

CBPF

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Dissertação de Mestrado

Forecasting the improvement on cosmological and nuisance parameter constraints by combining LSST 3x2pt with external spectroscopy surveys

Vitor Martins Gozzi

Orientador
Dr. Bruno Azevedo Lemos Moraes

Rio de Janeiro - RJ
Março de 2025

"FORECASTING THE IMPROVEMENT ON COSMOLOGICAL AND
NUISANCE PARAMETER CONSTRAINTS BY COMBINING LSST 3x2pt
WITH EXTERNAL SPECTROSCOPY SURVEYS"

VITOR MARTINS GOZZI

Dissertação de Mestrado em Física apresentada no
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do
Ministério da Ciência Tecnologia e Inovação.
Fazendo parte da banca examinadora os seguintes
professores:

Documento assinado digitalmente
gov.br BRUNO AZEVEDO LEMOS MORAES
Data: 21/10/2025 17:26:18-0300
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

Bruno Azevedo Lemos Moraes - Orientador/CBPF

RAW Abramo

Luís Raul Weber Abramo – USP

Sandro Vitenti

Sandro Dias Pinto Vitenti - UEL

-

Rio de Janeiro, 03 de outubro de 2025.

Agradecimentos

Gostaria de começar agradecendo, primeiramente, à minha família — ao meu pai Alvino, à minha mãe Lúcia e ao meu irmão Rafael — pelo amor incondicional, pelo apoio constante e pela confiança que sempre depositaram em mim, mesmo nos momentos de maior incerteza e insegurança. Vocês formam uma base sólida que me ajuda a percorrer todos os desafios que a vida oferece. Sem esse suporte, nada disso teria sido possível, muito obrigado.

À Helena, minha namorada, que não apenas me acompanhou durante todo o processo de escrita, mas foi também uma fonte inesgotável de apoio, compreensão e motivação ao longo de todo o mestrado — e, na verdade, não só no mestrado, mas em todos os aspectos da minha vida. Sua presença faz toda a diferença — nos momentos difíceis e também nos mais felizes. Muito obrigado por todo o carinho, pela paciência e por estar sempre ao meu lado.

Ao meu orientador, pela confiança depositada no meu trabalho, pela paciência e dedicação ao longo de todo o processo, e pelas valiosas trocas — tanto no campo acadêmico quanto nas conversas pessoais. Agradeço também aos colegas do BMGroup — Amanda, Pedro Henrique, Boni e Iago — pela parceria no desenvolvimento da pipeline, pelas discussões científicas sempre produtivas e pelas conversas descontraídas após nossas reuniões de grupo — os clássicos “sextou”.

Aos meus amigos — Gustavo, Yanka, Mariana, Murilo, Diego, Gabs, Patrick e Bia — que estiveram ao meu lado ao longo de todo esse processo: meu sincero obrigado por fazerem parte da minha vida. Sou profundamente grato por cada conversa, cada risada e cada momento compartilhado — dos vôleis criminosos regados a cervejinha às nossas imensas tardes de board games, que trouxeram leveza e alegria mesmo nos períodos mais difíceis.

À colaboração LSST, por todas as oportunidades de aprendizado, troca de conhecimento e crescimento profissional que tanto contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho. Em especial, agradeço ao Arthur e ao Sandro pelas inúmeras contribuições técnicas e científicas ao longo de toda essa trajetória — vocês foram, sem dúvida, peças fundamentais para a conclusão deste projeto.

Por fim, agradeço ao CBPF por me acolher como instituição de pesquisa, proporcionando um ótimo ambiente científico; à CAPES, pelo apoio financeiro essencial para a realização deste trabalho; e à BPG-LineA, pela oportunidade de integrar uma colaboração científica internacional.

*“Há algumas flores que você só consegue
ver quando faz desvios”*

- Haikyuu!!

Resumo

O Legacy Survey of Space and Time (LSST), conduzido pelo Observatório Vera C. Rubin, está prestes a revolucionar a cosmologia observacional por meio de sua extensa análise 3x2pt. Essa abordagem com múltiplas sondas é fundamental para responder às questões centrais sobre a natureza da energia escura e da matéria escura. No entanto, apesar de sua comprovada capacidade de fornecer restrições cosmológicas competitivas, o potencial completo das análises 3x2pt é limitado por degenerescências cosmológicas e astrofísicas — especialmente aquelas envolvendo o bias de galáxias, incertezas no redshift fotométrico e alinhamentos intrínsecos.

Esta dissertação busca investigar uma extensão promissora conhecida como análise 6x2pt, que incorpora o clustering de galáxias tomográfico de levantamentos espectroscópicos externos ao arcabouço tradicional 3x2pt. Ao combinar o vetor de dados simulados do LSST com os de levantamentos espectroscópicos como o DESI e o 4MOST, realizamos uma série de previsões de Fisher para quantificar a melhoria nas restrições dos parâmetros. Avaliamos, também, como a sinergia entre o LSST e esses conjuntos de dados espectroscópicos varia sob diferentes configurações observacionais — incluindo cobertura em redshift, área de céu, características das amostras e esquemas de binagem tomográfica — para identificar quais combinações oferecem a maior complementaridade com o LSST.

Além disso, investigamos três cenários cosmológicos distintos para quantificar o valor científico agregado pela análise 6x2pt em comparação à tradicional 3x2pt, especialmente em relação à sua capacidade de auto-calibrar parâmetros de nuisance. Finalmente, avaliamos qualitativamente o impacto da inclusão das distorções lineares no espaço de redshift (RSD) na estimativa de parâmetros dentro desse framework.

Palavras-chave: LSST; cosmologia observacional; espectroscopia; análise 6x2pt.

Abstract

The Legacy Survey of Space and Time (LSST), conducted by the Vera C. Rubin Observatory, is poised to revolutionize observational cosmology through its extensive 3x2pt analysis. This multi-probe approach is key to addressing fundamental questions about the nature of dark energy and dark matter. However, despite its proven ability to deliver competitive cosmological constraints, the full potential of 3x2pt analyses is hindered by cosmological and astrophysical degeneracies—particularly those involving galaxy bias, photometric redshift uncertainties, and intrinsic alignments.

This thesis investigates a promising extension known as the 6x2pt analysis, which incorporates tomographic galaxy clustering from external spectroscopic surveys into the traditional 3x2pt framework. By combining simulated data vectors from LSST with those from spectroscopic surveys such as DESI and 4MOST, we perform a series of Fisher forecasts to quantify the improvement in parameter constraints. We evaluate how the synergy between LSST and these spectroscopic datasets varies under different observational configurations — including redshift coverage, sky area, target properties, and tomographic binning schemes — to identify which combinations yield the strongest complementarity with LSST.

In addition, we investigate three distinct cosmological scenarios to quantify the scientific value added by the 6x2pt analysis compared to the traditional 3x2pt, particularly in terms of its ability to self-calibrate nuisance parameters. We also qualitatively assess the impact of including linear redshift-space distortions (RSD) on parameter estimation within this framework.

Keywords: LSST; observational cosmology; spectroscopy; 6x2pt analysis.

Lista de Figuras

Figura 1	– Representação da expansão do universo. A distância comóvel entre os pontos x_1 e x_2 mantém-se constante, enquanto a distância física aumenta com o tempo devido à expansão cósmica. Crédito: (DODELSON; SCHMIDT, 2021).	6
Figura 2	– Relação entre a velocidade de recessão de galáxias e sua distância, ilustrando a Lei de Hubble. Crédito: (HUBBLE, 1929)	8
Figura 3	– Algumas das medições da constante de Hubble presentes na literatura. Crédito: (VALENTINO, 2021).	9
Figura 4	– Representação esquemática da distância de diâmetro angular. A relação entre o tamanho físico ds e o ângulo $d\phi$ permite inferir distâncias cosmológicas. Crédito: (PIATTELLA, 2018).	13
Figura 5	– Configuração geométrica para cálculo de distâncias em sistemas de lente gravitacional. Crédito: (PIATTELLA, 2018).	14
Figura 6	– Evolução da densidade de energia no universo. Onde no início do universo, a componente de radiação dominava, seguida pela matéria e, por fim, pela energia escura. Créditos: (BAUMANN, 2022)	19
Figura 7	– Simulação de um corte bidimensional da estrutura em larga escala do universo. Pontos amarelos representam aglomerados de galáxias, filamentos roxos ilustram a distribuição da matéria escura, e regiões pretas correspondem a vazios cósmicos. Crédito: (SPRINGEL et al., 2005)	23
Figura 8	– Medições do espectro de potência da matéria linear. Os vínculos de “ <i>clustering</i> de galáxias” vêm da amostra de galáxias vermelhas luminosas (LRG) do <i>Sloan Digital Sky Survey (SDSS)</i> . Os vínculos do “CMB” são derivadas das medições de anisotropias de temperatura da RCF feitas pelo <i>Planck</i> . Por fim, “ $Ly\alpha$ ” refere-se à <i>floresta Lyman-alfa</i> . Créditos: (BAUMANN, 2022)	35
Figura 9	– Diagrama que representa o procedimento da observações comparado a predição teórica. Créditos: (FERRI, 2022)	38

Figura 10 – Distribuição de galáxias obtida a partir de levantamentos espectroscópicos e de catálogos simulados pela <i>Millenium</i> . Em azul e roxo, vemos as medições feitas pelo 2dFGRS e pelo SDSS (SPRINGEL; FRENK; WHITE, 2006). Em vermelho, vemos os dados simulados correspondentes (SPRINGEL et al., 2005). Créditos: (SPRINGEL; FRENK; WHITE, 2006)	39
Figura 11 – Figura adaptada de (WANG et al., 2019), comparando medições realizadas por levantamentos espectroscópicos e fotométricos. A imagem à esquerda ilustra um levantamento espectroscópico com o uso de fibras ópticas ou fendas para observar individualmente o espectro de galáxias, como nos casos do DESI e do 4MOST. No centro, temos um levantamento espectroscópico slitless, que dispersa a luz de todo o campo de visão para gerar espectros, como ocorre com o satélite Euclid. À direita, observa-se um levantamento fotométrico tradicional, que registra a luz em múltiplas bandas largas. Ao comparar a primeira imagem com a última, observa-se uma perda significativa de informação na direção radial — consequência das maiores incertezas associadas aos redshifts estimados fotometricamente em relação às medições espectroscópicas. Créditos: (WANG et al., 2019).	41
Figura 12 – Distorções no espaço de redshift causadas por velocidades peculiares durante o colapso em torno de uma sobredensidade esférica. Créditos: (HAMILTON, 1998).	47
Figura 13 – Esboço de um sistema de lentes gravitacionais. Créditos: (PRAT; BACON, 2025)	52
Figura 14 – Ilustração mostrando o efeito dos elementos da matriz Jacobiana A — <i>shear</i> e convergência — sobre uma fonte inicialmente circular. Créditos: (PRAT; BACON, 2025)	55
Figura 15 – Simulação que mostra um padrão coerente induzido nas formas das fontes (elipses azuis) devido a estrutura em larga escala. Créditos: Canada-France Hawaii Telescope, retirado de (MANDELBAUM, 2018)	55
Figura 16 – As três correlações de dois pontos utilizadas pelos cientistas do DES para mapear a distribuição de matéria no Universo. A análise combina medições das formas das galáxias de fundo (em amarelo) com as posições das galáxias que atuam como lentes gravitacionais (em vermelho). Na parte inferior, da esquerda para a direita, aparecem as correlações entre cisalhamentos (shear-shear), entre galáxias (galáxia-galáxia) e entre galáxias e cisalhamento (galáxia-shear). Créditos: Jessie Muir, retirado de (Dark Energy Survey Collaboration,)	59
Figura 17 – Distribuições da amostra de lentes do LSST SRD, antes e depois da divisão tomográfica. Créditos: O Autor.	63
Figura 18 – Distribuições da amostra de fontes do LSST SRD, antes e depois da divisão tomográfica. Créditos: O Autor.	64

Figura 19 – Distribuições globais das amostras espectroscópicas do DESI DR1 antes da divisão tomográfica. Créditos: O Autor.	66
Figura 20 – Distribuições de redshift da amostra BGS, antes e depois da divisão tomográfica.	68
Figura 21 – Distribuições de redshift da amostra LRG, antes e depois da divisão tomográfica.	68
Figura 22 – Distribuições de redshift da amostra ELG, antes e depois da divisão tomográfica.	68
Figura 23 – Distribuições das amostras do 4MOST-CRS, antes e depois da divisão tomográfica.	69
Figura 24 – Distribuições de redshift da amostra BGS, antes e depois da divisão tomográfica.	70
Figura 25 – Distribuições de redshift da amostra LRG, antes e depois da divisão tomográfica.	71
Figura 26 – Distribuições de redshift da amostra ELG, antes e depois da divisão tomográfica.	71
Figura 27 – Compilado de todas as distribuições de redshift consideradas na nossa pipeline para a análise 6x2pt com o DESI, utilizando binwidth de 0,2. As distribuições foram construídas conforme descritas nas Seções 4.1 e 4.2. Créditos: O Autor	72
Figura 28 – Exemplos de correlações angulares tomográficas de dois pontos que compõem um subconjunto dos vetores de dados 6×2pt considerado até então. Cada painel apresenta uma correlação específica entre as diferentes amostras espectroscópicas e/ou fotométricas. As legendas indicam os pares tomográficos correspondentes. Além disso, os pontos com barras de erro representam os espectros de potência angulares C_ℓ e suas respectivas incertezas, obtidas a partir da diagonal da matriz de covariância Gaussiana	75
Figura 29 – Matriz de correlação correspondente à covariância Gaussiana analítica utilizada neste trabalho. Os rótulos dos eixos indicam os blocos da covariância associados às diferentes correlações entre as sondas: auto-correlação das posições de galáxias fotométricas ($C_{gg}^{ph_i ph_j}$), correlação cruzada entre posições de galáxias espectroscópicas e fotométricas ($C_{gg}^{sp_i ph_j}$), auto-correlação das posições de galáxias espectroscópicas ($C_{gg}^{sp_i sp_j}$), correlações cruzadas entre as diferentes amostras espectroscópicas ($C_{gg}^{sp_i sp_j}$), galaxy-galaxy lensing com amostras espectroscópicas ($C_{g\gamma}^{sp_i \gamma}$), galaxy-galaxy lensing fotométrico ($C_{g\gamma}^{ph_i \gamma}$), bem como as auto-correlações e correlações cruzadas do cisalhamento cósmico ($C_{\gamma\gamma}^{\gamma\gamma}$). A barra de cores representa a intensidade da correlação entre os elementos normalizados da matriz de covariância.	77
Figura 30 – Contornos de 68/98% de credibilidade para os parâmetros cosmológicos do modelo Λ CDM obtidos a partir da análise 6x2pt considerando individualmente cada uma das populações espectroscópicas do DESI: BGS (vermelho), LRG (laranja) e ELG (verde). Para referência, incluímos também os contornos da análise 3x2pt (azul) utilizando somente o f_{sky} de overlap entre o LSST e o DESI.	82

Figura 31 – Contornos de 68/98% de credibilidade para os parâmetros de nuisance associados à calibração da distribuição de redshift das lentes fotométricas, obtidos a partir da análise 6x2pt com as populações espectroscópicas BGS (vermelho), LRG (laranja) e ELG (verde). Para comparação, mostramos também os contornos da análise 3x2pt (azul) utilizando apenas o f_{sky} da região de overlap entre o LSST e o DESI.	84
Figura 32 – Contornos de 68/95% de credibilidade para os parâmetros de nuisance associados à calibração da distribuição de redshift das fontes fotométricas, obtidos com a análise 6x2pt utilizando separadamente as populações espectroscópicas BGS (vermelho), LRG (laranja) e ELG (verde). Também incluímos os contornos da análise 3x2pt (azul) considerando apenas o f_{sky} correspondente à sobreposição entre LSST e DESI.	85
Figura 33 – Contornos de credibilidade a 68/95% para os parâmetros cosmológicos $\{\Omega_c, \Omega_b, h, \sigma_8, n_s\}$, comparando os resultados da análise 6x2pt obtidos com as frações de céu padrão dos levantamentos. São consideradas as configurações combinadas LSST + DESI (4,000 deg ² , em preto) e LSST + 4MOST (7,500 deg ² , em cinza).	87
Figura 34 – Contornos de 68/95% de credibilidade para os parâmetros cosmológicos $\{\Omega_c, \Omega_b, h, \sigma_8, n_s\}$, obtidos a partir da análise 6x2pt combinando o LSST com diferentes configurações do levantamento DESI (áreas de 5,000, 7,500 e 10,000 deg ²) e com o levantamento 4MOST (7,500 deg ² de sobreposição) . . .	88
Figura 35 – Contornos de 68/95% de credibilidade para os parâmetros de nuisance associados à calibração da distribuição de redshift das lentes fotométricas, considerando a análise 6x2pt com duas configurações: LSST + DESI com 4,000 deg ² de sobreposição e LSST + 4MOST com 7,500 deg ²	90
Figura 36 – Contornos de 68/95% de credibilidade para os parâmetros de nuisance relacionados à calibração da distribuição de redshift das fontes fotométricas, considerando as mesmas configurações da Figura 35.	91
Figura 37 – Contornos de credibilidade a 68% e 95% para os parâmetros do modelo Λ CDM. As curvas em azul correspondem à análise 3x2pt sem a inclusão dos parâmetros de <i>nuisance</i> , enquanto as curvas em cinza mostram a mesma análise com esses parâmetros considerados. Já as curvas em vermelho representam a análise completa 6x2pt do LSST com o DESI, assumindo uma fração do céu de 18 mil graus quadrados (área do céu do LSST).	93
Figura 38 – Contornos de credibilidade a 68% e 95% para os parâmetros de bias de galáxias e os parâmetros de nuisance associados à distribuição de redshift das lentes, no modelo Λ CDM. As curvas em cinza correspondem à análise 3x2pt, enquanto as curvas em vermelho representam a análise completa 6x2pt, assumindo uma fração do céu de 18 mil graus quadrados.	94

Figura 39 – Contornos de credibilidade a 68% e 95% para o parâmetros de alinhamento intrínscio e os parâmetros de nuisance relacionados a distribuição de redshift das fontes no modelo Λ CDM. as curvas em cinza mostram a mesma análise 3x2pt. Já as curvas em vermelho representam a análise completa 6x2pt, assumindo uma fração do céu de 18 mil graus quadrados.	95
Figura 40 – Contornos de credibilidade a 68% e 95% para os parâmetros cosmológicos variáveis do modelo w_0w_a CDM. As curvas azuis mostram a análise 3x2pt sem parâmetros de <i>nuisance</i> , as cinzas com esses parâmetros, e as vermelhas a análise 6x2pt.	96
Figura 41 – Contornos de credibilidade a 68% e 95% no modelo w_0w_a CDM para os parâmetros w_0 e w_a e parâmetros como: $\Delta z, b, A_{IA}$. As curvas em cinza correspondem à análise 3x2pt com a inclusão dos parâmetros de <i>nuisance</i> ; Já as curvas em vermelho representam a análise completa 6x2pt incorporando dados do DESI	97
Figura 42 – Contornos de credibilidade a 68% e 95% para os parâmetros cosmológicos variáveis do modelo Λ CDM + $\sum m_\nu$. As curvas em azul correspondem à análise 3x2pt sem a inclusão dos parâmetros de <i>nuisance</i> , enquanto as curvas em cinza mostram a mesma análise com esses parâmetros considerados. Já as curvas em vermelho representam a análise completa 6x2pt incorporando dados do DESI, assumindo uma fração do céu de 18 mil graus quadrados. . .	98
Figura 43 – Contornos de credibilidade a 68% e 95% para o parâmetro da soma das massas de neutrinos e parâmetros de bias de galaxias. As curvas em vermelho correspondem à análise 3x2pt incluindo os parâmetros de <i>nuisance</i> ; Já as curvas em vermelho representam a análise completa 6x2pt incorporando dados do DESI, assumindo uma fração do céu de 18 mil graus quadrados. . .	99
Figura 44 – Contornos de credibilidade a 68% e 95% para diferentes configurações de binning espectroscópico, considerando os parâmetros cosmológicos variáveis do modelo Λ CDM. As curvas em vermelho correspondem à análise 6x2pt LSST+DESI com bins com comprimento $\Delta z = 0,2$, as curvas em verde referem-se à configuração com $\Delta z = 0,1$, e as curvas em laranja representam o caso mais fino, com $\Delta z = 0,05$	101
Figura 45 – Contornos de credibilidade a 68% e 95% para diferentes configurações de binning espectroscópico, considerando os parâmetros de nuisance das lentes. As curvas em vermelho correspondem à análise 6x2pt LSST+DESI com bins com comprimento $\Delta z = 0,2$, as curvas em verde referem-se à configuração com $\Delta z = 0,1$, e as curvas em laranja representam o caso mais fino, com $\Delta z = 0,05$	102

Figura 46 – Contornos de credibilidade a 68% e 95% para os parâmetros cosmológicos variáveis do modelo Λ CDM, considerando a análise 6x2pt LSST+DESI com binning espectroscópico de $\Delta z = 0,2$. As curvas em vermelho correspondem à modelagem teórica com inclusão do efeito de RSD, enquanto as curvas em verde representam o caso em que esse efeito é desconsiderado.	104
Figura 47 – Diferença absoluta entre os vetores de dados com e sem a inclusão do efeito de RSD, normalizada pelo desvio padrão do ruído teórico correspondente a cada observável de galaxy clustering no vetor 6x2pt.	105

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Parâmetros cosmológicos fiduciais adotados neste trabalho	73
Tabela 2 – Priors adotados para os parâmetros cosmológicos e de <i>nuisance</i>	81

Sumário

Lista de Figuras	v
Lista de Tabelas	xi
Sumário	xii
1 Introdução	1
2 Cosmologia	4
2.1 Redshift e Expansão do Universo	4
2.1.1 A métrica FLRW e o Princípio Cosmológico	5
2.1.2 Lei de Hubble-Lemaître	7
2.1.3 Redshift cosmológico e o Fator de Escala	8
2.1.4 Distâncias Cosmológicas	11
2.1.4.1 Distância de Luminosidade	11
2.1.4.2 Distância de Diâmetro Angular	13
2.2 O Modelo Cosmológico Λ CDM	14
2.2.1 Equações de Friedmann	15
2.2.1.1 Tensor Energia-Momento	15
2.2.1.2 Geometria	17
2.2.1.3 Equações Dinâmicas	18
2.2.2 Nosso universo	20
2.3 Formação de Estruturas	23
2.3.1 Perturbações Lineares	24
2.3.1.1 Perturbações da métrica	24
2.3.1.2 Perturbações da matéria	25
2.3.1.3 Equações de Einstein perturbadas	27
2.3.2 Crescimento de perturbações da matéria	29
2.3.3 Espectro de potência	32
2.3.3.1 Função transferência	32
2.3.3.2 Espectro de potência linear	33
2.3.3.3 Espectro linear de potência da matéria	34
2.3.3.4 Propriedades estatísticas	34

3	Sondas Cosmológicas em Levantamentos de Galáxias	37
3.1	Levantamentos de Galáxias fotométricos e espectroscópicos	37
3.2	Espectro Angular de Potência	42
3.3	Observáveis em levantamentos de galáxia	44
3.3.1	<i>Clustering</i> 3D	44
3.3.2	<i>Clustering</i> 2D	48
3.3.3	<i>Lenteamento Gravitacional Fraco</i>	51
3.3.4	<i>Galaxy-Galaxy lensing</i>	58
4	Metodologia	61
4.1	Observáveis fotométricos	62
4.2	Observáveis espectroscópicos	64
4.2.1	DESI	65
4.2.2	4MOST	69
4.3	Vetor de dados 6x2pt	71
4.4	Formalismo de Fisher	78
5	Resultados	80
5.1	Tipo de Galáxia Espectroscópica: Análise Cosmológica e de Parâmetros de Nuisance	81
5.2	DESI x 4MOST: Melhores Sinergias com o LSST	86
5.3	Análise 6x2pt da amostra completa em diferentes cenários cosmológicos	92
5.4	Variação do Binning Espectroscópico na Análise 6x2pt	100
5.5	Impacto de RSD linear na análise 6x2pt	103
6	Conclusões e próximos passos	106
A	Demonstração da relação entre a função de correlação e o espectro de potência	109
B	Derivação das expressões para os coeficientes multipolares	111
C	Derivação da Matriz de Fisher para uma Likelihood Gaussiana	113
	Referências	116

Capítulo 1

Introdução

A era dos grandes levantamentos astronômicos tem transformado a cosmologia em uma ciência de precisão, possibilitando a investigação detalhada da composição e evolução do Universo a partir da observação da estrutura em larga escala. Um dos pilares dessa empreitada é o modelo padrão da cosmologia, conhecido como Λ CDM, que descreve um Universo em expansão acelerada, dominado por componentes ainda pouco compreendidos, como a matéria escura e a energia escura. Apesar de seu sucesso em explicar uma ampla gama de observações, o modelo Λ CDM ainda enfrenta desafios teóricos e observacionais significativos. Tensões entre diferentes medições cosmológicas — como a discrepância nos valores da constante de Hubble (H_0) e da amplitude das flutuações de densidade (σ_8) — têm motivado intensos debates na comunidade científica e levantado a possibilidade de que possam ser necessárias extensões ao modelo padrão.

Nesse contexto, as observações da estrutura em larga escala do Universo destacam-se como uma das ferramentas mais poderosas para testar o modelo cosmológico padrão e investigar possíveis desvios em relação a esse paradigma. Isso porque o mapeamento detalhado da distribuição de galáxias ao longo do tempo cósmico permite rastrear a evolução da densidade de matéria, fornecendo informações essenciais para refinar as estimativas dos parâmetros cosmológicos. Contudo, para extrair o máximo de informação dessas observações e superar limitações impostas por degenerescências e erros sistemáticos, tornou-se fundamental o uso combinado de múltiplas sondas em análises integradas como, por exemplo, a 3x2pt, que é composta por *clustering* de galáxias, lenteamento gravitacional fraco e suas correlações cruzadas chamadas de *galaxy-galaxy lensing*. Essa abordagem multi-sonda tem se consolidado como um paradigma eficiente para mitigar degenerescências entre parâmetros cosmológicos e sistemáticos astrofísicos, conduzindo a inferências mais precisas e robustas.

Experimentos de estágio III, como o Dark Energy Survey (DES) (The Dark Energy Survey Collaboration, 2005), o Kilo-Degree Survey (KiDS) (JONG et al., 2012a) já demonstraram o poder da análise 3x2pt ao fornecer restrições competitivas com os resultados de experimentos de

radiação cósmica de fundo (RCF), como o Planck (JOUDAKI et al., 2017; ABBOTT, 2022). No entanto, a próxima geração de levantamentos astronômicos — os chamados surveys de estágio IV — promete ampliar significativamente esse potencial. Dentre esses futuros projetos, destaca-se o Legacy Survey of Space and Time (LSST) (IVEZIĆ et al., 2019), conduzido pelo Observatório Vera C. Rubin. Com início previsto para os próximos anos, o LSST realizará um mapeamento fotométrico profundo e contínuo de aproximadamente 18.000 deg^2 do céu noturno ao longo de dez anos, observando bilhões de galáxias em múltiplos filtros ópticos.

A expectativa é que o LSST reduza em mais de uma ordem de grandeza os erros estatísticos associados às medições de weak lensing e galaxy clustering, oferecendo um poder sem precedentes para sondar a natureza da energia escura. No entanto, o sucesso desse levantamento depende da capacidade de controlar erros sistemáticos com igual rigor. Com a redução dos erros estatísticos, incertezas associadas ao viés de galáxias, aos redshifts fotométricos e aos alinhamentos intrínsecos passam a dominar as análises. Assim, torna-se fundamental o desenvolvimento de estratégias que permitam mitigar essas fontes de erro de maneira eficiente.

Uma das abordagens promissoras nesse cenário é a extensão da análise 3x2pt para o que se denomina análise 6x2pt. Essa técnica consiste em incorporar o clustering de galáxias tomográfico, proveniente de levantamentos espectroscópicos externos, ao arcabouço tradicional da análise 3x2pt (JOHNSTON et al., 2024; PAGANIN et al., 2024). A principal vantagem dessa abordagem reside na capacidade de auto-calibrar parâmetros nuisance e de quebrar degenerescências cosmológicas, uma vez que as medições espectroscópicas fornecem redshifts mais precisos do que as dos dados fotométricos (MCLEOD; BALAN; ABDALLA, 2016).

Nesta dissertação, investigamos o potencial da análise 6x2pt combinando dados simulados do LSST com levantamentos espectroscópicos como o DESI (Dark Energy Spectroscopic Instrument) (DESI Collaboration, 2016) e o 4MOST (4-metre Multi-Object Spectroscopic Telescope) (JONG; AL., 2019). Gerando um vetor de dados no formalismo do espectro angular de potência, realizamos previsões de Fisher para quantificar os ganhos em termos de restrições de parâmetros cosmológicos e parâmetros de nuisance. Assim, avaliamos como a sinergia entre o LSST e diferentes configurações espectroscópicas varia de acordo com parâmetros observacionais como cobertura em redshift, área de céu observada, propriedades das populações-alvo e esquemas de binagem tomográfica.

Além disso, exploramos três cenários cosmológicos distintos com o objetivo de quantificar o valor científico agregado pela análise 6x2pt em comparação com a tradicional 3x2pt; em particular, examinamos a capacidade dessa abordagem de auto-calibrar parâmetros de nuisance. Por fim, avaliamos, de forma qualitativa, o impacto da inclusão das distorções lineares no espaço de redshift (Redshift-Space Distortions, RSD) nos vínculos cosmológicos.

Nesse sentido, este trabalho está organizado da seguinte forma: o Capítulo 2 apresenta os fundamentos teóricos da cosmologia moderna, abordando desde o conceito de redshift e as distâncias cosmológicas até o entendimento da estrutura em larga escala, a partir da evolução das

perturbações do campo de densidade. O Capítulo 3 introduz as principais sondas cosmológicas utilizadas em levantamentos de galáxias, com ênfase nos diferentes tipos de observáveis relevantes para a análise da estrutura em larga escala do Universo. O Capítulo 4 detalha a metodologia adotada neste trabalho, incluindo os surveys utilizados, as especificações das distribuições de redshift, a construção do vetor de dados 6x2pt e o formalismo de Fisher empregado nas previsões cosmológicas. Em seguida, o Capítulo 5 apresenta as principais análises realizadas a partir do nosso vetor de dados 6x2pt, discutindo os ganhos nas restrições dos parâmetros cosmológicos e de nuisance nos diferentes cenários explorados. Por fim, o Capítulo 6 reúne as conclusões do estudo, sintetizando os principais achados, discutindo possíveis aprimoramentos da análise aplicada e apontando perspectivas futuras.

Capítulo 2

Cosmologia

A cosmologia moderna busca compreender a origem, a evolução e a estrutura do Universo a partir de princípios físicos fundamentais, ancorando-se em observações cada vez mais precisas e em modelos teóricos cada vez mais robustos. Ao longo do último século, foram desenvolvidos arcabouços matemáticos sólidos capazes de conectar a geometria do espaço-tempo à distribuição de matéria e energia, revelando um Universo dinâmico, em expansão, e permeado por estruturas que cresceram a partir de flutuações quânticas primordiais.

Este primeiro capítulo se dedica a apresentar esse *framework* teórico a fim de estabelecer as bases conceituais e matemáticas que sustentam a interpretação das observações cosmológicas atuais. Para isso, recorreremos ao longo do texto à referência principal (BAUMANN, 2022) e às referências complementares (DODELSON; SCHMIDT, 2021; PIATTELLA, 2018) como base para a construção deste capítulo.

2.1 Redshift e Expansão do Universo

As distâncias cosmológicas a serem discutidas fornecem poderosas ferramentas para mapear a geometria do universo em diferentes épocas, mas todas dependem fundamentalmente da evolução do fator de escala $a(t)$. Para completar nossa descrição cosmológica, precisamos agora relacionar $a(t)$ com o conteúdo energético do universo - o que será feito através das equações de Friedmann na próxima seção, onde estabeleceremos os fundamentos dinâmicos do modelo Λ CDM e sua conexão com as observações discutidas até aqui.

No final do século XX, uma nova era na cosmologia surgiu a partir da descoberta de supernovas do tipo Ia (WILLIAMS et al., 1996). Essas explosões estelares, que funcionam como velas padrão devido ao seu brilho intrínseco, permitiram aos astrônomos medir distâncias cósmicas com precisão, o que revelou que o universo não apenas está se expandindo, mas que está em uma expansão acelerada (RIESS et al., 1998; PERLMUTTER et al., 1998). Diante

dessas observações, o estudo do fenômeno de redshift no contexto da cosmologia observacional ganhou grande destaque, uma vez que o redshift ocorre porque a expansão do universo alonga o comprimento de onda da luz, fazendo com que a radiação observada seja mais avermelhada (ou menos energética) do que a emitida. Este efeito cosmológico é fundamental para determinar o tempo e a distância em que os objetos astronômicos emitiram sua luz. Por isso, visando aprofundar neste tema, as subseções a seguir serão dedicadas a construir o embasamento teórico necessário para compreender e formular o conceito de redshift cosmológico.

2.1.1 A métrica FLRW e o Princípio Cosmológico

A cosmologia moderna fundamenta-se no pressuposto de que o universo, em escalas suficientemente grandes (da ordem de 100 Mpc), é homogêneo e isotrópico. Isso significa que o Universo apresenta composição física equivalente em todas as regiões do espaço (homogeneidade) e não possui uma direção privilegiada (isotropia). Esse conceito, conhecido como **Princípio Cosmológico** (PC), tem sido amplamente corroborado por observações da Radiação Cósmica de Fundo (RCF) (JAROSIK et al., 2011; AGHANIM et al., 2020) e de outras observações da distribuição de estruturas em largas escalas (TEGMARK et al., 2004; COLE et al., 2005). Para uma discussão mais aprofundada sobre o PC, consulte (ALURI et al., 2023).

Partindo desse princípio, podemos descrever o universo em largas escalas utilizando uma métrica, conhecida como métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), que representa um espaço-tempo homogêneo, isotrópico e em expansão. Essa métrica é expressa por:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2/R_0^2} + r^2 d\Omega^2 \right), \quad (2.1)$$

em que ds representa o intervalo espaço-temporal, uma quantidade que mede a separação entre dois eventos no espaço-tempo. O termo c denota a velocidade da luz no vácuo, enquanto dt corresponde ao intervalo de tempo cósmico, em que, em cada fatia de tempo t , o espaço é maximalmente simétrico. A coordenada radial comóvel é representada por dr , e $a(t)$ é o **fator de escala**, uma função que descreve como o universo se expande ou contrai ao longo do tempo. O parâmetro R_0 está associado à escala de curvatura atual, relacionada à geometria do universo, e $d\Omega$ é o elemento de ângulo sólido, definido como $d\Omega^2 = d\phi^2 + \sin^2 \phi d\theta^2$, onde ϕ e θ são coordenadas angulares. Por fim, k é o parâmetro de curvatura espacial, que pode assumir os valores $k = 0$ para um espaço plano, $k = +1$ para um espaço esférico ou $k = -1$ para um espaço hiperbólico.

Partindo dessa métrica, um conceito particularmente útil é o **tempo conforme** (η), definido pela relação:

$$a d\eta = dt \quad \Rightarrow \quad \eta - \eta_i = \int_{t_i}^t \frac{dt'}{a(t')}. \quad (2.2)$$

Utilizando essa transformação na equação (2.1), a métrica de FLRW pode ser reescrita na forma:

$$ds^2 = a^2(\eta) \left(-c^2 d\eta^2 + \frac{dr^2}{1 - kr^2/R_0^2} + r^2 d\Omega^2 \right). \quad (2.3)$$

Nessa representação, o fator de escala $a(\eta)$ atua como um **fator conforme**, que modifica a métrica sem alterar sua estrutura geométrica intrínseca. No caso especial em que a curvatura espacial é nula ($k = 0$), a métrica se reduz à métrica de Minkowski, multiplicada por um fator conforme.

Outra forma de se representar a equação (2.3) é redefinindo a coordenada radial através do infinitesimal da distância comóvel, ou seja, $d\chi \equiv dr/\sqrt{1 - kr^2/R_0^2}$, logo:

$$ds^2 = a^2(\eta) \left(-c^2 d\eta^2 + d\chi^2 + S_k^2(\chi) d\Omega^2 \right), \quad (2.4)$$

onde $S_k(\chi)$ é dada por:

$$S_k(\chi) \equiv R_0 \begin{cases} \sinh\left(\frac{\chi}{R_0}\right) & \text{para } k = -1, \\ \frac{\chi}{R_0} & \text{para } k = 0, \\ \sin\left(\frac{\chi}{R_0}\right) & \text{para } k = +1. \end{cases} \quad (2.5)$$

É importante reformular a coordenada comóvel χ , pois essa grandeza não é diretamente observável. Como alternativa, emprega-se o conceito de **distância própria**, que é de fato uma coordenada física.

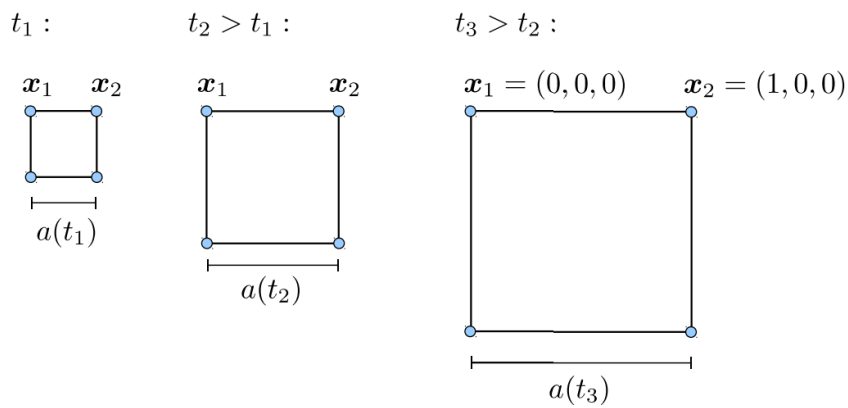


Figura 1 – Representação da expansão do universo. A distância comóvel entre os pontos x_1 e x_2 mantém-se constante, enquanto a distância física aumenta com o tempo devido à expansão cósmica. Crédito: (DODELSON; SCHMIDT, 2021).

Como ilustra a Figura 1, a distância própria é definida por:

$$r_p(t) \equiv a(t) \chi. \quad (2.6)$$

A partir dessa definição, podemos calcular a velocidade física de uma galáxia movendo-se ao longo de $\vec{r}_p(t)$. Derivando a equação (2.6), obtemos:

$$\vec{v}_p = \frac{d\vec{r}_p}{dt} = \frac{da}{dt}\vec{r}_p + a(t)\frac{d\vec{r}_p}{dt} \equiv H\vec{r}_p + \vec{v}_{pec}, \quad (2.7)$$

onde o **parâmetro de Hubble** é definido por:

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a}, \quad (2.8)$$

em que o ponto denota a derivada em relação ao tempo cósmico ($\dot{a} \equiv da/dt$).

Na equação (2.7), o primeiro termo, Hr_p , é o chamado **fluxo de Hubble**, correspondendo à velocidade das galáxias devido à expansão do espaço entre a origem e a posição $r_p(t)$. O segundo termo, $\vec{v}_{pec} \equiv a(t)\dot{\vec{r}}$, corresponde às **velocidades peculiares**, que são as velocidades medidas por um observador comóvel, ou seja, um observador que segue o fluxo de Hubble. Essas velocidades descrevem o movimento das galáxias devido à atração gravitacional de galáxias vizinhas próximas e seu efeito torna-se particularmente relevante quando a contribuição do fluxo de Hubble ainda não domina significativamente sobre esses movimentos locais. Isso faz com que o redshift observado apareça mais avermelhado ou mais azulado, conforme o movimento relativo da galáxia - afastando-se ou aproximando-se do observador, respectivamente.

2.1.2 Lei de Hubble-Lemaître

A Lei de Hubble-Lemaître, originalmente proposta por Georges Lemaître em 1927 (LEMAÎTRE, 1927) e posteriormente observacionalmente confirmada por Edwin Hubble em 1929 (HUBBLE, 1929), foi uma das descobertas mais marcantes da cosmologia no início do século XX. Ela estabelece que, quanto mais distante uma galáxia está de nós, mais rapidamente ela se afasta, como ilustrado na Figura 2.

Matematicamente, a Lei de Hubble é expressa por:

$$v = H_0 r, \quad (2.9)$$

onde v é a velocidade de recessão da galáxia, r é a distância até ela, e H_0 é a constante de Hubble, que quantifica a taxa de expansão do universo. Essa equação pode ser comparada ao fluxo de Hubble, representado pelo primeiro termo da equação 2.7, onde H_0 é o parâmetro de Hubble medido localmente. O valor inicialmente determinado por Hubble para a constante foi:

$$H_0 = 500 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}, \quad (2.10)$$

obtido por meio de uma regressão linear da velocidade das galáxias em função de suas distâncias. Este valor apresentava um erro considerável, como pode ser observado na Figura 2, evidenciado pela dispersão dos dados.

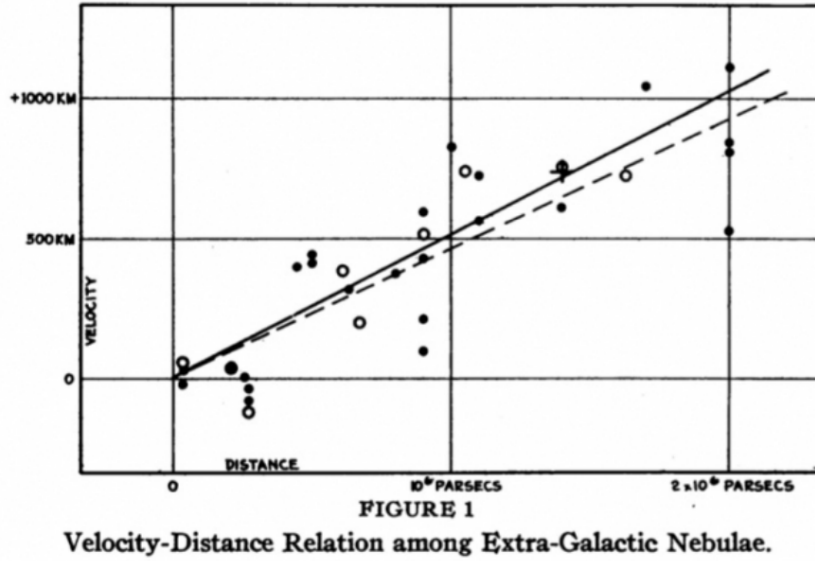


Figura 2 – Relação entre a velocidade de recessão de galáxias e sua distância, ilustrando a Lei de Hubble. Crédito: (HUBBLE, 1929)

Atualmente, com medições cada vez mais precisas e um volume de dados significativamente maior, houve um grande avanço na estimativa do valor de H_0 fundamentado em duas abordagens distintas. A primeira consiste na utilização de velas padrão, onde, a partir da medida da magnitude aparente de objetos com luminosidade intrínseca conhecida, é possível estimar a distância desses objetos e, consequentemente, determinar o valor de H_0 . Esse método fornece: $H_0 = 73.2 \pm 1.3 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ (RIESS et al., 2021). Outra alternativa envolve medidas indiretas da RCF, que consistem em ajustar um modelo cosmológico para reproduzir as anisotropias da RCF. Dessa forma, obteve-se: $H_0 = 67.4 \pm 0.5 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ (AGHANIM et al., 2020).

Nesse contexto, nota-se que as estimativas obtidas por esses dois métodos apresentam uma tensão significativa, já que os intervalos de confiança não se sobrepõem, como ilustrado na Figura 3. Essa tensão vem sendo constantemente estudada pela comunidade científica nos últimos anos. Uma das investigações feitas é relacionada ao método de medição de distâncias por velas padrão, no qual é necessário fazer uma calibração utilizando velas padrão mais próximas em um processo conhecido como **escada de distâncias cósmicas**. Assim, qualquer erro ou incerteza nessa calibração pode se propagar para as medições de galáxias mais distantes, afetando a estimativa final de H_0 (FREEDMAN, 2021; RIESS et al., 2024).

Outras investigações, associadas à RCF, podem apresentar limitações ou inadequações do modelo cosmológico atual (VALENTINO, 2021; VERDE; TREU; RIESS, 2019) e, apesar dos esforços recentes, a tensão cosmológica permanece como uma desafiadora questão em aberto.

2.1.3 Redshift cosmológico e o Fator de Escala

Boa parte do nosso conhecimento sobre o universo é inferido a partir da luz que recebemos de objetos astronômicos distantes, de forma que, para analisar corretamente essas observações,

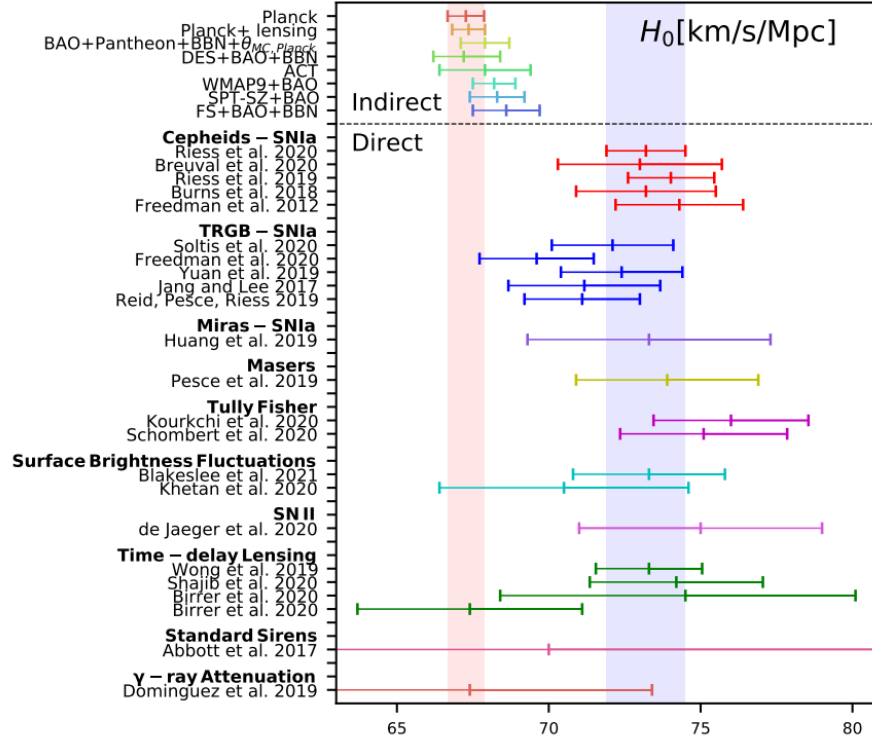


Figura 3 – Algumas das medições da constante de Hubble presentes na literatura. Crédito: (VALENTINO, 2021).

é essencial considerar o comprimento de onda da luz emitida. Contudo, devido à expansão acelerada do universo - que literalmente estica o espaço-tempo - o comprimento de onda observado difere do originalmente emitido. Esse fenômeno é conhecido como **efeito Doppler cosmológico**.

O **redshift** (desvio para o vermelho) corresponde ao deslocamento relativo do comprimento de onda causado pela expansão cósmica. Matematicamente, definimos o redshift como:

$$z = \frac{\lambda_{\text{obs}} - \lambda_{\text{emit}}}{\lambda_{\text{emit}}}, \quad (2.11)$$

onde, λ_{emit} é o comprimento de onda original emitido pela fonte e λ_{obs} é o comprimento de onda detectado pelo observador. Assim, para objetos cosmológicamente distantes, a expansão do espaço-tempo causa um alongamento progressivo do comprimento de onda durante sua propagação, resultando em valores de z significativamente grandes. No caso de objetos próximos, como a luz percorre distâncias relativamente curtas (em escalas cosmológicas), o efeito da expansão cósmica torna-se desprezível. Nesta situação, temos $\lambda_{\text{obs}} \approx \lambda_{\text{emit}}$, resultando em $z \approx 0$.

É fundamental compreender que o redshift não se resume a uma mera estimativa de distância. No contexto da Relatividade Geral, onde espaço e tempo estão intrinsecamente ligados, objetos distantes não apenas revelam sua posição no cosmos, mas também refletem épocas passadas da história do universo. Assim, a luz emitida por objetos com alto redshift nos fornece informações valiosas sobre as eras cósmicas no momento de sua emissão, ou seja,

o redshift funciona como um marcador temporal cósmico, permitindo a datação de eventos fundamentais na evolução do universo. Um exemplo é a RCF associada à liberação dos primeiros fótons quando o universo tinha cerca de 380.000 anos, apresentando um redshift característico de $z \approx 1100$. Já o período de formação das primeiras galáxias, que ocorreu consideravelmente mais tarde, corresponde a um redshift de $z \approx 10$.

Para estabelecer a conexão entre teoria e observações, é fundamental determinar a relação entre o redshift cosmológico z e o fator de escala $a(t)$. Considere a propagação de um feixe de luz ao longo de uma geodésica nula ($ds^2 = 0$) em um espaço-tempo isotrópico. Nesse caso, podemos escolher um sistema de coordenadas em que a trajetória da luz seja puramente radial, eliminando os termos angulares da métrica ($d\Omega^2 = 0$). Assim, a métrica FLRW da equação (2.4) se reduz à:

$$d\chi = \pm c d\eta, \quad (2.12)$$

onde o sinal positivo corresponde a objetos que se afastam do observador e o negativo àqueles que se aproximam.

Suponha que, em um tempo cósmico t_e , uma galáxia situada a uma distância comóvel fixa χ emita um feixe de luz que é detectado por nós no tempo presente t_0 . Integrando a solução positiva da equação (2.12) e utilizando a relação entre tempo conforme e tempo cósmico (2.2), obtemos:

$$\chi = c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.13)$$

Um segundo feixe de luz, emitido em $t_e + \delta t_e$ (onde $\delta t_e = \lambda_e/c$ é o período da onda luminosa), chega ao observador em $t_0 + \delta t_0$. Portanto:

$$\chi = c \int_{t_e + \delta t_e}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.14)$$

Igualando as expressões (2.13) e (2.14), temos:

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e + \delta t_e}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.15)$$

Essa igualdade pode ser reescrita, como:

$$\int_{t_e}^{t_e + \delta t_e} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_0}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)}, \quad (2.16)$$

onde separamos os termos associados ao tempo do observador e o tempo do emissor.

Para pequenos intervalos de tempo ($\delta t \ll t$), podemos aproximar $a(t)$ como constante em cada integral, resultando em:

$$\frac{\delta t_e}{a(t_e)} = \frac{\delta t_0}{a(t_0)}. \quad (2.17)$$

Substituindo $\delta t_e = \lambda_e/c$ e $\delta t_0 = \lambda_0/c$, obtemos:

$$\frac{\lambda_e}{a(t_e)} = \frac{\lambda_0}{a(t_0)}. \quad (2.18)$$

Usando a definição de redshift da equação (2.11) e usando a convenção $a(t_0) = 1$, chegamos à relação fundamental:

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} = \frac{1}{a(t_e)}, \quad (2.19)$$

ou, equivalentemente,

$$a = \frac{1}{1 + z}. \quad (2.20)$$

Compreender a relação entre o redshift e o fator de escala é essencial para as medições cosmológicas. Contudo, como veremos a seguir, a medição de distâncias no universo envolve desafios adicionais.

2.1.4 Distâncias Cosmológicas

Na cosmologia, a medição de distâncias apresenta desafios únicos em comparação com as medições terrestres. Enquanto em escalas planetárias podemos determinar distâncias diretamente, no contexto cósmico dois efeitos fundamentais complicam essa tarefa: (1) a natureza dinâmica do espaço-tempo, manifestada pela expansão cósmica, e (2) o caráter finito da velocidade da luz. Esses fenômenos fazem com que o conceito aparentemente simples de distância se desdobre em múltiplas definições, cada uma adequada a diferentes contextos observacionais.

