



**Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas**  
Coordenação de Cosmologia, Astrofísica e  
Interações Fundamentais - COSMO

Eduardo da Costa Valadão

**Investigando o Efeito de Vazamento de Energia Escura na  
Escala de Kiloparsecs com Lentes Gravitacionais Fortes**

Rio de Janeiro

2025

Eduardo da Costa Valadão

**Investigando o Efeito de Vazamento de Energia Escura na Escala de  
Kiloparsecs com Lentes Gravitacionais Fortes**



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Física, do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas. Área de concentração: Gravitação, Astrofísica e Cosmologia.

Orientador: Prof. Dr. Martín Makler

Coorientador: Prof. Dr. Santiago Esteban Perez Bergliaffa

Rio de Janeiro

2025

"INVESTIGANDO O EFEITO DE VAZAMENTO DE ENERGIA ESCURA  
NA ESCALA DE KILOPARSECS COM LENTES GRAVITACIONAIS  
FORTES"

**EDUARDO DA COSTA VALADÃO**

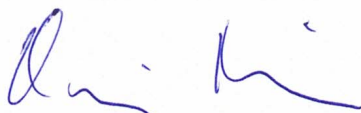
Dissertação de Mestrado em Física apresentada no  
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do  
Ministério da Ciência Tecnologia e Inovação.  
Fazendo parte da banca examinadora os seguintes  
professores:



Martín Makler - Orientador/CBPF



Santiago Estéban Pérez Bergliaffa – Coorientador/ UERJ



Davi Cabral Rodrigues - UFES



Luis Raul Weber Abramo – USP

Rio de Janeiro, 26 de maio de 2025.

---

Valadão, Eduardo da Costa

Investigando o Efeito de Vazamento de Energia Escura na Escala de  
Kiloparsecs com Lentes Gravitacionais Fortes / Eduardo da Costa Valadão.  
– Rio de Janeiro, 2025-  
196 f.

Orientador: Prof. Dr. Martín Makler

Coorientador: Prof. Dr. Santiago Esteban Perez Bergliaffa

Dissertação (Mestrado) – Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, ,  
Programa de Pós-Graduação em Física, 2025.

1. Teoria de Campos Efetiva de Energia Escura. 2. Teorias DHOST. 3.  
Lentes Gravitacionais Fortes. I. Prof. Dr. Martín Makler. II. Centro  
Brasileiro de Pesquisas Físicas.

---

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta  
dissertação, desde que citada a fonte.

---

Assinatura

---

Data

Eduardo da Costa Valadão

**Investigando o Efeito de Vazamento de Energia Escura na Escala de  
Kiloparsecs com Lentes Gravitacionais Fortes**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Física, do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas. Área de concentração: Gravitação, Astrofísica e Cosmologia.

Rio de Janeiro

2025

## DEDICATÓRIA

Às pequenas mortes.

Ao tempo que se esvai na busca  
pelo propósito além da própria finitude material.

Aos rios que nunca serão mais os mesmos.

Ao fogo que não finda.

*Panta Rhei.*

## AGRADECIMENTOS

"A meio caminhar de nossa vida fui me encontrar em uma selva escura: estava a reta minha via perdida." Gostaria de primeiro agradecer à minha mãe e família por permanecerem firmes depois de tantos infortúnios, à minha sobrinha por trazer o orvalho que traz vida nova ao deserto. Aos grandes amigos e amigas do CBPF que acompanharam minha jornada, ao Alan, Gustavo, Vitor, Laís, Matheus, Amanda, Gabriel, Joaquim, Vanessa e muitos outros. Sou extremamente grato por viver na mesma época que meus amigos Matheus, Sobrero, Malu, Allan, João, Lima, Douglas, Carol, Alan, Fernanda e muitos outros, sem os quais eu não estaria aqui, sem sombra de dúvidas.

Sou grato também ao apoio dos amigos das lentes gravitacionais, Renan Oliveira, João França, Grasielle Bezerra e William Ramirez; cujos trabalhos e apoio foram base dessa dissertação. Agradeço também à Fernanda, cujo trabalho também foi base desta dissertação. Agradeço também a meu amigo Pedro Bessa, que me ajudou em momentos difíceis do mestrado. Sou extremamente grato aos professores Tovar, Clécio e Helayël pelas excelentes aulas em, respectivamente, Gravitação, Astroinformática e Eletromagnetismo.

Devo minha vida ao meu grande amigo Felipe Sobrero, sem o qual já teria desistido de tudo. Graças à sua energia fomos capazes de publicar um paper sobre buracos negros carregados na PRD [1], além de estarmos terminando mais um sobre a geometria de Lyra [2]. Agradeço ao professor Santiago por acompanhar e guiar minha jornada, sem pensar duas vezes aceitou nosso convite e está nos ajudando com o paper de Lyra [2]. Graças a isso, nosso paper cada vez mais aumenta sua qualidade científica. Fico profundamente feliz e grato por ter o professor Martín Makler como orientador, além de me guiar na carreira científica, nunca deixou de me ajudar durante diversas injustiças que aconteceram ao longo do meu mestrado. Sem este apoio eu não estaria aqui, e já teria desistido do meio acadêmico.

Por fim, gostaria de agradecer ao apoio financeiro fornecido pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) através da minha bolsa de mestrado, o que possibilitou a criação deste trabalho. Agradeço também ao apoio financeiro fornecido pelo Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF) e pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) aos eventos científicos que participei.

*"Nós, na Terra, acabamos de despertar para os grandes oceanos do espaço e do tempo dos quais emergimos. O que acontecerá no primeiro segundo do próximo ano cósmico depende do que fizermos, aqui e agora, com nossa inteligência e nosso conhecimento do cosmos."*

*Carl Sagan*

## RESUMO

VALADÃO, E.C. *Investigando o Efeito de Vazamento de Energia Escura na Escala de Kiloparsecs com Lentes Gravitacionais Fortes*. 2025. 196 f. Dissertação (Mestrado em Física) – , Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro, 2025.

O mecanismo de blindagem de Vainshtein é parcialmente quebrado em teorias Escalares-Tensoriais de Ordem Superior Degeneradas (DHOST). No contexto do formalismo da Teoria de Campos Efetiva de Energia Escura (EFTDE), esse efeito implica no vazamento de energia escura para escalas astrofísicas. No regime quase-estático, existem duas soluções possíveis para os dois potenciais métricos de campo fraco, que são distintos entre si, ao contrário do caso da Relatividade Geral. Este efeito peculiar pode ser investigado em escalas de kiloparsecs combinando-se o fenômeno de lenteamento gravitacional forte com a dinâmica galáctica das lentes, especialmente no caso de galáxias-lente elípticas. Com esse propósito, neste trabalho é utilizado uma compilação de 280 sistemas lente-fonte galáxia-galáxia, dos quais uma grande parte dos dados fazem parte da recém-lançada base de dados Last Stand Before Rubin (LaStBeRu). Uma análise conjunta de lentes fortes e dispersões de velocidade estelar é realizada para restringir os parâmetros da EFTDE que aparecem nessas escalas quando se assume que a velocidade das ondas gravitacionais é igual a da luz no vácuo, isto é,  $\alpha_H$  e  $\beta_1$ . A análise para a primeira solução, que viola a blindagem apenas dentro de distribuições de matéria, resulta em  $\alpha_H = 0,037^{+0,031}_{-0,034}$ , enquanto o parâmetro  $\beta_1$  não pode ser restringido de forma significativa com este conjunto de dados, sendo necessário uma extensão da amostra para abranger lentes mais massivas. Para a subclasse beyond-Horndeski, na qual  $\beta_1 = 0$ , a estimativa sobre  $\alpha_H$  é ligeiramente mais restrigente:  $\alpha_H = 0,035 \pm 0,025$ . Com relação à segunda solução, que quebra totalmente a blindagem, obtém-se que  $\alpha_H = 0,036 \pm 0,025$ . Diferentes fundos cosmológicos planos, como  $\Lambda$ CDM,  $w$ CDM e  $w_0 w_a$ CDM, são também considerados. Entendemos ser estas as primeiras estimativas obtidas nas escalas de kpc para esses modelos, favorecendo  $\alpha_H > 0$ , mas sendo compatíveis em dois sigma com a Relatividade Geral.

Palavras-chave: Teoria de Campos Efetiva de Energia Escura. Teorias DHOST. Lentes Gravitacionais Fortes. Dispersão de Velocidades.

## ABSTRACT

VALADÃO, E.C. *Probing the dark energy leakage effect on kiloparsec scales through gravitational lensing*. 2025. 196 f. Dissertação (Mestrado em Física) – , Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro, 2025.

The Vainshtein screening mechanism is partially broken in Degenerate Higher-Order Scalar-Tensor (DHOST) theories. Within the formalism of the Effective Field Theory of Dark Energy (EFTDE), this effect implies that dark energy leaks into astrophysical scales. In the quasi-static regime, two possible solutions exist for the two weak-field metric potentials, which are distinct from one another, contrarily to the General Relativity case. This effect can then be probed at kiloparsec scales by combining gravitational lensing with galaxy dynamics, specially in the case of strong lensing by early-type galaxies. This paper uses a value-added compilation of 280 galaxy-galaxy lensing systems, a great part of which comprises new collected data from the recently-released Last Stand Before Rubin (LaStBeRu) database. A joint analysis of strong lensing and stellar velocity dispersions is performed in order to constrain the EFTDE parameters that appear on those scales when it is assumed that the speed of gravitational waves is that of light in vacuum, that is,  $\alpha_H$  and  $\beta_1$ . The analysis for the first solution, which only breaks the screening inside matter distributions, yields  $\alpha_H = 0.037^{+0.031}_{-0.034}$ , whereas the parameter  $\beta_1$  cannot be meaningfully constrained with this dataset and requires a sample extension as to encompass more massive lenses. For the beyond-Horndeski subclass, in which  $\beta_1 = 0$ , the constraint on  $\alpha_H$  is slightly tighter:  $\alpha_H = 0.035 \pm 0.025$ . As for the second solution, which fully breaks the screening, the constraint is given by  $\alpha_H = 0.036 \pm 0.025$ . Distinct flat cosmological backgrounds, such as  $\Lambda$ CDM,  $w$ CDM and  $w_0 w_a$ CDM, are further considered. These constraints are the first obtained at the kpc scales for these models, favoring  $\alpha_H > 0$  and being compatible at two sigma with General Relativity.

Keywords: Effective Field Theory of Dark Energy. DHOST Theories. Strong Lensing. Velocity Dispersions.

