do produto

$$\partial_\mu (f^{\mu\nu} f_{\nu\rho}) - f^{\mu\nu} \partial_\mu f_{\nu\rho} + G_{a\gamma\gamma} (\partial_\mu a) \tilde{F}_B^{\mu\nu} f_{\nu\rho} = \mu_0 J^\nu f_{\nu\rho}. \quad (\text{C.47})$$

Termos do tipo $\partial_\mu f_{\nu\rho}$ devem ser tratados utilizando a identidade de Bianchi. Nesse caso, substituímos no nosso cálculo esse termo por

$$\partial_\mu f_{\nu\rho} = -\partial_\rho f_{\mu\nu} - \partial_\nu f_{\rho\mu}, \quad (\text{C.48})$$

dessa forma resulta

$$\partial_\mu(f^{\mu\nu} f_{\nu\rho}) + f^{\mu\nu} \partial_\rho f_{\mu\nu} + f^{\mu\nu} \partial_\nu f_{\rho\mu} + G_{a\gamma\gamma}(\partial_\mu a) \tilde{F}_B^{\mu\nu} f_{\nu\rho} = \mu_0 J^\nu f_{\nu\rho}. \quad (\text{C.49})$$

Aqui mais uma vez usamos a regra do produto para escrever derivadas totais, onde

$$f^{\mu\nu} \partial_\rho f_{\mu\nu} \rightarrow \frac{1}{2} \partial_\rho (f^{\mu\nu} f_{\mu\nu}) = \partial_\mu \left(\frac{1}{2} \delta^\mu{}_\rho f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} \right), \quad (\text{C.50})$$

e, com algumas trocas de índices,

$$f^{\mu\nu} \partial_\nu f_{\rho\mu} \rightarrow \partial_\mu (f^{\mu\nu} f_{\nu\rho}) - (\partial_\mu f^{\mu\nu}) f_{\nu\rho}, \quad (\text{C.51})$$

como estamos on-shell resta que

$$f^{\mu\nu} \partial_\nu f_{\rho\mu} \rightarrow \partial_\mu (f^{\mu\nu} f_{\nu\rho}) - \mu_0 J^\nu f_{\nu\rho} + G_{a\gamma\gamma}(\partial_\mu a) \tilde{F}_B^{\mu\nu} f_{\nu\rho}. \quad (\text{C.52})$$

Substituindo esses resultados em (C.49), ficamos com

$$\partial_\mu \left(f^{\mu\nu} f_{\nu\rho} + \frac{1}{4} \delta^\mu{}_\rho f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} \right) + G_{a\gamma\gamma}(\partial_\mu a) \tilde{F}_B^{\mu\nu} f_{\nu\rho} = \mu_0 J^\nu f_{\nu\rho}. \quad (\text{C.53})$$

Escrevendo a derivada total para o termo antes da igualdade

$$\partial_\mu \left(f^{\mu\nu} f_{\nu\rho} + \frac{1}{4} \delta^\mu{}_\rho f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} \right) + \partial_\mu (G_{a\gamma\gamma} a \tilde{F}_B^{\mu\nu} f_{\nu\rho}) - G_{a\gamma\gamma} a \tilde{F}_B^{\mu\nu} \partial_\mu f_{\nu\rho} = \mu_0 J^\nu f_{\nu\rho}, \quad (\text{C.54})$$

usando a identidade de Bianchi

$$\partial_\mu \left(f^{\mu\nu} f_{\nu\rho} + \frac{1}{4} \delta^\mu{}_\rho f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} \right) + \partial_\mu (G_{a\gamma\gamma} a \tilde{F}_B^{\mu\nu} f_{\nu\rho}) + G_{a\gamma\gamma} a \tilde{F}_B^{\mu\nu} \partial_\rho f_{\mu\nu} + G_{a\gamma\gamma} a \tilde{F}_B^{\mu\nu} \partial_\nu f_{\rho\mu} = \mu_0 J^\nu f_{\nu\rho}, \quad (\text{C.55})$$

escrevendo derivadas totais usando a regra do produto

$$\begin{aligned} & \partial_\mu \left(f^{\mu\nu} f_{\nu\rho} + 2G_{a\gamma\gamma} a \tilde{F}_B^{\mu\nu} f_{\nu\rho} + \frac{1}{4} \delta^\mu{}_\rho f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} + \delta^\mu{}_\rho G_{a\gamma\gamma} a \tilde{F}_B^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} \right) + \\ & - (\partial_\rho a) G_{a\gamma\gamma} \tilde{F}_B^{\mu\nu} f_{\mu\nu} - (\partial_\mu a) G_{a\gamma\gamma} \tilde{F}_B^{\mu\nu} f_{\nu\rho} = \mu_0 J^\nu f_{\nu\rho}, \end{aligned} \quad (\text{C.56})$$

lembrando que estamos *on-shell*,

$$\begin{aligned} & \partial_\mu \left(2f^{\mu\nu} f_{\nu\rho} + 2\mu_0 (\partial^\mu a) (\partial_\rho a) + 2G_{a\gamma\gamma} a \tilde{F}_B^{\mu\nu} f_{\nu\rho} + \frac{1}{2} \delta^\mu{}_\rho f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} + \right. \\ & \left. + \delta^\mu{}_\rho \left(-\mu_0 (\partial^\mu a) (\partial_\mu a) + \mu_0 \xi a^2 + G_{a\gamma\gamma} a \tilde{F}_B^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} \right) \right) = 2\mu_0 J^\nu f_{\nu\rho}, \end{aligned} \quad (\text{C.57})$$

simplificando

$$\begin{aligned} & \partial_\mu \left(\frac{1}{\mu_0} f^{\mu\nu} f_{\nu\rho} + (\partial^\mu a) (\partial_\rho a) + \frac{1}{\mu_0} G_{a\gamma\gamma} a \tilde{F}_B^{\mu\nu} f_{\nu\rho} + \frac{1}{4} \delta^\mu{}_\rho \frac{1}{\mu_0} f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \delta^\mu{}_\rho \left(-(\partial^\mu a) (\partial_\mu a) + \xi a^2 + \frac{1}{\mu_0} G_{a\gamma\gamma} a \tilde{F}_B^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} \right) \right) = J^\nu f_{\nu\rho}. \end{aligned} \quad (\text{C.58})$$

O tensor energia-momento referente a essa equação da continuidade é dado por

$$T^\mu{}_\rho = \frac{1}{\mu_0} \left(f^{\mu\nu} f_{\nu\rho} + \frac{1}{4} \delta^\mu{}_\rho f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} \right) + (\partial^\mu a)(\partial_\rho a) - \frac{1}{2} \delta^\mu{}_\rho \left((\partial^\mu a)(\partial_\mu a) - \xi a^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(G_{a\gamma\gamma} a \tilde{F}_B^{\mu\nu} f_{\nu\rho} + \frac{1}{2} \delta^\mu{}_\rho G_{a\gamma\gamma} a \tilde{F}_B^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} \right), \quad (\text{C.59})$$

ou seja, é composto pelos tensores livres e mais uma contribuição do *mixing*,

$$T^\mu{}_\rho = (T_\gamma)^\mu{}_\rho + (T_a)^\mu{}_\rho + (T_{a\gamma\gamma})^\mu{}_\rho, \quad (\text{C.60})$$

onde $(T_\gamma)^\mu{}_\rho$ e $(T_a)^\mu{}_\rho$ são dados respectivamente por (C.32) e (C.33), e

$$(T_{a\gamma\gamma})^\mu{}_\rho = \frac{1}{\mu_0} \left(G_{a\gamma\gamma} a \tilde{F}_B^{\mu\nu} f_{\nu\rho} + \frac{1}{2} \delta^\mu{}_\rho G_{a\gamma\gamma} a \tilde{F}_B^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} \right) \quad (\text{C.61})$$

que resume-se a

$$(T_{a\gamma\gamma})^\mu{}_\rho = -\frac{1}{\mu_0} G_{a\gamma\gamma} a \tilde{f}^{\mu\nu} F_{B\nu\rho}, \quad (\text{C.62})$$

lembrando da identidade dada em (B.18).