Mesmo a distância própria (2.6), já mencionada anteriormente, que aparenta ser uma quantidade observável por representar separações físicas levando em conta a expansão do universo, na prática não pode ser medida diretamente. Isso ocorre porque sua definição requer conhecer a distância entre dois objetos em um tempo cósmico específico – o que, como já vimos, não é possível, visto que só temos acesso à luz emitida em diferentes épocas cósmicas, nunca em um instante fixo. Diante disso, nesta subseção exploraremos conceitos alternativos de distância adaptados às observações cosmológicas.

2.1.4.1 Distância de Luminosidade

A distância de luminosidade (d_L) constitui um conceito fundamental em cosmologia observacional, baseado na relação entre a luminosidade intrínseca L de uma fonte (vela padrão) e o fluxo F por ela emitido, relação esta que é expressa por:

$$d_L^2 = \frac{L}{4\pi F}. \quad (2.21)$$

Para compreender como essa distância se relaciona com as propriedades da vela padrão, consideremos uma fonte situada em um redshift z com luminosidade intrínseca $L = dE/dt$, cujo fluxo observado é dado por:

$$F = \frac{dE_0}{dt_0 A_0}, \quad (2.22)$$

sendo que $A_0 = 4\pi a_0^2 S_k(\chi)^2$ representa a área da superfície esférica sobre a qual a radiação se distribui no momento da observação. Nota-se que, para um espaço plano ($k = 0$), o raio dessa esfera corresponde precisamente à distância própria $a_0\chi$, que por sua vez representa a separação física instantânea entre fonte e observador durante a detecção.

A expansão cósmica introduz dois efeitos cruciais na medição. O primeiro deles é o redshift energético, que corresponde à diminuição da energia dos fótons durante sua propagação, conforme demonstra a relação:

$$\frac{dE_0}{dE} = \frac{hf_0}{hf} = \frac{\lambda/c}{\lambda_0/c}, \quad (2.23)$$

na qual h é a constante de Planck e f é a frequência do fóton. Utilizando a relação (2.18) na equação (2.23), temos:

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{a}{a_0} = \frac{1}{1+z}. \quad (2.24)$$

Em adição ao redshift energético, surge também uma dilatação temporal cosmológica, que relaciona os intervalos de tempo medidos na emissão e na detecção pela expressão:

$$\frac{dt_0}{dt} = \frac{a_0}{a} = 1+z, \quad (2.25)$$

relação esta que emerge naturalmente da métrica FLRW, já que, para $ds^2 = 0$ (geodésicas nulas), tem-se que $cdt = a(t)d\chi$ tanto na emissão quanto na detecção, o que conduz diretamente à equação (2.24).

Combinando estes efeitos, o fluxo observado pode ser reescrito na forma:

$$F = \frac{L}{4\pi a_0^2 S_k^2(\chi)(1+z)^2} \quad (2.26)$$

Finalmente, substituindo (2.26) em (2.21), obtém-se a expressão definitiva para a distância de luminosidade:

$$d_L = (1+z)a_0 S_k(\chi) = (1+z)^2 a(t) S_k(\chi). \quad (2.27)$$

2.1.4.2 Distância de Diâmetro Angular

A distância de diâmetro angular constitui um método fundamental em cosmologia observacional, baseado na medição de objetos com dimensões físicas conhecidas - as chamadas **régua padrão**. Como ilustrado na Figura 4, essa técnica relaciona o tamanho físico intrínseco do objeto (ds) com sua extensão angular observada ($d\phi$), permitindo definir:

$$d_A = \frac{ds}{d\phi} \quad (2.28)$$

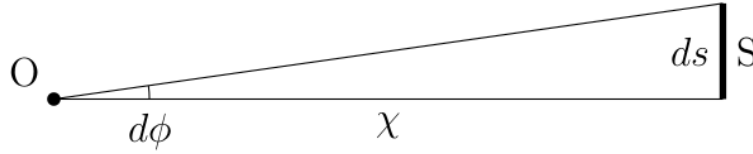


Figura 4 – Representação esquemática da distância de diâmetro angular. A relação entre o tamanho físico ds e o ângulo $d\phi$ permite inferir distâncias cosmológicas. Crédito: (PIATTELLA, 2018).

Consideremos uma régua padrão de tamanho ds situada no redshift z à distância comóvel χ . Partindo da métrica FLRW em um tempo fixo t :

$$ds^2 = a(t)^2(d\chi^2 + S_k^2(\chi)d\Omega^2), \quad (2.29)$$

obtemos, para o comprimento de arco transversal:

$$ds = a(t)S_k(\chi)d\phi. \quad (2.30)$$

Substituindo (2.30) em (2.27), derivamos a expressão fundamental:

$$d_A = a(t)S_k(\chi). \quad (2.31)$$

Uma aplicação particularmente relevante dessa distância é o sistema de lente gravitacional (Figura 5), em que torna-se essencial calcular a distância entre a lente (L) e a fonte (S) em redshifts distintos.

Contrariamente à intuição inicial, a distância $d_A(LS)$ não corresponde simplesmente à diferença $d_A(S) - d_A(L)$. Demonstramos este fato através da geometria do espaço-tempo:

$$ds = a(t_S)\chi_S d\phi_S = a(t_S)\chi_{LS} d\phi_L \quad (2.32)$$

onde $\chi_{LS} = \chi_S - \chi_L$ representa a separação comóvel. Portanto, a distância correta é:

$$d_A(LS) = a(t_S)\chi_{LS} = a(t_S)(\chi_S - \chi_L) \quad (2.33)$$

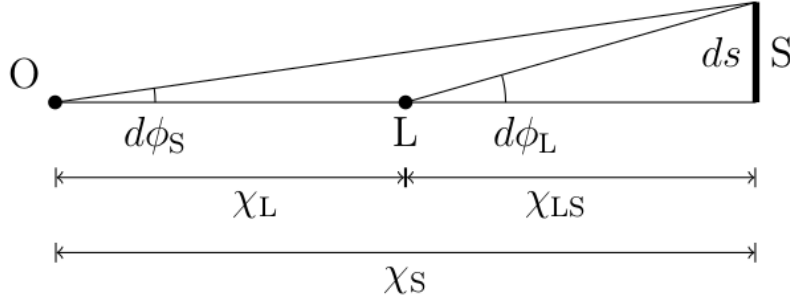


Figura 5 – Configuração geométrica para cálculo de distâncias em sistemas de lente gravitacional. Crédito: (PIATTELLA, 2018).

diferente da expressão intuitiva inicial:

$$d_A(S) - d_A(L) = a(t_S)\chi_S - a(t_L)\chi_L. \quad (2.34)$$

As relações fundamentais entre as distâncias cosmológicas (d_L , d_A) e o fator de escala $a(t)$, estabelecidas nas equações (2.27) e (2.31), demonstram que a geometria observável do universo é governada pela evolução dinâmica de $a(t)$. Embora essas expressões permitam quantificar a taxa de expansão cósmica em diferentes épocas, elas não revelam a natureza dos componentes fundamentais que impulsionam essa dinâmica. Portanto, na próxima seção, aprofundaremos a análise da evolução do universo e seus constituintes fundamentais.

2.2 O Modelo Cosmológico Λ CDM

O modelo Λ CDM (*Lambda-Cold Dark Matter*) consolida-se como o paradigma cosmológico padrão para descrever a evolução e a estrutura do universo em largas escalas. Ancorado na Relatividade Geral de Einstein, este modelo integra quatro componentes fundamentais: a **constante cosmológica** Λ , associada à energia escura responsável pela aceleração da expansão cósmica; a **matéria escura fria** (CDM), que constitui o componente não-bariônico dominante; a **matéria bariônica**, que forma toda a matéria ordinária observável; e a **radiação**, incluindo fótons e neutrinos relativísticos. Sua robustez é evidenciada pela capacidade de descrever de forma consistente múltiplos conjuntos de dados observacionais – desde as anisotropias da RCF (AGHANIM et al., 2020) até a distribuição de larga escala de galáxias (ABBOTT, 2022). No entanto, resultados mais recentes, como os do *Dark Energy Spectroscopic Instrument* (DESI) (DESI Collaboration A. G. ADAME, 2024), desafiam esse paradigma, sugerindo possíveis desvios desse modelo.

Nesta seção, exploraremos os **pilares teóricos do Λ CDM**, destacando as equações dinâmicas que governam a evolução do universo em *background*. Em seguida, discutiremos o estado atual dos parâmetros cosmológicos nesse contexto.

2.2.1 Equações de Friedmann

A descrição da dinâmica do *background* cosmológico requer, de maneira fundamental, o arcabouço da Relatividade Geral (RG) — teoria que se constitui como um dos pilares da cosmologia moderna. Nesse formalismo, as equações de campo de Einstein relacionam de maneira não trivial a distribuição de matéria-energia à curvatura do espaço-tempo, descrevendo assim a dinâmica do universo em larga escala. Matematicamente, esta relação é expressa pela equação tensorial:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.35)$$

onde o tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ descreve a curvatura do espaço-tempo e depende exclusivamente das componentes da métrica $g_{\mu\nu}$, assim como de suas derivadas de primeira e segunda ordem. O escalar de Ricci R corresponde ao traço do tensor de Ricci, obtido pela contração com a métrica ($R \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$). A constante G é a constante gravitacional de Newton, e c representa a velocidade da luz no vácuo. Por fim, o tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ descreve a distribuição e o fluxo de energia e de momento em uma região do espaço-tempo.

Nesta conjuntura, derivaremos as equações de Friedmann no tempo conforme seguindo três etapas principais: primeiro, caracterizaremos o tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$; em seguida, calcularemos os termos geométricos (os tensores de Ricci e escalar de Ricci) que compõem o lado esquerdo das equações de Einstein; por fim, combinando esses resultados, obteremos explicitamente as equações de Friedmann.

2.2.1.1 Tensor Energia-Momento

Na Seção 2.1.1, discutimos que a geometria do espaço-tempo é descrita pela métrica FLRW, porém, não exploramos as propriedades da matéria que a constitui. Para preservar a homogeneidade e isotropia da métrica, o tensor energia-momento deve corresponder ao de um fluido perfeito, expresso por:

$$T_{\mu\nu} = (\rho c^2 + P) \frac{U_\mu U_\nu}{c^2} + P g_{\mu\nu}, \quad (2.36)$$

onde U_μ é a quadri-velocidade do fluido, enquanto ρc^2 e P representam, respectivamente, a densidade de energia e a pressão no referencial de repouso do fluido.

Para demonstrar a compatibilidade desse tensor com as propriedades de homogeneidade e isotropia, consideremos um observador comóvel ao fluido, ou seja, com $U_\mu = (c, 0, 0, 0)$. As componentes de $T_{\mu\nu}$ podem ser organizadas como:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T_{00} & T_{0j} \\ T_{i0} & T_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Densidade de energia} & \text{Fluxo de energia} \\ \text{Densidade de momento} & \text{Tensor de tensão} \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

Em um universo homogêneo, a densidade de energia deve ser independente da posição, podendo variar apenas com o tempo conforme: $T_{00} = \rho(\eta)c^2$. Além disso, a isotropia exige que os valores médios dos vetores T_{i0} e T_{0j} se anulem no referencial comóvel, isto é, $T_{i0} = T_{0j} = 0$. Por fim, a isotropia em torno da origem implica que o tensor T_{ij} seja proporcional a δ_{ij} . Como a métrica g_{ij} é dada por $a^2\delta_{ij}$ na origem, temos:

$$T_{ij}(\vec{x} = 0) \propto \delta_{ij} \propto g_{ij}(\vec{x} = 0), \quad (2.38)$$

assim, o tensor energia-momento para um fluido ideal na métrica FLRW assume a forma:

$$T_{00} = \rho c^2, \quad T_{i0} = T_{0i} = 0, \quad T_{ij} = P g_{ij}(\eta, \vec{x}), \quad (2.39)$$

de modo que, se não considerarmos um observador comóvel, recuperamos a equação (2.36).

Nesse contexto, uma pergunta que naturalmente surge é como essa densidade de energia evolui com o tempo conforme? Desse modo, como energia e momento se conservam localmente, o tensor energia-momento deve satisfazer as equações de conservação, isto é, a equação de continuidade, para a densidade de energia, e a equação de Euler, para a densidade de momento. No contexto de relatividade geral, tais equações são encapsuladas pelas identidades de Bianchi:

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0. \quad (2.40)$$

Expandindo a derivada covariante, obtemos:

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu = \partial_\mu T^\mu_\nu + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} T^\lambda_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} T^\mu_\lambda = 0. \quad (2.41)$$

Para a conservação da densidade de energia, ou seja, $\nu = 0$, temos a seguinte equação:

$$\nabla_\mu T^\mu_0 = \partial_\mu T^\mu_0 + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} T^\lambda_0 - \Gamma^\lambda_{\mu 0} T^\mu_\lambda = 0, \quad (2.42)$$

por isotropia, $T^i_0 = 0$, logo a equação (2.42) se reduz para:

$$\frac{d(\rho c^2)}{d\eta} + \Gamma^\mu_{\mu 0}(\rho c^2) - \Gamma^\lambda_{\mu 0} T^\mu_\lambda = 0. \quad (2.43)$$

Calculando os símbolos de Christoffel relevantes no tempo conforme, $\Gamma^i_{i0} = 3\frac{a'}{a}$, chegamos à equação de continuidade:

$$\rho' + 3\frac{a'}{a} \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) = 0. \quad (2.44)$$

Esta equação é especialmente importante, visto que ela descreve a conservação local da energia no contexto da cosmologia. Note que a noção usual de conservação de energia

derivada do teorema de Noether depende de uma simetria sob translações no tempo ($d\rho/dt = 0$), contrariando a equação (2.44) que quebra essa simetria devido à expansão do universo.

Introduzindo, então, uma equação de estado da forma $w = P/\rho c^2$, obtemos a solução da equação (2.44) como:

$$\rho \propto a^{-3(1+w)}, \quad (2.45)$$

que mostra como a densidade de energia depende do parâmetro w . Por exemplo, no universo atual, três componentes principais contribuem com diferentes equações de estado:

- **Matéria não relativística** (poeira cósmica): Onde a pressão é desprezível quando comparada à densidade de energia ($P \ll \rho c^2$), caracterizando um fluido sem pressão com equação de estado $w = 0$. Neste caso, a solução (2.45) mostra que a densidade de energia evolui com o fator de escala como $\rho \propto a^{-3}$.
- **Radiação**: Para um fluido relativístico com equação de estado $w = 1/3$, onde a pressão é significativa ($P = \frac{1}{3}\rho c^2$), obtemos $\rho \propto a^{-4}$. Essa dependência mais acentuada — em relação à da matéria não relativística — decorre da combinação da diluição volumétrica (a^{-3}) com o redshift do comprimento de onda dos fótons (a^{-1}), totalizando (a^{-4}).
- **Energia escura**: No caso da constante cosmológica ($w = -1$), a densidade de energia permanece invariante ($\rho = \text{constante}$) durante a expansão.

2.2.1.2 Geometria

Para desenvolver explicitamente o lado esquerdo das equações de Einstein, começamos aplicando a métrica FLRW à equação (2.35). Como ponto de partida, utilizamos a definição do tensor de Ricci em termos dos símbolos de Christoffel, isto é:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\lambda\rho}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\rho}^\lambda. \quad (2.46)$$

Devido à simetria da métrica FLRW, é possível simplificar consideravelmente estes cálculos. Em particular, a condição de isotropia implica que as componentes $R_{i0} = R_{0i}$ se anulam. Desta forma, as únicas componentes não-nulas do tensor de Ricci são :

$$R_{00} = -\frac{3}{c^2} \left(\frac{a''}{a} - \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \right), \quad (2.47)$$

$$R_{ij} = \left(\frac{a''}{a} + \left(\frac{a'}{a} \right)^2 + \frac{2kc^2}{a^2 R_0^2} \right) \frac{g_{ij}}{a^2 c^2}. \quad (2.48)$$

Definidas estas expressões, podemos imediatamente obter o escalar de Ricci contraindo o tensor métrico com o tensor de Ricci, ou seja,

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = -\frac{1}{a^2} R_{00} + \frac{1}{a^2} R_{ii} = \frac{6}{a^2 c^2} \left(\frac{a''}{a} + \frac{kc^2}{a^2 R_0} \right). \quad (2.49)$$

Estes componentes nos fornecem todos os elementos necessários para prosseguir com a análise dinâmica do universo homogêneo e isotrópico.

2.2.1.3 Equações Dinâmicas

Com os ingredientes fundamentais reunidos para derivar as equações que governam a evolução cósmica, podemos calcular as componentes temporais (0,0) das equações de Einstein:

$$R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{00}. \quad (2.50)$$

Substituindo as expressões obtidas para R_{00} e para o escalar de Ricci R na métrica com tempo conforme, e levando em conta que $T_{00} = \rho c^2$ e $g_{00} = -a^2$, chegamos a:

$$-\frac{3}{c^2} \left(\frac{a''}{a} - \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \right) - \frac{1}{2} (-a^2) \left\{ \frac{6}{c^2 a^2} \left[\left(\frac{a''}{a} \right) + \frac{kc^2}{a^2 R_0^2} \right] \right\} = \frac{8\pi G}{c^2} \rho. \quad (2.51)$$

Após simplificação, obtemos a fundamental **equação de Friedmann**, que governa a evolução do fator de escala no nosso universo:

$$\left(\frac{a'}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho a^2 - \frac{kc^2}{R_0^2}. \quad (2.52)$$

A equação resultante é uma equação diferencial não-linear complexa para $a(\eta)$, cujas soluções analíticas geralmente só são possíveis em cenários simplificados — por exemplo, quando uma componente domina sobre as demais. Essa dinâmica (utilizando o tempo próprio) é ilustrada de forma esquemática na Figura 6. É crucial, também, notar que, nesta expressão, ρ engloba todas as contribuições relevantes à densidade de energia do universo, isto é, a radiação (incluindo fótons ρ_γ e neutrinos ρ_ν), a matéria (incluindo matéria bariônica ρ_b e matéria escura fria ρ_c), e a energia escura (constante cosmológica ρ_Λ).

O próximo passo natural é examinar as componentes puramente espaciais das equações de Einstein. Para isso, partimos da expressão geral:

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij}. \quad (2.53)$$

Inserindo nossos resultados anteriores para R_{ij} (2.48), para o escalar de Ricci (2.49), e usando $T_{ij} = P g_{ij}$ (onde P é a pressão isotrópica), obtemos:

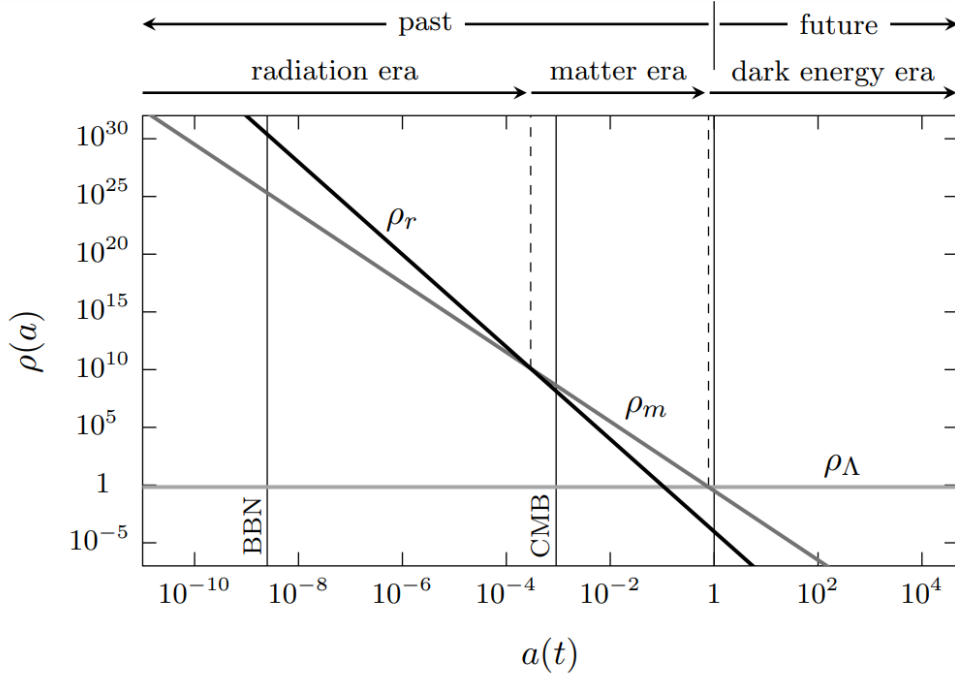


Figura 6 – Evolução da densidade de energia no universo. Onde no início do universo, a componente de radiação dominava, seguida pela matéria e, por fim, pela energia escura. Créditos: (BAUMANN, 2022)

$$\left\{ \left(\frac{a''}{a} + \left(\frac{a'}{a} \right)^2 + \frac{2kc^2}{a^2 R_0^2} \right) \frac{g_{ij}}{a^2 c^2} \right\} - \frac{1}{2} g_{ij} \left\{ \frac{6}{c^2 a^2} \left[\left(\frac{a''}{a} \right) + \frac{kc^2}{a^2 R_0^2} \right] \right\} = \frac{8\pi G}{c^4} P g_{ij}. \quad (2.54)$$

Simplificando esta expressão temos:

$$\frac{1}{a^2 c^2} \left[-\frac{2a''}{a} + \left(\frac{a'}{a} \right)^2 - \frac{kc^2}{a^2 R_0^2} \right] = \frac{8\pi G}{c^4} P. \quad (2.55)$$

Combinando este resultado com a equação de Friedmann (2.52), derivamos a importante **equação de Raychaudhuri**:

$$\frac{a''}{a} = \frac{4\pi G}{3} \left(\rho - \frac{3P}{c^2} \right) a^2 - \frac{kc^2}{R_0^2}. \quad (2.56)$$

Para interpretar melhor a equação de Friedmann do ponto de vista observacional, é conveniente expressá-la em termos de quantidades adimensionais. Para isso, primeiramente, definimos o parâmetro de Hubble no tempo conforme $\mathcal{H} \equiv a'/a$ e reescrevemos a equação (2.52) como:

$$\mathcal{H}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho a^2 - \frac{kc^2}{R_0^2}. \quad (2.57)$$

Em seguida, introduzimos o conceito fundamental de **densidade crítica** $\rho_{\text{crit},0}$, que corresponde à densidade de energia num universo espacialmente plano ($k = 0$) na época atual ($\eta = \eta_0$):

$$\rho_{\text{crit},0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \approx 1.88 \times 10^{-26} h^2 \text{ kg m}^{-3}, \quad (2.58)$$

onde H_0 é a constante de Hubble. Esta quantidade de referência permite definir os **parâmetros de densidade** adimensionais para cada componente cosmológica:

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_{i,0}}{\rho_{\text{crit},0}}, \quad \text{com } i = r \text{ (radiação)}, m \text{ (matéria)}, \Lambda \text{ (energia escura)}. \quad (2.59)$$

Incluindo adicionalmente o **parâmetro de curvatura** $\Omega_k \equiv -kc^2/(R_0 H_0)^2$, a equação de Friedmann no tempo conforme assume sua forma mais útil para comparações com dados observacionais:

$$\frac{\mathcal{H}^2(a)}{H_0^2} = \Omega_r a^{-2} + \Omega_m a^{-1} + \Omega_\Lambda a^2 + \Omega_k, \quad (2.60)$$

onde explicitamos a dependência do parâmetro de Hubble com o fator de escala $a(\eta)$. Avaliando esta expressão no presente ($a = 1$), obtemos a importante relação:

$$\Omega_r + \Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1. \quad (2.61)$$

A determinação precisa destes parâmetros através de observações cosmológicas constitui uma função central para determinarmos a composição do Universo atual. Desse modo, a próxima seção será focada em descrever a conjectura desses parâmetros na cosmologia.

2.2.2 Nosso universo

Como discutido anteriormente, o modelo cosmológico que melhor se ajusta às observações atuais é o modelo Λ CDM. Esse modelo descreve a evolução cósmica com base em um conjunto de parâmetros fundamentais, conforme apresentado na seção anterior. No entanto, a determinação precisa desses parâmetros requer a combinação sinérgica de múltiplas sondas observacionais, cada uma sensível a diferentes aspectos da estrutura e dinâmica do Universo.

Uma das estimativas mais precisas desses parâmetros é obtida pela análise da RCF realizada pela missão *Planck* (AGHANIM et al., 2020). Essa análise fornece um forte conjunto de restrições cosmológicas, que servem de base para combinações com outras sondas observacionais — como medidas de oscilações acústicas de bárions (BAO) do DESI, supernovas do tipo Ia do Pantheon e lentes gravitacionais fracas do levantamento Dark Energy Survey (DES). Essas combinações permitem testar a consistência do modelo cosmológico em diferentes regimes observacionais além de melhorar os vínculos entre os parâmetros cosmológicos. Além de oferecer estimativas extremamente precisas dos parâmetros cosmológicos, a análise do Planck também explorou extensões do modelo Λ CDM, investigando possíveis desvios em relação ao paradigma padrão. Os resultados, no entanto, reforçam que o modelo Λ CDM permanece como a descrição mais consistente do nosso universo até o momento.

A seguir, apresentamos alguns dos principais parâmetros obtidos nessa análise, os quais definem qualitativamente as propriedades do nosso universo:

Parâmetros de densidade:

- $\Omega_\Lambda = 0.684 \pm 0.007$: densidade de energia escura;
- $\Omega_m = 0.315 \pm 0.007$: densidade total de matéria (incluindo matéria escura e bariônica);
- $\Omega_k = 0.0007 \pm 0.0019$: densidade de curvatura, indicando um universo espacialmente plano dentro dos limites de incerteza;
- $\Omega_r = (9.2 \pm 0.1) \times 10^{-5}$: densidade da radiação (incluindo fótons e neutrinos relativísticos).

Com esses valores, podemos afirmar que o nosso universo atual é aproximadamente constituído 68% por energia escura, 31% por matéria e 0.009% por radiação.

Outros parâmetros importantes:

- $H_0 = (67.4 \pm 0.5) \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$: constante de Hubble, que mede a taxa de expansão atual do universo;
- $\sigma_8 = 0.811 \pm 0.006$: amplitude das flutuações de densidade de matéria no universo;
- $S_8 \equiv \sigma_8 \sqrt{\Omega_m/0.3} = 0.831 \pm 0.013$: combinação que reduz degenerescências entre σ_8 e Ω_m ;
- $n_s = 0.965 \pm 0.004$: índice espectral das perturbações primordiais;
- $A_s \approx 2.1 \times 10^{-9}$: amplitude do espectro de potência primordial;
- $\tau = 0.054 \pm 0.007$: profundidade óptica à reionização;
- $T_0 \approx 2.725 \text{ K}$: temperatura atual da RCF;
- $N_{\text{eff}} = 2.99 \pm 0.17$: número efetivo de espécies relativísticas no universo primitivo, valor compatível com a previsão do modelo padrão ($N_{\text{eff}} = 3.046$);
- $\sum m_\nu < 0.12 \text{ eV}$ (limite superior): soma das massas dos neutrinos.

Muitos desses parâmetros, que serão importantes nas seções seguintes, têm origem na física do universo primordial, cujo estudo detalhado está fora do escopo deste trabalho. É crucial, porém, destacar que nem todos os parâmetros listados acima são diretamente medidos pelas observações. Na prática, o satélite *Planck* mede com alta precisão as anisotropias da RCF de forma que, a partir desses dados, apenas um subconjunto limitado de parâmetros é diretamente acessível, por exemplo: a densidade de matéria bariônica, o índice espectral n_s , a profundidade óptica τ .

A maioria dos demais parâmetros — como H_0 , σ_8 , Ω_Λ , S_8 e até mesmo Ω_m — não são diretamente observáveis pela RCF. Em vez disso, eles são *inferidos* com base em um modelo cosmológico assumido, geralmente o Λ CDM. Isso é feito por meio de ajustes estatísticos que buscam o conjunto de parâmetros que melhor reproduz os dados observacionais sob as hipóteses do modelo. Essas inferências, portanto, são dependentes do modelo em si, ou seja, ao assumir um modelo diferente, como o w_0w_a CDM, os valores estimados dos parâmetros também mudam.

Essa dependência é uma das razões pelas quais o próprio trabalho do *Planck* considerou extensões ao modelo Λ CDM, com o objetivo de investigar possíveis desvios ou generalizações do paradigma padrão. Um exemplo em especial é a chamada parametrização de CPL (CHEVALIER; POLARSKI, 2001) - denominada de w_0w_a CDM -, onde a equação de estado da energia escura é modelada como:

$$w(a) = w_0 + (1 - a)w_a, \quad (2.62)$$

com $w_0 = -1$ e $w_a = 0$ recuperando o cenário da constante cosmológica. Na análise do *Planck*, ao fixar $w_a = 0$, obtém-se $w_0 = -1.028 \pm 0.031$, compatível com Λ dentro das incertezas estatísticas.

Apesar da boa concordância geral com o modelo Λ CDM, ainda existem tensões notáveis entre observações diferentes, devido ao desconhecimento fundamental de componentes como a inflação, a energia escura e a matéria escura. Dentre essas tensões, destaca-se a tensão em H_0 , já discutida anteriormente, e a tensão em σ_8 , observada entre os valores inferidos a partir da RCF e os obtidos por levantamentos de lenteamento gravitacional fraco, como KiDS, DES e HSC.

Avanços recentes têm buscado mitigar essas tensões. Por exemplo, o trabalho de (STÖLZNER, 2025) utilizando dados do KiDS, foi capaz de aprimorar o controle sobre os sistemáticos associados a redshifts fotométricos e calibração das distribuições de redshift. De modo que, essa análise encontrou $S_8 = 0.814^{+0.011}_{-0.012}$, compatível com os resultados do *Planck* a 0.77σ , sugerindo que a tensão anterior pode ter se originado de sistemáticos mal modelados. Outro resultado importante é o do DESI (DESI Collaboration; AL., 2024), que, ao combinar medidas de BAO com RCF e supernovas tipo Ia, encontrou preferência por modelos do tipo w_0w_a CDM. Ao permitir que w_0 e w_a variem livremente, os dados favorecem valores com $w_0 > -1$ e $w_a < 0$, indicando um possível desvio em relação ao modelo padrão.

Grande parte das estimativas do *Planck* baseia-se em observações das anisotropias da RCF, que refletem perturbações em pequenas escalas no universo primordial. Compreender a evolução dessas perturbações é fundamental para investigar a formação das estruturas em larga escala. Por essa razão, na próxima seção, focaremos no estudo da formação das estruturas do nosso universo a partir dessas perturbações iniciais.

2.3 Formação de Estruturas

Até o momento, analisamos um universo perfeitamente homogêneo e isotrópico. No entanto, essa descrição é insuficiente para capturar toda a complexidade do cosmos, especialmente no que diz respeito ao *clustering* de matéria — o processo que leva à formação das estruturas em larga escala observadas atualmente. Para isso, é necessário recorrer à teoria de perturbações na Relatividade Geral, com o objetivo de descrever a evolução de pequenas flutuações na densidade da matéria. Esse formalismo permite compreender como essas perturbações crescem ao longo do tempo, dando origem à chamada teia cósmica — uma estrutura em larga escala composta por aglomerados (nós), filamentos e vastos vazios que organizam a matéria no universo. A complexidade da teia cósmica é ilustrada na Figura 7, que apresenta uma simulação numérica da estrutura em larga escala do universo.

Neste capítulo, apresentaremos o arcabouço teórico das perturbações lineares no contexto relativístico, com ênfase no regime dominado por matéria escura fria. A partir dessa abordagem, desenvolveremos de forma gradual a teoria que descreve a evolução das perturbações cósmicas: começando pelas flutuações na métrica do espaço-tempo, passando pela dinâmica da matéria perturbada, até chegar às equações que governam o crescimento dessas inomogeneidades. Por fim, abordaremos as ferramentas estatísticas que permitem conectar essa teoria com as observações do universo.

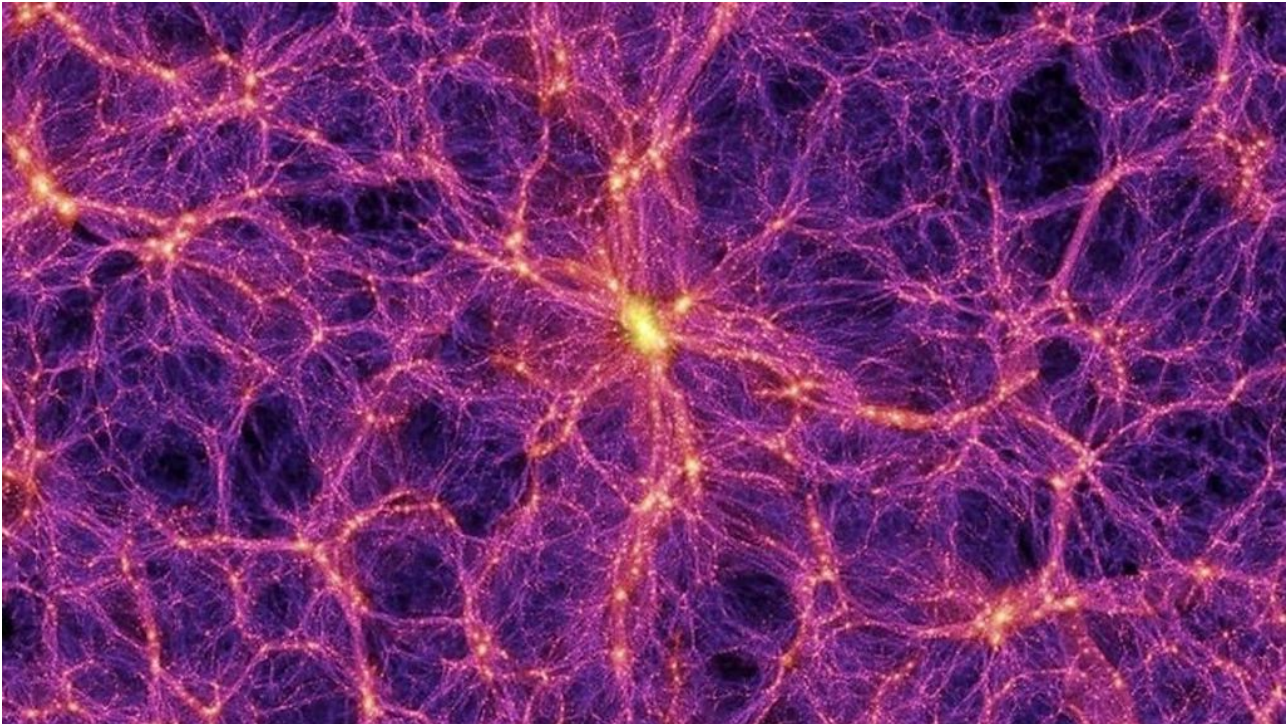


Figura 7 – Simulação de um corte bidimensional da estrutura em larga escala do universo. Pontos amarelos representam aglomerados de galáxias, filamentos roxos ilustram a distribuição da matéria escura, e regiões pretas correspondem a vazios cósmicos. Crédito: (SPRINGEL et al., 2005)

2.3.1 Perturbações Lineares

Para calcular as equações de Einstein perturbadas, utilizamos a teoria de perturbações lineares, considerando apenas termos de primeira ordem e desprezando contribuições não lineares de ordem superior. Nesse formalismo, a métrica e o tensor energia-momento são expressos como:

$$g_{\mu\nu}(\eta, \mathbf{x}) = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}(\eta, \mathbf{x}), \quad (2.63)$$

$$T_{\mu\nu}(\eta, \mathbf{x}) = \bar{T}_{\mu\nu} + \delta T_{\mu\nu}(\eta, \mathbf{x}), \quad (2.64)$$

onde a barra denota as quantidades no *background* (solução homogênea e isotrópica de ordem zero), enquanto δ representa as perturbações de primeira ordem.

2.3.1.1 Perturbações da métrica

Para definirmos as perturbações da métrica, consideramos o caso em que a métrica de *background*, $\bar{g}_{\mu\nu}$, corresponde à métrica FLRW plana. Assim o espaço-tempo perturbado pode ser descrito por:

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[-(1 + 2A) d\eta^2 + 2B_i dx^i d\eta + (\delta_{ij} + 2E_{ij}) dx^i dx^j \right], \quad (2.65)$$

sendo A , B_i e E_{ij} funções do espaço e do tempo conforme. Para melhor interpretar essas perturbações, aplicamos a decomposição escalar-vetorial-tensorial (EVT), na qual os termos vetoriais e tensoriais podem ser definidos por:

$$B_i = \underbrace{\partial_i B}_{\text{escalar}} + \underbrace{\hat{B}_i}_{\text{vetor}}, \quad (2.66)$$

$$E_{ij} = C \delta_{ij} + \underbrace{\partial_{(i} \partial_{j)} E}_{\text{escalar}} + \underbrace{\partial_{(i} \hat{E}_{j)}}_{\text{vetor}} + \underbrace{\hat{E}_{ij}}_{\text{tensor}}, \quad (2.67)$$

com as definições auxiliares:

$$\partial_{(i} \partial_{j)} E \equiv \left(\partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2 \right) E, \quad \partial_{(i} \hat{E}_{j)} \equiv \frac{1}{2} (\partial_i \hat{E}_j + \partial_j \hat{E}_i). \quad (2.68)$$

Essa decomposição é particularmente útil porque, em ordem linear, os modos escalares, vetoriais e tensoriais evoluem de forma independente nas equações de Einstein. No contexto da formação de estruturas, os modos escalares são os mais relevantes, pois estão associados às flutuações de densidade e aos potenciais gravitacionais. Os modos vetoriais, relacionados à vorticidade, não são gerados durante a inflação e decaem rapidamente com a expansão do universo, enquanto os modos tensoriais correspondem a ondas gravitacionais primordiais e não interagem com os escalares em primeira ordem.

Dessa forma, na análise linear da formação de estruturas, podemos desprezar os modos vetoriais e tensoriais, simplificando as equações (2.66) e (2.67) para:

$$B_i = \partial_i B, \quad E_{ij} = C \delta_{ij} + \partial_{(i} \partial_{j)} E. \quad (2.69)$$

É importante destacar que as perturbações da métrica dependem da escolha de coordenadas, ou seja, do **gauge**. A métrica perturbada implica uma folheação específica do espaço-tempo, e diferentes escolhas de coordenadas podem alterar os valores das variáveis de perturbação. Por isso, é essencial trabalhar com combinações invariantes por transformações de coordenadas, conhecidas como **variáveis de Bardeen**, definidas por:

$$\begin{aligned} \Psi &\equiv A + \mathcal{H}(B - E') + (B - E')', \\ \Phi &\equiv -C + \frac{1}{3} \nabla^2 E - \mathcal{H}(B - E'), \end{aligned} \quad (2.70)$$

onde $E' = \partial_\eta E$ representa a derivada temporal conforme da perturbação E . Por simplicidade, omitimos aqui as variáveis de Bardeen associadas às partes vetorial e tensorial. Essas variáveis invariantes de gauge correspondem as "reais" perturbações do espaço-tempo, pois não podem ser eliminadas por transformações de gauge.

Uma abordagem alternativa ao problema do gauge consiste em fixá-lo explicitamente e monitorar todas as perturbações na métrica e na matéria. Uma escolha apropriada de gauge pode simplificar significativamente a análise, sendo que diferentes contextos exigem diferentes escolhas de gauge. No contexto de formação de estruturas, o gauge Newtoniano surge como a escolha mais natural, sendo ela definida por:

$$B = E = 0, \quad (2.71)$$

reduzindo as perturbações da métrica a A e C . Relacionando com as variáveis de Bardeen em (2.70), a métrica perturbada (2.65) pode ser reescrita como:

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[-(1 + 2\Psi) d\eta^2 + (1 - 2\Phi) \delta_{ij} dx^i dx^j \right]. \quad (2.72)$$

Uma vantagem desse gauge é que a métrica se torna diagonal, simplificando os cálculos e tornando a interpretação física mais transparente. Nesse caso, as hipersuperfícies de tempo constante são ortogonais às linhas de mundo do observador em repouso nas coordenadas (pois $B = 0$), e a geometria induzida em uma hipersuperfície de tempo constante é isotrópica (pois $E = 0$).

2.3.1.2 Perturbações da matéria

Com a métrica perturbada definida, consideramos agora as perturbações do tensor energia-momento. Por conveniência, expressamos essas perturbações com índices mistos, isto é:

$$\begin{aligned}
T_0^0 &\equiv -(\bar{\rho} + \delta\rho), \\
T_i^0 &\equiv (\bar{\rho} + \bar{P}) v_i = -T_0^i, \\
T_j^i &\equiv (\bar{P} + \delta P) \delta_j^i + \Pi_j^i, \quad \Pi_i^i \equiv 0,
\end{aligned} \tag{2.73}$$

onde v_i é a velocidade de *bulk* (velocidade média do fluido em um ponto do espaço-tempo) e Π_j^i é a tensão anisotrópica. Frequentemente, a densidade de momento é escrita como $q_i \equiv (\bar{\rho} + \bar{P})v_i$. Se houver várias contribuições para o tensor energia-momento (isto é, fótons, bárions e matéria escura), elas são somadas ($T_{\mu\nu} = \sum_a T_{\mu\nu}^{(a)}$), de modo que:

$$\delta\rho = \sum_a \delta\rho_a, \quad \delta P = \sum_a \delta P_a, \quad q_i = \sum_a q_i^{(a)}, \quad \Pi_{ij} = \sum_a \Pi_{ij}^{(a)}. \tag{2.74}$$

Definido isso, aplicamos a decomposição EVT às perturbações do tensor energia-momento, obtendo:

$$\begin{aligned}
v_i &= \partial_i v + \hat{v}_i, \\
q_i &= \partial_i q + \hat{q}_i, \\
\Pi_{ij} &= \partial_{(i} \partial_{j)} \Pi + \partial_{(i} \hat{\Pi}_{j)} + \hat{\Pi}_{ij}.
\end{aligned} \tag{2.75}$$

Uma forma conveniente de expressar a perturbação de densidade é através do contraste de densidade adimensional, $\delta \equiv \delta\rho/\rho$. Considerando apenas perturbações escalares, estas são descritas por quatro variáveis: $(\delta_a, \delta P_a, v_a, \Pi_a)$, onde a indexa diferentes espécies de matéria.

Assim como no caso da métrica, essas perturbações dependem da escolha de coordenadas, sendo necessário definir combinações invariantes de gauge.

- **Contraste de densidade comóvel:**

$$\Delta \equiv \frac{\delta\rho + \bar{\rho}'(v + B)}{\bar{\rho}}. \tag{2.76}$$

onde no gauge comóvel ($v = B = 0$), o contraste de densidade comóvel se reduz ao contraste de densidade.

- **Perturbações de curvatura:**

Duas quantidades adicionais invariantes de gauge são:

$$\zeta = -C + \frac{1}{3} \nabla^2 E + \mathcal{H} \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}'}, \tag{2.77}$$

$$\mathcal{R} = -C + \frac{1}{3} \nabla^2 E - \mathcal{H}(v + B), \tag{2.78}$$

que representam a curvatura intrínseca das hipersuperfícies espaciais nos gauges de densidade uniforme e comóvel, respectivamente.

Essas três perturbações invariantes de gauge ($\Delta, \zeta, \mathcal{R}$) não são independentes, satisfazendo a relação:

$$\zeta = \mathcal{R} - \mathcal{H} \frac{\bar{\rho}}{\rho'} \Delta. \quad (2.79)$$

Em grandes escalas, ζ e $\mathcal{R}$ podem ser tratadas como equivalentes. Uma propriedade crucial das perturbações de curvatura é que elas permanecem constantes em escalas superiores ao raio de Hubble ($k \ll \mathcal{H}(t)$) quando as perturbações da matéria são adiabáticas, ou seja, quando $\delta P = c_s^2 \delta \rho$, onde c_s é a velocidade do som no fluido.

2.3.1.3 Equações de Einstein perturbadas

Com todas as perturbações em mãos, derivaremos as equações linearizadas de Einstein no gauge Newtoniano. Para isso vamos, primeiramente calcular o tensor de Ricci levando em conta as perturbações da métrica.

$$R_{00} = -3\mathcal{H}' + \nabla^2 \Psi + 3\mathcal{H}(\Phi' + \Psi') + 3\Phi'', \quad (2.80)$$

$$R_{0i} = 2\partial_i(\Phi' + \mathcal{H}\Psi), \quad (2.81)$$

$$R_{ij} = \left[\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2 - \Phi'' + \nabla^2 \Phi - 2(\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)(\Phi + \Psi) - \mathcal{H}\Psi' - 5\mathcal{H}\Phi' \right] \delta_{ij} + \partial_i \partial_j (\Phi - \Psi). \quad (2.82)$$

Em seguida, é necessário calcular o escalar de Ricci, onde:

$$R = g^{00}R_{00} + \underbrace{2g^{0i}R_{0i}}_{\mathcal{O}(2)} + g^{ij}R_{ij} \quad (2.83)$$

de modo que, se descartarmos os termos não lineares, temos:

$$a^2 R = 6(\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2) - 2\nabla^2 \Psi + 4\nabla^2 \Phi - 12(\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Psi - 6\Phi'' - 6\mathcal{H}(\Psi' + 3\Phi'), \quad (2.84)$$

na qual é possível notar que o primeiro termo corresponde a parte homogênea discutida na seção(2.2) e os termos restantes correspondem a correções de primeira ordem.

Definidos esses objetos, vamos, primeiramente, calcular o termo associados a parte temporal ($\mu = \nu = 0$) das equações de Einstein, isto é,

$$\begin{aligned} G_0^0 &= g^{00} \left(R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R \right) \\ &= -a^{-2} (1 - 2\Psi) R_{00} - \frac{1}{2} R \end{aligned} \quad (2.85)$$

Substituindo R_{00} pela equação (2.80) e R pela equação (2.84) e colecionando somente termos de primeira ordem, temos:

$$\delta G_0^0 = -2a^{-2} \left[\nabla^2 \Phi - 3\mathcal{H}(\Phi' + \mathcal{H}\Psi) \right] \quad (2.86)$$

de forma que, a equação perturbada puramente temporal de Einstein é dada por:

$$\nabla^2 \Phi - 3\mathcal{H}(\Phi' + \mathcal{H}\Psi) = 4\pi G a^2 \delta\rho \quad (2.87)$$

Essa equação é a generalização relativística da equação de Poisson. No caso, dentro do raio de Hubble, ou seja, para $k \gg \mathcal{H}$, temos que $\nabla^2 \Phi \gg 3\mathcal{H}(\Phi' + \mathcal{H}\Psi)$ então a equação (2.87) se reduz a $\nabla^2 \Phi \approx 4\pi G a^2 \delta\rho$ (equação de Poisson no limite newtoniano).

Agora vamos considerar a parte puramente espacial da equação de Einstein. As componentes relevantes do tensor de Einstein são:

$$\begin{aligned} G_j^i &= g^{ik} \left(R_{kj} - \frac{1}{2} g_{kj} R \right) \\ &= a^{-2} (1 + 2\Phi) \delta^{ik} R_{kj} - \frac{1}{2} \delta_j^i R \end{aligned} \quad (2.88)$$

Pela equação (2.82), é possível perceber que a maioria dos termos são proporcionais a δ_{ij} . Desse modo, uma forma inteligente de se evitar lidar com todos esses termos é tomar a parte sem traço do tensor G_j^i , contraindo G_j^i com o tensor de projeção, $P_j^i \equiv \partial^j \partial_i - \frac{1}{3} \delta_j^i \nabla^2$. Usando isso na equação (2.88), temos:

$$P_j^i G_j^i = \frac{2}{3} a^{-2} \nabla^4 (\Phi - \Psi). \quad (2.89)$$

Para encontrarmos então as equações de Einstein, é necessário aplicar o tensor de projeção também no lado direito da equação, ou seja, no tensor energia-momento. Desse modo, temos:

$$P_j^i T_j^i = P_j^i \Pi_j^i = \frac{2}{3} \nabla^4 \Pi \quad (2.90)$$

Igualando a equação (2.89) e (2.90), nós temos a solução para a parte puramente espacial sem traço, dada por:

$$\Phi - \Psi = 8\pi G a^2 \Pi \quad (2.91)$$

Em largas escalas, energia escura e baryons podem ser descritos como um fluido perfeito com tensão anisotrópica negligenciável. Photons começam a desenvolver tensão anisotrópica somente durante a era dominada por matéria, quando a sua densidade de energia é subdominante. A única componente para a qual essa tensão é relevante é a de neutrinos livres e esse efeito é relativamente pequeno, de forma que optamos por desconsiderá-lo (BAUMANN, 2022). Dessa forma, essa equação (2.91) só implica que $\Psi \approx \Phi$.

Por fim, os termos relevantes da parte espaço-temporal dessas equações são:

$$\begin{aligned} G_i^0 &= g^{0\mu} G_{\mu i} = g^{00} R_{0i} \\ &= -2a^{-2} \partial_i (\Phi' + \mathcal{H}\Psi) \end{aligned} \quad (2.92)$$

Comparando isso com a equação (2.73) e escrevendo em termos da densidade de momento, podemos encontrar:

$$\Phi' + \mathcal{H}\Psi = -4\pi G a^2 q \quad (2.93)$$

Dessa forma, podemos reescrever a equação de Poisson (2.87) utilizando a definição do contraste de densidade comóvel (2.76) e a equação (2.93), resultando em:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G a^2 \bar{\rho} \Delta \quad (2.94)$$

Essa equação toma a forma da generalização relativística da equação de Poisson para todas as escalas, o que, por sua vez, nos permitirá relacionar as soluções para o potencial gravitacional diretamente com as soluções para a fonte de perturbação da matéria. Finalmente, a parte com traço das equações de Einstein puramente espaciais é dada por:

$$\Phi'' + \frac{1}{3}\nabla^2(\Psi - \Phi) + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Psi + \mathcal{H}\Psi' + 2\mathcal{H}\Phi' = 4\pi G a^2 \delta P \quad (2.95)$$

assumindo $\Psi \approx \Phi$ e utilizando um fluido adiabático, ou seja, $\delta P = c_s^2 \delta \rho$ reduzimos a equação a:

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi = 4\pi G a^2 c_s^2 \delta \rho \quad (2.96)$$

Se relacionarmos o potencial $\delta \rho$ com Φ pela equação (2.87), podemos encontrar a seguinte equação de evolução para o potencial gravitacional:

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi = c_s^2 \left[\nabla^2 \Phi - 3\mathcal{H}(\Phi' + \mathcal{H}\Phi) \right] \quad (2.97)$$

onde $c_s^2 = w$. Dito isso, ao usar a relação: $\mathcal{H}' = -\frac{1}{2}(1 + 3w)\mathcal{H}^2$ (combinação das equações de Fridmann no tempo conforme (2.52) (2.56) com a equação de estado) temos:

$$\Phi'' + 3(1 + w)\mathcal{H}\Phi' - w\nabla^2 \Phi = 0 \quad (2.98)$$

Essa equação é de suma importância para descrever a evolução do potencial gravitacional ao longo das diferentes eras do universo, em que uma única componente — seja matéria, radiação ou energia escura — domina sobre as demais.

2.3.2 Crescimento de perturbações da matéria

Compreender a dinâmica das perturbações em diferentes eras cósmicas é essencial para descrever a formação das grandes estruturas do universo. Nesta subseção, focamos na evolução das perturbações da matéria não relativística (isto é, sem pressão), que desempenha um papel central na aglomeração gravitacional em larga escala. Esse crescimento se torna particularmente relevante após o desacoplamento, quando a matéria escura e os bárions passam a dominar a evolução do conteúdo energético do universo. Nesse contexto, estudaremos a evolução dessas perturbações em três cenários distintos:

Era dominada por matéria

Na era dominada por matéria, a evolução do potencial gravitacional pode ser obtida tomando $w \approx 0$ na equação (2.98) de forma que o potencial gravitacional pode ser dado por:

$$\Phi(a, \mathbf{k}) = C_1(\mathbf{k}) + C_2(\mathbf{k})a^{-5/2} \quad (2.99)$$

Dessa forma, ao substituírmos Φ na equação de Poisson (2.94) na era dominada por matéria, onde $\rho \approx \rho_m$ e $\Delta \approx \Delta_m$, temos:

$$\Delta_m(a, k) = -\frac{k^2 \Phi}{4\pi G a^2 \bar{\rho}_m} = \tilde{C}_1(k) a + \tilde{C}_2(k) a^{-3/2} \quad (2.100)$$

onde utilizamos do fato que $\bar{\rho}_m \propto a^{-3}$. Note que $C_1(\mathbf{k})$ e $C_2(\mathbf{k})$ correspondem aos modos de Fourier do campo de densidade comóvel, sendo $C_1(\mathbf{k})$ os modos crescentes e $C_2(\mathbf{k})$ os modos decrescentes em todas as escalas.