## LISTA DE FIGURAS

|           |                                                                                                                                           |     |
|-----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figura 1  | - Geometria de um lenteamento gravitacional. . . . .                                                                                      | 43  |
| Figura 2  | - Mosaico de <i>cutouts</i> de sistemas de lenteamento forte do LaStBeRu . . .                                                            | 63  |
| Figura 3  | - Diagrama de Venn das subamostras de sistemas de lenteamento gravi-<br>tacional forte. . . . .                                           | 63  |
| Figura 4  | - Dados de $\sigma_0 + \delta\sigma_0$ por $z_l$ dos 280 sistemas da amostra combinada. . . .                                             | 65  |
| Figura 5  | - Dados de $z_s$ e $\theta_E$ por $z_l$ dos 280 sistemas da amostra combinada. . . .                                                      | 65  |
| Figura 6  | - Distribuição posterior para a primeira solução DHOST Ia . . . . .                                                                       | 69  |
| Figura 7  | - <i>Corner plot</i> da primeira solução DHOST Ia com <i>flat prior</i> $[-0.6, 27]$<br>em $\beta_1$ . . . . .                            | 70  |
| Figura 8  | - <i>Corner plot</i> da primeira solução DHOST Ia com <i>flat prior</i> $[-100, 100]$<br>em $\beta_1$ . . . . .                           | 71  |
| Figura 9  | - <i>Corner plot</i> da primeira solução DHOST Ia com <i>flat prior</i> $[-1, 1]$ em $\beta_1$                                            | 72  |
| Figura 10 | - Distribuição posterior para a primeira solução no subcaso GLPV . . .                                                                    | 74  |
| Figura 11 | - Comparação entre o resultado de $\alpha_H$ da primeira solução no caso GLPV<br>com estimativas indiretas obtidas da literatura. . . . . | 76  |
| Figura 12 | - Comparação entre o resultado de $\alpha_H$ da segunda solução DHOST Ia<br>com estimativas indiretas obtidas da literatura. . . . .      | 78  |
| Figura 13 | - Variedade e suas cartas. . . . .                                                                                                        | 119 |
| Figura 14 | - Derivada Covariante. . . . .                                                                                                            | 129 |
| Figura 15 | - Transporte Paralelo. . . . .                                                                                                            | 134 |
| Figura 16 | - Postulado das Paralelas de Euclides. . . . .                                                                                            | 137 |
| Figura 17 | - Geodésicas numa variedade curva. . . . .                                                                                                | 138 |
| Figura 18 | - Cone de Luz. . . . .                                                                                                                    | 149 |
| Figura 19 | - Ilustração da trajetória de um raio de luz na presença do Sol. . . . .                                                                  | 184 |
| Figura 20 | - Primeiros sistemas gravitacionais lente-fonte extragalácticos descobertos.                                                              | 188 |

## SUMÁRIO

|   |                                                                   |     |
|---|-------------------------------------------------------------------|-----|
|   | INTRODUÇÃO . . . . .                                              | 11  |
| 1 | TEORIAS ESCALARES-TENSORIAIS . . . . .                            | 14  |
|   | 1.1 Teoria de Brans-Dicke . . . . .                               | 18  |
|   | 1.2 Horndeski e Além . . . . .                                    | 21  |
| 2 | TEORIA DE CAMPOS EFETIVA DE ENERGIA ESCURA . . .                  | 27  |
|   | 2.1 Formalismo ADM e Parâmetros EFTDE . . . . .                   | 27  |
|   | 2.1.1 Extensão para teorias DHOST . . . . .                       | 33  |
|   | 2.1.2 Vazamento de Energia Escura . . . . .                       | 35  |
| 3 | LENTEs GRAVITACIONAIS . . . . .                                   | 40  |
|   | 3.1 Formalismo Matemático das Lentes Gravitacionais . . . . .     | 40  |
|   | 3.1.1 Equação da Lente . . . . .                                  | 42  |
|   | 3.1.2 Distribuição Superficial de Massa . . . . .                 | 43  |
|   | 3.1.3 Potencial Efetivo da Lente . . . . .                        | 45  |
|   | 3.1.4 Magnificação, Convergência e Cisalhamento . . . . .         | 46  |
|   | 3.1.5 Lentes com Simetria Axial . . . . .                         | 49  |
|   | 3.2 Formalismo de Lentes Gravitacionais para Teorias Alternativas | 51  |
|   | 3.2.1 Ângulo de Deflexão de Métricas Estáticas . . . . .          | 51  |
|   | 3.2.2 O Lenteamento Forte em Teorias DHOST Ia . . . . .           | 54  |
| 4 | DINÂMICA GALÁCTICA . . . . .                                      | 57  |
|   | 4.1 Dispersão de Velocidades . . . . .                            | 57  |
|   | 4.2 Efeitos Observacionais e Modelo Final . . . . .               | 60  |
| 5 | AMOSTRA COMBINADA LASTBERU . . . . .                              | 62  |
| 6 | ANÁLISES BAYESIANAS E RESULTADOS . . . . .                        | 66  |
|   | 6.1 Análise Estatística para a Primeira Solução . . . . .         | 66  |
|   | 6.2 Análise Estatística para a Segunda Solução . . . . .          | 73  |
|   | 6.3 Comparação com a Literatura . . . . .                         | 74  |
|   | CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS . . . . .                     | 79  |
|   | REFERÊNCIAS . . . . .                                             | 83  |
|   | APÊNDICE A – Gravitação . . . . .                                 | 116 |
|   | APÊNDICE B – Cosmologia . . . . .                                 | 170 |
|   | APÊNDICE C – Distância de Diâmetro Angular . . . . .              | 175 |
|   | APÊNDICE D – História do Lenteamento Gravitacional . . . . .      | 178 |
|   | APÊNDICE E – Modelos de Lentes . . . . .                          | 193 |

## INTRODUÇÃO

*"Em todo o meu universo, não vi nenhuma lei da natureza, imutável e inexorável. Este universo apresenta apenas relações mutáveis que às vezes são vistas como leis pelas percepções de vidas curtas. [...] Se você deve rotular o absoluto, use o nome apropriado: Temporário."*

*Frank Herbert, "Imperador Deus de Duna"*

Após a primeira evidência robusta da expansão acelerada do Universo observável ter sido apresentada ao mundo por [3, 4], uma infinidade de ideias surgiu para tentar descrever o seu mecanismo gerador (veja, por exemplo, [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18]), genericamente chamados de energia escura [19, 9]. Desde então, o crescente conjunto de observações cosmológicas [20, 21, 22, 23] vem aprimorando ainda mais a compatibilidade da expansão acelerada com a ideia de uma constante cosmológica, introduzida inicialmente por Einstein em seu célebre artigo de 1917 [24]. No entanto, observações recentes de supernovas Ia pelo *Dark Energy Survey* (DES) [22, 25] e de Oscilações Acústicas de Bárions (BAO) pelo *Dark Energy Spectroscopic Instrument* (DESI) [23, 26] parecem (indiretamente) favorecer uma energia escura que apresenta variações ao longo da história cósmica recente.

A maioria das propostas para descrever esse componente elusivo são implementadas por intermédio de um campo escalar dinâmico atuando em escalas cosmológicas [27, 28, 29, 30, 13], de modo que a quinta força resultante desse campo é suprimida em regiões de alta densidade por mecanismos de blindagem [31, 30, 32]. Os efeitos da energia escura produzidos por essas teorias podem ser o resultado de um acoplamento não-mínimo do escalar com a geometria [33, 34, 35, 36], similar à Brans-Dicke, ou podem ter sua origem em fluidos exóticos, como em um campo de quintessência [37, 38, 39, 28]. A classe de teorias de Horndeski [40], por exemplo, pode abranger todos esses tipos de modificações que possuem equações de campo de até segunda ordem nas derivadas da métrica [41, 42, 43]. Teorias mais gerais, como a classe de teorias Escalares-Tensoriais de Ordem Superior Degeneradas (em inglês *Degenerate Higher-Order Scalar-Tensor (DHOST) theories*), estendem a Lagrangiana de Horndeski ao mesmo tempo em que evitam instabilidades de Ostrogradsky [44, 45, 46, 47, 48].

Em contraste com a constante cosmológica, grande parte desses modelos apresenta uma energia escura variável que leva a modificações na formação de estrutura que não se originam unicamente da expansão de fundo [49]. Por exemplo, em alguns modelos, existe a possibilidade do aglutinamento da energia escura [50]. Devido à grande liberdade na

especificação de tais teorias, é necessário um método para distinguir entre as diferentes propostas tanto no nível de fundo quanto no nível perturbativo, para que modelos distintos de energia escura sejam adequadamente restringidos pelas observações [51].

A Teoria de Campos Efetiva de Energia Escura (em inglês *Effective Field Theory of Dark Energy*, abreviado como EFTDE), desenvolvida inicialmente em [52, 53, 54, 55, 56], e posteriormente generalizada em [51, 49, 57], permite essa distinção através da definição de um conjunto mínimo de funções adimensionais dependentes do tempo que descrevem os possíveis efeitos da energia escura que podem aparecer nas soluções perturbativas [58, 51, 59, 49]. Construído a partir da folheação espaço-temporal de Arnowitt-Deser-Misner (ADM) [60, 61], devido a uma segmentação preferencial de hipersuperfícies introduzida pelo campo escalar, esse importante formalismo unifica a descrição fenomenológica das diferentes teorias escalares-tensoriais que propagam um grau de liberdade escalar representando a energia escura [51].

Para teorias DHOST dentro do formalismo da EFTDE, no entanto, certos parâmetros de energia escura vazam para escalas astrofísicas [62, 63, 64, 65]. O chamado mecanismo de blindagem de Vainshtein [66, 67, 31], que se manifesta devido a termos de auto-interação com derivadas de ordem superior, é quebrado dentro de fontes massivas pelas novas interações introduzidas por essa classe de teorias. Os potenciais escalares resultantes da métrica possuem novos termos, além de um termo semelhante ao Newtoniano, que envolvem derivadas espaciais da distribuição de massa da fonte. No entanto, também existe uma segunda solução que quebra a blindagem mesmo fora de uma fonte de matéria [62, 63]. Como resultado, uma variedade de modelos de energia escura podem ser restringidos por meio de observações astrofísicas que sondam os potenciais métricos no regime de campo fraco [68, 69, 70, 71].

O efeito de vazamento de energia escura tem sido amplamente estudado na física estelar [72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79], em objetos subestelares [80, 81] e até mesmo via ondas gravitacionais [82, 83, 84, 85, 63, 86]. Também fora explorado usando-se o pulsar de Hulse-Taylor [87, 63, 88] e a partir de dados da sonda Cassini [63, 88]. Foi investigado com aglomerados de galáxias em [89, 90] e, para a subclasse beyond-Horndeski, em [91, 92]. Notavelmente, esse efeito também foi considerado em [93, 94, 95] como uma explicação alternativa à matéria escura em aglomerados de galáxias. Porém, apesar da miríade de estudos nas quais fora avaliado, esse fenômeno nunca foi investigado na escala do lenteamento gravitacional forte por galáxias elípticas. De fato, os parâmetros DHOST que quebram a blindagem só foram diretamente estimados em [87, 63, 88].

O objetivo deste trabalho é então restringir os parâmetros de energia escura que escapam da blindagem de Vainshtein em escalas de kiloparsecs. Em particular, são consideradas apenas teorias DHOST quadráticas que estão relacionadas à subclasse de Horndeski por meio de transformações disformais [47, 48, 49] e que respeitam as restrições impostas pela coalescência de estrelas de nêutrons [96] associada aos eventos astrofísicos GW170817

[97] e GRB 170817A [98]. Nesse caso, apenas dois parâmetros EFTDE contribuem para a métrica das fontes astrofísicas no limite de campo fraco [63].