C.3 Tensor Energia-Momento da ED na Presença de Axions e Fótons Escuros

Para este caso, partimos das equações Maxwell

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = (\partial_\mu a)(\mathbf{G}\tilde{F}^{\mu\nu} + \mathbf{G}'\tilde{F}'^{\mu\nu}) + \mathcal{J}^\nu, \quad (\text{C.63})$$

$$\partial_\mu F'^{\mu\nu} + m_{\gamma'}^2 A'^\nu = (\partial_\mu a)(\mathbf{G}'\tilde{F}^{\mu\nu} + \mathbf{G}''\tilde{F}'^{\mu\nu}) + \mathcal{J}'^\nu, \quad (\text{C.64})$$

$$(\square + m_a^2)a = \frac{1}{4}\mathbf{G}\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\mathbf{G}'\tilde{F}'^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{4}\mathbf{G}''\tilde{F}'^{\mu\nu}F'_{\mu\nu}. \quad (\text{C.65})$$

Começamos contraindo a equação (C.63) com $F_{\nu\rho}$,

$$(\partial_\mu F^{\mu\nu})F_{\nu\rho} - \mathbf{G}(\partial_\mu a)\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\nu\rho} - \mathbf{G}'(\partial_\mu a)\tilde{F}'^{\mu\nu}F_{\nu\rho} = \mathcal{J}^\nu F_{\nu\rho}, \quad (\text{C.66})$$

e então partimos em busca da equação da continuidade. Todos os procedimentos são extremamente análogos aos dos casos anteriores, então vamos deixar algumas etapas subentendidas, o setor de fóton puro não é modificado, então podemos começar diretamente de

$$\partial_\mu \left(F^{\mu\nu} F_{\nu\rho} + \frac{1}{4} \delta^\mu{}_\rho F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) - \mathbf{G}(\partial_\mu a)\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\nu\rho} - \mathbf{G}'(\partial_\mu a)\tilde{F}'^{\mu\nu}F_{\nu\rho} = \mathcal{J}^\nu F_{\nu\rho}, \quad (\text{C.67})$$

usando a regra do produto nos setores de interação

$$\partial_\mu \left(F^{\mu\nu} F_{\nu\rho} + \frac{1}{4} \delta^\mu{}_\rho F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) - \partial_\mu (\mathbf{G}a\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\nu\rho} + \mathbf{G}'a\tilde{F}'^{\mu\nu}F_{\nu\rho}) + (\mathbf{G}a\tilde{F}^{\mu\nu} + \mathbf{G}'a\tilde{F}'^{\mu\nu})\partial_\mu F_{\nu\rho} = \mathcal{J}^\nu F_{\nu\rho}, \quad (\text{C.68})$$

usando a identidade de Bianchi

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} = -\partial_\rho F_{\mu\nu} - \partial_\nu F_{\rho\mu},$$

a regra do produto em cada um dos novos termos e lembrando que estamos *on-shell*,

$$\begin{aligned} & \partial_\mu \left(2F^{\mu\nu} F_{\nu\rho} + \frac{1}{2} \delta^\mu{}_\rho F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) + \partial_\mu \left(4(\partial^\mu a)(\partial_\rho a) + 2\delta^\mu{}_\rho \left(-(\partial^\nu a)(\partial_\nu a) + m_a^2 a^2 \right) \right) + \\ & - \partial_\mu \left(2\mathbf{G}a\tilde{F}^{\mu\nu} F_{\nu\rho} + 2\mathbf{G}'a\tilde{F}'^{\mu\nu} F_{\nu\rho} + \delta^\mu{}_\rho (\mathbf{G}a\tilde{F}^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + 2\mathbf{G}'a\tilde{F}'^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + \mathbf{G}''a\tilde{F}'^{\alpha\beta} F'_{\alpha\beta}) \right) + \\ & + 2(\mathbf{G}''a\tilde{F}'^{\mu\nu} + \mathbf{G}'a\tilde{F}^{\mu\nu})\partial_\rho F'_{\mu\nu} + (\mathbf{G}a\tilde{F}^{\mu\nu} + \mathbf{G}'a\tilde{F}'^{\mu\nu})\partial_\rho F_{\mu\nu} = 2\mathcal{J}^\nu F_{\nu\rho} \end{aligned} \quad (\text{C.69})$$

usando novamente a identidade de Bianchi

$$\partial_\rho F'_{\mu\nu} = -\partial_\nu F'_{\rho\mu} - \partial_\mu F'_{\nu\rho},$$

a regra do produto em cada um dos novos termos e lembrando que estamos *on-shell*,

$$\begin{aligned} & \partial_\mu \left(2F^{\mu\nu} F_{\nu\rho} + \frac{1}{2} \delta^\mu{}_\rho F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) + \partial_\mu \left(4(\partial^\mu a)(\partial_\rho a) + 2\delta^\mu{}_\rho \left(-(\partial^\nu a)(\partial_\nu a) + m_a^2 a^2 \right) \right) + \\ & - \partial_\mu \left(2\mathbf{G}a\tilde{F}^{\mu\nu} F_{\nu\rho} + 2\mathbf{G}'a\tilde{F}'^{\mu\nu} F_{\nu\rho} + \delta^\mu{}_\rho (\mathbf{G}a\tilde{F}^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + 2\mathbf{G}'a\tilde{F}'^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + \mathbf{G}''a\tilde{F}'^{\alpha\beta} F'_{\alpha\beta}) \right) + \\ & - 4(\mathbf{G}''a\tilde{F}'^{\mu\nu} + \mathbf{G}'a\tilde{F}^{\mu\nu})\partial_\mu F'_{\nu\rho} - 2(\mathbf{G}aF^{\mu\nu} + \mathbf{G}'aF'^{\mu\nu})\partial_\mu F_{\nu\rho} = 2\mathcal{J}^\nu F_{\nu\rho}. \end{aligned} \quad (\text{C.70})$$

Antes de seguir em frente, vamos precisar agora contrair a equação (C.64) com $F'_{\nu\rho}$, dessa maneira

$$(\partial_\mu F'^{\mu\nu})F'_{\nu\rho} + m_{\gamma'}^2 A'^\nu F'_{\nu\rho} - \mathcal{J}'^\nu F'_{\nu\rho} = (\partial_\mu a)(\mathbf{G}'\tilde{F}^{\mu\nu} F'_{\nu\rho} + \mathbf{G}''\tilde{F}'^{\mu\nu} F'_{\nu\rho}), \quad (\text{C.71})$$

vamos realizar aqui os mesmos procedimentos que vínhamos realizando no caso da equação (C.63), para o fóton escuro livre, sem massa, o resultado é análogo ao do fóton usual

$$\partial_\mu \left(F'^{\mu\nu} F'_{\nu\rho} + \frac{1}{4} \delta^\mu{}_\rho F'^{\alpha\beta} F'_{\alpha\beta} \right) + m_{\gamma'}^2 A'^\nu F'_{\nu\rho} - \mathcal{J}'^\nu F'_{\nu\rho} = (\partial_\mu a)(\mathbf{G}'\tilde{F}^{\mu\nu} F'_{\nu\rho} + \mathbf{G}''\tilde{F}'^{\mu\nu} F'_{\nu\rho}), \quad (\text{C.72})$$

aqui a novidade é o termo de massa

$$m_{\gamma'}^2 A'^\nu F'_{\nu\rho} = m_{\gamma'}^2 A'^\nu (\partial_\nu A'_\rho - \partial_\rho A'_\nu), \quad (\text{C.73})$$

usando a regra do produto,

$$m_{\gamma'}^2 A'^\nu F'_{\nu\rho} = \partial_\mu \left(m_{\gamma'}^2 A'^\mu A'_\rho - \frac{1}{2} \delta^\mu{}_\rho m_{\gamma'}^2 A'^\nu A'_\nu \right) - m_{\gamma'}^2 (\partial_\nu A'^\nu) A'_\rho, \quad (\text{C.74})$$

mas $\partial_\nu A'^\nu$ é condição subsidiária da Ed. massiva,

$$\partial_\nu A'^\nu = 0,$$

então a contribuição do termo massivo para a equação da continuidade é simplesmente

$$m_{\gamma'}^2 A'^\nu F'_{\nu\rho} = \partial_\mu \left(m_{\gamma'}^2 A'^\mu A'_\rho - \frac{1}{2} \delta^\mu{}_\rho m_{\gamma'}^2 A'^\nu A'_\nu \right), \quad (\text{C.75})$$

dessa forma, resta que

$$\partial_\mu \left[F'^{\mu\nu} F'_{\nu\rho} + m_{\gamma'}^2 A'^\mu A'_\rho + \frac{1}{4} \delta^\mu_\rho (F'^{\alpha\beta} F'_{\alpha\beta} - 2m_{\gamma'}^2 A'^\nu A'_\nu) \right] - \mathcal{J}'^\nu F'_{\nu\rho} = (\partial_\mu a) (G' \tilde{F}'^{\mu\nu} F'_{\nu\rho} + G'' \tilde{F}'^{\mu\nu} F'_{\nu\rho}). \quad (\text{C.76})$$

