

Coordenação de Formação Científica
Dissertação de Mestrado

Estrelas de nêutrons com rotação em Relatividade Geral

Caroline da Fonseca Dias Sodré

Caroline da Fonseca Dias Sodré

**Estrelas de nêutrons com rotação em Relatividade
Geral**

Dissertação apresentada ao curso de Pós-Graduação em Física do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, como requisito parcial para a obtenção do Título de mestre em Física.

Orientador: Raissa Fernandes Pessoa Mendes

Co-orientador: Felipe Tovar Falciano

7 de outubro de 2025

"ESTRELAS DE NÊUTRONS COM ROTAÇÃO EM RELATIVIDADE
GERAL"

CAROLINE DA FONSECA DIAS SODRÉ

Dissertação de Mestrado em Física apresentada no
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do
Ministério da Ciência Tecnologia e Inovação.
Fazendo parte da banca examinadora os seguintes
professores:



Raissa Fernandes Pessoa Mendes - Orientadora/CBPF



Felipe Tovar Falciano – Coorientador/ CBPF



Sérgio Eduardo de Carvalho Eyer Jorás - UFRJ



Santiago Esteban Pérez Bergliaffa – UERJ

Rio de Janeiro, 04 de setembro de 2025.

Para a minha avó, Celina.

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, à família em que nasci e à família que estou construindo. Ter vocês ao meu lado é o que dá sentido a toda essa jornada.

À minha orientadora, deixo meu profundo agradecimento por ter sido uma fonte constante de inspiração — especialmente para todas as mulheres brasileiras que sonham em trilhar o caminho da pesquisa científica. Sou grata por todas as conversas, pelo apoio constante e por ter embarcado comigo nesta trajetória do mestrado. Tenho muito orgulho do trabalho que realizamos juntas.

Ao meu coorientador, agradeço pelos valiosos conselhos e ensinamentos. Trabalhar ao seu lado foi uma experiência de grande aprendizado.

Agradeço também ao CBPF, instituição onde fui aluna ao longo de vários anos. Sou igualmente grata à FAPERJ e à CAPES pelo apoio financeiro à minha pesquisa — sem o qual esta tese não teria se concretizado.

A boat beneath a sunny sky,
Lingering onward dreamily
In an evening of July —

Children three that nestle near,
Eager eye and willing ear,
Pleased a simple tale to hear —

Long has faded that sunny sky:
Echoes fade and memories die:
Autumn frosts have slain July.

Still she haunts me, phantomwise,
Alice moving under skies
Never seen by waking eyes.

Children yet, the tale to hear,
Eager eye and willing ear,
Lovingly shall nestle near.

In a Wonderland they lie,
Dreaming as the days go by,
Dreaming as the summers die:

Ever drifting down the stream —
Lingering in the golden gleam —
Life, what is it but a dream?

Lewis Carroll

Resumo

Estrelas de nêutrons são alguns dos objetos mais extremos do universo, apresentando densidades que podem superar as dos núcleos atômicos e campos gravitacionais excepcionalmente intensos. Dessa maneira, estrelas de nêutrons têm sido amplamente estudadas nos últimos anos, tanto do ponto de vista teórico quanto observacional, devido às informações que podem fornecer sobre a equação de estado da matéria em densidades extremamente altas e por se tratarem de fontes de ondas gravitacionais. Neste trabalho, introduziremos os formalismos que descrevem estrelas de nêutrons estáticas, com baixa rotação e com rotação rápida. Além disso, discutiremos alguns resultados numéricos obtidos por meio de códigos próprios e ferramentas já presentes na literatura.

Palavras-chave: Estrela de Nêutrons, Relatividade Geral, Equações de Estado.

Abstract

Neutron stars are among the most extreme objects in the universe, exhibiting densities that can exceed those of atomic nuclei and exceptionally intense gravitational fields. As a result, neutron stars have been extensively studied in recent years, both theoretically and observationally, due to the information they can provide about the equation of state of matter at extremely high densities and their role as sources of gravitational waves. In this work, we introduce the formalisms that describe static neutron stars, slowly rotating stars, and rapidly rotating stars. Additionally, we discuss some numerical results obtained using self-developed codes and existing tools from the literature.

Keywords: Neutron Star, General Relativity, Equation of State.

Sumário

	Resumo	9
	Abstract	11
	Introdução	19
1	FUNDAMENTOS	23
1.1	Teoria da Relatividade	23
1.1.1	Axiomas da Teoria da Relatividade Restrita	24
1.1.2	Princípios da Teoria da Relatividade Geral	25
1.1.3	Tensor Momento-Energia	27
1.1.4	Equações de campo de Einstein	28
1.2	Equações de estado	30
1.2.1	Modelo de gás de férmions não interagentes	31
1.2.2	Equações de estado politrópicas relativísticas	33
1.2.3	Equações de estado realistas	34
1.2.3.1	Equações de estado politrópicas por partes	35
2	ESTRELAS DE NÊUTRONS ESTÁTICAS	39
2.1	Configuração de equilíbrio	39
2.2	Resultados numéricos	42
3	ESTRELAS DE NÊUTRONS COM BAIXA ROTAÇÃO	49
3.1	Formalismo de Hartle-Thorne	50
3.1.1	Correção de primeira ordem: arrasto de referenciais inerciais	50
3.1.2	Correções de segunda ordem: propriedades físicas da estrela	55
3.2	Resultados numéricos	61
4	ESTRELAS DE NÊUTRONS COM ROTAÇÃO RÁPIDA	67
4.1	Configuração de equilíbrio	68
4.2	Esquema KEH	73
4.3	Compactificação CST	77
4.4	rns	80
4.5	Resultados numéricos	81
	Conclusão	85
	Funções do rns	87

REFERÊNCIAS	93
-------------------	----

Lista de Figuras

Figura 1	– Relação $p(\epsilon)$ para um modelo de gás de férmions não interagentes. . . .	33
Figura 2	– Relação $p(\epsilon)$ para as equações de estado KDE0v1, SKI3 e SLy9, extraídas e adaptadas do repositório CompOSE [Typel, Oertel e Klähn 2015]. . .	36
Figura 3	– Exemplo de equação de estado politrópica por partes. A equação é especificada pela escolha dos índices adiabáticos $\{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3\}$ em cada região e pela pressão p_1 na primeira densidade de divisão, $p_1 = p_1(\rho_1)$. Figura retirada de [Read et al. 2009].	37
Figura 4	– Os gráficos superiores mostram as relações entre a densidade de energia ϵ (esquerda) e a pressão p (direita) em função da coordenada radial r . No canto inferior direito, exibimos a dependência radial de $m(r)$ e do potencial $\nu(r)$. A linha pontilhada marca a região exterior à estrela. Utilizamos as equações de estado KDE0v1, SKI3 e SLy9, extraídas e adaptadas do repositório CompOSE.	46
Figura 5	– À esquerda, exibimos a variação da massa gravitacional M em função da densidade de energia central ϵ_c para as equações de estado SKI3, SLy9 e KDE0v1, extraídas e adaptadas do repositório CompOSE. À direita, temos a relação entre M e o raio R da estrela, parametrizada por ϵ_c , para as mesmas equações de estado. As massas máximas são, respectivamente, $2.24 M_\odot$, $2.16 M_\odot$ e $1.97 M_\odot$. As curvas são cortadas no ponto correspondente à massa máxima.	47
Figura 6	– Ilustração da diferença radial entre pontos localizados no mesmo ângulo θ e com a mesma densidade de energia $\epsilon(r_s)$ nas configurações estática e em rotação.	50
Figura 7	– Momento de inércia adimensional $\bar{I}$ como função da massa M (à esquerda) e da compacidade da estrela C (à direita), parametrizado pela pressão central. As equações de estado utilizadas foram as SKI3, SLy9 e KDE0v1, extraídas e adaptadas do repositório CompOSE.	63
Figura 8	– Relação $\bar{I} - \bar{Q}$, parametrizada pela pressão central para $f = 100$ Hz. As equações de estado utilizadas foram as SKI3, SLy9 e KDE0v1, extraídas e adaptadas do repositório CompOSE.	64
Figura 9	– Relação massa-raio equatorial parametrizada pela pressão central para alguns valores da frequência de rotação. A equação de estado utilizada foi a SLy9, extraída e adaptada do repositório CompOSE.	64
Figura 10	– Formato da estrela para diferentes valores da frequência de rotação e uma densidade de energia central de $\epsilon/c^2 = 10^{15}$ g/cm ³ . A equação de estado utilizada foi a SLy9, extraída e adaptada do repositório CompOSE.	65

Figura 11 – Gráfico mostrando a relação entre a massa gravitacional M e o raio equatorial R_e para as EoS KDE0v1 (esquerda), SLY9 (centro), SKI3 (direita). As frequências utilizadas foram $f = 0$, $f = 1$ kHz, $f = 0.9f_K$ e $f = f_K$. As curvas cinza tracejadas indicam as sequências com valores constantes de p_c/ϵ_c . As curvas cinza contínuas que cortam a figura sinalizam os pontos em que $C_e = M/R_e = \text{cte}$. Os pontos destacados na figura identificam quatro configurações: (i) a solução estática de massa máxima (azul), (ii) uma solução rotativa com a mesma massa bariônica de (i) e uma frequência de rotação de 1 kHz (vermelho), (iii) uma solução com a mesma massa bariônica de (i), mas girando no limite de Kepler (amarelo) e, (iv) a solução de massa máxima girando no limite de Kepler (verde). 82

Figura 12 – Gráfico ilustrando a razão p_c/ϵ_c em função da compacidade equatorial $C_e = M/R_e$, para as equações de estado KDE0v1, SLY9 e SKI3, e taxas de rotação $f = 0$, $f = 1$ kHz, e $f = f_K$. As curvas em que $f = 1$ kHz são truncadas no limite de ejeção de massa. A linha cinza horizontal identifica as configurações em que $p_c/\epsilon_c = 1/3$ 84

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Tabela contendo uma descrição resumida das funções presentes em cada arquivo do rns	91
--	----

Introdução

Em 25 de novembro de 1915, Albert Einstein apresentou à Academia Prussiana de Ciências o artigo *Die Feldgleichungen der Gravitation* (“As equações de campo da gravitação”) [Einstein 1915]. O trabalho, que finalizava uma série de quatro publicações, estabeleceu a primeira formulação consistente da Teoria da Relatividade Geral, trazendo uma nova visão acerca da gravidade, que passou a ser atrelada à curvatura do espaço-tempo (causada pela presença de massa e energia), e não mais a uma força, como previsto pela Lei da Gravitação Universal, apresentada por Isaac Newton. Além disso, a teoria prevê, dentre outros exemplos, a deflexão da luz por campos gravitacionais, a existência de objetos que hoje conhecemos como buracos negros e oscilações no espaço-tempo, as ondas gravitacionais.

Apesar da resistência inicial da comunidade científica em aceitar as ideias apresentadas por Einstein, experimentos e observações, como a comprovação da deflexão da luz pelo Sol durante o eclipse de 1919, na qual o Brasil teve participação [Dyson, Eddington e Davidson 1920], e a explicação da precessão anômala do periélio de Mercúrio [Einstein 1915] trouxeram mais credibilidade ao trabalho do físico. Avanços em experimentos recentes também corroboram as previsões da teoria, como a primeira detecção direta de ondas gravitacionais, anunciada pelo LIGO em 2016, com base no evento GW150914, observado em 2015 [Abbott et al. 2016], e a primeira imagem da distribuição de massa ao redor do buraco negro supermassivo M87, divulgada pelo Event Horizon Telescope (EHT), em 2019 [Event Horizon Telescope Collaboration et al. 2019].

Um dos objetos astrofísicos conhecidos mais intrigantes, e que também pode ser descrito com a ajuda da Teoria da Relatividade Geral, é a estrela de nêutrons. Extraordinariamente densas, elas se formam a partir do colapso do núcleo de estrelas massivas durante a explosão de uma supernova. Este núcleo, incapaz de sustentar a fusão nuclear para contrabalançar a força da gravidade, colapsa até que os prótons e elétrons se fundam formando nêutrons (e neutrinos), resultando em uma estrela composta por um material rico em nêutrons.

Com o início da astronomia de raios-X na década de 1960, muitas propostas para a observação de estrelas de nêutrons foram feitas, com destaque para o trabalho de Pacini, que mostrou ser possível a uma estrela de nêutrons altamente magnetizada e em rotação acelerada emitir radiação eletromagnética como resultado da perda de energia cinética e, simultaneamente, impulsionar partículas a velocidades extremamente elevadas [Pacini 1967]. Entretanto, comprovações observacionais das estrelas de nêutrons foram feitas somente em 1967, por Jocelyn Bell [Hewish e Okoye 1965]. Na época, a aluna de pós-graduação identificou uma fraca fonte de rádio variável de período extremamente estável durante

observações noturnas. Tal objeto, conhecido hoje como “pulsar”, foi inicialmente associado a anãs brancas ou a estrelas de nêutrons. Foi somente em 1968, após a descoberta do pulsar do Caranguejo, cujo período de rotação ($\approx 33\text{ ms}$) é muito curto para uma anã branca, que a primeira hipótese foi descartada [Comella et al. 1969]. O pulsar recebeu a designação PSR B1919 + 21, consagrando-se como a primeira evidência observacional da existência desses objetos.

Rádio-pulsares como o descoberto por Jocelyn Bell constituem uma classe notável de estrelas de nêutrons com rotação, caracterizada por momentos magnéticos inclinados em relação ao seu eixo de rotação. Esses campos magnéticos podem ser intensos, podendo chegar à ordem de $10^{15}G$. Sua magnetosfera gera emissões de rádio que são colimadas ao longo do eixo magnético e acompanham a rotação estelar, tornando o pulsar observável sempre que seu feixe cruza a Terra. Entre os exemplos mais extremos de rotação rápida, destaca-se o pulsar PSR J1748-2446ad, que possui o menor período de rotação já medido, girando a impressionantes 716 vezes por segundo [Hessels et al. 2006].

Hoje sabemos que estrelas de nêutrons têm uma massa típica cerca de 1.4 a 2 vezes maior que a do Sol e um diâmetro da ordem de 20 km [Özel e Freire 2016]. Devido à conservação do momento angular, espera-se que estes objetos girem, com períodos variando de segundos a milissegundos. Estrelas de nêutrons podem emitir radiação eletromagnética em múltiplos comprimentos de onda, sendo observadas nos espectros de rádio, infravermelho, óptico, ultravioleta, raios X e raios gama. Além disso, no caso da coalescência de sistemas binários, podem ser detectadas por meio da emissão de ondas gravitacionais.

A colisão de duas estrelas de nêutrons ou a fusão de uma estrela de nêutrons com um buraco negro são alguns dos processos mais energéticos existentes no Universo. Parte dessa energia é liberada na forma de raios gama, que são detectados por telescópios no espaço. Além disso, estes eventos cósmicos são capazes de distorcer o tecido do espaço-tempo, gerando o que conhecemos como ondas gravitacionais. Um exemplo marcante foi o evento captado em 17 de agosto de 2017, em que os detectores LIGO e Virgo registraram GW170817 [Abbott et al. 2017], a primeira detecção confirmada de uma fusão de estrelas de nêutrons. Apenas 1.7 segundos depois, os telescópios Fermi e INTEGRAL observaram o GRB 170817A, uma explosão de raios gama associada ao mesmo evento [Goldstein et al. 2017]. Onze horas depois, astrônomos identificaram a fonte na galáxia NGC 4993, descobrindo a contrapartida óptica SSS17a/AT 2017gfo, cuja evolução espectral confirmou tratar-se de uma kilonova — explosão alimentada pelo decaimento radioativo de elementos pesados formados no processo-r de nucleossíntese. Essa detecção multimensageira, combinando ondas gravitacionais e observações eletromagnéticas em múltiplos comprimentos de onda, forneceu evidências diretas da associação entre fusões destes objetos e *gamma-ray bursts* de curta duração [Abbott et al. 2019].

Diferentes técnicas observacionais, incluindo telescópios de rádio e raios-X, detecto-

res de ondas gravitacionais e telescópios ópticos, têm sido associadas a modelos teóricos para enriquecer o estudo das propriedades das estrelas de nêutrons. Isto pois, a partir deste estudo, podemos testar as teorias de gravitação hoje existentes, assim como analisar o comportamento da matéria nuclear quando sujeita a altíssimas densidades. Em particular, o estudo da estrutura de estrelas relativísticas com rotação é ponto de partida básico para muitas análises que podem ser realizadas em contato com observações eletromagnéticas e de ondas gravitacionais. É em torno desse estudo que se estrutura esta dissertação.

Dedicaremos o primeiro capítulo deste trabalho a uma introdução a conceitos fundamentais da Relatividade Geral para a descrição de estrelas de nêutrons, dedicando algumas sessões a discussões acerca das equações de estado. Nos capítulos seguintes, apresentaremos os formalismos que descrevem a estrutura de estrelas de nêutrons em três regimes distintos: estático (Capítulo 2), com baixo momento angular (Capítulo 3) e em rotação rápida (Capítulo 4). Em cada caso, discutiremos resultados numéricos obtidos por meio de códigos próprios ou ferramentas presentes na literatura. O Capítulo 4 inclui, como aplicação do formalismo introduzido para estrelas com rotação rápida em Relatividade Geral, alguns dos pontos que integram o trabalho [Mendes, Sodré e Falciano 2024]. Outras questões abordadas neste trabalho, como a discussão sobre instabilidades a que estrelas de nêutrons estão sujeitas em teorias escalar-tensoriais, não serão abordadas nesta dissertação, por optarmos por focar, aqui, no caso da Relatividade Geral.

1 Fundamentos

Neste capítulo, apresentaremos os fundamentos teóricos necessários para a descrição de estrelas de nêutrons, com foco nos princípios da Relatividade Geral e nas equações de estado da matéria densa. Revisaremos os axiomas da Relatividade Restrita e a formulação geométrica da gravitação proposta pela Relatividade Geral, introduzindo o tensor momento-energia e as equações de campo de Einstein. Em seguida, abordaremos diferentes modelos para as equações de estado, desde descrições simples, como o gás de férmions não interagentes, passando por formulações relativísticas politrópicas e politrópicas por partes, até equações de estado realistas, que serão fundamentais para descrever o comportamento da matéria no interior dessas estrelas. Esse arcabouço teórico servirá de base para os desenvolvimentos que apresentaremos nos capítulos seguintes.

1.1 Teoria da Relatividade

A gravitação newtoniana foi algo bem estabelecido na comunidade científica durante centenas de anos, sendo tomada como suficiente para a descrição das interações gravitacionais entre os corpos. Newton se utilizou de constatações experimentais já conhecidas em sua época, provenientes de grandes nomes como Galileu e Kepler, e desenvolveu leis de movimento capazes de explicar, até certo ponto, o movimento dos corpos celestes. Na sua perspectiva, a gravidade era uma força atrativa, que atuava entre corpos massivos e que decaía com o quadrado da distância entre os mesmos.

Muitos anos depois de proposta, a teoria de Newton foi mais uma vez posta à prova. Comparando dados observacionais da precessão do periélio de Mercúrio com resultados previstos utilizando a teoria newtoniana, percebeu-se que havia certa discrepância entre as estimativas [[Verrier 1859](#)]. Essa diferença não pôde ser solucionada até que Einstein apresentasse a Teoria da Relatividade Geral (TRG), em 1915.

Diferente da descrição newtoniana da gravitação, a Relatividade Geral estabelece que a gravidade resulta da curvatura do espaço-tempo causada pela presença de energia e massa. Uma das consequências fundamentais desse novo paradigma é a possibilidade de fenômenos gravitacionais que não possuem análogos na física clássica, como a dilatação temporal gravitacional, e a existência de buracos negros e ondas gravitacionais. A Relatividade Geral também desempenha um papel fundamental na descrição da configuração de equilíbrio de estrelas de nêutrons, tópico desta dissertação.

1.1.1 Axiomas da Teoria da Relatividade Restrita

A Teoria da Relatividade Restrita (TRR), também conhecida como Teoria da Relatividade Especial (1905), fornece axiomas e conceitos fundamentais que sustentam a formulação da Relatividade Geral. Com ela, Einstein foi capaz de resolver o problema da não-invariância das equações de Maxwell para o Eletromagnetismo Clássico, que não se preservam sob transformações de coordenadas de Galileu, que descrevem mudanças entre referenciais inerciais na mecânica newtoniana.

Em seu trabalho “Sobre a Eletrodinâmica de Corpos em Movimento” [Einstein 1905], que estabeleceu as bases da TRR, Einstein expõe suas ideias acerca dos chamados “princípio da relatividade” e “princípio da constância da velocidade da luz”, que podem ser expressos, respectivamente, pelos seguintes axiomas [Andrade 2017, Resnick e Watanabe 1971]:

Axioma 1 (Princípio da Relatividade). *As leis da Física são as mesmas em todos os referenciais inerciais. Não existe nenhum referencial inercial preferencial.*

Axioma 2 (Princípio da Constância da Velocidade da luz). *A velocidade da luz é sempre a mesma, independentemente do referencial inercial no qual é medida.*

O primeiro nos garante que, ao executarmos um experimento de qualquer âmbito da física em determinado referencial inercial A , devemos obter os mesmos resultados se o refizermos em um outro referencial, também inercial, B . Já o segundo vai de encontro direto à transformada de Galileu, afirmando que a velocidade da luz no vácuo ($c = 299792458$ m/s) é a mesma em qualquer referencial inercial, sendo independente, portanto, do movimento da fonte.

Além dos postulados, a TRR introduz uma nova perspectiva sobre espaço e tempo, unificando-os em uma única estrutura na qual a relatividade se fundamenta: o espaço-tempo, com a coordenada temporal sendo tratada como uma de suas componentes. Nessa estrutura, espaço e tempo deixam de ser conceitos independentes e absolutos, passando a formar uma entidade unificada. Agora, a transformação de coordenadas que leva de um referencial a outro, antes dada pela transformada de Galileu, passa a ser definida pela transformada de Lorentz.

A geometria do espaço-tempo é descrita pela métrica, tensor de ordem 2, que na TRR assume a forma da métrica de Minkowski, $\eta_{\mu\nu}$, caracterizando um espaço-tempo plano. Eventos são descritos por quatro coordenadas, $\{x^\mu\} = \{ct, x, y, z\}$, e a geometria do espaço-tempo é tal que a distância física entre eventos próximos, com diferença entre coordenadas dx^μ , é dada pelo elemento de linha:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (1.1)$$

onde $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ são as componentes da métrica de Minkowski em um referencial inercial e em um sistema cartesiano. Podemos caracterizar o espaço-tempo de Minkowski por sua curvatura nula, decorrente da constância das componentes de sua métrica, o que implica na ausência de efeitos gravitacionais. A relação entre curvatura e gravidade é discutida na próxima seção, onde abordaremos alguns conceitos acerca da Teoria da Relatividade Geral.

1.1.2 Princípios da Teoria da Relatividade Geral

A Teoria da Relatividade Restrita lida com objetos com velocidades próximas à da luz, porém, se restringe a regiões onde os efeitos gravitacionais podem ser desprezados. De fato, a formulação relativística mostrou-se incompatível com a Teoria da Gravitação newtoniana, na qual a interação gravitacional é instantânea a qualquer distância. Essa incompatibilidade revelou a necessidade de uma reformulação da própria teoria da gravitação, de modo a torná-la consistente com o limite de causalidade imposto pela Relatividade Restrita, culminando no desenvolvimento da Teoria da Relatividade Geral. Nessa formulação, Einstein conferiu à gravidade um caráter geométrico, descrevendo-a como a própria curvatura do espaço-tempo, a qual pode ser gerada não apenas pela presença de massa, mas por toda forma de energia e momento. É interessante destacar que, para o regime de baixas velocidades e campos gravitacionais fracos, a teoria da gravitação Einsteiniana retorna à de Newton.

Os princípios e fundamentos que discutiremos brevemente a seguir fazem parte da base criada por Einstein para fundar a Relatividade Geral. Para a construção desta subseção foram utilizadas as referências [d’Inverno 1992, Barbour 2010, Das 2012].

O Princípio da Equivalência

O Princípio da Equivalência de Einstein se baseia na ideia de que é impossível distinguir um campo gravitacional uniforme de um referencial acelerado por meio de experimentos locais. De forma semelhante, é impossível distinguir um referencial em queda livre num campo gravitacional uniforme de um referencial inercial na ausência de gravitação, fazendo com que, em regiões suficientemente pequenas do espaço-tempo, as leis da Física se reduzam às leis da TRR.

Imaginemos uma pessoa em um elevador em queda livre num campo gravitacional uniforme, que solta uma bolinha. Pelo Princípio da Equivalência, esse referencial em queda livre, S' , é indistinguível de um referencial inercial na TRR. Portanto, temos que este referencial é descrito localmente pela métrica de Minkowski, e a bolinha segue um movimento retilíneo e uniforme, com equações de movimento dadas por:

$$\frac{d^2 x^{\mu'}}{d\tau^2} = 0, \quad (1.2)$$

onde τ representa o tempo próprio, ou seja, o intervalo de tempo medido por um observador que se move junto com a bolinha, definido, de forma geral, a partir do elemento de linha ds :

$$c^2 d\tau^2 = -ds^2 = -\eta_{\mu'\nu'} dx^{\mu'} dx^{\nu'} = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.3)$$

em que $g_{\mu\nu}$, a métrica num referencial arbitrário com coordenadas $x^\mu = x^\mu(x^{\mu'})$, se relaciona com $\eta_{\mu'\nu'}$ a partir da equação:

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \eta_{\mu'\nu'}. \quad (1.4)$$

Agora imaginemos uma pessoa em um referencial estacionário em relação à Terra, S , vendo a bolinha cair. As coordenadas deste novo referencial são funções de $x^{\mu'}$, fazendo com que sua trajetória seja dada por:

$$0 = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}, \quad (1.5)$$

que, após multiplicarmos por $\partial x^\lambda / \partial x^{\alpha'}$ e utilizarmos a regra de produto, $\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\alpha'}} = \delta_\mu^\lambda$, pode ser reescrita como a equação da geodésica [Einstein e Fokker 1914],

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\nu\alpha} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau} = 0, \quad (1.6)$$

em que $\Gamma^\lambda_{\nu\alpha}$ são os símbolos de Christoffel, obtidos com auxílio da derivação da equação (1.4), e dados por:

$$\Gamma^\lambda_{\nu\alpha} = \frac{1}{2} g^{\lambda\beta} (\partial_\nu g_{\alpha\beta} + \partial_\alpha g_{\beta\nu} - \partial_\beta g_{\alpha\nu}), \quad (1.7)$$

onde $g^{\lambda\beta}$ é a inversa do tensor métrico, definida por $g^{\lambda\beta} g_{\beta\alpha} = \delta_\alpha^\lambda$. Os símbolos de Christoffel também são utilizados na definição da derivada covariante ∇_μ , que consiste em uma generalização da derivada parcial para sistemas de coordenadas curvilíneos e também para espaços curvos. Por exemplo, para um tensor de ordem 2, com componentes $X^{\mu\nu}$, temos:

$$\nabla_\alpha X^{\mu\nu} = \partial_\alpha X^{\mu\nu} + \Gamma^\mu_{\alpha\lambda} X^{\lambda\nu} + \Gamma^\nu_{\alpha\lambda} X^{\mu\lambda}. \quad (1.8)$$

O Princípio da Covariância

Como a Teoria da Relatividade Geral lida com referenciais inerciais e não-inerciais em pé de igualdade, um novo princípio, mais geral que o Axioma 1 da TRR, era necessário. Einstein então postulou que as leis da Física devem ser formuladas de modo a preservarem sua validade em qualquer sistema de coordenadas, não sendo restritas a sistemas adaptados a uma família específica de observadores. Esse princípio, conhecido como Covariância Geral, garante que as equações fundamentais da Física possam ser expressas de forma válida em qualquer sistema de coordenadas. Em outras palavras, as equações da Física devem ser escritas em termos de tensores, garantindo que sua forma seja independente da escolha de sistema de coordenadas.