Combinando-se o lenteamento gravitacional forte por galáxias elípticas com a dinâmica das estrelas dessas galáxias lentes, ambos os parâmetros de energia escura são investigados por meio do parâmetro de *slip*. Esse tipo de combinação tem sido amplamente utilizado na literatura para estudar o parâmetro pós-Newtoniano  $\gamma$  [99, 100, 101, 102, 103, 104, 105] e para restringir vários parâmetros cosmológicos de fundo [106, 107, 100, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 103, 105]. Para esta análise, assume-se principalmente um fundo plano  $\Lambda$ CDM baseado nos dados do *Planck* 2018 [115], mas também são avaliadas estimativas usando-se outros fundos cosmológicos, como  $w$ CDM e  $w_0w_a$ CDM. Quanto aos parâmetros de estrutura das lentes, são considerados *priors* fiduciais baseados em observações locais [100].

Em particular, é utilizada uma amostra combinada de 280 sistemas compilada em [116]. Este conjunto de dados consiste em amostras de [110, 113] e de novos dados do recém-lançado banco de dados *Last Stand Before Rubin (LaStBeRu)* [116], que fora construído a partir da correspondência cruzada de possíveis sistemas de lenteamento galáxia-galáxia relatados na literatura com dados de múltiplos levantamentos fotométricos e espectroscópicos terrestres. Esta amostra contém medidas do redshift da fonte, do redshift da lente, do raio angular de Einstein e da dispersão de velocidades de cada lente. Com base em informações disponíveis na literatura [99, 100, 110, 113], este conjunto de dados é o maior até o momento preparado para restrições do parâmetro de *slip* nas escalas de galáxias-lentes gravitacionais fortes.

A estrutura da dissertação é a seguinte. No capítulo 1, conceitos e estruturas fundamentais das teorias escalares-tensoriais são expostos, no final do capítulo apresentamos as teorias DHOST. Já o formalismo da Teoria Efetiva de Energia Escura com o efeito de vazamento no caso das DHOST são exibidos no capítulo 2. No capítulo 3, com base na Relatividade Geral, nos aprofundamos no lenteamento gravitacional, já no final do capítulo apresentamos o lenteamento no caso das teorias DHOST. O modelo final para as dispersões de velocidades observadas é construído no capítulo 4. Uma revisão detalhada da amostra combinada utilizada neste trabalho é apresentada no capítulo 5. No capítulo 6, são mostradas as estimativas dos parâmetros EFTDE, juntamente com uma comparação com estimativas indiretas retiradas da literatura. Finalmente, nas Considerações Finais e Perspectivas, exibimos nossas conclusões e comentários sobre trabalhos futuros. Além disso, com o intuito de manter esta dissertação autocontida, apêndices abordando os fundamentos da Relatividade Geral (apêndice A) e da Cosmologia (apêndice B) foram adicionados, assim como apêndices sobre distâncias de diâmetro angular (apêndice C), a história do lenteamento gravitacional (apêndice D) e alguns modelos de lentes importantes (apêndice E).

## 1 TEORIAS ESCALARES-TENSORIAIS

*"Para mim, a diversidade nas coisas criadas, parece não vir de outra fonte senão da matéria, ou em ocasião da matéria; mas onde está a matéria, há geometria."*

*Johannes Kepler, "De fundamentis astrologiae certioribus"*

Uma teoria física considerada de maneira científico-consensual como interpretação física canônica da realidade sensível de um determinado grupo de fenômenos físicos deve ser compatível com as observações dos fenômenos em questão, tem de possuir consistência teórica com áreas da física correlacionadas pré-existentes e, naturalmente, consigo própria. Também deve apresentar poder preditivo, interpretativo físico e descritivo dos fenômenos abrangidos de maneira generalista e unificadora. Se, no entanto, um outro arcabouço teórico e matemático similar possui as mesmas propriedades e descreve os mesmos fenômenos, sendo uma teoria mais geral ou não, então a teoria escolhida deve ser aquela mais simples no sentido da Navalha de Ockham.

Contudo, no geral, nem sempre uma teoria canônica obedece a todas essas ideias de maneira rígida. A própria Relatividade Geral (com  $\Lambda = 0$ ) satisfaz todos esses requisitos com diferentes graus de rigor. Apesar de ser compatível com observações e experimentos na escala do sistema solar, como em observações de lenteamento, atraso temporal, dinâmica orbital e muitos outros [117] (veremos um pouco sobre esses experimentos no final da dissertação), em escalas de galáxias e aglomerados é necessário a adição de um ente material que não foi observado de forma direta, isto é, a matéria escura, e nas escalas cosmológicas é necessário também a adição de energia escura [34]. Já do ponto de vista teórico há problemas na descrição da física microscópica, como o aparecimento de singularidades e o problema da não renormalização quando tenta-se uma unificação com teorias quânticas de campo [33]. Também há problemas na definição de massa [118] e momento angular [119] de corpos extensos, e de uma energia gravitacional bem definida.

Portanto, a criação de novas teorias diferentes da de Einstein se apresentam como uma oportunidade. De um lado é importante se ter teorias com a qual uma teoria canônica possa ser comparada, mas também para se ter novas abordagens sobre aparentes problemas da teoria em questão. Os problemas mencionados no parágrafo anterior, por exemplo, podem ser abordados modificando-se a Relatividade Geral ao invés de se assumir componentes diferentes no tensor momento-energia. No entanto, devido ao sucesso dessa teoria, é plausível sempre requerer-se que o Princípio da Equivalência de Einstein (e automaticamente a sua versão Fraca), como posto em A.1.7, seja satisfeito [34]. Em outras palavras, qualquer modificação da ação de Einstein-Hilbert deve manter no mínimo

o tensor métrico de uma variedade diferenciável Lorentziana, e o movimento geodésico correspondente, como essência da Gravitação.

Um guia de modificações possíveis da teoria de Einstein pode ser definido a partir do trabalho de Lovelock [120], que pode ser posto da seguinte maneira [34]:

- Teorema de Lovelock: A única derivada funcional de segunda ordem nas derivadas da métrica em um espaço-tempo quadridimensional Lorentziano que pode ser obtida de uma densidade escalar puramente gravitacional  $\mathcal{L}_{\mathcal{G}} = \mathcal{L}_{\mathcal{G}}(g_{\mu\nu}, \partial_{\alpha}g_{\mu\nu}, \partial_{\beta}\partial_{\alpha}g_{\mu\nu})$  é dada por (com  $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$ ):

$$\frac{\delta \mathcal{L}_{\mathcal{G}}}{\delta g^{\mu\nu}} = \sqrt{-g} \left[ \alpha \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) + \lambda g_{\mu\nu} \right]. \quad (1)$$

Desta forma, para ir além de Einstein é necessário [33, 34, 121]: adicionar novos campos, aceitar derivadas da métrica de ordem superior a dois, considerar mais dimensões físicas, abandonar a localidade, alterar o acoplamento entre gravitação e matéria (ex.: desistir da divergência nula do tensor momento-energia) ou considerar suposições geométricas diferentes.

O próprio Einstein em seu livro [122] de 1955 já havia notado algumas dessas condições para se construir teorias alternativas, antes mesmo do trabalho de Lovelock. Inicialmente, a motivação para teorias modificadas tem origem na tentativa de unificação da gravitação com o eletromagnetismo, posteriormente, e atualmente, essa motivação se dá principalmente pelos problemas mencionados acima, isto é, a necessidade epistemológica de considerações extras quando se vai para escalas maiores do que a do sistema solar e a incompatibilidade com a teoria quântica de campos. Desde então, muitas vezes inadvertidamente, diversas teorias dentro das possibilidades apresentadas por meio do teorema de Lovelock surgiram nos séculos XX e XXI, como exemplos [121, 117, 27, 42, 34, 71]<sup>1</sup>:

- Adicionando novos campos:
  - Campo escalar: Brans-Dicke, Horndeski, DHOST, teorias multi-escalares etc.
  - Campo vetorial: Einstein-Aether etc.
  - Campo tensorial: bimétrica, gravidade massiva etc.
  - Múltiplos campos diferentes: TeVeS e generalizações, MOG etc.

---

<sup>1</sup> Para diagramas mostrando a grande variedade de teorias alternativas veja [121].

- Lagrangianas de ordem superior:
  - Variação métrica:  $f(R)$ ,  $f(R, R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}, R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta})$ ,  $f(R, G)$ ,  $f(\square R)$  etc.
  - Variação à la Palatini ou métrica-afim: Todos os casos acima;  $f(\mathcal{R})$ ,  $f(\tau)$  etc.
  - Variação híbrida: Teorias que misturam os casos acima, isto é, uma parte varia-se só a métrica e noutra a métrica e a conexão;  $f(R, \mathcal{R})$  etc.
- Teorias multidimensionais  $n > 4$ : Kaluza-Klein, teorias das cordas, branas, teorias Einstein-Gauss-Bonnet etc.
- Teorias não locais e/ou quânticas: Horava-Lifshitz, gravidade quântica de laços, teorias das cordas, gravidade assintoticamente segura etc.
- Divergência não nula do tensor momento-energia: gravidade de Rastall,  $f(R, T)$  etc.
- Geometrias mais gerais: teleparalelas ( $f(\tau)$ ), teleparalelas simétricas ( $f(Q)$ ), teorias métricas-afim, geometrias de Finsler, geometria de Lyra, Weyl, WISTs, *Area Metric Approach*, teoria de Einstein com  $g_{\mu\nu}$  não simétrico etc [123, 124, 125, 122].
- Modificações pós-Newton e pré-RG: teorias cinéticas gravitacionais (Le Sage, Duil-lier, Fatio etc), teoria dos vórtices de Descartes, teorias mecânicas do éter (condensação, rarefação etc), teoria de Poincaré de 1905, teoria de Abraham de 1911, teoria de Nordstöm de 1913, teoria *Entwurf* de Einstein e Grossman, gravidade unimodular etc [122, 126, 127].<sup>2</sup>

Dentre essa miríade de possibilidades, as teorias escalares-tensoriais se destacam por suas equações de campos relativamente simples, o que permite soluções analíticas em muitos casos relevantes [34]. Como consequência, essa categoria de teorias serve como um "protótipo" da modelagem de possíveis desvios da Relatividade Geral e, justamente por isso, tem sido extremamente explorada na literatura [128, 129, 34]. Mas, além disso, certas teorias escalares-tensoriais também são conhecidas por surgirem como teorias efetivas dimensionalmente reduzidas de teorias hiperdimensionais, como em Kaluza-Klein e nas teorias das cordas [129]. Outro fator importante é que grande parte das teorias  $f(R)$

---

<sup>2</sup> Grande parte dessas teorias não respeitam os princípios de equivalência, mas é válido mencioná-las.

podem ser naturalmente mapeadas dinamicamente em teorias escalares-tensoriais [27]. Entretanto, apesar dessas características positivas, mecanismos de blindagem aparecem nesses casos para se recuperar a Relatividade Geral em escalas da astrofísica estelar, e na maioria das teorias o campo escalar não possui uma origem puramente geométrica quadridimensional. Todavia, em [2], mostramos que algumas teorias escalares-tensoriais conhecidas podem ser obtidas puramente da geometria de Lyra de maneira completa, tal que o campo escalar provém da própria variedade de Lyra.