Era dominada por energia escura

Na era dominada pela energia escura, onde essa componente não apresenta flutuações significativas de densidade, a equação de Poisson mantém o mesmo formato da era dominada por matéria, isto é, $\Phi \propto \Delta_m/a$. Assim, ao substituir Φ na equação de Einstein (2.87), obtemos:

$$\Delta_m'' + \mathcal{H}\Delta_m' + (\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2)\Delta_m = 0 \quad (2.101)$$

Combinando as equações de Friedmann (2.52) e (2.56) para um universo com matéria e energia escura, podemos reescrever a equação (2.101) por:

$$\Delta_m'' + \mathcal{H}\Delta_m' + -4\pi G a^2 \bar{\rho}_m \Delta_m = 0 \quad (2.102)$$

de forma que as componentes de energia escura se cancelam na equação de Einstein. No regime dominado por energia escura, nós temos $\mathcal{H}^2 \gg 4\pi G a^2 \bar{\rho}_m$ e dessa forma, os termos restante da equação (2.102) se tornam:

$$\Delta_m'' - \frac{1}{\eta}\Delta_m' = 0 \quad (2.103)$$

onde para a era dominada por energia escura $\mathcal{H} \approx -1/\eta$. De forma que a solução dessa equação é dada por:

$$\Delta_m(a, \mathbf{k}) = C_1(\mathbf{k}) + C_2(\mathbf{k})a^{-2} \quad (2.104)$$

na qual, o crescimento de estrutura cessa durante essa era.

Era dominada por radiação

Durante a era de radiação, a matéria é uma componente subdominante, logo, é necessário trabalhar com as equações de continuidade de Euler perturbadas para encontrar a equação de evolução do contraste de densidade de matéria. De modo que a equação que descreve essa evolução é:

$$\delta_m'' + \mathcal{H}\delta_m' = \nabla^2\Phi + 3(\Phi'' + \mathcal{H}\Phi') \quad (2.105)$$

onde $\Phi = \Phi_r + \Phi_m$ possui contribuição tanto da radiação quanto da matéria. Porém, os modos de matéria são suprimidos comparado aos modos de radiação, de forma que, a matéria não consegue reagir às mudanças rápidas do potencial gravitacional provocadas pela radiação. Como resultado, δ_m somente é impactado pelo potencial Φ_m , mesmo em era altamente dominadas pela radiação. Assumindo $\nabla^2\Phi = \nabla^2\Phi_m = 4\pi G\bar{\rho}_m\delta_m$ e desprezando variações temporais no potencial ($\Phi'' = \Phi' = 0$), obtemos:

$$\delta_m'' + \mathcal{H}\delta_m' - 4\pi G\bar{\rho}_m\delta_m \approx 0 \quad (2.106)$$

onde $4\pi G\bar{\rho}_m = \frac{3}{2}\Omega_m\mathcal{H}^2$. O parâmetro de Hubble conforme para um universo com matéria e radiação é:

$$\frac{\mathcal{H}}{H_0} = \frac{\Omega_m}{\sqrt{\Omega_r}} \frac{\sqrt{1+y}}{y}, \quad y \equiv \frac{a}{a_{eq}} \quad (2.107)$$

onde $a_{eq} = \Omega_r/\Omega_m$ é o fator de escala na igualdade de matéria e radiação. Usando y como variável temporal, a equação (2.106) se torna:

$$\frac{d^2\delta_m}{dy^2} + \frac{2+3y}{2y(1+y)} \frac{d\delta_m}{dy} - \frac{3}{2y(1+y)}\delta_m = 0. \quad (2.108)$$

Essa equação é conhecida como a equação de Mészáros, que descreve o crescimento linear das perturbações de matéria em um universo no equilíbrio de radiação e matéria. As duas soluções independentes são:

$$\delta_m \propto \begin{cases} 1 + \frac{3}{2}y \\ \left(1 + \frac{3}{2}y\right) \ln \left(\frac{\sqrt{1+y}+1}{\sqrt{1+y}-1}\right) - 3\sqrt{1+y}. \end{cases} \quad (2.109)$$

No limite $y \ll 1$ (domínio da radiação), a solução do modo crescente é $\delta_m \propto \ln y \propto \ln a$, ou seja, as flutuações de matéria crescem apenas logaritmicamente durante a era da radiação. Um crescimento significativo das inomogeneidades de matéria escura só ocorre quando o universo se torna dominado por matéria. De fato, no limite $y \gg 1$ (domínio da matéria), a solução do modo crescente é $\delta_m \propto y \propto a$.

2.3.3 Espectro de potência

Na subseção anterior, construímos o suficiente de *clustering* das flutuações de matéria para sermos capazes de explicar como as previsões teóricas já mencionadas são identificadas pelas observações. Esse processo, acontece através do que chamamos de espectro linear de matéria. Dito isso, nessa subseção, iremos qualitativamente demonstrar o espectro linear da matéria por meio da teoria e identificaremos de forma sucinta as propriedades estatísticas que linam esse objeto com as observações.

2.3.3.1 Função transferência

Antes de falarmos diretamente sobre o espectro linear de potência é necessário discutir como relacionamos as flutuações primordiais com as flutuações em outras eras. Para descrever como as perturbações evoluem de um tempo conforme inicial η_i , temos:

$$\delta(\mathbf{k}, \eta) \approx T(k) \frac{D_+(\eta_i)}{D_+(\eta)} \delta(\mathbf{k}, \eta_i) \quad (2.110)$$

onde D_+ corresponde à função crescimento associada ao contraste de densidade. A função $T(k)$ descreve como as perturbações evoluem a partir de um tempo inicial η_i e desempenha um papel fundamental para compreender como perturbações de densidade em diferentes escalas se desenvolvem ao longo das distintas eras do universo.

Para aprofundar essa compreensão, analisamos o comportamento de δ ao longo das eras dominadas por radiação e matéria, especialmente em escalas maiores que o horizonte de Hubble. Nesse contexto, a equação de Poisson nos permite determinar a evolução do contraste de densidade como:

$$\delta(k, t) \propto \frac{1}{\mathcal{H}^2} \propto \begin{cases} a^2 & \text{era da radiação,} \\ a & \text{era da matéria.} \end{cases} \quad (2.111)$$

Podemos perceber que, na era de matéria, o contraste de densidade cresce proporcionalmente em relação ao fator de escala $a(\eta)$ para dentro e fora do horizonte (reforçando o resultado da equação (2.100)), ou seja, o crescimento é independente de escala. Por outro lado, já na era de radiação, as perturbações evoluem de forma diferente. Nesse caso, para escalas dentro do horizonte o crescimento é logarítmico, enquanto para escalas fora do horizonte cresce com a^2 . Desse modo, a flutuação de crescimento, na era de radiação, depende do número de onda do modo, $k = \mathcal{H}$. Esse efeito é descrito pela função transferência $T(k)$, que captura todos os desvios da evolução devido a dependência de escala na era de radiação.

Para demonstrar essa dependência, vamos considerar modos de comprimento de onda longo com $k < k_{eq}$, onde k_{eq} corresponde ao número de onda que entra no horizonte no tempo de igualdade de radiação e matéria. Esses modos se encontravam fora do horizonte durante a era de radiação e conseqüentemente cresciam com $\delta \sim a^2$. Quando o universo se torna dominado

por matéria, o crescimento diminui para $\delta \sim a$. Essas considerações levam à seguinte relação para a evolução das perturbações:

$$\delta(k, \eta) \approx \left(\frac{a_{\text{eq}}}{a_i}\right)^2 \frac{a}{a_{\text{eq}}} \delta(k, \eta_i), \quad \text{para } k < k_{\text{eq}} \quad (2.112)$$

Note que se substituirmos $D_+(\eta_i)$ pelo crescimento da era de radiação fora do horizonte e $D_+(\eta)$ pelo crescimento da era de matéria, encontramos um valor para a função transferência $T(k < k_{\text{eq}}) = 1$.

Em seguida, vamos considerar a evolução para modos de comprimento de onda curto com $k > k_{\text{eq}}$. Esses modos entram no horizonte no tempo η_k na era de radiação. Antes de entrar no horizonte, os modos crescem como $\delta \sim a^2$. Depois de entrar no horizonte, o crescimento se torna logarítmico $\delta \sim \ln a$. Por fim, os modos começam a crescer novamente como $\delta \sim a$ quando o universo começa a ficar dominado por matéria. Dessa forma, temos:

$$\delta(k, \eta) \approx \left(\frac{a_k}{a_i}\right)^2 \ln\left(\frac{a_{\text{eq}}}{a_k}\right) \frac{a}{a_{\text{eq}}} \delta(k, \eta_i) \quad (2.113)$$

substituindo $\frac{a_k}{a_i}$ por $\frac{a_{\text{eq}}}{a_i} \frac{a_k}{a_{\text{eq}}}$ temos que a função transferência $T(k > k_{\text{eq}}) = \left(\frac{a_k}{a_{\text{eq}}}\right)^2 \ln\left(\frac{a_{\text{eq}}}{a_k}\right)$. Como na era de radiação $k = \mathcal{H}_k \propto 1/a_k$, podemos reescrever a função transferência como:

$$T(k) \approx \begin{cases} 1, & k < k_{\text{eq}} \\ \left(\frac{k_{\text{eq}}}{k}\right)^2 \ln(k/k_{\text{eq}}), & k > k_{\text{eq}} \end{cases} \quad (2.114)$$

Esse tratamento ignora o efeito da oscilação acústica de baryons presente na função transferência que, por simplicidade, foi desconsiderado. Essa função é extremamente crucial para entendermos como as perturbações de densidade em várias escalas diferentes evoluem com as eras do universo.

2.3.3.2 Espectro de potência linear

Definido como é descrito a evolução linear de um único modo de Fourier de número de onda k , podemos agora usar esse resultado para definir um espectro angular de potência em um tempo η qualquer, de modo que:

$$\mathcal{P}(k, \eta) = T^2(k) \frac{D_+^2(\eta)}{D_+^2(\eta_i)} \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k, \eta_i) \quad (2.115)$$

onde o espectro de potência primordial é definido por:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k, \eta_i) = A_s k^{n_s} \quad (2.116)$$

onde A_s e n_s são parâmetros já mencionados na seção 2.2.2. Esse espectro de potência é frequentemente chamado de espectro de Harrison-Zel'dovich, pois, segundo os trabalhos de Harrison, Zel'dovich e Peebles (HARRISON, 1970; PEEBLES; YU, 1970; ZELDOVICH, 1972), é

provável que as perturbações iniciais do universo sigam uma lei de potência com índice espectral $n_s \approx 1$. Essa previsão é naturalmente explicada pelo modelo inflacionário, no qual um período de expansão acelerada no início do universo gera flutuações quânticas quase escalares, resultando em um espectro de densidade quase plano, consistente com o espectro de Harrison-Zel'dovich (GONZALEZ et al., 2020).

2.3.3.3 Espectro linear de potência da matéria

No nosso caso em especial estamos interessados no espectro de potência da matéria dentro do horizonte nos dias atuais, ou seja, η_0 . Portanto, estamos interessados em dois cenários diferentes, um em que $k > k_{eq}$ e outro em que $k_0 < k < k_{eq}$ onde k_0 corresponde ao número de onda que entra no horizonte nos dias de hoje. Desse modo, utilizando as equações (2.114), (2.115) e (2.116) é fácil encontrar a solução do espectro de potência de matéria $\mathcal{P}_{mm}$, de forma que, sua solução é dada por:

$$\mathcal{P}_{mm}(k, \eta_0) = \begin{cases} k, & k_0 < k < k_{eq}, \\ k^{-3} (\ln k)^2, & k > k_{eq}. \end{cases} \quad (2.117)$$

Note que as soluções para $k < k_0$ não foram consideradas, pois correspondem a modos que ainda estão fora do horizonte atualmente e, portanto, são inacessíveis à observação. A forma geral do espectro pode ser visualizada com mais clareza na Figura 8. Vale ressaltar que esta derivação representa uma abordagem analítica simplificada, cujo objetivo principal é fornecer uma intuição sobre o formato qualitativo do espectro de potência da matéria.

Além de desconsiderarmos os modos com $k < k_0$, também ignoramos os efeitos associados à evolução do fluido fóton-bárion após a recombinação (oscilações acústicas) e as contribuições de fótons livres após o desacoplamento (amortecimento Silk). Esses efeitos refinam a forma do espectro em escalas menores, mas estão além do escopo desta análise simplista.

2.3.3.4 Propriedades estatísticas

Com todo esse embasamento teórico construído, uma pergunta natural que surge é: como as observações cosmológicas realmente fazem previsões sobre a estrutura em larga escala do universo? A resposta reside no fato de que a distribuição de matéria no universo não é puramente aleatória, mas apresenta correlações espaciais bem definidas entre as flutuações de densidade. Para quantificar essas correlações, utilizamos a **função de correlação de dois pontos**, definida como:

$$\xi(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) = \langle \delta(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}') \rangle, \quad (2.118)$$

Diante disso, vamos discutir sobre as propriedades estatística onde $\delta(\mathbf{x})$ representa a flutuação de densidade em um ponto $\mathbf{x}$ qualquer, e a média $\langle \cdot \rangle$ é feita sobre um conjunto de possíveis

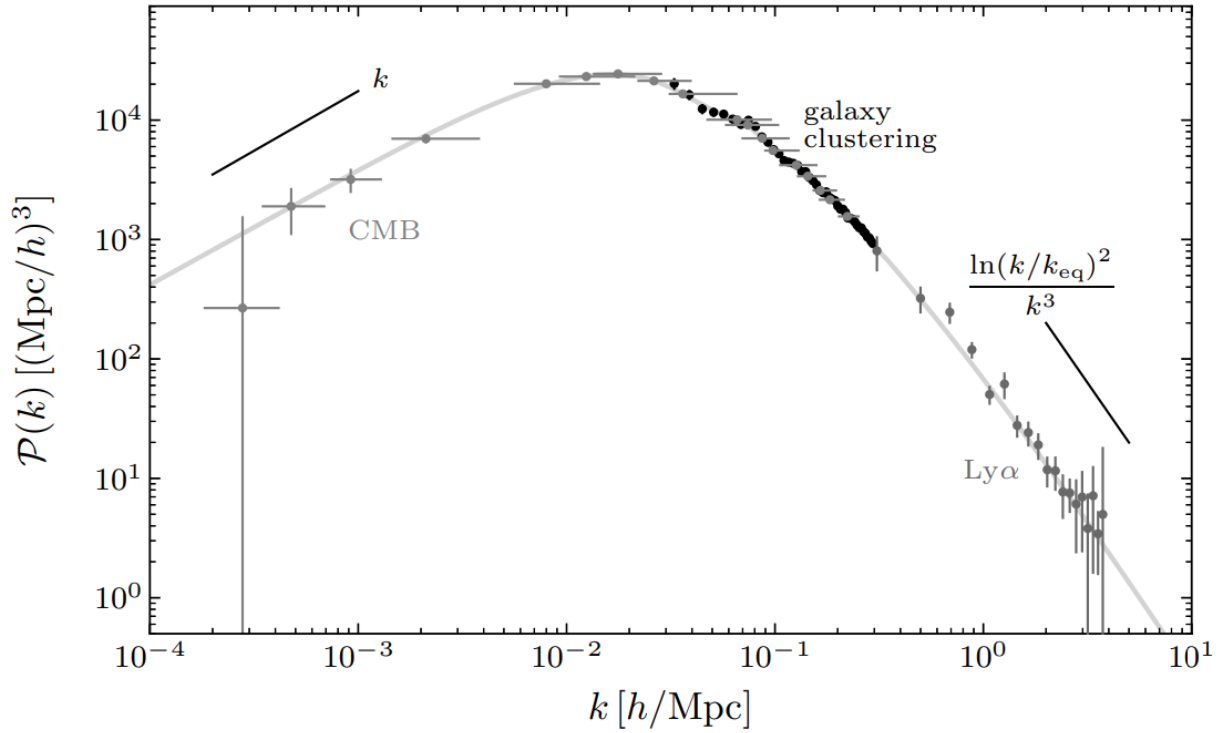


Figura 8 – Medições do espectro de potência da matéria linear. Os vínculos de “clustering de galáxias” vêm da amostra de galáxias vermelhas luminosas (LRG) do *Sloan Digital Sky Survey* (SDSS). Os vínculos do “CMB” são derivadas das medições de anisotropias de temperatura da RCF feitas pelo *Planck*. Por fim, “Ly α ” refere-se à floresta Lyman-alfa. Créditos: (BAUMANN, 2022)

configurações do universo (conhecido como ensemble). Como o universo é considerado **homogêneo** (as propriedades não dependem da posição) e **isotrópico** (as propriedades não dependem da direção), essa função depende apenas da distância entre os pontos, $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$, e não das posições absolutas. Essa função de correlação fornece a primeira medida estatística não trivial do campo de densidade (já que $\langle \delta \rangle = 0$ por definição), e nos diz com que intensidade flutuações em diferentes pontos estão correlacionadas.

No entanto, na prática, não temos acesso ao ensemble completo, podendo observar apenas uma única realização do universo. Para contornar essa limitação, assumimos que o universo é ergódico, ou seja, que as médias de conjunto podem ser substituídas por médias espaciais quando o volume considerado se torna suficientemente grande. Em outras palavras, diferentes regiões do universo podem ser interpretadas como diferentes realizações de processos aleatório subjacente. Apesar disso, devido ao volume finito dos levantamentos observacionais — como *surveys* de galáxias —, flutuações estatísticas inevitáveis, conhecidas como variância amostral, são introduzidas nas medições. No caso da função de correlação de duas posições (RCF), o volume do *survey* é comparável ao tamanho do unive

Como os modos de Fourier das flutuações evoluem independentemente, é útil definir a função de correlação no espaço de Fourier:

$$\langle \delta(\mathbf{k}) \delta^*(\mathbf{k}') \rangle = (2\pi)^3 \delta_D^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \mathcal{P}(k), \quad (2.119)$$

onde δ_D é a função delta de Dirac, consequência da invariância por translação, o que indica que os modos de Fourier com diferentes vetores de onda são estatisticamente independentes. A função $\mathcal{P}(k)$ corresponde a transformada de Fourier tridimensional da função de correlação $\xi(r)$, logo o espectro de potência pode ser escrito como:

$$\mathcal{P}(k) = \frac{4\pi}{k} \int_0^\infty dr r \sin(kr) \xi(r). \quad (2.120)$$

(conforme demonstrado no Apêndice A).

Dessa forma, essa equação estabelece uma ponte entre o objeto naturalmente acessível nas observações, a função de correlação $\xi(r)$, e o espectro de potência $\mathcal{P}(k)$, que é previsto pela teoria. Portanto, as correlações espaciais presentes na distribuição de matéria são a chave que nos permite aplicar ferramentas estatísticas para confrontar diretamente as previsões do modelo Λ CDM com os dados obtidos em levantamentos de galáxias, os quais abordaremos a seguir.

Capítulo 3

Sondas Cosmológicas em Levantamentos de Galáxias

3.1 Levantamentos de Galáxias fotométricos e espectroscópicos

Ao longo das últimas décadas, levantamentos de galáxias tornaram-se ferramentas essenciais para a cosmologia observacional, especialmente com o advento da chamada "era da cosmologia de precisão", marcada por volumes massivos de dados e por métodos cada vez mais sofisticados de análise. Desde os primeiros catálogos até os grandes levantamentos contemporâneos, como o SDSS e o DES, a evolução dessas campanhas observacionais impulsionou o desenvolvimento de instrumentos e técnicas que permitiram medições com precisão cada vez maior (veja, (MORAES, 2024) para uma contextualização histórica). Essa trajetória histórica não apenas reflete os avanços tecnológicos, mas também destaca os desafios envolvidos em transformar observações astronômicas em inferências cosmológicas robustas. Nesse contexto, é importante compreender como essas observações se conectam com a teoria.

Como discutido na Seção 2.3, há uma ponte entre a teoria cosmológica e os dados observacionais, construída por meio de estatísticas que relacionam o campo contínuo de densidade de matéria às quantidades teóricas que são previstas por modelos. No entanto, na prática, não acessamos diretamente esse campo contínuo, mas sim traçadores luminosos — as galáxias — que contêm informação sobre a estrutura subjacente. Dessa forma, o que podemos fazer, portanto, é contar o número desses objetos no céu e selecioná-los de acordo com características comuns, construindo assim um campo discreto que pode ser comparado às previsões teóricas (veja a Figura 9). Nesse processo, as principais informações observacionais para esses objetos são a posição angular das galáxias no céu e seus redshifts. Nesse sentido, uma estimativa imprecisa dessa última quantidade pode comprometer seriamente o mapeamento da estrutura em larga escala, afetando a reconstrução da distribuição de matéria e, por consequência, as inferências cosmológicas. Por isso, levantamentos modernos, como o LSST e o DESI, buscam alcançar um

alto grau de acurácia na determinação do redshift das galáxias.

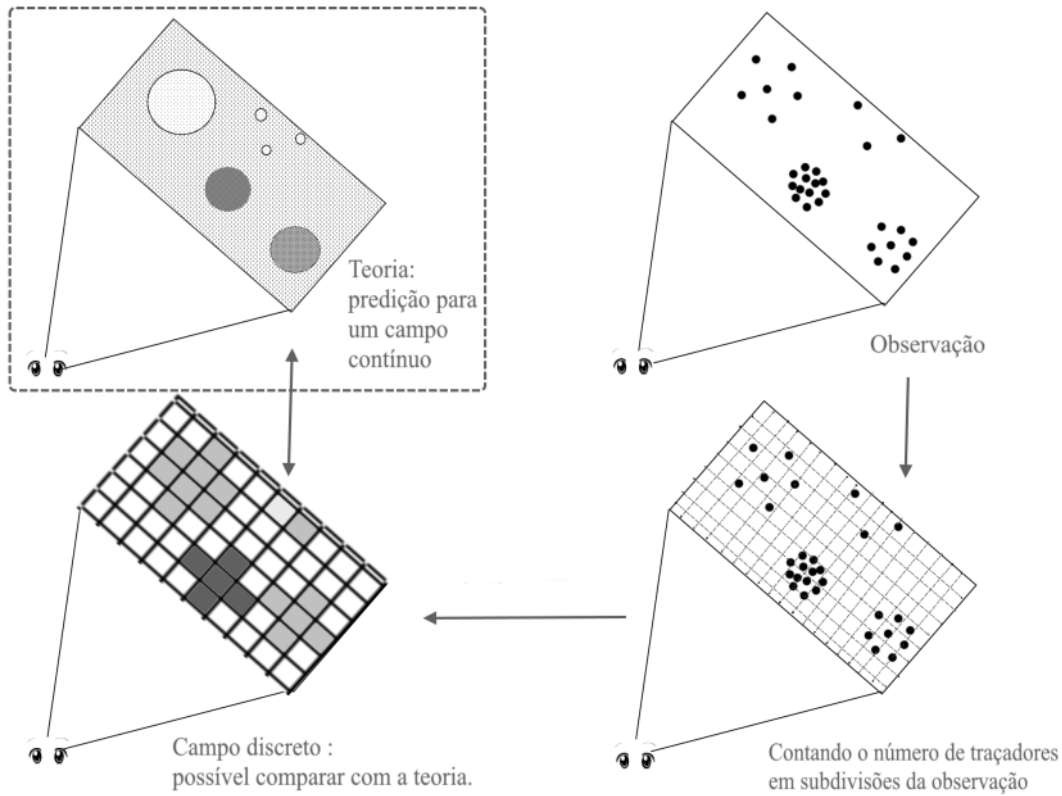


Figura 9 – Diagrama que representa o procedimento da observações comparado a predição teórica. Créditos: (FERRI, 2022)

Existem duas abordagens principais para determinar o redshift de galáxias: a espectroscópica e a fotométrica. Dentre elas, a espectroscopia destaca-se por oferecer maior precisão na medição do redshift, pois compara diretamente as linhas de emissão observadas com linhas já conhecidas de estudos laboratoriais anteriores, o que possibilita a estimativa direta do redshift e a determinação precisa das distâncias entre as galáxias em questão. Essa técnica também possibilita o estudo de fenômenos cosmológicos fundamentais, como as Oscilações Acústicas de Bárions (BAO) - padrões regulares na distribuição de galáxias que funcionam como uma "régua cósmica" para medir distâncias em grandes escalas - e as Distorções de Redshift Espacial (RSD), que surgem do movimento peculiar das galáxias em aglomerados, sendo ambos essenciais para entender a estrutura do Universo, a matéria escura e a energia escura.

Para estudar esses efeitos, diversos levantamentos espectroscópicos foram desenvolvidos ao longo dos anos, cada um com características específicas em termos de área do céu coberta e intervalo de redshift. Um dos primeiros grandes esforços foi o 2dF Galaxy Redshift Survey (2dF-GRS) (COLLESS et al., 2003), que obteve espectros de aproximadamente 246 mil objetos em uma área de 1500 deg^2 . Em seguida, o Sloan Digital Sky Survey (SDSS) teve papel central na evolução desses levantamentos. Nas duas primeiras fases (SDSS I e II) (ABAZAJIAN et al., 2009), o SDSS coletou espectros cobrindo uma área de 9380 deg^2 , focando principalmente em galáxias próximas ($0 < z < 0,7$) e quasares em redshifts mais altos ($2,3 < z < 3$). Na fase

seguinte, o SDSS-III deu início ao Baryon Oscillation Spectroscopic Survey (BOSS)(ALAM et al., 2015), expandindo significativamente as amostras espectroscópicas anteriores. A quarta fase, SDSS-IV, lançou o Extended BOSS (eBOSS)(AHUMADA et al., 2020), que ampliou ainda mais o mapeamento da estrutura em larga escala, coletando espectros de mais de 1,4 milhão de objetos. (veja figura 10)

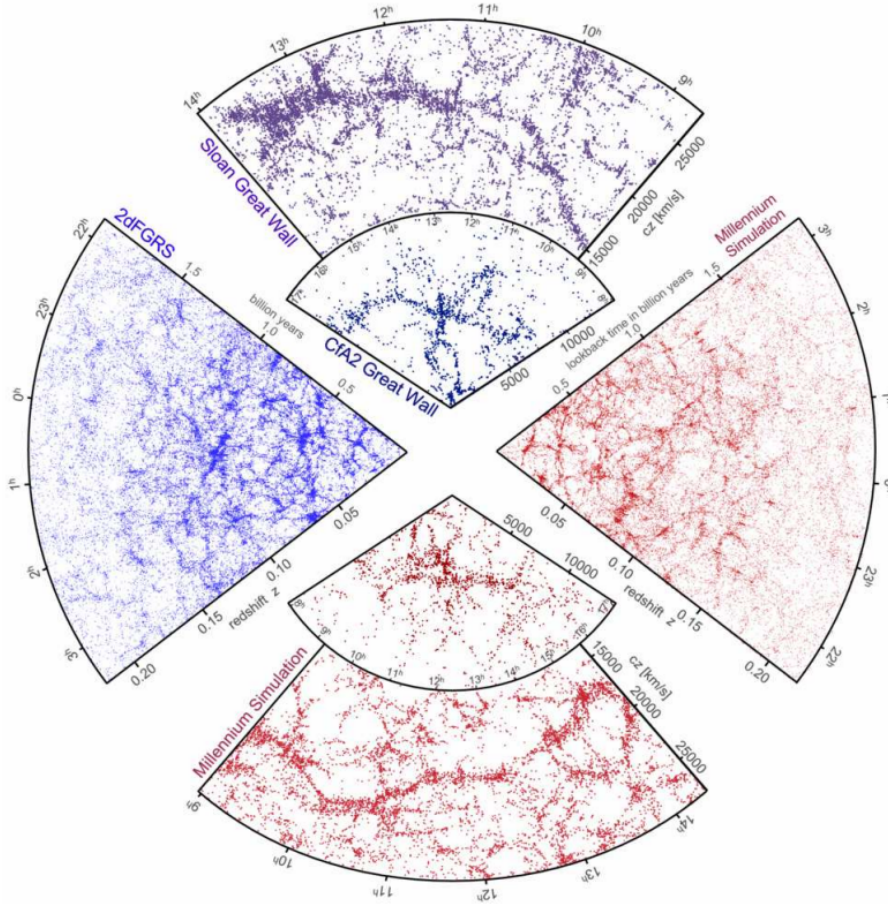


Figura 10 – Distribuição de galáxias obtida a partir de levantamentos espectroscópicos e de catálogos simulados pela *Millennium*. Em azul e roxo, vemos as medições feitas pelo 2dFGRS e pelo SDSS (SPRINGEL; FRENK; WHITE, 2006). Em vermelho, vemos os dados simulados correspondentes (SPRINGEL et al., 2005). Créditos: (SPRINGEL; FRENK; WHITE, 2006)

Atualmente, uma nova geração de levantamentos espectroscópicos está em curso. Para os propósitos desta tese, destacam-se aqueles com foco explícito em inferências cosmológicas de alta precisão. O Dark Energy Spectroscopic Instrument (DESI)(DESI Collaboration, 2016) pretende mapear cerca de 35 milhões de objetos em uma área de 14.000 deg^2 , cobrindo um amplo intervalo de redshift ($0 < z < 3,5$). O 4MOST Cosmology Redshift Survey (4MOST-CRS) (RICHARD et al., 2019) irá observar cerca de 20 milhões de galáxias ao longo de 7500 deg^2 , com um alcance em redshift comparável ao do DESI. Já o Prime Focus Spectrograph (PFS)(TAKADA et al., 2014), instalado no telescópio Subaru, cobrirá 1100 deg^2 no intervalo $0,8 < z < 2,4$. Por fim, o satélite Euclid complementarará sua amostra fotométrica com um levantamento espectroscópico (Euclid Collaboration, 2024), mapeando cerca de 15.000 deg^2 no intervalo $0,9 < z < 1,8$.

Uma outra forma de se obter o redshift das galáxias surgiu devido aos avanços tecnológicos em câmeras digitais, pois a partir da tecnologia CCD (charge coupled device), surgiram os chamados levantamentos fotométricos. Diferentemente da espectroscopia, esses levantamentos observam os objetos por meio de um número limitado de filtros de banda larga — tipicamente entre 4 e 6 — e estimam o redshift (conhecido como photo-z) com base na intensidade da luz registrada em cada uma dessas bandas. Para que essa estimativa seja viável e precisa, é necessário realizar uma calibração prévia utilizando dados espectroscópicos, que servem como referência para treinar modelos e métodos capazes de estimar o redshift das amostras fotométricas.

Além de permitirem a estimativa da posição das galáxias, os levantamentos fotométricos também possibilitam o uso do lenteamento gravitacional como observável astronômico. Esse efeito ocorre quando a luz de galáxias distantes é desviada por estruturas massivas ao longo da linha de visada, como aglomerados de galáxias, resultando em distorções sutis nas formas das imagens observadas — um fenômeno conhecido como cisalhamento (shear). Embora essas distorções sejam pequenas individualmente, ao se analisar grandes populações de galáxias, esses efeitos se tornam estatisticamente significativos. Dessa forma, o lenteamento gravitacional fraco tornou-se outra importante sonda cosmológica para os levantamentos fotométricos, sendo elas capazes de fornecer uma medida direta da distribuição de matéria e da amplitude das flutuações da densidade no universo.

Nas últimas décadas, levantamentos fotométricos como o Dark Energy Survey (DES) e o Kilo-Degree Survey (KiDS), combinando medições de clustering de galáxias e de cisalhamento gravitacional fraco, desempenharam um papel central na cosmologia observacional. O DES (The Dark Energy Survey Collaboration, 2005) mapeou aproximadamente 5000 deg^2 do céu no hemisfério sul, observando galáxias até redshifts de $z \sim 2$ e fornecendo dados fundamentais para estudos de lenteamento gravitacional, estrutura em larga escala e supernovas. O KiDS (JONG et al., 2012b), embora cobrindo uma área menor — cerca de 1350 deg^2 —, destacou-se pela excelente qualidade de imagem e maior resolução angular, sendo particularmente eficaz em medições precisas das formas de galáxias. Ambos os levantamentos estabeleceram marcos no uso combinado de diferentes observáveis cosmológicos, sendo pioneiros nas chamadas análises 3x2pt, que serão exploradas em detalhes nos próximos capítulos. Em relação às perspectivas atuais e futuras, projetos como o Legacy Survey of Space and Time (LSST) (IVEZIĆ et al., 2019), conduzido pelo Vera C. Rubin Observatory, prometem transformar o campo ao mapear até 18.000 deg^2 com profundidade e cadência temporal nunca antes vista. Ele será capaz de observar o céu inteiro em poucas noites, criando um verdadeiro "filme" do céu em alta resolução ao longo de uma década. Outro destaque é o satélite Euclid (Euclid Collaboration, 2024), que, além do levantamento espectroscópico, realizará uma ampla cobertura fotométrica com alta resolução espacial. Esses novos levantamentos irão aprimorar significativamente a precisão das inferências cosmológicas, inaugurando um novo paradigma para a cosmologia observacional.

Cada um desses tipos de levantamentos (fotométrico e espectroscópico) possui suas vantagens e desvantagens. Levantamentos espectroscópicos são mais precisos na determinação

dos redshifts, porém cada um dos objetos medidos demanda um tempo considerável para ser contabilizado, pois é necessário o espectro completo de cada um desses objetos. Dessa forma, nem todas as galáxias tem seu espectro completamente medido, de forma que é necessária uma pré-seleção de objetos específicos - normalmente são objetos com características comuns, como por exemplo: amostras de galáxias brilhantes (BGS), galáxias vermelhas luminosas (LRG), galáxias com linhas de emissão (ELG), entre outros - reduzindo, assim, a densidade de objetos observados.

Já levantamentos fotométricos observam um número de objetos significativamente maior do que os espectroscópicos, principalmente porque exigem tempos de exposição muito menores por objeto. Isso faz com que a fotometria consiga cobrir áreas muito extensas do céu e atingir profundidades maiores em menos tempo de observação. No entanto, essa vantagem acarreta incertezas significativamente maiores — especialmente na direção radial, como ilustrado na Figura 10 — e uma maior suscetibilidade a erros sistemáticos. Para mitigar essas limitações, é comum recorrer a métodos de aprendizado de máquina, utilizando galáxias com redshifts espectroscópicos como conjunto de teste para estimar os redshifts fotométricos (photo-z's) (BLAKE; BRIDLE, 2005); veja (NEWMAN; GRUEN, 2022) para uma discussão mais aprofundada sobre outros métodos de fazer essa estimativa. Na próxima seção, discutiremos o formalismo do espectro angular de potências, ferramenta fundamental para descrever estatisticamente a distribuição desses observáveis na superfícies da esfera celeste.

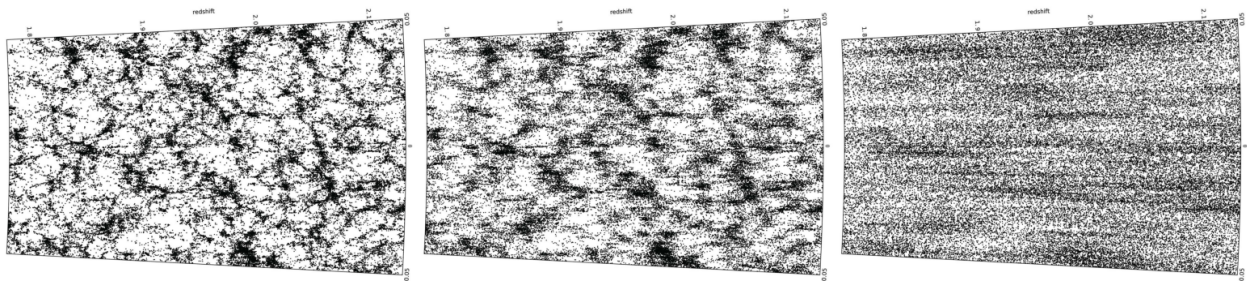


Figura 11 — Figura adaptada de (WANG et al., 2019), comparando medições realizadas por levantamentos espectroscópicos e fotométricos. A imagem à esquerda ilustra um levantamento espectroscópico com o uso de fibras ópticas ou fendas para observar individualmente o espectro de galáxias, como nos casos do DESI e do 4MOST. No centro, temos um levantamento espectroscópico slitless, que dispersa a luz de todo o campo de visão para gerar espectros, como ocorre com o satélite Euclid. À direita, observa-se um levantamento fotométrico tradicional, que registra a luz em múltiplas bandas largas. Ao comparar a primeira imagem com a última, observa-se uma perda significativa de informação na direção radial — consequência das maiores incertezas associadas aos redshifts estimados fotometricamente em relação às medições espectroscópicas. Créditos: (WANG et al., 2019).

3.2 Espectro Angular de Potência

Antes de analisarmos os observáveis dos *surveys* discutidos na seção anterior, é essencial compreendermos como a função de correlação tridimensional de dois pontos, dada pela equação (2.118), pode ser projetada na esfera celeste. Para isso, seguiremos a abordagem apresentada em (FELDBRUGGE, 2023), com o intuito de construir a relação entre a função de correlação no espaço tridimensional e o espectro de potência angular observado.

Nesse contexto, consideramos dois campos aleatórios $A(\mathbf{x})$ e $B(\mathbf{x})$, que podem representar, por exemplo, flutuações na densidade de matéria δ , cisalhamento κ , ou outros observáveis cosmológicos relevantes. Podemos, então, projetar esses campos ao longo da linha de visada, obtendo os campos projetados no céu como:

$$\tilde{A}(\hat{\mathbf{n}}) = \int_0^\infty F_A(\chi) A(\chi\hat{\mathbf{n}}) d\chi, \quad \tilde{B}(\hat{\mathbf{n}}) = \int_0^\infty F_B(\chi) B(\chi\hat{\mathbf{n}}) d\chi, \quad (3.1)$$

onde $F_A(\chi)$ e $F_B(\chi)$ são os chamados *kernels* de projeção, que definem o peso com que os campos tridimensionais contribuem para os observáveis ao longo da linha de visada. Expandindo esses campos projetados em harmônicos esféricos, temos:

$$\tilde{A}(\hat{\mathbf{n}}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} A_{\ell m} Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}), \quad \tilde{B}(\hat{\mathbf{n}}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} B_{\ell m} Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}), \quad (3.2)$$

em que $Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}})$ são os harmônicos esféricos, e os coeficientes $A_{\ell m}$ e $B_{\ell m}$ (momentos de multipolo) são dados por:

$$A_{\ell m} = \int \tilde{A}(\hat{\mathbf{n}}) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{n}}) d\Omega, \quad B_{\ell m} = \int \tilde{B}(\hat{\mathbf{n}}) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{n}}) d\Omega. \quad (3.3)$$

Para relacionar essas quantidades ao espectro de potência no espaço de Fourier, utilizamos a transformação inversa de Fourier dos campos tridimensionais, ou seja,

$$A(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k A(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad B(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k B(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (3.4)$$

Aplicando essa transformação à equação (3.1), podemos reescrever os momentos de multipolo (3.3) como:

$$A_{\ell m} = \int d\Omega \left[\int_0^\infty d\chi F_A(\chi) \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k A(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\chi\hat{\mathbf{n}}} \right] Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{n}}), \quad (3.5)$$

$$B_{\ell' m'}^* = \int d\Omega' \left[\int_0^\infty d\chi' F_B(\chi') \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k' B^*(\mathbf{k}') e^{-i\mathbf{k}'\cdot\chi'\hat{\mathbf{n}}'} \right] Y_{\ell' m'}(\hat{\mathbf{n}}'). \quad (3.6)$$

Aqui, $\mathbf{k}$ e $\mathbf{k}'$ são os vetores de onda com normas k e k' , e direções $\hat{\mathbf{k}}$ e $\hat{\mathbf{k}}'$, respectivamente. Note que, convenientemente, definimos o complexo conjugado de $B_{\ell m}$ devido à sua direta relação com a definição do espectro de potência angular, que veremos logo adiante.

Dessa forma, utilizando a expansão de onda plana de Rayleigh B.1 e a ortonormalidade dos harmônicos esféricos B.2 as equações (3.5) e (3.6) tornam-se:

$$A_{\ell m} = \frac{i^\ell}{2\pi^2} \int d^3k A(\mathbf{k}) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}) \left[\int_0^\infty d\chi F_A(\chi) j_\ell(k\chi) \right], \quad (3.7)$$

$$B_{\ell' m'}^* = \frac{i^{-\ell'}}{2\pi^2} \int d^3k' B^*(\mathbf{k}') Y_{\ell' m'}(\hat{\mathbf{k}}') \left[\int_0^\infty d\chi' F_B(\chi') j_{\ell'}(k'\chi') \right]. \quad (3.8)$$

Com isso, podemos agora calcular a variância dos momentos de multipolo, que nos fornece o espectro de potência angular:

$$\langle A_{\ell m} B_{\ell' m'}^* \rangle = C_{AB}(\ell) \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}. \quad (3.9)$$

O espectro de potência $C_{AB}(\ell)$ representa, portanto, a versão no espaço harmônico da função de correlação espacial de dois pontos, (2.118). Para relacionar essa quantidade ao espectro de potência $\mathcal{P}(k)$, utilizamos as equações (B.7) e (B.8), a partir das quais obtemos:

$$\begin{aligned} C_{AB}(\ell) \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} &= \frac{i^{\ell-\ell'}}{4\pi^4} \int d^3k \int d^3k' \langle A(\mathbf{k}) B^*(\mathbf{k}') \rangle Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{\ell' m'}(\hat{\mathbf{k}}') \\ &\times \left[\int_0^\infty d\chi F_A(\chi) j_\ell(k\chi) \right] \left[\int_0^\infty d\chi' F_B(\chi') j_{\ell'}(k'\chi') \right]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Substituindo a função de correlação em Fourier pelo espectro de potência, conforme (2.119) e aplicando a propriedade da função delta, obtemos a forma geral do espectro angular de potência dada por:

$$C_{AB}(\ell) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dk k^2 \mathcal{P}_{AB}(k) \left[\int_0^\infty d\chi F_A(\chi) j_\ell(k\chi) \right] \left[\int_0^\infty d\chi' F_B(\chi') j_\ell(k\chi') \right]. \quad (3.11)$$

onde o termo entre parênteses é comumente referido como a função janela, ou seja:

$$W_\ell(k) = \int_0^\infty d\chi F(\chi) j_\ell(k\chi). \quad (3.12)$$

Note que, a avaliação numérica das integrais envolvendo funções de Bessel $j_\ell(kr)$ pode ser computacionalmente custosa, especialmente para altos valores de ℓ . Dessa forma, um método muito útil é utilizando a aproximação de Limber (LIMBER, 1953) para resolver essas integrais. Essa aproximação baseia-se na suposição de pequenas separações angulares (ou seja, valores grandes de ℓ) e no fato de que algumas das funções integradas variam mais lentamente do que

outras (LOVERDE; AFSHORDI, 2008). Nesse contexto, o que a aproximação faz essencialmente é tratar a função de Bessel como uma delta de Dirac centrada em $x = l + 1/2$, de modo que:

$$j_\ell(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2\ell+1}} \delta_D\left(\ell + \frac{1}{2} - x\right). \quad (3.13)$$

Aplicando essa substituição na equação (3.11), o espectro angular se reduz a uma integral unidimensional sobre k :

$$C_{AB}(\ell) \approx \int_0^\infty \frac{dk}{(2\ell+1)} \mathcal{P}_{AB}(k) F_A\left(\frac{2\ell+1}{2k}\right) F_B\left(\frac{2\ell+1}{2k}\right). \quad (3.14)$$

Essa forma simplificada é amplamente utilizada em cosmologia observacional por sua eficiência computacional e por fornecer uma boa aproximação em regimes onde os kernels variam suavemente e ℓ é suficientemente grande (ou seja, para $\ell \gtrsim 20$). Porém, para largas escalas e para kernels finos, principalmente em correlações cruzadas entre bins com pequenos overlaps, essa aproximação se torna insuficiente. Dessa maneira, trabalhos como (LEONARD et al., 2023; CHIARENZA et al., 2024) buscam contornar o uso da aproximação de Limber, desenvolvendo algoritmos capazes de calcular o espectro angular de potência de forma precisa e rápida, sem depender dessa simplificação.

3.3 Observáveis em levantamentos de galáxia

Tendo apresentado o formalismo do espectro angular de potência, passamos agora à discussão de alguns dos principais observáveis utilizados em levantamentos fotométricos e espectroscópicos. Começaremos com o clustering tridimensional de galáxias, tradicionalmente acessado por levantamentos espectroscópicos. Em seguida, abordaremos sua projeção no céu, observável tanto em levantamentos espectroscópicos quanto fotométricos. Trataremos também dos efeitos de weak lensing, mensuráveis exclusivamente por levantamentos fotométricos, e concluiremos com a combinação desses efeitos — o chamado galaxy-galaxy lensing (GGL) — que quantifica a correlação entre weak lensing e o galaxy clustering projetado (2D). O entendimento e a modelagem precisa desses observáveis são fundamentais para análises cosmológicas conjuntas, que combinam diferentes sondas em um único vetor de dados — abordagem conhecida como Nx2pt, onde "N" representa o número de correlações entre pares de observáveis que foram considerados. Essa estratégia permite explorar ao máximo a informação contida nos dados observacionais, aumentando o poder de vinculação sobre os parâmetros cosmológicos e diminuindo degenerescências de parâmetros incômodos (*nuisance*).

3.3.1 Clustering 3D

Em levantamentos espectroscópicos, a medição precisa do redshift de cada galáxia permite reconstruir sua posição tridimensional no espaço, possibilitando a análise estatística

da distribuição de galáxias em 3D. Isso nos permite acessar diretamente essa estatística com o espectro de potência observado das galáxias $\mathcal{P}_{gg,obs}(\mathbf{k})$. Contudo, é importante destacar que esse espectro é definido em termos das coordenadas observadas χ_{obs} medidas no espaço de redshift, que não coincidem exatamente com as coordenadas reais χ , devido a efeitos como as distorções espaço-redshift (RSD) e incertezas na reconstrução da geometria do universo. Considerando essas limitações, vamos apresentar brevemente como o espectro de potência 3D observado das galáxias $\mathcal{P}_{gg,obs}(\mathbf{k})$ se relaciona com o espectro de potência da matéria no regime linear $\mathcal{P}_{mm}(k)$, incorporando os efeitos já mencionados.

Para demonstrar essa relação, seguiremos as referências (KAISER, 1987; DODELSON; SCHMIDT, 2021). Como ponto de partida, consideramos a contagem do número de galáxias em um elemento de volume, a partir do qual construímos o campo de densidade de galáxias observadas $n_{g,obs}(\chi_{obs} \hat{r})$. Essa contagem, por sua vez, é invariante sob transformações de coordenadas, o que nos permite assumir que o mesmo número de galáxias estaria presente no espaço real. Com isso, podemos estabelecer a seguinte relação:

$$n_{g,obs}(\chi_{obs} \hat{r}) d^3 \chi_{obs} = n_g(\chi \hat{r}) d^3 \chi \quad (3.15)$$

A densidade numérica nas coordenadas reais e observadas é, respectivamente, $n_g = \bar{n}_g(1 + \delta_g)$ e $n_{g,obs} = \bar{n}_g(1 + \delta_{g,obs})$, com $\bar{n}_g$ sendo a média da densidade numérica. Dessa forma, a equação (3.15) se transforma em:

$$1 + \delta_{g,obs}(\chi_{obs} \hat{r}) = (1 + \delta_g(\chi \hat{r})) \frac{d^3 \chi}{d^3 \chi_{obs}}. \quad (3.16)$$

Para encontrar a relação entre o contraste de densidade observado e a real, nos resta encontrar uma expressão para o Jacobiano da transformação entre as coordenadas $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}_{obs}$, $d^3 \chi / d^3 \chi_{obs} \equiv J$. De forma que, o Jacobiano em largas escalas pode ser escrito como:

$$J \approx \left(1 - \frac{1}{aH} \frac{\partial v_{pec}}{\partial \chi} \right) \quad (3.17)$$

Logo, a equação (3.16) pode ser reescrita como:

$$\delta_{g,obs}(\chi_{obs} \hat{r}) = \delta_g(\chi \hat{r}) - \frac{1}{aH} \frac{\partial \mathbf{v}_{pec}(\chi \hat{r}) \cdot \hat{r}}{\partial \chi}, \quad (3.18)$$

onde excluímos o termo de segunda ordem. Dessa forma, o contraste de densidade observada (espaço de redshift) corresponde à sobredensidade no espaço real mais um termo de correção devido às velocidades peculiares. Estabelecida essa relação, resta-nos responder duas questões fundamentais: como o contraste de densidade de galáxias, δ_g , se relaciona com o campo de densidade da matéria, δ_m , e como o efeito das velocidades peculiares das galáxias, $\mathbf{v}_{pec}$, atua sobre a distribuição de densidade δ .

Para a primeira relação, temos que as galáxias são traçadores altamente não lineares da estrutura em larga escala, de forma que a relação entre as densidades de matéria e as galáxias

não é puramente trivial, veja (DESJACQUES; JEONG; SCHMIDT, 2018) para um *review*. Porém, para ordem linear em perturbação e em largas escalas, podemos assumir uma relação linear para essas duas quantidades, ou seja:

$$\delta_g(\chi\hat{\mathbf{r}}) = b \delta_m(\chi\hat{\mathbf{r}}) \quad (3.19)$$

onde b é o viés linear de galáxias. Esse viés surge do fato de que a densidade de matéria inclui todas as formas de matéria, especialmente a matéria escura, que é indetectável diretamente pelos *surveys*. Já a densidade de galáxias representa apenas uma fração da matéria total, correspondendo a um subconjunto altamente selecionado da distribuição de matéria. No entanto, como as galáxias se formam preferencialmente em halos de matéria escura, é razoável assumir, em escalas suficientemente grandes, uma relação linear entre a densidade de galáxias e a densidade de matéria subjacente. Dessa forma, o parâmetro b acaba por encapsular uma forte dependência com a distribuição de galáxias considerada, além de ter também uma dependência com o redshift.

Já para a segunda relação, os efeitos das velocidades peculiares que atuam nas observações das densidades das galáxias geram distorções no *clustering* observado. Esses efeitos, como ilustrado na Figura 12, são divididos em dois regimes:

1. **Regime linear:** Em grandes escalas, galáxias se movem em direção a regiões de sobredensidade devido à gravidade. Esse movimento gera uma compressão aparente das estruturas ao longo da linha de visada, pois galáxias à frente da sobredensidade parecem mais distantes, enquanto galáxias atrás parecem mais próximas. Esse efeito, conhecido como *efeito Kaiser*, amplifica o sinal do *clustering* no espaço de redshift comparado ao espaço real e introduz uma anisotropia que pode ser modelada analiticamente no regime linear.
2. **Regime não linear:** Em pequenas escalas, o comportamento se inverte: as velocidades peculiares das galáxias tornam-se comparáveis ou até superiores às suas separações reais, o que gera um efeito de alongamento ao longo da linha de visada — conhecido como ‘dedos de Deus’ (Fingers of God). Nesse regime, a distribuição observada das galáxias aparece artificialmente esticada, como evidenciado no caso do aglomerado de Coma (LAPPARENT; GELLER; HUCHRA, 1986). Nesses domínios, as distorções deixam de ser pequenas perturbações lineares e passam a exigir uma modelagem mais sofisticada e não linear.