1.1.3 Tensor Momento-Energia

O tensor momento-energia $T^{\mu\nu}$ desempenha um papel fundamental nas equações de campo de Einstein, introduzidas na seção seguinte, pois representa a distribuição e o fluxo de energia e momento no espaço-tempo. Ele atua como a fonte do campo gravitacional e contém todas as informações sobre as propriedades energéticas do sistema com que estamos trabalhando, como a densidade de energia, pressão, fluxo de momento, etc.

Podemos associar as componentes do tensor momento-energia a diferentes características de um dado sistema da seguinte maneira: para um observador com quadrivelocidade v^μ , o escalar $T_{\mu\nu}v^\mu v^\nu$ é interpretado como a densidade de energia, ou seja, a massa-energia por unidade de volume, medida por esse observador. Imaginemos que x^μ é ortogonal a v^μ ; temos então que a componente $-T_{\mu\nu}v^\mu x^\nu$ representa a densidade de momento da matéria na direção x^μ . Se y^μ também é ortogonal a v^μ , então $T_{\mu\nu}x^\mu y^\nu$ corresponde ao fluxo da μ -ésima componente do momento na direção x^ν [Wald 2010].

Quando derivado a partir de uma ação fundamental S_M , o tensor momento-energia é definido pela expressão

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (1.9)$$

por isso, é necessariamente simétrico, e satisfaz ainda uma lei de conservação dada por:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (1.10)$$

Quando projetada ao longo da direção v_μ , temos que tal equação descreve a conservação da energia; quando projetada ao longo de direções perpendiculares a v_μ , a equação dita a conservação do momento linear.

Estamos interessados em descrever estrelas de nêutrons como fluidos. Consideramos que o fluido pode ser dividido em “caixas”, ou elementos de fluido, que são pequenas em comparação com a escala macroscópica, mas grandes em comparação com o caminho livre médio, de forma que podemos definir a quadrivelocidade do elemento de fluido, $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$, como a quadrivelocidade média das partículas que o compõem. De forma semelhante, definimos a densidade de energia, pressão, etc. por meio de médias locais, interpretadas macroscopicamente como campos contínuos [Friedman e Stergioulas 2013]. Neste esquema, assumimos que as partículas microscópicas colidem com frequência suficiente para que o seu caminho livre médio seja curto em comparação com a escala em que a densidade muda, de modo que as colisões garantam um equilíbrio termodinâmico local.

Um fluido sem viscosidade, tensões de cisalhamento ou condução de calor é chamado de fluido perfeito. Um observador movendo-se com a quadri-velocidade u^μ de um elemento de fluido verá as colisões distribuírem aleatoriamente as velocidades das partículas próximas, de modo que a distribuição das partículas parecerá localmente isotrópica. Desta maneira, as componentes do tensor momento-energia em seu referencial não devem ter uma direção

preferencial, ou seja, ele deve ser invariante sob rotações que fixam u^μ . Isso garante que o tensor de energia-momento de um fluido perfeito seja dado por:

$$T^{\mu\nu} = (p + \epsilon)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu}, \quad (1.11)$$

onde p é a pressão e ϵ é a densidade de energia medidas no referencial de repouso do fluido [Friedman e Stergioulas 2013].

1.1.4 Equações de campo de Einstein

Conforme mencionado anteriormente, a gravidade pode ser interpretada como uma manifestação da curvatura do espaço-tempo, induzida pela presença de energia e não apenas de matéria. O tensor momento-energia é responsável por descrever propriedades físicas como densidade de massa e energia, pressão e fluxo de momento, enquanto a métrica nos permite obter informações sobre a geometria do espaço-tempo. Dessa forma, é natural buscar uma relação matemática que vincule diretamente esses dois objetos, descrevendo como a distribuição de energia e momento determina a curvatura do espaço-tempo. Para isso, partiremos da definição do tensor de curvatura de Riemann $R_{\mu\sigma\rho}^\lambda$, dado por:

$$R_{\mu\sigma\rho}^\lambda = \partial_\sigma \Gamma_{\mu\rho}^\lambda - \partial_\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda + \Gamma_{\mu\rho}^\alpha \Gamma_{\alpha\sigma}^\lambda - \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \Gamma_{\alpha\rho}^\lambda. \quad (1.12)$$

Podemos observar que, devido à expressão da conexão em termos das derivadas da métrica, o tensor de Riemann contém derivadas de segunda ordem da métrica, que descrevem a curvatura do espaço-tempo. Adicionalmente, temos que $R_{\lambda\mu\sigma\rho} = g_{\lambda\alpha} R_{\mu\sigma\rho}^\alpha$ satisfaz as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} R_{\lambda\mu\sigma\rho} &= -R_{\mu\lambda\sigma\rho} = -R_{\lambda\mu\rho\sigma}, \\ R_{\lambda\mu\sigma\rho} &= R_{\sigma\mu\lambda\rho} = R_{\mu\sigma\rho\lambda}, \\ R_{\lambda\mu\sigma\rho} + R_{\lambda\sigma\rho\mu} + R_{\lambda\rho\mu\sigma} &= 0, \\ \nabla_\xi R_{\lambda\mu\sigma\rho} + \nabla_\sigma R_{\lambda\mu\rho\xi} + \nabla_\rho R_{\lambda\mu\xi\sigma} &= 0. \end{aligned} \quad (1.13)$$

O traço do tensor de Riemann é o chamado tensor de Ricci, e pode ser definido por:

$$R_{\nu\mu} = \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma - \partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\sigma}^\sigma. \quad (1.14)$$

A partir do tensor de Ricci, podemos ainda definir o escalar de Ricci:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (1.15)$$

Utilizando as identidades (1.13), somos capazes de obter:

$$\nabla_\nu \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} \right) = 0, \quad (1.16)$$

onde o objeto entre parênteses é identificado como o tensor de curvatura de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (1.17)$$

e obedece à equação

$$\nabla_\nu G^{\mu\nu} = 0. \quad (1.18)$$

No limite Newtoniano, temos que o potencial gravitacional ϕ obedece à equação de Poisson, dada por:

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho, \quad (1.19)$$

onde ρ é a densidade de massa. Buscando o equivalente relativístico da equação (1.19) a partir de uma equação que envolva o tensor momento-energia e o tensor de curvatura, obtemos as chamadas equações de campo de Einstein [[Einstein 1915](#)] (com $G = c = 1$):

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (1.20)$$

No caso do vácuo, temos que tais equações se reduzem a:

$$G_{\mu\nu} = 0. \quad (1.21)$$

Podemos também obter as equações de campo de Einstein utilizando o formalismo lagrangiano. Para isso, é necessário construir uma Lagrangiana que se transforme como um escalar sob transformações gerais de coordenadas e que dependa da métrica e de suas derivadas. A quantidade não trivial mais simples que atende a essas condições é o escalar de Ricci R . A ação resultante é dada, em unidades naturais, por:

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (1.22)$$

em que g é o determinante da métrica. A equação acima é conhecida como a ação de Einstein-Hilbert no vácuo, e sua versão na presença de matéria pode ser descrita como:

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} R + S_M, \quad (1.23)$$

onde S_M descreve os campos de matéria.

Variando a equação (1.23) com relação à métrica, obtemos:

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \left(\sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \delta \sqrt{-g} R + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right) + \delta S_M. \quad (1.24)$$

Utilizando a relação

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad (1.25)$$

e sabendo que $g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}$ pode ser reescrito como um termo de superfície e omitido, temos [Wald 2010]:

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} + \delta S_M. \quad (1.26)$$

Utilizando a relação (1.9), podemos reescrever o último termo e obter:

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad (1.27)$$

ou ainda:

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - 8\pi T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu}. \quad (1.28)$$

Exigindo que a ação seja estacionária, $\delta S_{EH} = 0$, recuperamos a equação (1.20).

1.2 Equações de estado

Em 1931, aos 23 anos, Lev Landau finalizava seu trabalho teórico no qual propunha a existência de objetos estelares ainda mais densos que as anãs brancas, possivelmente compostos por matéria em densidade comparável à nuclear [Landau 1932]. Apesar de a ideia descrever de forma concisa as estrelas de nêutrons, a descoberta do ingrediente principal destes objetos, os nêutrons, foi feita apenas um ano mais tarde, por J. Chadwick [Chadwick 1932]. Desta maneira, a primeira previsão teórica de estrelas de nêutrons foi apresentada apenas em 1933, por W. Baade e F. Zwicky, na reunião da American Physical Society em Stanford, e publicada um mês mais tarde [Baade e Zwicky 1934]. Neste artigo, eles introduzem estrelas de nêutrons que, em seus estágios finais, consistem em nêutrons extremamente compactados. Em sua publicação seguinte [Baade e Zwicky 1934], apresentam ainda mais detalhes, afirmando que tais objetos “... podem ter um raio muito pequeno e uma densidade extremamente alta. Como os nêutrons podem ser mais compactados do que os núcleos comuns e os elétrons, a energia de ‘compactação gravitacional’ em uma estrela de nêutrons fria pode se tornar muito grande e, sob certas circunstâncias, pode ultrapassar em muito as frações de compactação nuclear comuns.” (tradução livre).

Ainda antes da Segunda Guerra Mundial, houve alguns avanços no estudo das equações de estado, que descrevem como a pressão interna da estrela varia com a densidade da matéria e é, portanto, essencial para a construção de modelos de estrelas de nêutrons. Sterne foi possivelmente o primeiro a abordar a formulação de uma equação de estado para a matéria nuclear sujeita ao equilíbrio entre processos de captura e decaimento beta, onde ele estudou um sistema no regime de temperaturas muito baixas, próximas de zero, composto por elétrons, prótons, nêutrons e uma variedade de núcleos atômicos [Sterne 1933]. Alguns anos depois, F. Zwicky propôs uma estimativa para a energia de ligação máxima de uma estrela de nêutrons de massa M [Zwicky 1938].

Após a Segunda Guerra Mundial, muitos esforços foram feitos para a criação de modelos de equação de estado para matéria estelar densa [Harrison, Wakano e Wheeler

1958, Cameron 1959, Salpeter 1960, Ambartsumyan e Saakyan 1960, Tsuruta e Cameron 1966]. Além disso, foi formulada uma previsão teórica sugerindo a possibilidade de o interior das estrelas de nêutrons exibir um estado superfluido [Bardeen, Cooper e Schrieffer 1957]. Tivemos também o surgimento de propostas sobre as emissões de neutrinos por tais objetos [Chiu e Salpeter 1964, Bahcall e Wolf 1965], e avanços nos estudos acerca de suas evoluções térmicas [Stabler 1960, Chiu 1964]. Mais detalhes sobre a evolução histórica do entendimento acerca da constituição microscópica de estrelas de nêutrons podem ser encontrados em [Haensel, Potekhin e Yakovlev 2007].

Ainda hoje, a descrição precisa do comportamento da matéria nas condições extremas presentes no interior de estrelas de nêutrons permanece uma questão em aberto. Isso se deve, por um lado, à impossibilidade de experimentos controlados que acessem essas mesmas condições e, de outro, à dificuldade de cálculos de primeiros princípios baseados na teoria fundamental das interações fortes, a Cromodinâmica Quântica. Diferentes equações de estado, baseadas em diferentes extrapolações da física conhecida, preveem distintas relações entre massa e raio, além de sugerirem limites superiores variados para a massa máxima dessas estrelas. Assim, medições precisas dessas propriedades desempenham um papel crucial na imposição de restrições sobre os modelos teóricos existentes.

1.2.1 Modelo de gás de férmions não interagentes

Para que obtenhamos uma ideia geral acerca das equações de estado, comecemos com um problema simples: o modelo de gás de férmions não interagentes confinados em uma caixa de volume V . Devido ao princípio da incerteza de Heisenberg, a incerteza no momento k é dada por

$$\Delta k = hV^{-1/3}, \quad (1.29)$$

onde h é a constante de Planck. Momentos com magnitude entre k e $k + dk$ estão em uma região no espaço de momenta com volume $4\pi k^2 dk$, de forma que o número de estados disponíveis dN é

$$dN = 4\pi k^2 \frac{dk}{(\Delta k)^3} = \frac{4\pi k^2 dk}{h^3} V. \quad (1.30)$$

Devido a se tratarem de partículas com spin $\frac{1}{2}$, para cada estado de momento existem dois estados de spin, conhecidos por “spin-up” e “spin-down”. Por isso, devemos dobrar o lado direito da equação acima, obtendo então o seguinte número total de estados:

$$dN = \frac{8\pi k^2 dk}{h^3} V. \quad (1.31)$$

Este é o número máximo de férmions que podem ter momentos entre k e $k + dk$ em uma caixa de volume V . Reduzindo o momento das partículas ao mínimo possível a partir do resfriamento do gás, teremos que apenas os estados de menor momento, entre $k = 0$ e k_f , serão ocupados. Este limite superior, também conhecido por momento de Fermi, pode ser

determinado por meio da equação:

$$n = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{k_f} k^2 dk = \frac{8\pi k_f^3}{3h^3}, \quad (1.32)$$

em que $n \equiv N/V$ é a densidade de número. A partir da manipulação da equação acima, obtemos:

$$k_f = \left(\frac{3h^3}{8\pi} \right)^{1/3} n^{1/3}. \quad (1.33)$$

Cada partícula de massa m tem energia $E = (k^2 + m^2)^{1/2}$, portanto, a energia total E_{total} é dada por:

$$E_{total} = \int dE_{total} = \int_0^{k_f} V \frac{8\pi k^2}{h^3} (k^2 + m^2)^{1/2} dk. \quad (1.34)$$

A densidade de energia $\epsilon \equiv E_{total}/V$ é, portanto:

$$\epsilon = \int_0^{k_f} \frac{8\pi k^2}{h^3} (k^2 + m^2)^{1/2} dk, \quad (1.35)$$

ou ainda, reescrevendo a equação com a ajuda de uma nova variável $u = k/m$:

$$\epsilon = \frac{8\pi m^4}{h^3} \int_0^{u_f} u^2 (u^2 + 1)^{1/2} du, \quad (1.36)$$

o que nos leva a:

$$\epsilon(n) = \frac{\pi m^4}{h^3} [(2u_f^3 + u_f)(1 + u_f^2)^{1/2} - \operatorname{arcsinh}(u_f)]. \quad (1.37)$$

Utilizamos agora a primeira lei da termodinâmica,

$$dQ = dE_{total} + pdV, \quad (1.38)$$

onde dQ é a energia adicionada ao sistema em forma de calor. Neste caso, por se tratar de um sistema isolado, temos que $dQ = 0$, de maneira que obtemos:

$$\begin{aligned} p &= -\frac{dE_{total}}{dV} = -\frac{d(\epsilon V)}{dV} \\ &= -\epsilon - V \frac{d\epsilon}{dV} = -\epsilon - V \frac{d\epsilon}{dk_f} \frac{dk_f}{dV} \\ &= -\epsilon + n \frac{d\epsilon}{dk_f} \frac{dk_f}{dn}, \end{aligned} \quad (1.39)$$

ou ainda, utilizando as equações (1.33) e (1.35):

$$\begin{aligned} p(n) &= \frac{8\pi k_f^3}{3h^3} (k_f^2 + m^2)^{1/2} - \epsilon \\ &= \frac{\pi}{3h^3} m^4 [(1 + u_f^2)^{1/2} (2u_f^3 - 3u_f) + 3 \operatorname{arcsinh}(u_f)]. \end{aligned} \quad (1.40)$$

As equações (1.37) e (1.40) definem a equação de estado, parametrizada por n , do problema.

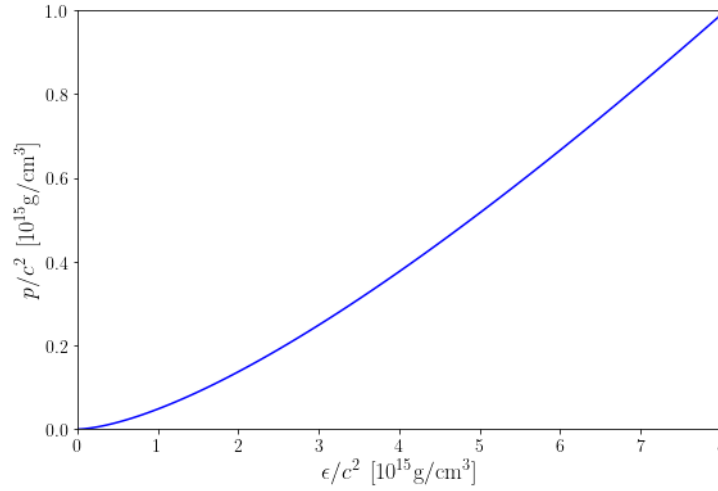


Figura 1 – Relação $p(\epsilon)$ para um modelo de gás de férmions não interagentes.

Para um gás de férmions relativístico, em que $k_f \gg m$, as equações (1.37) e (1.40) se reduzem a:

$$p \propto \epsilon^{4/3}. \quad (1.41)$$

Já no limite não-relativístico, a equação de estado se transforma em:

$$p \propto \epsilon^{5/3}. \quad (1.42)$$

Equações de estado como a (1.41) e (1.42) são chamadas de politrópicas. Exploraremos esta classe de equações de estado com mais detalhes na sessão seguinte.

Apesar de o exemplo exposto ser uma boa forma de introduzirmos a descrição da dinâmica e composição do interior de estrelas de nêutrons, uma análise realista necessita levar em consideração interações nucleares complexas. Discutiremos alguns exemplos de equações de estado realistas mais adiante, embora sua dedução a partir de primeiros princípios esteja fora do escopo desta dissertação.

1.2.2 Equações de estado politrópicas relativísticas

Estrelas de nêutrons antigas possuem temperaturas muito menores que a energia de Fermi de suas partículas constituintes. Dessa maneira, podemos ignorar gradientes de entropia e assumir uma entropia específica uniforme s . O aumento da pressão e da densidade em direção ao centro da estrela é, portanto, adiabático, de forma que essas grandezas se relacionam segundo a primeira lei da termodinâmica, com $ds = 0$ [Friedman e Stergioulas 2013]:

$$d\epsilon = \frac{\epsilon + p}{\rho} d\rho, \quad (1.43)$$

onde a pressão p pode ser definida, em termos da densidade de massa de repouso ρ , pela equação:

$$\frac{\rho}{p} \frac{dp}{d\rho} = \frac{\epsilon + p}{p} \frac{dp}{d\epsilon} = \Gamma. \quad (1.44)$$

A quantidade Γ é conhecida como índice adiabático, e representa a variação fracionária da pressão por variação fracionária do volume comóvel, mantendo a entropia e a composição constantes [Friedman e Stergioulas 2013]:

$$\Gamma := \frac{\partial \log p(\rho, s, Y_1, \dots, Y_N)}{\partial \log \rho} = \frac{\epsilon + p}{p} \frac{\partial p(\epsilon, s, Y_1, \dots, Y_N)}{\partial \epsilon}, \quad (1.45)$$

em que Y_k é a densidade numérica fracionária da k -ésima espécie de partícula constituinte. Como vimos na sessão anterior, para gases de Fermi ideais degenerados não relativísticos, o índice adiabático é $5/3$, enquanto para o caso ultrarrelativístico, $\Gamma = 4/3$. Apesar da matéria de uma estrela de nêutrons em geral não ser um gás de Fermi ideal, alguns modelos assumem um índice adiabático efetivo constante, correspondendo à compressibilidade média da estrela, o que nos leva às chamadas equações de estado politrópicas:

$$p = K\rho^\Gamma, \quad (1.46)$$

onde K é a constante politrópica. Frequentemente escrevemos Γ em função de um índice politrópico n utilizando a relação $\Gamma = 1 + 1/n$.

A partir da equação (1.43), temos:

$$\frac{\epsilon}{\rho} = (1 + a) + K \frac{\rho^{\Gamma-1}}{\Gamma - 1}, \quad (1.47)$$

onde a é uma constante de integração. Ou ainda, exigindo $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{\rho} = 1$ (ou seja, para densidades baixas, a densidade de energia tende à densidade de energia de repouso) e, portanto, $a = 0$:

$$\epsilon = \rho + \frac{p}{\Gamma - 1}. \quad (1.48)$$

Equações de estado politrópicas oferecem uma relação simplista entre a pressão e a densidade de energia da estrela, por isso, falham em capturar as complexidades da matéria nas camadas internas da estrela, onde a composição da matéria e as interações entre partículas tornam-se mais complexas. Na seção seguinte, exploraremos exemplos de equações de estado mais adequadas.

1.2.3 Equações de estado realistas

A formulação teórica dos modelos que descrevem a matéria nuclear tem se desenvolvido com base em métodos consolidados da teoria de campos efetiva aliada aos progressos constantes nos cálculos fundamentados de QCD. Os modelos têm sido aprimorados ao longo do tempo com dados provenientes de observações astrofísicas e resultados obtidos por meio de cálculos e simulações [Haensel, Potekhin e Yakovlev 2007]. A maioria das equações de estado é disponibilizada na forma de tabelas, que são então interpoladas para serem utilizadas em cálculos computacionais. Um exemplo de repositório de equações de estado tabeladas é o CompOSE (CompStar Online Supernovae Equations of State), que

fornece diversas equações de estado em um formato padronizado e documentado para uso em simulações astrofísicas [Typel et al. 2020].

Neste trabalho, usaremos as equações de estado KDE0v1, SKI3 e SLy9, apresentadas na figura 2. Essas escolhas se justificam pelo fato de que reproduzem características de estrelas de nêutrons compatíveis com as observações atuais. Além disso, apresentam diferenças significativas entre si, permitindo uma análise mais detalhada da influência da escolha da equação de estado nos resultados.

- KDE0v1: A equação de estado KDE0v1 é baseada em um modelo de interação Skyrme, que é uma das abordagens utilizadas para descrever a interação núcleon-núcleon. Esta equação foi ajustada para se alinhar com dados experimentais utilizando um método chamado “Simulated Annealing Method”, ou SAM, para calibrar os valores dos parâmetros da interação Skyrme [Agrawal, Shlomo e Au 2005].
- SKI3: É também baseada no modelo de interação de Skyrme. Utilizando um procedimento sistemático de ajuste, foram determinadas cinco parametrizações do funcional de Skyrme, que diferem entre si na forma como tratam a interação spin-órbita ou no conjunto de dados utilizado para o ajuste. Para o conjunto SkI3, foi garantido que a dependência da densidade do fator de forma da interação spin-órbita seja proporcional a $\rho = \rho_p + \rho_n$, como no modelo de campo médio relativístico, onde ρ é a densidade total, ρ_n é a densidade de nêutrons e ρ_p é a densidade de prótons [Reinhard e Flocard 1995].
- SLy9: A equação de estado SLy9 é parte de uma família de parametrizações desenvolvidas, e é baseada na interação nuclear efetiva SLy do tipo Skyrme, sendo capaz de descrever tanto a crosta quanto o núcleo líquido. Devido ao seu método de construção, essa interação é particularmente adequada para descrever as interações fortes na componente nucleônica da matéria densa em estrelas de nêutrons. [Douchin e Haensel 2001].

1.2.3.1 Equações de estado politrópicas por partes

Uma maneira eficiente de sistematizar e vincular as possíveis equações de estado a partir de observações astrofísicas é por meio do uso de parametrizações. Equações de estado parametrizadas nos permitem descrever diversos modelos em um único formato, alterando apenas seus parâmetros, cujo espaço pode ser delimitado a partir de dados observacionais.

Para que essa abordagem seja efetiva, precisamos que a equação tenha parâmetros suficientes e seja adequadamente flexível para reproduzir qualquer comportamento de uma equação de estado. Entretanto, não deve ter um número excessivo de parâmetros a fim de garantir que as limitações do espaço de parâmetros sejam as mais restritivas possíveis.

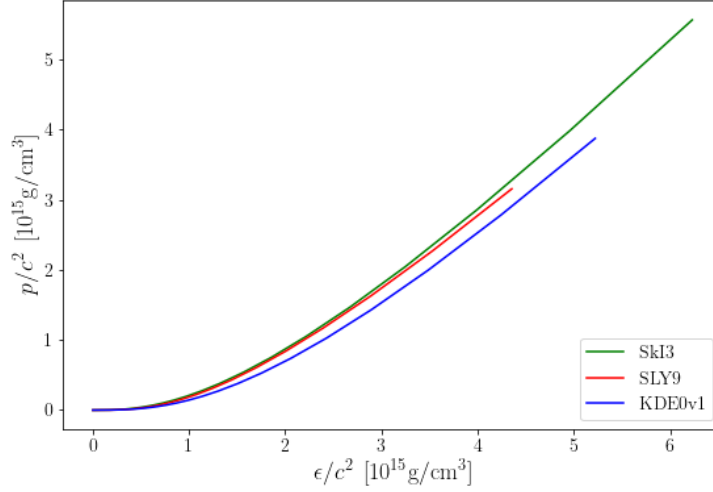


Figura 2 – Relação $p(\epsilon)$ para as equações de estado KDE0v1, SKI3 e SLy9, extraídas e adaptadas do repositório CompOSE [Typel, Oertel e Klähn 2015].

Uma abordagem viável para representar os diferentes estados da matéria no interior de uma estrela de nêutrons é utilizar uma equação politrópica para cada “região” da estrela. Isso nos permite ajustar a “rigidez” da equação de estado, capturando qualitativamente as complexidades do comportamento termodinâmico que a matéria exibe dentro da estrela [Read et al. 2009].