Voltando ao desenvolvimento da equação da continuidade para o Fóton (C.70), quando escrevermos uma derivada total para o termo $-4(G'' a \tilde{F}'^{\mu\nu} + G' a \tilde{F}^{\mu\nu}) \partial_\mu F'_{\nu\rho}$, restará uma contribuição da forma

$$-4(G'' a \tilde{F}'^{\mu\nu} + G' a \tilde{F}^{\mu\nu}) \partial_\mu F'_{\nu\rho} = -\partial_\mu (4G'' a \tilde{F}'^{\mu\nu} F'_{\nu\rho} + 4G' a \tilde{F}^{\mu\nu} F'_{\nu\rho}) + 4(\partial_\mu a) (G'' \tilde{F}'^{\mu\nu} F'_{\nu\rho} + G' \tilde{F}^{\mu\nu} F'_{\nu\rho}), \quad (\text{C.77})$$

onde o segundo termo após a igualdade é justamente o que obtivemos trabalhando na equação da continuidade para o Fóton Escuro (C.76), então

$$\begin{aligned} & \partial_\mu \left[4F^{\mu\nu} F_{\nu\rho} + 4F'^{\mu\nu} F'_{\nu\rho} + 4m_{\gamma'}^2 A'^\mu A'_\rho + 4(\partial^\mu a)(\partial_\rho a) + \right. \\ & \quad + \frac{1}{2} \delta^\mu_\rho (2F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + 2F'^{\alpha\beta} F'_{\alpha\beta} - 4m_{\gamma'}^2 A'^\nu A'_\nu - 4(\partial^\nu a)(\partial_\nu a) + 4m_a^2 a^2) + \\ & \quad - 4G a \tilde{F}^{\mu\nu} F_{\nu\rho} - 4G' a \tilde{F}'^{\mu\nu} F'_{\nu\rho} - 4G' a \tilde{F}'^{\mu\nu} F_{\nu\rho} - 4G'' a \tilde{F}'^{\mu\nu} F'_{\nu\rho} + \\ & \quad \left. - \delta^\mu_\rho (G a \tilde{F}^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + 2G' a \tilde{F}'^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + G'' a \tilde{F}'^{\alpha\beta} F'_{\alpha\beta}) \right] \\ & = 4\mathcal{J}^\nu F_{\nu\rho} + 4\mathcal{J}'^\nu F'_{\nu\rho}. \end{aligned} \quad (\text{C.78})$$

Simplificando a expressão, lembrando das identidades (B.13) e (B.18), chegamos a

$$\begin{aligned} & \partial_\mu \left[F^{\mu\nu} F_{\nu\rho} + F'^{\mu\nu} F'_{\nu\rho} + m_{\gamma'}^2 A'^\mu A'_\rho + (\partial^\mu a)(\partial_\rho a) + \frac{1}{4} \delta^\mu_\rho (F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + F'^{\alpha\beta} F'_{\alpha\beta} - 2m_{\gamma'}^2 A'^\nu A'_\nu + \right. \\ & \quad \left. - 2(\partial^\nu a)(\partial_\nu a) + 2m_a^2 a^2) \right] = \mathcal{J}^\nu F_{\nu\rho} + \mathcal{J}'^\nu F'_{\nu\rho}. \end{aligned} \quad (\text{C.79})$$

Da expressão (C.79), lemos o tensor energia-momento da teoria, que se resume, como esperado, a soma dos tensores livres

$$T^\mu_\rho = (T_\gamma)^\mu_\rho + (T_{\gamma'})^\mu_\rho + (T_a)^\mu_\rho, \quad (\text{C.80})$$

onde

$$(T_\gamma)^\mu_\rho = F^{\mu\nu} F_{\nu\rho} + \frac{1}{4} \delta^\mu_\rho F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}, \quad (\text{C.81})$$

$$(T_{\gamma'})^\mu_\rho = F'^{\mu\nu} F'_{\nu\rho} + m_{\gamma'}^2 A'^\mu A'_\rho + \frac{1}{4} \delta^\mu_\rho (F'^{\alpha\beta} F'_{\alpha\beta} - 2m_{\gamma'}^2 A'^\nu A'_\nu), \quad (\text{C.82})$$

e

$$(T_a)^\mu_\rho = (\partial^\mu a)(\partial_\rho a) - \frac{1}{2} \delta^\mu_\rho ((\partial^\mu a)(\partial_\mu a) - \xi a^2). \quad (\text{C.83})$$

C.4 Tensor Energia-Momento da ED na presença de Axions e Fótons Escuros Expandida em Fundo Magnético Constante

$$\partial_\mu f^{\mu\nu} = \mathbf{G}(\partial_\mu a) \tilde{F}_B^{\mu\nu} + \mathcal{J}^\nu, \quad (\text{C.84})$$

$$\partial_\mu \tilde{f}^{\mu\nu} = 0, \quad (\text{C.85})$$

$$\partial_\mu F'^{\mu\nu} = -m_{\gamma'}^2 A'^\nu + \mathbf{G}'(\partial_\mu a) \tilde{F}_B^{\mu\nu} + \mathcal{J}'^\nu, \quad (\text{C.86})$$

$$\partial_\mu \tilde{F}'^{\mu\nu} = 0, \quad (\text{C.87})$$

$$(\square + m_a^2)a = \frac{1}{2}\mathbf{G}\tilde{F}_B^{\mu\nu} f_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\mathbf{G}'\tilde{F}_B^{\mu\nu} F'_{\mu\nu} \quad (\text{C.88})$$

Começamos contraindo a equação do fóton (C.89) com $f_{\nu\rho}$

$$(\partial_\mu f^{\mu\nu})f_{\nu\rho} = \mathbf{G}(\partial_\mu a) \tilde{F}_B^{\mu\nu} f_{\nu\rho} + \mathcal{J}^\nu f_{\nu\rho}, \quad (\text{C.89})$$

o setor de fóton livre permanece igual,

$$\partial_\mu \left(f^{\mu\nu} f_{\nu\rho} + \frac{1}{4} f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} \right) - \mathbf{G}(\partial_\mu a) \tilde{F}_B^{\mu\nu} f_{\nu\rho} = \mathcal{J}^\nu f_{\nu\rho}, \quad (\text{C.90})$$

usando a regra do produto para escrever uma derivada total para o termo antes da igualdade,

$$\partial_\mu \left(f^{\mu\nu} f_{\nu\rho} + \frac{1}{4} f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} \right) - \partial_\mu (\mathbf{G}a \tilde{F}_B^{\mu\nu} f_{\nu\rho}) + \mathbf{G}a \tilde{F}_B^{\mu\nu} \partial_\mu f_{\nu\rho} = \mathcal{J}^\nu f_{\nu\rho}, \quad (\text{C.91})$$

usando a identidade de Bianchi,

$$\begin{aligned} & \partial_\mu \left(f^{\mu\nu} f_{\nu\rho} - 2\mathbf{G}a \tilde{F}_B^{\mu\nu} f_{\nu\rho} + \frac{1}{4} \delta^\mu_\rho f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} - \delta^\mu_\rho \mathbf{G}a \tilde{F}_B^{\mu\nu} f_{\mu\nu} \right) + \\ & + (\partial_\rho a) \mathbf{G} \tilde{F}_B^{\mu\nu} f_{\mu\nu} + (\partial_\mu a) \mathbf{G} \tilde{F}_B^{\mu\nu} f_{\nu\rho} = \mathcal{J}^\nu f_{\nu\rho}, \end{aligned} \quad (\text{C.92})$$

lembrando que estamos *on-shell*,

$$\begin{aligned} & \partial_\mu \left(2f^{\mu\nu} f_{\nu\rho} - 2\mathbf{G}a \tilde{F}_B^{\mu\nu} f_{\nu\rho} + \frac{1}{2} \delta^\mu_\rho f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} - \delta^\mu_\rho \mathbf{G}a \tilde{F}_B^{\mu\nu} f_{\mu\nu} \right) + \\ & + (\partial_\rho a) (2(\square + m_a^2)a - \mathbf{G}' \tilde{F}_B^{\mu\nu} F'_{\mu\nu}) = 2\mathcal{J}^\nu f_{\nu\rho}, \end{aligned} \quad (\text{C.93})$$

desenvolvendo o termo antes da igualdade usando a regra do produto,

$$\begin{aligned} & \partial_\mu \left(2f^{\mu\nu} f_{\nu\rho} + 2(\partial^\mu a)(\partial_\rho a) - 2\mathbf{G}a \tilde{F}_B^{\mu\nu} f_{\nu\rho} + \frac{1}{2} \delta^\mu_\rho f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} + \right. \\ & \left. - \delta^\mu_\rho \left((\partial^\mu a)(\partial_\mu a) - m_a^2 a^2 + \mathbf{G}a \tilde{F}_B^{\mu\nu} f_{\mu\nu} + \mathbf{G}'a \tilde{F}_B^{\mu\nu} F'_{\mu\nu} \right) \right) + \\ & + \mathbf{G}'a \tilde{F}_B^{\mu\nu} \partial_\rho F'_{\mu\nu} = 2\mathcal{J}^\nu f_{\nu\rho}, \end{aligned} \quad (\text{C.94})$$