Como já estamos focando no regime de grandes escalas (3.17), restringimos a modelagem ao regime linear, cuja descrição é teoricamente mais simples e apropriada para escalas cosmológicas. Nesse contexto, partindo da equação de continuidade perturbada, é possível encontrar uma relação entre a velocidade peculiar e a densidade de galáxias (ver Apêndice X), dada por:

$$\mathbf{v}_{pec}(\mathbf{k}) = i a H f \delta_m(k) \frac{\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{k^2} \quad (3.20)$$

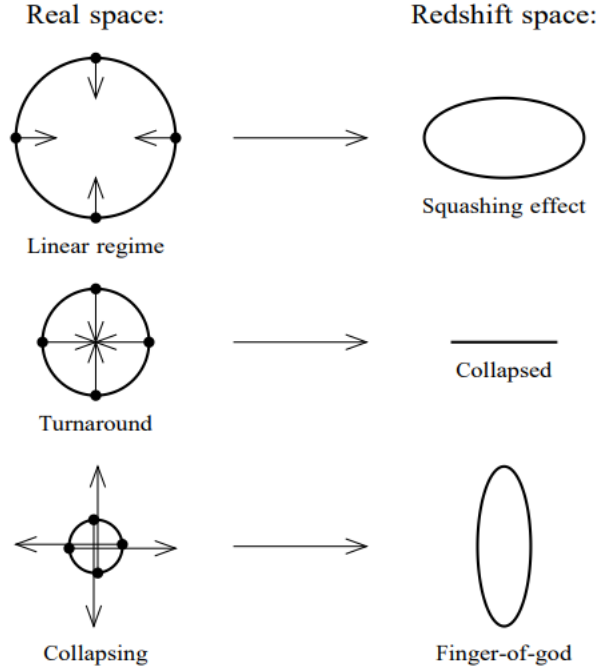


Figura 12 – Distorções no espaço de redshift causadas por velocidades peculiares durante o colapso em torno de uma sobredensidade esférica. Créditos: (HAMILTON, 1998).

onde $f = d \ln D_+ / d \ln a$ é a taxa de crescimento de estrutura. Note que, essa relação $\tilde{v}(\mathbf{k}) \propto \tilde{\delta}_m(\mathbf{k})/k^2$ revela que o efeito Kaiser é mais sensível em largas escalas (pequenos k 's), em contraste com o campo de densidade, que contém uma contribuição maior no $\mathcal{P}(k)$ em escalas menores (TURNER, 2025).

Prosseguindo com a equação (3.18), substituímos a posição observada $\mathbf{x}_{\text{obs}}$ por $\mathbf{x}$, uma vez que ambas diferem apenas por um termo de ordem de perturbação superior. Assim, ao trabalharmos no regime linear, é justificável negligenciar essa diferença. Dessa forma, podemos calcular diretamente a transformada de Fourier do contraste de densidade observada como:

$$\delta_{g,obs}(\mathbf{k}) = \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\chi\hat{r}} \left(\delta_g(\chi\hat{r}) - \frac{1}{aH} \frac{\partial \mathbf{v}_{pec}(\chi\hat{r}) \cdot \hat{r}}{\partial \chi} \right) \quad (3.21)$$

Substituindo pelas relações (3.19) e (3.20), temos:

$$\delta_{g,obs}(\mathbf{k}) = b\delta_m(\mathbf{k}) - if \int d^3\chi e^{-i\mathbf{k}\cdot\chi\hat{r}} \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}'\cdot\chi\hat{r}} \delta_m(\mathbf{k}') \frac{\mathbf{k}' \cdot \hat{r}}{k'^2} \right) \quad (3.22)$$

de forma que a derivada com relação a x age no exponencial e faz com que surja um fator $i\mathbf{k}' \cdot \hat{x}$, logo temos:

$$\delta_{g,obs}(\mathbf{k}) = b\delta_m(\mathbf{k}) + f \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \delta_m(\mathbf{k}') (\hat{k}' \cdot \hat{r})^2 \int d^3\chi e^{i(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\cdot\chi\hat{r}} \quad (3.23)$$

e a integral em $\mathbf{x}$ resulta em $(2\pi)^3 \delta_D^3(\mathbf{k}' - \mathbf{k})$. Por fim, encontramos que o contraste de densidade observada é:

$$\delta_{g,obs}(\mathbf{k}) = (b + f\mu_k^2) \delta_m(\mathbf{k}) \quad (3.24)$$

onde $\mu_k = \hat{k}' \cdot \hat{r}$ é o ângulo entre a linha de visada e o vetor de onda $\hat{k}$. O espectro de potência observado pode, então, ser descrito pela equação (3.24), cujo formato explícito é:

$$\mathcal{P}_{gg,obs}(k, \mu_k, z) = \mathcal{P}_{mm}(k, z) (b + f\mu_k^2)^2 + N \quad (3.25)$$

Note que um termo adicional, N , é incluído para representar o ruído estatístico (*noise*) presente nas observações, associado principalmente à variância na contagem de galáxias em cada elemento de volume. Como discutido anteriormente na Seção 3.1, não acessamos diretamente o contraste de densidade observado, $\delta_{g,obs}$, mas sim traçadores luminosos — as galáxias. Na prática, portanto, o que se observa em dados reais é a contagem de objetos em volumes finitos, a partir da qual estimamos a densidade observada por meio da relação:

$$\delta_{g,obs}(\chi\hat{r}) = \frac{n_g(\chi\hat{r}) - \bar{n}_g}{\bar{n}_g} \quad (3.26)$$

onde $\bar{n}_g$ representa a contagem média de traçadores por subdivisão do volume observado. Com isso, associamos essa densidade ao espectro de potência observado $\mathcal{P}_{gg,obs}(k)$, permitindo relacioná-lo com $\mathcal{P}_{mm}(k)$ e, conseqüentemente, com os parâmetros cosmológicos.

Esse *clustering* tridimensional é geralmente obtido por meio de observações espectroscópicas. Porém, quando lidamos com levantamentos fotométricos, essa abordagem recai sobre a construção do campo de densidade projetado na abóbada celeste, resultando em um *clustering* bidimensional. Dessa maneira, a próxima seção será dedicada a esse caso fotométrico.

3.3.2 Clustering 2D

Como discutido na Seção 3.2, é necessário adotar o formalismo do espectro de potência angular no espaço de Fourier para analisar campos projetados na esfera celeste — e o caso do *clustering* de galáxias não é uma exceção. Neste contexto, seguimos uma abordagem similar à apresentada em (PADMANABHAN; OTHERS., 2007) para derivar a expressão do espectro de potência angular C_ℓ a partir das densidades tridimensionais de galáxias. Para isso, utilizamos a projeção definida na equação (3.1), aplicada ao campo de densidade. Assim, temos:

$$\delta_{g,obs}(\hat{\mathbf{n}}) = \int_0^\infty d\chi F(\chi) \delta_g^{3D}(\chi \hat{\mathbf{n}}), \quad (3.27)$$

onde $F(\chi)$ é o *kernel* de projeção, que pondera a contribuição do campo de densidade ao longo da linha de visada. Ao lidar com levantamentos fotométricos, não temos acesso direto

às distâncias precisas das galáxias, mas sim a uma distribuição dessas distâncias, descrita por $F(\chi)$:

$$F(\chi) = \frac{1}{N_g} \frac{dN_g}{d\chi}, \quad (3.28)$$

onde N_g representa o número total de galáxias. Na prática, é essencial inferir com alta precisão a distribuição de redshifts $dN_g/d\chi$, pois ela desempenha um papel crucial na modelagem do *clustering* bidimensional de galáxias. Para isso, diversas técnicas de calibração dos chamados redshifts fotométricos (photo- z 's) são empregadas. Uma dessas técnicas baseia-se na inferência da distribuição de redshifts por meio de correlações cruzadas com uma população de referência — geralmente composta por galáxias com redshifts espectroscópicos conhecidos — permitindo alcançar a precisão exigida por experimentos de energia escura, como $\Delta\bar{z} \lesssim 3 \times 10^{-3}$ em $z \sim 1$ (NEWMAN, 2008; MATTHEWS; NEWMAN, 2012; MCQUINN; WHITE, 2013).

Outras abordagens exploram técnicas de aprendizado de máquina para inferir com precisão a distribuição em redshift, utilizando informações fotométricas como magnitudes e cores. Modelos como florestas aleatórias (CARLILES et al., 2010), redes neurais (COLLISTER; LAHAV, 2004) e *self-organizing maps* (SOMs) (MASTERS et al., 2015), entre outros, são amplamente utilizados nesse contexto.

Tendo definido o kernel de projeção, podemos tomar a transformada de Fourier do lado direito da equação (3.27), obtendo:

$$\delta_g(\hat{\mathbf{n}}) = \int_0^\infty d\chi n_g(\chi) \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \delta_g(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \chi \hat{\mathbf{n}}}, \quad (3.29)$$

Substituindo $\delta_g(k)$ da equação (3.24) e seguindo o procedimento descrito na Seção 3.2, encontramos que os momentos de multipólo da densidade projetada são:

$$\delta_{\ell m} = \int d\Omega \left[\int_0^\infty d\chi n_g(\chi) \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k (b + f\mu_k^2) \delta_m(k) e^{i\mathbf{k} \cdot \chi \hat{\mathbf{n}}} \right] Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{n}}), \quad (3.30)$$

$$\delta_{\ell m}^* = \int d\Omega' \left[\int_0^\infty d\chi' n_g(\chi') \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k' (b + f\mu_{k'}^2) \delta_m^*(k') e^{-i\mathbf{k}' \cdot \chi' \hat{\mathbf{n}}'} \right] Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}'). \quad (3.31)$$

Utilizando a identidade $(\hat{k} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 e^{i\mathbf{k} \cdot \chi \hat{\mathbf{n}}} = \frac{d^2}{d(kr)^2} e^{i\mathbf{k} \cdot \chi \hat{\mathbf{n}}}$ e a expansão de onda plana de Rayleigh B.1, obtemos um termo proporcional à derivada segunda da função de Bessel esférica $j_\ell''(k\chi)$. Aplicando a ortonormalidade dos harmônicos esféricos B.2, temos:

$$\delta_{\ell m} = \frac{i^\ell}{2\pi^2} \int d^3k \delta_m(k) Y_{\ell m}^*(\hat{k}) \int_0^\infty d\chi n_g(\chi) [b j_\ell(k\chi) + f j_\ell''(k\chi)], \quad (3.32)$$

$$\delta_{\ell m}^* = \frac{i^\ell}{2\pi^2} \int d^3k' \delta_m^*(k') Y_{\ell m}(\hat{k}') \int_0^\infty d\chi n_g(\chi) [b j_\ell(k\chi) + f j_\ell''(k\chi)]. \quad (3.33)$$

Dessa forma, analogamente à equação (3.11), o espectro angular de potência da densidade de galáxias é dado por:

$$C_{gg}(\ell) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dk k^2 \mathcal{P}_{mm}(k) W_g(k) W_g(k), \quad (3.34)$$

onde a função janela de *clustering* de galáxias é definida como:

$$W_g(k) = \int_0^\infty d\chi n_g(\chi) [b j_\ell(k\chi) + f j_\ell''(k\chi)]. \quad (3.35)$$

Note que essa função janela possui dois termos distintos: um associado à densidade de galáxias observadas, e outro relacionado às distorções no espaço de redshift causadas pelas velocidades peculiares das galáxias (RSDs). Por conveniência, tratamos esses dois componentes separadamente:

$$W_{\text{den}}(k) = \int_0^\infty d\chi n_g(\chi) b j_\ell(k\chi), \quad (3.36)$$

$$W_{\text{RSD}}(k) = \int_0^\infty d\chi n_g(\chi) f j_\ell''(k\chi). \quad (3.37)$$

Uma forma comum de representar a função janela de RSD é reescrevê-la apenas em termos de funções de Bessel esféricas (sem derivadas). Para isso, aplicamos duas vezes a relação de recorrência: $(2\ell + 1) j_\ell'(x) = \ell j_{\ell-1}(x) - (\ell + 1) j_{\ell+1}(x)$, obtendo:

$$W_{\text{RSD}}(k, \ell) = \int_0^\infty d\chi n_g(\chi) f(\chi) \left[\frac{2\ell^2 + 2\ell - 1}{(2\ell + 3)(2\ell - 1)} j_\ell(k\chi) - \frac{\ell(\ell - 1)}{(2\ell - 1)(2\ell + 1)} j_{\ell-2}(k\chi) - \frac{(\ell + 1)(\ell + 2)}{(2\ell + 1)(2\ell + 3)} j_{\ell+2}(k\chi) \right]. \quad (3.38)$$

Essa forma é particularmente útil para aplicar a aproximação de Limber de maneira mais direta, além de fornecer uma intuição física sobre o efeito das RSDs nesse tipo de levantamento. É fácil perceber que, para valores suficientemente grandes de ℓ , vale aproximadamente: $\int d\chi n_g(\chi) j_\ell(k\chi) \approx \int d\chi n_g(\chi) j_{\ell \pm 2}(k\chi)$, de modo que a função janela $W_{\text{RSD}}(k)$ tende a zero. Fisicamente, isso corresponde ao efeito de RSDs sendo suprimido pela projeção na esfera celeste.

Porém, a equação (3.34) é uma modelagem teórica esperada do $C_{gg}(\ell)$, o que acontece na prática com dados reais é que a densidade de galáxias observada é obtida a partir da contagem de galáxias por unidade de área na esfera celeste. Para isso, utiliza-se uma pixelização da esfera celeste, na qual cada pixel cobre uma área igual do céu. A contagem de galáxias é, então, realizada dentro de cada pixel, permitindo a construção de mapas de densidade angular.

Contudo, nem todas as regiões do céu são observadas com a mesma profundidade ou qualidade, e muitas podem estar contaminadas por estrelas brilhantes ou por outros efeitos sistemáticos. Para lidar com essas regiões, aplica-se uma **máscara**, que corresponde a um mapa binário ou ponderado indicando quais pixels devem ser incluídos na análise. Essa máscara é essencial para evitar vieses e deve ser considerada tanto na construção dos mapas quanto na estimativa dos espectros angulares de potência $C_{gg}(\ell)$ observados.

Um aspecto fundamental na modelagem do *clustering* angular é a utilização de informações tomográficas — isto é, a divisão da amostra em múltiplos *bins* de redshift — com o intuito de preservar parte da informação tridimensional da distribuição de galáxias. Nesse contexto, é comum considerar apenas os espectros de potência angulares auto-correlacionados em cada bin, $C_{gg}^{(i,i)}(\ell)$, enquanto os termos de correlação cruzada entre bins distintos, $C_{gg}^{(i,j)}(\ell)$ com $i \neq j$, são frequentemente negligenciados. No entanto, estudos recentes, como o de (KRYWONOS; MUIR; JOHNSON, 2024), mostram que tais correlações cruzadas contêm informações cosmológicas valiosas. Sua inclusão pode auxiliar na quebra de degenerescências entre os parâmetros, mesmo que de forma mais modesta do que comparado a combinações com outros observáveis, como nas chamadas análises Nx2pt. Além disso, essas correlações contribuem para a autocalibração de incertezas nos redshifts fotométricos, reduzindo os erros associados aos parâmetros de *nuisance* relacionados aos photo-*z*'s.

Dado o potencial das correlações cruzadas, torna-se ainda mais relevante explorar combinações entre diferentes observáveis cosmológicos. Um dos mais importantes, no contexto de levantamentos fotométricos, é o lenteamento gravitacional fraco (*weak lensing*). A análise conjunta do clustering de galáxias com o *weak lensing* — frequentemente denominada análise 3x2pt, por incluir auto-correlações e correlações cruzadas entre esses observáveis — permite não apenas impor restrições mais precisas sobre os parâmetros cosmológicos, como também mitigar sistemáticos específicos de cada sonda individual. Essa sinergia contribui para resultados mais robustos e confiáveis. Nesse contexto, a próxima seção é dedicada à descrição e modelagem do observável de *weak lensing*.

3.3.3 Lenteamento Gravitacional Fraco

Antes de abordarmos o observável de Weak Lensing, é preciso apresentar o conceito mais amplo de lentes gravitacionais. Esse fenômeno ocorre quando a luz de galáxias distantes tem sua trajetória desviada pela presença de massa ao longo da linha de visada, conforme predito pela Teoria da Relatividade Geral. As lentes gravitacionais são uma das principais ferramentas da cosmologia observacional, pois, ao contrário do galaxy clustering, elas respondem tanto à matéria bariônica visível quanto à matéria escura, que compõe a maior parte do conteúdo do Universo. A seguir, faremos uma exposição teórica desse efeito e de suas principais consequências, fundamentando-nos nos trabalhos de (HUTERER, 2023; MANDELBAUM, 2018; PRAT; BACON, 2025)

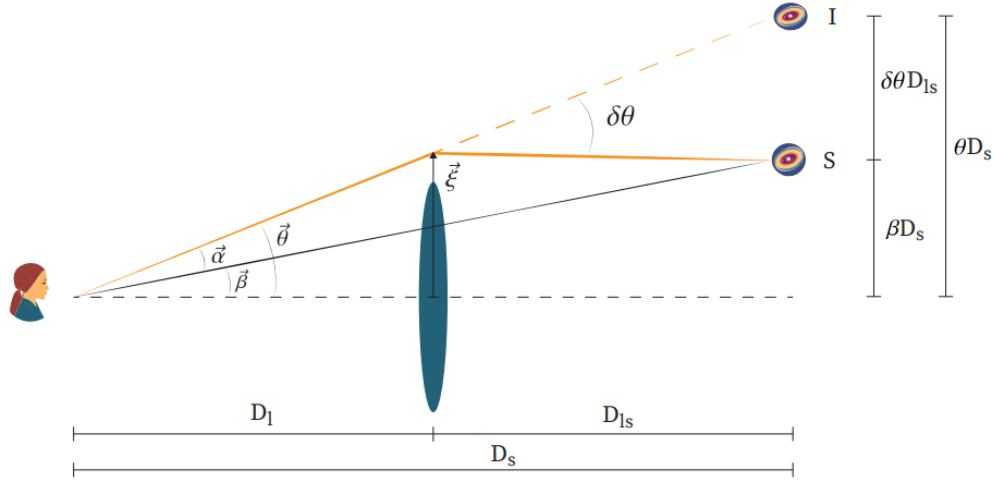


Figura 13 – Esboço de um sistema de lentes gravitacionais. Créditos: (PRAT; BACON, 2025)

Para introduzir o conceito de lentes gravitacionais, consideremos um sistema geométrico típico, ilustrado esquematicamente na Figura 13. Esse sistema é composto por três elementos fundamentais: a fonte (geralmente uma galáxia de fundo), a lente (uma estrutura massiva responsável por desviar a luz) e o observador. Na ausência de qualquer lente, a luz da fonte seguiria um caminho retilíneo, e ela seria observada em uma posição angular β em relação ao observador. No entanto, a presença da lente provoca a deflexão da luz ao longo da trajetória, fazendo com que a fonte seja vista em uma posição aparente distinta, formando um ângulo θ com o observador. Dessa forma, essa deflexão altera a separação angular observada no céu, de modo que $\theta \neq \beta$. Logo, a diferença entre esses dois ângulos é chamada de ângulo de deflexão reduzido, definido por:

$$\alpha = \theta - \beta \quad (3.39)$$

Sabemos que o ângulo de deflexão físico $\delta\theta$ — medido no plano da lente — e α possuem o mesmo comprimento de arco. Nesse sentido, a relação entre eles é descrita por:

$$\alpha = \frac{d_{LS}}{d_S} \delta\theta \quad (3.40)$$

onde d_{LS} e d_S são, respectivamente, as distâncias angulares da lente à fonte e do observador à fonte, conforme definido na seção 2.1.4.2. Combinando as equações (3.39) e (3.40), obtemos a equação das lentes:

$$\beta = \theta - \frac{d_{LS}}{d_S} \delta\theta \quad (3.41)$$

Essa equação é fundamental para a descrição dos fenômenos de lentes gravitacionais, pois ela constitui a base para o entendimento dos diferentes regimes de lenteamento, como o strong lensing (em que múltiplas imagens são formadas) e o weak lensing (em que as distorções são pequenas, mas estatisticamente mensuráveis).

No regime de weak lensing, no qual estamos interessados, o ângulo de deflexão $\delta\theta$ assume um papel central, pois está diretamente relacionado às pequenas distorções observadas na forma das galáxias de fundo. Essas distorções, quando analisadas em grandes populações de galáxias, trazem informações sobre a distribuição de massa - visível e invisível - no Universo. Nesse sentido, essas distorções estão intimamente relacionadas ao campo gravitacional provocado pelas massas das lentes. Assim, ao se estudar a propagação da luz em um campo gravitacional percorrendo geodésicas nulas, encontra-se que o ângulo de deflexão pode ser expresso em termos do potencial gravitacional newtoniano Φ :

$$\delta\theta = 2 \int_0^{s_{src}} \nabla_{\perp} \Phi ds \quad (3.42)$$

onde $\nabla_{\perp}$ é o gradiente na direção perpendicular à trajetória do fóton e s_{src} é a distância até a fonte.

Como o efeito das lentes gravitacionais se manifesta em observações no céu, é necessário tomar a projeção do potencial gravitacional ao longo da linha de visada. Para descrever esse efeito de forma mais concisa, introduzimos o chamado potencial da lente, que representa essa integral do potencial gravitacional ao longo da linha de visada, ponderada por fatores geométricos determinados pela configuração entre observador, lente e fonte:

$$\psi(\theta) = 2 \frac{d_{LS}}{d_L d_S} \int_0^{s_{src}} \Phi(d_L \theta, s), ds. \quad (3.43)$$

Uma aproximação amplamente utilizada nesse contexto é a aproximação de lentes finas, que considera que a extensão da lente ao longo da linha de visada é desprezível quando comparada às distâncias características do sistema d_L , d_S e d_{LS} . Essa suposição permite modelar a deflexão da luz como ocorrendo inteiramente em um único plano — o plano da lente — onde toda a massa da lente é projetada, o que faz com que haja uma simplificação significativa no tratamento matemático. Nesse sentido, a direção angular da deflexão α pode ser expressa diretamente como o gradiente angular do potencial de lente:

$$\alpha = \nabla_{\theta} \psi = 2 \frac{d_{LS}}{d_S} \int_0^{s_{src}} \nabla_{\perp} \Phi, ds \quad (3.44)$$

Note que aqui utilizamos o operador gradiente angular ∇_{θ} sobre o potencial projetado, e o relacionamos ao gradiente perpendicular à linha de visada, $\nabla_{\perp}$, pela relação $\nabla_{\theta} = d_L \nabla_{\perp}$. de forma que, recuperamos o mesmo resultado obtido ao combinar as equações (3.40) e (3.42).

Diante disso, somos capazes de introduzir a chamada convergência κ , uma grandeza escalar que quantifica a amplificação isotrópica das imagens das fontes de fundo. Quando $\kappa > 0$, há um aumento no tamanho aparente da imagem; já valores negativos de κ indicam uma diminuição, embora essa situação seja rara em observações reais. A convergência, então, é definida como:

$$\kappa = \frac{1}{2} \nabla_{\theta}^2 \psi = \frac{d_L d_{LS}}{d_S} \int_0^{s_{src}} \nabla_{\perp}^2 \Phi ds, \quad (3.45)$$

Na prática, a convergência κ não é diretamente observável, mas pode ser indiretamente obtida a partir da inferência das distorções nas formas das galáxias de fundo (elipticidades observadas). Para isso, recorre-se a outra quantidade chamada de *shear* (γ), que, por sua vez, é diretamente obtida a partir dessas elipticidades. Para demonstrar essa quantidade, é útil retomar a equação das lentes (3.41) e considerar pequenas variações no ângulo de deflexão, assumindo que a extensão angular da fonte é pequena em comparação com a escala de variação do campo de deflexão. Dessa maneira, podemos linearizar a equação das lentes por meio de uma expansão de Taylor, introduzindo, então, a matriz Jacobiana A , que relaciona pequenas perturbações no plano da imagem e da fonte:

$$\delta\beta \approx A \delta\theta \quad (3.46)$$

A matriz A estabelece como pequenos deslocamentos no ângulo observado da imagem, $\delta\theta$, se traduzem em deslocamentos correspondentes na posição aparente da fonte, $\delta\beta$. Suas componentes são dadas por:

$$A_{ij} = \delta_{ij} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial \theta_j} = \delta_{ij} - \partial_i \partial_j \psi \quad (3.47)$$

Note que, utilizamos a equação (3.44) para substituir o ângulo de deflexão α pelo gradiente do potencial de lente $\nabla_{\theta} \psi$, considerando $\partial_i = \nabla_{\theta_i}$ por simplicidade. Para facilitar a interpretação física da matriz Jacobiana, é conveniente parametrizá-la em termos do campo de *shear* complexo $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2 = |\gamma|e^{2i\varphi}$ e da convergência escalar κ , resultando na forma matricial:

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

Isso mostra que tanto a convergência quanto o *shear* podem ser expressos como combinações de derivadas segundas do potencial de lente ψ :

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{1}{2}(\partial_1^2 + \partial_2^2)\psi = \frac{1}{2}\nabla^2\psi \\ \gamma_1 &= \frac{1}{2}(\partial_1^2 - \partial_2^2)\psi \\ \gamma_2 &= \partial_1\partial_2\psi \end{aligned} \quad (3.49)$$

Enquanto a convergência quantifica variações isotrópicas no tamanho das imagens das fontes, o *shear* descreve deformações anisotrópicas, ou seja, deformações associadas ao alongamento das imagens, transformando círculos em elipses, como ilustrado na Figura 14. Dessa forma, essas duas quantidades contêm, quando conhecidas em todos os pontos do plano da lente, toda a informação necessária sobre a posição, forma e magnificação das imagens das

fontes de fundo. No entanto, no regime de *Weak Lensing*, não temos acesso direto ao campo de *shear* e, sim, observações sobre as formas aparentes das fontes, a partir das quais é possível fazer a inferência do campo de *shear* sobre o plano da lente — e, assim, reconstruir a distribuição de massa ao longo das lentes gravitacionais.

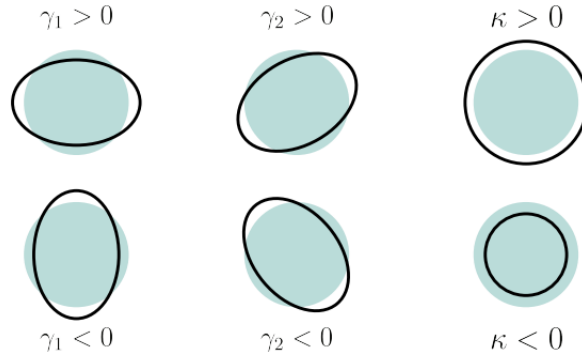


Figura 14 — Ilustração mostrando o efeito dos elementos da matriz Jacobiana A — *shear* e convergência — sobre uma fonte inicialmente circular. Créditos: (PRAT; BACON, 2025)

Esse regime ocorre no limite em que a convergência e o *shear* são pequenos, isto é, $\kappa, \gamma \ll 1$. Esse limite retrata o caso mais relevante para os surveys fotométricos focados em cosmologia, que estão principalmente interessados em detectar pequenas distorções nas elipticidades das galáxias devido à estrutura em larga escala (veja Fig.15). Essas distorções fracas são significativamente mais frequentes, permitindo a realização de análises estatísticas robustas que extraem informações cosmológicas a partir de grandes amostras observacionais.

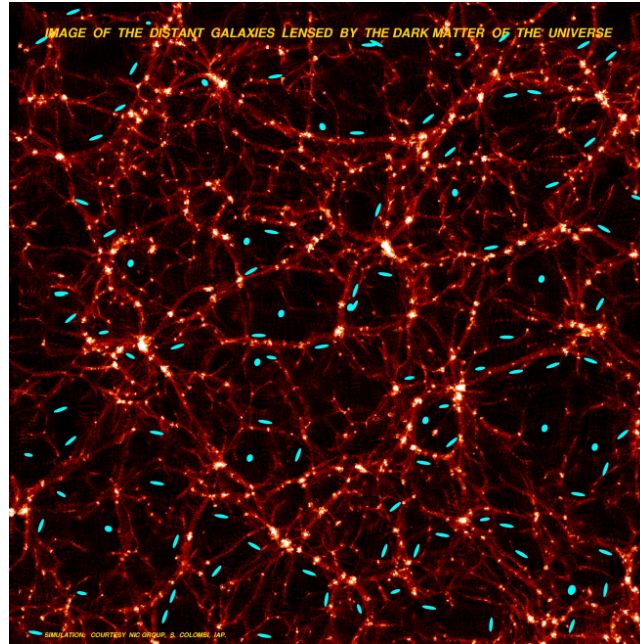


Figura 15 — Simulação que mostra um padrão coerente induzido nas formas das fontes (elipses azuis) devido a estrutura em larga escala. Créditos: Canada-France Hawaii Telescope, retirado de (MANDELBAUM, 2018)

A elipticidade observada ϵ_{obs} pode ser dividida em três contribuições principais: γ_G , que representa o *cosmic shear* (cisalhamento cósmico) induzido pela lente gravitacional fraca; γ_I , que corresponde ao *shear* intrínseco, causado pelo alinhamento das galáxias com o campo gravitacional local; e ϵ_{rnd} , que é a componente puramente aleatória, associada às orientações e formas intrínsecas das galáxias, não correlacionadas espacialmente. Assim, temos:

$$\epsilon_{\text{obs}} = \gamma_G + \gamma_I + \epsilon_{\text{rnd}}. \quad (3.50)$$

Como ϵ_{rnd} é uma contribuição estatisticamente aleatória, sua média tende a zero, de forma que ela atua apenas como ruído. Porém, o *shear* intrínseco γ_I por sua vez, contribui como uma fonte de erro sistemático, pois não dispomos de uma medida "limpa" do *shear* verdadeiro. Dessa forma, esse termo quantifica os possíveis alinhamentos preferenciais das elipticidades das galáxias induzidos pelos campos de maré associados à estrutura em larga escala. Tal efeito sistemático é especialmente preocupante, pois não está diretamente vinculado às observações, mas sim à física — ainda pouco compreendida — da formação das galáxias.

Como a correlação das elipticidades observadas está relacionada a medidas projetadas no céu, podemos definir o espectro de potência angular como:

$$C_{\epsilon\epsilon} = C_{\gamma\gamma} + C_{I\gamma} + C_{\gamma I} + C_{II}, \quad (3.51)$$

onde γ representa a contribuição do *cosmic shear*, e I corresponde à contribuição do alinhamento intrínseco. Vamos inicialmente focar na contribuição de γ . No regime de *weak lensing*, o espectro angular de potência do *cosmic shear* e da convergência são idênticos, isto é:

$$\langle \kappa \kappa^* \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{2} (\partial_1^2 + \partial_2^2) \psi \right)^2 \right\rangle = \left\langle \left(\frac{1}{2} (\partial_1^2 - \partial_2^2) + i \partial_1 \partial_2 \right) \psi \left(\frac{1}{2} (\partial_1^2 - \partial_2^2) - i \partial_1 \partial_2 \right) \psi \right\rangle = \langle \gamma \gamma^* \rangle. \quad (3.52)$$

Assim, podemos tratar o espectro angular de potência do *cosmic shear* a partir da convergência. Projetando essa quantidade e utilizando coordenadas comóveis, temos:

$$\kappa(\hat{\mathbf{n}}) \equiv \frac{1}{2} \nabla_{\theta}^2 \psi(\hat{\mathbf{n}}) = \int_0^{\chi_S} \frac{r(\chi) r(\chi_S - \chi)}{r(\chi_S)} \nabla_{\text{comov}}^2 \Phi(\chi \hat{\mathbf{n}}) d\chi, \quad (3.53)$$

onde $r(\chi)$ é a distância comóvel e Φ é o potencial gravitacional. Utilizando a equação de Poisson em coordenadas comóveis, $\nabla_{\text{comov}}^2 \Phi = 4\pi G \rho_M \delta_m = 4\pi G \rho_{\text{crit},0} \Omega_M a^{-1} \delta_m$, obtemos:

$$\begin{aligned} \kappa(\hat{\mathbf{n}}) &= \int_0^{\chi_S} \frac{r(\chi) r(\chi_S - \chi)}{r(\chi_S)} \cdot 4\pi G \rho_{\text{crit},0} \Omega_M a^{-1} \delta_m(\chi \hat{\mathbf{n}}) d\chi \\ &= \int_0^{\chi_S} \frac{r(\chi) r(\chi_S - \chi)}{r(\chi_S)} \cdot \frac{3}{2} H_0^2 \Omega_M (1+z) \delta_m(\chi \hat{\mathbf{n}}) d\chi. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Repetindo o procedimento da Seção 3.2 e considerando que não conhecemos a posição exata das fontes $r(\chi)$, mas sim sua distribuição ao longo da linha de visada, representada por $n_s(\chi)$ (distribuição de redshift das fontes), obtemos a função janela para o *cosmic shear*:

$$W_\gamma(k) = \int_0^\infty d\chi \left[\frac{3}{2} H_0^2 \Omega_M (1+z) r(\chi) \int_\chi^\infty n_s(\chi_S) \frac{r(\chi_S - \chi)}{r(\chi_S)} d\chi_S \right] j_\ell(k\chi), \quad (3.55)$$

onde o espectro de potência angular da auto-correlação do cisalhamento cósmico é dado por:

$$C_{\gamma\gamma}^{ij}(\ell) = \int_0^\infty \frac{dk}{k^2} W_\gamma^i(k) W_\gamma^j(k) P_{mm}(k, z) \quad (3.56)$$

Para lidar, agora, com o alinhamento intrínseco I , é necessário adotar uma modelagem teórica que capture os efeitos físicos responsáveis por esse efeito sistemático nas elipticidades das galáxias. Nesse sentido, por simplicidade, vamos lidar com o modelo *Nonlinear Alignment* (*NLA*) proposto por (BRIDLE; KING, 2007) (veja também (TROXEL; ISHAK, 2015) para um panorama mais recente da modelagem desse efeito). Nesse modelo, assume-se que as formas intrínsecas das galáxias se alinham com o campo de maré, e que essa interação pode ser descrita por uma extensão não linear do modelo de alinhamento linear (CATELAN; KAMIONKOWSKI; BLANDFORD, 2001; HIRATA; SELJAK, 2010).

No formalismo NLA, o espectro de potência tridimensional do tipo II (intrínseco–intrínseco) é dado por:

$$\mathcal{P}_{II}(k) = F_{IA}^2(\chi) \mathcal{P}_{mm}(k), \quad (3.57)$$

onde $F_{IA}(\chi)$ é a amplitude do alinhamento intrínseco, que encapsula a força com que as galáxias se alinham com o campo de densidade local, e que pode variar com o redshift. Explicitamente, essa amplitude é escrita como:

$$F_{IA}(\chi) = -A_{IA} \bar{C}_1 \frac{3H_0^2 \Omega_m}{8\pi G} D_+^{-1}(\chi) \left(\frac{1+z}{1+z_0} \right)^{\eta_{IA}} \quad (3.58)$$

em que A_{IA} e η_{IA} são parâmetros livres que regulam, respectivamente, a amplitude e a dependência em redshift do alinhamento intrínseco. A constante $\bar{C}_1 = 5 \times 10^{-14} h^{-2} \text{Mpc}^3 M_\odot^{-1}$ é determinada empiricamente a partir de observações, enquanto z_0 , o redshift pivô no qual o modelo é normalizado, costuma ser escolhido como o redshift mediano (ou o centro) da distribuição fotométrica das fontes.

Nesse sentido, a função janela associada ao alinhamento intrínseco para o bin tomográfico i é, portanto, dada por:

$$W_I^i(k) = \int_0^\infty d\chi n_s^i(\chi) F_{IA}(\chi) j_\ell(k\chi), \quad (3.59)$$

onde $n_s^i(\chi)$ representa a distribuição de redshift das galáxias fontes.

Com essas definições, os termos associados ao alinhamento intrínseco nos espectros

angulares de potência podem ser calculados de forma que o termo do tipo II é escrito como:

$$\begin{aligned}
 C_{II}^{ij}(\ell) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dk k^2 \int_0^\infty d\chi n_s^i(\chi) j_\ell(k\chi) \int_0^\infty d\chi' n_s^j(\chi') j_\ell(k\chi') P_{II}(k), \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dk k^2 \int_0^\infty d\chi n_s^i(\chi) F_{IA}(\chi) j_\ell(k\chi) \int_0^\infty d\chi' n_s^j(\chi') F_{IA}(\chi') j_\ell(k\chi') P_{mm}(k), \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dk k^2 W_I^i(k) W_I^j(k) P_{mm}(k),
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

enquanto o termo do tipo GI (cisalhamento gravitacional–intrínseco) é dado por:

$$\begin{aligned}
 C_{\gamma I}^{ij}(\ell) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dk k^2 W_\gamma^i(k) \int_0^\infty d\chi' n_s^j(\chi') j_\ell(k\chi') P_{\gamma I}(k), \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dk k^2 W_\gamma^i(k) \int_0^\infty d\chi' n_s^j(\chi') F_{IA}(\chi') j_\ell(k\chi') P_{mm}(k), \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dk k^2 W_\gamma^i(k) W_I^j(k) P_{mm}(k),
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

em que $W_\gamma^i(k)$ corresponde à função janela do cisalhamento, conforme definida na Eq. (3.55), e

$$P_{\gamma I}(k, z) = A(z) P_{mm}(k, z)$$

é o espectro angular de potência cruzado entre cisalhamento gravitacional e alinhamento intrínseco. Analogamente, pode-se obter o espectro angular de potência IG da mesma forma que a obtida GI. Assim, os termos II, GI e IG são incorporados de maneira consistente às previsões teóricas dos observáveis de *cosmic shear*.

Além do NLA, existem modelos mais sofisticados para tratar o alinhamento intrínseco de forma robusta. Um dos mais utilizados é o *Tidal Alignment and Tidal Torquing* (TATT; (BLAZEK et al., 2019)), que foi aplicado, por exemplo, na análise de cosmic shear do DES Y3 (SECCO et al., 2022). Ainda hoje, a comunidade debate qual é o nível de complexidade necessário na modelagem desse efeito sistemático para alcançar os requisitos de precisão das análises cosmológicas modernas.

3.3.4 Galaxy-Galaxy lensing

Tendo definido os observáveis mais relevantes para levantamentos de galáxias, podemos agora tratar de uma medição auxiliar que também fornece informações cruciais sobre a estrutura do Universo: a correlação cruzada entre a posição das galáxias e suas elipticidades. Essa técnica, comumente conhecida como *galaxy-galaxy lensing*, utiliza uma medida tipicamente mais fácil de detectar do que as auto-correlações de *shear* (shear-shear), pois envolve o cruzamento entre a posição de galáxias da amostra lente, que pode ser medida com alta precisão, e a forma de galáxias fontes, que contém o sinal fraco de lenteamento gravitacional. Essa abordagem é menos vulnerável a certos erros sistemáticos porque, na correlação shear–shear, esses vieses atuam de forma idêntica em ambas as medições de shear, enquanto no galaxy–galaxy lensing isso não ocorre. Nesse sentido, essa medida se torna uma ferramenta robusta para investigar a distribuição de matéria escura e os efeitos da energia escura no Universo.

Observacionalmente, essa correlação é quantificada pelo espectro de potência angular $C_{g\epsilon}(\ell)$ que pode ser modelado como:

$$C_{g\epsilon}^{ij}(\ell) = C_{g\gamma}^{ij}(\ell) + C_{gI}^{ij}(\ell), \quad (3.62)$$

onde $C_{g\gamma}^{ij}(\ell)$ é a correlação cruzada entre a posição das galáxias e o *cosmic shear*, modulada pelas funções janela das equações (3.35) e (3.55), respectivamente. Já $C_{gI}^{ij}(\ell)$ representa a correlação entre a posição das galáxias e o alinhamento intrínseco, com contribuição das funções janela (3.35) e (3.59). Esse tipo de medida é especialmente importante por fornecer vínculos sobre os perfis de densidade, que descrevem como a matéria se distribui ao redor de halos de matéria escura, os vieses desses halos, e a relação entre massa e luminosidade das galáxias (HUTERER, 2023).

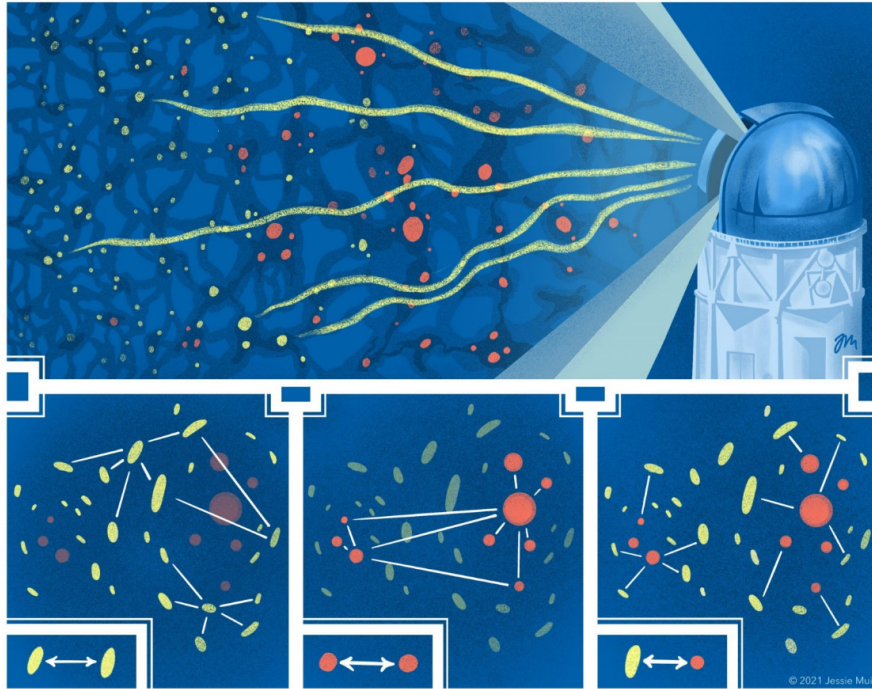


Figura 16 – As três correlações de dois pontos utilizadas pelos cientistas do DES para mapear a distribuição de matéria no Universo. A análise combina medições das formas das galáxias de fundo (em amarelo) com as posições das galáxias que atuam como lentes gravitacionais (em vermelho). Na parte inferior, da esquerda para a direita, aparecem as correlações entre cisalhamentos (shear-shear), entre galáxias (galáxia-galáxia) e entre galáxias e cisalhamento (galáxia-shear). Créditos: Jessie Muir, retirado de (Dark Energy Survey Collaboration,)

Levantamentos recentes, como LSST, DES e Euclid, utilizam a correlação de galaxy-galaxy lensing como uma importante sonda da matéria escura e da energia escura, especialmente quando combinada com outras medições — como as correlações *shear-shear* e *galaxy clustering* — em análises integradas como 3x2pt (PRAT et al., 2023; KRAUSE et al., 2017; WONG et al., 2025) (veja a figura 16). Essa correlação desempenha um papel central nessas análises por ajudar a quebrar degenerescências entre parâmetros cosmológicos, além de fornecer informações valiosas

sobre o viés das galáxias, os alinhamentos intrínsecos e a auto-calibração das distribuições de redshift (TUTUSAUS et al., 2020).

Dando continuidade a essa abordagem que combina múltiplas sondas, o próximo capítulo será dedicado ao trabalho desenvolvido no contexto da colaboração LSST, que amplia a análise 3×2 pt ao incluir uma sonda adicional de galaxy clustering espectroscópico externo — configuração amplamente conhecida como análise 6×2 pt.

Capítulo 4

Metodologia

A análise 3×2 pt do LSST representa uma das abordagens mais promissoras para impulsionar avanços na cosmologia observacional. No entanto, ela ainda enfrenta desafios significativos relacionados a degenerescências entre parâmetros cosmológicos e astrofísicos, especialmente devido à incertezas nos vieses das galáxias, redshifts fotométricos, alinhamentos intrínsecos e outros parâmetros de *nuisance*.

Para mitigar essas limitações estendemos a análise tradicional 3×2 pt do LSST com a adição de uma sonda externa de *galaxy clustering* proveniente de um levantamento espectroscópico, essa abordagem é denominada 6×2 pt. A inclusão desses dados — com redshifts mais precisos e sensibilidade a distorções no espaço de redshift — permite explorar correlações cruzadas entre as amostras fotométricas e espectroscópicas. Essas informações espectroscópicas complementares ajudam a quebrar degenerescências entre parâmetros e aprimoram significativamente as restrições tanto sobre parâmetros cosmológicos quanto sobre parâmetros de *nuisance* (MANDELBAUM et al., 2019; BAXTER et al., 2022).

Neste contexto, este trabalho fundamenta-se na metodologia descrita em (JOHNSTON et al., 2024) e (MCLEOD; BALAN; ABDALLA, 2016) (ver também (PAGANIN et al., 2024) para uma abordagem semelhante no âmbito do Euclid), integrando-se à infraestrutura atual da colaboração LSST e expandindo sua aplicação para uma análise mais abrangente. Dessa forma, este capítulo está organizado em quatro seções: a primeira descreve os observáveis fotométricos do LSST; a segunda apresenta os observáveis espectroscópicos dos surveys DESI e 4MOST; a terceira detalha a modelagem do vetor de dados da análise 6×2 pt; e, por fim, a quarta seção aborda o formalismo de Fisher, utilizado para prever as restrições nos parâmetros cosmológicos e nos parâmetros de *nuisance*.

4.1 Observáveis fotométricos

O Observatório Vera C. Rubin, também conhecido como LSST (Large Synoptic Survey Telescope), é uma instalação de última geração em construção no Cerro Pachón, Chile, resultado de uma parceria entre a NSF e o DOE dos EUA, com previsão de “first light” em 2025. Seu telescópio Simonyi — de 8,4 m, equipado com a maior câmera digital já construída —, realizará, ao longo de 10 anos, um mapeamento profundo e de cerca de 18 000 deg² no Hemisfério sul, capturando imagens em seis filtros (u, g, r, i, z, y) a cada três ou quatro noites — totalizando ao menos 825 visitas por região — e em campos de perfuração profunda (deep-drilling) de 10 deg² com cadência quase diária. Essa combinação inédita de design óptico avançado, elevada sensibilidade, rapidez de varredura e capacidade computacional viabilizará a produção do maior “filme” astronômico já realizado, capaz de revelar asteroides, cometas, estrelas variáveis e supernovas, além de fornecer medições de altíssima precisão para o estudo da evolução da estrutura cósmica, da natureza da energia escura e da expansão do Universo (Rubin Observatory, 2025; BLUM et al., 2022; BLAZEK et al., 2022; LSST Dark Energy Science Collaboration, 2012; IVEZIĆ et al., 2019).

Para análises cosmológicas, a análise 3x2pt do LSST será crucial devido a sua alta precisão estatística ao vincular parâmetros cosmológicos. Nesse sentido, definiremos as amostras de weak lensing e de clustering de galáxias do LSST com base no Science Requirements Document (SRD) da colaboração LSST Dark Energy Science Collaboration (DESC) (MANDELBAUM; EIFLER et al., 2021), a fim de estabelecer os conjuntos de dados que serão utilizados neste projeto.

Iniciamos pela amostra de *clustering* de galáxias, comumente chamada de amostra de lente. Para a análise do primeiro ano do LSST (Year 1), essa amostra é descrita por uma distribuição do tipo Smail, definida por:

$$n(z|\alpha, \beta, z_0) = \frac{\alpha}{z_0 \Gamma[(1 + \beta)/\alpha]} \left(\frac{z}{z_0}\right)^\beta \exp \left[- \left(\frac{z}{z_0}\right)^\alpha \right], \quad (4.1)$$

com os parâmetros $(\alpha, \beta, z_0) = (0.94, 2.0, 0.26)$. A normalização da densidade numérica total é estimada com base em observações do levantamento Hyper Suprime-Cam (HSC), resultando em aproximadamente 18 galáxias por arco-minuto quadrado. O viés das galáxias é modelado por $b(z) = 1.05/D_+(z)$, e assume-se uma incerteza fotométrica de $\sigma_z = 0,03(1 + z)$, conforme (LSST Science Collaboration, 2009).

A distribuição global é então dividida em bins tomográficos conforme estabelecido no SRD, onde, para o Year 1, a amostra de lentes é dividida em cinco bins de redshift com largura fixa de $\Delta z = 0,2$, cobrindo o intervalo $0,2 \leq z \leq 1,2$. Dessa forma, a distribuição em cada bin é obtida tomando a convolução da distribuição global com uma função gaussiana truncada que modela os erros fotométricos:

$$p(z_p|z, \sigma_z) = \frac{1}{N(z)\sqrt{2\pi}\sigma_z} \exp \left[-\frac{(z - z_p)^2}{2\sigma_z^2} \right], \quad (4.2)$$

onde

$$N(z) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[-\frac{z}{\sqrt{2}\sigma_z} \right] \quad (4.3)$$

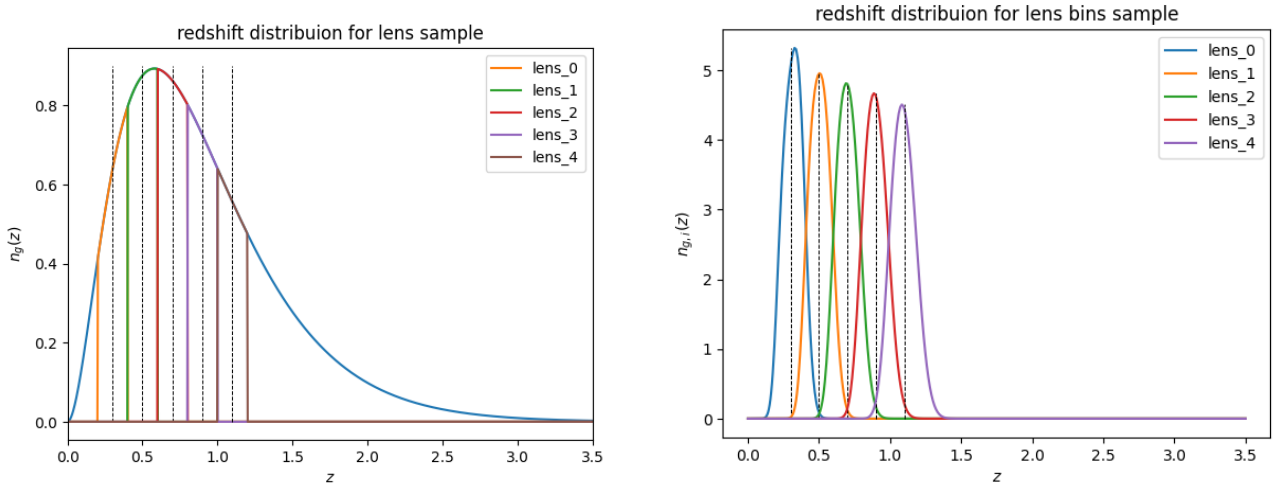
é o fator de normalização da gaussiana truncada.

Assim, a distribuição de redshift efetiva para o bin i é dada por:

$$n_i(z) = \int_{z_{p,i}^{\text{low}}}^{z_{p,i}^{\text{up}}} dz_p p(z_p|z, \sigma_z) n(z|\alpha, \beta, z_0), \quad (4.4)$$

onde $z_{p,i}^{\text{low}}$ e $z_{p,i}^{\text{up}}$ são os limites de cada um dos bins.

Nesse contexto, a Figura 17 exibe, em 17a, a distribuição global da amostra de lentes, destacando os cortes tomográficos definidos. Já em 17b, são apresentadas as distribuições efetivas de redshift resultantes da convolução com os erros fotométricos.