Este método, explorado em [Read et al. 2009], divide a estrela em intervalos de densidade de energia partindo de uma densidade ρ_0 , de forma que $\rho_0 < \rho_1 < \rho_2 < \dots$. Para cada intervalo, temos uma constante politrópica K_i e um índice adiabático Γ_i que definem a equação de estado daquele intervalo (veja um exemplo na figura 3). A escolha das constantes deve ser feita de forma que a pressão e a densidade de energia sejam contínuas dentro de toda a estrela. Neste contexto, a equação de estado é dada por:

$$p(\rho) = K_i \rho^{\Gamma_i}, \quad \rho_{i-1} \leq \rho \leq \rho_i, \quad (1.49)$$

e

$$\epsilon(\rho) = (1 + a_i)\rho + \frac{K_i}{\Gamma_i - 1} \rho^{\Gamma_i}, \quad \Gamma_i \neq 1. \quad (1.50)$$

onde, para que possamos garantir continuidade ao longo de toda a estrela, a_i devem respeitar

$$a_i = \frac{\epsilon(\rho_{i-1})}{\rho_{i-1}} - 1 - \frac{K_i}{\Gamma_i - 1} \rho_{i-1}^{\Gamma_i - 1}. \quad (1.51)$$

Equações de estado politrópicas por partes apresentam uma precisão adequada na aproximação das características globais de uma estrela. Entretanto, a descontinuidade no índice adiabático reduz a precisão esperada com que a equação parametrizada pode

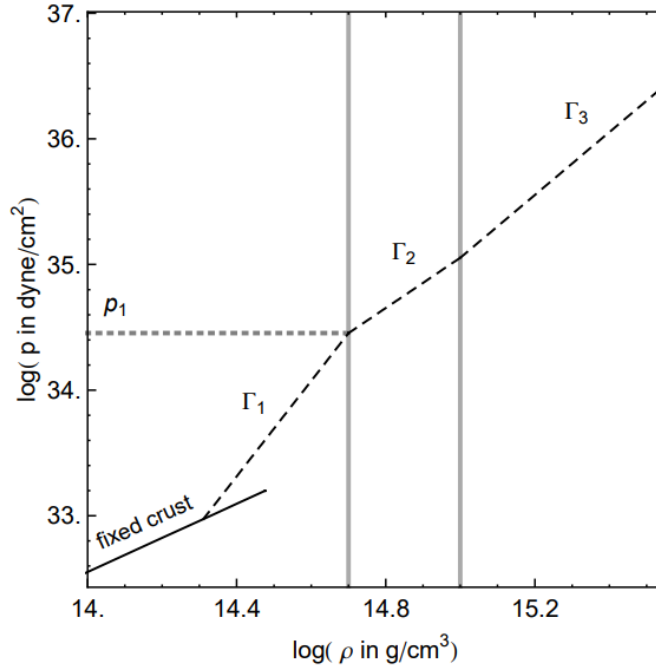


Figura 3 – Exemplo de equação de estado politrópica por partes. A equação é especificada pela escolha dos índices adiabáticos $\{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3\}$ em cada região e pela pressão p_1 na primeira densidade de divisão, $p_1 = p_1(\rho_1)$. Figura retirada de [Read et al. 2009].

aproximar a velocidade local do som, dada por

$$v_s(\rho) = \sqrt{\frac{dp}{d\epsilon}} = \sqrt{\frac{\Gamma_i p}{\epsilon + p}}. \quad (1.52)$$

A parametrização politrópica por partes generalizada, introduzida em [O’Boyle et al. 2020], é baseada em uma generalização do método anterior e tem como propósito garantir a continuidade da velocidade do som em toda a estrela ao adicionar uma constante de integração à equação de estado. Esses são apenas alguns exemplos de parametrizações da equação de estado que podem ser encontradas na literatura.

2 Estrelas de nêutrons estáticas

Em fevereiro de 1939, foram publicados os artigos de R. C. Tolman [Tolman 1939], e J. R. Oppenheimer e G. M. Volkoff [Oppenheimer e Volkoff 1939]. Tanto Tolman quanto Oppenheimer e Volkoff, em suas respectivas publicações, desenvolveram uma formulação que descreve o equilíbrio entre a gravidade e a pressão interna em estrelas esfericamente simétricas, considerando os efeitos da Relatividade Geral. Seus trabalhos ficaram posteriormente conhecidos como equações de TOV, em homenagem aos autores.

A configuração de equilíbrio de estrelas de nêutrons no contexto da Relatividade Geral é dada por um conjunto de equações: a equação de estado (que determina a relação entre pressão e densidade de energia), a equação de equilíbrio hidrostático e as equações de campo de Einstein, que governam a curvatura do espaço-tempo. Abaixo, exploraremos o formalismo para estrelas estáticas, discutindo alguns resultados numéricos obtidos.

2.1 Configuração de equilíbrio

Para que obtenhamos a equação de equilíbrio hidrostático e as equações de campo de Einstein para estrelas de nêutrons estáticas, precisamos primeiro definir a métrica do problema. A métrica de um espaço-tempo estático e esfericamente simétrico nas coordenadas de Schwarzschild, $\{t, r, \theta, \phi\}$, é dada por:

$$ds^2 = -e^{\nu(r)} dt^2 + e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.1)$$

onde $d\Omega^2$ é o elemento de ângulo sólido, definido por $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$, e ν e λ são funções da coordenada radial r , a serem determinadas.

Ao fixarmos as coordenadas t e r , e tomarmos $\theta = \pi/2$ variando ϕ entre 0 e 2π , obtemos uma circunferência ao redor do centro da estrela que nos leva ao comprimento próprio do círculo $l = 2\pi r$. Com isso, podemos identificar a variável r como o raio circunferencial, que, em geral, não é igual à distância radial medida por um observador local estático $dl = e^{\lambda} dr$. Isto acontece pela presença da curvatura do espaço-tempo, determinada, na direção radial de uma superfície a $t = \text{cte}$, pela função $\lambda(r)$. É conveniente relacionar $\lambda(r)$ a uma nova função $m(r)$, utilizando a expressão

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2m(r)}{r}. \quad (2.2)$$

Por se tratar de uma estrela estática, a única componente não nula da quadrivelocidade dos elementos de fluido é u^0 . Exigindo que a condição de normalização, dada

por

$$u^\mu u_\mu = -1, \quad (2.3)$$

seja satisfeita, temos:

$$u_\mu = (-e^{\nu/2}, 0, 0, 0). \quad (2.4)$$

De modo geral, a composição de estrelas de nêutrons estáticas pode ser descrita por um fluido perfeito, em que a evolução dinâmica do fluido é governada pela nulidade da divergência do tensor energia-momento, dada pela equação (1.10). Utilizando as equações (1.11), temos que a única componente não imediatamente nula é dada por $\nabla_\mu T^{r\mu}$, o que nos permite obter:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(p + \epsilon)}{2} \frac{d\nu}{dr}. \quad (2.5)$$

A equação acima, chamada de equação de equilíbrio hidrostático, nos permite calcular o gradiente de pressão necessário para manter o fluido estático no campo gravitacional, cujo efeito depende de $d\nu/dr$ [Schutz 2022].

Como vimos no primeiro capítulo, as equações de campo de Einstein descrevem a relação entre a geometria do espaço-tempo e o conteúdo de energia e momento presentes. Devido às simetrias do problema, assim como o tensor momento-energia, o tensor de Einstein possui apenas as componentes diagonais não nulas, fazendo com que tenhamos apenas 4 equações, dadas por:

$$\begin{aligned} G_{tt} &= \frac{e^{\nu(r)-\lambda(r)} \left(-1 + r\lambda'(r) + e^{\lambda(r)} \right)}{r^2}, \\ G_{rr} &= \frac{1 - e^{\lambda(r)} + r\nu'(r)}{r^2}, \\ G_{\theta\theta} &= \frac{1}{4} r e^{-\lambda(r)} (2r\nu''(r) - (r\nu'(r) + 2)(\lambda'(r) - \nu'(r))), \\ G_{\phi\phi} &= \sin^2 \theta G_{\theta\theta}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde ' representa derivação em relação a r .

Finalmente, conectando as equações (2.6) e (1.11), utilizando as equações de campo de Einstein (1.20) e também a expressão (2.2), temos, a partir da componente tt :

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon, \quad (2.7)$$

que descreve $m(r)$.

A partir da componente rr , temos:

$$\frac{d\nu}{dr} = 2 \frac{m + 4\pi r^3 p}{r(r - 2m)}, \quad (2.8)$$

que por sua vez define o potencial $\nu(r)$ da métrica. A partir deste resultado, podemos reescrever a equação (2.8) de forma que:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(\epsilon + p)(m + 4\pi r^3 p)}{r(r - 2m)}. \quad (2.9)$$

A expressão acima é conhecida como a equação de Tolman-Oppenheimer-Volkov, ou equação de TOV [Schutz 2022].

A partir das equações (2.7), (2.8) e (2.9) e de uma dada equação de estado, somos capazes de determinar as 4 variáveis do problema, ν , m , ϵ e p , em função da coordenada radial r . As componentes $\theta\theta$ e $\phi\phi$ das equações de Einstein não contribuem com informações adicionais, visto que ambas são idênticas e as identidades de Bianchi garantem que essa equação é uma consequência das equações (1.10), (2.7) e (2.8).

Na região exterior à estrela, temos que $T^{\mu\nu} = 0$, de forma que as equações do problema se reduzem a:

$$\frac{dm}{dr} = 0, \quad (2.10)$$

e

$$\frac{d\nu}{dr} = \frac{m}{r(r - 2m)}, \quad (2.11)$$

cujas soluções nos levam, respectivamente, a:

$$m(r) = M = cte, \quad (2.12)$$

e

$$e^{\nu(r)} = 1 - \frac{2M}{r} = e^{-\lambda(r)}, \quad (2.13)$$

onde a exigência de que o potencial ν se anule no infinito foi imposta. Com isso, a equação (2.1) se reduz à métrica de Schwarzschild:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.14)$$

Em um regime não relativístico, em que $p \ll \epsilon$, $pr^3 \ll m(r)$ e $2m(r) \ll r$, o espaço-tempo apresenta uma curvatura fraca, em que a equação de TOV e as equações de campo de Einstein se reduzem às equações Newtonianas [Haensel, Potekhin e Yakovlev 2007]:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{\epsilon m}{r^2}, \quad (2.15)$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon, \quad (2.16)$$

e

$$\frac{d\nu}{dr} = \frac{m}{r^2}, \quad (2.17)$$

em que $\nu(r)$ pode ser identificado como o potencial gravitacional Newtoniano. Ao compararmos as equações (2.15) e (2.9), é possível observar que as correções relativísticas fazem com que, para que um fluido permaneça estático, ele precise ter forças internas mais intensas do que na gravitação newtoniana.

Por se tratarem de equações diferenciais de primeira ordem, para integrarmos numericamente as equações (2.7), (2.8) e (2.9), precisamos definir as condições de contorno do problema. Ao imaginarmos uma pequena esfera de raio r_p de circunferência $2\pi r_p$ e raio próprio $|g_{rr}|^{1/2}r_p$, temos que um pequeno círculo em torno de $r = 0$ tem a razão entre a circunferência e o raio dada por $2\pi|g_{rr}|^{-1/2}$. Considerando que o espaço-tempo é localmente plano em qualquer ponto, assim como em $r = 0$, então a razão entre a circunferência e o raio do pequeno círculo em torno da origem deve ser dada por 2π . Portanto, $g_{rr}(r = 0) = 1$ e assim, conforme r tende a zero, $m(r)$ também deve se anular: $m(0) = 0$.

A contante $p(r = 0) =: p_c$ está conectada à densidade de energia central por meio da equação de estado, de maneira que diferentes escolhas de p_c acarretam estrelas com características diferentes. Dessa maneira, é possível definir $m(r)$, $p(r)$ e $\epsilon(r)$, uma vez que (2.7) e (2.9) independem do potencial $\nu(r)$.

Ao impormos a continuidade da pressão em todo o espaço-tempo, a superfície da estrela $r = R$ é definida então pelo ponto em que, integrando as equações a partir do centro da estrela, a pressão se anula: $p(R) = 0$. Por continuidade com a métrica de Schwarzschild, obtemos:

$$m(R) = M = 4\pi \int_0^R \epsilon(r)r^2 dr. \quad (2.18)$$

Outra condição de continuidade deve ser imposta, desta vez ao potencial $\nu(r)$. Como vimos anteriormente, o espaço-tempo exterior à estrela é dado pela métrica de Schwarzschild, portanto, temos que $\nu(r)$ deve obedecer à relação:

$$e^{\nu(R)} = e^{-\lambda(R)} = 1 - \frac{2M}{R}, \quad (2.19)$$

na superfície da estrela. Em termos práticos, o que fazemos é integrar o potencial a partir de $\nu(r = 0) = 1$, e reescalóná-lo de forma que seu valor na superfície seja dado pela equação (2.19). Isso é possível uma vez que a equação diferencial é invariante por esse reescalamento.

2.2 Resultados numéricos

A fim de integrarmos numericamente as equações que definem a configuração de equilíbrio da estrela estática, desenvolvemos um código em Python. Para isso, introduzimos variáveis

adimensionais $\hat{r}$, $\hat{m}$, $\hat{p}$ e $\hat{\epsilon}$, dadas por:

$$\hat{r} \equiv \frac{r}{c} \sqrt{G\bar{\rho}}, \quad \hat{m} \equiv \frac{m}{c^3} \sqrt{G^3\bar{\rho}}, \quad \hat{p} \equiv \frac{p}{c^2\bar{\rho}}, \quad \hat{\epsilon} \equiv \frac{\epsilon}{c^2\bar{\rho}}, \quad (2.20)$$

onde $\bar{\rho}$ é uma constante arbitrária, escolhida como $\bar{\rho} = 1 \times 10^{15} \text{ g/cm}^3$. Ao substituírmos as variáveis originais por suas versões adimensionais nas equações (2.7), (2.8) e (2.9), obtemos equações idênticas às iniciais e independentes da constante $\bar{\rho}$.

Método de Integração

Ao longo deste trabalho, utilizaremos frequentemente o método de Runge-Kutta de quarta ordem, ou RK4. Este método pertence a uma família de métodos iterativos de integração e é muito utilizado para obtenção de soluções aproximadas de equações diferenciais ordinárias por oferecer um equilíbrio entre precisão e eficiência computacional.

Imaginemos um problema de valor inicial dado por:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (2.21)$$

Nosso objetivo é obter uma aproximação da solução y no intervalo $[x_0, x_0 + L]$, ou seja, desejamos saber a função nos pontos discretos $x_n = x_0 + hn$, onde h é o tamanho do passo. Uma forma para lidar com este problema é aproximar a solução da equação acima numericamente – essa é a ideia básica por trás do RK4. Utilizando uma fórmula de quadratura, é possível escrever y_n a partir de uma média ponderada da derivada $y_{,x}$ em pontos intermediários:

$$y_n = y_{n-1} + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (2.22)$$

onde

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_{n-1}, y_{n-1}), \\ k_2 &= f\left(x_{n-1} + \frac{h}{2}, y_{n-1} + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 &= f\left(x_{n-1} + \frac{h}{2}, y_{n-1} + \frac{h}{2}k_2\right), \\ k_4 &= f(x_{n-1} + h, y_{n-1} + hk_3). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Uma análise mais detalhada sobre o método é explorada em [Butcher 2016].

Dessa maneira, as expressões (2.7), (2.8) e (2.9) que precisamos resolver passam a compor um sistema de equações da forma (2.21), com $x = \hat{r}$,

$$y(r) = \begin{pmatrix} \hat{m} \\ \hat{p} \\ \Phi \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

e

$$f(y) = \begin{pmatrix} 4\pi r^2 \hat{\epsilon} \\ -\frac{(\hat{\epsilon} + \hat{p})(\hat{m} + 4\pi \hat{p} \hat{r}^3)}{\hat{r}(\hat{r} - 2\hat{m})} \\ \frac{2(\hat{m} + 4\pi \hat{p} \hat{r}^3)}{\hat{r}(\hat{r} - 2\hat{m})} \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

As condições iniciais, $y_0 = y(\hat{r}_0)$, impostas em $\hat{r} = \hat{r}_0 \approx 0$, são obtidas a partir das expansões das equações (2.7), (2.8) e (2.9) ao redor de $r = 0$, dadas por:

$$\hat{m}(\hat{r}_0) \approx \frac{4}{3}\pi \hat{r}_0^3 \hat{\epsilon}_c + O(\hat{r}_0^4), \quad (2.26)$$

$$\hat{p}(\hat{r}_0) \approx \hat{p}_c - \frac{2}{3}\pi \hat{r}_0^2 (3\hat{p}_c^2 + 4\hat{p}_c \hat{\epsilon}_c + \hat{\epsilon}_c^2) + O(\hat{r}_0^4), \quad (2.27)$$

$$\nu(\hat{r}_0) \approx \nu_0 + \frac{4}{3}\pi \hat{r}_0^2 (3\hat{p}_c + \hat{\epsilon}_c) + O(\hat{r}_0^4), \quad (2.28)$$

onde $\hat{\epsilon}_c = \hat{\epsilon}(p_c)$.

Visto que as equações de estado utilizadas estão em formato tabular, faz-se necessária a utilização de um método de interpolação para que obtenhamos uma relação contínua entre ϵ e p . Para isto, utilizamos a função *CubicSpline*, do pacote Scipy.

A integração foi realizada a partir de um raio inicial $\hat{r}_0 = 10^{-5}$, utilizando passos $d\hat{r} = 10^{-4}$ até que a pressão assumisse um valor menor que $\hat{p}_s = 10^{-14}$. Suponha que isto tenha acontecido no ponto $n + 1$. Partimos então de n e executamos uma busca binária, utilizando passos cada vez menores até que o raio seja encontrado com a precisão desejada. Este refinamento é necessário para garantir uma melhor precisão para o valor do raio da estrela.

Resultados Numéricos

Nas figuras 4 e 5, ilustramos as soluções numéricas obtidas para as equações relativísticas que definem a configuração de equilíbrio de estrelas de nêutrons estáticas.

Na figura 4, temos as variáveis ν , m , ϵ e p do problema em função da coordenada radial r para as equações de estado KDE0v1, SKI3 e SLy9, introduzidas anteriormente. Na região central da estrela, observa-se que as variáveis ϵ e m exibem pouca variação ao compararmos diferentes equações de estado. Isso ocorre pois $m(0) = 0$ para todas as equações de estado e escolhemos $\hat{\epsilon}_c = 1$ para este exemplo. No entanto, à medida que nos aproximamos da superfície da estrela, essa diferença torna-se significativa. Já as variáveis p e ν apresentam diferentes perfis para cada equação de estado ao longo de toda a estrela.

Além disso, verifica-se o atendimento às condições de contorno: ϵ e p tornam-se nulos na superfície, permanecem desta maneira na região exterior. Em contrapartida, m

assume seu pico na superfície da estrela, mantendo-se constante na região exterior. Por fim, o potencial ν , negativo ao longo de toda a estrela, tende a zero no infinito.

Na figura 5 à esquerda, apresentamos a relação entre a massa gravitacional M e a densidade de energia central ϵ_c para diferentes equações de estado. É possível observar que estrelas com densidades centrais pequenas apresentam menores massas. À direita, na mesma figura, temos um diagrama massa-raio ($M \times R$), parametrizado pela densidade de energia central. Analisando o gráfico, é possível notar a influência da equação de estado na relação, exceto no regime de baixas densidades centrais. As massas máximas para as equações de estado SKI3, SLy9 e KDE0v1 são, respectivamente, $2.24 M_\odot$, $2.16 M_\odot$ e $1.97 M_\odot$. Como discutido no capítulo anterior, obter resultados acurados para essas quantidades é crucial para que possamos compará-los a dados observacionais e, assim, eliminar equações de estado inadequadas.

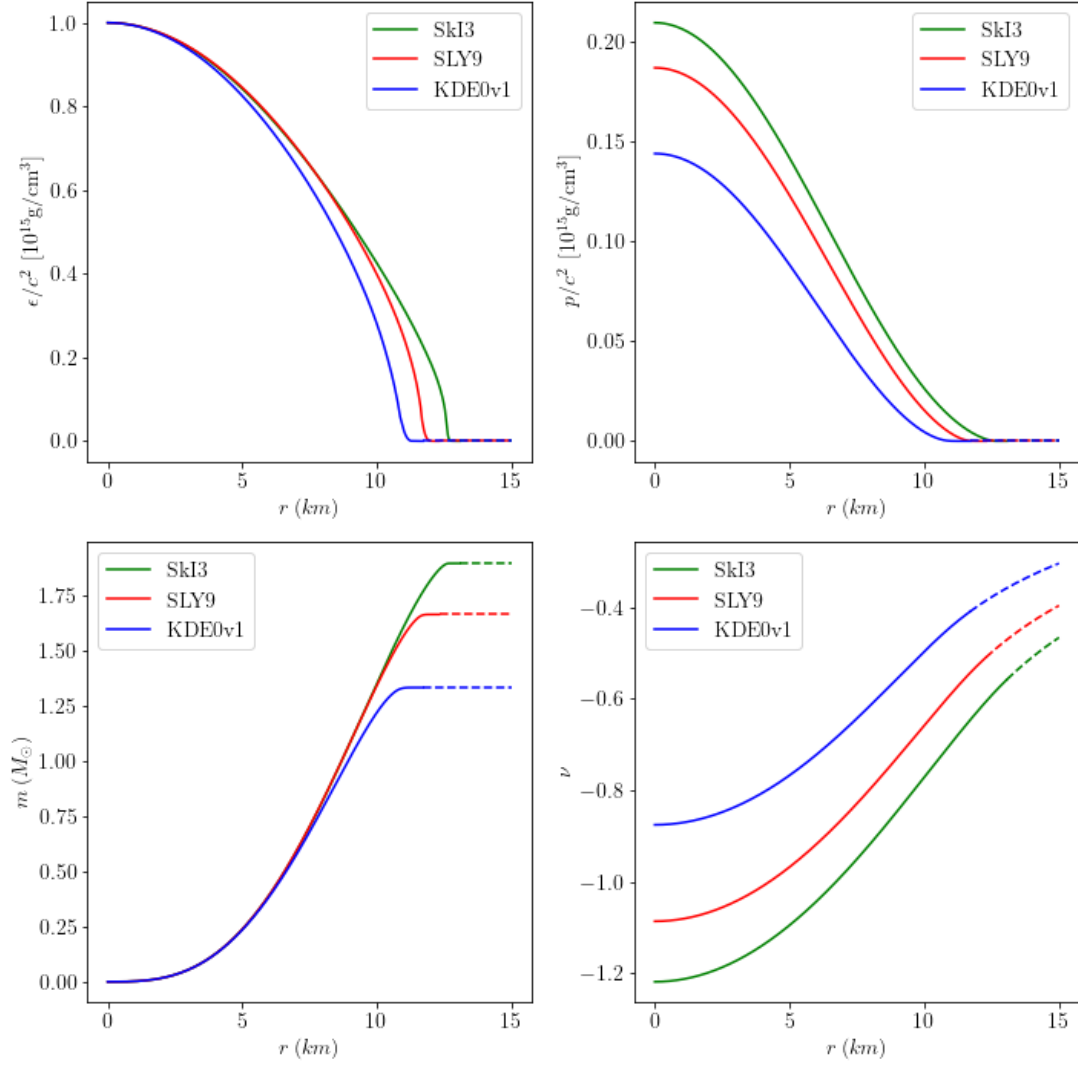


Figura 4 – Os gráficos superiores mostram as relações entre a densidade de energia ϵ (esquerda) e a pressão p (direita) em função da coordenada radial r . No canto inferior direito, exibimos a dependência radial de $m(r)$ e do potencial $\nu(r)$. A linha pontilhada marca a região exterior à estrela. Utilizamos as equações de estado KDE0v1, SKI3 e SLy9, extraídas e adaptadas do repositório CompOSE.

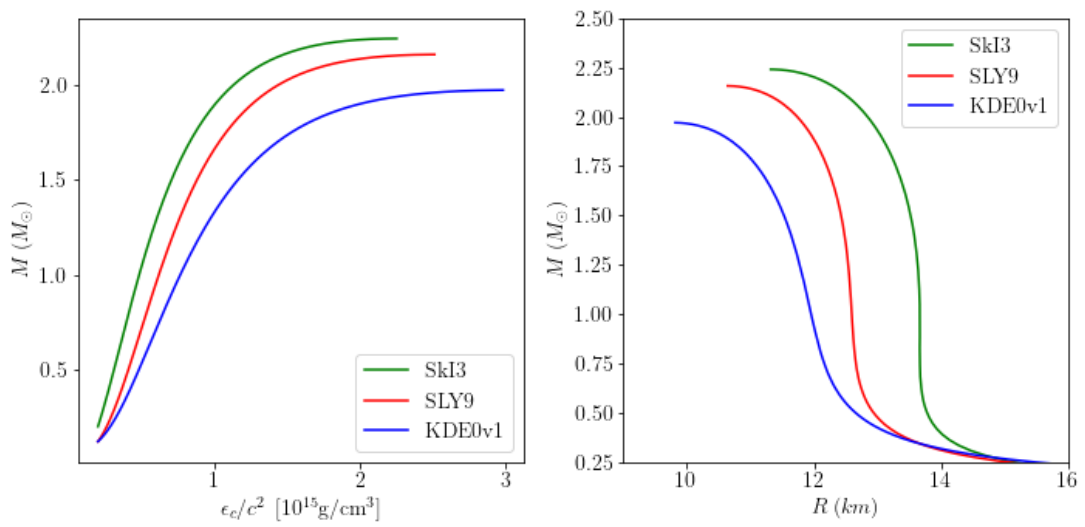


Figura 5 – À esquerda, exibimos a variação da massa gravitacional M em função da densidade de energia central ϵ_c para as equações de estado SKI3, SLy9 e KDE0v1, extraídas e adaptadas do repositório CompOSE. À direita, temos a relação entre M e o raio R da estrela, parametrizada por ϵ_c , para as mesmas equações de estado. As massas máximas são, respectivamente, $2.24 M_\odot$, $2.16 M_\odot$ e $1.97 M_\odot$. As curvas são cortadas no ponto correspondente à massa máxima.

3 Estrelas de nêutrons com baixa rotação

É esperado que, um tempo após serem formadas, estrelas de nêutrons apresentem velocidade angular uniforme devido a alguns mecanismos de frenagem, como a viscosidade [Flowers e Itoh 1976, Flowers e Itoh 1979, Cutler e Lindblom 1987]. Apesar de muitas estrelas de nêutrons girarem rapidamente, uma aproximação perturbativa para rotações lentas, conhecida como o Formalismo de Hartle-Thorne [Hartle 1967, Hartle e Thorne 1968], oferece uma abordagem simplificada para estudar a influência da rotação nas propriedades internas e externas da estrela. Neste capítulo, abordaremos este formalismo e apresentaremos alguns resultados numéricos obtidos utilizando códigos próprios. Para isso, consideraremos estrelas axialmente simétricas, uma vez que, para que uma configuração possa estar em equilíbrio na Relatividade Geral, não deve haver emissões de ondas gravitacionais, o que é garantido pela simetria axial. Adicionalmente, assumiremos também que a configuração é simétrica em relação a um plano perpendicular ao eixo de rotação [Hartle 1967].