Uma outra característica extremamente importante que distingue essa categoria de teorias da teoria de Einstein, assumindo igualdade entre a massa gravitacional passiva e ativa [130], é o fato de que o campo escalar se acopla à auto-energia gravitacional de um corpo de tal forma a provocar uma assimetria entre a massa gravitacional e inercial [131, 132, 130, 117, 133]. De fato, alguns autores afirmam que a Relatividade Geral é a única teoria em que isso não acontece [33], ou seja, que satisfaz [134, 135, 127, 136, 34, 33]:

- Princípio da Equivalência Forte: O Princípio da Equivalência Fraco<sup>3</sup> é válido também para corpos massivos com autogravidade não negligenciável.<sup>4</sup>

A violação desse princípio leva então a uma diferença entre as massas gravitacional e inercial de planetas, estrelas e outros objetos massivos. Também chamado de efeito Nordtvedt [117], esse resultado de teorias modificadas da gravitação já foi testado via *Lunar Laser Ranging*, aonde o sistema Terra-Lua funciona de maneira similar a um experimento de Eötvös em maior escala [117]. Essencialmente, qualquer teste no regime de campo fraco que sonda o parâmetro de *slip* ou os parâmetros do formalismo pós-newtoniano parametrizado (PPN) naturalmente investigam esse princípio [117, 130, 139, 133].

Do ponto de vista histórico, a presença de um campo escalar como parte integral da gravitação tem sua origem antes mesmo da Relatividade Geral, com tentativas de se construir uma teoria da gravitação a partir da Relatividade Especial, como a de Einstein de 1907 e a de Nordström em 1913 [138]. A primeira teoria escalar-tensorial, no entanto, só foi criada em 1941, pelo matemático suíço Scherrer [140]. Contudo, essa teoria ficou por muito tempo esquecida, e o ano que marca o nascimento definitivo das teorias escalares-tensoriais é geralmente atribuído a 1961, quando Brans e Dicke publicam sua teoria, cujo fundamento está baseado numa interpretação física bem definida [134]. Após décadas de testes na escala do sistema solar mostrando uma maior compatibilidade com

---

<sup>3</sup> "O movimento de uma partícula material num campo gravitacional não depende de sua massa e nem de sua composição física." (veja a subseção A.1.7 do apêndice A.)

<sup>4</sup> As referências [137, 136, 117] chamam esta ideia de Princípio da Equivalência Fraco Gravitacional, com a adição de alguns pormenores. Também fazem a distinção com o Princípio da Equivalência de Newton Gravitacional por meio da diferença na definição de corpo e partícula teste. No geral, em [129, 138, 34, 33, 136, 117], a versão forte do princípio contém também a extensão do Princípio da Equivalência de Einstein para fenômenos locais de origem gravitacional.

a Relatividade Geral [117], o interesse nas teorias escalares-tensoriais só voltou a ter força após a descoberta da expansão acelerada do Universo. O ano de 2011 conta como um marco, pois foi o ano da redescoberta da teoria de Horndeski [141], amplamente utilizada na Cosmologia contemporânea para se modelar possíveis efeitos da energia escura [58].

## 1.1 Teoria de Brans-Dicke

Em 1937, com base em ideias de Eddington e Milne, Dirac propôs a sua Hipótese dos Números Grandes, que conjectura que quaisquer números adimensionais da ordem de  $10^{39n}$ , com  $n$  inteiro, que aparecem na natureza, devem estar necessariamente conectados [142, 143, 144]. Em particular, ele notou que a razão entre as forças elétrica e gravitacional entre um elétron e próton é da ordem de  $10^{39}$  e entre a massa do Universo e a do próton é de  $10^{78}$ , por outro lado, considerando a lei de Hubble de recessão das galáxias, ele percebeu também que a idade atual do Universo em unidades atômicas é da ordem de  $10^{39}$  [142]. Desta forma, para manter a conexão proposta por sua hipótese, Dirac inferiu que a constante gravitacional deveria diminuir de acordo com o tempo cósmico, isto é,  $G \propto t^{-1}$  [142, 144]. Assim, ao longo da história cósmica, para que a razão adimensional entre constantes da natureza de origem gravitacional e atômica seja sempre proporcional a ordem de grandeza da idade do Universo em unidades atômicas, a constante gravitacional deve então variar de acordo com a época cósmica [127, 145, 146].<sup>5</sup>

Por outro lado, em 1952, Sciama chegou a uma conclusão similar, mas partindo de ideias diferentes [147]. Tendo como objetivo o princípio de Mach, Sciama criou um modelo vetorial de indução inercial em analogia com o eletromagnetismo, aonde uma origem puramente gravitacional é atribuída às forças inerciais sentidas num referencial acelerado com relação às outras massas do Universo [147, 127]. No entanto, considerando o Universo observável como uma casca esférica de massa  $M$  e raio  $R$ , uma condição necessária para essa origem das forças inerciais é que  $GM/c^2R = 1$ , mas como o Universo se expande, necessariamente a constante de Newton  $G$  deve então variar de acordo com o tempo cósmico [148, 134, 127]. Assim, como consequência dessa condição e considerando-se a constância da velocidade da luz no vácuo, em unidades naturais temos que  $1/G = M/R$ , ou seja, o parâmetro de acoplamento gravitacional deve variar de acordo com a distribuição de matéria do Universo [147, 148, 134, 135].

Inspirado pela numerologia de Dirac e pelo modelo de Sciama, e notando que  $GM/c^2R \approx 1$  a partir dos dados de sua época [148], o experimentalista Dicke argumentou então que uma teoria da gravitação (parcialmente) consistente com o princípio de Mach

---

<sup>5</sup> Note que esses valores encontrados por Dirac já não se aplicam mais, as medidas das constantes naturais melhoraram muito desde então.

deve possuir um campo escalar, dependente de distribuições de matéria, cujo valor local determina a constante gravitacional  $G$  [148, 134, 127], e que conseqüentemente gera uma "constante" gravitacional variável com o tempo [134, 135]. Podemos resumir a visão de Dicke da seguinte forma [127, 138]:

- Princípio de Mach-Dicke: O parâmetro de acoplamento entre matéria-energia e o espaço-tempo deve ser um campo escalar que depende da distribuição de matéria do Universo.

Uma outra questão importante notada por Dicke, é o fato de que sua interpretação do princípio de Mach está de acordo com o princípio da equivalência como medido pelo experimento de Eötvös, isto é, sua versão Fraca, mas que a sua versão Forte, termo cunhado por ele próprio, era violada [134, 127]<sup>6</sup>. Essencialmente, a ideia de um acoplamento gravitacional variável e a violação da versão Forte do princípio de equivalência formam a base não somente da teoria de Brans-Dicke, mas de todas as teorias escalares-tensoriais.

Dicke, além de um grande estudioso das ideias de Mach [127], foi um grande pioneiro de testes da teoria de Einstein na escala do sistema solar [149, 150], numa época em que a NASA estava crescendo e buscava tais experimentos [127, 138]. No fundo, a sua teoria foi a catalisadora para tal, pois a teoria de Einstein tinha agora uma competidora. Com relação a parte físico-matemática, no entanto, foi seu aluno de doutorado Brans que obteve uma teoria consistente com suas ideias machianas a partir de um princípio variacional [127]. De uma forma geral, devido a Bergmann e Wagoner [140], podemos construir a teoria de Brans-Dicke (generalizada) a partir de um acoplamento não-mínimo do campo escalar  $\phi$  com a curvatura, com um termo cinético para dar dinâmica ao campo e com um potencial de autointeração que dá "massa" ao campo, isto é, que controla seu alcance [151]. Utilizando-se um princípio variacional, temos então a ação [140, 34]:

$$S[g_{\mu\nu}, \phi, \Psi^a] = \frac{1}{c} \frac{1}{2} \int_{\Omega \in \mathcal{M}} \left( \phi R - \frac{\omega(\phi)}{\phi} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi - 2\Lambda(\phi) \right) \sqrt{-g} d^4x + S_m[g_{\mu\nu}, \Psi^a], \quad (2)$$

que se reduz a teoria original de Brans-Dicke se o parâmetro de acoplamento  $\omega(\phi)$  é constante e se o potencial  $\Lambda(\phi)$  é nulo [134].

Variando-se (2) com relação à métrica obtemos a equação tensorial, mas se pegarmos o traço dessa equação e substituirmos na relação resultante da variação com respeito

---

<sup>6</sup> Note que a visão de Dicke do Princípio da Equivalência Forte é a de que localmente as leis da Física quando observadas de um referencial inercial são independentes de sua localização espaço-temporal [148, 134]. No entanto, já que a constante gravitacional é governada pelo campo escalar ponto a ponto, qualquer experimento gravitacional efetuado em localizações espaço-temporais diferentes dará resultados distintos [135, 127, 138]. Naturalmente, a definição da versão Forte em 1 está dentro da visão de Dicke. No fundo, a versão Forte em 1 juntamente com o Princípio da Equivalência de Einstein em A.1.7 dão origem ao Princípio da Equivalência de Einstein Geral, que tem praticamente o mesmo significado da interpretação de Dicke e das versões fortes definidas em [136, 33, 117, 34].

a  $\phi$ , obtemos a equação para esse novo campo. Assim, essas duas equações são:

$$\phi G_{\mu\nu} + \left[ \frac{\omega(\phi)}{2\phi} \nabla_\alpha \phi \nabla^\alpha \phi + \square \phi + \Lambda(\phi) \right] g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu \phi - \frac{\omega(\phi)}{\phi} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi = T_{\mu\nu}, \quad (3)$$

$$\square \phi = \frac{1}{2\omega + 3} \left( T - \frac{d\omega}{d\phi} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi - 4\Lambda(\phi) + 2 \frac{d\Lambda}{d\phi} \phi \right). \quad (4)$$

No caso de Brans-Dicke, pode-se notar naturalmente as ideias de Dicke nas equações resultantes. Se considerarmos o tensor de Einstein como o termo de maior contribuição, podemos escrever de (3) que  $G_{\mu\nu} \approx (1/\phi)T_{\mu\nu}$  e de (4) que  $\square \phi \propto T$  ( $\square := \nabla_\mu \nabla^\mu$ ) [145]. Desta forma,  $1/\phi = \kappa_{eff}$  tem unidade de força e é interpretado como uma "constante" gravitacional que varia de acordo com a distribuição de matéria (não-conformal), tal que no limite da teoria de Einstein,  $1/\phi_{RG} \rightarrow 8\pi G/c^4$ .<sup>7</sup> Das equações acima, entretanto, esse limite só é obtido quando  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $(d\omega/d\phi)/\omega^2 \rightarrow 0$ ,  $d\Lambda(\phi)/d\phi \rightarrow 0$  e  $T \neq 0$  [129, 34].

Uma perspectiva interessante a se tomar do campo de Brans-Dicke, é que este de certa forma implica que a Gravitação possui uma mutabilidade atrelada a evolução cósmica, isto é, a Cosmologia é de fato o que determina a intensidade das interações gravitacionais a partir de (4). Contudo, apesar dessas ideias interessantes, Dicke ficara insatisfeito com a arbitrariedade da constante  $\omega$  e tentou, sem sucesso, escrever este acoplamento a partir de constantes fundamentais [149]. Por outro lado, sabe-se também que o limite na escala do sistema solar mais preciso de sua teoria é de  $\omega \geq 40000$  [152], um valor alto demais e, portanto, "esteticamente" indesejável, e que também é altamente compatível com o limite da Relatividade Geral. Além disso, como parcialmente mencionado em 1, considerando  $f''(r) \neq 0$ , teorias  $f(R)$  métricas são equivalentes a Brans-Dicke com  $\omega = 0$  e via Palatini são dinamicamente iguais ao se fixar  $\omega = -3/2$  [27].