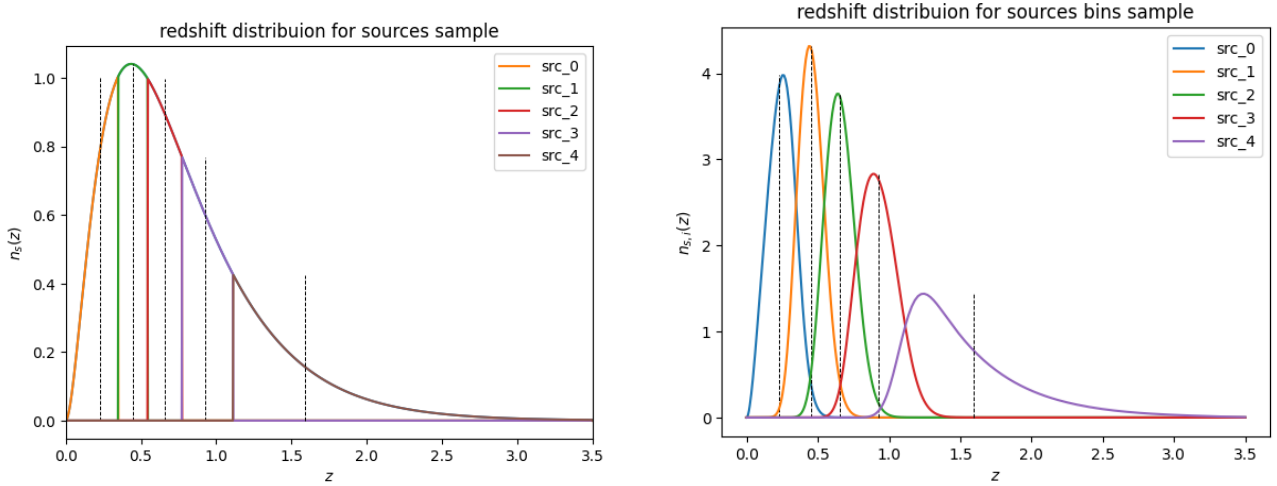
(a) Distribuição global da amostra de lentes do LSST, com cortes tomográficos definidos pelo SRD.

(b) Distribuições efetivas para cada bin tomográfico da amostra de lentes, após convolução com os erros fotométricos.

Figura 17 – Distribuições da amostra de lentes do LSST SRD, antes e depois da divisão tomográfica. Créditos: O Autor.

A amostra de *weak lensing* — ou amostra das fontes — também é modelada por uma distribuição do tipo Smail, conforme a Eq. (4.1), mas com parâmetros distintos: $(\alpha, \beta, z_0) = (0.78, 2.0, 0.13)$. Conforme a metodologia de (CHANG et al., 2013), estima-se que o número efetivo de galáxias fontes seja $n_{\text{eff}} = 10$ galáxias por arco-minuto quadrado no Year 1. Além disso, considera-se ainda uma dispersão intrínseca da elipticidade das galáxias de $\sigma_e = 0.26$ por componente — parâmetro que representa a dispersão intrínseca na elipticidade das galáxias — e, para os erros fotométricos, adota-se $\sigma_z = 0.05(1 + z)$.

A divisão em bins tomográficos também é aplicada a essa amostra, utilizando cinco bins com número igual de galáxias em cada um deles, conforme definido no SRD. Definidos esses intervalos, aplica-se novamente o procedimento de convolução com a gaussiana truncada para obter as distribuições efetivas 4.4. Nesse sentido, a Figura 18 apresenta, em 18a, a distribuição global da amostra de fontes com os cortes tomográficos correspondentes, e, em 18b, as distribuições resultantes por bin após a convolução.



(a) Distribuição global da amostra de fontes do LSST, com cortes tomográficos definidos pelo SRD.

(b) Distribuições efetivas para cada bin tomográfico da amostra de fontes, após a convolução com a função de erro no redshift.

Figura 18 – Distribuições da amostra de fontes do LSST SRD, antes e depois da divisão tomográfica. Créditos: O Autor.

Com as amostras fotométricas definidas, já é possível construir todas as informações necessárias para uma análise 3×2 pt. No entanto, para explorar plenamente o potencial do LSST, é fundamental combiná-las com dados de levantamentos complementares. Nesse contexto, com o objetivo de estabelecer todas as distribuições requeridas para uma análise 6×2 pt, a próxima seção será dedicada à definição das amostras espectroscópicas do DESI e do 4MOST - surveys selecionados pela sua relevância estratégica e complementaridade com o LSST.

4.2 Observáveis espectroscópicos

Com as amostras fotométricas previamente definidas, passamos agora à caracterização das amostras espectroscópicas. Levantamentos espectroscópicos fornecem medições precisas das distâncias radiais das galáxias, conforme discutido nas Seções 3.1 e 3.3.1. Tradicionalmente, tais levantamentos são analisados no contexto do espectro de potência tridimensional, $P(k)$. Embora essa abordagem permita capturar de maneira mais completa a informação radial presente nas observações espectroscópicas, ela exige a adoção de uma cosmologia fiducial para converter os redshifts observados (espaço de redshift) para distâncias comensuráveis no espaço real — uma escolha que pode introduzir vieses nas inferências cosmológicas. Além disso, a combinação desses

observáveis espectroscópicos tridimensionais com estatísticas angulares bidimensionais, como aquelas utilizadas em análises 3x2pt, apresenta desafios significativos no cálculo e na validação da matriz de covariância. Por conta disso, modelar corretamente as correlações entre diferentes traçadores, como lentes espectroscópicas 3D e fontes fotométricas 2D, é uma tarefa complexa, geralmente dependente de conjuntos extensivos de simulações numéricas (JOACHIMI et al., 2021; JOUDAKI et al., 2017). Embora existam propostas recentes que buscam simplificar essa modelagem (TAYLOR; MARKOVIČ, 2022), o problema permanece tecnicamente desafiador.

Diante dessas limitações associadas à análise espectroscópica 3D, neste trabalho optamos por uma abordagem alternativa, tratando as amostras espectroscópicas no formalismo do espectro angular de potência — isto é, adotamos um framework puramente bidimensional (2D) (ASOREY et al., 2012; GAZTAÑAGA et al., 2012; ERIKSEN; GAZTAÑAGA, 2015; KIRK et al., 2015; CAMERA et al., 2018; LOUREIRO et al., 2019). No entanto, essa escolha também impõe algumas dificuldades: primeiramente, não há garantia de que toda a informação radial disponível na espectroscopia seja completamente capturada pelos espectros de potência, mesmo com a adoção de bins tomográficos suficientemente finos. Além disso, levantamentos espectroscópicos possuem, em geral, uma densidade de galáxias significativamente menor devido às limitações inerentes ao processo de medição, o que resulta em uma relação sinal-ruído mais baixa.

Ainda assim, a adoção do formalismo 2D para espectroscopia é especialmente vantajosa em análises 6x2pt, pois facilita a integração dessas medidas ao vetor de dados, promovendo uma modelagem mais consistente e operacionalmente mais fácil. Nesse sentido, torna-se necessária a construção das distribuições de redshift associadas às populações espectroscópicas. Assim, nas próximas subseções, definiremos as distribuições de redshift correspondentes às amostras espectroscópicas dos dois levantamentos considerados: DESI e 4MOST.

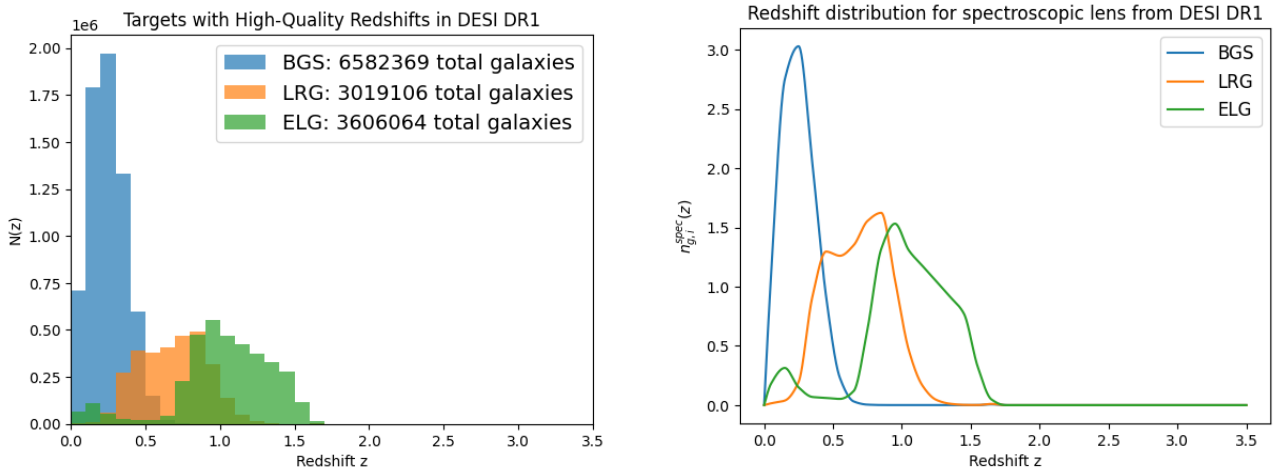
4.2.1 DESI

O DESI (Dark Energy Spectroscopic Instrument) é um levantamento espectroscópico de grande escala localizado no hemisfério norte, cujo objetivo é mapear os redshifts de mais de 30 milhões de galáxias e quasares ao longo de aproximadamente 14.000 deg^2 , durante cinco anos de operação. Embora esteja situado no hemisfério norte, o DESI proporcionará uma cobertura significativa da área observada pelo LSST, com uma sobreposição estimada de pelo menos 4.000 deg^2 em seus footprints. Essa interseção torna o DESI uma ferramenta fundamental para a calibração de redshifts fotométricos, especialmente por meio de técnicas de correlação cruzada (MANDELBAUM et al., 2019).

O instrumento do DESI incorpora um design inovador de espectroscopia multiobjeto. Sua nova ótica corretora oferece um campo de visão com 3 graus de diâmetro, alimentando uma placa focal equipada com 5.000 posicionadores robóticos que podem ser reconfigurados em apenas três minutos para observar um novo conjunto de alvos. Cada posicionador possui uma fibra óptica conectada a um dos 10 espectrógrafos de banda larga, localizados a 50 metros de

distância, cobrindo o intervalo espectral de 360 a 980 nm com resolução entre 2.000 a 5.000. Essa configuração permite a observação eficiente de diversas populações de galáxias, incluindo BGSs, LRGs, ELGs e quasares, alcançando redshifts de até $z \approx 1.7$ para galáxias de linha de emissão e até $z \approx 3.5$ para quasares com absorção Lyman- α (AGHAMOUSA et al., 2016).

Para determinar a distribuição de redshift no formalismo bidimensional deste levantamento espectroscópico, utilizamos, neste trabalho, a amostra pública do Data Release 1 (DR1) do DESI (ABDUL-KARIM et al., 2025). Embora represente apenas uma fração inicial do levantamento, essa amostra já contém um volume de alvos suficiente para que o formato da distribuição de redshift normalizada se aproxime do esperado ao término da coleta completa dos dados. No lado esquerdo da Figura 19, apresentamos as amostras do DESI DR1, obtidas a partir dos catálogos de redshift, após a aplicação de cortes de qualidade e filtros de classificação espectral. No lado direito, mostramos a distribuição global de redshifts por tipo de galáxia interpolada utilizando o método cúbico monótono (`PchipInterpolator` do SciPy (SciPy Community, 2024)) e normalizada com base nos alvos mostrados à esquerda.



(a) Número de galáxias-alvo com redshifts de alta qualidade, classificadas por tipo espectroscópico, conforme o DESI DR1.

(b) Distribuições espectroscópicas de redshift, normalizadas, para cada tipo de amostra do DESI DR1.

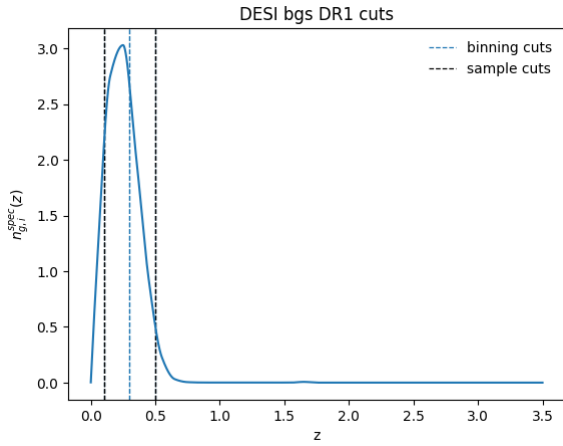
Figura 19 – Distribuições globais das amostras espectroscópicas do DESI DR1 antes da divisão tomográfica. Créditos: O Autor.

Embora o DR1 seja uma base adequada para a construção da nossa amostra espectroscópica, o número de objetos observados ainda não reflete o volume total esperado dos dados do DESI. Para tornar nossa modelagem mais realista, utilizamos os números efetivos de galáxias previstos pelo Survey Validation (SV) do DESI (DESI Collaboration, 2023), resultando em uma densidade de galáxias de $n_{\text{eff}}^{\text{bgs}} \approx 0.278$ galáxias por arcmin^2 para BGS, $n_{\text{eff}}^{\text{lr}} \approx 0.147$ para LRG e $n_{\text{eff}}^{\text{elg}} \approx 0.307$ para ELG. Além disso, os valores do *bias* das galáxias também foram adotados conforme os resultados da SV, sendo: $b_{\text{bgs}}(z) = 1.34/D_+(z)$, $b_{\text{lr}}(z) = 1.7/D_+(z)$ e $b_{\text{elg}}(z) = 0.84/D_+(z)$.

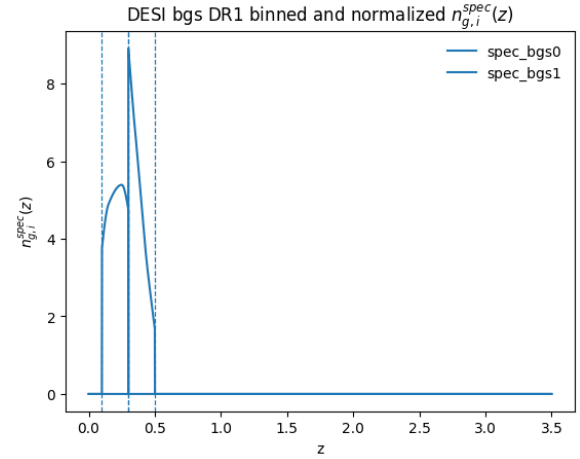
Uma vez definidas todas as características da amostra global, prosseguimos com a divisão em bins tomográficos para cada uma das amostras espectroscópicas (BGS, LRG e ELG). Para isso, realizamos cortes na distribuição global de redshift, adotando três configurações distintas de largura de bin: $\Delta z = 0,2$, $\Delta z = 0,1$ e $\Delta z = 0,05$. Essa abordagem, contudo, representa uma idealização para a distribuição de redshift, pois nela assume-se que os bins são perfeitamente delimitados, ou seja, sem qualquer sobreposição (i.e., não existem incertezas nas medidas espectroscópicas). Esse cenário não é realista, já que, na prática, existem sobreposições entre os bins que podem impactar significativamente o sinal de correlação cruzada entre eles. Trabalhos como (LOUREIRO et al., 2019) lidam com essas incertezas por meio da convolução das distribuições de redshift com funções gaussianas estreitas. No contexto deste trabalho, entretanto, decidimos negligenciar tais efeitos, mantendo a suposição de bins espectroscópicos sem sobreposição entre si.

Antes de aplicar as configurações de *binning* mencionadas anteriormente, realizamos cortes nas distribuições de redshift com o objetivo de eliminar regiões com baixa densidade de galáxias, onde o sinal seria dominado por ruído. Especificamente, aplicamos esses cortes para excluir os seguintes intervalos de *redshift*: $z < 0,1$ e $z > 0,5$ para a amostra BGS, $z < 0,3$ e $z > 1,1$ para a LRG, e $z < 0,6$ e $z > 1,6$ para a ELG. Com isso, as densidades efetivas das galáxias reduziram para $n_{\text{eff}}^{\text{bgs}} \approx 0,239$, $n_{\text{eff}}^{\text{lg}} \approx 0,139$ e $n_{\text{eff}}^{\text{elg}} \approx 0,281$. Nesse sentido, as Figuras 20a, 21a e 22a (à esquerda) apresentam os cortes aplicados à distribuição global de cada tipo de galáxia, destacando a divisão em bins com $\Delta z = 0.2$ — procedimento que foi replicado para os casos com $\Delta z = 0.1$ e $\Delta z = 0.05$. Já as Figuras 20b, 21b e 22b (à direita) mostram as distribuições de redshift normalizadas em cada bin, de forma separada para cada população espectroscópica.

Com a amostra do DESI devidamente definida, a próxima subseção será dedicada à caracterização do levantamento 4MOST-CRS — outro mapeamento espectroscópico com forte potencial de sinergia com o LSST. A inclusão desta amostra tem como objetivo avaliar comparativamente qual dos dois surveys — DESI ou 4MOST-CRS — apresenta maior complementaridade ao LSST, levando em conta a sobreposição no céu e a faixa de redshifts acessível, aspectos que serão explorados em mais detalhe no próximo capítulo.

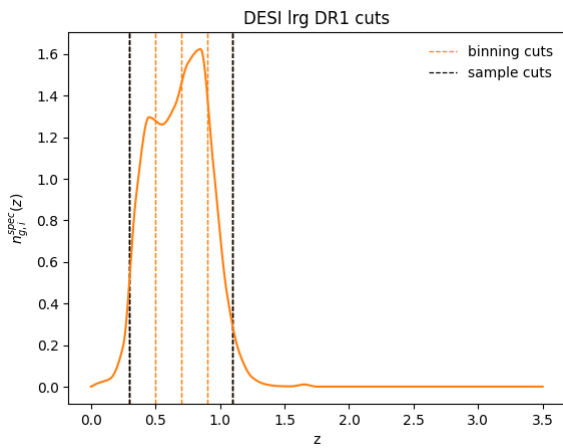


(a) Cortes aplicados à distribuição de redshift da amostra BGS.

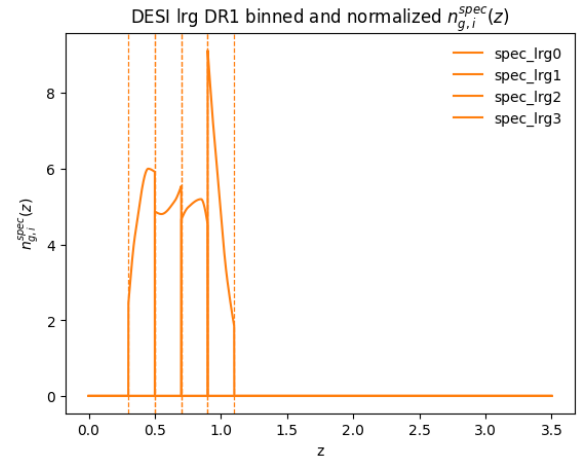


(b) Distribuição da BGS normalizada por bin tomográfico, após os cortes.

Figura 20 – Distribuições de redshift da amostra BGS, antes e depois da divisão tomográfica.

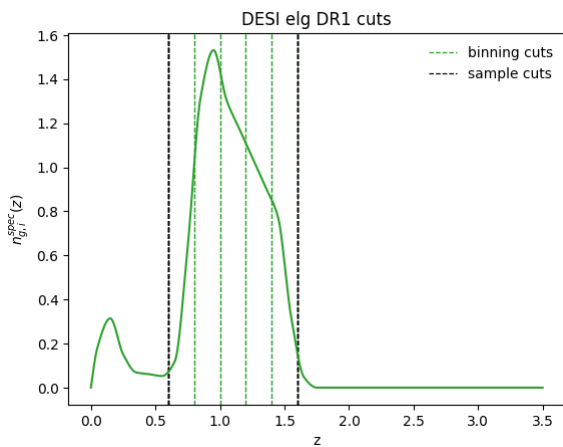


(a) Cortes aplicados à distribuição de redshift da amostra LRG.

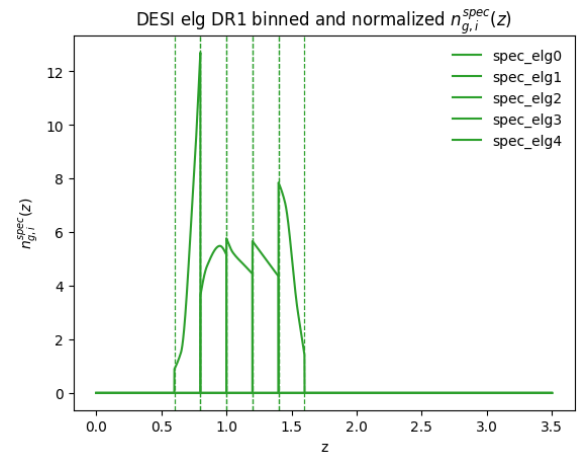


(b) Distribuição da LRG normalizada por bin tomográfico, após os cortes.

Figura 21 – Distribuições de redshift da amostra LRG, antes e depois da divisão tomográfica.



(a) Cortes aplicados à distribuição de redshift da amostra ELG.



(b) Distribuição da ELG normalizada por bin tomográfico, após os cortes.

Figura 22 – Distribuições de redshift da amostra ELG, antes e depois da divisão tomográfica.

4.2.2 4MOST

O 4MOST (4-metre Multi-Object Spectroscopic Telescope) é um instrumento espectroscópico de campo amplo, projetado para o telescópio VISTA do ESO, localizado no hemisfério sul. Seu objetivo é realizar levantamentos espectroscópicos em larga escala, com foco em diversas áreas da astrofísica, incluindo cosmologia, arqueologia galáctica e formação estelar. O 4MOST possui um campo de visão de $4,2 \text{ deg}^2$ e é equipado com 2436 fibras ópticas, das quais 1624 alimentam dois espectrógrafos de baixa resolução ($R \sim 6500$) e 812 alimentam um espectrógrafo de alta resolução ($R \sim 20,000$) - não voltado para mapeamento de galáxias em larga escala (JONG; AL., 2019).

O Cosmology Redshift Survey (CRS), um dos principais levantamentos planejados pelo 4MOST, tem como objetivo mapear a estrutura em larga escala do universo por meio de observações espectroscópicas de cerca de 8 milhões de objetos — incluindo BGS, LRG, ELG e QSO — ao longo de uma faixa de redshift que se estende até $z \approx 3,5$. A sobreposição geográfica entre o CRS e o LSST é particularmente vantajosa, com uma área comum estimada em cerca de 7500 deg^2 para as amostras BGS e LRG, e aproximadamente 1000 deg^2 para a ELG — cobrindo, assim, toda a área do levantamento 4MOST-CRS (RICHARD et al., 2019; MANDELBAUM et al., 2019).

Neste trabalho, utilizamos as especificações previstas para o 4MOST-CRS conforme descritas em (RICHARD et al., 2019). A construção da amostra foi baseada nos histogramas apresentados na Figura 2 da referência (Figura 23a deste trabalho). A partir desses dados, geramos a distribuição global de redshifts da amostra aplicando interpolação e normalização conforme o procedimento adotado previamente para a amostra do DESI — ilustrado na figura 23b. Nesse processo, obtivemos as seguintes densidades de galáxias: $n^{\text{bgs}}_{\text{eff}} \approx 0,069$ galáxias por arcmin^2 para BGS, $n^{\text{lr}}_{\text{eff}} \approx 0,11$ para LRG e $n^{\text{elg}}_{\text{eff}} \approx 0,044$ para ELG. Já para os valores de bias das galáxias, adotamos os mesmos utilizados na análise do DESI.

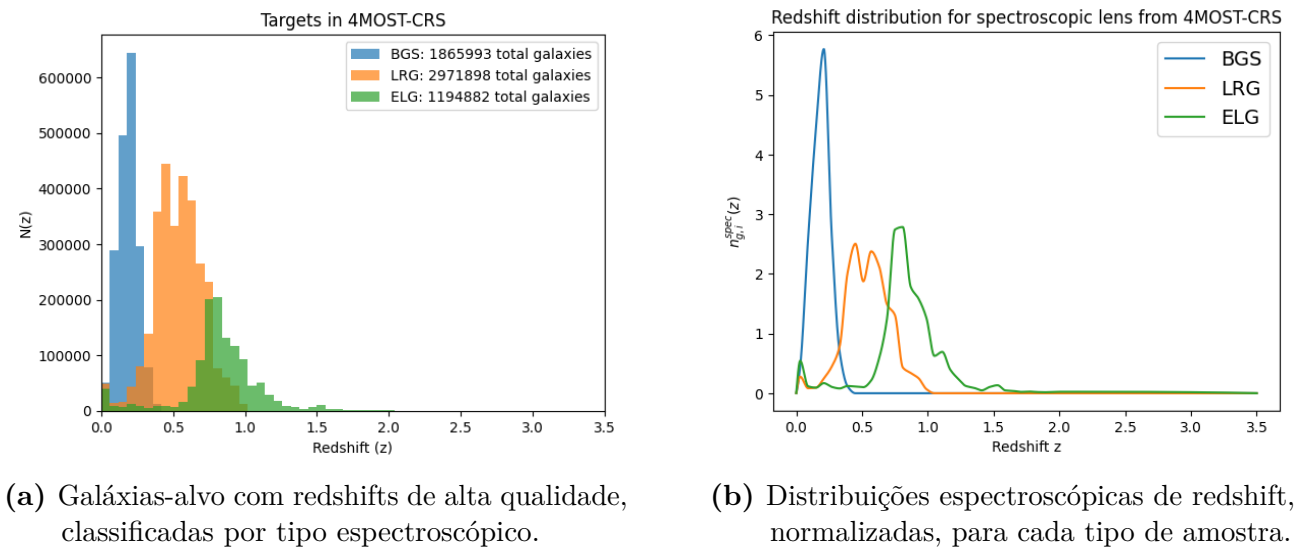
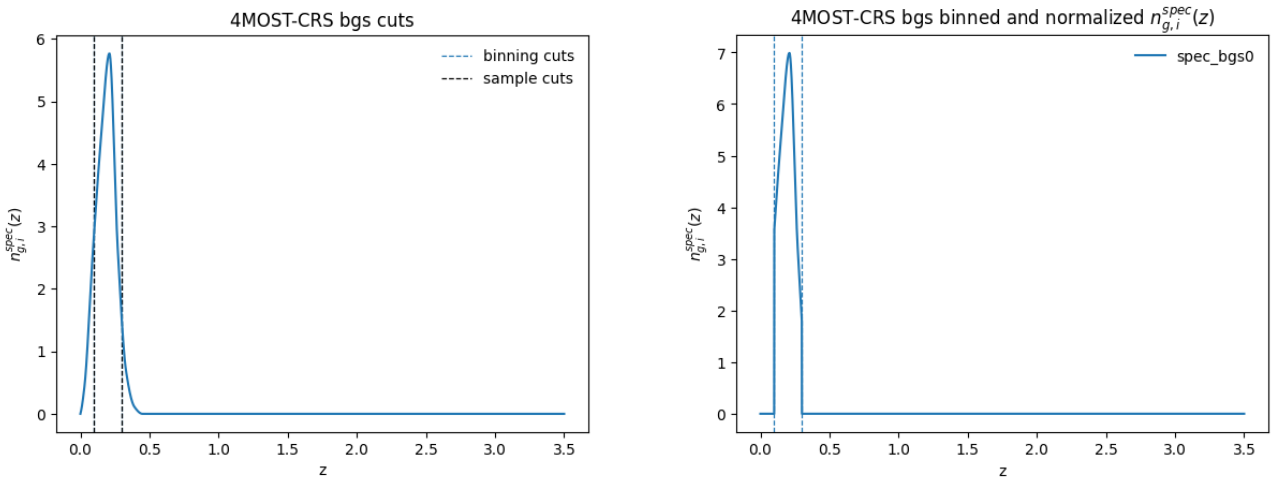


Figura 23 – Distribuições das amostras do 4MOST-CRS, antes e depois da divisão tomográfica.

Com a amostra global caracterizada, seguimos o mesmo padrão de divisão em bins tomográficos adotado no caso do DESI. No entanto, os intervalos de corte para regiões de baixa densidade foram ajustados para refletir as características do 4MOST, resultando nos seguintes limites de redshift: $z < 0,1$ e $z > 0,3$ para BGS, $z < 0,2$ e $z > 1,0$ para LRG, e $z < 0,6$ e $z > 1,2$ para ELG. Após esses cortes, então, as densidades efetivas foram reduzidas para $n^{\text{bgs}}_{\text{eff}} \approx 0,057$, $n^{\text{lrgeff}} \approx 0,107$ e $n^{\text{elg}}_{\text{eff}} \approx 0,036$. Dessa forma, as Figuras 24a, 25a e 26a (à esquerda) ilustram os cortes aplicados às distribuições globais, destacando a divisão em bins tomográficos com $\Delta z = 0,2$. Já as Figuras 24b, 25b e 26b (à direita) apresentam as distribuições de redshift normalizadas em cada bin, separadamente para cada população espectroscópica.

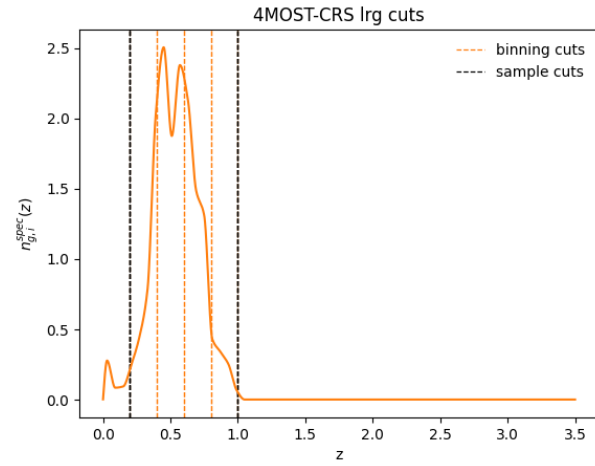
A caracterização detalhada das amostras fotométricas do LSST e das amostras espectroscópicas do DESI e do 4MOST-CRS constitui a base para a modelagem do vetor de dados 6x2pt. Nesse contexto, a próxima seção será dedicada à construção do vetor de dados simulados 6x2pt, que utiliza essas distribuições de redshift para gerar os espectros de potência angulares simulados correspondentes a cada observável.



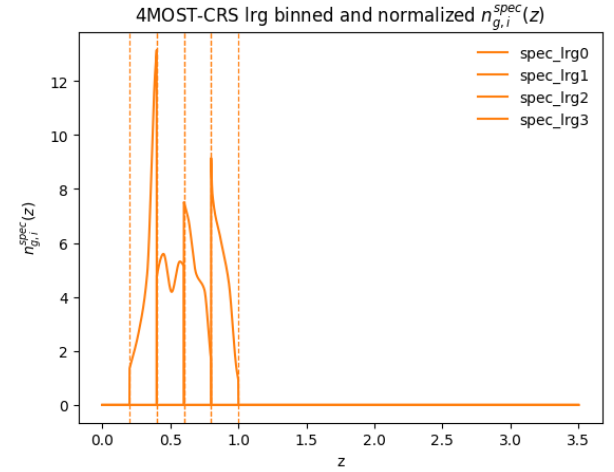
(a) Cortes aplicados à distribuição de redshift da amostra BGS.

(b) Distribuição da BGS normalizada por bin tomográfico, após os cortes.

Figura 24 – Distribuições de redshift da amostra BGS, antes e depois da divisão tomográfica.

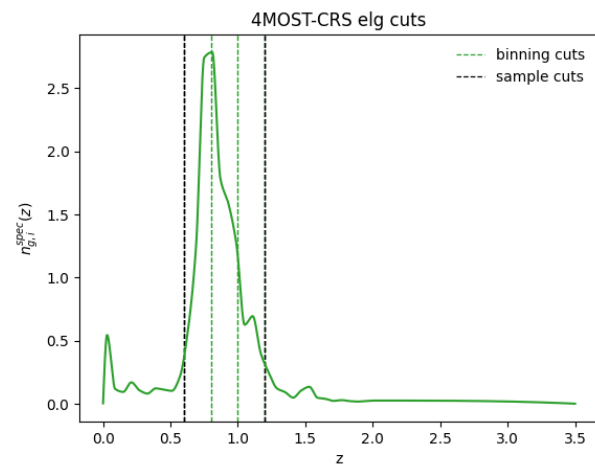


(a) Cortes aplicados à distribuição de redshift da amostra LRG.

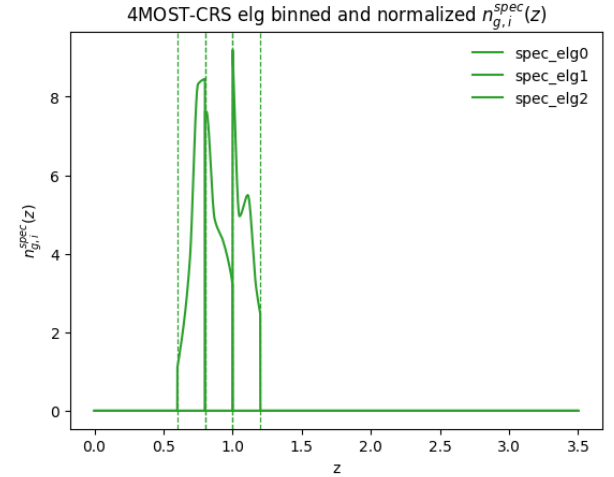


(b) Distribuição da LRG normalizada por bin tomográfico, após os cortes.

Figura 25 – Distribuições de redshift da amostra LRG, antes e depois da divisão tomográfica.



(a) Cortes aplicados à distribuição de redshift da amostra ELG.



(b) Distribuição da ELG normalizada por bin tomográfico, após os cortes.

Figura 26 – Distribuições de redshift da amostra ELG, antes e depois da divisão tomográfica.

4.3 Vetor de dados 6x2pt

Para construir o vetor de dados simulados 6x2pt utilizado neste projeto, empregamos integralmente as ferramentas desenvolvidas pela colaboração LSST ao longo de nossa pipeline. Em particular, utilizamos a biblioteca **Firecrown** (VITENTI et al., in preparation) como interface principal em todas as etapas do processo — desde o armazenamento das distribuições de redshift das amostras fotométricas do LSST e espectroscópicas do DESI/4MOST até o cálculo dos espectros angulares de potência. A seguir, detalhamos cada uma das etapas envolvidas na construção do vetor de dados.

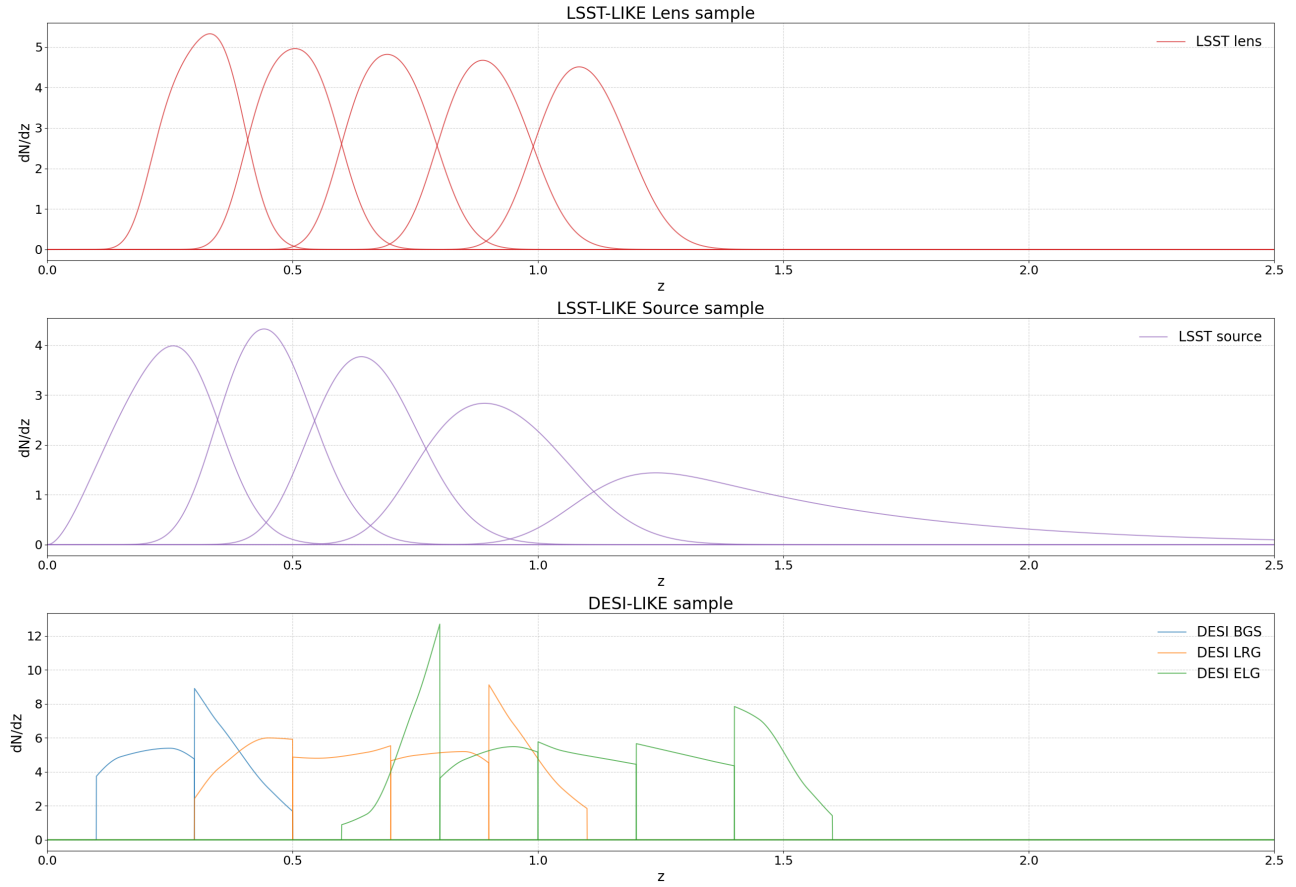


Figura 27 – Compilado de todas as distribuições de redshift consideradas na nossa pipeline para a análise 6x2pt com o DESI, utilizando binwidth de 0,2. As distribuições foram construídas conforme descritas nas Seções 4.1 e 4.2. Créditos: O Autor

Inicialmente, definimos as distribuições de redshift utilizadas no pipeline. Para a amostra fotométrica do LSST, adotamos a distribuição pré-definida já implementada na própria biblioteca, conforme descrito na Seção 4.1. No caso das amostras espectroscópicas do DESI e do 4MOST, desenvolvemos um notebook específico para realizar o processamento descrito na Seção 4.2. Em seguida, utilizamos a interface da **Firecrown** para integrar essas distribuições externas ao pipeline principal (veja figura 27).

Como estamos lidando com um vetor de dados simulados — ou seja, previsões sobre o comportamento de dados ainda não observados do LSST —, é necessário definir uma cosmologia de referência sobre a qual baseamos o cálculo dos observáveis cosmológicos. Para isso, utilizamos a biblioteca **Core Cosmology Library (CCL)** (CHISARI; AL., 2019), acessada via **Firecrown**, para configurar o modelo cosmológico adotado. Os valores dos parâmetros cosmológicos seguem as recomendações do grupo de *forecasting* do LSST, que realiza pequenas modificações em relação aos resultados do DES (ABBOTT, 2022) (ver tabela 1). A partir desses parâmetros, calculamos o espectro de potência da matéria utilizando o **CCL**, que internamente faz uso do código **CAMB** (LEWIS; CHALLINOR, 2011) para a resolução das equações de Boltzmann e do **HMCCode** (MEAD et al., 2015) para incorporar correções devido a efeitos bariônicos.

Com as distribuições de redshift e a cosmologia fiducial devidamente definidas, temos

Tabela 1 – Parâmetros cosmológicos fiduciais adotados neste trabalho

Parâmetros	Ω_c	Ω_b	Ω_k	σ_8	n_s	h	w_0	w_a	m_ν [eV]
Valor Fiducial	0.29067	0.04575	0.0	0.819	0.9493	0.6714	−1.0	0.0	0.1

todas as quantidades necessárias para calcular os espectros angulares dos observáveis envolvidos na análise $6 \times 2\text{pt}$. Nesse contexto, utilizamos o **CCL** para estimar as auto-correlações e correlações cruzadas entre os três tipos de observáveis considerados: a distribuição espacial de galáxias do LSST e do DESI (GC_{ph} e GC_{sp}) e as formas das galáxias do LSST (WL). Além disso, utilizamos a aproximação de Limber no cálculo dos espectros angulares de potência, embora que, para surveys mais recentes — especialmente no contexto de correlações cruzadas entre bins de galaxy clustering —, a precisão dessa aproximação possa ser insuficiente (CAMPAGNE; PLASZCZYNSKI; NEVEU, 2017). Optamos, portanto, por adotar essa abordagem devido ao elevado custo computacional associado à realização dos cálculos completos, sem a aproximação de Limber (non-Limber) — especialmente no nosso caso, que envolve um número elevado de bins.

No caso de *galaxy clustering*, ao lidarmos com observáveis de um mesmo levantamento, consideramos apenas as autocorrelações entre *bins* tomográficos (para o caso de tipos de galáxias diferentes, tomamos combinações que tenham overlap entre as distribuições). Já para observáveis de levantamentos distintos, incluímos apenas as combinações com sobreposição amostral, a fim de evitar correlações com baixo sinal. Dessa forma, o espectro angular de potência total de *galaxy clustering* é definido por:

$$C_{nn}^{ij}(\ell) = C_{gg}^{\text{ph}_i \text{ph}_i}(\ell) + C_{gg}^{\text{sp}_i \text{sp}_i}(\ell) + C_{gg}^{\text{ph}_i \text{sp}_j}(\ell) \quad (4.5)$$

onde $C_{gg}(\ell)$ é definido na seção 3.3.2 incluindo densidade numerica e *Redshift spatial distortions*.

No caso de *weak lensing*, consideramos todas as autocorrelações e correlações cruzadas entre os *bins* tomográficos das formas das galáxias, refletindo assim, nas correlações do campo de shear. Além disso, incluímos a contribuição dos efeitos de alinhamento intrínseco (IA), conforme descrito na 3.3.3. Com isso, a correlação entre as elipticidades observadas é dada por:

$$C_{\epsilon\epsilon}^{ij}(\ell) = C_{\gamma\gamma}^{\text{wl}_i \text{wl}_j}(\ell) + C_{\gamma I}^{\text{wl}_i \text{wl}_j}(\ell) + C_{I\gamma}^{\text{wl}_i \text{wl}_j}(\ell) + C_{II}^{\text{wl}_i \text{wl}_j}(\ell) \quad (4.6)$$

Para o efeito de galaxy-galaxy lensing (GGL), calculamos as correlações das elipticidades das galáxias do LSST com a posição de galáxias tanto fotométricas quanto espectroscópicas. Dessa forma, consideramos somente as combinações entre *bins* tomográficos em que os bins das lentes estão localizadas entre o observador e os bins das fontes, de modo que os $C(\ell)$'s de GGL são:

$$C_{n\epsilon}^{ij}(\ell) = C_{g\gamma}^{\text{ph}_i \text{wl}_j}(\ell) + C_{g\gamma}^{\text{sp}_i \text{wl}_j}(\ell) + C_{gI}^{\text{ph}_i \text{wl}_j}(\ell) + C_{gI}^{\text{sp}_i \text{wl}_j}(\ell) \quad (4.7)$$

Durante o processo de construção do vetor de dados, consideramos 20 *bins* em ℓ , logaritmicamente distribuídos no intervalo $20 \leq \ell \leq 2000$, conforme recomendado pelo grupo de forecasting para uma primeira análise. Além disso, aplicamos um corte de escala para evitar regiões não lineares. Assim, para o *galaxy clustering*, utilizamos o seguinte critério:

$$\ell_{\max} = k_{\max} \chi(\langle z \rangle) - 0.5 \quad (4.8)$$

onde adotamos $k_{\max} = 0.1 h \text{ Mpc}^{-1}$. Já para o *cosmic shear*, não aplicamos cortes de escala, pois já escolhemos um intervalo consistente com a escala desse tipo de observável. Nesse sentido, na figura 28, mostramos alguns exemplos desses $C(l)'s$ que compõem o nosso vetor de dados.

Em seguida, para avaliar as incertezas e as correlações entre cada componente do vetor de dados é necessário calcular a matriz de covariância desse vetor. Dessa forma, embora surveys de estágio 4 (como LSST, DESI, etc.) devam considerar contribuições de covariância associadas a não-gaussianidades e super-sample effects (BARREIRA; KRAUSE; SCHMIDT, 2018), assumimos uma covariância gaussiana, uma vez que essas correções não impactariam significativamente nossa análise. Nossa matriz de covariância, então, é inteiramente especificada em termos do espectro angular de potência dado pelo teorema de Wick:

$$\text{Cov} [C_{AB}(\ell), C_{CD}(\ell')] = \delta_{\ell\ell'}^K \frac{1}{f_{\text{sky}}(2\ell + 1)\Delta\ell} [\hat{C}_{AC}(\ell)\hat{C}_{BD}(\ell') + \hat{C}_{AD}(\ell)\hat{C}_{BC}(\ell')] \quad (4.9)$$

onde f_{sky} corresponde a fração da área do céu, A, B, C, D correspondem aos bins dos traçadores da análise e $\Delta\ell$ é o comprimento do bin. Já o $\hat{C}_{AB}(\ell)$ corresponde ao sinal observado, i. e., o espectro angular de potência combinado ao ruído. Em outras palavras,

$$\hat{C}_{AB}(\ell) = \begin{cases} C_{AB}(\ell) + \frac{\sigma_e^2}{\bar{n}_{AB}} \delta_{AB}^K, & \text{se } A \wedge B \in \text{fontes,} \\ C_{AB}(\ell) + \frac{1}{\bar{n}_{AB}} \delta_{AB}^K, & \text{se } A \wedge B \in \text{lentes puramente ph ou sp,} \\ C_{AB}(\ell), & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.10)$$

onde σ_e^2 é a componente de dispersão da elepticidade e $\bar{n}_{AB}$ é a média de densidade numérica dos objetos para cada traçador.

Quando duas estatísticas são extraídas de regiões distintas do céu, adotamos uma abordagem extremamente conservadora para o cálculo da covariância: na definição de f_{sky} , consideramos apenas o valor correspondente à região de sobreposição entre os levantamentos. Essa escolha elimina grande parte do sinal associado às autocorrelações entre traçadores de um mesmo levantamento.

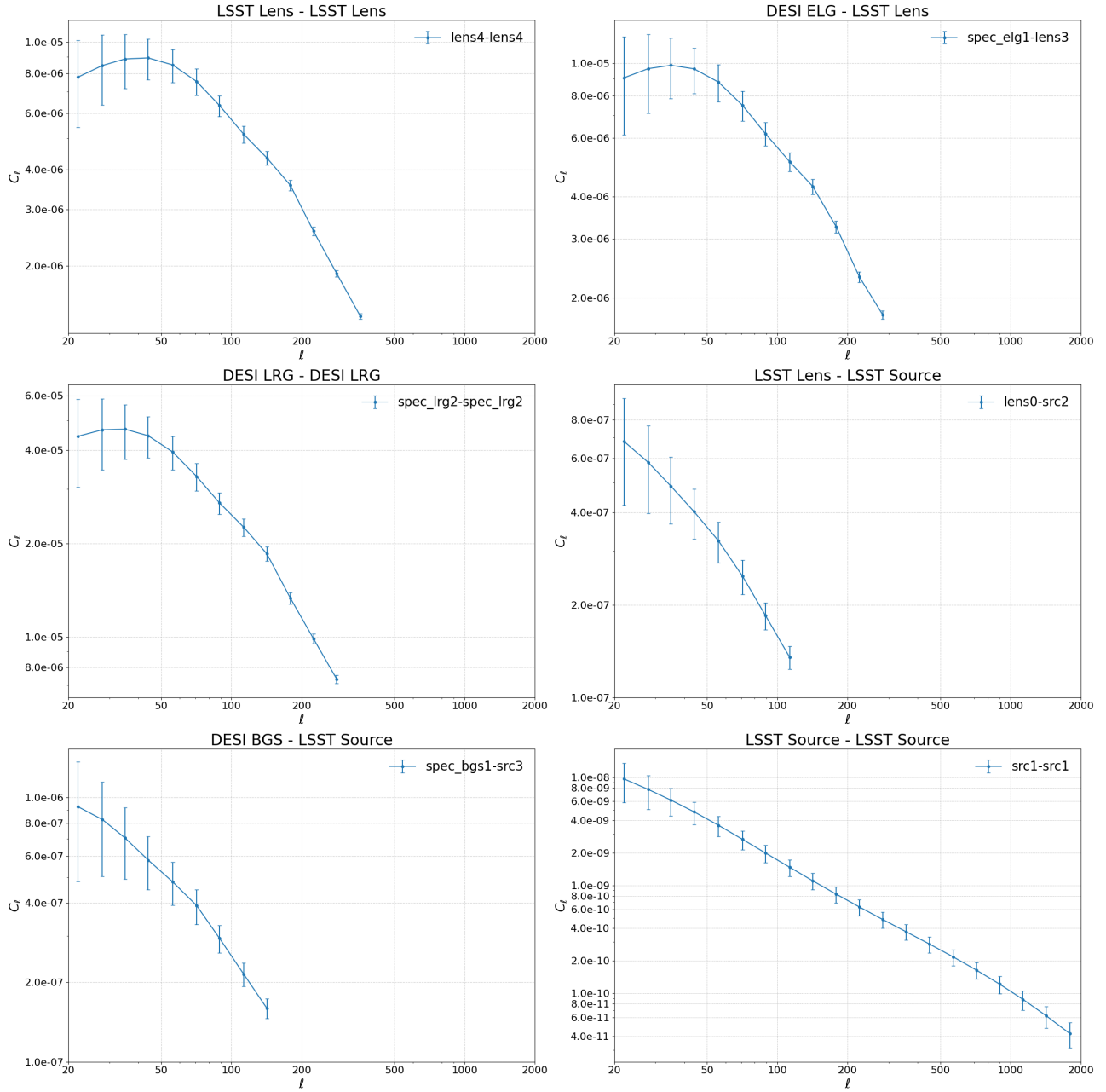


Figura 28 – Exemplos de correlações angulares tomográficas de dois pontos que compõem um subconjunto dos vetores de dados 6×2 pt considerado até então. Cada painel apresenta uma correlação específica entre as diferentes amostras espectroscópicas e/ou fotométricas. As legendas indicam os pares tomográficos correspondentes. Além disso, os pontos com barras de erro representam os espectros de potência angular C_ℓ e suas respectivas incertezas, obtidas a partir da diagonal da matriz de covariância Gaussiana

Mesmo com esse tratamento, a adoção dessa simplificação deliberadamente conservadora é adequada para uma primeira análise qualitativa, uma vez que a maior parte dos potenciais ganhos da análise 6×2 pt provém justamente da região de sobreposição. Assim, ao considerarmos o pior cenário possível — o uso exclusivo da região de overlap — ainda asseguramos resultados qualitativos robustos para essa análise, mesmo sob uma perspectiva pessimista. Dessa forma, a matriz de correlação associada a essa covariância é apresentada na Figura 29. Idealmente, a avaliação da covariância deveria levar em conta a geometria real de cada levantamento, por meio da aplicação explícita das máscaras dos respectivos surveys. No entanto, optamos por não adotar essa abordagem neste trabalho, devido à complexidade computacional e numérica associada ao cálculo de uma covariância mais precisa.

Além disso, o delta de Kronecker δ_{AB} na equação 4.10 indica que não há ruído de Poisson nas correlações cruzadas entre os $C(\ell)$'s. Espera-se que essa aproximação funcione razoavelmente bem para correlações cruzadas entre *weak lensing* e o traçador de galáxias, uma vez que esses observáveis representam traçadores distintos da mesma distribuição de matéria escura. No entanto, no caso da correlação cruzada entre o clustering de galáxias fotométricas e espectroscópicas, o ruído de Poisson deveria estar presente, pois pode haver galáxias pertencentes simultaneamente às duas amostras (BALDAUF et al., 2013). Para lidar com essa questão, adotamos uma abordagem conservadora, onde assumimos que a amostra espectroscópica não compõe a amostra fotométrica, de modo que o ruído de Poisson cruzado seja eliminado por construção. Esse cenário é bastante não realista, uma vez que uma parte da amostra espectroscópica está contida em um subconjunto da amostra fotométrica; por isso, um tratamento mais rigoroso para esse ruído cruzado entre as amostras de *galaxy clustering* se faz necessário, embora tenha sido deixado de lado neste trabalho.