usando a identidade de Bianchi para o Fóton Escuro,

$$\begin{aligned} & \partial_\mu \left(2f^{\mu\nu} f_{\nu\rho} + 2(\partial^\mu a)(\partial_\rho a) - 2\text{Ga}\tilde{F}_B^{\mu\nu} f_{\nu\rho} + \frac{1}{2}\delta^\mu{}_\rho f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} + \right. \\ & \quad \left. - \delta^\mu{}_\rho \left((\partial^\mu a)(\partial_\mu a) - m_a^2 a^2 + \text{Ga}\tilde{F}_B^{\mu\nu} f_{\mu\nu} + \text{G}'a\tilde{F}_B^{\mu\nu} F'_{\mu\nu} \right) \right) + \\ & \quad - 2\text{G}'a\tilde{F}_B^{\mu\nu} \partial_\mu F'_{\nu\rho} = 2\mathcal{J}^\nu f_{\nu\rho}, \end{aligned} \quad (\text{C.95})$$

usando a regra do produto

$$\begin{aligned} & \partial_\mu \left(2f^{\mu\nu} f_{\nu\rho} + 2(\partial^\mu a)(\partial_\rho a) - 2\text{Ga}\tilde{F}_B^{\mu\nu} f_{\nu\rho} - 2\text{G}'a\tilde{F}_B^{\mu\nu} F'_{\nu\rho} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2}\delta^\mu{}_\rho f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} - \delta^\mu{}_\rho \left((\partial^\mu a)(\partial_\mu a) - m_a^2 a^2 + \text{Ga}\tilde{F}_B^{\mu\nu} f_{\mu\nu} + \text{G}'a\tilde{F}_B^{\mu\nu} F'_{\mu\nu} \right) \right) + \\ & \quad + 2(\partial_\mu a)\text{G}'\tilde{F}_B^{\mu\nu} F'_{\nu\rho} = 2\mathcal{J}^\nu f_{\nu\rho}, \end{aligned} \quad (\text{C.96})$$

lembrando que estamos *on-shell*,

$$\begin{aligned} & \partial_\mu \left(2f^{\mu\nu} f_{\nu\rho} + 2(\partial^\mu a)(\partial_\rho a) - 2\text{Ga}\tilde{F}_B^{\mu\nu} f_{\nu\rho} - 2\text{G}'a\tilde{F}_B^{\mu\nu} F'_{\nu\rho} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2}\delta^\mu{}_\rho f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} - \delta^\mu{}_\rho \left((\partial^\mu a)(\partial_\mu a) - m_a^2 a^2 + \text{Ga}\tilde{F}_B^{\mu\nu} f_{\mu\nu} + \text{G}'a\tilde{F}_B^{\mu\nu} F'_{\mu\nu} \right) \right) + \\ & \quad + \partial_\mu \left(2F'^{\mu\nu} F'_{\nu\rho} + \frac{1}{2}\delta^\mu{}_\rho F'^{\alpha\beta} F'_{\alpha\beta} + 2m_{\gamma'}^2 A'^\mu A'_\rho - \delta^\mu{}_\rho m_{\gamma'}^2 A'^\nu A'_\nu \right) = 2\mathcal{J}^\nu f_{\nu\rho} + 2\mathcal{J}'^\nu F'_{\nu\rho}, \end{aligned} \quad (\text{C.97})$$

simplificando

$$\begin{aligned} & \partial_\mu \left[f^{\mu\nu} f_{\nu\rho} + F'^{\mu\nu} F'_{\nu\rho} + m_{\gamma'}^2 A'^\mu A'_\rho + (\partial^\mu a)(\partial_\rho a) - \text{Ga}\tilde{F}_B^{\mu\nu} f_{\nu\rho} - \text{G}'a\tilde{F}_B^{\mu\nu} F'_{\nu\rho} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{4}\delta^\mu{}_\rho \left(f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} + F'^{\alpha\beta} F'_{\alpha\beta} - 2m_{\gamma'}^2 A'^\nu A'_\nu - 2(\partial^\mu a)(\partial_\mu a) + 2m_a^2 a^2 - 2\text{Ga}\tilde{F}_B^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} - 2\text{G}'a\tilde{F}_B^{\alpha\beta} F'_{\alpha\beta} \right) \right] \\ & \quad = \mathcal{J}^\nu f_{\nu\rho} + \mathcal{J}'^\nu F'_{\nu\rho}. \end{aligned} \quad (\text{C.98})$$

Dessa equação lemos o tensor energia-momento

$$\begin{aligned} T^\mu{}_\rho &= f^{\mu\nu} f_{\nu\rho} + F'^{\mu\nu} F'_{\nu\rho} + m_{\gamma'}^2 A'^\mu A'_\rho + (\partial^\mu a)(\partial_\rho a) - \text{Ga}\tilde{F}_B^{\mu\nu} f_{\nu\rho} - \text{G}'a\tilde{F}_B^{\mu\nu} F'_{\nu\rho} + \\ & \quad + \frac{1}{4}\delta^\mu{}_\rho \left(f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} + F'^{\alpha\beta} F'_{\alpha\beta} - 2m_{\gamma'}^2 A'^\nu A'_\nu - 2(\partial^\mu a)(\partial_\mu a) + 2m_a^2 a^2 - 2\text{Ga}\tilde{F}_B^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} - 2\text{G}'a\tilde{F}_B^{\alpha\beta} F'_{\alpha\beta} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.99})$$

Esse tensor pode ser decomposto na soma

$$T^\mu{}_\rho = (T_\gamma)^\mu{}_\rho + (T_{\gamma'})^\mu{}_\rho + (T_a)^\mu{}_\rho + (T_{a\gamma\gamma})^\mu{}_\rho + (T_{a\gamma\gamma'})^\mu{}_\rho, \quad (\text{C.100})$$

onde $(T_\gamma)^\mu$, $(T_{\gamma'})^\mu$ e $(T_a)^\mu$ são dados por (C.81), (C.82) e (C.83) respectivamente, e

$$(T_{a\gamma\gamma})^\mu{}_\rho = \mathbf{G} a \tilde{f}^{\mu\nu} F_{B\nu\rho}, \quad (\text{C.101})$$

e

$$(T_{a\gamma\gamma'})^\mu{}_\rho = \mathbf{G}' a \tilde{F}'^{\mu\nu} F_{B\nu\rho}. \quad (\text{C.102})$$

Apêndice D

Como Contar Graus de Liberdade em uma Teoria de Calibre Abelianiana

De partida, teremos um número de graus de liberdade maior do que aqueles que são físicos. Usamos a invariância de calibre e as equações de movimento para restringir os graus de liberdade àqueles que são físicos. Vamos exemplificar o procedimento via Eletromagnetismo usual, mas o procedimento é válido para qualquer teoria.

As equações de movimento para o eletromagnetismo, no vácuo, são dadas por

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (\text{D.1})$$

onde $F^{\mu\nu}$ é o tensor eletromagnético, dado por

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (\text{D.2})$$

com o campo eletromagnético dado por

$$A^\mu = (\phi, \mathbf{A}). \quad (\text{D.3})$$

Sabendo que o eletromagnetismo é invariante perante uma transformação de calibre dada por

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha, \quad (\text{D.4})$$

ou,

$$A_\mu = A'_\mu - \partial_\mu \alpha. \quad (\text{D.5})$$

No espaço dos *momenta* temos

$$\tilde{A}'_\mu(p) = \tilde{A}_\mu(p) + ip_\mu \tilde{\alpha}(p), \quad (\text{D.6})$$

onde $\tilde{\alpha}$ é um parâmetro complexo e arbitrário. Dessa forma, explicitamente, teremos a equação de movimento escrita como

$$\square A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0. \quad (\text{D.7})$$

No espaço dos *momenta* temos

$$-p^2 \tilde{A}^\nu(p) + p^\nu p_\mu \tilde{A}^\mu(p) = 0. \quad (\text{D.8})$$

Podemos expressar o campo \tilde{A}^μ em termos de uma base de quatro vetores linearmente independentes

$$k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k} \right), \quad (\text{D.9})$$

$$\bar{k}^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, -\mathbf{k} \right), \quad (\text{D.10})$$

$$\varepsilon_I^\mu(k) = (0, \boldsymbol{\varepsilon}_I); \quad I = 1, 2. \quad (\text{D.11})$$

O produto escalar $\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_I = 0$. Expandindo o campo \tilde{A}^μ nessa base, obtemos

$$\tilde{A}^\mu(p) = ap^\mu + b\bar{p}^\mu + c_I \varepsilon_I^\mu(\mathbf{p}). \quad (\text{D.12})$$

Levando essa expansão na expressão (D.6), vem que

$$\begin{aligned} a'p^\mu + b'\bar{p}^\mu + c'_I \varepsilon_I^\mu(\mathbf{p}) &= ap^\mu + b\bar{p}^\mu + c_I \varepsilon_I^\mu(\mathbf{p}) + ip^\mu \tilde{\alpha}(p) \\ &= (a + i\tilde{\alpha})p^\mu + b\bar{p}^\mu + c_I \varepsilon_I^\mu(\mathbf{p}). \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

Vamos calibrar nossa teoria de maneira que $a + i\tilde{\alpha} = 0$, ou seja, $\tilde{\alpha} = ia$. Nos resta então que

$$\tilde{A}^\mu(p) = b\bar{p}^\mu + c_I \varepsilon_I^\mu(\mathbf{p}). \quad (\text{D.14})$$