A fama da teoria de Brans-Dicke se deve a sua interpretação física simples como feita por Dicke e por sua obtenção direta em quatro dimensões feita por Brans, entretanto, do outro lado do mundo, quase 20 anos antes, a mesma teoria já vinha sendo desenvolvida e estudada. Scherrer já havia proposto uma lagrangiana idêntica à de Brans-Dicke. Ludwig e Müller em 1949 publicaram uma lagrangiana igual à que se encontra em (2) com base nos trabalhos de Jordan, que se inspirou nas ideias de Dirac de um acoplamento gravitacional variável, e o francês Thiry obteve a mesma teoria desenvolvida por Jordan de forma independente na mesma época. A maioria dessas teorias, no entanto, são obtidas a partir de um espaço-tempo plano pentadimensional, até mesmo Einstein e Bergmann, antes dos trabalhos de Jordan, em 1938, já haviam notado em Kaluza-Klein que uma componente

---

<sup>7</sup> No caso de um espaço-tempo plano no interior de uma casca esférica de massa  $M$  e raio  $R$ , Brans mostra que  $\phi \approx \phi_\infty + \frac{1}{4\pi(2\omega+3)} \frac{M}{R}$  em unidades naturais [127, 138, 134], resultado similar ao do modelo de Sciama.

extra da métrica podia ser um campo escalar, mas fixaram como constante para cair na Relatividade Geral. Até mesmo a métrica de campo fraco, ângulo de deflexão da luz e precessão de periélio para Brans-Dicke já haviam sido calculados anteriormente. Para a história completa da(s) gênese(s) da teoria de Brans-Dicke veja [140, 127, 138, 128].

Por fim, é importante notar que o campo escalar de Brans-Dicke atua na matéria de forma indireta via a métrica, já que considera-se que matéria se acopla minimamente somente com a métrica. Contudo, em seu artigo [153] de 1962, Dicke notou que uma transformação local de unidades (chamada de transformação conformal na Física e de Weyl na Matemática) do tipo  $g_{\mu\nu} = \phi^{-1}\bar{g}_{\mu\nu}$ , leva a uma formulação da teoria que se assemelha a Relatividade Geral com uma fonte fixa de matéria escalar, mas cujo tensor energia-momento não se conserva e o movimento geodésico é violado. Apesar da interpretação física diferente, isto é, neste caso o campo escalar está acoplado diretamente na matéria alterando o movimento geodésico, Dicke notou que dinamicamente as duas formulações são iguais, já que uma transformação local de unidades não deve alterar a Física. Atualmente, existe muita discussão sobre a equivalência dessas duas formulações para teorias escalares-tensoriais no geral, aonde no caso de (2) chamamos de *frame* de Jordan e no outro de *frame* de Einstein. De acordo com [129], entretanto, os autores que afirmam a não equivalência dos dois frames é porque consideram um sistema de unidades global em toda a variedade, ao invés de considerar o mapa conformal como ditando localmente as unidades. Para mais sobre o assunto veja as referências [153, 129, 154, 155].

## 1.2 Horndeski e Além

Com base nos trabalhos de Lovelock, o físico e pintor Horndeski publicou um artigo em 1974 cujo objetivo fora encontrar as equações de Euler-Lagrange mais gerais possíveis de até no máximo segunda ordem nas derivadas da métrica e do campo escalar [40]. Em particular, isso fora feito em quatro dimensões a partir de uma densidade lagrangiana dependente desses campos e de suas derivadas em ordens superiores [40]. Por muito tempo essa teoria ficou esquecida, mas com o fortalecimento observacional de hipóteses como a constante cosmológica e o ínflaton, os campos escalares ganharam atenção e a teoria de Horndeski foi redescoberta em 2011 por [141]. Por outro lado, no contexto da inflação, a chamada teoria do Galileon surgiu como uma generalização do modelo Dvali-Gabadadze-Porrati (DGP) no limite de desacoplamento [156]. Tendo como base um universo-brana pentadimensional, o DGP dá origem em quatro dimensões ao termo de autointeração não-linear  $(\partial\phi)^2\Box\phi$  que caracteriza o Galileon [42]. Ainda em 2009, por [157], essa mesma teoria foi então generalizada para qualquer espaço-tempo. Contudo, foi em [41] que a teoria do Galileon tomou sua forma mais geral possível, quando foi então generalizada para resultar na equação de segunda ordem mais geral possível em

Minkowski, e subsequentemente acoplada com a métrica e generalizada para qualquer espaço-tempo. O importante, como demonstrado em [158], é que esta teoria resultante é exatamente igual à de Horndeski, com a única diferença sendo a formulação mais simples, razão pela qual estaremos apresentando esta formulação ao invés da atribuída a Horndeski.

O Galileon original é um campo escalar cuja dinâmica é invariante por transformações análogas a de Galileu da mecânica clássica, isto é,  $\phi \rightarrow \phi + a_\mu x^\mu + k_1$  com  $a_\mu$  e  $k_1$  constantes. Impondo que as equações do campo escalar sejam de no máximo de segunda ordem, para evitar as chamadas instabilidades fantasmas [159, 42], é possível obter a densidade lagrangiana do Galileon [156, 42]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_G = & c_1\phi + c_2X - c_3X\Box\phi + c_4X[(\Box\phi)^2 - \partial_\mu\partial_\nu\phi\partial^\mu\partial^\nu\phi] \\ & - \frac{c_5}{3}X[(\Box\phi)^3 - 3\Box\phi\partial_\mu\partial_\nu\phi\partial^\mu\partial^\nu\phi + 2\partial_\mu\partial_\nu\phi\partial^\nu\partial^\alpha\phi\partial_\alpha\partial^\mu\phi], \end{aligned} \quad (5)$$

tal que  $X = -\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi/2$  e  $c_i \in \mathbb{R}$  para  $i = 1, \dots, 5$ . A fim de generalizar (5) para qualquer espaço-tempo métrico  $g_{\mu\nu}$ , podemos utilizar o acoplamento mínimo  $\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu$ , entretanto, é necessário a adição de novos termos para evitar que derivadas do tensor de Ricci surjam nas equações de campo devido a não-comutatividade das derivadas covariantes [42]. Adicionando os contratermos adequados, temos então que [157, 42]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{GC} = & c_1\phi + c_2X - c_3X\Box\phi + \frac{c_4}{2}X^2R \\ & + c_4X[(\Box\phi)^2 - \nabla_\mu\nabla_\nu\phi\nabla^\mu\nabla^\nu\phi] + c_5X^2G^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi \\ & - \frac{c_5}{3}X[(\Box\phi)^3 - 3\Box\phi\nabla_\mu\nabla_\nu\phi\nabla^\mu\nabla^\nu\phi + 2\nabla_\mu\nabla_\nu\phi\nabla^\nu\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\nabla^\mu\phi], \end{aligned} \quad (6)$$

em que  $X = -g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi/2$  é o termo cinético e  $\mathfrak{L}_{GC} = \sqrt{-g}\mathcal{L}_{GC}$ . Apesar das equações obtidas de (6) ainda manterem a natureza de segunda ordem, há também derivadas de primeira ordem que infelizmente quebram a simetria de Galileu [42]. Por fim, a partir de (6) é possível ver de forma intuitiva que generalizar (5) para a teoria mais geral de segunda ordem em Minkowski e depois "covariantizá-la", da mesma maneira que fizemos para (6), leva a [41, 42]:

$$\mathcal{L}_{GCG} = \sum_{i=2}^5 \mathcal{L}_i, \quad (7)$$

com (note que  $\nabla_\mu\phi = \partial_\mu\phi$ ):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2 &= G_2(\phi, X), \\
\mathcal{L}_3 &= -G_3(\phi, X)\Box\phi, \\
\mathcal{L}_4 &= G_4(\phi, X)R + G_{4X}(\phi, X)[(\Box\phi)^2 - \nabla_\mu\nabla_\nu\phi\nabla^\mu\nabla^\nu\phi], \\
\mathcal{L}_5 &= G_5(\phi, X)G^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi \\
&\quad - \frac{G_{5X}(\phi, X)}{6}[(\Box\phi)^3 - 3\Box\phi\nabla_\mu\nabla_\nu\phi\nabla^\mu\nabla^\nu\phi + 2\nabla_\mu\nabla_\nu\phi\nabla^\nu\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\nabla^\mu\phi], \tag{8}
\end{aligned}$$

tal que os quatro  $G_i(\phi, X)$  são funções livres e  $G_{iX} = \partial G_i / \partial X$ . A lagrangiana (7) define então a Teoria do Galileon Covariante Generalizada, que é a teoria de Horndeski [42].

A classe de teorias representada por (7) contém diversos subcasos conhecidos, Brans-Dicke generalizado é obtido a partir de  $G_2(\phi, X) = -\Lambda(\phi) + \frac{\omega(\phi)}{\phi}X$ ,  $G_4(\phi, X) = \phi/2$  e  $G_3 = G_{4X} = G_5 = G_{5X} = 0$ , e a Relatividade Geral se  $G_2(\phi, X) = \Lambda\phi$ ,  $G_4(\phi, X) = \phi/2$ ,  $\phi = 1/\kappa$  e com o restante nulo. Em particular,  $G_2(\phi, X)$  caracteriza modelos de k-essência e  $G_3(\phi, X)$  os chamados *kinetic braiding gravity*.

Outro ponto importante é que o evento multi-mensageiro GW170817 e GRB170817A da coalescência de estrelas de nêutrons restringe Horndeski nas escalas astrofísicas via  $G_{4X} = G_5 = G_{5X} = 0$ . Sabe-se também que alguns casos particulares da ação de Horndeski são obtidos de uma compactificação de Kaluza-Klein da gravidade hiperdimensional de Lovelock e que (7) pode ser encontrado de uma extensão da ação de Dirac-Born-Infeld (DBI) numa brana teste em um *bulk* pentadimensional [42]. De acordo com [42], a generalização apropriada de (7) para variedades de maiores dimensões ainda é desconhecida.

Um guia para a construção de teorias escalares-tensoriais "saudáveis" é fornecido pelo teorema de Ostrogradsky, que estabelece o aparecimento de instabilidades tipo-fantasma quando a lagrangiana de um sistema físico é não-degenerada e dependente de derivadas temporais superiores do campo ou da variável em questão [42]. Essa classe de lagrangianas leva a equações de campo de ordem superior a dois, que necessitam então de condições iniciais extras, o que implica na existência de um grau de liberdade adicional, isto é, um campo fantasma, cujo efeito gera uma instabilidade no sistema<sup>8</sup>, que a nível quântico leva a um estado de vácuo mal definido [161, 159, 162, 44]. Dessa forma, por muito tempo acreditou-se que o requerimento de equações de segunda ordem, assim como fora feito por Horndeski, era uma condição necessária para não se ter graus de liberdade escalares extras e, portanto, para se ter uma teoria bem definida [160].

---

<sup>8</sup> Como exemplo, no caso da mecânica clássica, uma lagrangiana com um termo cinético do tipo  $\dot{q}^2/2$  leva a equações de quarta ordem, no entanto, essa mesma lagrangiana pode ser reescrita a partir da derivada temporal de primeira ordem de duas novas variáveis. Assim, decompondo o problema dessa forma, se obtém que o termo cinético de uma das novas variáveis possui o sinal trocado em relação ao termo da outra; é justamente esse fato que leva às instabilidades fantasmas [42, 160].