Por fim, todo o processo para o cálculo da covariância e tratamento do ruído foi implementado por meio de algumas adaptações dos códigos da biblioteca Tjpcov (GARCÍA-GARCÍA et al., in preparation) e compilamos todas essas informações (distribuições de redshift, espectros angulares de potência e matriz de covariância) em um único vetor de dados, formatado segundo o pacote Sacc (ZUNTZ et al., 2024). Todas as dependências foram incorporadas à nossa pipeline para viabilizar a geração desse vetor de dados em produção, aproveitando ao máximo os códigos da colaboração LSST DESC, com o objetivo de permitir a aplicação futura dessa pipeline em dados reais.

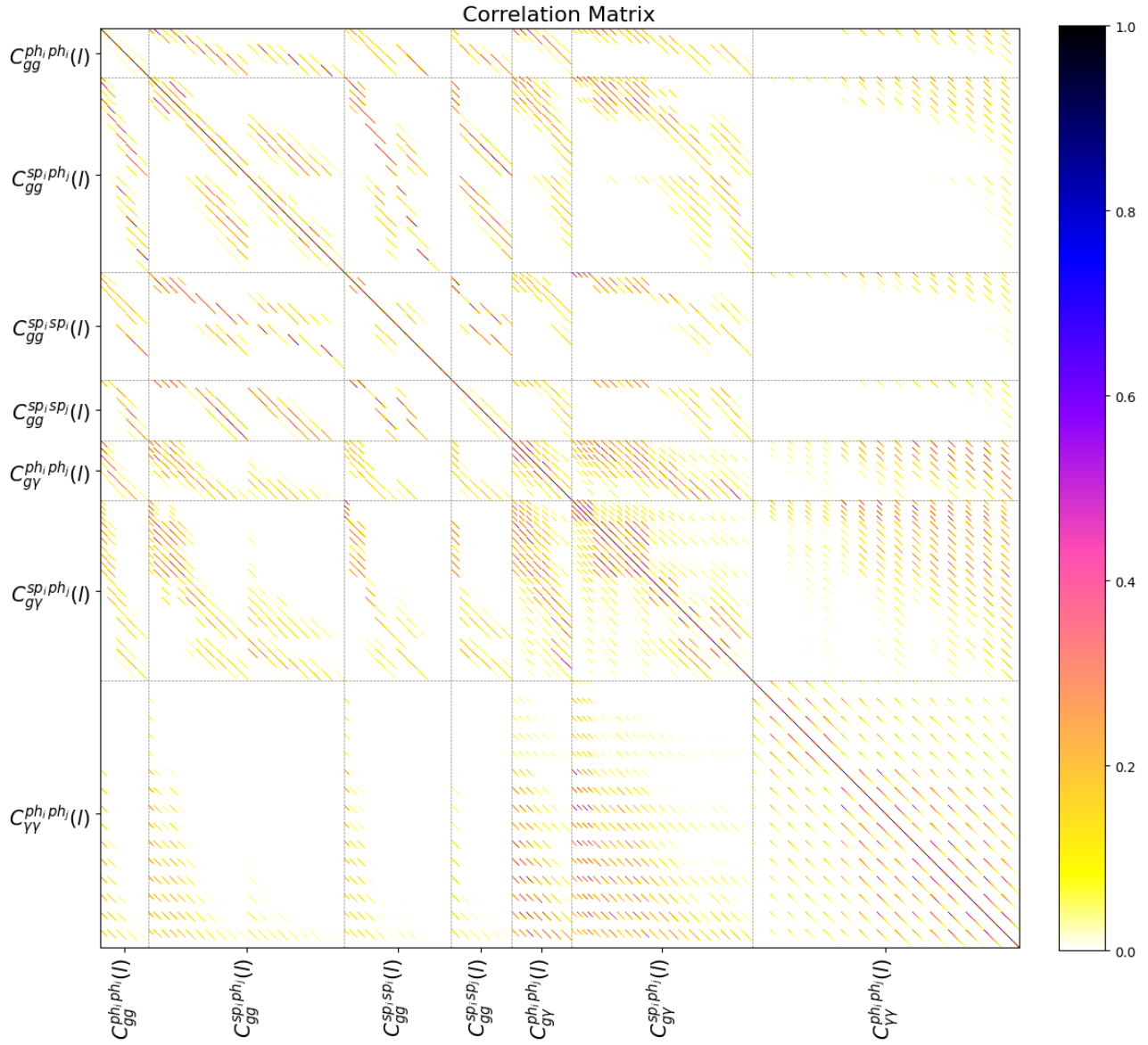


Figura 29 – Matriz de correlação correspondente à covariância Gaussiana analítica utilizada neste trabalho. Os rótulos dos eixos indicam os blocos da covariância associados às diferentes correlações entre as sondas: auto-correlação das posições de galáxias fotométricas ($C_{gg}^{ph_i ph_j}$), correlação cruzada entre posições de galáxias espectroscópicas e fotométricas ($C_{gg}^{sp_i ph_j}$), auto-correlação das posições de galáxias espectroscópicas ($C_{gg}^{sp_i sp_j}$), correlações cruzadas entre as diferentes amostras espectroscópicas ($C_{gg}^{sp_i sp_j}$), galaxy-galaxy lensing com amostras espectroscópicas ($C_{g\gamma}^{ph_i \gamma}$), galaxy-galaxy lensing fotométrico ($C_{g\gamma}^{ph_i \gamma}$), bem como as auto-correlações e correlações cruzadas do cisalhamento cósmico ($C_{\gamma\gamma}^{\gamma\gamma}$). A barra de cores representa a intensidade da correlação entre os elementos normalizados da matriz de covariância.

4.4 Formalismo de Fisher

A inferência de parâmetros cosmológicos a partir do vetor de dados observacionais requer uma estrutura estatística sólida, capaz de conectar quantitativamente teoria e observação. Isso se dá por meio de um modelo probabilístico que avalia o grau de compatibilidade entre os dados medidos e as previsões teóricas para diferentes conjuntos de parâmetros. Nesse sentido, o formalismo de Fisher surge como uma ferramenta conceitualmente simples para obter previsões aproximadas sobre os vínculos que um conjunto de dados pode impor aos parâmetros cosmológicos. Esse formalismo não se concentra nos valores centrais estimados dos parâmetros, mas sim na precisão com que esses parâmetros podem ser determinados — isto é, nas incertezas associadas a eles. Neste trabalho, realizamos a inferência sobre o vetor de dados simulado utilizando o formalismo da matriz de Fisher, ao invés da abordagem convencional baseada em Cadeias de Markov via Monte Carlo (MCMC).

Para compreender esse formalismo em detalhes, é necessário introduzir a função chamada *Likelihood* $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{d})$. Essa função constitui a base da inferência estatística em cosmologia, representando a probabilidade de se observar um conjunto de dados $\mathbf{d}$ dado um modelo parametrizado por $\boldsymbol{\theta}$. Formalmente, a função da *Likelihood* é expressa como:

$$\mathcal{L}(\mathbf{d}|\boldsymbol{\theta}) \equiv P(\mathbf{d}|\boldsymbol{\theta}), \quad (4.11)$$

No formalismo de Fisher, comumente se assume que a probabilidade dos dados observados $\mathbf{d}$, dados os parâmetros $\boldsymbol{\theta}$ do modelo, é definida como uma Gaussiana multivariada. Assim, a função da *Likelihood* é expressa por:

$$\mathcal{L}(\mathbf{d}|\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\det \mathbf{C}|^{1/2}}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{d} - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta}))^\top \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{d} - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta})) \right], \quad (4.12)$$

onde $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta}) = \langle \mathbf{d} \rangle$ é a quantidade teórica dos observáveis avaliada nos parâmetros $\boldsymbol{\theta}$.

O formalismo de Fisher baseia-se na ideia de que, próximo ao seu ponto de máximo, a função da *likelihood* pode ser aproximada por uma expansão de Taylor de segunda ordem. Essa expansão revela a curvatura da função $\ln \mathcal{L}$ em relação aos parâmetros do modelo. Matematicamente falando, essa expansão é dada por:

$$\ln \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) \approx \ln \mathcal{L}|_{\max} + \left. \frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \theta_i} \right|_{\max} (\theta_i - \bar{\theta}_i) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right|_{\max} (\theta_i - \bar{\theta}_i)(\theta_j - \bar{\theta}_j), \quad (4.13)$$

No ponto de máximo da *likelihood*, o gradiente se anula, ou seja, o termo linear (primeira ordem) desaparece. A matriz de Fisher, então, é definida como menos o termo de derivada segunda (i.e. o Hessiano) da *log likelihood*:

$$F_{ij} = \left\langle -\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right\rangle. \quad (4.14)$$

Essa matriz quantifica a informação que os dados contêm sobre os parâmetros: quanto mais acentuada for a curvatura (maior em valor absoluto), mais precisamente os parâmetros cosmológicos são determinados, indicando, assim, que os dados contêm mais informação sobre eles. Para o caso já mencionado da *likelihood* sendo definida como uma gaussiana multivariada (4.12), podemos reescrever a matriz de Fisher (4.13) da seguinte forma (ver demonstração completa no Apêndice C) :

$$F_{ij} = \frac{\partial \boldsymbol{\mu}^T}{\partial \theta_i} \mathbf{C}^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial \theta_j} + \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\mathbf{C}^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \theta_i} \mathbf{C}^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \theta_j} \right] \quad (4.15)$$

Além da construção da matriz de Fisher F_{ij} , também incluímos a contribuição de uma matriz de Fisher de *priors* com o intuito de tornar os vínculos obtidos mais realistas. Especificamente, adicionamos *priors* gaussianos sobre os parâmetros cosmológicos e de *nuisance*. Essa inclusão dos *priors* é realizada por meio da adição de uma matriz $F_{ij \text{ prior}}$ à matriz de Fisher total:

$$F_{\text{total}} = F_{ij} + F_{ij \text{ prior}}. \quad (4.16)$$

Para um *prior* gaussiano simples, com variância conhecida σ_p^2 sobre um dado parâmetro p , a contribuição correspondente em F_{prior} é:

$$F_{ij \text{ prior}} = \frac{\delta_{ij}}{\sigma_p^2}. \quad (4.17)$$

Na prática, essas equações (4.15) e (4.16) são amplamente empregadas por bibliotecas de inferência cosmológica como (ZUNTZ et al., 2015; SANCHEZ et al., in preparation). Nesse sentido, para viabilizar tanto a geração do vetor de dados quanto a etapa de inferência estatística, integramos as bibliotecas Firecrown, utilizada para o cálculo direto da log-*likelihood*, e Augur, responsável pela construção da matriz de Fisher. A opção por utilizar o formalismo de Fisher para a inferência estatística é justificada pelo elevado número de parâmetros livres envolvidos na análise 6×2pt. Nesse cenário, abordagens bayesianas baseadas em métodos de Markov Chain Monte Carlo (MCMC) tornariam-se computacionalmente inviáveis devido ao alto custo associado à exploração desse espaço paramétrico extenso.

Neste trabalho, a construção do vetor de dados 6×2pt e sua análise subsequente foram realizadas por meio de uma pipeline única desenvolvida especialmente para este projeto (VGOZZI, 2025), que integra de forma robusta e flexível todas as etapas descritas até aqui, garantindo a reprodutibilidade da análise. Nas seções seguintes, apresentamos os principais resultados obtidos a partir das diversas análises conduzidas com essa pipeline.

Capítulo 5

Resultados

Neste capítulo, apresentamos os resultados das análises de Fisher realizadas para diferentes cenários no contexto de uma análise $6\times 2\text{pt}$. A estrutura básica do vetor de dados segue o modelo descrito na Seção 4.3, sendo submetida apenas a pequenas modificações com o objetivo de explorar tais cenários. As variações consideradas incluem: o uso isolado de diferentes tipos de galáxias espectroscópicas, a inclusão ou omissão dos efeitos de redshift space distortions (RSD) no vetor de dados, a aplicação de múltiplas configurações de binagem tomográfica na amostra espectroscópica e variações na fração do céu observada na matriz de covariância.

Para cada um desses cenários, avaliamos o poder de constrição sobre os parâmetros cosmológicos — tanto no modelo padrão ΛCDM quanto em extensões como $w_0w_a\text{CDM}$ e modelos com neutrinos massivos —, além de considerar parâmetros de *nuisance* associados aos sistemáticos de alinhamento intrínseco e de *bias* das galáxias. Incluímos também, entre os parâmetros de *nuisance*, aqueles que descrevem as incertezas fotométricas (photo- z) das amostras do LSST: Δz , que representa o desvio da média dos *bins* de redshift, e σ_z , que quantifica o alargamento linear desses *bins*. Os *priors* para esses parâmetros, que seguem distribuições Gaussianas da forma $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ — em que μ é a média e σ é o desvio padrão —, estão detalhados na Tabela 2.

Dessa forma, as seções a seguir apresentam os diferentes resultados obtidos em nossa análise $6\times 2\text{pt}$. Inicialmente, avaliamos individualmente o impacto das distintas populações espectroscópicas (BGS, LRG e ELG) na análise $6\times 2\text{pt}$ utilizando o levantamento DESI. Em seguida, comparamos os levantamentos DESI e 4MOST completos em termos de sua sinergia com o LSST, considerando diferentes cenários cosmológicos. Também investigamos o efeito da inclusão dos redshift space distortions (RSD) nos espectros angulares de potência e exploramos diferentes estratégias de binagem tomográfica.

Tabela 2 – Priors adotados para os parâmetros cosmológicos e de *nuisance*.

Parâmetros	Priors
<i>Parâmetros cosmológicos</i>	
Ω_c	$\mathcal{N}(0.29067, 0.02)$
Ω_b	$\mathcal{N}(0.04575, 0.006)$
σ_8	$\mathcal{N}(0.819, 0.14)$
h	$\mathcal{N}(0.6714, 0.063)$
n_s	$\mathcal{N}(0.9493, 0.08)$
w_0	$\mathcal{N}(-1.0, 0.8)$
w_a	$\mathcal{N}(0.0, 2.0)$
$\sum m_\nu$	$\mathcal{N}(0.1, 0.1)$
<i>Parâmetros sistemáticos</i>	
$b^{1\dots 5}$	$\mathcal{N}(1.239, 0.9), \mathcal{N}(1.378, 0.9), \mathcal{N}(1.525, 0.9),$ $\mathcal{N}(1.677, 0.9), \mathcal{N}(1.832, 0.9)$
A_{IA}	$\mathcal{N}(0.5, 3.9)$
η_{IA}	$\mathcal{N}(0.0, 2.3)$
<i>Parâmetros de nuisance da distribuição fotométrica</i>	
$\Delta z_{\text{lens}}^{1\dots 5}$	$\mathcal{N}(0.0, 0.1)$
$\Delta z_{\text{src}}^{1\dots 5}$	$\mathcal{N}(0.0, 0.1)$
$\sigma_{z,\text{lens}}^{1\dots 5}$	$\mathcal{N}(1.0, 0.1)$
$\sigma_{z,\text{src}}^{1\dots 5}$	$\mathcal{N}(1.0, 0.1)$

5.1 Tipo de Galáxia Espectroscópica: Análise Cosmológica e de Parâmetros de Nuisance

Como primeiro resultado, investigamos o impacto das diferentes populações de galáxias espectroscópicas na análise $6 \times 2\text{pt}$. Avaliamos separadamente as contribuições das três principais amostras do levantamento DESI: BGS, LRG e ELG. Cada uma dessas populações apresenta propriedades distintas — principalmente em termos de distribuição em redshift, densidade e alcance em z — que afetam diretamente o poder de restrição sobre os parâmetros cosmológicos e de *nuisance*.

A Figura 30 apresenta os resultados dessa análise, evidenciando o poder vinculante sobre os parâmetros cosmológicos ao se considerar individualmente cada uma das populações espectroscópicas no contexto do modelo ΛCDM , com cinco parâmetros livres: Ω_c , Ω_b , h , σ_8 e n_s . Apesar de restringirmos a análise à região de sobreposição entre o DESI e o LSST para a análise $6 \times 2\text{pt}$ e $3 \times 2\text{pt}$, observa-se que a inclusão de qualquer população espectroscópica contribui para a redução das incertezas na maioria dos parâmetros cosmológicos — com destaque para σ_8 e Ω_c , e ressalvas para n_s e Ω_b , cujos ganhos são quase nulos. Adicionalmente, observa-se que os vínculos obtidos para a adição das populações BGS são visivelmente mais fracos em comparação com aqueles derivados da adição das amostras LRG e ELG. Isso se deve ao fato de a amostra BGS se concentrar em redshifts baixos ($z < 0.5$), cobrindo uma faixa estreita e, portanto, oferecendo

acesso limitado à informação cosmológica em escalas maiores. Por outro lado, as populações LRG e ELG se estendem a redshifts mais altos, permitindo sondar uma fração mais significativa do intervalo de redshift. Isso as torna mais sensíveis a parâmetros associados à estrutura em larga escala, como Ω_c e σ_8 , resultando em contornos mais restritivos nesses parâmetros. Por fim, a inclusão de populações espectroscópicas — independentemente do tipo — contribui de forma decisiva para quebrar certas degenerescências presentes nas análises 3x2pt.

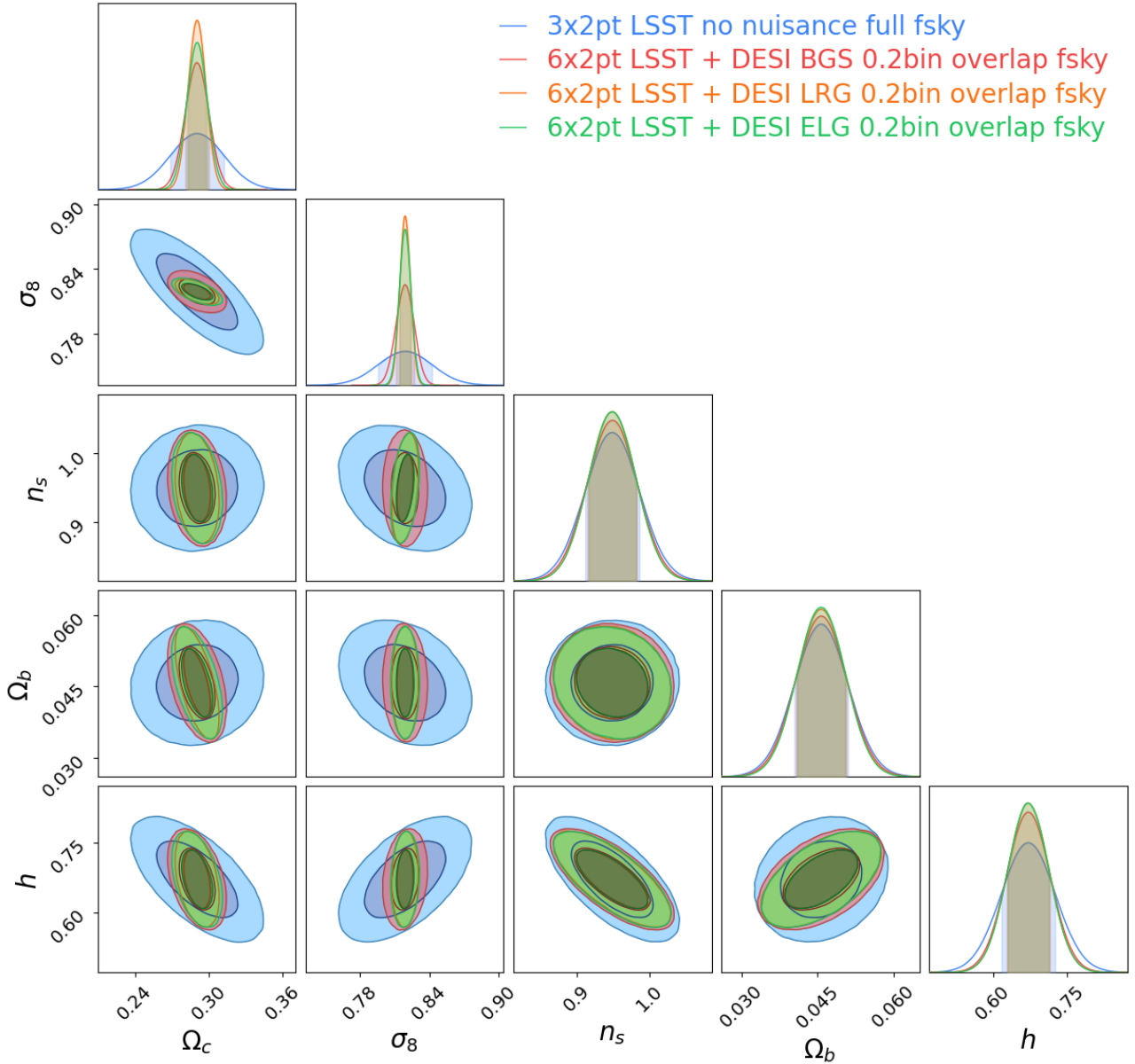


Figura 30 – Contornos de 68/98% de credibilidade para os parâmetros cosmológicos do modelo Λ CDM obtidos a partir da análise 6x2pt considerando individualmente cada uma das populações espectroscópicas do DESI: BGS (vermelho), LRG (laranja) e ELG (verde). Para referência, incluímos também os contornos da análise 3x2pt (azul) utilizando somente o f_{sky} de overlap entre o LSST e o DESI.

Em seguida, a Figura 31 apresenta os parâmetros de nuisance associados à calibração dos redshifts das lentes fotométricas. Nota-se que a inclusão de populações espectroscópicas na análise 6x2pt exerce um papel fundamental tanto na quebra das degenerescências quanto no aperfeiçoamento dos vínculos desses parâmetros. A comparação com a análise 3x2pt (em azul), que apresenta contornos amplos e fortemente degenerados, destaca como as amostras espectroscópicas funcionam como "âncoras" para a distribuição de redshift das lentes, possibilitando uma calibração mais precisa dos parâmetros que a compõem. Cada uma dessas populações contribui de maneira complementar: a amostra BGS (vermelho), ao cobrir redshifts baixos com alta densidade de galáxias, oferece o maior ganho no primeiro bin tomográfico; já a amostra LRG (laranja), localizada em redshifts intermediários, é particularmente eficaz na calibração dos bins centrais; por fim, a amostra ELG (verde), mais representativa em redshifts elevados, aprimora a calibração nos bins mais profundos. Essa complementaridade mostra o valor de se combinar diferentes populações espectroscópicas, evidenciando a importância dessa combinação para o controle robusto das incertezas fotométricas, o que, por sua vez, fortalece a análise cosmológica de forma global.

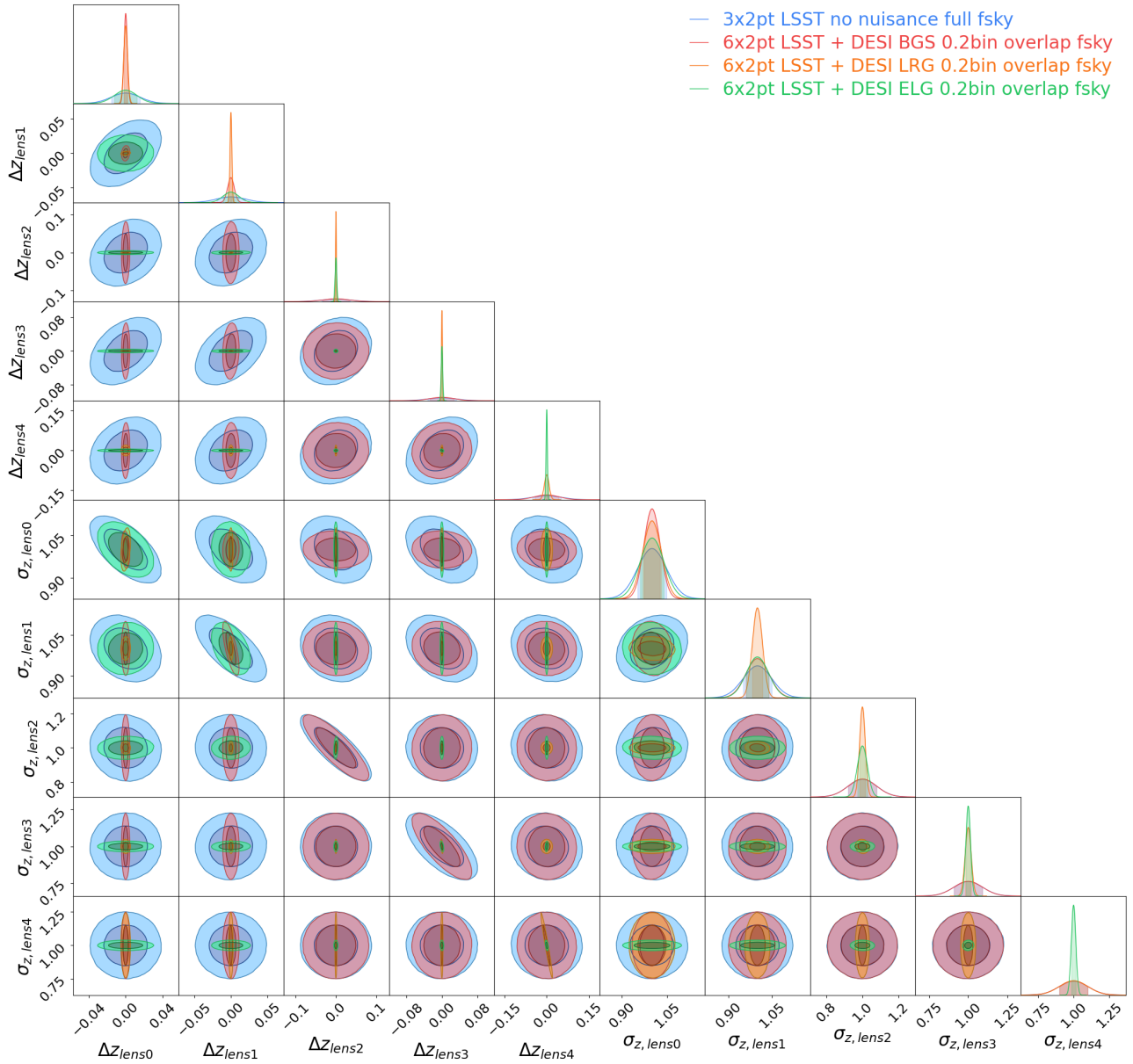


Figura 31 – Contornos de 68/98% de credibilidade para os parâmetros de nuisance associados à calibração da distribuição de redshift das lentes fotométricas, obtidos a partir da análise 6x2pt com as populações espectroscópicas BGS (vermelho), LRG (laranja) e ELG (verde). Para comparação, mostramos também os contornos da análise 3x2pt (azul) utilizando apenas o f_{sky} da região de overlap entre o LSST e o DESI.

Por fim, na Figura 32 apresentamos os parâmetros de *nuisance* associados à calibração dos redshifts das fontes fotométricas. Diferentemente do que ocorre com os parâmetros das lentes, observa-se que a inclusão de populações espectroscópicas na análise 6x2pt não resulta em uma melhora tão expressiva neste caso. O impacto se restringe, em grande parte, à redução das incertezas nos desvios do redshift médio (Δz_s^i), com exceção do primeiro bin tomográfico, que permanece pouco afetado. Por outro lado, os parâmetros associados à dispersão dos redshifts ($\sigma_{z,s}^i$) não apresentam ganhos significativos. Esses resultados indicam que a adição de populações espectroscópicas contribui, majoritariamente, para ancorar a média das distribuições de redshift das fontes, sem, no entanto, fornecer informações relevantes sobre sua forma.

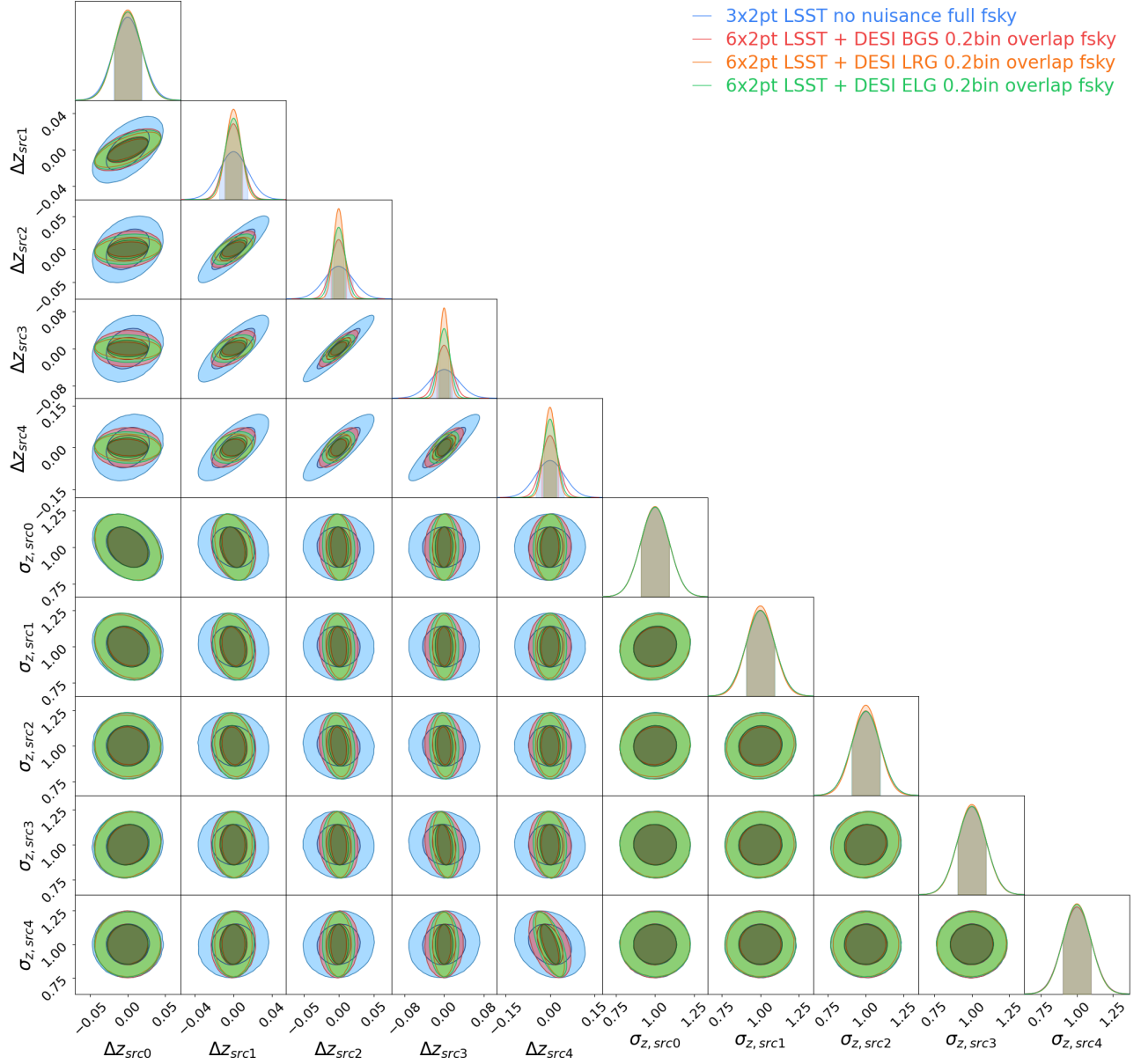


Figura 32 – Contornos de 68/95% de credibilidade para os parâmetros de nuisance associados à calibração da distribuição de redshift das fontes fotométricas, obtidos com a análise 6x2pt utilizando separadamente as populações espectroscópicas BGS (vermelho), LRG (laranja) e ELG (verde). Também incluímos os contornos da análise 3x2pt (azul) considerando apenas o f_{sky} correspondente à sobreposição entre LSST e DESI.

5.2 DESI x 4MOST: Melhores Sinergias com o LSST

Como discutido na Seção 5.1, a utilização de múltiplas populações espectroscópicas — BGS, LRG e ELG — é fundamental para aprimorar o poder vinculante da análise 6x2pt, tanto em termos de parâmetros cosmológicos quanto na calibração de redshifts fotométricos. No entanto, o impacto dessas populações depende fortemente das características específicas de cada levantamento espectroscópico (alcance em redshift, densidade de galáxias e área de sobreposição (f_{sky}) com o LSST). Dito isto, dois dos levantamentos espectroscópicos mais relevantes nesse contexto são o DESI (vista na seção anterior) e o 4MOST, ambos com programas que abrangem uma amostragem diversificada de galáxias, incluindo BGS, LRG e ELG (como mencionado nas seções 4.2.1 e 4.2.2). Embora compartilhem semelhanças em termos gerais das distribuições de redshift, existem algumas diferenças que impactam diretamente suas sinergias com o LSST e o vínculo sobre os parâmetros cosmológicos.

Com o objetivo de quantificar essas diferenças, avaliamos o impacto de cada survey na análise 6x2pt utilizando os seus f_{sky} de overlap com o LSST. Dessa forma, a Figura 33 apresenta os contornos de credibilidade para os parâmetros cosmológicos ao se combinar o LSST com o DESI (preto) e com o 4MOST (cinza). De forma geral, observa-se que o 4MOST proporciona vínculos levemente mais precisos em todos os parâmetros; isso é reflexo direto da sua área de sobreposição com o LSST, que é 1,875 vezes maior que a do DESI. Entretanto, essa diferença deveria ser muito superior à mostrada nos contornos, porém isso não ocorre devido ao DESI cobrir um intervalo de redshift mais amplo, estendendo-se até $z \sim 1.6$, enquanto o 4MOST é limitado a redshifts ligeiramente mais baixos $z \sim 1.2$. Além disso, o DESI apresenta uma densidade numérica de galáxias mais alta, o que faz com que seu ruído seja inferior quando comparado à amostra do 4MOST, conferindo, assim, uma maior robustez estatística das suas medidas e, portanto, vínculos mais robustos.

Diante disso, torna-se relevante considerar possíveis extensões do levantamento DESI. Propostas recentes têm sugerido a expansão do seu *footprint* em direção ao hemisfério sul, com o intuito de aumentar significativamente a região de overlap com o LSST (BOLTON; AL., 2018; NEWMAN; AL., 2015). O estudo feito em (BOLTON; AL., 2018) aponta para a viabilidade de estender essa cobertura para até $10,000 \text{ deg}^2$, o que representaria um ganho significativo na sinergia entre esses dois levantamentos. Com base nessas propostas, investigamos três cenários representativos para a expansão da área de sobreposição do DESI com o LSST: (i) um cenário modesto com $5,000 \text{ deg}^2$, que representa um aumento de apenas $1,000 \text{ deg}^2$ em relação ao overlap atual; (ii) um cenário intermediário com $7,500 \text{ deg}^2$, equivalente à área de sobreposição do 4MOST; e (iii) um cenário otimista com $10,000 \text{ deg}^2$, refletindo a máxima extensão atualmente considerada viável.

Dessa maneira, a Figura 34 apresenta os contornos de credibilidade para os parâmetros cosmológicos considerando essas três configurações expandidas do DESI e a configuração atual do 4MOST, sempre em combinação com o LSST. Os resultados dessa comparação indicam que,

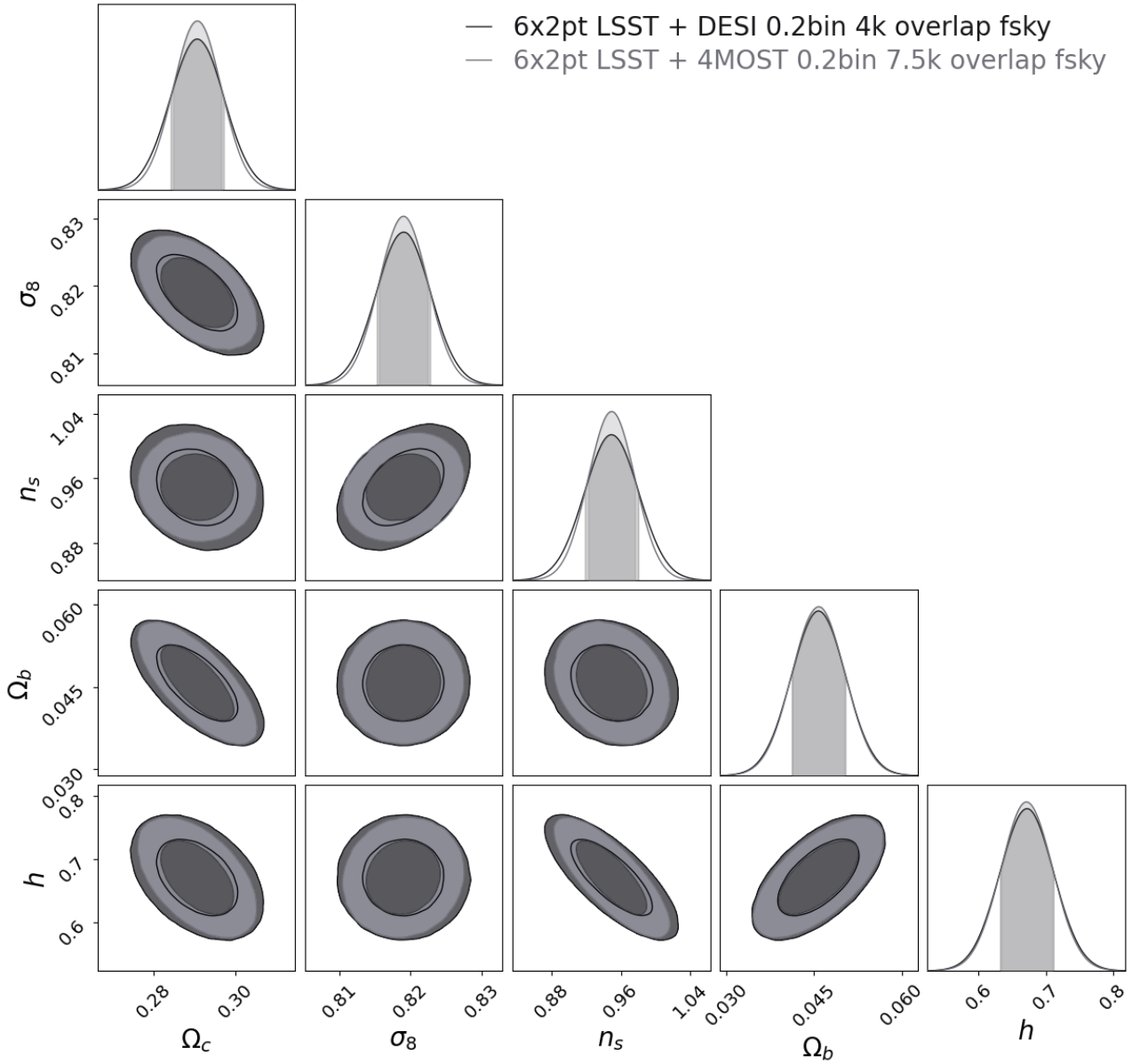


Figura 33 – Contornos de credibilidade a 68/95% para os parâmetros cosmológicos $\{\Omega_c, \Omega_b, h, \sigma_8, n_s\}$, comparando os resultados da análise 6x2pt obtidos com as frações de céu padrão dos levantamentos. São consideradas as configurações combinadas LSST + DESI (4,000 deg^2 , em preto) e LSST + 4MOST (7,500 deg^2 , em cinza).

mesmo com um aumento modesto da área para 5,000 deg^2 (azul), os contornos obtidos com o DESI já se tornam comparáveis aos do 4MOST para todos os parâmetros, com exceção de n_s . Isso sugere que as características intrínsecas da amostragem do DESI — como seu maior alcance em redshift e maior densidade de objetos — são suficientes para compensar uma diferença de até 2,500 deg^2 em f_{sky} . Isso reforça que, do ponto de vista da estrutura da amostragem espectroscópica, o DESI é mais eficiente para vincular parâmetros cosmológicos. Ao se considerar uma área de sobreposição de 7,500 deg^2 (vermelho), equivalente à do 4MOST, os contornos do DESI tornam-se mais estreitos unicamente devido às propriedades da distribuição de redshift de sua amostragem — como uma maior densidade de galáxias e uma maior profundidade em redshift —, resultando em vínculos cosmológicos mais precisos. No cenário mais otimista, com

uma área de sobreposição de $10,000 \text{ deg}^2$ (verde), os vínculos obtidos com o DESI superam ainda mais os do 4MOST, reforçando que a sinergia entre LSST e DESI é mais eficaz do que aquela entre LSST e 4MOST caso essa extensão ocorra. Vale ressaltar que esta análise adota certas simplificações, ao considerar apenas a região de sobreposição entre os levantamentos espectroscópicos na construção da matriz de covariância. Caso fosse adotada uma abordagem mais realista — incorporando também o poder de constrição das regiões exclusivas de cada levantamento espectroscópico (como os $14,000 \text{ deg}^2$ do DESI e os $7,500 \text{ deg}^2$ do 4MOST nas autocorrelações espectroscópicas) — seria ainda mais evidente o potencial superior do DESI para impor vínculos cosmológicos mais robustos em comparação ao 4MOST.

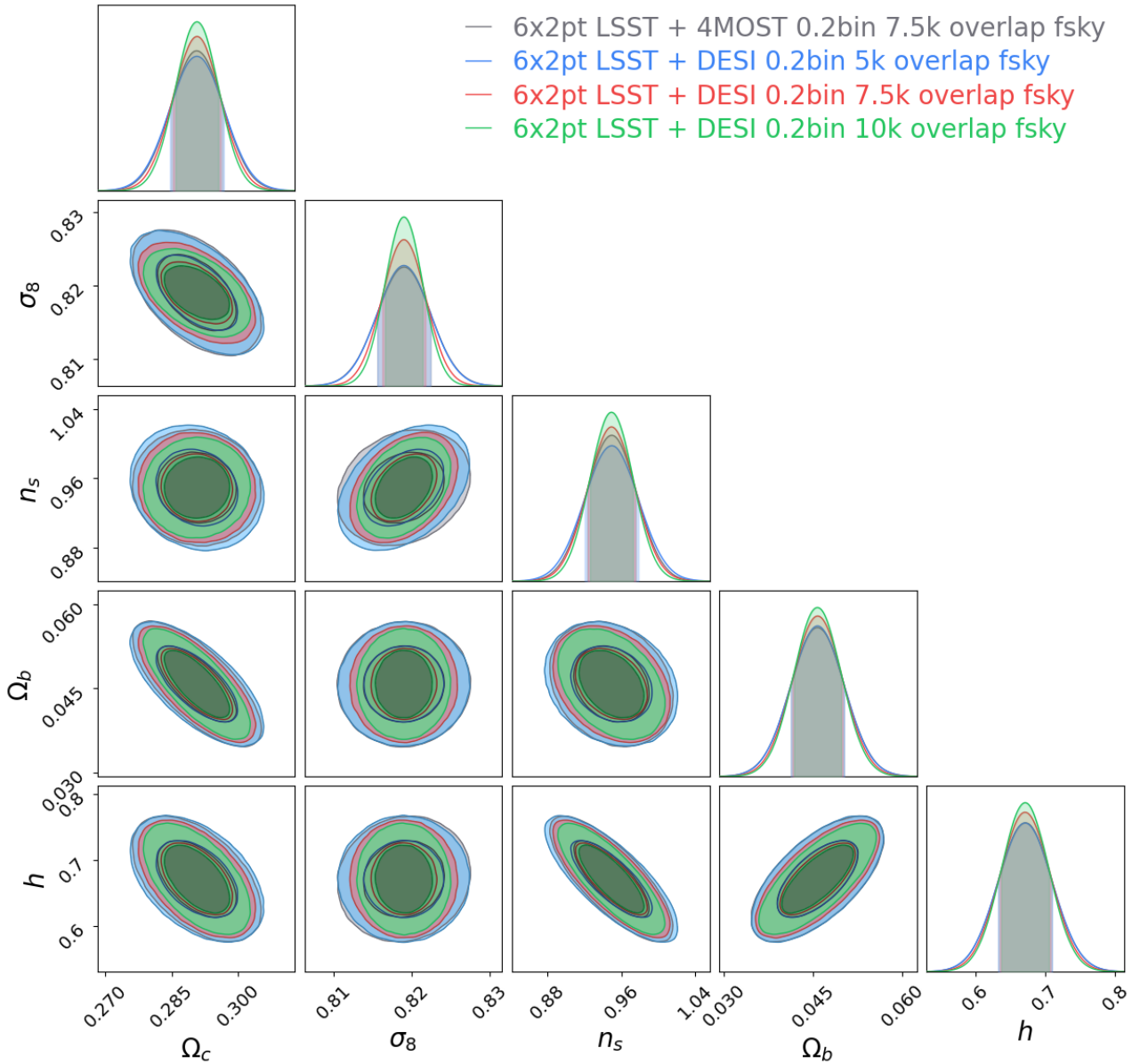


Figura 34 – Contornos de 68/95% de credibilidade para os parâmetros cosmológicos $\{\Omega_c, \Omega_b, h, \sigma_8, n_s\}$, obtidos a partir da análise 6x2pt combinando o LSST com diferentes configurações do levantamento DESI (áreas de 5,000, 7,500 e $10,000 \text{ deg}^2$) e com o levantamento 4MOST ($7,500 \text{ deg}^2$ de sobreposição)

Além dos parâmetros cosmológicos, é igualmente importante analisar o impacto desses levantamentos espectroscópicos sobre os parâmetros de nuisance associados à distribuição de redshift das lentes e fontes fotométricas do LSST. A Figura 35 mostra os contornos de credibilidade para os parâmetros de nuisance associados à calibração dos redshifts das lentes, comparando as amostras do DESI (sem extensão) e do 4MOST. Observa-se que, para os parâmetros Δz , ambas as amostras produzem vínculos equivalentes nos três primeiros bins fotométricos (uma diferença de em torno de 10% para um valor da ordem de 10^{-3}). Essa equivalência se desfaz apenas nos redshifts mais altos, onde a amostragem do DESI se mostra mais completa — com LRGs e ELGs alcançando regiões mais profundas em redshift —, permitindo uma calibração mais eficaz por meio das correlações cruzadas. Para os parâmetros σ_z , observa-se um comportamento ligeiramente diferente: as amostras do 4MOST apresentam melhor poder vinculante nos três primeiros bins, o que se deve ao fato de estarem mais concentradas em baixos redshifts; já para os últimos bins, o DESI se destaca em relação ao 4MOST, reflexo, novamente, da sua maior cobertura em redshifts mais elevados.

De maneira análoga ao caso das lentes, a Figura 36 apresenta a mesma análise dos parâmetros de nuisance aplicada às fontes fotométricas. Dessa forma, os contornos resultantes relacionados a Δz são bastante semelhantes entre DESI e 4MOST, porém com uma relativa melhora para o 4MOST devido à sua amostra mais concentrada em baixos redshifts, permitindo mais correlações cruzadas entre as amostras das fontes. Já para os parâmetros σ_z , não se observa diferença significativa entre as amostras, o que corrobora a análise apresentada na Seção 5.1, onde foi identificado que a inclusão de populações espectroscópicas não contribui de forma significativa para melhor vincular esses parâmetros. Esse resultado reforça a limitação das correlações cruzadas em fornecer informações sobre a largura das distribuições de redshift das fontes, destacando que, para as fontes, o ganho proporcionado pelas amostras espectroscópicas se concentra, principalmente, nos desvios médios (Δz).

Dessa forma, embora o 4MOST apresente vínculos ligeiramente mais precisos para os parâmetros cosmológicos nas configurações atuais, o DESI se destaca como a alternativa mais promissora e robusta para maximizar o potencial científico da análise 6x2pt em sinergia com o LSST. Mesmo com uma área de sobreposição inferior, sua maior densidade de galáxias e maior alcance em redshift compensam essa limitação. Com a implementação de uma possível extensão para o hemisfério sul, o DESI não apenas iguala, como supera o desempenho do 4MOST em praticamente todos os aspectos avaliados — tanto na precisão dos parâmetros cosmológicos quanto na calibração dos redshifts fotométricos. Diante disso, nas próximas seções, conduziremos a análise utilizando exclusivamente a distribuição do DESI, com o objetivo de aprofundar a investigação dos cenários e características da análise 6x2pt.

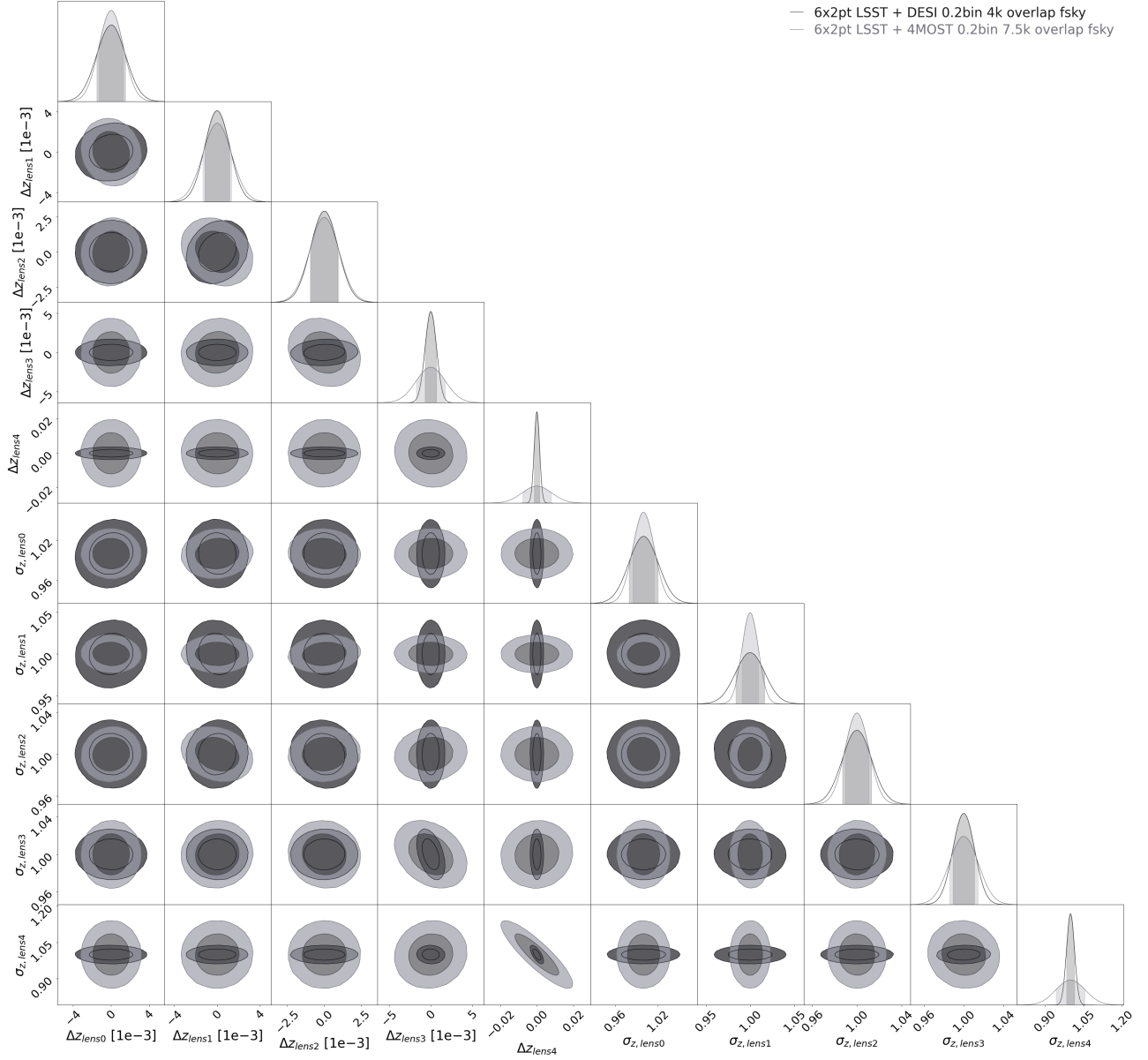


Figura 35 – Contornos de 68/95% de credibilidade para os parâmetros de nuisance associados à calibração da distribuição de redshift das lentes fotométricas, considerando a análise 6x2pt com duas configurações: LSST + DESI com 4,000 deg^2 de sobreposição e LSST + 4MOST com 7,500 deg^2 .