A abordagem utilizada pelo formalismo Hartle-Thorne consiste em calcular as equações de equilíbrio de estrelas com rotação lenta por meio de uma pequena perturbação de uma configuração estática já conhecida, expandindo as funções métricas até a segunda ordem na velocidade angular. Uma expansão com essas características, utilizando as mesmas coordenadas do fundo estático, poderia ser justificada devido ao fato de que a variação fracionária em qualquer coeficiente métrico causada pela rotação será muito menor que a unidade em todo o espaço. Entretanto, uma vez que a rotação causa um deslocamento da superfície da estrela em relação à sua configuração estática, isto não é verdade ao expandirmos a pressão ou densidade utilizando estas mesmas coordenadas. Isto é, a quantidade $\delta p/p_0$, com p_0 denotando a pressão do fundo e δp , sua perturbação, pode não ser pequena (e, de fato, divergir) nas vizinhanças do raio da configuração de fundo, uma vez que $p_0(R) = 0$. Portanto, introduziremos novas coordenadas r e θ , que se relacionam com as coordenadas estáticas r_s e θ_s a partir das expressões:

$$\begin{aligned} r &= r_s + \xi(r_s, \theta_s) + O(\Omega^4) \\ \theta &= \theta_s, \\ \epsilon[r(r_s, \theta), \theta] &= \epsilon(r_s) \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde ξ é a diferença radial entre pontos localizados no mesmo ângulo θ e com a mesma densidade de energia $\epsilon(r_s)$ nas configurações estática e em rotação, e que obedece à relação:

$$\xi(r_s, \theta)/r_s \ll 1, \tag{3.2}$$

como ilustrado na figura abaixo.

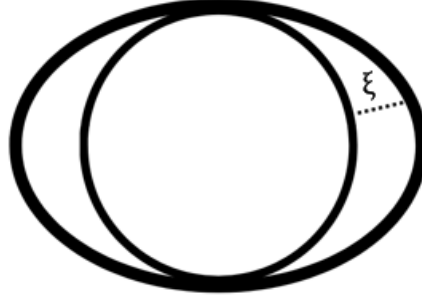


Figura 6 – Ilustração da diferença radial entre pontos localizados no mesmo ângulo θ e com a mesma densidade de energia $\epsilon(r_s)$ nas configurações estática e em rotação.

Seguindo as considerações feitas por Hartle e Thorne, discutiremos estrelas rígidas, rodando lenta e uniformemente, com velocidade angular Ω medida por um observador distante. Tal velocidade deve ser pequena o suficiente para que as variações fracionárias na pressão, densidade de energia e campo gravitacional devidas à rotação sejam todas muito menores que 1. Para isso, impomos que

$$\Omega^2 \ll \frac{M_s}{R_s^3}, \quad (3.3)$$

em que M_s e R_s se referem à massa e ao raio da estrela estática. O lado direito da equação acima pode ser reconhecido como o quadrado da velocidade angular de uma partícula livre em órbita circular em $r = R_s$, segundo a gravitação Newtoniana.

3.1 Formalismo de Hartle-Thorne

Existem dois principais efeitos que diferenciam uma estrela relativística em rotação de uma estática: o formato da estrela, que é achatada pelas forças centrífugas, e o arrasto de referenciais inerciais pela rotação da fonte do campo gravitacional. Enquanto o primeiro efeito também está presente no limite Newtoniano, o segundo é um efeito puramente relativístico. Na subseção 3.1.1, analisaremos o arrasto de referenciais inerciais provocado por uma estrela de nêutrons com baixa velocidade angular. Na subseção 3.1.2, determinaremos o formato da estrela, a relação entre a massa e a densidade de energia central, o momento de quadrupolo e sua elipticidade.

3.1.1 Correção de primeira ordem: arrasto de referenciais inerciais

A métrica para um espaço-tempo axialmente simétrico e estacionário pode ser escrita em coordenadas adaptadas como [Hartle 1967]:

$$ds^2 = -H(r, \theta)^2 dt^2 + Q(r, \theta)^2 dr^2 + r^2 K(r, \theta)^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta (d\phi - L(r, \theta) dt)^2]. \quad (3.4)$$

Comparando a estrutura das métricas (2.1) e (3.4), é possível perceber que uma diferença importante entre as expressões é o surgimento de um termo cruzado envolvendo as coordenadas t e ϕ , $g_{t\phi}$, proporcional a $L(r, \theta)$. Este termo adicional introduz novos efeitos nas trajetórias das partículas, de maneira que, ao considerarmos uma partícula de massa $\bar{m}$ com momento angular nulo, $p_\phi = 0$, em queda livre a partir do infinito em direção à estrela, teremos que

$$p^t = \bar{m} \frac{dt}{d\tau} = g^{tt} p_t, \quad p^\phi = \bar{m} \frac{d\phi}{d\tau} = \bar{m} g^{t\phi} p_t, \quad (3.5)$$

de maneira que a velocidade angular da partícula será dada por

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{p^\phi}{p^t} = \frac{g^{t\phi}}{g^{tt}} = L(r, \theta) \quad (3.6)$$

Ou seja, mesmo com momento angular nulo ($p_\phi = 0$), a partícula é arrastada na direção da rotação da estrela. Isso nos permite interpretar $L(r, \theta)$ como a velocidade angular — em relação a um observador assintótico — adquirida por uma partícula inicialmente em repouso a grandes distâncias ($r \rightarrow \infty$), ao se mover até a posição (r, θ) no espaço-tempo da estrela.

Como mencionado anteriormente, o formalismo de Hartle-Thorne se baseia na expansão das funções métricas e quantidades que descrevem o fluido em uma série de potências na velocidade angular da estrela, Ω . Essa expansão pode ser simplificada ao levarmos em consideração as simetrias do problema, que fazem com que a métrica e as propriedades do fluido sejam invariantes por transformações conjuntas do tempo e da direção de rotação ($t \rightarrow -t$, $\Omega \rightarrow -\Omega$). Dessa maneira, precisamos nos assegurar de que os termos das expansões sejam definidos de forma que a métrica não se altere por meio destas transformações. Como H , Q e K acompanham termos que não mudam de sinal por transformações deste tipo, para que a métrica não se altere, suas expansões não devem permitir termos ímpares em Ω , conservando assim apenas os termos pares. Já L acompanha um termo que muda de sinal ($g_{t\phi}$), com isso, sua expansão deve conter apenas termos ímpares em Ω , que também invertem o sinal, mantendo assim a métrica invariante. Dado que estamos interessados apenas nos efeitos até segunda ordem na velocidade angular, a expansão de L pode ser escrita como

$$L(r, \theta) = \omega(r, \theta) + O(\Omega^3), \quad (3.7)$$

em que $\omega(r, \theta)$ é um termo de primeira ordem em Ω .

Para calcularmos $\omega(r, \theta)$, utilizaremos a componente relevante das equações de campo de Einstein,

$$R^t_\phi = 8\pi T^t_\phi. \quad (3.8)$$

Levando em consideração a condição de normalização $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1$, podemos escrever as componentes da quadrivelocidade dos elementos de fluido como

$$u^r = u^\theta = 0, \quad u^\phi = \Omega u^t, \quad u^t = [-(g_{tt} + 2\Omega g_{t\phi} + \Omega^2 g_{\phi\phi})]^{-1/2}. \quad (3.9)$$

Expandindo T_ϕ^t em potências de Ω e mantendo apenas termos lineares, obtemos

$$\begin{aligned} T_\phi^t &= (\epsilon + p)u^t u_\phi \\ &= (\epsilon + p)(u^t)^2(g_{t\phi} + \Omega g_{\phi\phi}) \\ &= (\epsilon + p)e^{-\nu}(\Omega - \omega)r^2 \sin^2 \theta + O(\Omega^3). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Expandindo também o lado esquerdo da equação (3.8), obtemos, após algumas manipulações,

$$\begin{aligned} -2r^2 \sin \theta e^{(\nu+\lambda)/2} R_\phi^t &= \frac{\partial}{\partial r} \left[e^{-(\nu+\lambda)/2} r^4 \sin^3 \theta \frac{\partial \omega}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[e^{(\lambda-\nu)/2} r^2 \sin^3 \theta \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right] \\ &+ O(\Omega^3). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Uma vez que ω foi identificada como a velocidade de um observador em queda livre de momento angular nulo, podemos interpretar a quantidade $\bar{\omega} = \Omega - \omega$ como a velocidade angular do fluido em relação a esse observador.

Fazendo uso das equações (2.7)–(2.9) e mantendo apenas termos lineares em (3.11), obtemos para $\bar{\omega}$:

$$\frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^4 j \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial r} \right) + \frac{4}{r} \frac{dj}{dr} \bar{\omega} + \frac{e^{(\lambda-\nu)/2}}{r^2} \frac{1}{\sin^3 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin^3 \theta \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \theta} \right) = 0, \quad (3.12)$$

onde

$$j(r) = e^{-(\nu+\lambda)/2}. \quad (3.13)$$

A equação (3.12) depende apenas da configuração estática de fundo, e pode ser simplificada por separação de variáveis, utilizando harmônicos esféricos vetoriais:

$$\bar{\omega}(r, \theta) = \sum_{l=1}^{\infty} \bar{\omega}_l(r) \left(-\frac{1}{\sin \theta} \frac{dP_l}{d\theta} \right), \quad (3.14)$$

onde P_l são os polinômios de Legendre e $\bar{\omega}_l(r)$ satisfaz:

$$\frac{1}{r^4} \frac{d}{dr} \left[r^4 j(r) \frac{d\bar{\omega}_l}{dr} \right] + \left[\frac{4}{r} \frac{dj}{dr} - e^{(\lambda-\nu)/2} \frac{l(l+1) - 2}{r^2} \right] \bar{\omega}_l = 0. \quad (3.15)$$

É conveniente estudarmos o comportamento da equação (3.15) quando $r \rightarrow 0$ e $r \rightarrow \infty$. Primeiramente, consideraremos o limite em que $r \rightarrow 0$, em que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{dj}{dr} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} j = j_0 = e^{-(\nu_0 + \lambda_0)/2}, \quad (3.16)$$

em que $\lambda_0 = \lambda(0)$ e $\nu_0 = \nu(0)$. Ao propormos uma solução do tipo $\bar{\omega}_l(r) = \sum_{s=0}^{\infty} C_l r^s$ para a equação resultante, encontraremos

$$\bar{\omega}_l(r) = c_+ r^{S_+} + c_- r^{S_-}, \quad (3.17)$$

$$S_{\pm} = -\frac{3}{2} \pm \left[\frac{9}{4} + \frac{l(l+1)-2}{j_0} \right]^{1/2}. \quad (3.18)$$

Impondo a condição de regularidade da solução na origem, ou seja, que $\bar{\omega}_l(r)$ não divirja quando $r \rightarrow 0$, devemos demandar que $c_- = 0$, de forma que

$$\bar{\omega}_l(r) \propto r^{S_+}, \quad r \rightarrow 0. \quad (3.19)$$

Já quando $r \rightarrow \infty$, temos que $\lim_{r \rightarrow \infty} e^{\lambda(r)} = 1$ e $\lim_{r \rightarrow \infty} e^{\nu(r)} \rightarrow 1$, e a equação (3.15) se transforma em

$$\frac{1}{r^4} \frac{d}{dr} \left[r^4 \frac{d\bar{\omega}_l}{dr} \right] - \frac{l(l+1)-2}{r^2} \bar{\omega}_l = 0. \quad (3.20)$$

De forma similar ao caso anterior, assumindo uma solução do tipo $\bar{\omega}_l(r) = \sum_{s=0}^{\infty} C_l r^s$, obtemos

$$\bar{\omega}_l(r) \rightarrow a_- r^{-l-2} + a_+ r^{l-1}, \quad r \rightarrow \infty. \quad (3.21)$$

Agora, uma vez que a equação (3.15) é linear e homogênea, possui uma liberdade de reescalonamento, de forma que, se $\bar{\omega}_1$ é solução, $c\bar{\omega}_1$ ($c \in \mathbb{R}$) também é solução. Portanto, só temos liberdade para impor uma condição de contorno, o que já fizemos ao exigir $c_- = 0$. Gostaríamos, no entanto, que a solução seja regular quando $r \rightarrow \infty$, mas não temos liberdade para impor $a_+ = 0$. Assim, vemos que a condição de regularidade no infinito só pode ser garantida se $l = 1$. Dessa maneira, a equação (3.15) se reduz a:

$$\frac{1}{r^4} \frac{d}{dr} \left(r^4 j \frac{d\bar{\omega}}{dr} \right) + \frac{4}{r} \frac{dj}{dr} \bar{\omega} = 0, \quad (3.22)$$

fazendo com que $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1$ se torne função apenas da coordenada radial r . Note que $r = r_s$ em primeira ordem, de forma que somos capazes de reescrever a equação acima utilizando a coordenada radial da configuração estática.

Além disso, como $l = 1$, temos que as condições de contorno assumem a forma

$$\bar{\omega}(r \rightarrow 0) \rightarrow \text{cte} \quad \text{e} \quad \bar{\omega}_l(r \rightarrow \infty) \rightarrow \text{cte } r^{-3}. \quad (3.23)$$

Para $r \geq R_s$ temos que $j = 1$, fazendo com que a equação (3.22) possa ser facilmente integrada, resultando em:

$$\bar{\omega}(r) = \Omega - \frac{2J}{r^3}, \quad (3.24)$$

em que a quantidade J pode ser identificada como o momento angular total da estrela. Essa constatação é possível devido ao fato de que, na região assintótica ($r \gg R_s$) do espaço-tempo com que estamos trabalhando, a componente $g^{t\phi}$ da métrica pode ser expressa como:

$$g^{t\phi} = -\frac{2J}{r^3}, \quad (3.25)$$

em que J é o parâmetro de momento angular do espaço-tempo, que coincide com o momento angular de Komar, a ser introduzido posteriormente em (4.28) [Poisson 2004].

A forma linear e homogênea da equação (3.22) fora da estrela nos proporciona uma relação de proporcionalidade entre o momento angular e a velocidade angular para rotações baixas, dada por

$$J = I\Omega, \quad (3.26)$$

na qual I é a generalização do momento de inércia newtoniano para estrelas com baixa rotação. Dessa maneira, a partir da relação (3.24), é possível escrever:

$$\beta \equiv \frac{\bar{\omega}'(R_s)}{\bar{\omega}(R_s)} = \frac{6I}{R_s(R_s^3 - 2I)}, \quad (3.27)$$

de maneira que

$$I = \frac{\beta R_s^4}{6 + 2\beta R_s}, \quad (3.28)$$

e $\bar{\omega}'$ indica a derivada em relação a r . Essa expressão nos permite obter o momento de inércia e o momento angular a partir do cálculo de β , computado a partir da integração numérica da equação (3.15) de $r = 0$ a $r = R_s$.

Além disso, utilizando (3.24), temos que:

$$\Omega = \bar{\omega}(R_s) + \frac{R_s \bar{\omega}'(R_s)}{3}. \quad (3.29)$$

Uma consequência da linearidade e homogeneidade da equação (3.22) é a possibilidade de obtenção de soluções para diferentes valores de velocidade angular a partir do reescalonamento da solução para um dado valor de Ω . Assim, utilizando a equação (3.29) podemos escrever:

$$\Omega_{desejada} = C\Omega_{original} = C \left(\bar{\omega}(R_s) + \frac{R_s \bar{\omega}'(R_s)}{3} \right), \quad (3.30)$$

onde C é uma constante dada por:

$$C = \frac{\Omega_{desejada}}{\left(\bar{\omega}(R_s) + \frac{R_s \bar{\omega}'(R_s)}{3} \right)}. \quad (3.31)$$

Portanto, para que possamos calcular a configuração de equilíbrio para uma desejada velocidade angular, devemos multiplicar $\bar{\omega}_{original}$ e sua derivada pela constante C .

3.1.2 Correções de segunda ordem: propriedades físicas da estrela

Expandindo a métrica (3.4) até segunda ordem em Ω e renomeando os potenciais métricos, chegamos à expressão [Hartle 1967]:

$$ds^2 = -e^\nu[1 + 2h(r, \theta)]dt^2 + e^\lambda[1 + 2m(r, \theta)/(r - 2m_s)]dr^2 + r^2[1 + 2k(r, \theta)][d\theta^2 + \sin^2\theta(d\phi - \omega dt)^2] + O(\Omega^3), \quad (3.32)$$

onde $\nu(r)$ e $\lambda(r)$ são os potenciais métricos que definem a solução estática de fundo e $m_s(r)$ é a função aspecto de massa do caso estático. Por outro lado, $h(r, \theta)$, $m(r, \theta)$ e $k(r, \theta)$ são termos a serem calculados e que se transformam como escalares sob rotações.

Novamente, o cálculo das perturbações rotacionais é simplificado utilizando uma expansão em polinômios de Legendre, de forma que obtemos

$$\begin{aligned} h(r, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} h_l(r_s) P_l(\cos \theta), \\ m(r, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} m_l(r_s) P_l(\cos \theta), \\ k(r, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} k_l(r_s) P_l(\cos \theta), \end{aligned} \quad (3.33)$$

Uma vez que assumimos que o espaço-tempo é simétrico por reflexão em torno do equador (i.e., $\theta \rightarrow \pi - \theta$ ou $\cos \theta \rightarrow -\cos \theta$) e como os polinômios de Legendre se transformam como $P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)$, apenas os termos pares devem ser mantidos na expansão acima. Além disso, devido à simetria da métrica (3.4), cuja forma não é alterada por transformações do tipo $r \rightarrow f(r)$, somos capazes de estabelecer uma função $f(r) = r/(1 + k_0)^{1/2}$ de tal forma que, nas novas coordenadas, $k_0(r) = 0$, simplificando assim o problema.

Analisando a definição de ξ , é possível constatar que o mesmo também se transforma como um escalar sob rotações, de maneira que sua expansão se dá de maneira análoga à feita acima

$$\xi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \xi_l(r_s) P_l(\cos \theta). \quad (3.34)$$

O próximo passo para obtermos as equações que determinam a configuração de equilíbrio em segunda ordem em Ω é calcular a expansão das equações de campo de Einstein utilizando a métrica (3.32) até $O(\Omega^2)$. O processo de obtenção destas expressões é detalhado no apêndice da referência [Hartle 1967] e tem como resultado equações do tipo

$$H_\mu^\nu(h, m, k, \xi) = \Omega_\mu^\nu(\bar{\omega}), \quad (3.35)$$

onde H_μ^ν é linear em h , m , k e ξ , nos assegurando que os diferentes valores de l da expansão de h , m , k e ξ não estão acoplados entre si. Por outro lado, Ω_μ^ν é quadrático em $\bar{\omega}$, que se transforma como $l = 1$, portanto esse termo, quando expandido em polinômios de

Legendre, gera apenas contribuições de $l = 0$ e $l = 2$. Assim, apenas os harmônicos com $l = 0$ e $l = 2$ têm um termo de fonte que depende da velocidade angular. Os coeficientes dos demais termos devem, portanto, se anular, pois não dependem da velocidade angular e são nulos no caso estático.

Como veremos no próximo capítulo, a equação de equilíbrio hidrostático para uma estrela isentrópica rodando de forma uniforme é dada por (4.26), ou:

$$\text{cte} = \mu_c \equiv \frac{\epsilon + p}{u^t} e^{-\int \frac{d\epsilon}{\epsilon + p}}. \quad (3.36)$$

Utilizando uma expansão até segunda ordem em Ω , temos, para o lado esquerdo,

$$\mu_c = \mu' [1 + \gamma + O(\Omega^4)], \quad (3.37)$$

onde γ é uma constante de ordem Ω^2 . Utilizando a relação apresentada em (3.9) para u_t e expandindo-a em Ω até segunda ordem, obtemos

$$\mu' (1 + \gamma) = (\epsilon + p) e^{-\int \frac{d\epsilon}{\epsilon + p}} e^{\nu/2} \left[1 + \frac{1}{2} (2h + 2p^* - e^{-\nu} r_s^2 \sin^2 \theta \bar{\omega}^2) \right] \quad (3.38)$$

onde

$$p^*(r_s, \theta) \equiv -\xi \left(\frac{1}{\epsilon + p} \frac{dp}{dr} \right). \quad (3.39)$$

Separando as equações de ordem zero e segunda ordem em Ω , obtemos, respectivamente

$$\mu' = (\epsilon + p) e^{-\int \frac{d\epsilon}{\epsilon + p}} e^{\nu/2} \quad (3.40)$$

e

$$\gamma = p^*(r_s, \theta) + h(r_s, \theta) - \frac{1}{2} e^{-\nu} r_s^2 \sin^2 \theta \bar{\omega}^2. \quad (3.41)$$

Expandindo ambos os lados da equação (3.41) em polinômios de Legendre, encontramos

$$l = 0: \quad \gamma = p_0^*(r_s) + h_0(r_s) - \frac{1}{3} e^{-\nu(r_s)} r_s^2 \bar{\omega}(r_s)^2, \quad (3.42)$$

$$l = 2: \quad 0 = p_2^*(r_s) + h_2(r_s) + \frac{1}{3} e^{-\nu(r_s)} r_s^2 \bar{\omega}(r_s)^2, \quad (3.43)$$

onde

$$p_0^*(r_s) \equiv -\xi_0(r_s) \left(\frac{1}{\epsilon + p} \frac{dp}{dr_s} \right), \quad p_2^*(r_s) \equiv -\xi_2(r_s) \left(\frac{1}{\epsilon + p} \frac{dp}{dr_s} \right). \quad (3.44)$$

A partir das equações acima somos capazes de obter ξ_0 e ξ_2 em termos das novas variáveis p_0^* e p_2^* , que por sua vez obedecem (3.42) e (3.43). Como discutido anteriormente, as equações para $l = 0$ e $l = 2$ não se acoplam entre si e podem ser consideradas separadamente.

Equações para $l = 0$

Para obtermos as funções h_0 , m_0 e ξ_0 , utilizaremos a equação (3.42) e as componentes tt e $r_s r_s$ das equações de campo de Einstein. Expandindo ambos os lados das equações em segunda ordem em Ω , obtemos [Hartle 1967]:

$$\frac{dm_0}{dr_s} = 4\pi r_s^2 \frac{d\epsilon}{dp} (\epsilon + p) p_0^* + \frac{1}{12} j^2 r_s^4 \left(\frac{d\bar{\omega}}{dr_s} \right)^2 - \frac{1}{3} r_s^3 \frac{dj^2}{dr_s} \bar{\omega}^2, \quad (3.45)$$

e

$$\frac{dh_0}{dr_s} - \frac{m_0 r_s^2}{(r_s - 2m_s)^2} \left(8\pi p + \frac{1}{r_s^2} \right) = \frac{4\pi(\epsilon + p) r_s^2}{(r_s - 2m_s)} p_0^* - \frac{1}{12} \frac{r_s^4}{(r_s - 2m_s)} j^2 \left(\frac{d\bar{\omega}}{dr_s} \right)^2. \quad (3.46)$$

A partir da derivação da equação (3.42), obtemos uma relação entre dh_0/dr_s e dp_0^*/dr_s , que nos permite eliminar dh_0/dr_s da equação (3.46), nos levando a

$$\begin{aligned} -\frac{dp_0^*}{dr_s} + \frac{1}{12} \frac{r_s^4}{(r_s - 2m_s)} j^2 \left(\frac{d\bar{\omega}}{dr_s} \right)^2 + \frac{1}{3} \frac{d}{dr_s} \left(\frac{r_s^3 j^2 \bar{\omega}^2}{r_s - 2m_s} \right) &= \frac{4\pi(\epsilon + p) r_s^2}{(r_s - 2m_s)} p_0^* + \\ &+ \frac{m_0 r_s^2}{(r_s - 2m_s)^2} \left(8\pi p + \frac{1}{r_s^2} \right). \end{aligned} \quad (3.47)$$

A equação (3.47), juntamente com a equação (3.45), determina o problema para $l = 0$.

As condições de contorno para a integração das equações (3.45) e (3.47) são obtidas ao garantir que as densidades centrais das configurações estática e rotacionando sejam as mesmas, de maneira que, em $r_s \approx 0$:

$$m_0 \approx \frac{4\pi}{15} (\epsilon_c + p_c) \left[\left(\frac{d\epsilon}{dp} \right)_c + 2 \right] (j_c \bar{\omega}_c)^2 r_s^5, \quad (3.48)$$

e

$$p_0^* \approx \frac{1}{3} (j_c \bar{\omega}_c)^2 r_s^2, \quad (3.49)$$

onde o subscrito c indica quantidades avaliadas no centro da estrela.

Na região externa à estrela, as equações (3.46) e (3.45) simplificam e podem ser resolvidas analiticamente. Obtemos

$$m_0(r_s) = m_\infty - \frac{J^2}{r_s^3}, \quad (3.50)$$

e

$$h_0(r_s) = -\frac{m_\infty}{(r_s - 2M_s)} + \frac{J^2}{r_s^3 (r_s - 2M_s)}, \quad (3.51)$$

onde m_∞ é uma constante. Para obtermos estes resultados, devemos lembrar que, no exterior da estrela, $j = 1$ e $\bar{\omega}(r_s) = \Omega - 2J/r_s^3$.

A mudança na massa total da estrela provocada pela rotação, δM , pode ser obtida ao analisarmos o comportamento assintótico da componente g_{tt} da métrica,

$$M = \lim_{r_s \rightarrow \infty} \frac{r_s}{2} (1 + g_{tt}), \quad (3.52)$$

de maneira que obtemos

$$M = \lim_{r_s \rightarrow \infty} \frac{r_s}{2} \left[-2h + \frac{2M_s}{r_s} + \frac{4M_s h}{r_s} \right], \quad (3.53)$$

o que nos retorna

$$M = M_s + m_\infty, \quad (3.54)$$

uma vez que $h \sim m_\infty/r + O(r^{-2})$ para $r \gg R_s$. Com isso, temos que a constante m_∞ pode ser identificada como o acréscimo δM na massa M_s devido à rotação, de tal forma que

$$\delta M = m_0(R_s) + \frac{J^2}{R_s^3}. \quad (3.55)$$

Em suma, o problema para $l = 0$ pode ser resolvido a partir da integração numérica das equações (3.47) e (3.45), sujeitas às condições (3.48) e (3.49). Isso nos permite obter $m_0(R_s)$ e calcular a variação na massa total da estrela a partir de (3.55).

Equações para $l = 2$

O problema para $l = 2$ se resume a determinar as funções $\xi_2(r_s)$, $h_2(r_s)$, $k_2(r_s)$ e $m_2(r_s)$. Para isso, utilizaremos a equação (3.43), juntamente com a combinação $R_\theta^\theta - R_\phi^\phi = 8\pi(T_\theta^\theta - T_\phi^\phi)$ que, ao ser expandida até segunda ordem em Ω , nos retorna:

$$h_2 + \frac{m_2}{r_s - 2m_s} = -\frac{1}{3}r_s^3\bar{\omega}^2 \frac{dj^2}{dr_s} + \frac{1}{6}j^2 r_s^4 \left(\frac{d\bar{\omega}}{dr_s} \right)^2. \quad (3.56)$$

Além disso, utilizaremos as equações $R_{r_s}^\theta = 0$ e $G_{r_s}^{r_s} = 8\pi T_{r_s}^{r_s}$, que ao serem expandidas, tornam-se, respectivamente,

$$\frac{d}{dr_s}(h_2 + k_2) = h_2 \left(\frac{1}{r_s} - \frac{1}{2} \frac{d\nu}{dr_s} \right) + \frac{m_2}{(r_s - 2m_s)} \left(\frac{1}{r_s} + \frac{1}{2} \frac{d\nu}{dr_s} \right) \quad (3.57)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{2}{r_s} \left(1 - \frac{2m_s}{r_s} \right) \frac{dh_2}{dr_s} + \left(1 - \frac{2m_s}{r_s} \right) \left(\frac{d\nu}{dr_s} + \frac{2}{r_s} \right) \frac{dk_2}{dr_s} - \frac{2m_2}{r_s} \left(\frac{d\nu}{dr_s} + \frac{1}{r_s} \right) - \frac{6h_2}{r_s} - \frac{4k_2}{r_s} + \\ + 8\pi\xi_2 \frac{dp}{dr_s} - \frac{1}{6}r_s^2 j^2 \left(\frac{d\bar{\omega}}{dr_s} \right)^2 = 0, \end{aligned} \quad (3.58)$$

onde, $d\nu/dr_s$ é dado pela equação (2.8) do capítulo anterior. As equações (3.43), (3.56), (3.57) e (3.58) determinam o problema para $l = 2$.