Entretanto, em [162] foi demonstrado que uma ação da forma de Einstein-Hilbert quando submetida a uma transformação disformal invertível, isto é,  $\bar{g}_{\mu\nu} = C(\phi, X)g_{\mu\nu} + D(\phi, X)\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$  com  $C(C - XC_X + 2X^2D_X) \neq 0$ , gera equações de ordem superior que podem ser postas num conjunto de segunda ordem via a matriz Jacobiana desta transformação. Pouco tempo depois, em [59, 163], surgiu a classe de teorias de Gleyzes-Langlois-Piazza-Vernizzi (GLPV), também chamada de beyond-Horndeski, cujas equações são de terceira ordem mas propagam somente um grau de liberdade escalar quando suas funções (já não tão) livres formam combinações particulares, fato que foi demonstrado via uma análise hamiltoniana no formalismo ADM. A questão importante a perceber, é que o requerimento de segunda ordem quando aplicado da forma que Horndeski fez deixa escapar lagrangianas cujas equações de Euler-Lagrange são de ordem superior mas cujo caráter de segunda ordem está escondido por meio de algum processo não trivial.

Essencialmente, estes resultados mencionados acima caem exatamente na classe de lagrangianas que são degeneradas e, por isso, mesmo tendo derivadas de ordem superior, são capazes de gerar equações que escapam dos fantasmas de Ostrogradsky. No caso de uma variável, uma lagrangiana  $L(q, \dot{q}, \ddot{q})$  é degenerada se  $\partial^2 L / \partial \ddot{q}^2 = 0$  [44]. De fato, a própria Relatividade Geral é degenerada, já que suas equações de segunda ordem provêm de uma lagrangiana cuja ordem das derivadas é maior do que um. A teoria de Horndeski também se encontra nessa classe, já que em (8) há derivadas de segunda ordem de  $\phi$ , neste caso, contudo, os termos de ordem superior que aparecem nas equações finais se cancelam devido às combinações anti-simétricas de segundas derivadas do campo escalar que se encontram nas sub-lagrangianas (8) [162]. Assim, ao invés de se considerar o processo de Horndeski, para escapar do teorema de Ostrogradsky basta considerar uma lagrangiana geral e no fim obter condições de degenerescência apropriadas para as funções livres da teoria que garantam a propagação de somente um grau de liberdade escalar [160].

Esta ideia foi então aplicada ao longo de diversos trabalhos, em [44, 47, 48, 46, 49], dando origem às Teorias Escalares-Tensoriais de Ordem Superior Degeneradas (DHOST). A densidade lagrangiana das teorias DHOST é construída a partir de todas as combinações quadráticas e cúbicas possíveis em derivadas de segunda ordem do campo escalar  $\phi$ , ou seja, temos que [160, 42]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{DHOST} = & P(\phi, X) + Q(\phi, X)\Box\phi + f_2(\phi, X)R + \sum_{i=1}^5 a_i(\phi, X)\mathcal{L}_i^{(2)} \\ & + f_3(\phi, X)G_{\mu\nu}\nabla^\mu\nabla^\nu\phi + \sum_{i=1}^{10} b_i(\phi, X)\mathcal{L}_i^{(3)}, \end{aligned} \quad (9)$$

em que as sub-lagrangianas quadráticas  $\mathcal{L}_i^{(2)}$  são dadas por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1^{(2)} &= (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)(\nabla^\mu \nabla^\nu \phi), \\
\mathcal{L}_2^{(2)} &= (\Box \phi)^2, \\
\mathcal{L}_3^{(2)} &= (\Box \phi)(\nabla^\mu \phi)(\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)(\nabla^\nu \phi), \\
\mathcal{L}_4^{(2)} &= (\nabla^\mu \phi)(\nabla_\mu \nabla_\rho \phi)(\nabla^\rho \nabla^\nu \phi)(\nabla_\nu \phi), \\
\mathcal{L}_5^{(2)} &= [(\nabla^\mu \phi)(\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)(\nabla^\nu \phi)]^2,
\end{aligned} \tag{10}$$

e cujos termos cúbicos  $\mathcal{L}_i^{(3)}$  são:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1^{(3)} &= (\Box \phi)^3, \\
\mathcal{L}_2^{(3)} &= (\Box \phi)(\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)(\nabla^\mu \nabla^\nu \phi), \\
\mathcal{L}_3^{(3)} &= (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)(\nabla^\nu \nabla^\rho \phi)(\nabla^\mu \nabla_\rho \phi), \\
\mathcal{L}_4^{(3)} &= (\Box \phi)^2(\nabla_\mu \phi)(\nabla^\mu \nabla^\nu \phi)(\nabla_\nu \phi), \\
\mathcal{L}_5^{(3)} &= (\Box \phi)(\nabla_\mu \phi)(\nabla^\mu \nabla^\nu \phi)(\nabla_\nu \nabla_\rho \phi)(\nabla^\rho \phi), \\
\mathcal{L}_6^{(3)} &= (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)(\nabla^\mu \nabla^\nu \phi)(\nabla_\rho \phi)(\nabla^\rho \nabla^\sigma \phi)(\nabla_\sigma \phi), \\
\mathcal{L}_7^{(3)} &= (\nabla_\mu \phi)(\nabla^\mu \nabla^\nu \phi)(\nabla_\nu \nabla_\rho \phi)(\nabla^\rho \nabla^\sigma \phi)(\nabla_\sigma \phi), \\
\mathcal{L}_8^{(3)} &= (\nabla_\mu \phi)(\nabla^\mu \nabla^\nu \phi)(\nabla_\nu \nabla_\rho \phi)(\nabla^\rho \phi)(\nabla_\sigma \phi)(\nabla^\sigma \nabla^\lambda \phi)(\nabla_\lambda \phi), \\
\mathcal{L}_9^{(3)} &= (\Box \phi)[(\nabla^\mu \phi)(\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)(\nabla^\nu \phi)]^2, \\
\mathcal{L}_{10}^{(3)} &= [(\nabla^\mu \phi)(\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)(\nabla^\nu \phi)]^3.
\end{aligned} \tag{11}$$

A teoria de Horndeski, sendo naturalmente um subcaso das DHOST, é obtida de (9) ao se fazer  $P = G_2$ ,  $Q = -G_3$ ,  $f_2 = G_4$ ,  $a_1 = -a_2 = -G_{4X}$ ,  $f_3 = G_5$ ,  $b_1 = -b_2/3 = b_3/2 = -G_{5X}/6$  e  $a_3 = a_4 = a_5 = b_j = 0$  para  $j = 4, \dots, 10$ . Já a subclasse beyond-Horndeski, que também é uma generalização de Horndeski, ao se definir que  $f_2 = G_4$ ,  $a_1 = -a_2 = -G_{4X} + XF_4$ ,  $a_3 = -a_4 = 2F_4$ ,  $f_3 = G_5$ ,  $b_1 = -b_2/3 = b_3/2 = -G_{5X}/6 + XF_5$ ,  $-2b_4 = b_5 = 2b_6 = -b_7 = 6F_5$  e  $a_5 = b_8 = b_9 = b_{10} = 0$  [160].

No caso de teorias com mais de um campo, como em (9), as condições de degenerescência são obtidas via decomposição  $3 + 1$  considerando-se variáveis auxiliares para substituir os termos de segunda ordem por derivadas temporais de primeira ordem. A lagrangiana é então considerada degenerada se as funções livres são tais que a matriz cinética, construída a partir dos  $\partial^2 L / \partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j$  entre cada variável auxiliar e, portanto, composta dos coeficientes dos termos cinéticos, é degenerada, isto é, tem determinante nulo [44, 49, 160, 42]. No caso de teorias quadráticas,  $f_3 = b_i = 0$ , as condições de degenerescência, que garantem a não propagação de um grau de liberdade escalar extra como demonstrado em [45], se resumem a dois grupos que levam a 3 classes de teorias, que se decompõem em 7 subclasses [160, 49]. Já para teorias com somente termos cúbicos

ou quadráticos e cúbicos, a análise de degenerescência foi feita em [48] e é bem mais complicada. No entanto, no caso de perturbações lineares cosmológicas, estas podem ser mapeadas em duas condições similares ao caso puramente quadrático [49]. Nesses casos, há 9 subclasses puramente cúbicas e 25 com todos os termos. Entretanto, a maioria de todas as subclasses das DHOST levam a situações não físicas, como uma velocidade de propagação nula de ondas gravitacionais e até mesmo a uma constante gravitacional efetiva infinita [42, 49].

Uma subclasse fisicamente plausível, e bastante estudada, é a classe Ia de teorias quadráticas, que contém os subcasos quadráticos de Horndeski e GLPV [42, 49, 160]. Esta classe é caracterizada pelo fato de que suas teorias, com matéria minimamente acoplada, são equivalentes a Horndeski com matéria disformalmente acoplada, isto é, a subclasse Ia está relacionada com Horndeski via uma transformação disformal [42, 49]. De fato, é possível que somente teorias DHOST relacionadas disformalmente com Horndeski sejam fenomenologicamente viáveis<sup>9</sup> [49]. É por essa razão que teorias Ia são as consideradas neste trabalho. Em particular, no capítulo 2 veremos as condições de degenerescência desta subclasse em função dos parâmetros efetivos de energia escura.

Como também veremos, essas teorias quebram a blindagem de Vainshtein, o que permite uma restrição de tais modelos via escalas astrofísicas [63]. O mecanismo de Vainshtein só é possível graças às derivadas de ordem superior galileônicas, já que esses termos não-lineares, quando considera-se uma escala de energia baseada na expansão do Universo, não podem ser descartados a nível de campo fraco em regiões de sobredensidade [42]. Essas considerações são feitas para se ter uma teoria modificada controlando a parte cosmológica, isto é, descrevendo a energia escura, mas cujos efeitos são blindados em escalas menores para gerar a Relatividade Geral. No entanto, até mesmo Horndeski não cai exatamente na teoria de Einstein sob essas considerações, já que uma variação temporal do campo escalar/energia escura de fundo leva a uma "constante" gravitacional que varia com o tempo em escalas menores, mesmo que a forma dos potenciais resultantes seja igual a da Relatividade Geral. Já no caso das DHOST Ia, a quebra da blindagem leva a modificações que alteram a forma dos potenciais, levando a uma dependência na variação de distribuições de matéria, se desviando, portanto, da teoria de Einstein no limite de campo fraco. Fundamentalmente, como mencionado anteriormente em 1 e 1.1, esse tipo de modificação é um reflexo da quebra do Princípio da Equivalência Forte devido a presença de um campo (escalar) gravitacional além da métrica.

---

<sup>9</sup> Atualmente, existem teorias mais gerais que as DHOST, que são justamente obtidas via transformações disformais de lagrangianas "saudáveis" de ordem superior [164, 165, 166, 167]. Há também as chamadas teorias U-DHOST, cujas condições de degenerescência são satisfeitas somente no calibre unitário, mais condições de contorno apropriadas [168].