Ou seja, olhando apenas para a simetria de calibre nos restam três graus de liberdade para o eletromagnetismo. Um desses graus é um grau de liberdade virtual. Vamos ser capazes de reduzir nossa teoria aos graus de liberdade reais quando estivermos *on-shell*. Para isso, substituímos o campo escrito na forma (D.14) na equação de movimento, obtendo dessa forma

$$p^2(b\bar{p}^\nu + c_I \varepsilon_I^\nu(\mathbf{p})) - p^\nu p_\mu (b\bar{p}^\mu + c_I \varepsilon_I^\mu(\mathbf{p})) = 0, \quad (\text{D.15})$$

abrindo os produtos

$$bp^2\bar{p}^\nu + c_I p^2 \varepsilon_I^\nu(\mathbf{p}) - bp^\nu(p \cdot \bar{p}) - c_I p^\nu(p \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_I(\mathbf{p})) = 0. \quad (\text{D.16})$$

O produto escalar $(p \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_I)$ é explicitamente igual a zero,

$$\boldsymbol{\varepsilon}_I \cdot p = \varepsilon_I^\mu p_\mu = 0p_0 - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_I = 0. \quad (\text{D.17})$$

Já o produto escalar $p \cdot \bar{p}$ tem a forma

$$p \cdot \bar{p} = p^\mu \bar{p}_\mu = p^0 \bar{p}_0 + p^i \bar{p}_i = (p^0)^2 + (\mathbf{p})^2. \quad (\text{D.18})$$

Levando isso em consideração e lembrando que $p^2 = (p^0)^2 - (\mathbf{p})^2$, resta que

$$b(p^0)^2 \bar{p}^\nu - b(\mathbf{p})^2 \bar{p}^\nu + c_I p^2 \varepsilon_I^\nu(\mathbf{p}) - b p^\nu (p^0)^2 - b p^\nu (\mathbf{p})^2 = 0. \quad (\text{D.19})$$

Na componente $\mu = 0$, a equação (D.19) se reduz a

$$b(p^0)^2 \bar{p}^0 - b(\mathbf{p})^2 \bar{p}^0 + c_I p^2 \varepsilon_I^0(\mathbf{p}) - b p^0 (p^0)^2 - b p^0 (\mathbf{p})^2 = 0, \quad (\text{D.20})$$

portanto

$$-b(\mathbf{p})^2 p^0 - b p^0 (\mathbf{p})^2 = 0, \quad (\text{D.21})$$

dessa forma, resta que

$$-b = b, \quad (\text{D.22})$$

ou seja, b é identicamente nulo. Agora, para a componente $\mu = i$, observamos que

$$c_I p^2 \varepsilon_I^i(\mathbf{p}) = 0, \quad (\text{D.23})$$

então

$$c_I (p^0)^2 \varepsilon_I(\mathbf{p}) = c_I (\mathbf{p})^2 \varepsilon_I(\mathbf{p}). \quad (\text{D.24})$$

Fazendo esse procedimento, de explorar a simetria de calibre e depois impor as equações de movimento, restam apenas os graus de liberdade físicos da nossa teoria, ou seja, o campo do fóton é fisicamente descrito por

$$\tilde{A}^\mu(p) = c_I \varepsilon_I^\mu(\mathbf{p}), \quad (\text{D.25})$$

que são os dois modos transversais de polarização carregados pelo campo elétrico.

Apêndice E

Inversão de Matrizes em Blocos

De maneira geral, para inverter uma matriz que possa ser escrita em uma estrutura por blocos, precisamos que os blocos da diagonal sejam quadrados e eles próprios inversíveis. Uma vez que os critérios anteriores são satisfeitos, propomos uma matriz inversa que respeite a mesma forma em blocos e, fazemos o produto entre a matriz de partida e a matriz proposta, onde esse produto deve ser igual a identidade construída na mesma forma por blocos que a matriz a ser invertida. Dessa maneira, escrevemos um sistema de equações matriciais, que devem ser trabalhadas afim de obtermos os blocos da nossa matriz inversa. Em geral, o resultado resume-se a inverter alguns dos blocos de partida, ou o produto de alguns dos blocos de partida e alguns produtos matriciais simples. Essa técnica é particularmente útil para lidar com matrizes de dimensão muito alta, que podem ser fragmentadas em blocos, facilitando o processo de inversão. É sempre útil estar atento a propriedades de simetria da sua matriz de partida, pois elas podem ser utilizadas para facilitar a obtenção dos resultados.

Quando lidamos com matrizes de mistura, como as matrizes dadas em (4.6), (4.16) e (4.28), utilizar a estratégia da inversão por blocos é uma escolha bastante razoável, uma vez que são matrizes de dimensões mais altas e são naturalmente estruturadas em blocos, onde já conhecemos a inversa dos blocos das diagonais.

No caso da matriz para a ED Axiônica, (4.6), nós temos uma matriz 5×5 escrita na forma de uma matriz 2×2 em blocos, de forma que

$$M = \begin{pmatrix} A_{4 \times 4} & B_{4 \times 1} \\ C_{1 \times 4} & D_{1 \times 1} \end{pmatrix}.$$

Para inverter essa matriz fazemos o produto

$$\begin{pmatrix} A_{4 \times 4} & B_{4 \times 1} \\ C_{1 \times 4} & D_{1 \times 1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{4 \times 4} & F_{4 \times 1} \\ G_{1 \times 4} & H_{1 \times 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_4 & 0_{4 \times 1} \\ 0_{1 \times 4} & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{E.1})$$

onde, explicitamente,

$$\begin{aligned} AE + BG &= 1_4, \\ AF + BH &= 0_{4 \times 1}, \\ CE + DG &= 0_{1 \times 4}, \\ CF + DH &= 1. \end{aligned}$$

Trabalhando o sistema de equações obtemos

$$E = (AD - BC)^{-1}D, \quad (\text{E.2})$$

$$G = -C(AD - BC)^{-1}, \quad (\text{E.3})$$

$$H = (D - CA^{-1}B)^{-1}, \quad (\text{E.4})$$

e,

$$F = -A^{-1}BD^{-1}(1 - CA^{-1}BD^{-1})^{-1}. \quad (\text{E.5})$$

Podemos simplificar a expressão de F , fazendo uma expansão em série geométrica, lembrando que

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

então

$$F = -A^{-1}BD^{-1}(1 + CA^{-1}BD^{-1} + CA^{-1}BD^{-1}CA^{-1}BD^{-1} + \dots),$$

fazendo o produto,

$$F = -(A^{-1}BD^{-1} + A^{-1}BD^{-1}CA^{-1}BD^{-1} + A^{-1}BD^{-1}CA^{-1}BD^{-1}CA^{-1}BD^{-1} + \dots),$$

colocando $A^{-1}BD^{-1}$ em evidência, pelo lado direito, vem que

$$F = -(1 + A^{-1}BD^{-1}C + A^{-1}BD^{-1}CA^{-1}BD^{-1}C + \dots)A^{-1}BD^{-1},$$

desfazendo a expansão,

$$F = -(1 - A^{-1}BD^{-1}C)^{-1}A^{-1}BD^{-1},$$

tirando A^{-1} e D^{-1} em evidência pelo lado esquerdo,

$$F = -(AD - BC)^{-1}B. \quad (\text{E.6})$$

Observando a matriz (4.6), também podemos perceber que $A^T = A$, ou seja, A é uma matriz simétrica, e $C = -B^T$. Usando dessas propriedades, concluímos que nossa matriz inversa

deve carregar as mesmas propriedades de simetria que a nossa matriz original, uma vez que $E^T = E$, e

$$G^T = \frac{1}{D} [B^T E]^T = \frac{1}{D} EB,$$

ou seja, $F = -G^T$.