Utilizando as expressões (3.43) e (3.56), somos capazes de eliminar m_2 e ξ_2 das equações (3.57) e (3.58), resultando em duas equações não homogêneas acopladas para h_2 e k_2 :

$$\frac{dv}{dr_s} = -h_2 \frac{d\nu}{dr_s} + \left(\frac{1}{r_s} + \frac{1}{2} \frac{d\nu}{dr_s} \right) \left[-\frac{1}{3} r_s^3 \bar{\omega}^2 \frac{dj^2}{dr_s} + \frac{1}{6} j^2 r_s^4 \left(\frac{d\bar{\omega}}{dr_s} \right)^2 \right], \quad (3.59)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{dh_2}{dr_s} = & \left\{ -\frac{d\nu}{dr_s} + \frac{r_s}{(r_s - 2m_s)} \frac{d\nu}{dr_s} \left[8\pi(\epsilon + p) - \frac{4m_s}{r_s^3} \right] \right\} h_2 - \frac{4v}{r_s(r_s - 2m_s)} \frac{d\nu}{dr_s} + \\ & + \frac{1}{6} \left[\frac{1}{2} r_s \frac{d\nu}{dr_s} - \frac{1}{(r_s - 2m_s)} \frac{d\nu}{dr_s} \right] r_s^3 j^2 \left(\frac{d\bar{\omega}}{dr_s} \right)^2 - \frac{1}{3} \left[\frac{r_s}{2} \frac{d\nu}{dr_s} + \frac{1}{(r_s - 2m_s)} \frac{d\nu}{dr_s} \right] r_s^2 \bar{\omega}^2 \frac{dj^2}{dr_s}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

onde definimos

$$v = h_2 + k_2. \quad (3.61)$$

Demandando regularidade das soluções na origem, obtemos as condições de contorno

$$\begin{aligned} h_2(r_s \rightarrow 0) &\rightarrow A r_s^2 \\ v(r_s \rightarrow 0) &\rightarrow B r_s^4, \end{aligned} \quad (3.62)$$

em que as constantes A e B devem obedecer

$$B + 2\pi \left(p_c + \frac{1}{3} \epsilon_c \right) A = -\frac{4\pi}{3} (\epsilon_c + p_c) (j_c \bar{\omega}_c)^2. \quad (3.63)$$

Outra condição de contorno é obtida ao impor $\lim_{r_s \rightarrow \infty} h_2(r_s) = 0$. Na região exterior à estrela, as funções $\bar{\omega}$, ν e λ são dadas pelas expressões (3.24) e (2.19).

Seguindo [Hartle 1967], buscamos expressar a solução do problema não homogêneo como a soma da solução geral do problema homogêneo associado e uma solução particular do problema não homogêneo. As equações homogêneas para h_2 e v são dadas por:

$$\frac{dv}{dr_s} = -\frac{d\nu}{dr_s} h_2, \quad (3.64)$$

e

$$\frac{dh_2}{dr_s} = \left\{ -\frac{d\nu}{dr_s} + \frac{r_s}{(r_s - 2m_s)} \frac{d\nu}{dr_s} \left[8\pi(\epsilon + p) - \frac{4m_s}{r_s^3} \right] \right\} h_2 - \frac{4v}{r_s(r_s - 2m_s)} \frac{d\nu}{dr_s}, \quad (3.65)$$

onde as soluções regulares ainda obedecem à condição (3.62), mas com A e B se relacionando por:

$$B + 2\pi \left(p_c + \frac{1}{3} \epsilon_c \right) A = 0. \quad (3.66)$$

A solução geral para h_2 e v pode ser obtida a partir da soma de uma solução particular das equações não homogêneas (3.59) e (3.60), para um valor arbitrário de A tal

que B seja determinado por (3.63), e da solução geral das equações homogêneas (3.64) e (3.65), de forma que

$$h_2 = A'h_2^H + h_2^P, \quad v = A'v^H + v^P, \quad (3.67)$$

onde o subscrito H corresponde à solução homogênea, e P , à particular. Além disso, A' é uma constante, introduzida em virtude da linearidade das equações homogêneas para h_2 e v , que garante que qualquer múltiplo de uma solução também é uma solução. Dessa maneira, somos capazes de, assim como no caso particular, obter h_2^H e k_2^H a partir da integração das equações homogêneas com um A arbitrário, de forma que B seja dado por (3.66).

As soluções exteriores das equações (3.64) e (3.65) são obtidas ao impormos que respeitem as condições de contorno $\lim_{r_s \rightarrow \infty} h_2(r_s) = \lim_{r_s \rightarrow \infty} v(r_s) = 0$. Dessa maneira, obtemos [Hartle 1967, Hartle e Thorne 1968]:

$$v(r_s) = 2Km_s[r_s(r_s - 2m_s)]^{-1/2}Q_2^1(r_s/m_s - 1) - \frac{J^2}{r_s^4}, \quad (3.68)$$

e

$$h_2(r_s) = KQ_2^2(r_s/m_s - 1) + J^2 \left(\frac{1}{m_s r_s^3} + \frac{1}{r_s^4} \right), \quad (3.69)$$

em que Q_l^m são as funções associadas de Legendre de segunda espécie, dadas por

$$Q_2^1(\zeta) = (\zeta^2 - 1)^{1/2} \left[\frac{3\zeta^2 - 2}{\zeta^2 - 1} - \frac{3}{2}\zeta \log \left(\frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} \right) \right] \quad (3.70)$$

e

$$Q_2^2(\zeta) = \frac{3}{2}(\zeta^2 - 1) \log \left(\frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} \right) - \frac{3\zeta^3 - 5\zeta}{\zeta^2 - 1}, \quad (3.71)$$

onde $\zeta = \frac{r_s}{m_s} - 1$.

Para determinarmos as constantes A' e K , impomos a continuidade das soluções na superfície da estrela, igualando as soluções (3.67) às suas expressões correspondentes no exterior da estrela, (3.68) e (3.69). Com isso, obtemos:

$$A' = \frac{1}{v^H(R_s)} \left(2KM_s[R_s(R_s - 2M_s)]^{-1/2}Q_2^1(\zeta_s) - 1 \right) - \frac{J^2}{R_s^4} - v^P(R_s), \quad (3.72)$$

e

$$K = \frac{h_2^P(R_s) - \frac{h_2^H(R_s)}{v^H(R_s)} \left(\frac{J^2}{R_s^4} + v^P(R_s) \right) - J^2 \left(\frac{1}{M_s R_s^3} + \frac{1}{R_s^4} \right)}{\left(Q_2^2(\zeta_s) - \frac{h_2^H(R_s)}{v^H(R_s)} 2M_s[R_s(R_s - 2M_s)]^{-1/2}Q_2^1(\zeta_s) \right)}. \quad (3.73)$$

Para determinarmos o momento de quadrupolo da estrela, devemos identificá-lo como o coeficiente do termo que acompanha $1/r^3$ na expansão da equação (3.69) para $r \rightarrow \infty$. Dessa maneira, obtemos:

$$Q = \frac{J^2}{M_s} + \frac{16KM_s^3}{5}. \quad (3.74)$$

A elipticidade da estrela é dada por:

$$\begin{aligned}\epsilon(R_s) &= -\frac{3}{2R_s}\xi_2(R_s) \\ &= \frac{3(R_s - 2M_s)}{2M_s} \left[h_2(R_s) + \frac{1}{3} \frac{R_s^3}{(R_s - 2M_s)} \left(\Omega - \frac{2J}{R_s^3} \right)^2 \right],\end{aligned}\quad (3.75)$$

e sua excentricidade [Hartle e Thorne 1968, Boshkayev et al. 2016]:

$$\begin{aligned}e &= \sqrt{1 - \frac{r_p^2}{r_e^2}} - 1 \\ &= [-3(v_2(R_s) - h_2(R_s) + \xi_2(R_s)/R_s)]^{1/2},\end{aligned}\quad (3.76)$$

em que r_p é raio polar e r_e é o raio equatorial, dados por:

$$r_p = R_s + \xi_0(R_s) + \xi_2(R_s), \quad (3.77)$$

$$r_e = R_s + \xi_0(R_s) - \xi_2(R_s)/2. \quad (3.78)$$

Com isso, somos capazes de calcular as principais propriedades físicas da estrela em segunda ordem em Ω , sendo elas o acréscimo δM_s na massa devido à rotação, (3.55), o momento de quadripolo da estrela, (3.74), assim como sua elipticidade (3.75) e excentricidade (3.76).

3.2 Resultados numéricos

Procedimento de Integração

Para obtermos as quantidades que descrevem a estrela em rotação em primeira e segunda ordem na velocidade angular Ω , devemos primeiro obter a configuração de equilíbrio estático para uma densidade de energia central escolhida, seguindo os procedimentos descritos na seção 2.2 do capítulo anterior. Com essa configuração como fundo, partimos para os cálculos em primeira ordem em Ω , obtendo $\bar{\omega}$ a partir da integração da equação (3.22). Respeitando a exigência (3.23), escolhemos

$$\bar{\omega}(r_s \approx 0) = 1, \quad \frac{d\bar{\omega}}{dr_s}(r_s \approx 0) = 0 \quad (3.79)$$

como condições iniciais. Após isso, devemos multiplicar a solução obtida pela constante C , definida por (3.31), a fim de nos assegurarmos de que a velocidade angular da configuração é a desejada. Em seguida, podemos definir a constante β a partir de (3.27) e, enfim, calcular o momento de inércia I utilizando (3.28).

Com tais resultados em mãos, nos tornamos aptos a integrar as equações que descrevem a parte esfericamente simétrica ($l = 0$) da perturbação em segunda ordem em Ω , (3.45) e (3.47), e assim determinar a variação na massa δM causada pela rotação utilizando a equação (3.55), assim como a contribuição de $l = 0$ para a mudança no raio

da estrela, obtida a partir da expressão (3.1). As condições iniciais implementadas foram as (3.48) e (3.49).

Passando para as equações com $l = 2$, devemos iniciar integrando as equações particulares (3.59) e (3.60) com as condições iniciais (3.62), escrevendo B em função de A utilizando a relação (3.63) e adotando um valor arbitrário para A , digamos, $A = 1$. Em seguida, é necessário integrar as equações homogêneas (3.64) e (3.65) com as condições iniciais (3.62), escrevendo novamente B em função de A , desta vez utilizando a relação (3.66) e novamente adotando um valor arbitrário para A , como $A = 1$. A solução geral das equações homogêneas pode ser obtida a partir desta, por meio de um reescalonamento por uma constante A' arbitrária, como dado em (3.67). Em posse das soluções particulares e homogêneas internas, e das soluções externas (3.68) e (3.69), definidas analiticamente a menos de uma constante arbitrária K , o próximo passo é encontrar as constantes A' e K , utilizando as equações (3.73) e (3.72), exigindo continuidade na superfície da estrela. Finalmente, somos capazes de calcular o momento de quadrupolo, elipticidade, excentricidade e a mudança em segunda ordem em Ω no raio da estrela utilizando, respectivamente, as equações (3.74), (3.75), (3.76) e (3.1).

Para realizarmos as integrações, adotamos os mesmos valores para $\hat{r}_0$, $d\hat{r}$ e $\hat{p}_s$ utilizados na seção 2.2, onde abordamos o caso estático. Também como no caso sem rotação, o método de integração utilizado foi o Runge-Kutta de quarta ordem (RK4), com implementação desenvolvida em Python.

Resultados Numéricos

Abaixo, ilustramos as soluções numéricas obtidas para as equações relativísticas utilizando o formalismo Hartle–Thorne, que caracterizam a configuração de equilíbrio de estrelas de nêutrons com baixa velocidade angular.

Na figura 7, apresentamos a relação entre o momento de inércia adimensional, definido como $\bar{I} \equiv I/M^3$, e a massa M , bem como a compacidade da estrela C , para diferentes equações de estado. As quantidades M e C referem-se às configurações estáticas obtidas para os mesmos valores de pressão central. Analisando o primeiro gráfico, é possível notar que, conforme a massa da estrela vai aumentando, a diferença entre as equações de estado se torna cada vez mais proeminente. Quando analisamos o segundo gráfico, observamos o contrário: conforme a compacidade aumenta, as curvas se aproximam. Este resultado é consistente com o apresentado em [Yagi e Yunes 2013].

Ao analisarmos o gráfico 8, podemos verificar, para estrelas dentro da faixa de compacidade de interesse, a conhecida invariância da relação $\bar{I} - \bar{Q}$, onde $\bar{Q} \equiv QM/J^2$, ao utilizarmos diferentes equações de estado e uma frequência de rotação de $f = 100$ Hz. Novamente, M refere-se à massa da configuração estática para os mesmos valores de

pressão central. Esta característica das estrelas rotativas é importante pois nos permite estimar parâmetros estelares independentemente da equação de estado escolhida. Este resultado está em concordância com o exibido em [Yagi e Yunes 2013].

A figura 9 mostra o diagrama massa-raio equatorial para diferentes velocidades angulares utilizando a equação de estado SLy9. É importante destacar que, neste caso, a massa representada é a massa total da estrela em rotação, definida em (3.55), enquanto o raio é obtido a partir de (3.78). Analisando o resultado obtido, torna-se evidente que a presença de rotação aumenta o raio equatorial da estrela (mantida a massa), além de permitir valores maiores da massa máxima da estrela.

Finalmente, no gráfico 10, é possível observar a deformação da superfície da estrela na presença de rotação. Nota-se que, conforme a velocidade angular aumenta, o achatamento nos polos e a expansão no equador se tornam maiores.

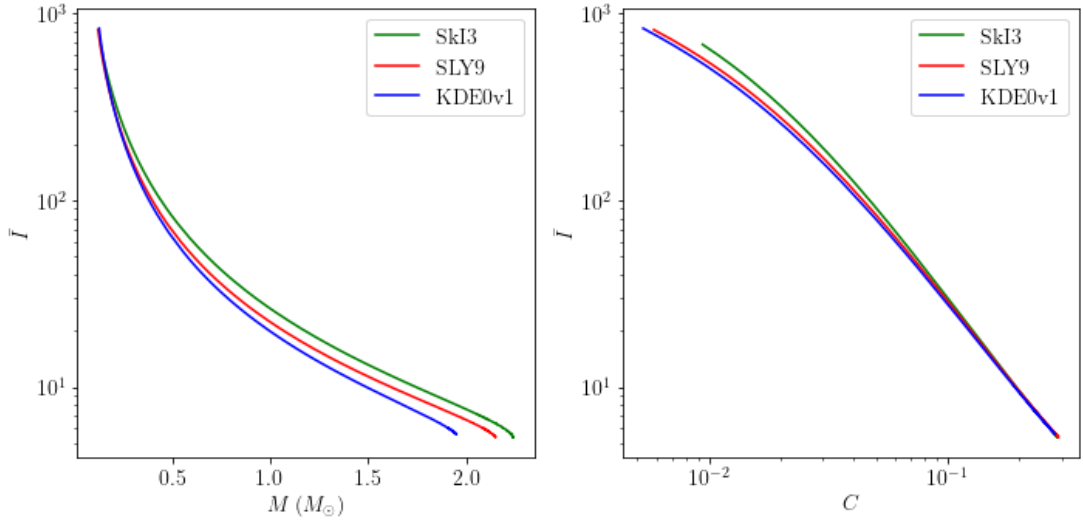


Figura 7 – Momento de inércia adimensional $\bar{I}$ como função da massa M (à esquerda) e da compactidade da estrela C (à direita), parametrizado pela pressão central. As equações de estado utilizadas foram as SKI3, SLy9 e KDE0v1, extraídas e adaptadas do repositório CompOSE.

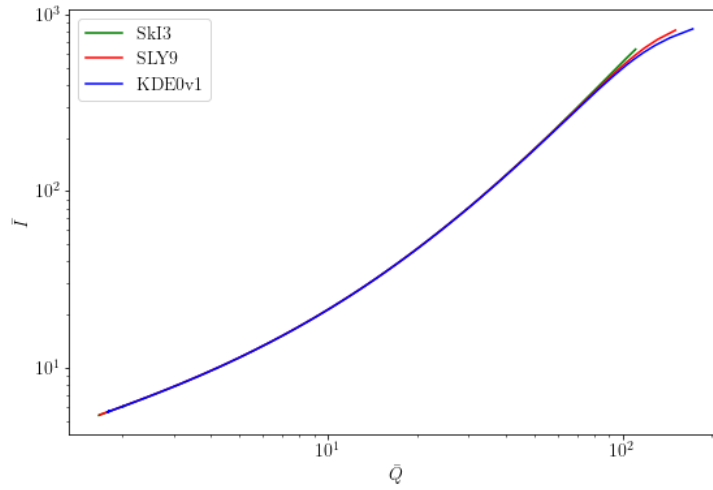


Figura 8 – Relação $\bar{I}-\bar{Q}$, parametrizada pela pressão central para $f = 100$ Hz. As equações de estado utilizadas foram as SKI3, SLy9 e KDE0v1, extraídas e adaptadas do repositório CompOSE.

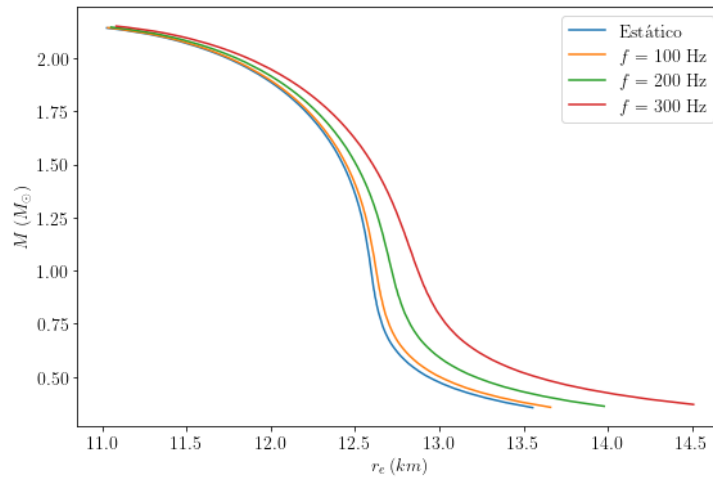


Figura 9 – Relação massa-raio equatorial parametrizada pela pressão central para alguns valores da frequência de rotação. A equação de estado utilizada foi a SLy9, extraída e adaptada do repositório CompOSE.

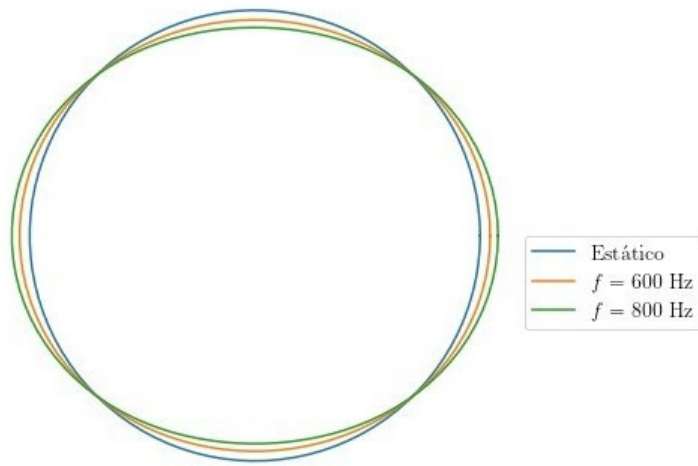


Figura 10 – Formato da estrela para diferentes valores da frequência de rotação e uma densidade de energia central de $\epsilon/c^2 = 10^{15} \text{ g/cm}^3$. A equação de estado utilizada foi a SLy9, extraída e adaptada do repositório CompOSE.

4 Estrelas de nêutrons com rotação rápida

Diversos autores desenvolveram esquemas numéricos voltados para o cálculo da configuração de equilíbrio de estrelas de nêutrons rodando rapidamente em Relatividade Geral. Em 1974, Bonazzola e Schneider realizaram uma análise para estrelas em rotação uniforme utilizando o método de campo autoconsistente (self-consistent field, SCF) [Bonazzola e Maschio 1971], porém, embora representasse um avanço importante, o estudo apresentava limitações, especialmente relacionadas às condições de contorno impostas em regiões distantes da estrela. Posteriormente, Butterworth e Ipser propuseram uma abordagem numérica mais precisa, baseada em uma linearização pelo método de Newton-Raphson, obtendo resultados mais consistentes [Butterworth e Ipser 1976], contudo, embora a abordagem tenha se mostrado eficaz no tratamento de fluidos incompressíveis com rotação rápida, ela falha em capturar adequadamente o comportamento de estrelas compressíveis submetidas a intensos efeitos gravitacionais [Eriguchi, Hachisu e Nomoto 1994].

Em 1989, H. Komatsu, Y. Eriguchi e I. Hachisu propuseram um novo método numérico — atualmente conhecido como esquema KEH — baseado na formulação integral das componentes das equações de campo de Einstein, aliada à escolha de um conjunto específico de funções métricas. Essa escolha não apenas assegura que a geometria seja assintoticamente plana, como também se mantém consistente na presença de ergosferas [Komatsu, Eriguchi e Hachisu 1989, Komatsu, Eriguchi e Hachisu 1989]. Uma característica importante dessa abordagem é que, ao longo das iterações, mantêm-se fixas tanto a densidade no centro da estrela quanto a razão entre os raios polar e equatorial, até que a solução atinja o nível desejado de convergência numérica. O método demonstrou eficiência na modelagem de estrelas politrópicas relativísticas com rotação rápida, englobando cenários de rotação uniforme e diferencial, e exemplos de resultados numéricos obtidos com essa técnica podem ser encontrados em [Eriguchi, Hachisu e Nomoto 1994].

O método KEH foi posteriormente estendido por Cook, Shapiro e Teukolsky (CST) em [Cook, Shapiro e Teukolsky 1992, Cook, Shapiro e Teukolsky 1994, Cook, Shapiro e Teukolsky 1994], onde a introdução de uma nova variável radial foi adotada a fim de compactar a variável original. Tal substituição aumenta significativamente a precisão geral da solução numérica, aprimorando os resultados obtidos.

Após nos debruçarmos sobre o problema de estrelas com rotação baixa, dentro de um formalismo perturbativo, neste capítulo exploraremos o caso com rotação alta, porém ainda uniforme. Este capítulo se organiza da seguinte forma. Na seção 4.1, introduziremos as equações que definem a configuração de equilíbrio de uma estrela de nêutrons rodando

rapidamente com velocidade angular constante. Nas seções 4.2 e 4.3 apresentaremos o esquema KEH e a compactificação CST, utilizados na construção do código `rns` [Stergioulas e Friedman 1995], que abordaremos com mais detalhes na seção 4.4. Resultados para estrelas com rotação rápida são discutidos na seção 4.5.

4.1 Configuração de equilíbrio

Como discutido anteriormente, as propriedades macroscópicas de uma estrela de nêutrons com rotação podem ser bem descritas por um fluido perfeito rodando uniformemente. Para que possamos estabelecer a métrica de estrelas com tais características, precisamos assumir primeiramente que o espaço-tempo é estacionário e axissimétrico, de forma que existe um vetor de simetria (Killing) assintoticamente do tipo tempo t^μ e um vetor de simetria rotacional ϕ^μ . É necessário ainda assumir que estes vetores comutam entre si, ou seja, que $[t, \phi] = 0$, e que a solução é invariante sob inversões do tipo

$$t \rightarrow -t, \quad \phi \rightarrow -\phi. \quad (4.1)$$

Por fim, o espaço-tempo deve ser assintoticamente plano. Uma métrica com tais propriedades pode ser definida por:

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + e^{2\alpha} (d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\theta^2) + e^{2\beta} \bar{r}^2 \sin^2 \theta (d\phi - \omega dt)^2, \quad (4.2)$$

onde ν , α , β e ω são funções apenas das coordenadas $\bar{r}$ e θ . A métrica apresentada acima é equivalente à equação (3.4), expressa em coordenadas isotrópicas. Além disso, é importante destacar que a coordenada radial $\bar{r}$ não é a mesma coordenada radial de Schwarzschild. No limite da simetria esférica, $\bar{r}$ corresponde à coordenada isotrópica de Schwarzschild, de maneira que círculos centrados no eixo de simetria têm circunferência $2\pi r$, onde r está relacionado às coordenadas $\bar{r}$ e θ por:

$$r = e^\beta \bar{r} \sin \theta. \quad (4.3)$$

Um aspecto relevante acerca do potencial ω é que o mesmo está relacionado à não ortogonalidade entre os vetores t^μ e ϕ^μ , refletindo o fato de que uma inversão temporal $t \rightarrow -t$ implica na reversão do sentido de rotação. Conforme discutido no capítulo anterior, um observador com momento angular nulo tem uma velocidade angular ω com relação a um observador fixo no infinito, caracterizando o fenômeno de arraste dos referenciais inerciais provocado pela rotação da massa central. Outra característica importante de ω é seu decaimento com a distância em relação à estrela, fazendo com que o arraste dos referenciais inerciais tenha maior relevância nas imediações do objeto. Isso pode ser constatado ao analisarmos a equação (3.24), que implica que, assintoticamente,

$$\omega \sim \frac{2J}{\bar{r}^3}, \quad (4.4)$$

onde J é o momento angular.

No limite estático, a equação (4.2) se reduz à métrica:

$$ds^2 = -e^{2\nu(\bar{r})} dt^2 + e^{2\lambda(\bar{r})} \left[d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (4.5)$$

onde

$$e^{2\lambda(\bar{r})} = \frac{r}{\bar{r}}, \quad (4.6)$$

se igualando, no exterior da estrela, à métrica isotrópica de Schwarzschild, dada por

$$ds^2 = - \left(\frac{1 - M/2\bar{r}}{1 + M/2\bar{r}} \right)^2 dt^2 + \left(1 + \frac{M}{2\bar{r}} \right)^4 \left[d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (4.7)$$

Como discutido no capítulo 2, sobre estrelas estáticas, podemos utilizar fluidos perfeitos na construção de modelos de equilíbrio de estrelas relativísticas. Tais fluidos são descritos pelo tensor de energia-momento (1.11). Assumindo que os elementos de fluido giram uniformemente em torno do eixo de rotação, temos que as componentes da sua quadri-velocidade satisfazem

$$u^r = u^\theta = 0, \quad (4.8)$$

$$u^\phi = \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d\phi}{dt} = u^t \Omega, \quad (4.9)$$

onde $\Omega = d\phi/dt$ é a velocidade angular do fluido como vista por um observador em repouso no infinito. Ou seja,

$$u^\mu = u^t (t^\mu + \Omega \phi^\mu). \quad (4.10)$$

A partir das equações acima e da normalização $g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -1$, obtemos:

$$u^t = \frac{e^{-\nu}}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad (4.11)$$

onde $v = (\Omega - \omega) e^{\beta - \nu} \bar{r} \sin \theta$ é a velocidade dos elementos do fluido em relação a observadores com momento angular nulo, ou seja, com quadrivelocidade $u_{ZAMO}^\mu = e^{-\nu} (1, 0, 0, \omega)$.