## 2 TEORIA DE CAMPOS EFETIVA DE ENERGIA ESCURA

*"Phýsis krýptesthai philei."*

*Heráclito, fragmento B 123*

### 2.1 Formalismo ADM e Parâmetros EFTDE

Como comentado no capítulo 1, uma ideia que tem sido considerada na literatura é se ter uma teoria escalar-tensorial atuando em escalas cosmológicas para se modelar a energia escura e, portanto, simular desvios da própria constante cosmológica. Na Introdução, mencionamos que essas considerações possuem inclusive uma motivação observacional em [22, 23, 25], já que identificam a possibilidade de uma variação temporal da energia escura. Nesse caso, é razoável escolher uma classe de teorias bem geral, como as teorias galileônicas da seção 1.2, para se abranger o máximo de possibilidades fenomenológicas para se testar. No entanto, é extremamente mais prático considerar as simetrias do contexto cosmológico para facilitar as equações e cálculos finais, já que as lagrangianas e equações de campo das teorias provenientes do galileon são trabalhosas de se lidar. É exatamente isso que o formalismo efetivo de energia escura se propõe a fazer, ou seja, simplificar e ajustar teorias ao contexto cosmológico para uma melhor conexão com as observações [160, 59, 57].

A ideia central da Teoria de Campos Efetiva de Energia Escura (da sigla em inglês EFTDE) é que o campo escalar que representa a energia escura introduz uma folheação preferencial de hipersuperfícies espaciais devido à quebra da invariância de difeomorfismo temporal [55, 57]. A presença do campo escalar induz naturalmente a definição de um vetor normal tipo-tempo, isto é,  $n^\mu n_\mu = -1$  (note que isso é uma restrição no gradiente de  $\phi$ ) em unidades naturais e na assinatura  $(-, +, +, +)$ , definido como:

$$n_\mu = -\frac{1}{\sqrt{2X}} \nabla_\mu \phi, \quad (12)$$

cujo fator de normalização é o termo cinético  $X = -\nabla_\alpha \phi \nabla^\alpha \phi / 2$  e tal que seu sentido aponta para o futuro. Como resultado dessa definição, no calibre unitário ( $\partial_i \phi = 0$ ), as hipersuperfícies de campo uniforme correspondentes podem ser ajustadas para coincidir com as fatias de tempo constante [49].

A partir de (12) podemos então construir objetos geométricos que nos ajudem a descrever a evolução dinâmica das hipersuperfícies tipo-espaco. Naturalmente, podemos definir o tensor projeção  $h_{\mu\nu}$  como [169, 170]:

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu, \quad (13)$$

que por definição satisfaz  $h^\alpha_\mu h^\mu_\beta = h^\alpha_\beta$  e  $n^\mu h_{\mu\nu} = 0$ . Assim, devido a essas propriedades, (13) faz com que qualquer tensor seja projetado ortogonalmente ao vetor normal, permitindo a definição de uma métrica induzida  $h_{ij}$  nas subvariedades tipo-espaço [170, 169], já que para dois vetores tangentes às hipersuperfícies, isto é,  $n_\mu v^\mu = n_\mu w^\mu = 0$ , temos que  $g_{\mu\nu} v^\mu w^\nu = h_{\mu\nu} v^\mu w^\nu$  [170]. Já para a descrição da taxa de variação dessas hipersuperfícies, podemos definir o tensor de curvatura extrínseca  $K_{\mu\nu}$ , definido neste caso como [169]:

$$K_{\mu\nu} = h_\mu^\alpha \nabla_\alpha n_\nu, \quad (14)$$

que é tipo-espaço já que satisfaz  $n^\mu K_{\mu\nu} = 0$ . Por outro lado, se definirmos a aceleração das hipersuperfícies como  $a^\mu = n^\alpha \nabla_\alpha n^\mu$ , podemos ver de (14) que [51]:

$$K_{\mu\nu} = -\frac{1}{\sqrt{2X}} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi + 2n_{(\mu} a_{\nu)} + \frac{1}{2X} n_\mu n_\nu n^\alpha \nabla_\alpha X, \quad (15)$$

o que deixa explícito a dependência da curvatura extrínseca com derivadas de segunda ordem do campo  $\phi$  [51].

Podemos também definir o tensor de curvatura intrínseca  $\mathcal{R}^\mu_{\nu\gamma\alpha}$  da métrica  $h_{\mu\nu}$ , similarmente a (182), por meio de  $[\mathcal{D}_\gamma, \mathcal{D}_\alpha]X^\mu = \mathcal{R}^\mu_{\nu\gamma\alpha} X^\nu$ , tal que  $\mathcal{D}_\alpha T_\beta^\mu = h^\lambda_\alpha h^\sigma_\beta h^\mu_\xi \nabla_\lambda T_\sigma^\xi$  e  $X^\mu n_\mu = 0$  [169]. Utilizando-se  $h^\mu_\alpha h^\nu_\beta \nabla_\mu h^\lambda_\nu = K_{\alpha\beta} n^\lambda$  e  $K_{\alpha\beta} n^\lambda h^\xi_\gamma \nabla_\xi X_\lambda = -K_{\alpha\beta} K_{\gamma\lambda} X^\lambda$ , é possível então escrever o tensor de curvatura intrínseca das hipersuperfícies em função do tensor de Riemann e do tensor de curvatura extrínseca, isto é [169]:

$$\mathcal{R}^\mu_{\nu\gamma\alpha} = h^\mu_\lambda h^\delta_\nu h^\omega_\gamma h^\beta_\alpha R^\lambda_{\delta\omega\beta} + K^\mu_\alpha K_{\gamma\nu} - K^\mu_\gamma K_{\alpha\nu}. \quad (16)$$

Por outro lado, notando-se que  $\nabla_\alpha(a^\alpha - n^\alpha K) = R_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta + K_{\alpha\beta} K^{\alpha\beta} - K^2$ , já que  $\mathcal{D}_\gamma K_{\beta\alpha} - \mathcal{D}_\beta K_{\gamma\alpha} = -h^\lambda_\alpha h^\omega_\beta h^\xi_\gamma R^\delta_{\lambda\omega\xi} n_\delta$ ,  $K = \nabla_\alpha n^\alpha$  e  $n^\beta \nabla_\alpha n_\beta = 0$  (veja [169]), é possível a partir de (16) encontrar a chamada relação de Gauss-Codazzi [51]:

$$R = \mathcal{R} + K_{\alpha\beta} K^{\alpha\beta} - K^2 + 2\nabla_\alpha(K n^\alpha - a^\alpha), \quad (17)$$

que relaciona o escalar de Ricci com os objetos definidos nas hipersuperfícies [169, 170].

Com esses objetos geométricos definidos, precisamos agora somente escolher um sistema de coordenadas apropriado para descrever a decomposição 3 + 1 induzida pelo vetor normal (12). Para descrever adequadamente essa folheação do espaço-tempo, é útil considerar a decomposição de Arnowitt-Deser-Misner (ADM), em que o elemento de linha é genericamente escrito como (em unidades naturais,  $c = 1$ ) [169]:

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + h_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt), \quad (18)$$

tal que  $N$  é a função de lapso e  $N^i$  é o *shift*, que parametrizam a liberdade de escolha na evolução temporal [169]. Já  $h_{ij}$ , com mencionado, é a parte espacial de (13) e a métrica das fatias de tempo constante. Como consequência da identificação de  $\phi$  com a coordenada temporal no calibre unitário, visto que  $n_\mu = -N\delta_\mu^0$  devido a  $X = (\partial_t \phi(t)/N)^2/2$ , as quantidades geométricas ADM estão diretamente relacionadas com as derivadas do campo escalar e com a própria métrica. Desta forma, ao invés de se considerar diretamente esses dois campos e suas derivadas até segunda ordem, uma ação gravitacional genérica pode ser definida como [51]:

$$S_g = \int \mathcal{L}_g(N, \mathcal{R}_{ij}, K_{ij}, h_{ij}, \mathcal{D}_i; t) N \sqrt{h} dx^3 dt, \quad (19)$$

de tal forma que a densidade Lagrangiana  $\mathcal{L}_g$  depende da curvatura intrínseca de Ricci espacial  $\mathcal{R}_{ij}$ , da curvatura extrínseca das hipersuperfícies  $K_{ij} = (\partial_t h_{ij} - \mathcal{D}_i N_j - \mathcal{D}_j N_i)/2N$ , e da derivada covariante  $\mathcal{D}_i$  definida em relação à métrica 3D  $h_{ij}$  [51, 160]. Note também que  $\sqrt{-g} = N\sqrt{h}$ , em que  $h$  é o determinante de  $h_{ij}$ .

Assim, o formalismo (19) caracteriza uma teoria escalar-tensorial efetiva no contexto cosmológico. No caso de uma métrica espacial plana FLRW, temos genericamente que  $N = \bar{N}(t)$ ,  $N^i = 0$  e  $h_{ij} = a^2(t)\delta_{ij}$ , tal que por meio de (14) e (16) temos que  $K_j^i = H\delta_j^i = \dot{a}\delta_j^i/\bar{N}a$  e  $\mathcal{R}_{ij} = 0$  (note que  $\partial_t a = \dot{a}$ ). Portanto, em (19), temos a simplificação  $\mathcal{L}_g(N, K_{ij}, h_{ij})N\sqrt{h} = \bar{\mathcal{L}}_g(\bar{N}, a, \dot{a})\bar{N}a^3$  [51]. A variação da ação resultante é então dada por:

$$\delta S_g = \int \left[ \left( \bar{\mathcal{L}} + \bar{N} \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \bar{N}} - 3H\mathcal{F} \right) a^3 \delta \bar{N} + 3 \left( \bar{\mathcal{L}} - 3H\mathcal{F} - \frac{\dot{\mathcal{F}}}{\bar{N}} \right) \bar{N} a^2 \delta a \right] dx^3 dt, \quad (20)$$

em que  $3\mathcal{F} = a^2 \delta_{ij} \partial \bar{\mathcal{L}} / \partial K_{ij}$  e tal que todas as derivadas estão avaliadas nas quantidades do fundo FLRW. Por outro lado, já que para matéria minimamente acoplada temos [51]:

$$\delta S_m = \frac{1}{2} \int T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x = \int \left( -\bar{\rho} \frac{\delta \bar{N}}{\bar{N}} + 3\bar{p} \frac{\delta a}{a} \right) \bar{N} a^3 dx^3 dt, \quad (21)$$

pelo princípio da ação estacionária, i.e.  $\delta S_g + \delta S_m = 0$ , obtemos as equações de Friedmann generalizadas [51]:

$$\bar{\mathcal{L}} + \bar{N} \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \bar{N}} - 3H\mathcal{F} = \bar{\rho} \quad \text{e} \quad \bar{\mathcal{L}} - 3H\mathcal{F} - \frac{\dot{\mathcal{F}}}{\bar{N}} = -\bar{p}, \quad (22)$$

o que leva naturalmente a  $\bar{N} \partial \bar{\mathcal{L}} / \partial \bar{N} + \dot{\mathcal{F}} / \bar{N} = \bar{\rho} + \bar{p}$ . No caso das equações de Friedmann

usuais (215) e (216), temos que  $\bar{\mathcal{L}}_{RG} = -3H^2/\kappa + \Lambda/\kappa$ ,  $\mathcal{F}_{RG} = -2H/\kappa$  e  $\partial\bar{\mathcal{L}}_{RG}/\partial\bar{N} = 0$ , já que em (207) o escalar de Ricci pode ser escrito como  $K_{ij}K^{ij} - K^2 + \mathcal{R}$  por meio da relação de Gauss-Codazzi (17) [51].