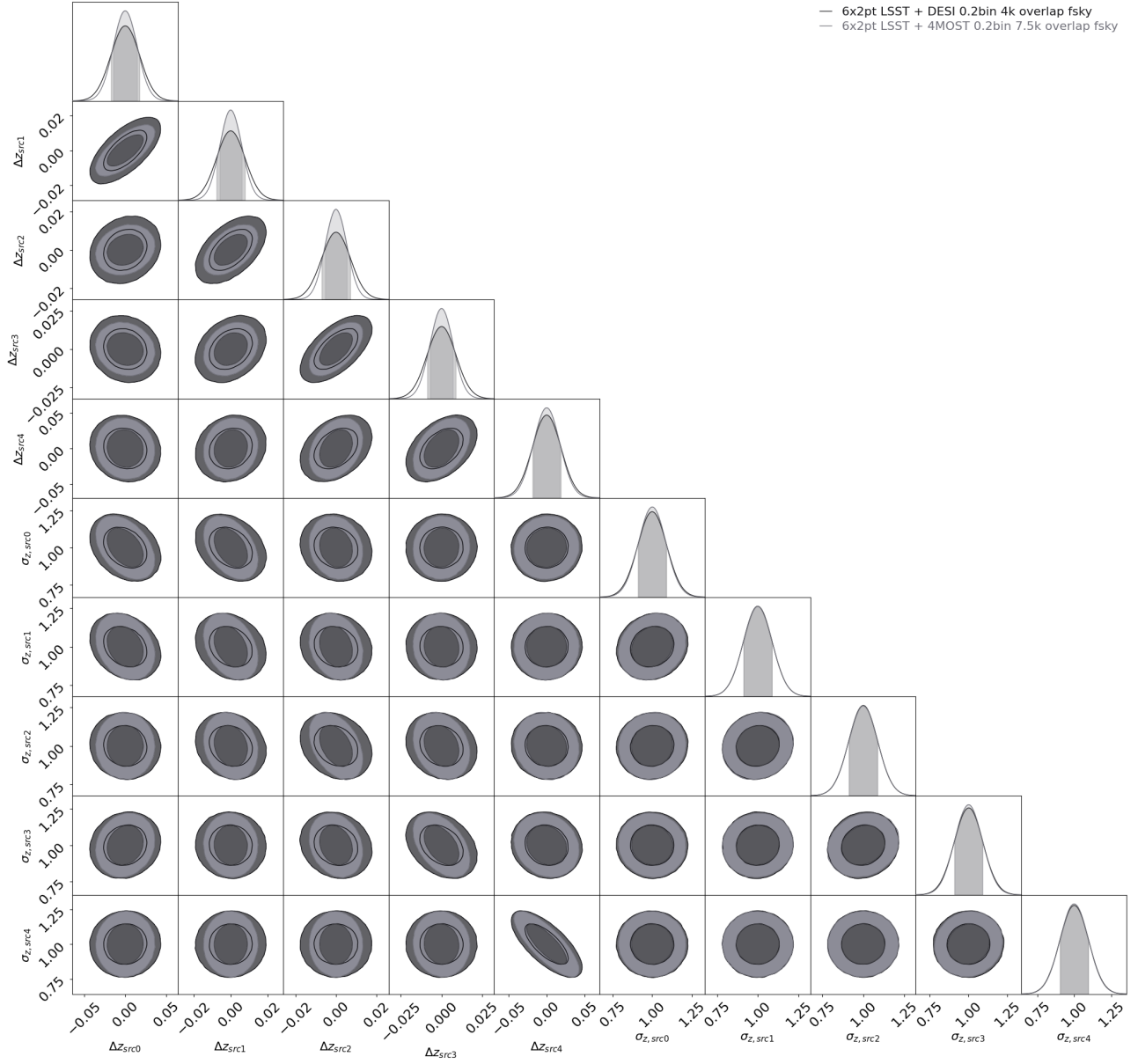


Figura 36 – Contornos de 68/95% de credibilidade para os parâmetros de nuisance relacionados à calibração da distribuição de redshift das fontes fotométricas, considerando as mesmas configurações da Figura 35.

5.3 Análise 6x2pt da amostra completa em diferentes cenários cosmológicos

Definida a amostra espectroscópica com melhor sinergia com o LSST, iremos fazer a análise completa 6x2pt nos diferentes cenários cosmológicos abordados neste capítulo: Λ CDM, w_0w_a CDM e Λ CDM + $\sum m_\nu$. Nessa etapa, também ampliamos o conjunto de parâmetros de *nuisance* considerados com o objetivo de investigar todos os impactos nos parâmetros cosmológicos, nos efeitos sistemáticos e nas incertezas associadas à calibração da distribuição de redshifts fotométricos.

Com o intuito de obter estimativas mais realistas da capacidade da análise 6x2pt, estendemos a região de estudo originalmente limitada à área de sobreposição entre o DESI e o LSST para toda a área do LSST. Ainda que essa extensão utilize uma matriz de covariância mais subestimada, ela nos permite obter contornos mais próximos dos que seriam obtidos caso tivéssemos feito uma covariância mais realista.

Começando pelo cenário Λ CDM, a Figura 37 apresenta os contornos dos parâmetros cosmológicos considerados. Observa-se que a análise 6x2pt proporciona vínculos mais precisos para a maioria desses parâmetros, com exceção de n_s , cuja determinação permanece amplamente dominada pelas informações da RCF. Além disso, a análise 6x2pt revela uma melhora significativa na quebra de degenerescências entre pares de parâmetros cosmológicos, como (σ_8, n_s) , (Ω_c, σ_8) e (h, Ω_c) , entre outros. Um ponto relevante é que, mesmo com a inclusão dos parâmetros de *nuisance*, a análise 6x2pt recupera vínculos comparáveis àqueles obtidos na análise 3x2pt sem esses tais parâmetros. Esse comportamento é resultado das correlações cruzadas com os *bins* espectroscópicos, que atuam como âncoras ao calibrar os parâmetros de *nuisance*, mitigando o impacto dessas incertezas na estimativa dos parâmetros cosmológicos.

No que diz respeito especificamente aos parâmetros de *nuisance* relacionados à distribuição de redshift fotométrico do LSST, observa-se, na figura 38, que a inclusão da informação espectroscópica do DESI melhora substancialmente a calibração desses parâmetros, ao mesmo tempo que quebra parte significativa das degenerescências encontradas. Como já visto anteriormente, esse efeito é mais evidente para os *bins* de lente, cuja sobreposição com os dados espectroscópicos permite uma ancoragem mais eficaz. Já na figura 39, para os parâmetros relacionados aos *bins* das fontes, a ancoragem é bem mais sutil ou até mesmo inexistente, com exceção dos parâmetros que descrevem o desvio médio do redshift.

Quanto aos parâmetros sistemáticos, nota-se que a inclusão da análise 6x2pt contribui para vínculos mais precisos sobre os parâmetros relacionados ao *bias* das galáxias. Além disso, a inclusão da informação espectroscópica contribui especialmente para a quebra de degenerescências envolvendo os parâmetros de calibração da distribuição de redshift das lentes, bem como os próprios parâmetros de *bias* de galáxias (figura 38). Por fim, também se observa um ganho modesto na determinação dos parâmetros de alinhamento intrínseco, A_{IA} e η_{IA} , bem como uma leve redução nas degenerescências entre esses parâmetros e os que descrevem o desvio médio dos *bins* das fontes (figura 39).

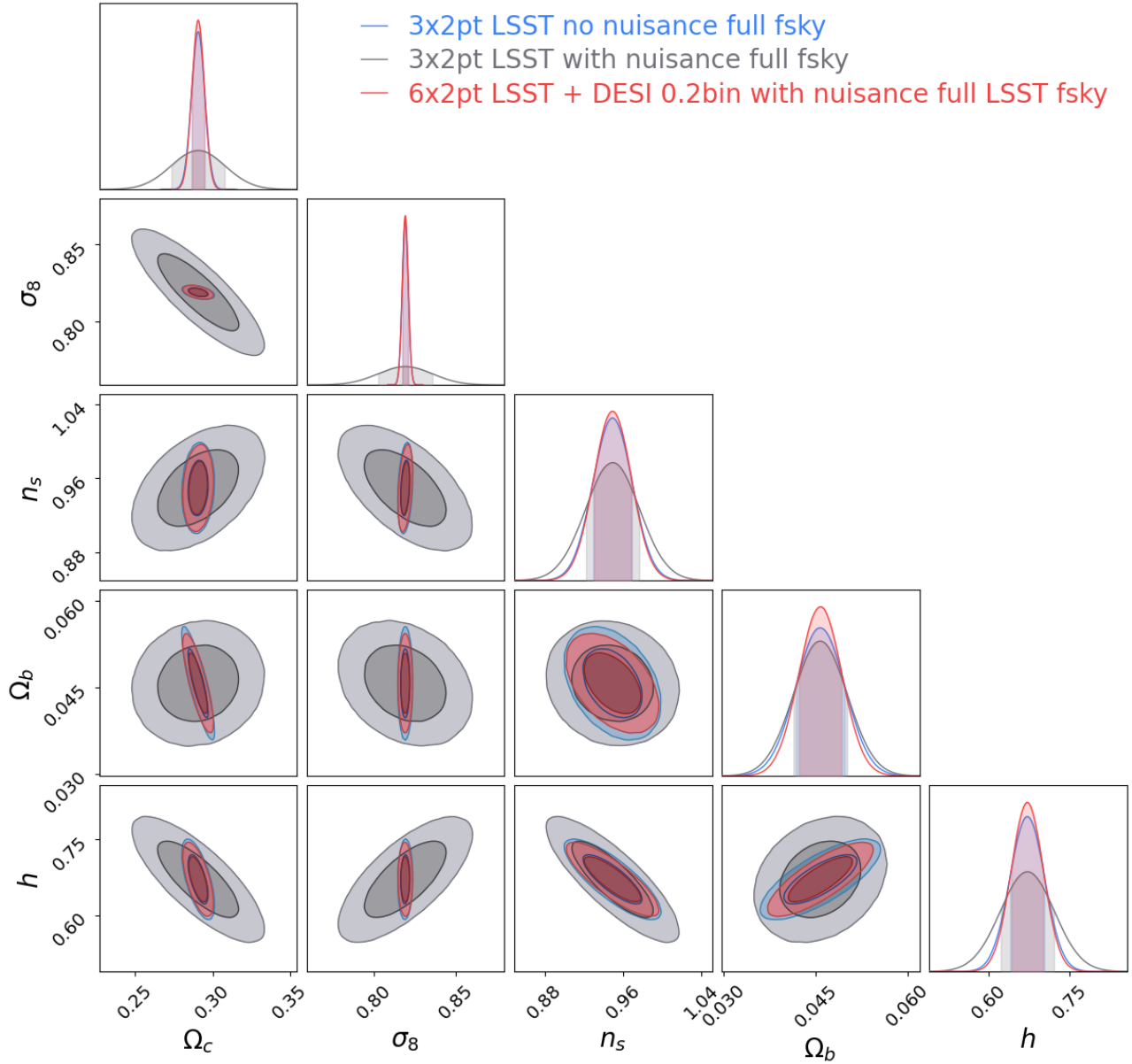


Figura 37 – Contornos de credibilidade a 68% e 95% para os parâmetros do modelo Λ CDM. As curvas em azul correspondem à análise 3x2pt sem a inclusão dos parâmetros de *nuisance*, enquanto as curvas em cinza mostram a mesma análise com esses parâmetros considerados. Já as curvas em vermelho representam a análise completa 6x2pt do LSST com o DESI, assumindo uma fração do céu de 18 mil graus quadrados (área do céu do LSST).

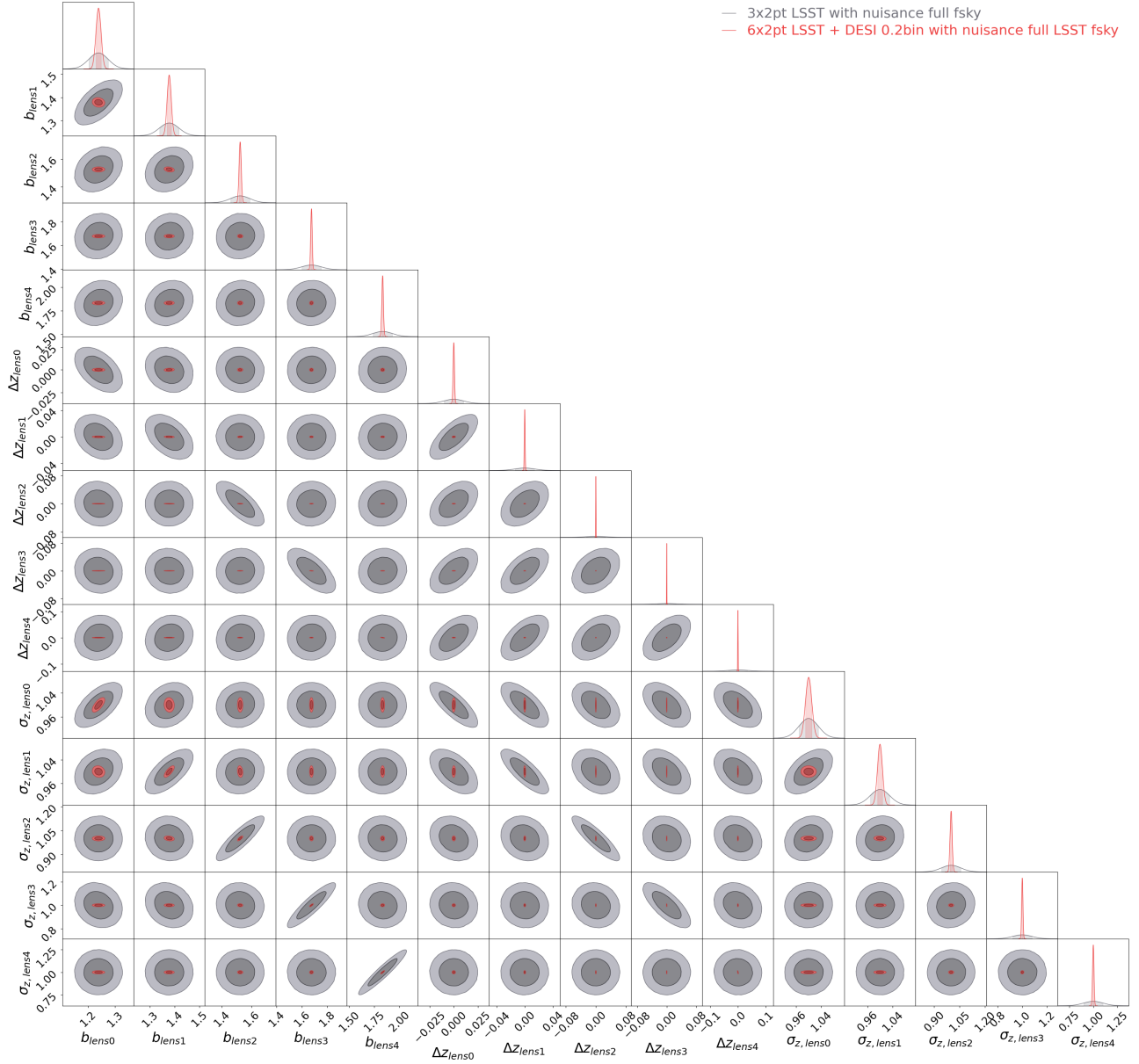


Figura 38 – Contornos de credibilidade a 68% e 95% para os parâmetros de bias de galáxias e os parâmetros de nuisance associados à distribuição de redshift das lentes, no modelo Λ CDM. As curvas em cinza correspondem à análise 3x2pt, enquanto as curvas em vermelho representam a análise completa 6x2pt, assumindo uma fração do céu de 18 mil graus quadrados.

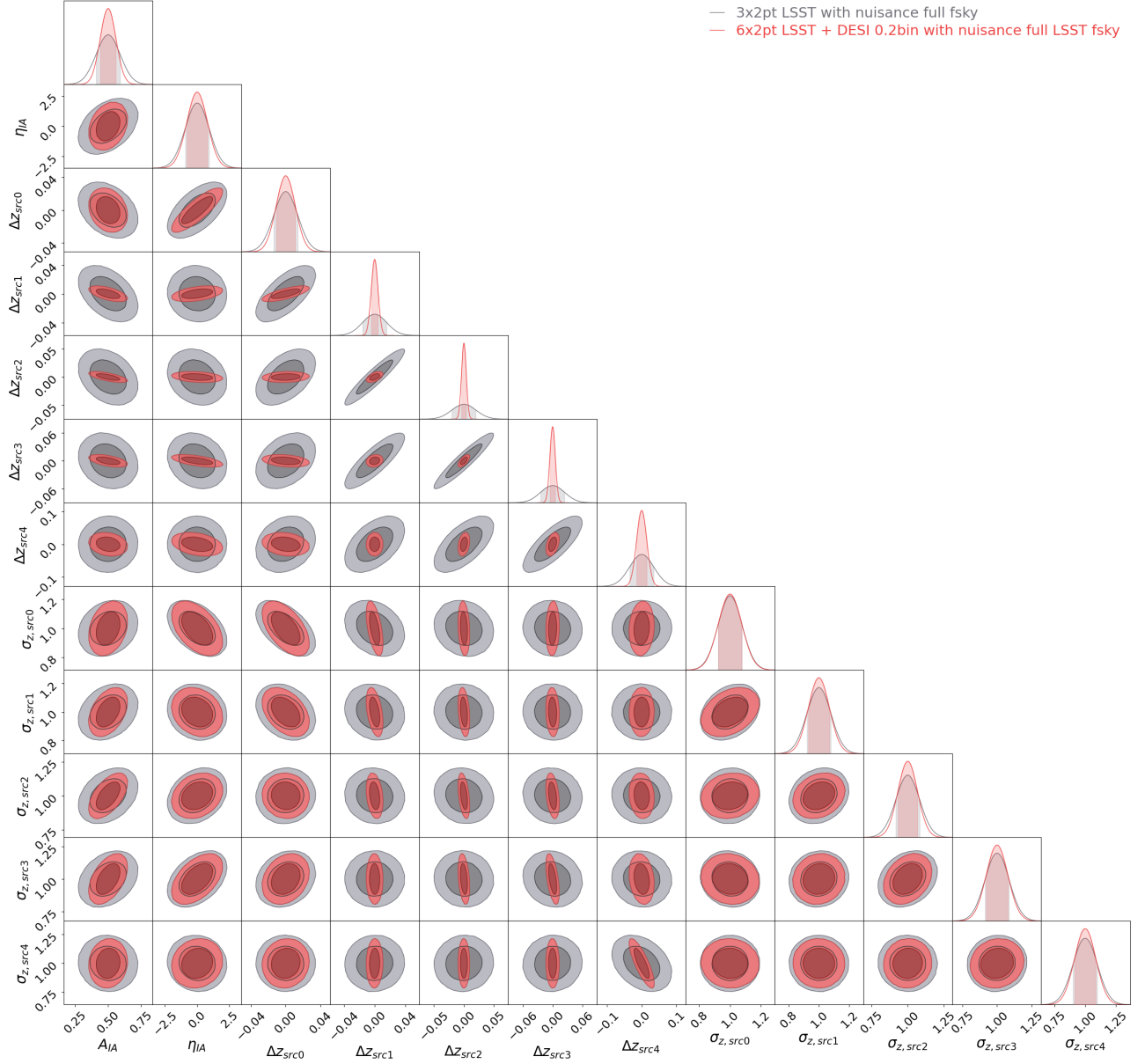


Figura 39 – Contornos de credibilidade a 68% e 95% para o parâmetros de alinhamento intrínseco e os parâmetros de nuisance relacionados a distribuição de redshift das fontes no modelo Λ CDM. as curvas em cinza mostram a mesma análise 3x2pt. Já as curvas em vermelho representam a análise completa 6x2pt, assumindo uma fração do céu de 18 mil graus quadrados.

No cenário w_0w_a CDM, os resultados seguem, em linhas gerais, o mesmo comportamento observado no caso Λ CDM (principalmente os resultados associados aos parâmetros de nuisance). A introdução dos parâmetros w_0 e w_a , no entanto, afeta os vínculos cosmológicos ao reintroduzir algumas degenerescências que haviam sido mitigadas no modelo Λ CDM, além de enfraquecer as restrições sobre certos parâmetros cosmológicos (figura 40). Ainda assim, a análise 6x2pt continua a fornecer melhorias nos vínculos para a maioria dos parâmetros, embora os ganhos sejam mais modestos nesse cenário. Destaca-se, em especial, o parâmetro σ_8 , que aparece bem menos vinculado. Isso se dá devido ao parâmetro σ_8 ser dependente da expansão cósmica, que por sua vez é dependente dos parâmetros associados à energia escura, de modo a existir certa "compensação". Focando agora mais especificamente nos parâmetros da equação de estado da energia escura, w_0 e w_a , na figura 41, observa-se que a análise 6x2pt proporciona ganhos significativos nas suas restrições, além de contribuir para quebrar degenerescências desses parâmetros com certos parâmetros de *nuisance* ($\Delta z, b, A_{IA}$).

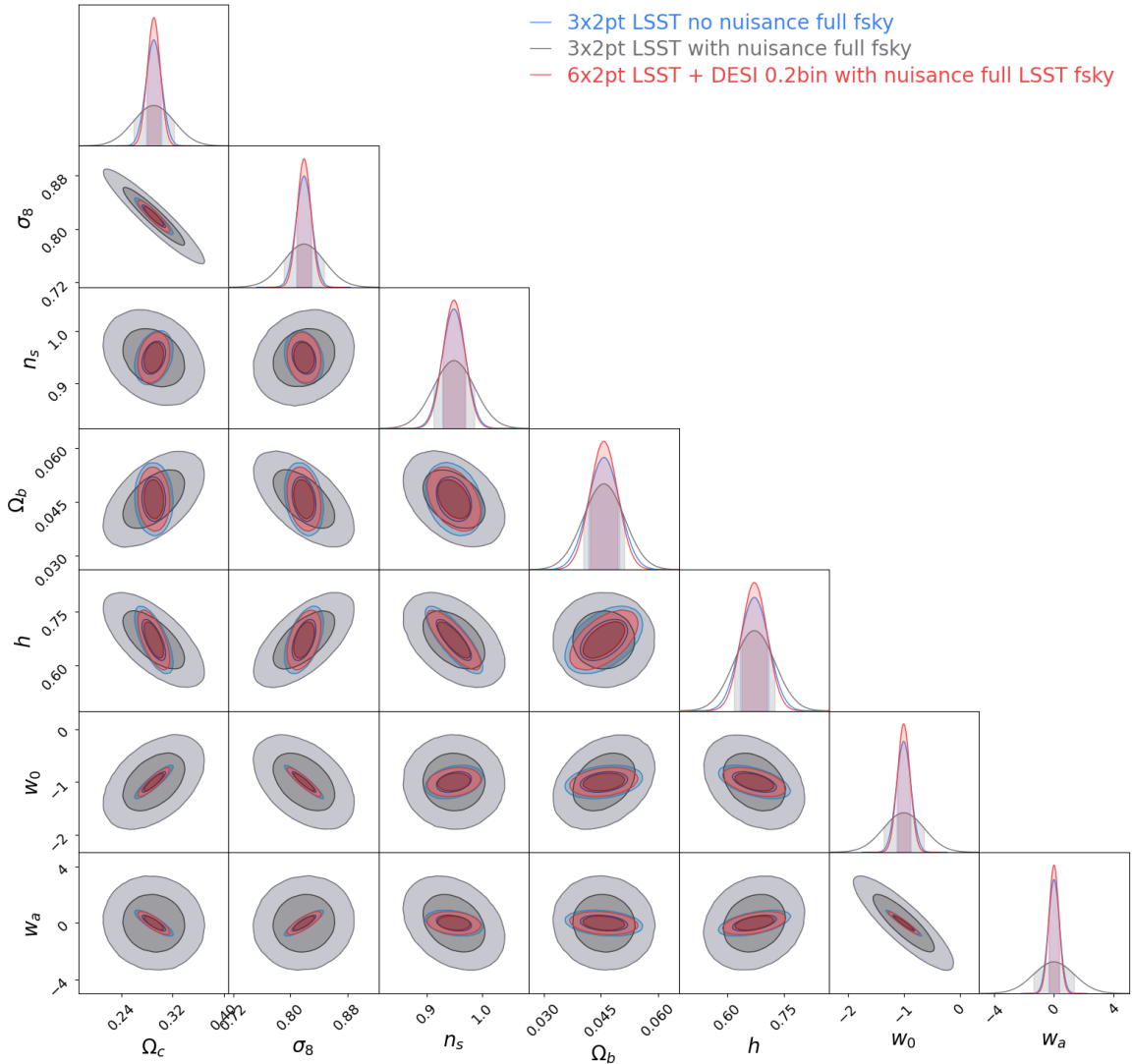


Figura 40 – Contornos de credibilidade a 68% e 95% para os parâmetros cosmológicos variáveis do modelo w_0w_a CDM. As curvas azuis mostram a análise 3x2pt sem parâmetros de *nuisance*, as cinzas com esses parâmetros, e as vermelhas a análise 6x2pt.

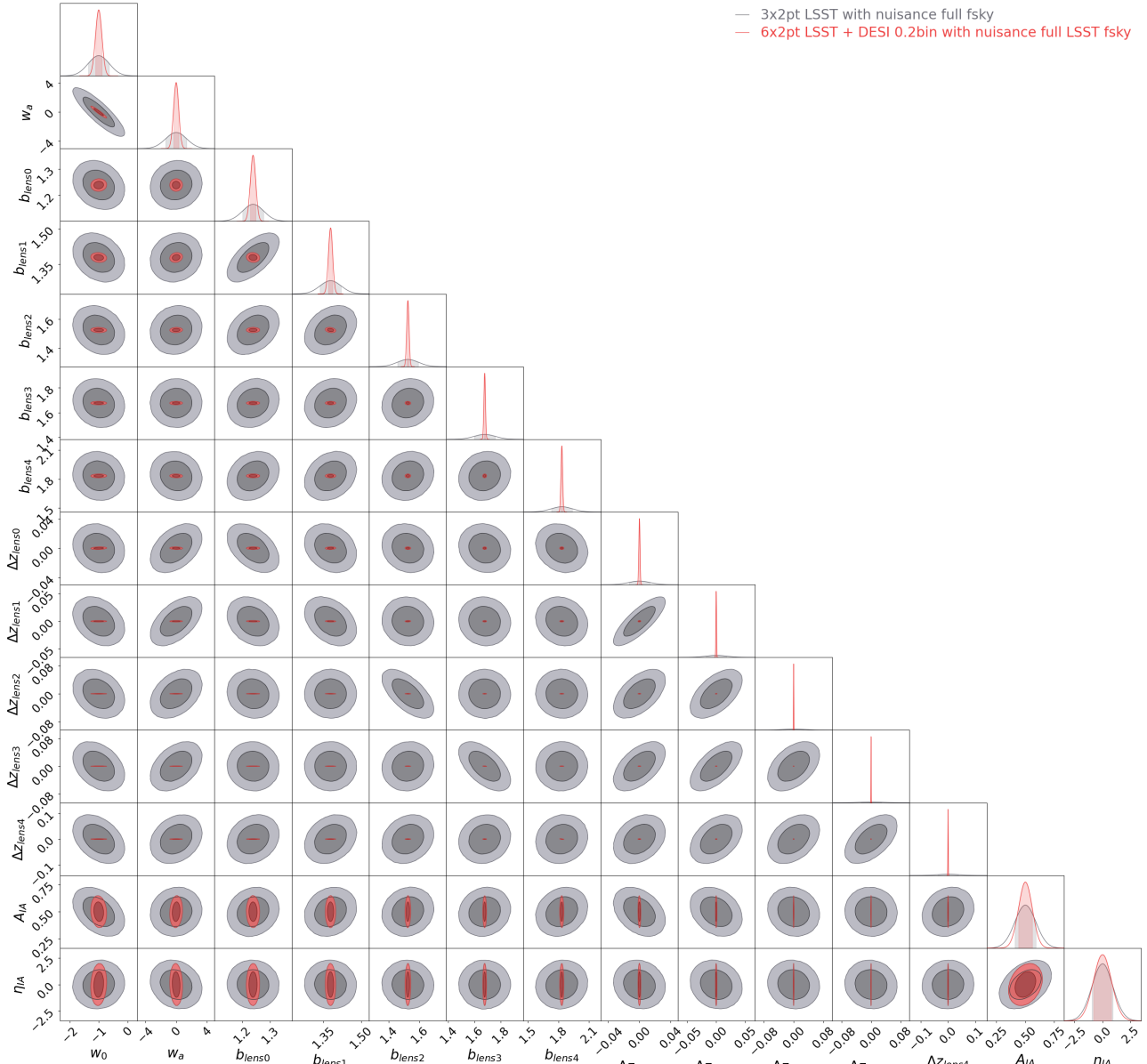


Figura 41 – Contornos de credibilidade a 68% e 95% no modelo w_0w_a CDM para os parâmetros w_0 e w_a e parâmetros como: $\Delta z, b, A_{IA}$. As curvas em cinza correspondem à análise 3x2pt com a inclusão dos parâmetros de *nuisance*; Já as curvas em vermelho representam a análise completa 6x2pt incorporando dados do DESI

Por fim, no cenário com neutrinos massivos, observa-se pouca diferença global em relação ao modelo Λ CDM (sem mudanças aos parâmetros de *nuisance* e pouca mudança nos parâmetros cosmológicos). A análise 6x2pt continua proporcionando melhorias nos vínculos cosmológicos, de forma semelhante aos demais cenários avaliados, como mostrado na figura 42. No entanto, vale destacar os resultados referentes ao parâmetro associado à soma das massas dos neutrinos, $\sum m_\nu$. Especificamente, a análise 6x2pt contribui para um leve aprimoramento nos vínculos sobre $\sum m_\nu$, além de reduzir as degenerescências entre esse parâmetro e σ_8 . Por outro lado, observam-se degenerescências ligeiramente intensificadas entre $\sum m_\nu$ e os parâmetros h e n_s . No que diz respeito aos parâmetros de *nuisance*, a análise 6x2pt também se mostra útil ao ajudar a quebrar a degenerescência entre $\sum m_\nu$ e os parâmetros de bias das galáxias (figura 43).

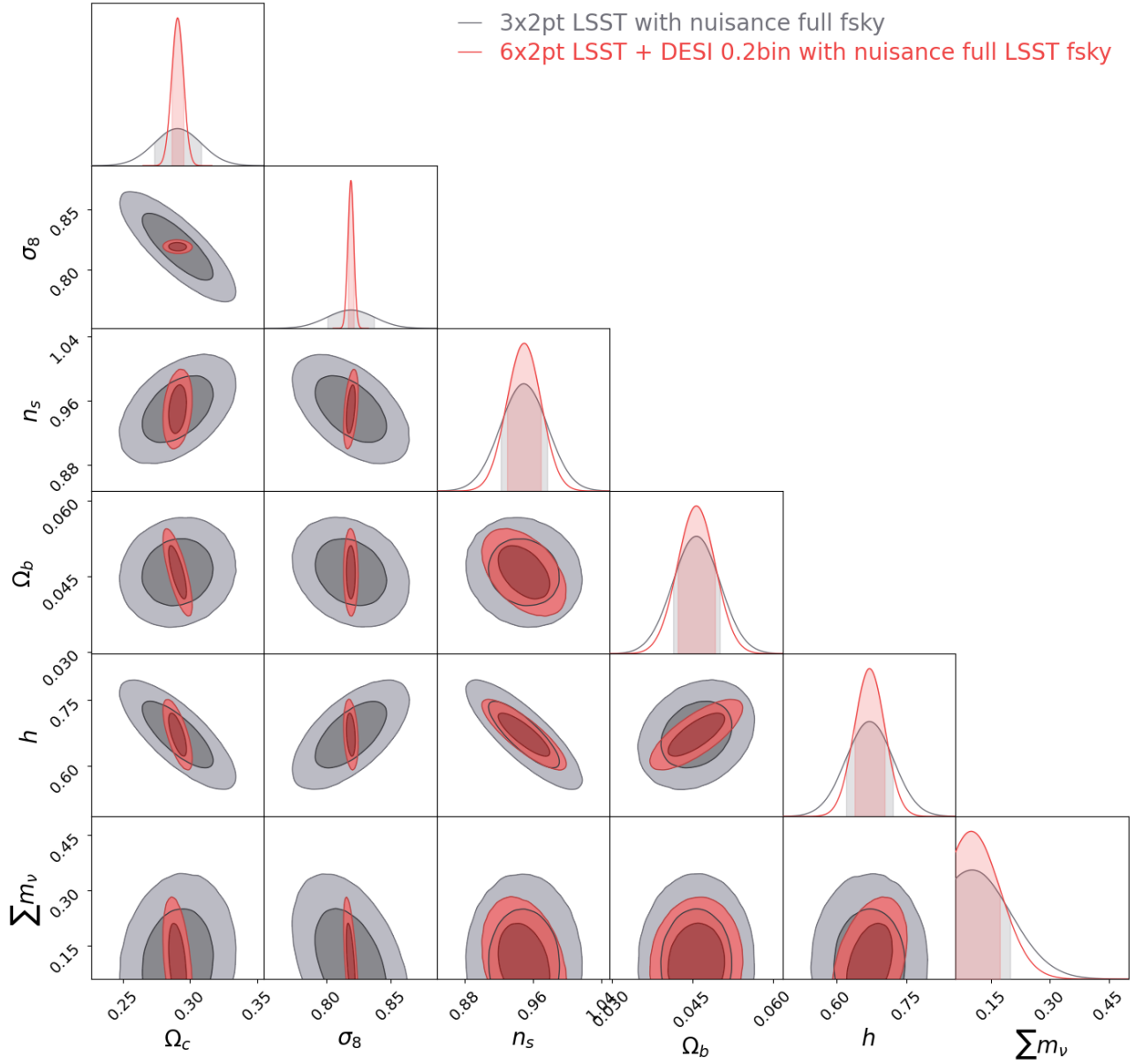


Figura 42 – Contornos de credibilidade a 68% e 95% para os parâmetros cosmológicos variáveis do modelo Λ CDM + $\sum m_\nu$. As curvas em azul correspondem à análise 3x2pt sem a inclusão dos parâmetros de *nuisance*, enquanto as curvas em cinza mostram a mesma análise com esses parâmetros considerados. Já as curvas em vermelho representam a análise completa 6x2pt incorporando dados do DESI, assumindo uma fração do céu de 18 mil graus quadrados.

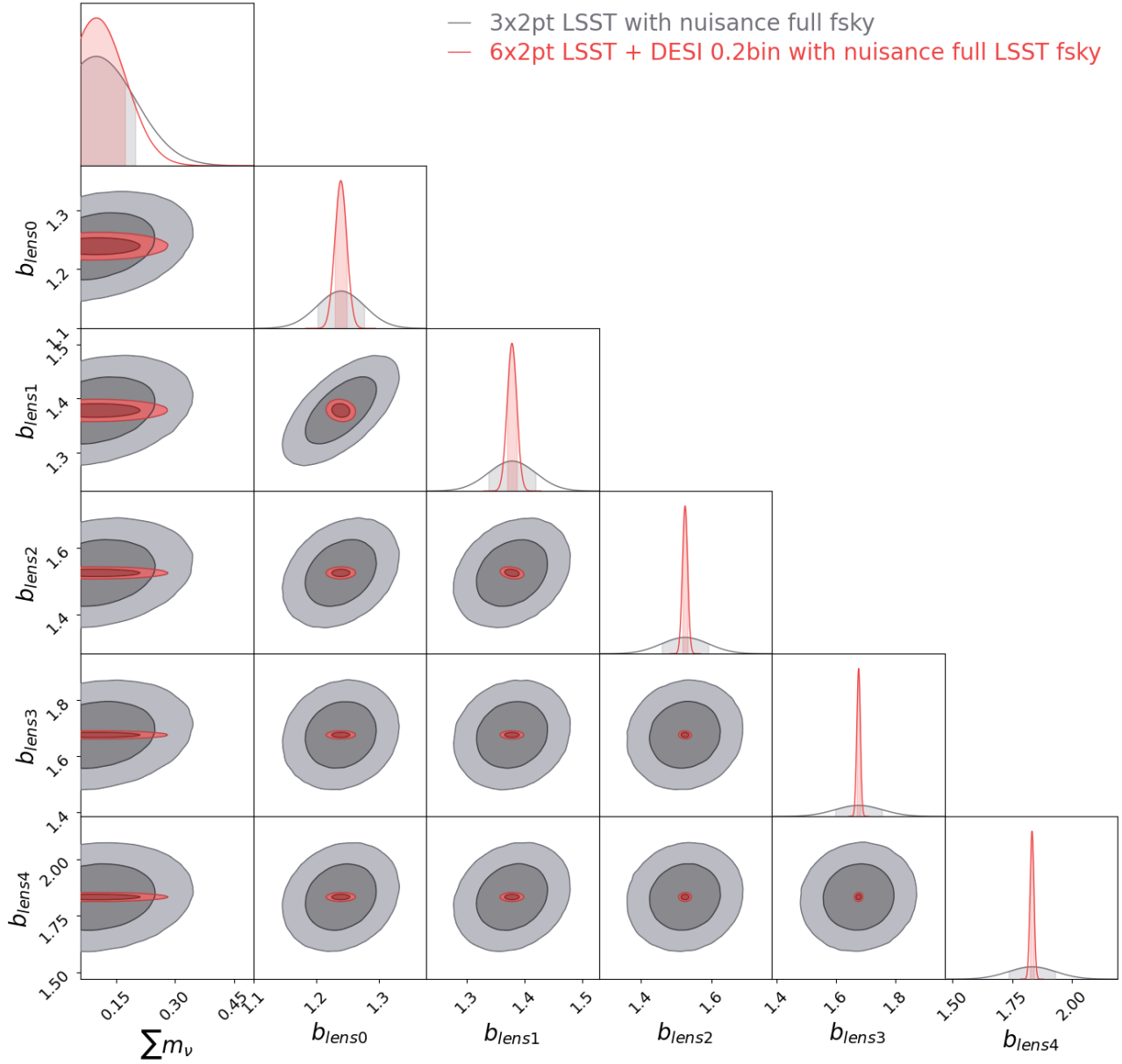


Figura 43 – Contornos de credibilidade a 68% e 95% para o parâmetro da soma das massas de neutrinos e parâmetros de bias de galaxias. As curvas em vermelho correspondem à análise 3x2pt incluindo os parâmetros de *nuisance*; Já as curvas em vermelho representam a análise completa 6x2pt incorporando dados do DESI, assumindo uma fração do céu de 18 mil graus quadrados.

5.4 Variação do Binning Espectroscópico na Análise 6x2pt

Outra análise relevante consiste em investigar diferentes configurações de binning para a distribuição de redshifts espectroscópica. Inicialmente, adotamos uma largura de bin fixa de $\Delta z = 0,2$, mas é importante explorar como alternativas mais estreitas, como $\Delta z = 0,1$ e $\Delta z = 0,05$, impactam os vínculos sobre os parâmetros cosmológicos e de *nuisance* na análise 6x2pt.

Dessa forma, as figuras 44 e 45 apresentam o impacto dessas diferentes configurações de comprimento de redshift no cenário Λ CDM. Observa-se que o uso de bins espectroscópicos mais estreitos resulta em uma melhora sutil nos vínculos dos parâmetros cosmológicos (figura 44). Em particular, os parâmetros σ_8 e Ω_c apresentam os maiores ganhos, com uma melhora de aproximadamente 6% ao se utilizar $\Delta z = 0,1$, e de até 20% com $\Delta z = 0,05$. Além disso, observa-se uma maior capacidade desses bins mais finos de restringir os parâmetros de dispersão fotométrica (σ_z) e os parâmetros de *bias* das galáxias — especialmente nos primeiros bins fotométricos (figura 45). Essa melhora decorre do fato de que bins espectroscópicos mais finos proporcionam uma melhor resolução radial, o que permite uma ancoragem mais precisa dessas propriedades das distribuições de redshift. No caso dos parâmetros de deslocamento médio, Δz_{lens} , observa-se uma leve variação nos erros entre os diferentes cenários. No entanto, como os valores absolutos dessas incertezas já são suficientemente pequenos, essa diferença é desprezível. Assim, podemos considerar que os vínculos sobre Δz_{lens} permanecem, na prática, inalterados, apesar da pequena diferença visível na figura.

Vale destacar que esses ganhos podem ser ainda mais expressivos caso não considerássemos a aproximação de Limber, cuja validade se reduz significativamente para bins espectroscópicos estreitos. Em particular, a aproximação de Limber tende a suprimir o sinal de correlações cruzadas entre os bins fotométrico e espectroscópico com pouco overlap, o que pode comprometer a recuperação de informações relevantes nas análises com bins mais finos.

Além disso, a adoção de bins mais finos acarreta um custo computacional elevado, pois o número de combinações de correlações angulares entre os bins aumenta consideravelmente, sendo: 85 combinações para $\Delta z = 0,2$, 138 para $\Delta z = 0,1$ e 247 para $\Delta z = 0,05$. Consequentemente, o tempo necessário para se calcular a matriz de covariância também cresce: aproximadamente 36 minutos para $\Delta z = 0,2$, 2 horas e 36 minutos para $\Delta z = 0,1$ e até 20 horas e 27 minutos para $\Delta z = 0,05$ — valores que podem ser parcialmente mitigados por otimizações do nosso código.

Vale destacar que os custos computacionais seriam ainda mais elevados na ausência da aproximação de Limber. Apesar de haver esforços para otimizar códigos capazes de calcular os espectros angulares C_ℓ sem recorrer a essa aproximação (LEONARD et al., 2023), essas abordagens ainda exigem um custo computacional elevado comparado à aproximação de Limber. Assim, embora a adoção de bins tomográficos mais finos possa aprimorar as restrições sobre alguns parâmetros, ela tende a aumentar significativamente a complexidade computacional do processo.

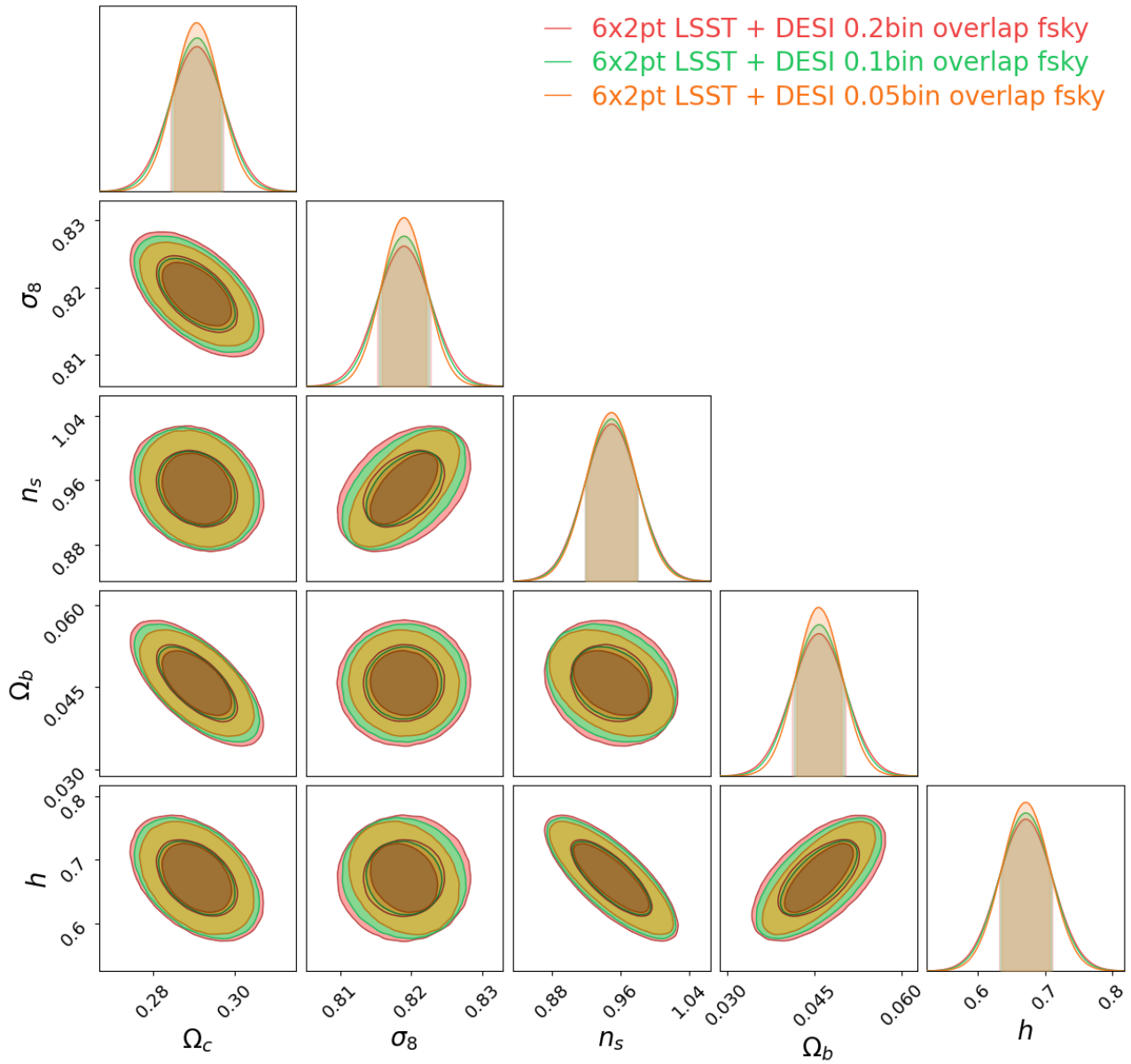


Figura 44 – Contornos de credibilidade a 68% e 95% para diferentes configurações de binning espectroscópico, considerando os parâmetros cosmológicos variáveis do modelo Λ CDM. As curvas em vermelho correspondem à análise 6x2pt LSST+DESI com bins com comprimento $\Delta z = 0,2$, as curvas em verde referem-se à configuração com $\Delta z = 0,1$, e as curvas em laranja representam o caso mais fino, com $\Delta z = 0,05$.

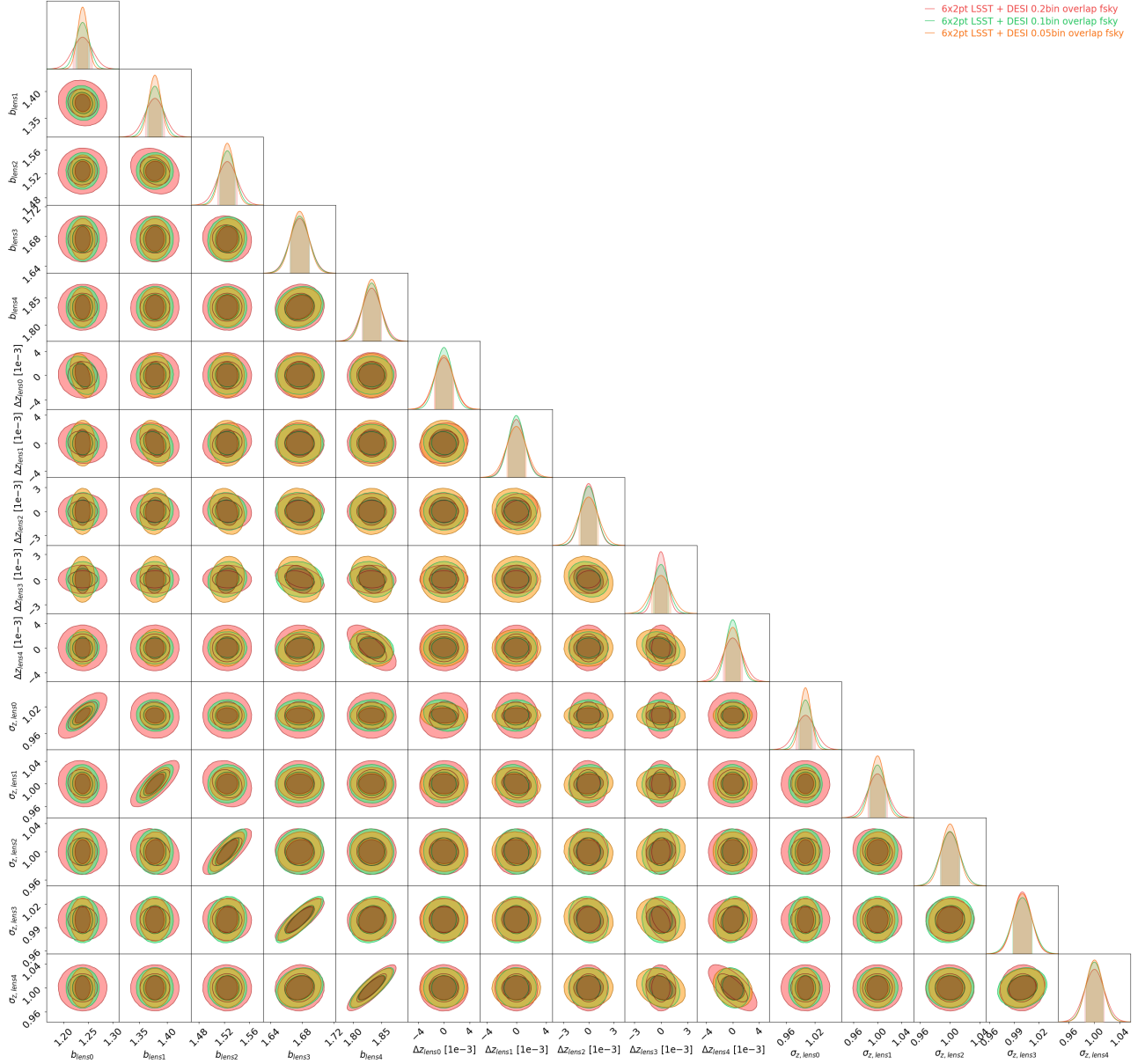


Figura 45 – Contornos de credibilidade a 68% e 95% para diferentes configurações de binning espectroscópico, considerando os parâmetros de nuisance das lentes. As curvas em vermelho correspondem à análise 6x2pt LSST+DESI com bins com comprimento $\Delta z = 0,2$, as curvas em verde referem-se à configuração com $\Delta z = 0,1$, e as curvas em laranja representam o caso mais fino, com $\Delta z = 0,05$.

5.5 Impacto de RSD linear na análise 6x2pt

Como última análise, investigamos o impacto das distorções de redshift (RSD) lineares na análise 6x2pt. Embora esse efeito já seja relevante mesmo em surveys puramente fotométricos — como discutido em (TANIDIS; AL., 2023) —, sua importância tende a ser ainda maior em análises com espectroscopia, devido à sua resolução radial que melhor captura esse efeito.

Para avaliar esse impacto, realizamos uma análise comparando dois vetores de dados idênticos da combinação LSST + DESI com binning de $\Delta z = 0,2$: um deles inclui o efeito de RSD (como feito ao longo deste trabalho), enquanto o outro desconsidera esse efeito na modelagem teórica. A Figura 46 mostra os vínculos resultantes sobre os parâmetros cosmológicos. Observa-se que, de forma global, não há diferença significativa no poder de restrição desses parâmetros nos dois cenários, ou seja, as duas gaussianas estão sobrepostas. Vale ressaltar que apesar de não ter sido mostrado, o processo se repete para todos os parâmetros de nuisance, de forma que, considerar ou não RSD não causa impacto nos contornos.

Com o objetivo de investigar a identificabilidade do efeito de RSD, utilizamos a Figura 47, na qual avaliamos a diferença absoluta entre os vetores de dados com e sem RSD, normalizada pelo desvio padrão do ruído teórico. Os resultados mostram que, para a maioria das combinações de galaxy clustering com weak lensing, o impacto de incluir ou não RSD é inferior a 1% do desvio padrão. Já nas combinações envolvendo apenas galaxy clustering, as diferenças são tipicamente inferiores a 5%, exceto para os pares $\text{LRG} \times \text{LRG}$ e $\text{ELG} \times \text{ELG}$, nos quais a discrepância pode atingir aproximadamente 6% e 14% do desvio padrão, respectivamente. Note também que essa avaliação foi realizada considerando as escalas definidas na Seção 4.3 ($20 \leq \ell \leq 2000$); portanto, a adoção de valores menores para $\ell_{\min}$ poderia resultar em discrepâncias ainda maiores na avaliação da não inclusão do efeito de RSD.