A determinação da estrutura da estrela requer, primeiramente, a escolha de uma equação de estado adequada. Com essa definição, iremos então solucionar as equações para os potenciais $\rho = \nu - \beta$, $\gamma = \nu + \beta$ e ω , derivadas das componentes tt , $\phi\phi$ e $t\phi$ das equações de campo de Einstein, além de uma quarta equação para α . O passo final envolve a resolução da equação de equilíbrio hidrostático, que será discutida a seguir.

As equações de campo de Einstein para o presente problema são dadas por [Komatsu, Eriguchi e Hachisu 1989]:

$$\nabla^2 [\rho e^{\gamma/2}] = S_\rho(\bar{r}, \mu), \quad (4.12)$$

$$\left(\nabla^2 + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} - \frac{1}{\bar{r}^2} \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \right) \gamma e^{\gamma/2} = S_\gamma(\bar{r}, \mu), \quad (4.13)$$

$$\left(\nabla^2 + \frac{2}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} - \frac{2}{\bar{r}^2} \mu \frac{\partial}{\partial \mu}\right) \omega e^{(\gamma-2\rho)/2} = S_\omega(\bar{r}, \mu), \quad (4.14)$$

onde

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \bar{r}^2} + \frac{2}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\bar{r}^2} \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\bar{r}^2 \sin \theta^2} \frac{\partial}{\partial \phi^2}, \quad (4.15)$$

é o Laplaciano Euclideano e definimos $\mu = \cos \theta$, além dos termos de fonte

$$S_\rho(\bar{r}, \mu) = e^{\gamma/2} \left[8\pi e^{2\alpha} (\epsilon + p) \frac{1+v^2}{1-v^2} + \bar{r}^2 (1-\mu^2) e^{-2\rho} \left(\omega_{,\bar{r}}^2 + \frac{1}{\bar{r}^2} (1-\mu^2) \omega_{,\mu}^2 + \frac{1}{\bar{r}} \gamma_{,\bar{r}} \right) - \frac{1}{\bar{r}^2} \mu \gamma_{,\mu} + \frac{\rho}{2} \left\{ 16\pi e^{2\alpha} p - \gamma_{,\bar{r}} \left(\frac{1}{2} \gamma_{,\bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}} \right) - \frac{1}{\bar{r}^2} \gamma_{,\mu} \left[\frac{1}{2} \gamma_{,\mu} (1-\mu^2) - \mu \right] \right\} \right], \quad (4.16)$$

$$S_\gamma(\bar{r}, \mu) = e^{\gamma/2} \left\{ 16\pi e^{2\alpha} p + \frac{\gamma}{2} \left[16\pi e^{2\alpha} p - \frac{1}{2} \gamma_{,\bar{r}}^2 - \frac{(1-\mu^2)}{2\bar{r}^2} \gamma_{,\mu}^2 \right] \right\}, \quad (4.17)$$

$$S_\omega(\bar{r}, \mu) = e^{(\gamma-2\rho)/2} \left[-16\pi e^{2\alpha} \frac{(\Omega - \omega)(\epsilon + p)}{1-v^2} + \omega \left\{ -8\pi e^{2\alpha} \frac{[(1+v^2)\epsilon + 2v^2 p]}{1-v^2} - \frac{1}{\bar{r}} \left(2\rho_{,\bar{r}} + \frac{1}{2} \gamma_{,\bar{r}} \right) + \frac{1}{\bar{r}^2} \mu \left(2\rho_{,\mu} + \frac{1}{2} \gamma_{,\mu} \right) + \frac{1}{4} (4\rho_{,\bar{r}}^2 - \gamma_{,\bar{r}}^2) + \frac{1-\mu^2}{4\bar{r}^2} (4\rho_{,\mu}^2 - \gamma_{,\mu}^2) - \bar{r}^2 (1-\mu^2) e^{-2\rho} \left(\omega_{,\bar{r}}^2 + \frac{1-\mu^2}{\bar{r}^2} \omega_{,\mu}^2 \right) \right\} \right]. \quad (4.18)$$

Nessas expressões, $f_{,\bar{r}}$ e $f_{,\mu}$ indicam, respectivamente, a derivada parcial da função f em relação a $\bar{r}$ e μ . A quarta equação, que define o potencial α da métrica, é obtida a partir da combinação $G_{zz} - G_{\bar{\rho}\bar{\rho}} = 0$, onde $\bar{\rho} = \bar{r} \sin \theta$ e $z = \bar{r} \cos \theta$, de maneira que obtemos

$$\begin{aligned} \alpha_{,\mu}(\bar{r}, \mu) = & -\nu_{,\mu} - \left\{ (1-\mu^2) \left(1 + \bar{r} B^{-1} B_{,\bar{r}} \right)^2 + \left[\mu - (1-\mu^2) B^{-1} B_{,\mu} \right]^2 \right\}^{-1} \times \\ & \left[\frac{1}{2} B^{-1} \left\{ \bar{r}^2 B_{,\bar{r}\bar{r}} - \left[(1-\mu^2) B_{,\mu} \right]_{,\mu} - 2\mu B_{,\mu} \right\} \left[-\mu + (1-\mu^2) B^{-1} B_{,\mu} \right] \right. \\ & + \bar{r} B^{-1} B_{,\bar{r}} \left(\frac{1}{2} \mu + \mu \bar{r} B^{-1} B_{,\bar{r}} + \frac{1}{2} (1-\mu^2) B^{-1} B_{,\mu} \right) \\ & + \frac{3}{2} B^{-1} B_{,\mu} \left[-\mu^2 + \mu (1-\mu^2) B^{-1} B_{,\mu} \right] \\ & - (1-\mu^2) \bar{r} B^{-1} B_{,\mu\bar{r}} (1 + \bar{r} B^{-1} B_{,\bar{r}}) - \mu \bar{r}^2 \nu_{,\bar{r}}^2 - 2(1-\mu^2) \bar{r} \nu_{,\mu} \nu_{,\bar{r}} \\ & + \mu (1-\mu^2) \nu_{,\mu}^2 - 2(1-\mu^2) \bar{r}^2 B^{-1} B_{,\bar{r}} \nu_{,\mu} \nu_{,\bar{r}} \\ & + (1-\mu^2) B^{-1} B_{,\mu} \left[\bar{r}^2 \nu_{,\bar{r}}^2 - (1-\mu^2) \nu_{,\mu}^2 \right] \\ & + (1-\mu^2) B^2 e^{-4\nu} \left[\frac{1}{4} \mu \bar{r}^4 \omega_{,\bar{r}}^2 + \frac{1}{2} (1-\mu^2) \bar{r}^3 \omega_{,\mu} \omega_{,\bar{r}} \right. \\ & - \frac{1}{4} \mu (1-\mu^2) \bar{r}^2 \omega_{,\mu}^2 + \frac{1}{2} (1-\mu^2) \bar{r}^4 B^{-1} B_{,\bar{r}} \omega_{,\mu} \omega_{,\bar{r}} \\ & \left. \left. - \frac{1}{4} (1-\mu^2) \bar{r}^2 B^{-1} B_{,\mu} \left(\bar{r}^2 \omega_{,\bar{r}}^2 - (1-\mu^2) \omega_{,\mu}^2 \right) \right] \right] \end{aligned} \quad (4.19)$$

em que definimos

$$B = e^\gamma = e^{\beta+\nu}. \quad (4.20)$$

Como vimos anteriormente, a equação de conservação do tensor energia-momento é dada por (1.10). Ao utilizarmos a métrica (4.2) e o tensor momento-energia (1.11), temos [Friedman e Stergioulas 2013]

$$\frac{\nabla_\alpha p}{(\epsilon + p)} = \nabla_\alpha \ln u^t - u^t u_\phi \nabla_\alpha \Omega \quad (4.21)$$

$$= -\nabla_\alpha \nu + \frac{1}{1-v^2} \left(v \nabla_\alpha v - \frac{v^2 \nabla_\alpha \Omega}{\Omega - \omega} \right). \quad (4.22)$$

Para equações de estado barotrópicas, do tipo $\epsilon = \epsilon(p)$, é possível definir a função

$$H(p) := \int_0^p \frac{dp'}{\epsilon(p') + p'}, \quad (4.23)$$

que está relacionada com a entalpia específica (de estrelas com distribuição de entropia constante) $h = (\epsilon + p)/\rho$ como $H = \ln h$. A Eq. (4.21) então implica que

$$\nabla_\alpha (H - \ln u^t) = -u^t u_\phi \nabla_\alpha \Omega. \quad (4.24)$$

Portanto, para estrelas com rotação uniforme ($\Omega = \text{cte}$), que são o foco deste trabalho, a quantidade $H - \ln u^t$ é constante ao longo da estrela, de forma que temos

$$H - \ln u^t = \int_0^p \frac{dp'}{\epsilon(p') + p'} - \ln u^t = \nu|_{polo}, \quad (4.25)$$

ou ainda, para chegarmos ao formato apresentado em (3.36),

$$H - \ln u^t = \ln(\epsilon + p) - \int_0^\epsilon \frac{d\epsilon'}{\epsilon' + p(\epsilon')} - \ln u^t = \nu|_{polo}. \quad (4.26)$$

Podemos definir algumas grandezas macroscópicas para descrever fluidos relativísticos em rotação, como a massa, momento angular, momento de inércia e a massa de repouso total. Considerando a equivalência entre massa e energia, é plausível interpretar a massa total de um sistema relativístico como uma medida de sua energia global. Ademais, espera-se que essas definições sejam compatíveis com o caso particular de uma configuração estática e esféricamente simétrica, recuperando a forma conhecida nesse limite. Utilizando as integrais de Komar, somos capazes de definir a massa e o momento angular de uma estrela estacionária e axissimétrica por [Friedman e Stergioulas 2013]:

$$M = -\frac{1}{8\pi} \int_{S_\infty} \nabla^\alpha t^\beta dS_{\alpha\beta}, \quad (4.27)$$

$$J = \frac{1}{16\pi} \int_{S_\infty} \nabla^\alpha \phi^\beta dS_{\alpha\beta}, \quad (4.28)$$

onde $\int_{S_\infty} := \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r}$, em que S_r refere-se a uma esfera de raio fixo a $t = \text{cte}$.

Utilizando a identidade dos vetores de Killing dada por $\nabla_\beta \nabla^\alpha \zeta^\beta = R^\alpha_\beta \zeta^\beta$, para expandir as expressões acima, somos capazes de escrever

$$M = -2 \int_\Sigma \left(T_\alpha^\beta - \frac{1}{2} \delta_\alpha^\beta T \right) t^\alpha dS_\beta \quad (4.29)$$

$$= \int_\Sigma (-2T_t^t + T) \sqrt{-g} d^3x \quad (4.30)$$

e

$$J = \int_\Sigma T_\alpha^\beta \phi^\alpha dS_\beta \quad (4.31)$$

$$= \int_\Sigma T_\phi^t \sqrt{-g} d^3x, \quad (4.32)$$

onde as integrais agora são realizadas em superfícies tipo espaço Σ com $t = \text{cte}$, e onde usamos que $dS_\beta = -n_\beta \sqrt{|h|} d^3x = \delta_\beta^0 \sqrt{-g} d^3x$ é o elemento de volume nessas superfícies (com métrica induzida $h_{\mu\nu}$).

A partir do conhecimento da velocidade angular do fluido, somos capazes de calcular o momento de inércia e a energia cinética associada à rotação do sistema:

$$I = \frac{J}{\Omega}, \quad (4.33)$$

$$T = \frac{1}{2} \int \Omega dJ, \quad (4.34)$$

$$= \frac{1}{2} J \Omega \quad (\text{rotação uniforme}). \quad (4.35)$$

A massa M definida em (4.29) é muitas vezes chamada de massa gravitacional ou massa de Komar, e representa o total de massa-energia presente no sistema. A massa de repouso, ou massa bariônica M_0 , por sua vez, é definida a partir da equação

$$M_0 = \int \epsilon_0 u^\beta dS_\beta, \quad (4.36)$$

$$= \int \epsilon_0 u^t \sqrt{-g} d^3x, \quad (4.37)$$

onde ϵ_0 é a densidade de energia de repouso.

Um outro parâmetro relevante no estudo de estrelas em rotação é a frequência de Kepler Ω_K , definida como a velocidade angular de uma partícula livre em órbita circular no plano equatorial, com raio igual ao raio equatorial da estrela, que estabelece um limite superior para a velocidade de rotação das configurações de equilíbrio dessas estrelas. Quando a frequência de rotação excede esse valor crítico, a configuração torna-se instável do ponto de vista dinâmico, pois as forças centrífugas passam a prevalecer sobre a gravidade. Como resultado, a estrela começa a ejetar massa a partir da superfície, começando pela região equatorial.

Para determinarmos a frequência de Kepler, partiremos da equação da geodésica para uma partícula em órbita circular, dada por:

$$u^\beta \nabla_\beta u^\alpha = 0, \quad (4.38)$$

onde $u^\mu = u^t(t^\mu + \Omega_K \phi^\mu)$. A condição de normalização $u^\alpha u_\alpha = -1$ nos leva a $u^t = e^{-\nu}/\sqrt{1 - v_K^2}$, onde $v_K = e^{\Psi-\nu}(\Omega_K - \omega)$, de maneira que somos capazes de obter:

$$0 = (1 - v_K^2)\partial_{\bar{r}} \ln u^t = -\nu_{,\bar{r}} + v_K^2 \Psi_{,\bar{r}} - v_K e^{\Psi-\nu} \omega_{,\bar{r}}, \quad (4.39)$$

ou, ainda,

$$v_K = \left\{ e^{\Psi-\nu} \frac{\omega_{,\bar{r}}}{2\Psi_{,\bar{r}}} + \left[\frac{\nu_{,\bar{r}}}{\Psi_{,\bar{r}}} + e^{2\Psi-2\nu} \left(\frac{\omega_{,\bar{r}}}{2\Psi_{,\bar{r}}} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \Big|_{\bar{r}=\bar{r}_e, \theta=\pi/2}, \quad (4.40)$$

onde $e^\Psi = \bar{r} \sin \theta e^{(\gamma-\rho)/2}$. A partir da definição de v_K apresentada acima, é possível encontrar:

$$\Omega_K = \left\{ \omega + \frac{\omega_{,\bar{r}}}{2\Psi_{,\bar{r}}} + \left[e^{2\nu-2\Psi} \frac{\nu_{,\bar{r}}}{\Psi_{,\bar{r}}} + \left(\frac{\omega_{,\bar{r}}}{2\Psi_{,\bar{r}}} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \Big|_{\bar{r}=\bar{r}_e, \theta=\pi/2}. \quad (4.41)$$

Ao analisarmos a equação acima no limite estático, em que a métrica no exterior da estrela é dada por (4.7), e fazermos a substituição para coordenadas de Schwarzschild, obtemos o resultado

$$\Omega_K = \sqrt{\frac{M}{R^3}}, \quad (4.42)$$

que está de acordo também com a expressão Newtoniana.

4.2 Esquema KEH

Como introduzido anteriormente, o esquema KEH (Komatsu-Erigushi-Hachisu) [Komatsu, Eriguchi e Hachisu 1989, Eriguchi, Hachisu e Nomoto 1994] permite integrar numericamente as equações que descrevem a configuração de equilíbrio de estrelas em rotação através de um procedimento iterativo em que a densidade de energia central e o quociente entre o raio polar e o equatorial isotrópicos ($\bar{r}_p/\bar{r}_e$) são mantidos fixos. O método se baseia na representação integral das equações que descrevem o problema, o que nos permite atender automaticamente à condição de espaço-tempo assintoticamente plano.

A fim de transformarmos as equações diferenciais em suas representações integrais, utilizaremos funções de Green. Dessa maneira, utilizando a função de Green para o operador ∇^2 ,

$$G(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}') = -\frac{1}{|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'|}, \quad (4.43)$$

a equação (4.12) pode ser expressa como:

$$\rho = -\frac{1}{4\pi} e^{-\gamma/2} \int_0^\infty d\bar{r}' \int_{-1}^1 d\mu' \int_0^{2\pi} d\phi' \bar{r}'^2 S_\rho(\bar{r}', \mu') \frac{1}{|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'|}. \quad (4.44)$$

É conveniente reescrevermos (4.13) introduzindo coordenadas cilíndricas

$$\bar{\omega} = \bar{r} \sin \theta \quad (4.45)$$

$$z = \bar{r} \cos \theta, \quad (4.46)$$

de forma que, utilizando

$$\begin{aligned} \nabla^2 + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} - \frac{1}{\bar{r}^2} \mu \frac{\partial}{\partial \mu} &= \nabla^2 + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}^2 \tan \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ &= \frac{1}{\bar{\omega}} \frac{\partial}{\partial \bar{\omega}} \left(\bar{\omega}^2 \frac{\partial}{\partial \bar{\omega}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{\bar{\omega}^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}, \end{aligned} \quad (4.47)$$

somos capazes de obter

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{\omega}^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) [\bar{\omega} \gamma e^{\gamma/2}] = \bar{\omega} S_\gamma(r, \mu), \quad (4.48)$$

onde o último termo do lado direito de (4.47) foi desprezado, uma vez que o espaço-tempo é axialmente simétrico. Utilizando a função de Green bidimensional,

$$G(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}') = \frac{1}{2\pi} \log |\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'|, \quad (4.49)$$

é possível derivar:

$$r \sin \theta \gamma = \frac{1}{2\pi} e^{-\gamma/2} \int_0^\infty d\bar{r}' \int_0^{2\pi} d\theta' \bar{r}'^2 \sin \theta' S_\gamma(\bar{r}', \theta') \log |\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'|, \quad (4.50)$$

em que a propriedade $S_\gamma(\bar{r}, \theta) = S_\gamma(\bar{r}, \theta - \pi)$ foi utilizada para que fosse possível ampliar o intervalo de valores de θ para $\pi < \theta \leq 2\pi$.

Finalmente, para que transformemos a equação (4.14), primeiro devemos multiplicá-la pelo fator $\bar{r} \sin \theta \cos \phi$, de forma que obtemos

$$\nabla^2 [\bar{r} \sin \theta \cos \phi \omega e^{(\gamma-2\rho)/2}] = \bar{r} \sin \theta \cos \phi S_\omega(\bar{r}, \theta). \quad (4.51)$$

Utilizando novamente a função de Green (4.43), somos capazes de obter a representação integral de (4.51):

$$\bar{r} \sin \theta \cos \phi \omega = -\frac{1}{4\pi} e^{(2\rho-\gamma)/2} \int_0^\infty d\bar{r}' \int_0^\pi d\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' \bar{r}'^3 \sin \theta'^2 \cos \phi' S_\omega(\bar{r}', \theta') \frac{1}{|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'|}. \quad (4.52)$$

Consideramos agora a expansão de $\frac{1}{|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'|}$, ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'|} &= \sum_{n=0}^\infty f_n^2(\bar{r}, \bar{r}') \{ P_n(\cos \theta) P_n(\cos \theta') \\ &+ 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \theta') \cos [m(\phi - \phi')] \}, \end{aligned} \quad (4.53)$$

onde P_n são os polinômios de Legendre, P_n^m são os polinômios associados de Legendre e

$$f_n^2(\bar{r}, \bar{r}') = \begin{cases} (1/\bar{r})(\bar{r}'/\bar{r})^n, & \text{para } \bar{r}'/\bar{r} < 1, \\ (1/\bar{r}')(\bar{r}/\bar{r}')^n, & \text{para } \bar{r}'/\bar{r} \geq 1. \end{cases} \quad (4.54)$$

Substituindo em (4.44), obtemos:

$$\rho = - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\gamma/2} \int_0^{\infty} d\bar{r}' \int_{-1}^1 d\mu' f_n^2(\bar{r}, \bar{r}') P_n(\mu) P_n(\mu') \bar{r}'^2 S_{\rho}(\bar{r}', \mu'), \quad (4.55)$$

uma vez que $\int_0^{2\pi} d\phi' = 2\pi$ e $\int_0^{2\pi} d\phi' \cos[m(\phi - \phi')] = 0$, dado que $m \neq 0$. Devido à simetria equatorial do problema, temos que $S_{\rho}(\bar{r}', -\mu') = S_{\rho}(\bar{r}', \mu')$. Isto, somado à propriedade $P_n(-\mu) = (-1)^n P_n(\mu)$ dos polinômios de Legendre, nos permite constatar que apenas valores pares de n permanecerão em (4.55), de forma que podemos reduzir a equação a:

$$\rho = - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\gamma/2} \int_0^{\infty} d\bar{r}' \int_0^1 d\mu' f_{2n}^2(\bar{r}, \bar{r}') P_{2n}(\mu) P_{2n}(\mu') \bar{r}'^2 S_{\rho}(\bar{r}', \mu'). \quad (4.56)$$

De modo semelhante, a equação (4.52) torna-se

$$\begin{aligned} \bar{r} \sin \theta \omega = - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{(2\rho-\gamma)/2} \int_0^{\infty} d\bar{r}' \int_0^{\pi} d\theta' f_n^2(\bar{r}, \bar{r}') \bar{r}'^3 \sin \theta'^2 S_{\omega}(\bar{r}', \theta') \\ \left(\frac{1}{n(n+1)} \right) P_n^1(\mu) P_n^1(\mu'), \end{aligned} \quad (4.57)$$

visto que $\int_0^{2\pi} \cos \phi' d\phi' = 0$, e

$$\int_0^{2\pi} \cos \phi' \cos[m(\phi - \phi')] d\phi' = \begin{cases} 0, & m \neq 1 \\ \pi \cos \phi, & m = 1 \end{cases} \quad (4.58)$$

nos impõe $m = 1$. Utilizando novamente a simetria equatorial e as propriedades dos polinômios de Legendre, constatamos que apenas os valores ímpares permanecerão em (4.57), de maneira que obtemos:

$$\begin{aligned} \bar{r} \sin \theta \omega = - \sum_{n=0}^{\infty} e^{(2\rho-\gamma)/2} \int_0^{\infty} d\bar{r}' \int_0^1 d\mu' f_{2n-1}^2(\bar{r}, \bar{r}') \bar{r}'^3 \sin \theta' S_{\omega}(\bar{r}', \mu') \\ \left(\frac{1}{2n(2n-1)} \right) P_{2n-1}^1(\mu) P_{2n-1}^1(\mu'). \end{aligned} \quad (4.59)$$

A expansão do termo $\log |\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'|$ é dada por:

$$\begin{aligned} \log |\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'| &= \frac{1}{2} \log [\bar{r}^2 + \bar{r}'^2 - 2\bar{r}\bar{r}' \cos(\theta - \theta')] \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} f_n^1(\bar{r}, \bar{r}') [\cos(n\theta) \cos(n\theta') + \sin(n\theta) \sin(n\theta')] + g(\bar{r}, \bar{r}'), \end{aligned} \quad (4.60)$$

em que

$$f_n^1(\bar{r}, \bar{r}') = \begin{cases} (\bar{r}'/\bar{r})^n, & \text{para } \bar{r}'/\bar{r} < 1, \\ (\bar{r}/\bar{r}')^n, & \text{para } \bar{r}'/\bar{r} \geq 1, \end{cases} \quad (4.61)$$

e

$$g(\bar{r}, \bar{r}') = \begin{cases} \ln \bar{r}, & \text{para } \bar{r}'/\bar{r} < 1, \\ \ln \bar{r}', & \text{para } \bar{r}'/\bar{r} \geq 1. \end{cases} \quad (4.62)$$

Portanto, a equação (4.50) pode ser expressa como

$$\bar{r} \sin \theta \gamma = -\frac{1}{2\pi} e^{-\gamma/2} \int_0^\infty d\bar{r}' \int_0^{2\pi} d\theta' \bar{r}'^2 \sin \theta' S_\gamma(\bar{r}', \theta') \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} f_n^1(\bar{r}, \bar{r}') [\cos(n\theta) \cos(n\theta') + \sin(n\theta) \sin(n\theta')], \quad (4.63)$$

uma vez que $S_\gamma(\bar{r}, \theta) = S_\gamma(\bar{r}, \theta - \pi)$, e assim

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\theta' \sin \theta' S_\gamma(\bar{r}', \theta') &= \int_0^\pi d\theta' \sin \theta' S_\gamma(\bar{r}', \theta') + \\ &+ \int_0^\pi d\theta' \sin(\theta' - \pi) S_\gamma(\bar{r}', \theta' - \pi) = \\ &= \int_0^\pi d\theta' \sin \theta' S_\gamma(\bar{r}', \theta') - \int_0^\pi d\theta' \sin(\theta') S_\gamma(\bar{r}', \theta') \\ &= 0, \end{aligned} \quad (4.64)$$

fazendo com que o termo que acompanha $g(\bar{r}, \bar{r}')$ seja nulo. Utilizando propriedades trigonométricas juntamente com as simetrias do problema, somos capazes de, após algumas manipulações, obter:

$$\begin{aligned} \bar{r} \sin \theta \gamma &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^\infty e^{-\gamma/2} \int_0^\infty d\bar{r}' \int_0^1 d\mu' \bar{r}'^2 f_{2n-1}^1(\bar{r}, \bar{r}') \left(\frac{1}{2n-1} \right) \\ &\quad \sin(2n-1)\theta \sin(2n-1)\theta' S_\gamma(\bar{r}', \mu'). \end{aligned} \quad (4.65)$$

Como comentado anteriormente, ao transformarmos as equações diferenciais em suas representações integrais, conseguimos garantir o atendimento às condições de planura assintótica: $\rho \approx O(1/\bar{r})$, $\gamma \approx O(1/\bar{r}^2)$ e $\omega \approx O(1/\bar{r}^3)$ para $\bar{r} \rightarrow \infty$.

Para estabelecermos um modelo de equilíbrio para uma estrela com rotação uniforme, precisamos definir, além da equação de estado, outros dois parâmetros: a densidade de energia central ϵ_c e o quociente $\bar{r}_p/\bar{r}_e$ entre o raio polar $\bar{r}_p$ e o raio equatorial $\bar{r}_e$ isotrópicos. Seguindo [Komatsu, Eriguchi e Hachisu 1989], adotamos $\bar{r}_p/\bar{r}_e$ ao invés da velocidade angular central Ω_c devido à possível ambiguidade na definição dos modelos utilizando este último parâmetro, uma vez que pode existir mais de uma solução com o mesmo Ω_c .