Dado o resultado do procedimento de inversão por blocos, as únicas inversas que precisamos de fato calcular são dadas pelas estruturas

$$E = - \left(k^2(k^2 - \xi)\eta_{\mu\nu} + \chi(k^2 - \xi)k_\mu k_\nu + \frac{1}{\mu_0}(G_{a\gamma\gamma})^2 L_\mu L_\nu \right)^{-1}, \quad (\text{E.7})$$

e

$$H = \left((k^2 - \xi) - \frac{1}{\mu_0}(G_{a\gamma\gamma})^2 L_\mu A^{-1} L_\nu \right)^{-1}, \quad (\text{E.8})$$

mas H é um número, então sua inversa é trivial. Dessa forma, resta apenas a inversa de A em H , mas a inversa de A é o operador que nos dá o propagador usual do Fóton. Ou seja,

$$A^{-1} = -\frac{\eta_{\mu\nu}}{k^2} - (\alpha - 1)\frac{k_\mu k_\nu}{k^4}. \quad (\text{E.9})$$

Nesse caso, H se reduz a

$$H = \frac{k^2}{\Delta}, \quad (\text{E.10})$$

lembrando que Δ é a relação de dispersão comum aos campos do Axion e do Fóton quando misturados e, sua forma é dada por

$$\Delta = k^2(k^2 - \xi) + \frac{1}{\mu_0}(G_{a\gamma\gamma})^2 L^2.$$

Já no caso das matrizes (4.16) e (4.28), estamos lidando com matrizes 9×9 , que podem ser escritas na forma de uma matriz 3×3 em uma estrutura por blocos,

$$M_{m,\gamma'} \sim M' \sim \begin{pmatrix} A_{4 \times 4} & B_{4 \times 4} & C_{4 \times 1} \\ D_{4 \times 4} & E_{4 \times 4} & F_{4 \times 1} \\ G_{1 \times 4} & H_{1 \times 4} & I_{1 \times 1} \end{pmatrix}.$$

Para inverter essa matriz consideramos o produto

$$\begin{pmatrix} A_{4 \times 4} & B_{4 \times 4} & C_{4 \times 1} \\ D_{4 \times 4} & E_{4 \times 4} & F_{4 \times 1} \\ G_{1 \times 4} & H_{1 \times 4} & I_{1 \times 1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{4 \times 4} & K_{4 \times 4} & L_{4 \times 1} \\ M_{4 \times 4} & N_{4 \times 4} & O_{4 \times 1} \\ P_{1 \times 4} & Q_{1 \times 4} & R_{1 \times 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_4 & 0_4 & 0_{4 \times 1} \\ 0_4 & 1_4 & 0_{4 \times 1} \\ 0_{1 \times 4} & 0_{1 \times 4} & 1 \end{pmatrix},$$

onde, explicitamente,

$$\begin{pmatrix} AJ+BM+CP & AK+BN+CQ & AL+BO+CR \\ DJ+EM+FP & DK+EN+FQ & DL+EO+FR \\ GJ+HM+IP & GK+HN+iQ & GL+HO+IR \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_4 & 0_4 & 0_{4 \times 1} \\ 0_4 & 1_4 & 0_{4 \times 1} \\ 0_{1 \times 4} & 0_{1 \times 4} & 1 \end{pmatrix}.$$

Trabalhando o sistema de equações obtemos

$$J = (IA - CG - (BI - CH)\mathbb{X}(ID - FG))^{-1}I, \quad (\text{E.11})$$

$$M = -\mathbb{X}(ID - FG)J, \quad (\text{E.12})$$

$$P = H\mathbb{X}(ID - FG)JI^{-1} - GJI^{-1}, \quad (\text{E.13})$$

$$K = -J(BI - CH)\mathbb{X}, \quad (\text{E.14})$$

$$N = I\mathbb{X} + \mathbb{X}(ID - FG)J(BI - CH)\mathbb{X}, \quad (\text{E.15})$$

$$Q = GJI^{-1}(BI - CH)\mathbb{X} - H\mathbb{X} - H\mathbb{X}(ID - FG)JI^{-1}(BI - CH)\mathbb{X}, \quad (\text{E.16})$$

$$L = -JI^{-1}C + JI^{-1}(BI - CH)\mathbb{X}F, \quad (\text{E.17})$$

$$O = -\mathbb{X}\left(F - (ID - FG)JI^{-1}C + (ID - FG)JI^{-1}(BI - CH)\mathbb{X}F\right), \quad (\text{E.18})$$

$$R = I^{-1} + I^{-1}H\mathbb{X}F - I^{-1}(G - H\mathbb{X}(ID - FG))L, \quad (\text{E.19})$$

onde

$$\mathbb{X} = (IE - FH)^{-1}. \quad (\text{E.20})$$

Nesse caso, as estruturas a serem invertidas são dadas por

$$(\mathbb{X}_{m_{\gamma'}})^{\mu\nu} = -((k^2 - m_{\gamma'}^2)(k^2 - m_a^2)\eta_{\mu\nu} - (k^2 - m_a^2)k_\mu k_\nu + \mathbf{G}^{\prime 2}L_\mu L_\nu)^{-1}, \quad (\text{E.21})$$

no caso do Fóton Escuro massivo e,

$$\mathbb{X}^{\mu\nu} = -(k^2(k^2 - m_a^2)\eta_{\mu\nu} + \chi'(k^2 - m_a^2)k_\mu k_\nu + \mathbf{G}^{\prime 2}L_\mu L_\nu)^{-1}, \quad (\text{E.22})$$

para o Fóton Escuro sem massa. Além da estrutura,

$$\begin{aligned} (J_{m'})^{\mu\nu} = & -(k^2 - m_a^2) \left[k^2(k^2 - m_a^2)\eta_{\mu\nu} + \chi(k^2 - m_a^2)k_\mu k_\nu + \mathbf{G}^2 L_\mu L_\nu + \right. \\ & \left. - \mathbf{G}^2 \mathbf{G}^{\prime 2} L_\mu L_\rho \left((k^2 - m_a^2)(k^2 - m_{\gamma'}^2)\eta_{\rho\lambda} - (k^2 - m_a^2)k_\rho k_\lambda + \mathbf{G}^{\prime 2} L_\rho L_\lambda \right)^{-1} L_\lambda L_\nu \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{E.23})$$

para o caso massivo e,

$$\begin{aligned} J^{\mu\nu} = & (k^2 - m_a^2) \left[-k^2(k^2 - m_a^2)\eta_{\mu\nu} - \chi(k^2 - m_a^2)k_\mu k_\nu - \mathbf{G}^2 L_\mu L_\nu + \right. \\ & \left. + \mathbf{G}^2 \mathbf{G}^{\prime 2} L_\mu L_\rho \left(k^2(k^2 - m_a^2)\eta_{\rho\lambda} + \chi'(k^2 - m_a^2)k_\rho k_\lambda + \mathbf{G}^{\prime 2} L_\rho L_\lambda \right)^{-1} L_\lambda L_\nu \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (\text{E.24})$$

para o caso sem massa. A inversa de I é imediata, uma vez que trata-se do operador que dá origem ao propagador de um escalar real massivo, nesse caso o Axion, com esse operador sendo dado por

$$I^{-1} = \frac{1}{k^2 - m_a^2}. \quad (\text{E.25})$$

Podemos observar que tanto a estrutura (E.7) quanto as estruturas (E.21) e (E.22), a menos de coeficientes, tem a forma

$$Y_{\mu\nu} = \alpha\eta_{\mu\nu} + \beta k_\mu k_\nu + \gamma L_\mu L_\nu. \quad (\text{E.26})$$

Nesse caso, a forma geral da inversa da matriz (E.26) é dada por

$$(Y^{-1})^{\nu\rho} = x\eta^{\nu\rho} + yk^\nu k^\rho + zL^\nu L^\rho + rk^\nu L^\rho + sk^\rho L^\nu. \quad (\text{E.27})$$

Uma vez que $Y_{\mu\nu}(Y^{-1})^{\nu\rho} = \delta_\mu^\rho$, nós obtemos o sistema,

$$\begin{aligned} \alpha x &= 1, \\ \alpha y + \beta x + \beta y k^2 + \beta s(k \cdot L) &= 0, \\ \alpha z + \gamma x + \gamma z L^2 + \gamma r(k \cdot L) &= 0, \\ \alpha r + \beta r k^2 + \beta z(k \cdot L) &= 0, \\ \alpha s + \gamma s L^2 + \gamma y(k \cdot L) &= 0, \end{aligned}$$

de onde vem que,

$$x = \frac{1}{\alpha}, \quad (\text{E.28})$$

$$y = -\frac{\beta(\alpha + L^2\gamma)}{\alpha(\alpha^2 + \alpha k^2\beta + \alpha L^2\gamma - (k \cdot L)^2\beta\gamma + k^2L^2\beta\gamma)}, \quad (\text{E.29})$$

$$z = -\frac{\gamma(\alpha + k^2\beta)}{\alpha(\alpha^2 + \alpha k^2\beta + \alpha L^2\gamma - (k \cdot L)^2\beta\gamma + k^2L^2\beta\gamma)}, \quad (\text{E.30})$$

$$r = \frac{(k \cdot L)\beta\gamma}{\alpha(\alpha^2 + \alpha k^2\beta + \alpha L^2\gamma - (k \cdot L)^2\beta\gamma + k^2L^2\beta\gamma)}, \quad (\text{E.31})$$

$$s = \frac{(k \cdot L)\beta\gamma}{\alpha(\alpha^2 + \alpha k^2\beta + \alpha L^2\gamma - (k \cdot L)^2\beta\gamma + k^2L^2\beta\gamma)}. \quad (\text{E.32})$$

Contudo, dada a definição de L_μ em (4.4), o produto $(k \cdot L)$ é igual a zero, uma vez que trata-se da contração de um objeto simétrico com um antissimétrico. Dessa forma, simplificando o conjunto de equações que é solução do nosso sistema, obtemos

$$x = \frac{1}{\alpha}, \quad (\text{E.33})$$

$$y = -\frac{\beta}{\alpha(\alpha + k^2\beta)}, \quad (\text{E.34})$$

$$z = -\frac{\gamma}{\alpha(\alpha + L^2\gamma)}, \quad (\text{E.35})$$

$$r = s = 0. \quad (\text{E.36})$$

Dessa forma, a inversa de (E.26) fica completamente determinada por

$$(Y^{-1})^{\nu\rho} = \frac{1}{\alpha}\eta^{\nu\rho} - \frac{\beta}{\alpha(\alpha + k^2\beta)}k^\nu k^\rho - \frac{\gamma}{\alpha(\alpha + L^2\gamma)}L^\nu L^\rho. \quad (\text{E.37})$$

Substituindo os resultados das inversas de (E.21) e (E.22) em (E.23) e (E.24), respectivamente, chegamos novamente em uma estrutura do tipo (E.26), cuja a inversa (E.37) agora já é conhecida. Dessa forma, as inversas das matrizes de mistura (4.6), (4.16) e (4.28), estão completamente determinadas a menos de produtos matriciais simples.