Esses resultados indicam que RSD tem impacto considerável na análise 6x2pt de forma que, embora essa inclusão não altere substancialmente as incertezas dos parâmetros, sua omissão na modelagem teórica pode induzir vieses nas estimativas dos vínculos cosmológicos — ou seja, comprometeria não a precisão, mas, sim, a acurácia desses parâmetros.

Vale notar que essa análise de identificabilidade representa apenas uma estimativa qualitativa do potencial impacto de RSD. Para uma avaliação quantitativa e robusta do viés induzido por não se considerar RSD, seria necessário realizar um cálculo explícito de *Fisher bias*, o que permitiria estimar diretamente os vieses provocados nos parâmetros cosmológicos. A implementação dessa análise mais completa foi deixada para trabalhos futuros.

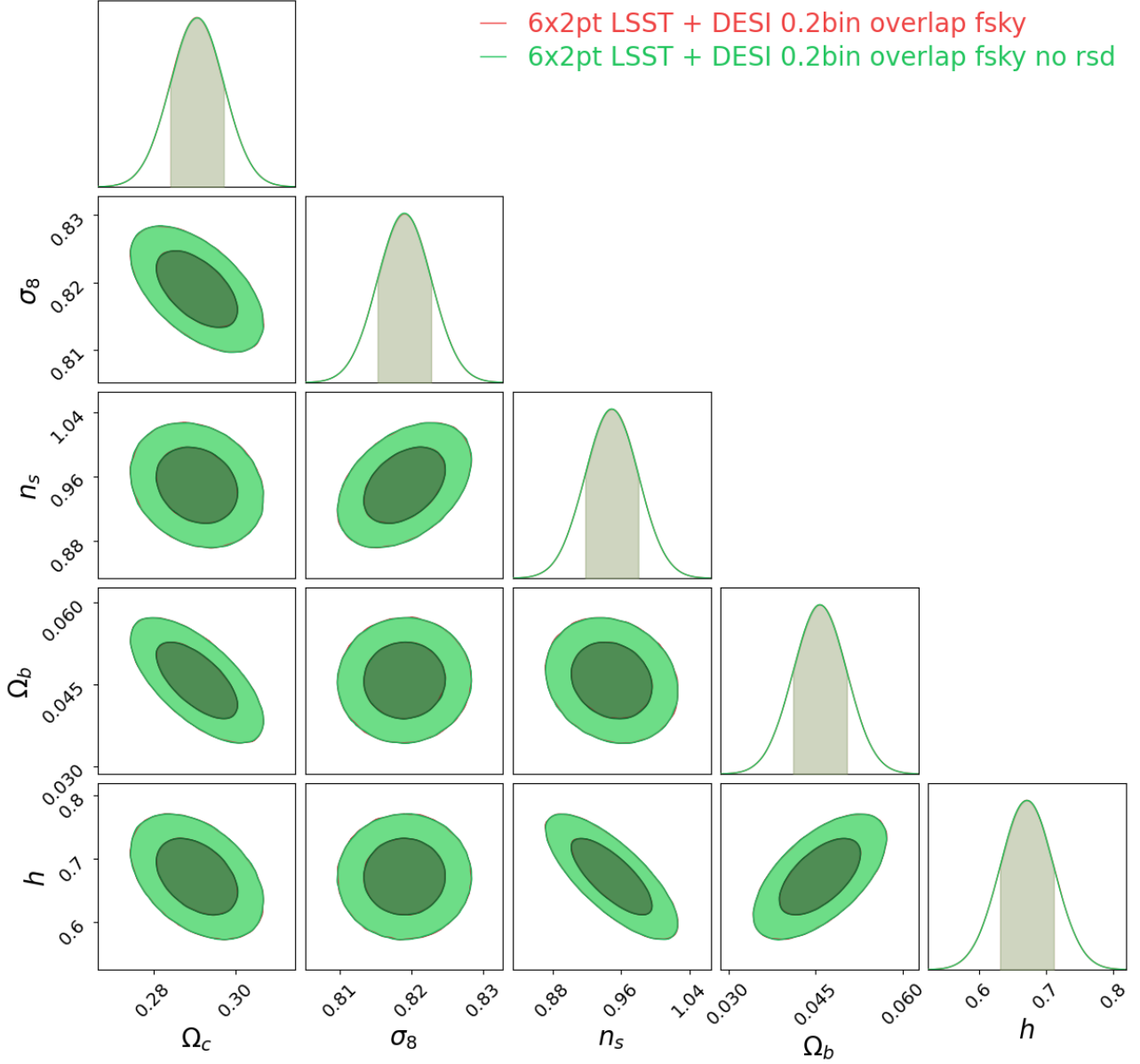


Figura 46 – Contornos de credibilidade a 68% e 95% para os parâmetros cosmológicos variáveis do modelo Λ CDM, considerando a análise 6x2pt LSST+DESI com binning espectroscópico de $\Delta z = 0,2$. As curvas em vermelho correspondem à modelagem teórica com inclusão do efeito de RSD, enquanto as curvas em verde representam o caso em que esse efeito é desconsiderado.

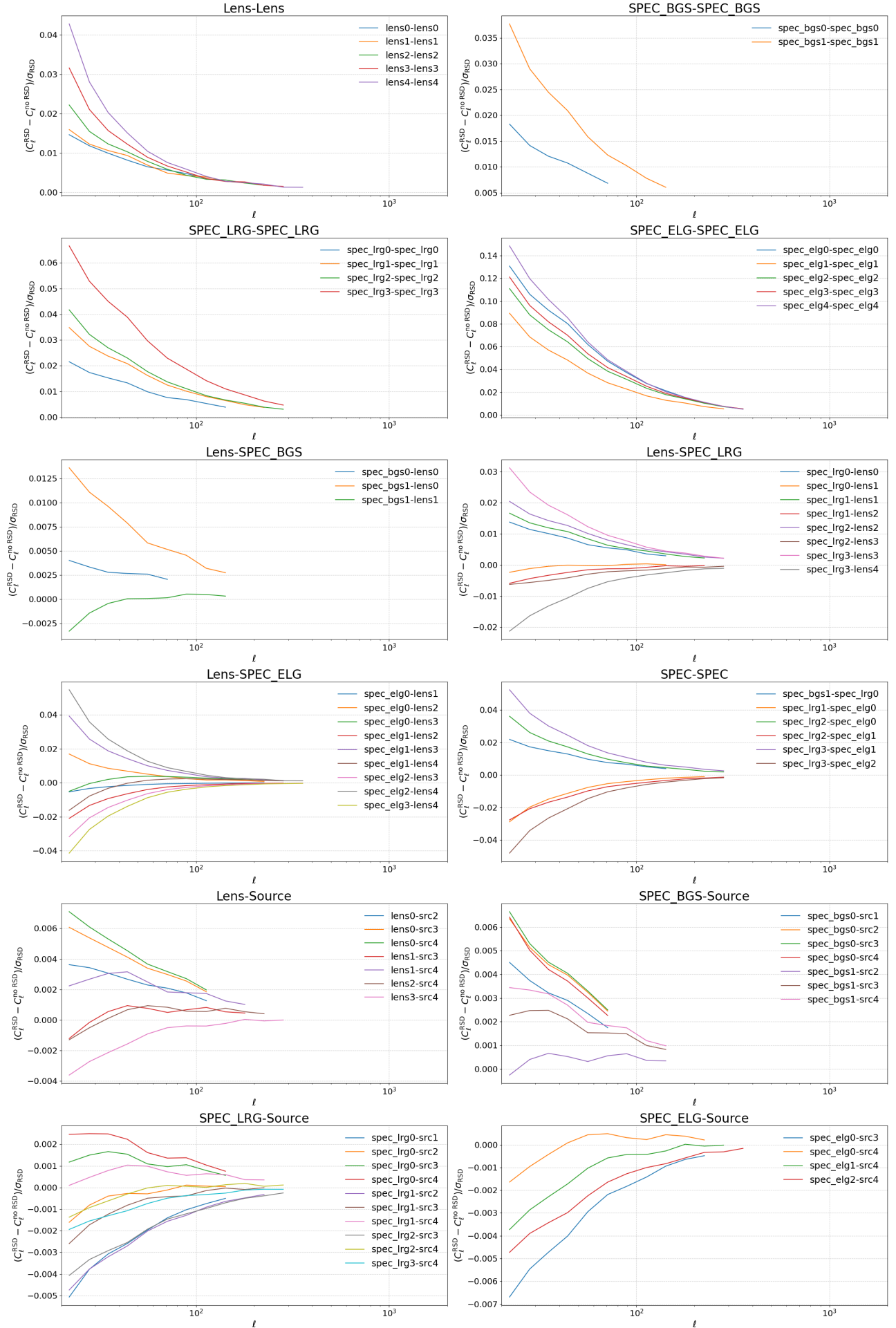


Figura 47 – Diferença absoluta entre os vetores de dados com e sem a inclusão do efeito de RSD, normalizada pelo desvio padrão do ruído teórico correspondente a cada observável de galaxy clustering no vetor 6x2pt.

Capítulo 6

Conclusões e próximos passos

Neste trabalho, realizamos uma análise da metodologia 6x2pt, que combina dados fotométricos do LSST com levantamentos espectroscópicos do DESI e do 4MOST, com o objetivo de quantificar os ganhos na determinação dos parâmetros cosmológicos e de nuisance em comparação à análise "standard"(3x2pt), mais comumente utilizada pela comunidade científica. Nossa abordagem considerou diferentes cenários cosmológicos (Λ CDM, w_0w_a CDM e Λ CDM + $\sum m_\nu$) e incluiu a não marginalização sobre parâmetros de nuisance, contemplando incertezas na calibração das distribuições de redshift (Δz , σ_z) para ambas as amostras fotométricas (lentes e fontes), além de parâmetros associados a sistemáticos, como o bias das galáxias e os parâmetros de alinhamento intrínseco. Note, porém, que apesar dessas considerações, adotamos uma metodologia preliminar, utilizando uma matriz de covariância simplificada (assumindo somente um valor de f_{sky}) e desconsiderando o cross noise entre as medidas de galaxy clustering das amostras espectroscópica e fotométrica, com o objetivo de facilitar o cálculo e o tratamento computacional e numérico durante a análise. Assim, todos os resultados apresentados devem ser interpretados como comparações relativas entre cenários de "mesma ordem de grandeza", e não como previsões realistas do que se espera obter com dados observacionais.

Apesar dessas limitações, concluímos que a inclusão de uma amostra espectroscópica global — composta por BGS, LRG e ELG — é fundamental para calibrar, por meio de correlações cruzadas, todos os bins das amostras fotométricas do LSST. Cada população espectroscópica desempenha um papel específico na calibração dos bins: a BGS é particularmente eficaz nos primeiros bins, a LRG nos bins intermediários e a ELG nos bins mais profundos. Em termos de parâmetros cosmológicos, observamos que as amostras LRG e ELG são mais eficientes do que a BGS para fortalecer os vínculos, devido ao seu range de redshift. Como perspectiva futura para esta análise, destaca-se a possibilidade de se estender o estudo para avaliar o impacto da inclusão das amostras de quasares e de Lyman- α quasares do DESI. Embora a amostra ELG já cubra adequadamente a faixa de redshift das amostras do LSST — sendo suficiente para a calibração dos parâmetros fotométricos —, a inclusão desses alvos adicionais pode reforçar ainda

mais o poder vinculante sobre os parâmetros cosmológicos, uma vez que exploram redshifts mais elevados (até $z \sim 2,1$ para quasares e acima de $z \sim 2,1$ para Lyman- α).

Em seguida, avaliamos qual amostra espectroscópica global — entre DESI e 4MOST — apresenta melhor sinergia com o LSST na análise 6x2pt. Inicialmente, ao considerarmos apenas o poder vinculante nas regiões de overlap com o LSST, o 4MOST aparenta apresentar um poder vinculante ligeiramente superior. No entanto, essa diferença é sutil: mesmo com uma área de overlap aproximadamente 1,875 vezes menor, o DESI ainda atinge um nível de restrição similar ao do 4MOST. Nesse sentido, motivado pela proposta de expansão da área de overlap do DESI com o LSST, concluímos que um aumento de apenas 1000 deg² já colocaria o DESI em igualdade de desempenho com o 4MOST. Além disso, ao se considerar um f_{sky} de overlap equivalente, a amostra do DESI passa a superar os vínculos obtidos. Assim, concluímos que a amostra do DESI apresenta maior sinergia com o LSST, especialmente possíveis cenários futuros com maior área de sobreposição. Note que essa análise foi realizada apenas na região de overlap entre as amostras; assim, como perspectiva futura, torna-se necessária uma avaliação mais abrangente, considerando todas as regiões do céu cobertas pelo LSST e pelo DESI/4MOST, para então definir de forma quantitativa qual amostra apresenta a melhor sinergia — embora já se espere que o DESI se destaque como a opção superior.

No contexto de diferentes modelos cosmológicos, a análise 6x2pt apresentou ganhos significativos nos vínculos dos parâmetros em comparação à análise 3x2pt com parâmetros de nuisance, alcançando níveis próximos aos obtidos na análise tradicional 3x2pt sem esses parâmetros adicionais. Além disso, observou-se uma melhora expressiva nos próprios vínculos dos parâmetros de nuisance, conforme já indicado em análises anteriores. Nos três modelos avaliados, os ganhos foram semelhantes, com pequenas variações entre eles. No caso do w_0w_a CDM, algumas degenerescências previamente mitigadas voltam a aparecer, resultando em contornos menos restritivos em comparação ao tradicional Λ CDM — embora ainda próximos aos resultados da análise 3x2pt sem nuisance. Por outro lado, observa-se um ganho significativo na quebra da degenerescência entre os parâmetros Δz e w_0w_a . Já a inclusão de neutrinos massivos não altera de forma significativa os vínculos sobre os demais parâmetros cosmológicos em relação ao Λ CDM; o principal destaque é a melhora sutil nos vínculos sobre a soma das massas dos neutrinos, além de um ganho relevante na redução das degenerescências entre esses parâmetros e σ_8 e o bias das galáxias.

Já a análise do impacto de bins espectroscópicos mais finos revelou que a adoção de comprimentos de bin menores ($\Delta z = 0,1$ e $\Delta z = 0,05$) proporciona ganhos sutis em relação à análise previamente feita com $\Delta z = 0,2$, especialmente nos parâmetros σ_8 , σ_z e b . No entanto, esses ganhos vêm acompanhados de um custo computacional elevado na geração do vetor de dados e são limitados pela validade da aproximação de Limber em bins tão estreitos.

Por fim, quanto ao impacto do efeito de RSD na análise 6x2pt, concluímos que, embora sua exclusão não afete diretamente a precisão dos parâmetros estimados, ela pode introduzir

vieses que comprometem a acurácia da análise. Como perspectiva futura, a incorporação do cálculo de Fisher bias na pipeline será essencial para quantificar, de forma robusta, o viés induzido pela ausência do RSD no modelo teórico.

Para o futuro deste trabalho, planejamos adotar uma matriz de covariância mais robusta, incorporando não apenas diferentes valores de f_{sky} , mas também termos não-Gaussianos e contribuições de super-sample covariance (SSC). Além disso, torna-se essencial um tratamento cuidadoso do cross-noise, que foi desconsiderado neste trabalho. Uma possível abordagem consiste em realizar uma seleção no espaço de cor para cada uma das amostras, com o objetivo de remover galáxias presentes simultaneamente nos dois levantamentos (LSST e DESI). Outra adição relevante é a substituição da aproximação de Limber, especialmente nas análises de binnings mais finos — já que essa aproximação suaviza parte significativa dos sinais nas correlações com pouco overlap — e nas análises de impacto de RSD, dado que os efeitos de RSD introduzem correlações em redshift que também são suprimidas por essa aproximação. Por fim, a inclusão de efeitos não lineares de RSD constitui outro aspecto importante a ser investigado na nossa análise 6x2pt.

De modo geral, apesar de adotarmos uma abordagem simplificada, este trabalho representa um ponto de partida promissor para explorar os potenciais ganhos que sua aplicação pode trazer não apenas para as análises realizadas pelo LSST, mas também para a cosmologia observacional como um todo.

Apêndice A

Demonstração da relação entre a função de correlação e o espectro de potência

Neste apêndice, demonstramos a relação entre a função de correlação espacial $\xi(r)$ e o espectro de potência $\mathcal{P}(k)$, apresentada na equação (2.120) do texto principal. Essa relação decorre da transformada de Fourier tridimensional da função de correlação, considerando as simetrias de translação e rotação do espaço.

Começamos pela definição da função de correlação no espaço de Fourier:

$$\langle \delta(\mathbf{k}) \delta^*(\mathbf{k}') \rangle = \int d^3x d^3x' e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}'} \langle \delta(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}') \rangle. \quad (\text{A.1})$$

Fazendo a mudança de variável $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ e mantendo $\mathbf{x}'$ fixa, temos:

$$\langle \delta(\mathbf{k}) \delta^*(\mathbf{k}') \rangle = \int d^3r d^3x' e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}'} \xi(\mathbf{r}), \quad (\text{A.2})$$

onde definimos que $\langle \delta(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}') \rangle = \xi(\mathbf{r})$. A integral sobre $\mathbf{x}'$ nos dá uma função delta de Dirac tridimensional:

$$\int d^3x' e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}'} = (2\pi)^3 \delta_D^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (\text{A.3})$$

Portanto, obtemos:

$$\langle \delta(\mathbf{k}) \delta^*(\mathbf{k}') \rangle = (2\pi)^3 \delta_D^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \int d^3r e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \xi(r) \equiv (2\pi)^3 \delta_D^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \mathcal{P}(k). \quad (\text{A.4})$$

A função $\mathcal{P}(k)$, chamada de espectro de potência, é então definida como a transformada de Fourier tridimensional da função de correlação $\xi(r)$:

$$\mathcal{P}(k) = \int d^3r e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \xi(r). \quad (\text{A.5})$$

Como a função de correlação depende apenas da distância $r = |\mathbf{r}|$ devido à invariância rotacional, podemos escrever a integral em coordenadas esféricas. Usando que $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kr \cos \theta$, temos:

$$\mathcal{P}(k) = \int d^3r \xi(r) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (\text{A.6})$$

$$= \int_0^\infty dr r^2 \xi(r) \int_{-1}^1 d(\cos \theta) e^{-ikr \cos \theta} \int_0^{2\pi} d\varphi \quad (\text{A.7})$$

$$= 2\pi \int_0^\infty dr r^2 \xi(r) \int_{-1}^1 d(\cos \theta) e^{-ikr \cos \theta} \quad (\text{A.8})$$

$$= 2\pi \int_0^\infty dr r^2 \xi(r) \cdot \frac{2 \sin(kr)}{kr} \quad (\text{A.9})$$

$$= \frac{4\pi}{k} \int_0^\infty dr r \sin(kr) \xi(r). \quad (\text{A.10})$$

Assim, obtemos a equação (2.120) do texto principal:

$$\mathcal{P}(k) = \frac{4\pi}{k} \int_0^\infty dr r \sin(kr) \xi(r). \quad (\text{A.11})$$

Apêndice B

Derivação das expressões para os coeficientes multipolares

Neste apêndice, apresentamos a identidade matemática conhecida como *expansão de onda plana de Rayleigh*, essencial para expressar uma exponencial complexa $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ em termos de harmônicos esféricos e funções esféricas de Bessel. Essa expansão desempenha um papel fundamental na cosmologia, especialmente na análise de projeções angulares sobre a esfera celeste, como ocorre nas expressões para os coeficientes $A_{\ell m}$ e $B_{\ell m}$ definidas nas equações (3.5) e (3.6).

Para compreendermos a manipulação dessas expressões, é importante conhecer a forma explícita dessa expansão, que é dada por:

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\chi}} = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} i^{\ell} j_{\ell}(k\chi) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}), \quad (\text{B.1})$$

onde $j_{\ell}(k\chi)$ é a função esférica de Bessel de ordem ℓ , $Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}})$ são os harmônicos esféricos,

Essa expansão é particularmente útil ao integrarmos expressões que envolvem produtos de exponenciais com harmônicos esféricos, pois permite usar a seguinte ortonormalidade:

$$\int d\Omega Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{n}}) Y_{\ell' m'}(\hat{\mathbf{n}}) = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}. \quad (\text{B.2})$$

Nesse sentido, vamos detalhar o processo que leva das equações (3.5) e (3.6) até as expressões finais (B.8) e (3.9). Para isso, iniciamos reescrevendo explicitamente as equações (3.5) e (3.6):

$$A_{\ell m} = \int d\Omega \left[\int_0^{\infty} d\chi F_A(\chi) \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k A(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\chi\hat{\mathbf{n}}} \right] Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{n}}), \quad (\text{B.3})$$

$$B_{\ell'm'}^* = \int d\Omega' \left[\int_0^\infty d\chi' F_B(\chi') \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k' B^*(\mathbf{k}') e^{-i\mathbf{k}' \cdot \chi' \hat{\mathbf{n}}'} \right] Y_{\ell'm'}(\hat{\mathbf{n}}'). \quad (\text{B.4})$$

Em seguida aplicamos a expansão de onda plana de Rayleigh nessas equações obtendo os seguintes resultados

$$A_{\ell m} = 4\pi \sum_{\ell_1=0}^{\infty} \sum_{m_1=-\ell_1}^{\ell_1} i^{\ell_1} \int d\Omega \left[\int_0^\infty d\chi F_A(\chi) j_{\ell_1}(k\chi) \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k A(\mathbf{k}) \right] Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{n}}) Y_{\ell_1 m_1}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{\ell_1 m_1}(\hat{\mathbf{n}}), \quad (\text{B.5})$$

$$B_{\ell'm'}^* = 4\pi \sum_{\ell_2=0}^{\infty} \sum_{m_2=-\ell_2}^{\ell_2} i^{-\ell_2} \int d\Omega' \left[\int_0^\infty d\chi' F_B(\chi') j_{\ell_2}(k\chi) \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k' B^*(\mathbf{k}') \right] Y_{\ell'm'}(\hat{\mathbf{n}}') Y_{\ell_2 m_2}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{\ell_2 m_2}^*(\hat{\mathbf{n}}). \quad (\text{B.6})$$

Utilizando a relação de ortonormalidade B.2, temos:

$$A_{\ell m} = \frac{i^\ell}{2\pi^2} \int d^3k A(\mathbf{k}) Y_{\ell m}^*(\hat{k}) \left[\int_0^\infty d\chi F_A(\chi) j_\ell(k\chi) \right], \quad (\text{B.7})$$

$$B_{\ell'm'}^* = \frac{i^{-\ell'}}{2\pi^2} \int d^3k' B^*(\mathbf{k}') Y_{\ell'm'}(\hat{k}') \left[\int_0^\infty d\chi' F_B(\chi') j_{\ell'}(k'\chi') \right]. \quad (\text{B.8})$$

resultando assim, na equação (B.8) e (3.9).

Apêndice C

Derivação da Matriz de Fisher para uma Likelihood Gaussiana

Neste apêndice, apresentamos a demonstração detalhada da equação (4.15), que define a matriz de Fisher no caso em que a função de *likelihood* é assumida como uma Gaussiana multivariada.

Iniciamos considerando o logaritmo da função de *likelihood* definida na equação (4.12), cuja forma explícita é:

$$\ln \mathcal{L}(\mathbf{d}|\boldsymbol{\theta}) = -\frac{1}{2}(\mathbf{d} - \boldsymbol{\mu})^\top \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{d} - \boldsymbol{\mu}) - \frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln[\det \mathbf{C}], \quad (\text{C.1})$$

em que $\boldsymbol{\mu} = \langle \mathbf{d} \rangle$ representa o vetor de médias teóricas dos observáveis, calculado a partir dos parâmetros $\boldsymbol{\theta}$, e $\mathbf{C}$ é a matriz de covariância associada aos dados.

Como mostrado na equação (4.14), a matriz de Fisher é definida como o valor esperado da curvatura negativa da log-*likelihood*:

$$F_{ij} = - \left\langle \frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right\rangle. \quad (\text{C.2})$$

Para avançar com o cálculo, é conveniente reescrever o termo quadrático da log-*likelihood* utilizando somatórios explícitos:

$$\ln \mathcal{L} = -\frac{1}{2} \sum_{a=1}^{N_d} \sum_{b=1}^{N_d} (d_a - \mu_a) C_{ab}^{-1} (d_b - \mu_b) - \frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln[\det \mathbf{C}]. \quad (\text{C.3})$$

Em seguida, derivamos essa expressão em relação a um dos parâmetros θ_i , obtendo:

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \theta_i} = \sum_{a,b} \left\{ \frac{\partial \mu_a}{\partial \theta_i} C_{ab}^{-1} (d_b - \mu_b) + \frac{1}{2} (d_a - \mu_a) C_{ac}^{-1} \frac{\partial C_{cd}}{\partial \theta_i} C_{db}^{-1} (d_b - \mu_b) - \frac{1}{2} \text{Tr} \left[C^{-1} \frac{\partial C}{\partial \theta_i} \right] \right\}. \quad (\text{C.4})$$

Para obter essa equação, utilizamos as seguintes identidades matriciais:

$$\frac{d\mathbf{C}^{-1}}{d\theta} = -\mathbf{C}^{-1} \frac{d\mathbf{C}}{d\theta} \mathbf{C}^{-1}, \quad (\text{C.5})$$

$$\frac{d \ln \det \mathbf{C}}{d\theta} = \text{Tr} \left(\mathbf{C}^{-1} \frac{d\mathbf{C}}{d\theta} \right). \quad (\text{C.6})$$

Dando continuidade, tomamos a segunda derivada da equação (C.4), resultando em:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = & \sum_{a=1}^{N_d} \sum_{b=1}^{N_d} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \mu_a}{\partial \theta_i \partial \theta_j} C_{ab}^{-1} - \frac{\partial \mu_a}{\partial \theta_i} C_{ac}^{-1} \frac{\partial C_{cd}}{\partial \theta_j} C_{db}^{-1} \right) (d_b - \mu_b) - \frac{\partial \mu_a}{\partial \theta_i} C_{ab}^{-1} \frac{\partial \mu_b}{\partial \theta_j} \right. \\ & - \frac{1}{2} \frac{\partial \mu_a}{\partial \theta_j} C_{ac}^{-1} \frac{\partial C_{cd}}{\partial \theta_i} C_{db}^{-1} (d_b - \mu_b) - \frac{1}{2} (d_a - \mu_a) \left[C_{ac}^{-1} \frac{\partial C_{cd}}{\partial \theta_j} C_{de}^{-1} \frac{\partial C_{ef}}{\partial \theta_i} C_{fb}^{-1} \right. \\ & \left. \left. - C_{ac}^{-1} \frac{\partial^2 C_{cd}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} C_{db}^{-1} + C_{ac}^{-1} \frac{\partial C_{cd}}{\partial \theta_i} C_{de}^{-1} \frac{\partial C_{ef}}{\partial \theta_j} C_{fb}^{-1} \right] (d_b - \mu_b) - \frac{1}{2} (d_a - \mu_a) C_{ac}^{-1} \frac{\partial C_{cd}}{\partial \theta_i} C_{db}^{-1} \frac{\partial \mu_b}{\partial \theta_j} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} C_{ac}^{-1} \frac{\partial C_{cd}}{\partial \theta_j} C_{de}^{-1} \frac{\partial C_{eb}}{\partial \theta_i} - \frac{1}{2} C_{ac}^{-1} \frac{\partial^2 C_{cb}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Para prosseguir com a derivação da matriz de Fisher, é necessário calcular o valor esperado da expressão acima, avaliado no ponto fiducial $\boldsymbol{\theta}_0$. Neste contexto, utilizamos a definição de covariância $\langle (d_a - \mu_a)(d_b - \mu_b) \rangle = C_{ab}$, a qual permite transformar os termos quadráticos em traços. Além disso, como $\langle \mathbf{d} \rangle = \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta}_0)$, os termos proporcionais a $\langle \mathbf{d} - \boldsymbol{\mu} \rangle$ se anulam.

Com isso, obtemos:

$$\begin{aligned} 2 \left\langle \frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right\rangle_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} = & -2 \text{Tr} \left[\frac{\partial \boldsymbol{\mu}^\top}{\partial \theta_i} \mathbf{C}^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial \theta_j} \right] - \text{Tr} \left[\mathbf{C}^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \theta_j} \mathbf{C}^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \theta_i} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{C} \right] \\ & + \text{Tr} \left[\mathbf{C}^{-1} \frac{\partial^2 \mathbf{C}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{C} \right] - \text{Tr} \left[\mathbf{C}^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \theta_i} \mathbf{C}^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \theta_j} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{C} \right] \\ & + \text{Tr} \left[\mathbf{C}^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \theta_j} \mathbf{C}^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \theta_i} \right] - \text{Tr} \left[\mathbf{C}^{-1} \frac{\partial^2 \mathbf{C}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right] \\ = & -2 \text{Tr} \left[\frac{\partial \boldsymbol{\mu}^\top}{\partial \theta_i} \mathbf{C}^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial \theta_j} \right] - \text{Tr} \left[\mathbf{C}^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \theta_i} \mathbf{C}^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \theta_j} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Finalmente, obtemos a expressão compacta para a matriz de Fisher, no caso de uma *likelihood* Gaussiana:

$$F_{ij} = \frac{\partial \boldsymbol{\mu}^\top}{\partial \theta_i} \mathbf{C}^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial \theta_j} + \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\mathbf{C}^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \theta_i} \mathbf{C}^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \theta_j} \right]. \quad (\text{C.9})$$

Referências

- ABAZAJIAN, K. N. et al. The seventh data release of the sloan digital sky survey. *Astrophysical Journal Supplement Series*, v. 182, p. 543–558, 2009. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/0067-0049/182/2/543>.
- ABBOTT, T. M. C. e. a. Dark energy survey year 3 results: Cosmological constraints from galaxy clustering and weak lensing. *Phys. Rev. D*, v. 105, p. 023520, 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.105.023520>.
- ABDUL-KARIM, D. et al. Data release 1 of the dark energy spectroscopic instrument. *arXiv preprint*, 2025. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2503.14745>.
- AGHAMOUSA, A. et al. The desi experiment part i: Science, targeting, and survey design. *arXiv e-prints*, 2016. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1611.00036>.
- AGHANIM, N. et al. Planck 2018 results: I. overview and the cosmological legacy of planck. *Astronomy and Astrophysics*, v. 641, p. A1, 2020.
- AHUMADA, R. et al. The 16th data release of the sloan digital sky surveys: First release from the apogee-2 southern survey and full release of eboss spectra. *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, v. 249, p. 3, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.3847/1538-4365/ab929e>.
- ALAM, S. et al. The eleventh and twelfth data releases of the sloan digital sky survey: Final data from sdss-iii. *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, v. 219, p. 12, 2015. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/0067-0049/219/1/12>.
- ALURI, P. K. et al. Is the observable universe consistent with the cosmological principle? *Classical and Quantum Gravity*, v. 40, p. 094001, 2023.
- ASOREY, J. et al. Recovering 3d clustering information with angular correlations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 427, p. 1891–1902, 2012.
- BALDAUF, T. et al. Halo stochasticity from exclusion and nonlinear clustering. *Physical Review D*, v. 88, p. 083507, 2013. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.88.083507>.
- BARREIRA, A.; KRAUSE, E.; SCHMIDT, F. Accurate cosmic shear errors: do we need ensembles of simulations? *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2018, n. 10, p. 053, 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/1475-7516/2018/10/053>.
- BAUMANN, D. *Cosmology*. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2022. ISBN 978-1-108-83807-8.

- BAXTER, E. J. et al. *Snowmass2021: Opportunities from Cross-survey Analyses of Static Probes*. 2022. ArXiv preprint arXiv:2203.06795. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2203.06795>.
- BLAKE, C.; BRIDLE, S. Cosmology with photometric redshift surveys. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, v. 363, p. 1329–1348, 2005. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-2966.2005.09526.x>.
- BLAZEK, J. A. et al. *Snowmass2021 Cosmic Frontier White Paper: Enabling Flagship Dark Energy Experiments to Reach their Full Potential*. 2022. ArXiv:2204.01992 [astro-ph.CO]. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2204.01992>.
- BLAZEK, J. A. et al. Beyond linear galaxy alignments. *Phys. Rev. D*, v. 100, p. 103506, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.100.103506>.
- BLUM, B. et al. *Snowmass2021 Cosmic Frontier White Paper: Rubin Observatory after LSST*. 2022. ArXiv preprint arXiv:2203.07220. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2203.07220>.
- BOLTON, A. S.; AL. et. *Maximizing the Joint Science Return of LSST and DESI*. 2018. LSST Docushare White Paper, Document-30603. Disponível em: https://docushare.lsst.org/docushare/dsweb/Get/Document-30603/bolton_desi_overlap_mini.pdf.
- BRIDLE, S.; KING, L. Dark energy constraints from cosmic shear power spectra: impact of intrinsic alignments on photometric redshift requirements. *New J. Phys.*, v. 9, p. 444, 2007. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/1367-2630/9/12/444>.
- CAMERA, S. et al. Optimized angular power spectra for spectroscopic galaxy surveys. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 481, n. 1, p. 1251–1261, 2018. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1093/mnras/sty2284>.
- CAMPAGNE, J.-E.; PLASZCZYNSKI, S.; NEVEU, J. The galaxy count correlation function in redshift space revisited. *Astrophysical Journal*, v. 845, n. 1, p. 28, 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.3847/1538-4357/aa7cf8>.
- CARLILES, S. et al. Random forests for photometric redshifts. *Astrophys. J.*, v. 712, p. 511–515, 2010. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/0004-637X/712/1/511>.
- CATELAN, P.; KAMIONKOWSKI, M.; BLANDFORD, R. D. Intrinsic and extrinsic galaxy alignment. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, v. 320, p. L7–L13, 2001. Disponível em: <https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.2001.04105.x>.
- CHANG, C. et al. The effective number density of galaxies for weak lensing measurements in the lsst project. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 434, p. 2121–2135, 2013.
- CHEVALLIER, M.; POLARSKI, D. Accelerating universes with scaling dark matter. *International Journal of Modern Physics D*, v. 10, n. 02, p. 213–223, 2001. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1142/S0218271801000822>.
- CHIARENZA, S. et al. Blast: Beyond limber angular power spectra toolkit. a fast and efficient algorithm for 3x2 pt analysis. *arXiv preprint*, 2024. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2410.03632>.
- CHISARI, N. E.; AL. et. Core cosmology library: Precision cosmological predictions for lsst. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, American Astronomical Society, v. 242, n. 1, p. 2, may 2019. Acesso em: 21 maio 2025. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.3847/1538-4365/ab1658>.

COLE, S. et al. The 2df galaxy redshift survey: Power-spectrum analysis of the final data set and cosmological implications. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 362, p. 505–534, 2005.

COLLESS, M. et al. The 2df galaxy redshift survey: Final data release. 2003. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/astro-ph/0306581>.

COLLISTER, A. A.; LAHAV, O. Annz: Estimating photometric redshifts using artificial neural networks. *Publ. Astron. Soc. Pac.*, v. 116, p. 345–351, 2004. Disponível em: <https://doi.org/10.1086/383254>.

Dark Energy Survey Collaboration. *Dark Energy Survey Year 3: 3×2pt Analysis*. Disponível em <https://www.darkenergysurvey.org/3x2pt/>, acessado em maio de 2025.

DESI Collaboration. The desi experiment part i: Science, targeting, and survey design. 2016. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1611.00036>.

DESI Collaboration. *Data for figures and tables in "Validation of the Scientific Program for the Dark Energy Spectroscopic Instrument"*. Zenodo, 2023. Disponível em: <https://zenodo.org/doi/10.5281/zenodo.7858207>.

DESI Collaboration; AL., A. G. A. et. Desi 2024 vi: Cosmological constraints from the measurements of baryon acoustic oscillations. 2024. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2404.03002>.

DESI Collaboration A. G. ADAME, J. A. S. A. e. a. Desi 2024 vii: Cosmological constraints from the full-shape modeling of clustering measurements. 2024. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2411.12022>.

DESJACQUES, V.; JEONG, D.; SCHMIDT, F. Large-scale galaxy bias. *Phys. Rep.*, v. 733, p. 1–193, 2018. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2017.12.002>.

DODELSON, S.; SCHMIDT, F. *Modern Cosmology*. 2. ed. London, United Kingdom; San Diego, CA: Academic Press, an imprint of Elsevier, 2021. ISBN 978-0-12-815948-4.

ERIKSEN, M.; GAZTAÑAGA, E. Combining spectroscopic and photometric surveys using angular cross-correlations – ii. parameter constraints from different physical effects. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 452, n. 2, p. 2168–2184, 2015. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1093/mnras/stv1075>.

Euclid Collaboration. Euclid. i. overview of the euclid mission. *arXiv preprint*, 2024. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2405.01609>.

FELDBRUGGE, J. Complex evaluation of angular power spectra: Going beyond the limber approximation. *arXiv preprint*, 2023. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2304.13064>.

FERRI, J. V. D. *Cosmologia no cone de luz: o espectro angular no espaço de redshift, o espectro de potência no espaço de Fourier e mocks do cone de luz*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Instituto de Física, Universidade de São Paulo, 2022.

FREEDMAN, W. L. Measurements of the hubble constant: Tensions in perspective. *The Astrophysical Journal*, v. 919, p. 16, 2021.

GARCÍA-GARCÍA, C. L. et al. Tjpcov. in preparation. Disponível em: <https://github.com/LSSTDESC/TJPCov>.

- GAZTAÑAGA, E. et al. Cross-correlation of spectroscopic and photometric galaxy surveys: cosmology from lensing and redshift distortions. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 422, n. 4, p. 2904–2930, 2012. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-2966.2012.20613.x>.
- GONZALEZ, J. V. et al. Inflationary cosmology: from theory to observations. *Revista Mexicana de Física E*, Sociedad Mexicana de Física A C, v. 17, n. 1 Jan-Jun, p. 73–91, jan. 2020. ISSN 1870-3542. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.31349/RevMexFisE.17.73>.
- HAMILTON, A. J. S. Linear redshift distortions: A review. In: *The Evolving Universe*. Springer Netherlands, 1998. p. 185–275. Disponível em: https://doi.org/10.1007/978-94-011-4960-0_17.
- HARRISON, E. *Phys. rev. d*. v. 1, p. 2726–2730, 1970.
- HIRATA, C. M.; SELJAK, U. Erratum: Intrinsic alignment-lensing interference as a contaminant of cosmic shear [phys. rev. d 70, 063526 (2004)]. *Phys. Rev. D*, v. 82, p. 049901, 2010. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.82.049901>.
- HUBBLE, E. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 15, p. 168–173, 1929.
- HUTERER, D. *A Course in Cosmology: From Theory to Practice*. 1st. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2023. ISBN 978-1-316-51359-0, 978-1-00-908224-2.
- IVEZIĆ Željko et al. Lsst: From science drivers to reference design and anticipated data products. *The Astrophysical Journal*, v. 873, n. 2, p. 111, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.3847/1538-4357/ab042c>.
- JAROSIK, N. et al. Seven-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: Sky maps, systematic errors, and basic results. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, v. 192, p. 14, 2011.
- JOACHIMI, B. et al. Kids-1000 methodology: Modelling and inference for joint weak gravitational lensing and spectroscopic galaxy clustering analysis. *Astronomy & Astrophysics*, v. 646, p. A129, 2021.
- JOHNSTON, H. et al. *6x2pt: Forecasting gains from joint weak lensing and galaxy clustering analyses with spectroscopic-photometric galaxy cross-correlations*. 2024. ArXiv preprint arXiv:2409.17377. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2409.17377>.
- JONG, J. T. A. de et al. The kilo-degree survey. *Experimental Astronomy*, Springer Science and Business Media LLC, v. 35, n. 1–2, p. 25–44, ago. 2012. ISSN 1572-9508. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/s10686-012-9306-1>.
- JONG, J. T. A. de et al. The kilo-degree survey. *Experimental Astronomy*, v. 35, n. 1–2, p. 25–44, 2012. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s10686-012-9306-1>.
- JONG, R. S. D.; AL. et. 4most: Project overview and information for the first call for proposals. *The Messenger*, v. 175, p. 3–11, mar 2019. Acesso em: 21 maio 2025. Disponível em: <https://doi.org/10.18727/0722-6691/5117>.
- JOUDAKI, S. et al. Kids-450 + 2df lens: Cosmological parameter constraints from weak gravitational lensing tomography and overlapping redshift-space galaxy clustering. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 474, p. 4894–4924, 2017.

- KAISER, N. Clustering in real space and in redshift space. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, v. 227, p. 1–21, 1987. Disponível em: <https://doi.org/10.1093/mnras/227.1.1>.
- KIRK, D. et al. Optimizing spectroscopic and photometric galaxy surveys: same-sky benefits for dark energy and modified gravity. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 451, n. 4, p. 4424–4444, 2015. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1093/mnras/stv1268>.
- KRAUSE, E. et al. *Dark Energy Survey Year 1 Results: Multi-Probe Methodology and Simulated Likelihood Analyses*. 2017. ArXiv preprint arXiv:1706.09359. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1706.09359>.
- KRYWONOS, J.; MUIR, J.; JOHNSON, M. C. Improving photometric galaxy clustering constraints with cross-bin correlations. *Phys. Rev. D*, v. 110, p. 083533, 2024. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.110.083533>.
- LAPPARENT, V. de; GELLER, M. J.; HUCHRA, J. P. A slice of the universe. *Astrophys. J. Lett.*, v. 302, p. L1, 1986. Disponível em: <https://doi.org/10.1086/184625>.
- LEMAÎTRE, G. Un univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques. *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, v. 47, p. 49–59, 1927. English translation in *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 91, 483 (1931).
- LEONARD, C. D. et al. The n5k challenge: Non-limber integration for lsst cosmology. *Open J. Astrophys.*, v. 6, 2023. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.21105/astro.2212.04291>.
- LEWIS, A.; CHALLINOR, A. *CAMB: Code for Anisotropies in the Microwave Background*. 2011. *Astrophysics Source Code Library*, record ascl:1102.026. Disponível em: <https://ascl.net/1102.026>.
- LIMBER, D. N. The analysis of counts of the extragalactic nebulae in terms of a fluctuating density field. *Astrophys. J.*, v. 117, p. 134, 1953.
- LOUREIRO, A. et al. Cosmological measurements from angular power spectra analysis of boss dr12 tomography. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 485, n. 1, p. 326–355, 2019. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1093/mnras/stz191>.
- LOVERDE, M.; AFSHORDI, N. Extended limber approximation. *Phys. Rev. D*, v. 78, p. 123506, 2008. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.78.123506>.
- LSST Dark Energy Science Collaboration. *Large Synoptic Survey Telescope: Dark Energy Science Collaboration*. 2012. ArXiv preprint arXiv:1211.0310. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1211.0310>.
- LSST Science Collaboration. *LSST Science Book, Version 2.0*. 2009. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/0912.0201>.
- MANDELBAUM, R. Weak lensing for precision cosmology. *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, v. 56, p. 393–433, 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1146/annurev-astro-081817-051928>.
- MANDELBAUM, R. et al. *Wide-field Multi-object Spectroscopy to Enhance Dark Energy Science from LSST*. 2019. ArXiv preprint arXiv:1903.09323. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1903.09323>.
- MANDELBAUM, R.; EIFLER, T. et al. *The LSST Dark Energy Science Collaboration (DESC) Science Requirements Document*. 2021. ArXiv preprint arXiv:1809.01669.

- MASTERS, D. et al. Mapping the galaxy color–redshift relation: Optimal photometric redshift calibration strategies for cosmology surveys. *Astrophys. J.*, v. 813, p. 53, 2015. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/0004-637X/813/1/53>.
- MATTHEWS, D. J.; NEWMAN, J. A. Improving correlation function fitting with ridge regression: Application to cross-correlation reconstruction. *Astrophys. J.*, v. 745, p. 180, 2012. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1088/0004-637X/745/2/180>.
- MCLEOD, M.; BALAN, S. T.; ABDALLA, F. B. A joint analysis for cosmology and photometric redshift calibration using cross-correlations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 466, n. 3, p. 3558–3568, 2016. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1093/mnras/stw2989>.
- MCQUINN, M.; WHITE, M. On using angular cross-correlations to determine source redshift distributions. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, v. 433, p. 2857–2883, 2013. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1093/mnras/stt914>.
- MEAD, A. J. et al. An accurate halo model for fitting non-linear cosmological power spectra and baryonic feedback models. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 454, n. 2, p. 1958–1975, oct 2015. Disponível em: <https://doi.org/10.1093/mnras/stv2036>.
- MORAES, B. A. L. Mapeamentos de galáxias. *Cadernos de Astronomia*, v. 5, n. 1, p. 39–65, 2024. Disponível em: <https://doi.org/10.47456/Cad.Astro.v5n1.43769>.
- NEWMAN, J. A. Calibrating redshift distributions beyond spectroscopic limits with cross-correlations. *The Astrophysical Journal*, v. 684, p. 88–101, 2008. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1086/589982>.
- NEWMAN, J. A.; AL. et. Spectroscopic needs for imaging dark energy experiments. *Astroparticle Physics*, v. 63, p. 81–100, 2015. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.astropartphys.2014.06.007>.
- NEWMAN, J. A.; GRUEN, D. Photometric redshifts for next-generation surveys. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, v. 60, p. 363–414, 2022. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1146/annurev-astro-032122-014611>.
- PADMANABHAN, N.; OTHERS. The clustering of luminous red galaxies in the sloan digital sky survey imaging data. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, v. 378, p. 852–872, 2007. Disponível em: <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2007.11593.x>.
- PAGANIN, L. E. et al. *Euclid preparation: 6x2 pt analysis of Euclid’s spectroscopic and photometric data sets*. 2024. ArXiv preprint arXiv:2409.18882. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2409.18882>.
- PEEBLES, P.; YU, J. *Astrophys. j.* v. 162, p. 815–836, 1970.
- PERLMUTTER, S. et al. Cosmology from type ia supernovae. *arXiv preprint astro-ph/9812473*, 1998.
- PIATTELLA, O. F. *Lecture Notes in Cosmology*. Springer International Publishing, 2018. (UNITEXT for Physics). Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-95570-4>.
- PRAT, J.; BACON, D. *Weak Gravitational Lensing*. 2025. ArXiv preprint arXiv:2501.07938. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2501.07938>.

- PRAT, J. et al. The catalog-to-cosmology framework for weak lensing and galaxy clustering for lsst. *The Open Journal of Astrophysics*, v. 6, 2023. Disponível em: <https://doi.org/10.21105/astro.2212.09345>.
- RICHARD, J. et al. 4most consortium survey 8: Cosmology redshift survey (crs). *The Messenger*, v. 175, p. 50–53, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.18727/0722-6691/5127>.
- RIESS, A. G. et al. Jwst observations reject unrecognized crowding of cepheid photometry as an explanation for the hubble tension at 8σ confidence. 2024. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2401.04773>.
- RIESS, A. G. et al. Cosmic distances calibrated to 1% precision with gaia edr3 parallaxes and hubble space telescope photometry of 75 milky way cepheids confirm tension with λ cdm. *The Astrophysical Journal Letters*, v. 908, p. L6, 2021.
- RIESS, A. G. et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, v. 116, p. 1009–1038, 1998.
- Rubin Observatory. *About the Rubin Observatory*. 2025. Accessed May 20, 2025. Disponível em: <https://rubinobservatory.org/about>.
- SANCHEZ, J. L. et al. augur. in preparation.
- SciPy Community. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. 2024. <https://www.scipy.org>. Version 1.13.0.
- SECCO, L. F. et al. Dark energy survey year 3 results: Cosmology from cosmic shear and robustness to modeling uncertainty. *Phys. Rev. D*, v. 105, p. 023515, 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.105.023515>.
- SPRINGEL, V.; FRENK, C. S.; WHITE, S. D. M. The large-scale structure of the universe. *Nature*, v. 440, p. 1137–1144, 2006. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1038/nature04805>.
- SPRINGEL, V. et al. Simulations of the formation, evolution and clustering of galaxies and quasars. *Nature*, v. 435, p. 629–636, 2005. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1038/nature03597>.
- STÖLZNER, B. e. a. Kids-legacy: Consistency of cosmic shear measurements and joint cosmological constraints with external probes. 2025. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2503.19442>.
- TAKADA, M. et al. Extragalactic science, cosmology, and galactic archaeology with the subaru prime focus spectrograph. *Publ. Astron. Soc. Japan*, v. 66, p. 1, 2014. Disponível em: <https://doi.org/10.1093/pasj/pst019>.
- TANIDIS, K.; AL. et. Euclid preparation. xxxiv. the effect of linear redshift-space distortions in photometric galaxy clustering and its cross-correlation with cosmic shear. *Astronomy and Astrophysics*, v. 681, p. A131, 2023. Disponível em: <https://doi.org/10.1051/0004-6361/202347870>.
- TAYLOR, P. L.; MARKOVIČ, K. Covariance of photometric and spectroscopic two-point statistics: Implications for cosmological parameter inference. *Physical Review D*, v. 106, p. 063536, 2022.

- TEGMARK, M. et al. The three-dimensional power spectrum of galaxies from the sloan digital sky survey. *The Astrophysical Journal*, v. 606, p. 702–740, 2004.
- The Dark Energy Survey Collaboration. *The Dark Energy Survey*. 2005. ArXiv:astro-ph/0510346. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/astro-ph/0510346>.
- TROXEL, M. A.; ISHAK, M. The intrinsic alignment of galaxies and its impact on weak gravitational lensing in an era of precision cosmology. *Phys. Rep.*, v. 558, p. 1–59, 2015. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2014.11.001>.
- TURNER, R. J. Cosmology with peculiar velocity surveys. *arXiv preprint*, 2025. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2411.19484>.
- TUTUSAUS, I. et al. Euclid: The importance of galaxy clustering and weak lensing cross-correlations within the photometric euclid survey. *Astronomy & Astrophysics*, v. 643, p. A70, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.1051/0004-6361/202038313>.
- VALENTINO, E. D. A combined analysis of the h_0 late time direct measurements and the impact on the dark energy sector. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 502, p. 2065–2073, 2021.
- VERDE, L.; TREU, T.; RIESS, A. G. Tensions between the early and late universe. *Nature Astronomy*, v. 3, p. 891–895, 2019.
- VGOZZI. *LSSTDESC/6x2pt_LSST_and_ext_Spec: v0.1*. Zenodo, 2025. Disponível em: <https://doi.org/10.5281/zenodo.17516667>.
- VITENTI, S. L. et al. Firecrown: A framework for cosmological inference from large-scale structure. in preparation. Disponível em: <https://github.com/LSSTDESC/firecrown>.
- WANG, Y. et al. Atlas probe: Breakthrough science of galaxy evolution, cosmology, milky way, and the solar system. *Publications of the Astronomical Society of Australia*, v. 36, 2019. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1017/pasa.2019.5>.
- WILLIAMS, R. E. et al. The hubble deep field: Observations, data reduction, and galaxy photometry. *The Astronomical Journal*, v. 112, p. 1335, 1996.
- WONG, J. H. W. et al. *Euclid: Optimising tomographic redshift binning for 3×2 pt power spectrum constraints on dark energy*. 2025. ArXiv preprint arXiv:2501.07559.
- ZELDOVICH, Y. Mon. not. roy. astron. soc. v. 160, p. 1P–3P, 1972.
- ZUNTZ, J. et al. Cosmosis: Modular cosmological parameter estimation. *Astronomy and Computing*, v. 12, p. 45–59, 2015. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.ascom.2015.05.005>.
- ZUNTZ, J. et al. *Sacc: Save All Correlations and Covariances*. 2024. <https://github.com/LSSTDESC/sacc>. ASCL submission.