Conforme também descrito em [Komatsu, Eriguchi e Hachisu 1989], três pontos específicos — denotados por P , Q , W — são utilizados para impor condições de contorno na modelagem das estrelas. O ponto P corresponde ao polo da estrela, onde $\bar{r} = \bar{r}_p$ e $\mu = 1$; Q está localizado no equador, em que $\bar{r} = \bar{r}_e$ e $\mu = 0$; e W representa a posição no plano equatorial onde a densidade de energia atinge seu valor máximo, também em $\mu = 0$.

Com o objetivo de tornar as quantidades trabalhadas adimensionais, adotaremos a seguinte mudança de coordenada:

$$\hat{r} = \frac{\bar{r}}{\bar{r}_e}, \quad (4.66)$$

além disso, reescalonaremos os potenciais da métrica de maneira que

$$\hat{\alpha} = \frac{\alpha}{\bar{r}_e^2}, \quad \hat{\nu} = \frac{\nu}{\bar{r}_e^2}, \quad \hat{\beta} = \frac{\beta}{\bar{r}_e^2}, \quad \hat{\omega} = \omega \bar{r}_e, \quad \hat{\Omega} = \Omega \bar{r}_e. \quad (4.67)$$

Em termos da nova coordenada, somos capazes de definir univocamente os três pontos de imposição de condições de contorno ao mantermos fixos os parâmetros $\bar{r}_p/\bar{r}_e$ e ϵ_c e utilizarmos a definição descrita acima para o ponto W .

No formalismo KEH, as derivadas são calculadas a partir de diferenças finitas, apresentando precisão de segunda ordem. As integrais são calculadas utilizando a fórmula de Simpson e a regra dos trapézios. Exemplos de soluções utilizando o formalismo KEH podem ser encontrados em [Eriguchi, Hachisu e Nomoto 1994]. O processo iterativo utilizado pelo `rns` é apresentado na subseção 4.4.

4.3 Compactificação CST

A compactificação CST, apresentada por Cook, Shapiro e Teukolsky, se baseia na ideia de introduzir uma nova coordenada radial a fim de aumentar a precisão das soluções numéricas e diminuir a extensão do intervalo radial de integração. Para isso, os autores definiram a coordenada s , dada por [Cook, Shapiro e Teukolsky 1994]:

$$\bar{r} = \bar{r}_e \frac{s}{1-s}, \quad (4.68)$$

onde $\bar{r}_e$ é o raio equatorial. Com essa transformação de coordenadas, somos capazes de converter o intervalo $[0, \infty)$ em um intervalo limitado $[0, 1]$, permitindo que as condições de contorno de anulação dos potenciais métricos no infinito sejam impostas exatamente.

A partir da equação (4.68), somos capazes de escrever

$$d\bar{r} = \frac{\bar{r}_e}{(1-s)^2} ds, \quad (4.69)$$

e, assim, expressar a equação (4.55) em termos da coordenada s como [Cook, Shapiro e Teukolsky 1994]

$$\begin{aligned} \rho(s, \mu) &= - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\gamma(s, \mu)/2} \int_0^1 ds' \int_0^1 d\mu' \frac{\bar{r}_e}{(1-s)^2} f_{2n}^2(s, s') P_{2n}(\mu) P_{2n}(\mu') \bar{S}_\rho(s', \mu'), \\ \bar{S}_\rho(s', \mu') &= e^{\gamma/2} \left[8\pi \bar{r}_e^2 e^{2\alpha} (\epsilon + p) \left(\frac{1+v^2}{1-v^2} \right) \left(\frac{s'}{1-s'} \right)^2 \right. \\ &\quad + (1-\mu'^2) e^{-2\rho} \left(\frac{s'}{1-s'} \right)^2 \left(s'^2 (1-s')^2 \hat{\omega}_{s'}^2 + (1-\mu'^2) \hat{\omega}_{\mu'}^2 \right) \\ &\quad + s' (1-s') \gamma_{s'} - \mu' \gamma_{\mu'} \\ &\quad + \frac{\rho}{2} \left\{ 16\pi \bar{r}_e^2 e^{2\alpha} p \left(\frac{s'}{1-s'} \right)^2 - \frac{1}{2} s'^2 (1-s')^2 \gamma_{s'}^2 \right. \\ &\quad \left. \left. - s' (1-s') \gamma_{s'} - \gamma_{\mu'} \left[\frac{1}{2} \gamma_{\mu'} (1-\mu'^2) - \mu' \right] \right\} \right], \end{aligned} \quad (4.70)$$

onde

$$f_{2n}^2(s, s') = \begin{cases} \frac{1}{\bar{r}_e} \left(\frac{1-s}{s} \right) \frac{f_{2n}(s)}{f_{2n}(s')}, & \text{para } \frac{s'(1-s)}{s(1-s')} < 1, \\ \frac{1}{\bar{r}_e} \left(\frac{1-s'}{s'} \right) \frac{f_{2n}(s')}{f_{2n}(s)}, & \text{para } \frac{s'(1-s)}{s(1-s')} \geq 1, \end{cases} \quad (4.71)$$

e

$$f_{2n}(s) = \frac{1-s^{2n}}{s}. \quad (4.72)$$

De forma similar, podemos escrever (4.59) como:

$$\begin{aligned} \omega(s, \mu) &= - \sum_{n=0}^{\infty} e^{(2\rho(s, \mu) - \gamma(s, \mu))/2} \int_0^1 ds' \int_0^1 d\mu' \frac{\bar{r}_e}{(1-s')^2} \bar{f}_{2n-1}^2(s, s') \\ &\quad \times \frac{1}{2n(2n-1)} \frac{\sin \theta'}{\sin \theta} P_{2n-1}^1(\mu) P_{2n-1}^1(\mu') \bar{S}_\omega(s', \mu'), \end{aligned} \quad (4.73)$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_\omega(s', \mu') &= e^{(\gamma-2\rho)/2} \left[-16\pi \bar{r}_e^2 e^{2\alpha} \left(\frac{s'}{1-s'} \right)^2 \frac{(\Omega - \omega)(\epsilon + p)}{1-v^2} \right. \\ &\quad + \omega \left\{ -8\pi \bar{r}_e^2 e^{2\alpha} \frac{(1+v^2)\epsilon + 2v^2 p}{1-v^2} \left(\frac{s'}{1-s'} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - s'(1-s') \left(2\rho_{s'} + \frac{1}{2}\gamma_{s'} \right) + \mu' \left(2\rho_{\mu'} + \frac{1}{2}\gamma_{\mu'} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4}s'^2(1-s')^2(4\rho_{s'}^2 - \gamma_{s'}^2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{(1-\mu'^2)}{4}(4\rho_{\mu'}^2 - \gamma_{\mu'}^2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{s'^2}{(1-s')^2}(1-\mu'^2)e^{-2\rho} \left[s^2(1-s)^2 \hat{\omega}_{s'}^2 + (1-\mu'^2) \hat{\omega}_{\mu'}^2 \right] \right\} \Bigg], \end{aligned} \quad (4.74)$$

em que

$$\bar{f}_{2n-1}^2(s, s') = \begin{cases} \frac{1}{\bar{r}_e} \left(\frac{1-s}{s} \right) \frac{f_{2n}(s)}{f_{2n}(s')}, & \text{para } \frac{s'(1-s)}{s(1-s')} < 1, \\ \frac{1}{\bar{r}_e} \left(\frac{(1-s)^2}{s} \right) \left(\frac{s'}{1-s'} \right) \frac{f_{2n}(s')}{f_{2n}(s)}, & \text{para } \frac{s'(1-s)}{s(1-s')} \geq 1. \end{cases} \quad (4.75)$$

Analogamente, (4.65) passa a ser dada por:

$$\begin{aligned} \gamma(s, \mu) &= -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\gamma(s, \mu)/2} \int_0^1 ds' \int_0^1 d\mu' \frac{\bar{r}_e}{(1-s')^2} \bar{f}_{2n-1}^1(s, s') \\ &\quad \times \frac{1}{2n-1} \frac{\sin(2n-1)\theta \sin(2n-1)\theta'}{\sin \theta} \bar{S}_\gamma(s', \mu'), \end{aligned} \quad (4.76)$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_\gamma(s', \mu') &= e^{\gamma/2} \left\{ 16\pi \bar{r}_e^2 e^{2\alpha} p \left(\frac{s'}{1-s'} \right)^2 + \frac{\gamma}{2} \left[16\pi \bar{r}_e^2 e^{2\alpha} p \left(\frac{s'}{1-s'} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2}s'^2(1-s')^2 \gamma_{s'}^2 - \frac{(1-\mu'^2)}{2} \gamma_{\mu'}^2 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.77)$$

na qual

$$\bar{f}_{2n-1}^1(s, s') = \begin{cases} \frac{1}{\bar{r}_e} \left(\frac{1-s'}{s'} \right) \frac{f_{2n}(s)}{f_{2n}(s')}, & \text{para } \frac{s'(1-s)}{s(1-s')} < 1, \\ \frac{1}{\bar{r}_e} \left(\frac{1-s}{s} \right)^2 \left(\frac{s'}{1-s'} \right) \frac{f_{2n}(s')}{f_{2n}(s)}, & \text{para } \frac{s'(1-s)}{s(1-s')} \geq 1. \end{cases} \quad (4.78)$$

Por fim, (4.19) se transforma em

$$\begin{aligned}
\alpha(s, \mu)_{,\mu} = & -\frac{1}{2}(\rho_{,\mu} + \gamma_{,\mu}) - \left\{ (1 - \mu^2) (1 + s(1 - s)\gamma_{,s})^2 + [-\mu + (1 - \mu^2)\gamma_{,\mu}]^2 \right\}^{-1} \\
& \times \left[\frac{1}{2} \left[s^2(1 - s)^2(\gamma_{,ss} + \gamma_{,s}^2) - 2s^2(1 - s)\gamma_{,s} - (1 - \mu^2)(\gamma_{,\mu\mu} + \gamma_{,\mu}^2) \right] \right. \\
& \times [-\mu + (1 - \mu^2)\gamma_{,\mu}] \\
& + s(1 - s)\gamma_{,s} \left[\frac{1}{2}\mu + \mu s(1 - s)\gamma_{,s} + \frac{1}{2}(1 - \mu^2)\gamma_{,\mu} \right] \\
& + \frac{3}{2}\gamma_{,\mu} [-\mu^2 + \mu(1 - \mu^2)\gamma_{,\mu}] \\
& - s(1 - s)(1 - \mu^2)(\gamma_{,s\mu} + \gamma_{,s}\gamma_{,\mu})(1 + s(1 - s)\gamma_{,s}) \\
& - \frac{1}{4}\mu s^2(1 - s)^2(\rho_{,s} + \gamma_{,s})^2 - \frac{1}{2}s(1 - s)(1 - \mu^2)(\rho_{,s} + \gamma_{,s})(\rho_{,\mu} + \gamma_{,\mu}) \\
& + \frac{1}{4}\mu(1 - \mu^2)(\rho_{,\mu} + \gamma_{,\mu})^2 \\
& - \frac{1}{2}s^2(1 - s)^2(1 - \mu^2)\gamma_{,s}(\rho_{,s} + \gamma_{,s})(\rho_{,\mu} + \gamma_{,\mu}) \\
& + \frac{1}{4}(1 - \mu^2)\gamma_{,\mu} \left[s^2(1 - s)^2(\rho_{,s} + \gamma_{,s})^2 - (1 - \mu^2)(\rho_{,\mu} + \gamma_{,\mu})^2 \right] \\
& + (1 - \mu^2)e^{-2\rho} \left\{ \frac{1}{4}s^4\mu\hat{\omega}_{,s}^2 + \frac{1}{2}\frac{s^3}{1 - s}(1 - \mu^2)\hat{\omega}_{,s}\hat{\omega}_{,\mu} - \frac{1}{4}\frac{s^2}{(1 - s)^2}\mu(1 - \mu^2)\hat{\omega}_{,\mu}^2 \right. \\
& + \frac{1}{2}s^4(1 - \mu^2)\gamma_{,s}\hat{\omega}_{,s}\hat{\omega}_{,\mu} \\
& \left. - \frac{1}{4}\frac{s^2}{(1 - s)^2}(1 - \mu^2)\gamma_{,\mu} \left[s^2(1 - s)^2\hat{\omega}_{,s}^2 - (1 - \mu^2)\hat{\omega}_{,\mu}^2 \right] \right\}. \tag{4.79}
\end{aligned}$$

As quantidades de equilíbrio também podem ser expressas em função da nova coordenada, de maneira que as equações (4.29), (4.36) e (4.31) assumem a seguinte forma [Cook, Shapiro e Teukolsky 1994]:

$$\begin{aligned}
M = & 4\pi\bar{r}_e^3 \int_0^1 \frac{s'^2 ds'}{(1 - s')^4} \int_0^1 d\mu' e^{2\alpha+\gamma} \left\{ \frac{\epsilon + p}{1 - v^2} \left[1 + v^2 + \frac{2s'v}{1 - s'} \sqrt{1 - \mu'^2} \omega e^{-\rho} \right] \right. \\
& \left. + 2p \right\}, \tag{4.80}
\end{aligned}$$

$$M_0 = 4\pi\bar{r}_e^3 \int_0^1 \frac{s'^2 ds'}{(1 - s')^4} \int_0^1 d\mu' e^{2\alpha+(\gamma-\rho)/2} \frac{\epsilon_0}{(1 - v^2)^{1/2}}, \tag{4.81}$$

$$J = 4\pi\bar{r}_e^4 \int_0^1 \frac{s'^3 ds'}{(1 - s')^5} \int_0^1 d\mu' \sqrt{1 - \mu'^2} e^{2\alpha+(\gamma-\rho)/2} (\epsilon + p) \frac{v}{1 - v^2}, \tag{4.82}$$

enquanto (4.41) e (4.40) transformam-se em

$$\Omega_K = \omega + \frac{\omega_{,s}}{2\Psi_{,s}} + \left[\frac{e^{2\rho}}{r_e^2} \frac{(\gamma_{,s} + \rho_{,s})}{2\Psi_{,s}} + \left(\frac{\omega_{,s}}{2\Psi_{,s}} \right)^2 \right]^{1/2}, \tag{4.83}$$

$$v_K = \frac{\omega_{,s}}{(8 + \gamma_{,s} - \rho_{,s})} \bar{r}_e e^{-\rho} + \left[\frac{\gamma_{,s} + \rho_{,s}}{8 + \gamma_{,s} - \rho_{,s}} + \left(\frac{\omega_{,s}\bar{r}_e e^{-\rho}}{8 + \gamma_{,s} - \rho_{,s}} \right)^2 \right]^{1/2}, \tag{4.84}$$

onde $2\Psi_{,s} = 8 + \gamma_{,s} - \rho_{,s}$.

4.4 rns

O **rns** é um código em C++, criado originalmente por Nikolaos Stergioulas, capaz de construir modelos de estrelas compactas relativísticas em rotação rápida. O algoritmo assume rotação uniforme e utiliza equações de estado (tabuladas ou politrópicas) fornecidas pelo usuário. Para isso, inclui rotinas que integram de maneira iterativa as equações de campo de Einstein para estrelas de nêutrons compostas por fluido perfeito, permitindo tanto o cálculo de modelos individuais quanto o de sequências de modelos.

O processo iterativo do código é descrito brevemente abaixo:

1. Dados um valor desejado de Ω , um conjunto inicial de valores para ρ , γ , α , ω , $\bar{r}_e$, $\bar{r}_p$ e $\bar{r}_p/\bar{r}_e$ – derivados de uma solução estática ou de um modelo rotativo intermediário previamente calculado – e uma equação de estado (tabulada ou politrópica) disponibilizada pelo usuário, o processo iterativo é então iniciado. Durante a iteração, o máximo da densidade de energia e o quociente $\bar{r}_p/\bar{r}_e$ são mantidos fixos, enquanto a localização do máximo da densidade de energia pode variar conforme necessário;
2. Como discutido anteriormente, os potenciais ρ , γ e α são então reescalados por um fator $1/\bar{r}_e^2$, enquanto ω é redimensionado por $\bar{r}_e$;
3. Um novo valor de $\bar{r}_e$ é então calculado integrando a equação (4.25) do centro ao polo da estrela, de maneira a obter:

$$\bar{r}_e^2 = \frac{1}{\nu_{polo} - \nu_{centro}} \int_0^{p_0} \frac{dp'}{\epsilon + p'}; \quad (4.85)$$

4. A partir da integração da equação (4.22) do equador ao polo, é possível obter:

$$\hat{\Omega}_e = e^{\bar{r}_e^2(\hat{\nu}_e - \hat{\lambda}_e)} (1 - e^{2\bar{r}_e^2(\hat{\nu}_p - \hat{\nu}_e)})^{1/2} + \hat{\omega}_e. \quad (4.86)$$

Utilizando esta relação, um novo valor para a velocidade angular no equador Ω_e é calculado;

5. A partir da resolução da equação (4.23) ao longo de toda a estrela e do uso de uma equação de estado, novos valores de entalpia, densidade de energia e pressão são obtidos.
6. Os potenciais ρ , γ e α são reescalados de volta, e novas distribuições para estas funções, assim como para ω , são obtidas utilizando a fórmula de Simpson e regra dos trapézios como métodos de integração numérica das equações (4.70), (4.76), (4.19) e (4.73).
7. Averigua-se se a diferença entre a velocidade angular desejada e a obtida é menor que 10^{-5} . Caso não seja, diminui-se o valor de r_p/r_e e, a partir do segundo passo, todos os processos são repetidos até que a convergência seja obtida.

Na tabela 1, apresentada no Apêndice, listamos as funções que compõem o código `rns`, bem como suas funcionalidades. Na próxima seção, discutiremos alguns resultados obtidos com a ajuda do `rns` e códigos próprios.

4.5 Resultados numéricos

Como uma aplicação do formalismo apresentado neste capítulo para estrelas com rotação rápida em Relatividade Geral, abordaremos aqui o impacto da rotação no perfil massa-raio dessas estrelas. Discutiremos também o vínculo aproximadamente universal entre a razão p_c/ϵ_c e a compacidade equatorial da estrela, C_e , estendendo a relação que integra o trabalho [Saes e Mendes 2022] para o caso com rotação.

Em um modelo newtoniano para estrelas com rotação, a força centrífuga atua contra a gravidade, alterando a estrutura da estrela. Como resultado, a estrela se deforma, assumindo uma forma oblata, com um raio equatorial maior do que o polar. Algo similar ocorre com estrelas relativísticas. No caso estático, o equilíbrio hidrodinâmico é sustentado pela pressão interna da estrela e a força gravitacional, havendo um limite de massa que a estrela consegue sustentar. Quando incluímos a rotação, o equilíbrio hidrodinâmico se altera devido à presença da força centrífuga, que contribui para resistir ao processo de implosão. Como consequência, uma estrela de nêutrons com rotação pode sustentar uma maior quantidade de massa quando comparada a uma estrela estática. Este efeito é ilustrado na figura 11, onde podemos verificar que a massa máxima da estrela, assim como seu raio equatorial, aumentam conforme sua frequência de rotação fica mais próxima da frequência de Kepler, $f_K = \Omega_K/(2\pi)$. Este aumento se torna mais expressivo para frações significativas de f_K .

A figura também mostra sequências com valores constantes de p_c/ϵ_c , representadas por curvas tracejadas. Observa-se que elas se sobrepõem às linhas de compacidade equatorial (C_e) constante indicadas pelas curvas cinzas contínuas, até taxas de rotação moderadamente altas, como notado também em [Konstantinou e Morsink 2022]. Os pontos destacados na figura identificam quatro configurações: (i) a solução estática de massa máxima (azul), (ii) uma solução rotativa com a mesma massa bariônica de (i) e uma frequência de rotação de 1 kHz (vermelho), (iii) uma solução com a mesma massa bariônica de (i), mas girando no limite de Kepler (amarelo) e, (iv) a solução de massa máxima girando com a velocidade angular de Kepler (verde). Analisando suas disposições no gráfico, é possível constatar que, ao aumentarmos a velocidade angular da estrela, mantendo a massa bariônica constante, geramos estrelas menos compactas em comparação com configurações estáticas.

Conforme discutido anteriormente, embora existam várias candidatas, a equação de estado que descreve com precisão a estrutura interna das estrelas de nêutrons ainda é desconhecida. Dessa maneira, é interessante que existam *relações universais* entre

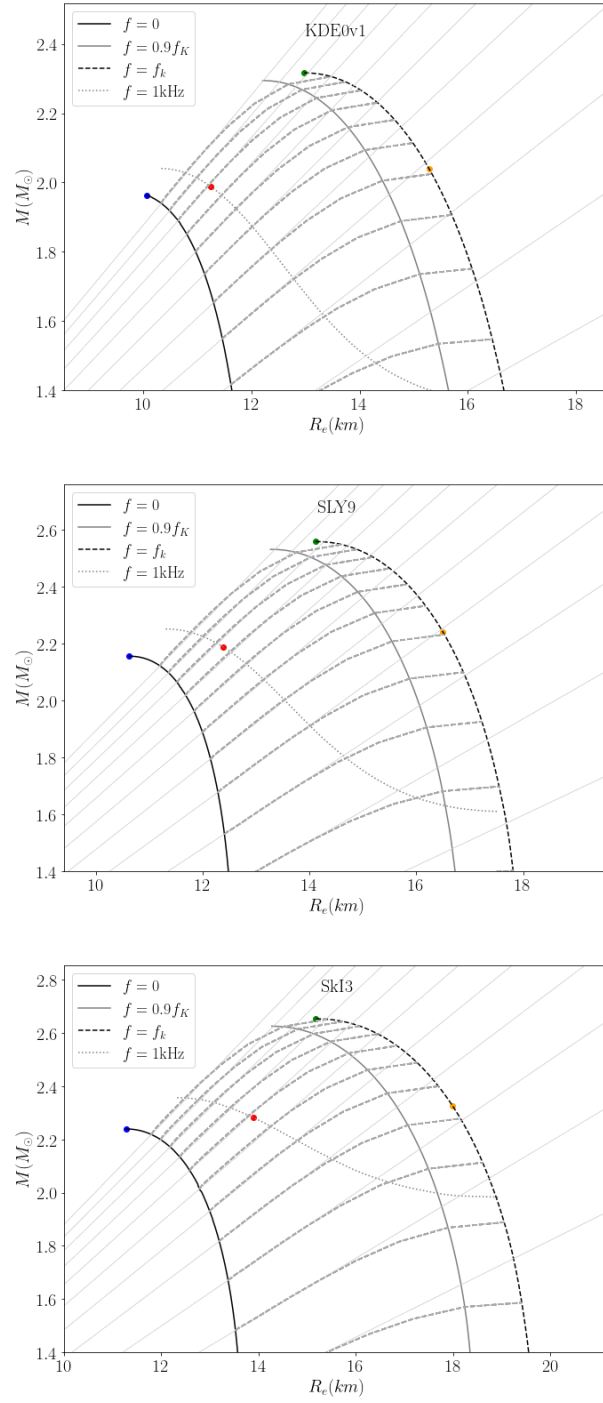


Figura 11 – Gráfico mostrando a relação entre a massa gravitacional M e o raio equatorial R_e para as EoS KDE0v1 (esquerda), SLY9 (centro), SKI3 (direita). As frequências utilizadas foram $f = 0$, $f = 1\text{ kHz}$, $f = 0.9f_K$ e $f = f_K$. As curvas cinza tracejadas indicam as sequências com valores constantes de p_c/ϵ_c . As curvas cinza contínuas que cortam a figura sinalizam os pontos em que $C_e = M/R_e = \text{cte}$. Os pontos destacados na figura identificam quatro configurações: (i) a solução estática de massa máxima (azul), (ii) uma solução rotativa com a mesma massa bariônica de (i) e uma frequência de rotação de 1 kHz (vermelho), (iii) uma solução com a mesma massa bariônica de (i), mas girando no limite de Kepler (amarelo) e, (iv) a solução de massa máxima girando no limite de Kepler (verde).

propriedades de estrelas de nêutrons, como as relações “I-Love-Q” [Yagi e Yunes 2013], que conectam as versões adimensionais do momento de inércia, deformabilidade de maré e momento de quadrupolo induzido pela rotação. A relação $\bar{I} - \bar{Q}$ foi ilustrada na Figura 8 para estrelas com rotação baixa. Essas relações podem ser utilizadas para quebrar degenerescências na estimativa de parâmetros de ondas gravitacionais e para testar teorias de gravitação. Uma discussão mais abrangente de algumas relações universais conhecidas pode ser encontrada em [Yagi e Yunes 2017].

Uma outra relação, introduzida no trabalho [Saes e Mendes 2022], conecta a compacidade C , momento de inércia adimensional $\bar{I}$ e deformabilidade de maré de uma estrela de nêutrons, no limite estático, com a razão entre sua pressão central e densidade de energia central, p_c/ϵ_c , que pode ser interpretada como uma medida média da rigidez da matéria nuclear dentro desse objeto. Utilizando expansões pós-Minkowskianas, foi encontrado que tal relação está associada ao limite Newtoniano das equações de estrutura e ao fato de que as equações de estado que descrevem estrelas de nêutrons são relativamente rígidas [Saes, Mendes e Yunes 2024]. Foi constatado ainda que este limite é aproximadamente compartilhado por uma ampla família de equações de estado relevantes para a descrição de estrelas de nêutrons e que se enfraquece à medida que as correções relativísticas são incluídas [Saes, Mendes e Yunes 2024].

Na figura 12, exibimos a relação $p_c/\epsilon_c \times C_e$ para as equações de estado KDE0v1, SLY9 e SKI3. Analisamos três casos: estrelas estáticas, estrelas em rotação com uma frequência fixa de 1 kHz – superior à de qualquer rádio pulsar conhecido [Hessels et al. 2006] – e estrelas girando na frequência de Kepler. A escolha de utilizar a compacidade equatorial se deveu ao fato já mencionado de que a compacidade equatorial é aproximadamente constante (até rotações moderadas) ao longo de uma sequência com densidade central constante. É possível notar que as sequências estáticas e rodando com frequência de 1 kHz se sobrepõem aproximadamente, o que não é verdade quando analisamos as sequências girando na frequência de Kepler. Isto indica que, até taxas de rotação moderadas, a relação $p_c/\epsilon_c \times C_e$ apresenta fraca dependência na rotação.

Os resultados apresentados nesta seção e outros mais compõem o artigo [Mendes, Sodré e Falciano 2024], onde investigamos a influência da presença de rotação rápida na superconformalidade da velocidade média do som ao quadrado e os efeitos da gravidade modificada que dependem disso, com atenção especial às teorias escalar-tensoriais suscetíveis ao efeito de escalarização espontânea.