Referências

- [1] J. G. de Swart, G. Bertone e J. van Dongen, *How dark matter came to matter*, Nature **1**, 0059 (2017).
- [2] D. Huterer e D. L Shafer, *Dark energy two decades after: Observables, probes, consistency tests*, Rep. Prog. Phys. **81**, 016901 (2018).
- [3] W. Buchmuller, R. D. Peccei e T. Yanagida, *Leptogenesis as the origin of matter*, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **55**, 311 (2005).
- [4] D. S. Pereira, J. Ferraz, F. S. N. Lobo e J. P. Mimoso, *Baryogenesis: A Symmetry Breaking in the Primordial Universe Revisited*, Symmetry **16**, 13 (2024).
- [5] M. E. Peskin, *What is the Hierarchy Problem?*, Nucl. Phys. B **1018**, 116971 (2025).
- [6] J. M. A. Paixão, L. P. R. Ospedal, M. J. Neves e J. A. Helayël-Neto, *The axion-photon mixing in non-linear electrodynamic scenarios*, JHEP **10**, 160 (2022).
- [7] J. M. A. Paixão, L. P. R. Ospedal, M. J. Neves e J. A. Helayël-Neto, *Probing the interference between non-linear, axionic and space-time-anisotropy effects in the QED vacuum*, JHEP **05**, 029 (2024).
- [8] R. D. Peccei e H. R. Quinn, *CP Conservation in the Presence of Pseudoparticles*, Phys. Rev. Lett. **38**, 1440 (1977).
- [9] R. D. Peccei e H. R. Quinn, *Constraints imposed by CP conservation in the presence of pseudoparticles*, Phys. Rev. D. **16**, 1791 (1977).
- [10] G. 't Hooft, *Computation of the quantum effects due to a four-dimensional pseudoparticle*, Phys. Rev. D **14**, 3432 (1976); *Erratum* Phys. Rev. D **18**, 2199 (1978).
- [11] M. Pospelov e A. Ritz, *Electric dipole moments as probes of new physics*, Annals Phys. **318**, 119–169 (2005).

- [12] V. Baluni, *CP-nonconserving effects in quantum chromodynamics*, Phys. Rev. D **19**, 2227 (1979).
- [13] R. J. Crewther, P. Di Vecchia, G. Veneziano e E. Witten, *Chiral estimate of the electric dipole moment of the neutron in quantum chromodynamics*, Phys. Lett. B **88**, 123 (1979); *Erratum* Phys. Lett. B **91**, 487(E) (1980).
- [14] C. Abel *et al.*, *Measurement of the permanent electric dipole moment of the neutron*, Phys. Rev. Lett. **124**, 081803 (2020).
- [15] S. Weinberg, *A New Light Boson?*, Phys. Rev. Lett. **40**, 223 (1978).
- [16] F. Wilczek, *Problem of Strong P and T Invariance in the Presence of Instantons*, Phys. Rev. Lett. **40**, 279 (1978).
- [17] G.G. di Cortona, E. Hardy, J.P. Vega e G. Villadoro, *The QCD axion, precisely*, JHEP **01**, 034 (2016).
- [18] A. Smailagic e E. Spallucci, *The Dual phases of massless/massive Kalb-Ramond fields: Letter to the editor*, J. Phys. A **34**, L435 (2001).
- [19] P. Svrček e E. Witten, *Axions In String Theory*, JHEP **06**, 051 (2006).
- [20] K.-S. Choi, H.P. Nilles, S. Ramos-Sanchez e P.K.S. Vaudrevange, *Accions*, Phys. Lett. B **675**, 381 (2009).
- [21] J. Halverson, C. Long e P. Nath, *An Ultralight Axion in Supersymmetry and Strings and Cosmology at Small Scales*, Phys. Rev. D **96**, 056025 (2017).
- [22] M. Demirtas, C. Long, L. McAllister e M. Stillman, *The Kreuzer-Skarke Axiverse*, arXiv:1808.01282 [**hep-th**].
- [23] A. Dashko e R. Dick, *The shadow of dark matter as a shadow of string theory*, Eur. Phys. J. C **79**, 312 (2019).
- [24] A. Hell, *On the duality of massive Kalb-Ramond and Proca fields*, JCAP **01**, 056 (2022).
- [25] A.J. Magnus, J.G. Fenwick e R. Dick, *Antisymmetric tensor portals to dark matter*, J. Subatomic Part. Cosmol. **3**, 100022 (2025).
- [26] P. W. Graham, I. G. Irastorza, S. K. Lamoreaux, A. Lindner e K. A. van Bibber, *Experimental Searches for the Axion and Axion-Like Particles*, Ann. Rev. Nucl. Phys. Sci. **65**, 485 (2015).
- [27] J. Jaeckel e A. Ringwald, *The Low-Energy Frontier of Particle Physics*, Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. **60**, 405 (2010).

- [28] A. Ringwald, *Exploring the Role of Axions and Other WISPs in the Dark Universe*, arXiv:1210.5081v2 [**hep-ph**].
- [29] P. Arias, D. Cadamuro, M. Goodsell, J. Jaeckel, J. Redondo e A. Ringwald, *WISPy Cold Dark Matter*, JCAP **06**, 013 (2012).
- [30] F. Chadha-Day, J. Ellis e D.J.E. Marsh, *Axion Dark Matter: What is it and Why Now?*, arXiv:2105.01406 [**hep-ph**].
- [31] S. Navas *et al.*, *Particle Data Group*, Phys. Rev. D **110**, 030001 (2024); veja Seção 27 *Dark Matter*; veja Seção 90. *Axions and Other Similar Particles*.
- [32] C.A.J. O'Hare, *Axion-photon coupling: Data, plots and code for constraints on axions, axion-like particles, and dark photons*, Disponível em: <https://cajohare.github.io/AxionLimits/docs/ap.html>.
- [33] P. Sikivie, *Experimental Tests of the Invisible Axion*, Phys. Rev. Lett. **51**, 1415 (1983); Erratum Phys. Rev. Lett. **52**, 695 (1984).
- [34] P. Sikivie, *Invisible axion search methods*, Rev. Mod. Phys. **93**, 1 (2021).
- [35] K. Choi, S.H. Im e C.S. Shin, *Recent Progress in the Physics of Axions and Axion-Like Particles*, Ann. Rev. Nucl. Phys. Sci. **71**, 225 (2021).
- [36] D. Salnikov, P. Satunin e D.V. Kirpichnikov, *Probing axion-like particles with RF cavities separated by thin barrier*, arXiv:2405.04983v2 [**hep-ph**].
- [37] W. DeRocco, S. Wegsman, B. Grefenstette, J. Huang e K.V. Tilburg, *First Indirect Detection Constraints on Axions in the Solar Basin*, Phys. Rev. Lett. **129**, 101101 (2022).
- [38] A. Arvanitaki, J. Engel, A.A. Geraci, A. Madden, A. Hepburn e K.V. Tilburg, *The Ferroaxionic Force*, arXiv:2411.10516 [**hep-ph**].
- [39] A. Arvanitaki, A. Madden e K.V. Tilburg, *The Piezoaxionic Effect*, Phys. Rev. D **109**, 072009 (2024).
- [40] O. Ning e B.R. Safdi, *Leading Axion-Photon Sensitivity with NuSTAR Observations of M82 and M87*, Phys. Rev. Lett. **134**, 171003 (2025).
- [41] F. Wilczek, *Two applications of axion electrodynamics*, Phys. Rev. Lett. **58**, 1799 (1987).
- [42] D. M. Nenno, C. A. C. Garcia, J. Gooth, C. Felser e P. Narang, *Axion physics in condensed-matter systems*, Nature Rev. Phys. **2**, 682 (2020).
- [43] A. Sekine e K. Nomura, *Axion electrodynamics in topological materials*, J. Appl. Phys. **129**, 141101 (2021).

- [44] J. Planelles, *Axion Electrodynamics in Topological Insulators for beginners*, arXiv:2111.07290v5 [**cond-mat.mes-hall**].
- [45] L. Shaposhnikov, M. Mazanov, D.A. Bobylev, F. Wilczek e M.A. Gorlach, *Emergent axion response in multilayered metamaterials*, Phys. Rev. B **108**, 115101 (2023).
- [46] V. Shyta, J. van den Brink e F.S. Nogueira, *Axion electrodynamics of Weyl superconductors with broken time-reversal symmetry*, arXiv:2506.17100 [**cond-mat.supr-con**].
- [47] P. Fayet, *Effects of the Spin 1 partner of the Goldstino (Gravitino) on neutral current phe-nomenology*, Phys. Lett. B **95**, 285–289 (1980).
- [48] P. Fayet, *On the search for a new Spin 1 Boson*, Nucl. Phys. B **187**, 184–204 (1981).
- [49] M. Fabbrichesi, E. Gabrielli, G. Lanfranchi *The Physics of the Dark Photon: A Primer*, (SpringerBriefs in Physics, 2021).
- [50] Y. Hochberg, Y.F. Kahn, R.K. Leane, S. Rajendran, K.V. Tilburg, T.-T. Yu e K.M. Zurek, *New approaches to dark matter detection*, Nature Rev. Phys. **4**, 637 (2022).
- [51] J.M. Cline, *Status of Dark Photons*, arXiv:2405.08534 [**hep-ph**].
- [52] G. Raffelt e L. Stodolsky, *Mixing of the photon with low-mass particles*, Phys. Rev. D **37**, 1237 (1988).
- [53] K. Kaneta, H.-S. Lee, S. Yun, *Portal Connecting Dark Photons and Axions*, Phys. Rev. Lett. **118**, 101802 (2017).
- [54] F.P. Huang e H.-S. Lee, *Extension of the electrodynamics in the presence of the Axion and Dark Photon*, Int. J. Mod. Phys. A **34**, 1950012 (2019).
- [55] K. Choi, S. Lee, H. Seong e S. Yun, *Gamma-ray spectral modulations induced by photon-ALP-dark photon oscillations*, Phys. Rev. D **101**, 043007 (2020).
- [56] P. Arias, A. Arza, J. Jaecke e D. Vargas-Arancibia, *Hidden Photon Dark Matter Interacting via Axion-like Particles*, JCAP **05**, 070 (2021).
- [57] C.A.J. O’Hare, *Dark photon limits: Data, plots and code for constraints on axions, axion-like particles, and dark photons*, Disponível em: <https://cajohare.github.io/AxionLimits/docs/dp.html>.
- [58] L. B. Okun, *Limits of electrodynamics: paraphotons?*, Sov. Phys. JETP **56**, 502 (1982); Zh. Eksp. Teor. Fiz. **83**, 892 (1982).
- [59] J. Jaeckel, *A force beyond the Standard Model - Status of the quest for hidden photons*, arXiv:1303.1821 [**hep-ph**].

- [60] A. Caputo, A.J. Millar, C.A.J. O'Hare e E. Vitagliano, *Dark photon limits: a handbook*, Phys. Rev. D **104**, 095029 (2021).
- [61] M. Graham, C. Hearty e M. Williams, *Searches for Dark Photons at Accelerators*, Ann. Rev. Nucl. Phys. Sci. **71**, 37 (2021).
- [62] R. Lasenby e K.V. Tilburg, *Dark Photons in the Solar Basin*, Phys. Rev. D **104**, 023020 (2021).
- [63] J. Chiles *et al.*, *New Constraints on Dark Photon Dark Matter with Superconducting Nanowire Detectors in an Optical Haloscope*, Phys. Rev. Lett. **128**, 231802 (2022).
- [64] J. De Miguel *et al.*, *Discovery prospects with the Dark-photons & Axion-Like particles Interferometer*, Phys. Rev. D **109**, 062002 (2024).
- [65] Y. Kyselov e M. Ovchinnikov, *Searches for long-lived dark photons at proton accelerator experiments*, Phys. Rev. D **111**, 015030 (2025).
- [66] A. Berlin e Y. Kahn, *New Technologies for Axion and Dark Photon Searches*, Ann. Rev. Nucl. Phys. Sci. **75**, 83 (2025).
- [67] P.C. Malta, J.P.S. Melo e C.A.D. Zarro, *Experimental signatures of Kalb-Ramond-like particles*, J. High Energ. Phys. **2025**, 93 (2025).
- [68] A.W. Thomas, X.G. Wang e A.G. Williams, *Constraints on the dark photon from deep inelastic scattering*, Phys. Rev. D **105**, L031901 (2022).
- [69] N.T. Hunt-Smith, W. Melnitchouk, N. Sato, A.W. Thomas, X.G. Wang e M.J. White on behalf of the Jefferson Lab Angular Momentum (JAM) collaboration, *Global QCD analysis and dark photons*, J. High Energ. Phys. **2023**, 96 (2023).
- [70] X.G. Wang e A.W. Thomas, *Evidence for and implications of a dark photon*, PoS HADRONS2025, 180 (2025), arXiv:2506.21854 [**hep-ph**].
- [71] OSQAR Collaboration, *New Exclusion Limits for the Search of Scalar and Pseudoscalar Axion-Like Particles from "Light Shining Through a Wall"*, Phys. Rev. D **92**, 092002 (2015).
- [72] S. Weinberg, *Phenomenological Lagrangians*, Physica **96A**, 327 (1979).
- [73] L. Visinelli, *Axion-Electromagnetic Waves*, Mod. Phys. Lett. A **28**, 1350162 (2013).
- [74] W. Greiner e J. Reinhardt, *Field Quantization*, (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1996).
- [75] E. Noether, *Inavriante Variationsprobleme*, Math. Phys. Klasse **235**, (1918).
- [76] R. Areas, M.C. Barbosa e A.E. Santana, *Teorema de Emmy Nöther, 100 anos: Alegoria da Misoginia em Ciência*, Rev. Bras. Ens. Fis. **41**, e20190017 (2019).

- [77] I.F. da Silva e A.M.M. Assis, *O Movimento Histórico da Vida de Emmy Noether*, Rev. Bras. Hist. Mat. **22**, 25-44 (2022).
- [78] S.M. Carroll, G.B. Field and R. Jackiw, *Limits on a Lorentz- and parity-violating modification of electrodynamics*, Phys. Rev. D **41**, 1231 (1990).
- [79] O.W. Greenberg, *CPT violation implies violation of Lorentz invariance*, Phys. Rev. Lett. **89**, 231602 (2002).
- [80] O.W. Greenberg, *Why is CPT fundamental?*, Found. Phys. **36**, 1535 (2006).
- [81] R. Lehnert, *CPT symmetry and its violation*, Symmetry **11**, 114 (2016).
- [82] P.D.S. Silva, R.A. Pereira, M.M. Ferreira Jr, *Optical reflection signature of an axion dielectric with magnetic current*, Phys. Rev. B **110**, 174427 (2024).
- [83] L.-C. Tu, J. Luo, and G.T. Gillies, *The mass of the photon*, Rep. Prog. Phys. **68**, 77 (2005).
- [84] P.D.S. Silva, *Eletrodinâmicas estendidas em meios contínuos e efeitos ópticos*, Tese de Doutorado, UFMA, (2022).
- [85] A. Ejlli, F. Della Valle, U. Gastaldi, G. Messineo, R. Pengo, G. Ruoso and G. Zavattini, *The PVLAS experiment: A 25 year effort to measure vacuum magnetic birefringence*, Phys. Rep. **871**, 1 (2020).
- [86] A. Cadène, P. Berceau, M. Fouché, R. Battesti e C. Rizzo, *Vacuum magnetic linear birefringence using pulsed fields: status of the BMV experiment*, Eur. Phys. J. D **68**, 16 (2014).
- [87] M.M. Ferreira Jr., L. Lisboa-Santos, R.V. Maluf e M. Schreck, *Maxwell electrodynamics modified by a CPT-odd dimension-five higher-derivative term*, Phys. Rev. D **100**, 055036 (2019).
- [88] V.V. Skokov, A. Yu. Illarionov e V.D. Toneev, *Estimate of the magnetic field strength in heavy-ion collisions*, Int. J. Mod. Phys. A **24**, 31 (2009).
- [89] Shou, QY., Ma, YG., Zhang, S. et al., *Properties of QCD matter: a review of selected results from ALICE experiment*. Nucl. Sci. Tech. **35**, 219 (2024).
- [90] A. Halprin, C.M. Andersen e H. Primakoff, *Photonic Decay Rates and Nuclear-Coulomb-Field Coherent Production Processes*, Phys. Rev. **152**, 1295 (1966).
- [91] D.A. Dicus, E.W. Kolb, V.L. Teplitz e R.V. Wagoner, *Astrophysical bounds on the masses of axions and Higgs particles*, Phys. Rev. D **18**, 1829 (1978).