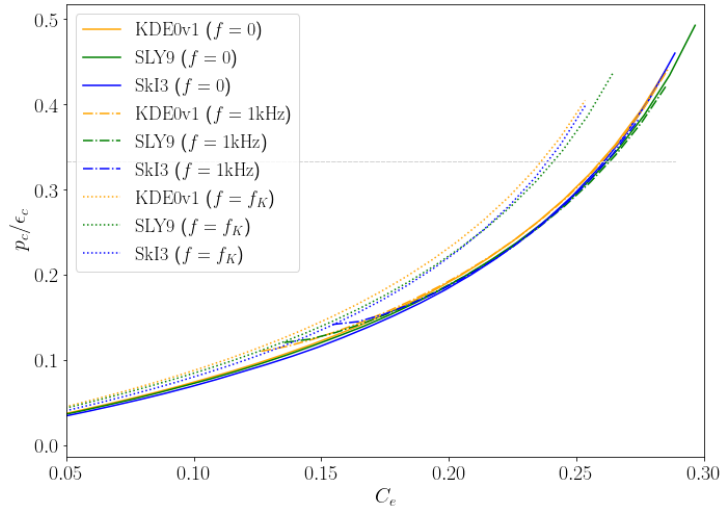


Figura 12 – Gráfico ilustrando a razão p_c/ϵ_c em função da compacidade equatorial $C_e = M/R_e$, para as equações de estado KDE0v1, SLY9 e SKI3, e taxas de rotação $f = 0$, $f = 1$ kHz, e $f = f_K$. As curvas em que $f = 1$ kHz são truncadas no limite de ejeção de massa. A linha cinza horizontal identifica as configurações em que $p_c/\epsilon_c = 1/3$.

Conclusão

Nesta dissertação, investigamos a estrutura de estrelas de nêutrons sob diferentes regimes de rotação, utilizando uma abordagem relativística baseada na teoria da relatividade geral e em equações de estado realistas para a matéria nuclear. A análise foi conduzida em três etapas principais: configurações estáticas, rotação lenta e rotação rápida.

No Capítulo 2, exploramos o formalismo necessário para descrever a configuração de equilíbrio de estrelas de nêutrons estáticas. Em seguida, resolvemos numericamente as equações de TOV para diferentes equações de estado por meio de códigos próprios. Os perfis radiais das variáveis ν , m , ϵ e p , apresentados na Figura 4, evidenciam diferenças significativas entre as EoS. Já na figura 5, apresentamos a relação massa-raio, onde as massas máximas obtidas — $2.24M_{\odot}$ (SKI3), $2.16M_{\odot}$, (SLy9) e $1.97M_{\odot}$ (KDE0v1) — são compatíveis com observações de pulsares massivos e mostram como a rigidez da EoS afeta o equilíbrio estelar.

Em seguida, durante o Capítulo 3, apresentamos e aplicamos o formalismo de Hartle-Thorne para o estudo de estrelas com rotação lenta, utilizando códigos próprios. Na figura 8, notamos que a relação $\bar{I} - \bar{Q}$ apresenta comportamento universal, relativamente independente da EoS, corroborando os resultados de [Yagi e Yunes 2013]. Já na figura 9, podemos observar que a rotação aumenta o raio equatorial e permite massas maiores, enquanto em 10, observamos o achatamento nos polos e a expansão no equador causados pela presença de velocidade angular.

Por fim, no Capítulo 4, estudamos o formalismo por detrás da configuração de equilíbrio de estrelas de nêutrons rodando rapidamente, regime em que os efeitos relativísticos são fortemente não lineares e não podem ser tratados como perturbações. Exploramos o esquema KEH e a compactificação CST, e apresentamos também uma introdução acerca do código **rns**, desenvolvido por Stergioulas e Friedman. Aliado a códigos próprios, utilizamos o **rns** para gerar as soluções numéricas apresentadas na figura 11, onde podemos verificar que tanto a massa máxima quanto o raio equatorial da estrela aumentam à medida que sua frequência de rotação se aproxima da frequência de Kepler, f_K , sendo esse crescimento mais acentuado para frações significativas de f_K . Além disso, ao analisarmos as sequências com valores constantes de p_c/ϵ_c , representadas por curvas tracejadas, observamos que elas coincidem com as linhas de compactidade equatorial constante C_e , indicadas pelas curvas cinza contínuas, até regimes de rotação moderadamente altos. Constata-se ainda que a rotação leva a estrelas de nêutrons menos compactas em relação às configurações estáticas com mesma massa bariônica. Na figura 12, exploramos a relação entre p_c/ϵ_c e a compactidade equatorial C_e para as EoS SLy9, SKI3 e KDE0v1, em três regimes: estático,

rotação moderada (1 kHz) e rotação no limite de Kepler. As sequências estáticas e de 1 kHz praticamente coincidem no intervalo de compacidades relevante para estrelas de nêutrons, enquanto as configurações na frequência de Kepler desviam consideravelmente.

Em síntese, os resultados obtidos nesta dissertação demonstram como diferentes regimes de rotação influenciam significativamente as propriedades macroscópicas de estrelas de nêutrons, destacando o papel central da equação de estado na determinação de suas estruturas internas. A análise numérica dos casos estático, de rotação lenta e de rotação rápida evidenciou tanto a robustez de certas relações universais quanto os limites de sua aplicabilidade, especialmente em regimes extremos. Essas investigações estabelecem bases sólidas para estudos futuros envolvendo efeitos relativísticos intensos, teorias modificadas de gravidade e ondas gravitacionais.

Apêndice

Funcionalidades do `rns`

Na tabela 1, listamos as funções do código `rns`, bem como suas funcionalidades. A versão utilizada foi obtida a partir do repositório [[Tervala 2020](#)], em que uma versão em `C++` do código é disponibilizada.

Arquivo	Função	Descrição
manual.tex		Manual escrito por Sharon Mor-sink contendo uma visão geral sobre o funcionamento do código.
consts.c		Define as constantes utilizadas pelos programas.
equil_util.c	hunt	Procura o ponto mais próximo de um dado valor.
equil_util.c	interp	Implementa uma rotina de interpolação polinomial com base nos polinômios de Legendre, utilizada na interpolação da equação de estado, assim como dos potenciais métricos.
equil_util.c	deriv_s, deriv_m, deriv_ss, deriv_mm, deriv_sm	Respectivamente, derivada primeira em relação a s utilizando diferença central, derivada primeira em relação a μ utilizando diferença central, derivada segunda em relação a s utilizando diferença central, derivada segunda em relação a μ utilizando diferença central, derivada segunda em relação a s e μ utilizando diferença central. Todas as funções apresentam tratamento para as bordas.

equil_util.c	legendre	Retorna os polinômios de Legendre de grau n em x .
equil_util.c	plgndr	Retorna os polinômios associados de Legendre P_l^m em x .
equil_util	rtsec_G	Implementa o método da secante para encontrar raízes de uma função, utilizando uma abordagem específica relacionada à equações de estado politrópicas.
GridTrig.c	GridTrig	Computa as funções compute_f2n, compute_f_rho_gamma e compute_trig para dados valores de s e μ .
GridTrig.c	compute_f2n	Calcula a função descrita em (4.72).
GridTrig.c	compute_f_rho_gamma	Calcula $\bar{r}_e/(1-s)^2 f_{2n}^2(s, s')$ e $\bar{r}_e/(1-s')^2 \bar{f}_{2n-1}^1(s, s')$.
GridTrig.c	compute_trig	Calcula algumas funções trigonométricas e polinômios de Legendre.
EquationOfState.c	EquationOfState	Atribui valores a kIsTabulatedEos e kGammaP, e chama loadTabulatedEos a fim de ler a tabela que contém a equação de estado, quando disponibilizada.
EquationOfState.c	loadTabulatedEos	Lê a tabela que contém a equação de estado, quando disponibilizada.
EquationOfState.c	e_of_rho0	Calcula a densidade de energia para um conjunto de densidade de massa de repouso e equação de estado politrópica.
EquationOfState.c	e_at_p	Calcula a densidade de energia para um conjunto de pressão e equação de estado.
EquationOfState.c	p_at_e	Calcula a pressão para um conjunto de densidade de energia e equação de estado tabulada.

EquationOfState.c	p_at_h	Calcula a pressão para um conjunto de entalpia e equação de estado tabulada.
EquationOfState.c	h_at_p	Calcula a entalpia para um conjunto de pressão e equação de estado tabulada.
EquationOfState.c	n0_at_e	Calcula a densidade numérica para um conjunto de densidade de energia e equação de estado tabulada.
EquationOfState.c	isTabulatedEos	Retorna kIsTabulatedEos.
EquationOfState.c	getGammaP	Retorna kGammaP.
EquationOfState.c	getNumTab	Retorna _num_tab, que armazena a quantidade de entradas na tabela que contém a equação de estado, quando fornecida.
RotatingNeutronStar.c	RotatingNeutronStar	Define a equação de estado, e_center, e_surface, p_surface, enthalpy_min e chama initializeRns.
RotatingNeutronStar.c	make_grid	Define as grades de valores para s e μ .
RotatingNeutronStar.c	make_center	Calcula p_c e H_c para uma dada equação de estado.
RotatingNeutronStar.c	sphere	Chama a função TOV e retorna ρ , γ , ω , α , rho_mu_0 (ρ em $\mu = 0$), gama_mu_0 (γ em $\mu = 0$), rho_eq (ρ no equador), gama_eq (γ no equador), r_e (coordenada isotrópica $\bar{r}$ no equador), e r_ratio (quociente entre o raio polar e o equatorial $\bar{r}_p/\bar{r}_e$).
RotatingNeutronStar.c	TOV	Integra as equações de TOV em coordenadas isotrópicas.
RotatingNeutronStar.c	dm_dr_is	Define a equação diferencial que relaciona m e $\bar{r}$.

RotatingNeutronStar.c	dp_dr_is	Define a equação diferencial que relaciona p e $\bar{r}$.
RotatingNeutronStar.c	dr_dr_is	Define a equação diferencial que relaciona r e $\bar{r}$.
RotatingNeutronStar.c	setAccuracy	Estabelece o valor da variável accuracy.
RotatingNeutronStar.c	setCf	Estabelece o valor da variável cf.
RotatingNeutronStar.c	setRRatio	Estabelece o valor da variável r_ratio.
RotatingNeutronStar.c	getOmega	Retorna o valor de Ω .
RotatingNeutronStar.c	getOmegaK	Retorna o valor de Ω_K .
RotatingNeutronStar.c	recompute	Chama as funções spin e mass_radius para um dado r_ratio.
RotatingNeutronStar.c	mass_radius	Calcula o raio circunferencial, M , M_0 e J , assim como as velocidades das partículas rotacionando e contra-rotacionando com respeito ao ZAMO. Calcula também a velocidade de Kepler.
RotatingNeutronStar.c	spin	Calcula $\bar{r}_e$, Ω , v , ϵ , p e H , γ , ρ , ω e α , checa divergências, trata o caso estático, trata o caso em que a coordenada radial tende a infinito, calcula a primeira derivada de γ .
RotatingNeutronStar.c	print_state	Imprime r_ratio, e_center, M , M_0 , R_e , Ω , Ω_K , I .

main.c		Programa que exemplifica como utilizar as rotinas nos arquivos subsequentes. Para uma dada EoS e densidade central provida pelo usuário, o programa calcula modelos com velocidade angular crescente até que a estrela esteja girando com a mesma velocidade angular que uma partícula orbitando a estrela no seu equador. Este loop começa com uma estrela não rotativa e aumenta a oblicuidade da estrela (diminuindo o r_ratio) e, em seguida, calcula a velocidade angular da estrela. Quando o valor calculado da velocidade angular é maior do que a velocidade angular de uma partícula orbitando a estrela no equador (Ω_K), o loop é interrompido. Utiliza-se o método de Ridder (Root-finding algorithm) para achar a estrela correta. A última estrela calculada estará girando com a velocidade angular máxima permitida para uma estrela com a dada densidade de energia central.
makefile		Makefile para o exemplo. Gera um executável chamado “kepler”.
sample.out		Resultado gerado a partir do arquivo de exemplo main.

Tabela 1 – Tabela contendo uma descrição resumida das funções presentes em cada arquivo do **rns**.

Referências

- ABBOTT, B. et al. Properties of the binary neutron star merger gw170817. *Physical Review X*, APS, v. 9, n. 1, p. 011001, 2019. Citado na página 20.
- ABBOTT, B. P. et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical review letters*, APS, v. 116, n. 6, p. 061102, 2016. Citado na página 19.
- ABBOTT, B. P. et al. Gw170817: observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral. *Physical review letters*, APS, v. 119, n. 16, p. 161101, 2017. Citado na página 20.
- AGRAWAL, B. K.; SHLOMO, S.; AU, V. K. Determination of the parameters of a skyrme type effective interaction using the simulated annealing approach. *Physical Review C*, American Physical Society (APS), v. 72, n. 1, jul. 2005. ISSN 1089-490X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevC.72.014310>>. Citado na página 35.
- AMBARTSUMYAN, V.; SAAKYAN, G. The degenerate superdense gas of elementary particles. *Soviet Astronomy, Vol. 4, p. 187*, v. 4, p. 187, 1960. Citado na página 30.
- ANDRADE, J. L. B. Algumas aplicações da relatividade restrita. Universidade Federal do Maranhão, 2017. Citado na página 24.
- BAADE, W.; ZWICKY, F. Cosmic rays from super-novae. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Acad Sciences, v. 20, n. 5, p. 259–263, 1934. Citado na página 30.
- BAADE, W.; ZWICKY, F. Remarks on super-novae and cosmic rays. *Physical Review*, APS, v. 46, n. 1, p. 76, 1934. Citado na página 30.
- BAHCALL, J. N.; WOLF, R. A. Neutron stars. ii. neutrino-cooling and observability. *Physical Review*, APS, v. 140, n. 5B, p. B1452, 1965. Citado na página 31.
- BARBOUR, J. The definition of mach's principle. *Foundations of Physics*, Springer, v. 40, n. 9, p. 1263–1284, 2010. Citado na página 25.
- BARDEEN, J.; COOPER, L. N.; SCHRIEFFER, J. R. Theory of superconductivity. *Physical review*, APS, v. 108, n. 5, p. 1175, 1957. Citado na página 31.
- BONAZZOLA, S.; MASCHIO, G. M. Models of rotating neutron stars in general relativity. In: DAVIES, R. D.; GRAHAM-SMITH, F. (Ed.). *The Crab Nebula*. Dordrecht: Reidel, 1971, (International Astronomical Union Symposium, 46). p. 346. Proceedings from IAU Symposium no. 46 held at Jodrell Bank, England, August 5–7, 1970. Citado na página 67.
- BOSHKAYEV, K. et al. Hartle formalism for rotating newtonian configurations. *European Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 37, n. 6, p. 065602, 2016. Citado na página 61.
- BUTCHER, J. C. *Numerical methods for ordinary differential equations*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2016. Citado na página 43.

BUTTERWORTH, E. M.; IPSEY, J. R. On the structure and stability of rapidly rotating fluid bodies in general relativity. i – the numerical method for computing structure and its application to uniformly rotating homogeneous bodies. *Astrophysical Journal*, v. 204, p. 200–223, 1976. Citado na página 67.

CAMERON, A. Neutron star models. *Astrophysical Journal*, vol. 130, p. 884, v. 130, p. 884, 1959. Citado na página 30.

CHADWICK, J. Possible existence of a neutron. *Nature*, Nature Publishing Group UK London, v. 129, n. 3252, p. 312–312, 1932. Citado na página 30.

CHIU, H.-Y. Physics of neutron stars. *Annals of Physics*, v. 26, p. 364–383, 1964. Citado na página 31.

CHIU, H.-Y.; SALPETER, E. Surface x-ray emission from neutron stars. *Physical Review Letters*, APS, v. 12, n. 15, p. 413, 1964. Citado na página 31.

COMELLA, J. M. et al. Crab nebula pulsar np 0532. *Nature*, v. 221, p. 453–454, 1969. Citado na página 20.

COOK, G. B.; SHAPIRO, S. L.; TEUKOLSKY, S. A. Spin-up of a rapidly rotating star by angular momentum loss – effects of general relativity. *Astrophysical Journal*, v. 398, p. 203–223, 1992. Citado na página 67.

COOK, G. B.; SHAPIRO, S. L.; TEUKOLSKY, S. A. Rapidly rotating neutron stars in general relativity: Realistic equations of state. *Astrophysical Journal*, v. 424, p. 823–845, 1994. Citado 3 vezes nas páginas 67, 77 e 79.

COOK, G. B.; SHAPIRO, S. L.; TEUKOLSKY, S. A. Rapidly rotating polytropes in general relativity. *Astrophysical Journal*, v. 422, p. 227–242, 1994. Citado na página 67.

CUTLER, C.; LINDBLOM, L. The effect of viscosity on neutron star oscillations. *Astrophysical Journal*, v. 314, p. 234–241, 1987. Citado na página 49.

DAS, S. Mach principle and a new theory of gravitation. *arXiv preprint arXiv:1206.6755*, 2012. Citado na página 25.

D’INVERNO, R. A. *Introducing Einstein’s relativity*. [S.l.]: Clarendon Press, 1992. Citado na página 25.

DOUCHIN, F.; HAENSEL, P. A unified equation of state of dense matter and neutron star structure. *Astronomy & Astrophysics*, EDP Sciences, v. 380, n. 1, p. 151–167, 2001. Citado na página 35.

DYSON, F. W.; EDDINGTON, A. S.; DAVIDSON, C. IX. a determination of the deflection of light by the sun’s gravitational field, from observations made at the total eclipse of may 29, 1919. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, The Royal Society London, v. 220, n. 571-581, p. 291–333, 1920. Citado na página 19.

EINSTEIN, A. Zur elektrodynamik bewegter körper. *Annalen der physik*, v. 4, 1905. Citado na página 24.

EINSTEIN, A. Die feldgleichungen der gravitation. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften*, p. 844–847, 1915. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 29.

EINSTEIN, A. Erklärung der perihelbewegung des merkur aus der allgemeinen relativitätstheorie. *Sitzungsberichte der preußischen Akademie der Wissenschaften*, Springer, v. 831, p. 839, 1915. Citado na página 19.

EINSTEIN, A.; FOKKER, A. D. Die nordströmsche gravitationstheorie vom standpunkt des absoluten differentialkalküls. *Annalen der Physik*, WILEY-VCH Verlag Leipzig, v. 349, n. 10, p. 321–328, 1914. Citado na página 26.

ERIGUCHI, Y.; HACHISU, I.; NOMOTO, K. Structure of rapidly rotating neutron stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press Oxford, UK, v. 266, n. 1, p. 179–185, 1994. Citado 3 vezes nas páginas 67, 73 e 77.

Event Horizon Telescope Collaboration et al. First m87 event horizon telescope results. i. the shadow of the supermassive black hole. *arXiv preprint arXiv:1906.11238*, 2019. Citado na página 19.

FLOWERS, E.; ITOH, N. The transport properties of matter under astrophysical conditions. i. *Astrophysical Journal*, v. 206, p. 218–242, 1976. Citado na página 49.

FLOWERS, E.; ITOH, N. The transport properties of matter under astrophysical conditions. ii. *Astrophysical Journal*, v. 230, p. 847–864, 1979. Citado na página 49.

FRIEDMAN, J. L.; STERGIOULAS, N. *Rotating relativistic stars*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2013. Citado 5 vezes nas páginas 27, 28, 33, 34 e 71.

GOLDSTEIN, A. et al. An ordinary short gamma-ray burst with extraordinary implications: Fermi-gbm detection of grb 170817a. *The Astrophysical Journal Letters*, IOP Publishing, v. 848, n. 2, p. L14, 2017. Citado na página 20.

HAENSEL, P.; POTEKHIN, A. Y.; YAKOVLEV, D. G. *Neutron stars 1*. [S.l.]: Springer, 2007. Citado 3 vezes nas páginas 31, 34 e 41.

HARRISON, B. K.; WAKANO, M.; WHEELER, J. A. Matter-energy at high density: end point of thermonuclear evolution. *La structure et évolution de l'univers*, v. 124, 1958. Citado na página 30.

HARTLE, J. B. Slowly rotating relativistic stars. i. equations of structure. *Astrophysical Journal*, vol. 150, p. 1005, v. 150, p. 1005, 1967. Citado 6 vezes nas páginas 49, 50, 55, 57, 59 e 60.

HARTLE, J. B.; THORNE, K. S. Slowly rotating relativistic stars. ii. models for neutron stars and supermassive stars. *Astrophysical Journal*, vol. 153, p. 807, v. 153, p. 807, 1968. Citado 3 vezes nas páginas 49, 60 e 61.

HESSELS, J. W. et al. A radio pulsar spinning at 716 hz. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 311, n. 5769, p. 1901–1904, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 83.

HEWISH, A.; OKOYE, S. E. Evidence for an unusual source of high radio brightness temperature in the crab nebula. *Nature*, v. 207, p. 59–60, 1965. Citado na página 19.

KOMATSU, H.; ERIGUCHI, Y.; HACHISU, I. Rapidly rotating general relativistic stars–i. numerical method and its application to uniformly rotating polytropes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press Oxford, UK, v. 237, n. 2, p. 355–379, 1989. Citado 4 vezes nas páginas 67, 69, 73 e 76.

KOMATSU, H.; ERIGUCHI, Y.; HACHISU, I. Rapidly rotating general relativistic stars–ii. differentially rotating polytropes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press Oxford, UK, v. 239, n. 1, p. 153–171, 1989. Citado na página 67.

KONSTANTINOU, A.; MORSINK, S. M. Universal relations for the increase in the mass and radius of a rotating neutron star. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 934, n. 2, p. 139, 2022. Citado na página 81.

LANDAU, L. D. On the theory of stars. *Phys. Z. Sowjetunion*, v. 1, p. 285–288, 1932. Citado na página 30.

MENDES, R. F.; SODRÉ, C. F.; FALCIANO, F. T. Exceeding the conformal limit inside rotating neutron stars: Implications to modified theories of gravity. *Physical Review D*, APS, v. 110, n. 10, p. 104027, 2024. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 83.

OPPENHEIMER, J. R.; VOLKOFF, G. M. On massive neutron cores. *Physical Review*, APS, v. 55, n. 4, p. 374, 1939. Citado na página 39.

ÖZEL, F.; FREIRE, P. Masses, radii, and the equation of state of neutron stars. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, Annual Reviews, v. 54, n. 1, p. 401–440, 2016. Citado na página 20.

O’BOYLE, M. F. et al. Parametrized equation of state for neutron star matter with continuous sound speed. *Physical Review D*, APS, v. 102, n. 8, p. 083027, 2020. Citado na página 37.

PACINI, F. Energy emission from a neutron star. *Nature*, v. 216, p. 567–568, 1967. Citado na página 19.

POISSON, E. *A relativist’s toolkit: the mathematics of black-hole mechanics*. [S.l.]: Cambridge university press, 2004. Citado na página 54.

READ, J. S. et al. Constraints on a phenomenologically parametrized neutron-star equation of state. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 79, n. 12, jun. 2009. ISSN 1550-2368. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.79.124032>>. Citado 3 vezes nas páginas 15, 36 e 37.

READ, J. S. et al. Constraints on a phenomenologically parametrized neutron-star equation of state. *Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology*, APS, v. 79, n. 12, p. 124032, 2009. Citado na página 36.

REINHARD, P.-G.; FLOCARD, H. Nuclear effective forces and isotope shifts. *Nuclear Physics A*, Elsevier, v. 584, n. 3, p. 467–488, 1995. Citado na página 35.

RESNICK, R.; WATANABE, S. *Introdução à relatividade especial*. [S.l.]: Editora da Universidade de São Paulo, 1971. Citado na página 24.

SAES, J. A.; MENDES, R. F. Equation-of-state-insensitive measure of neutron star stiffness. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 106, n. 4, ago. 2022. ISSN 2470-0029. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.106.043027>>. Citado 2 vezes nas páginas 81 e 83.

SAES, J. A.; MENDES, R. F.; YUNES, N. Approximately universal i-love- γ relations for the average neutron star stiffness. *Physical Review D*, APS, v. 110, n. 2, p. 024011, 2024. Citado na página 83.

SALPETER, E. Matter at high densities. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 11, n. 4, p. 393–413, 1960. Citado na página 30.

SCHUTZ, B. *A first course in general relativity*. [S.l.]: Cambridge university press, 2022. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 41.

STABLER, R. *Ph.D. Thesis*. Tese (Doutorado) — Cornell University, Ithaca, NY, 1960. Citado na página 31.

STERGIOULAS, N.; FRIEDMAN, J. L. Comparing models of rapidly rotating relativistic stars constructed by two numerical methods. *The Astrophysical Journal*, American Astronomical Society, v. 444, p. 306, maio 1995. ISSN 1538-4357. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1086/175605>>. Citado na página 68.

STERNE, T. The equilibrium theory of the abundance of the elements: a statistical investigation of assemblies in equilibrium in which transmutations occur. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Vol. 93, p. 736, v. 93, p. 736, 1933. Citado na página 30.

TERVALA, J. *Rotating Neutron Star*. 2020. Disponível em: GitHub. Disponível em: <<https://github.com/JustinTervala/RotatingNeutronStar>>. Citado na página 87.

TOLMAN, R. C. Static solutions of einstein's field equations for spheres of fluid. *Physical Review*, APS, v. 55, n. 4, p. 364, 1939. Citado na página 39.

TSURUTA, S.; CAMERON, A. Some effects of nuclear forces on neutron-star models. *Canadian Journal of Physics*, NRC Research Press Ottawa, Canada, v. 44, n. 8, p. 1895–1922, 1966. Citado na página 30.

TYPEL, S.; OERTEL, M.; KLÄHN, T. CompOSE CompStar online supernova equations of state harmonising the concert of nuclear physics and astrophysics compose.obspm.fr. *Phys. Part. Nucl.*, v. 46, n. 4, p. 633–664, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 36.

TYPEL, S. et al. CompOSE: a repository for equations of state (eos) for astrophysical applications. *European Physical Journal A*, v. 56, n. 11, p. 290, 2020. Citado na página 35.

VERRIER, U. J. L. Theorie du mouvement de mercure. *Annales de l'Observatoire imperial de Paris; t. 5; Annales de l'Observatoire de Paris. Memoires; t. 5., Paris: Mallet-Bachelier, 1859., 195 p.; 28 cm.*, v. 5, 1859. Citado na página 23.

WALD, R. M. *General relativity*. [S.l.]: University of Chicago press, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 30.

YAGI, K.; YUNES, N. I-love-q relations in neutron stars and their applications to astrophysics, gravitational waves, and fundamental physics. *Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology*, APS, v. 88, n. 2, p. 023009, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 62, 63 e 85.

YAGI, K.; YUNES, N. I-love-q relations in neutron stars and their applications to astrophysics, gravitational waves, and fundamental physics. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 88, n. 2, jul. 2013. ISSN 1550-2368. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.88.023009>. Citado na página 83.

YAGI, K.; YUNES, N. Approximate universal relations for neutron stars and quark stars. *Physics Reports*, v. 681, p. 1–72, 2017. ISSN 0370-1573. Approximate Universal Relations for Neutron Stars and Quark Stars. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157317300492>. Citado na página 83.

ZWICKY, F. On collapsed neutron stars. *Astrophysical Journal*, vol. 88, p. 522–525, v. 88, p. 522–525, 1938. Citado na página 30.