No caso de perturbações lineares cosmológicas, no entanto, é necessário utilizar a parte quadrática da lagrangiana expandida em série de Taylor [51], já que são esses termos que dão origem às equações das perturbações. Considerando um fundo FLRW, o do parágrafo anterior, temos as perturbações  $\delta N = N - \bar{N}$ ,  $\delta K_{ij} = K_{ij} - H\delta_{ij}$  e  $\delta\mathcal{R}_{ij} = \mathcal{R}_{ij} - 0$ . Uma lagrangiana genérica é então dada por [51]:

$$\mathcal{L}(N, K_{ij}^i, \mathcal{R}_{ij}^i, \dots) = \bar{\mathcal{L}} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial N}\delta N + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial K_{ij}^i}\delta K_{ij}^i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \mathcal{R}_{ij}^i}\delta \mathcal{R}_{ij}^i + \mathcal{L}^{(2)} + \dots, \quad (23)$$

tal que sua parte quadrática  $\mathcal{L}^{(2)}$  é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(2)} = & \frac{1}{2}\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial N^2}\delta N^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial K_{ij}^i\partial K_{kl}^l}\delta K_{ij}^i\delta K_{kl}^l + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial \mathcal{R}_{ij}^i\partial \mathcal{R}_{kl}^l}\delta \mathcal{R}_{ij}^i\delta \mathcal{R}_{kl}^l \\ & + \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial K_{ij}^i\partial \mathcal{R}_{kl}^l}\delta K_{ij}^i\delta \mathcal{R}_{kl}^l + \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial N\partial K_{kl}^l}\delta N\delta K_{kl}^l + \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial N\partial \mathcal{R}_{kl}^l}\delta N\delta \mathcal{R}_{kl}^l + \dots \end{aligned} \quad (24)$$

Contudo, devido à forma da geometria de fundo, podemos escrever essas derivadas de segunda ordem a partir de parâmetros que dependem somente do tempo cósmico [51]:

$$\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial Z_j^i\partial Y_p^l} = \hat{\mathcal{W}}\delta_j^i\delta_p^l + \mathcal{W}(\delta_l^j\delta_p^i + \delta^{jp}\delta_{il}) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial N\partial U_j^i} = \mathcal{B}_a\delta_j^i, \quad (25)$$

em que se  $Z_j^i = Y_j^i = K_j^i$  temos que  $(\hat{\mathcal{W}}, \mathcal{W}) = (\hat{\mathcal{A}}_K, \mathcal{A}_K)$ , para  $Z_j^i = Y_j^i = \mathcal{R}_j^i$  temos  $(\hat{\mathcal{W}}, \mathcal{W}) = (\hat{\mathcal{A}}_{\mathcal{R}}, \mathcal{A}_{\mathcal{R}})$ , para  $(Z_j^i, Y_j^i) = (K_j^i, \mathcal{R}_j^i)$  temos que  $(\hat{\mathcal{W}}, \mathcal{W}) = (\hat{\mathcal{C}}_K, \mathcal{C})$ ,  $\mathcal{B}_K$  se  $U_j^i = K_j^i$  e  $\mathcal{B}_{\mathcal{R}}$  se  $U_j^i = \mathcal{R}_j^i$  [51]. Dessa forma, a partir destas definições e utilizando-se as equações de fundo (22) para simplificação, podemos escrever que [51]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(2)}\sqrt{-g} = & \bar{N}\mathcal{G}^*\delta_1\mathcal{R}\delta\sqrt{h} + a^3\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial N} + \frac{1}{2}\bar{N}\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial N^2}\right)\delta N^2 + \bar{N}a^3\left[\mathcal{G}^*\delta_2\mathcal{R} + \frac{1}{2}\hat{\mathcal{A}}_K\delta K^2 \right. \\ & + \mathcal{B}_K\delta K\delta N + \mathcal{C}^*\delta K\delta\mathcal{R} + \mathcal{A}_K\delta K_{ij}^i\delta K_{kl}^l + \mathcal{A}_{\mathcal{R}}\delta \mathcal{R}_{ij}^i\delta \mathcal{R}_{kl}^l + \frac{1}{2}\hat{\mathcal{A}}_{\mathcal{R}}\delta \mathcal{R}^2 \\ & \left. + \left(\frac{\mathcal{G}^*}{\bar{N}} + \mathcal{B}_{\mathcal{R}}^*\right)\delta N\delta\mathcal{R}\right] + \dots, \end{aligned} \quad (26)$$

em que fizemos a reparametrização  $\mathcal{G}^* = \mathcal{G} + \dot{\mathcal{C}}/2\bar{N} + H\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{C}^* = \hat{\mathcal{C}} + \mathcal{C}/2$  e  $\mathcal{B}_{\mathcal{R}}^* = \mathcal{B}_{\mathcal{R}} - \dot{\mathcal{C}}/2\bar{N}^2$

tal que  $3\mathcal{G} = \delta^i_j \partial \mathcal{L} / \partial \mathcal{R}^i_j$ .<sup>10</sup> Os termos  $\delta_1 \mathcal{R}$  e  $\delta_2 \mathcal{R}$  são os de primeira e segunda ordem de  $\mathcal{R}$  escritos em termos das perturbações métricas ( $\mathcal{R} = 0 + \delta_1 \mathcal{R} + \delta_2 \mathcal{R}$ ) [51].

Com essa estrutura definida, podemos agora, por exemplo, explorar perturbações tensoriais. Neste caso, temos que  $h_{ij} = a^2(t)(\delta_{ij} + \gamma_{ij})$ , que no calibre transversal sem traço (TT, i.e.  $\gamma^i_i = 0$  e  $\partial_i \gamma^i_j = 0$ ) leva a  $\delta K^i_j = \dot{\gamma}^i_j / 2\bar{N}$  e  $\delta_2 \mathcal{R} = (\gamma^{ij} \partial^k \partial_k \gamma_{ij} + 3 \partial_k \gamma_{ij} \partial^k \gamma^{ij} / 4 - \partial_k \gamma_{ij} \partial^j \gamma^{ik} / 2) / a^2$  [51]. Fixando-se  $\bar{N} = 1$ , obtemos a partir de (26) que:

$$S_\gamma^{(2)} = \frac{1}{4} \int \left[ \mathcal{A}_K \dot{\gamma}_{ij} \dot{\gamma}^{ij} - \frac{\mathcal{G}^*}{a^2} \partial_k \gamma_{ij} \partial^k \gamma^{ij} \right] a^3 d^3x dt. \quad (27)$$

No caso da Relatividade Geral, temos que  $\mathcal{A}_K = \mathcal{G}^* = 1/2\kappa$ , como consequência, isso nos permite uma redefinição desses parâmetros de maneira apropriada a abranger as características fenomenológicas das teorias escalares-tensoriais. É plausível, portanto, definirmos a massa de Planck efetiva (ou força de Planck efetiva) por meio de [51]:

$$M^2 = 2\mathcal{A}_K, \quad (28)$$

que caracteriza um acoplamento gravitacional variável característico das teorias escalares-tensoriais (como comentado em 1) e tal que  $\mathcal{A}_K > 0$  para teorias bem definidas [51]. Para descrever como este parâmetro varia com o tempo cósmico definimos também [51]:

$$\alpha_M = \frac{1}{H} \frac{d \ln M^2}{dt}, \quad (29)$$

chamado de parâmetro da taxa de variação da massa de Plank (*Planck-mass run rate*). Já o segundo termo em (27) nos diz que há um desvio na velocidade das ondas gravitacionais com relação ao caso da Relatividade Geral, podemos definir então que [51]:

$$c_T^2 = 1 + \alpha_T = \frac{\mathcal{G}^*}{\mathcal{A}_K}, \quad (30)$$

em que  $c_T$  é a velocidade das perturbações tensoriais em unidades naturais e  $\alpha_T$  é o parâmetro de excesso de velocidade tensorial (*tensor speed excess*). Com essas definições, da variação de (27) com matéria obtemos a equação de onda para as ondas gravitacionais:

$$\ddot{\gamma}_{ij} + H(3 + \alpha_M) \dot{\gamma}_{ij} - a^{-2}(1 + \alpha_T) \nabla^2 \gamma_{ij} = \frac{2}{M^2} \pi_{ij}^{TT}, \quad (31)$$

tal que  $\pi_{ij}^{TT}$  é a projeção TT do tensor de pressão anisotrópica [171]. Para  $\alpha_T = \alpha_M = 0$  e  $M^2 = 1/\kappa$  obtemos então o caso da teoria de Einstein, o que justifica essa redefinição

---

<sup>10</sup> Note que fizemos a substituição  $\bar{N} a^3 \mathcal{C} \delta K^i_j \delta \mathcal{R}^j_i \rightarrow \bar{N} a^3 [(\dot{\mathcal{C}}/\bar{N} + H\mathcal{C})(\delta_2 \mathcal{R} + a^{-3} \delta \sqrt{h} \delta \mathcal{R}) + \mathcal{C} \delta \mathcal{R} \delta K + \bar{N}^{-1} H \mathcal{C} \delta N \delta \mathcal{R}] / 2$  [51].

dos coeficientes [51, 49, 160].

Podemos fazer uma reparametrização similar para o caso de perturbações escalares. No calibre unitário, sem perda de generalidade, podemos escolher que  $\bar{N} = 1$ ,  $N^i = \delta^{ij} \partial_j \psi$  e  $h_{ij} = a^2(t) e^{2\zeta} \delta_{ij}$ , o que leva a  $\delta\sqrt{h} = 3a^3\zeta$ ,  $\delta K^i_j = (\dot{\zeta} - H\delta N)\delta^i_j - a^{-2}\delta^{ik}\partial_k\partial_j\psi$ ,  $\delta_1\mathcal{R}_{ij} = -\delta_{ij}\partial^k\partial_k\zeta - \partial_i\partial_j\zeta$  e  $\delta_2\mathcal{R} = -2a^{-2}[\partial^k\zeta\partial_k\zeta - 4\zeta\partial^k\partial_k\zeta]$  [51]. Substituindo essas relações em (26) e variando a ação resultante com relação a  $\delta N$  e  $\psi$  obtém-se duas relações de vínculo, uma dessas relações se reduz a  $\delta N = 2\dot{\zeta}/H(2 - \alpha_B)$ , tal que:

$$\alpha_B = \frac{-\mathcal{B}_K}{2H\mathcal{A}_K}, \quad (32)$$

aonde foi utilizado as condições de degenerescência  $\hat{\mathcal{A}}_K + 2\mathcal{A}_K = 0$ ,  $\mathcal{C}^* = 0$  e  $4\hat{\mathcal{A}}_{\mathcal{R}} + 3\mathcal{A}_{\mathcal{R}} = 0$ , já que a lagrangiana considerada é de ordem superior e genérica (veja 1) [51]. Portanto, utilizando-se essa relação resultante do vínculo, temos que a ação quadrática para  $\zeta$  é dada por [51]:

$$S_{\zeta}^{(2)} = \frac{1}{2} \int [\mathcal{L}_{\dot{\zeta}\dot{\zeta}}\dot{\zeta}^2 + \mathcal{L}_{\partial_i\zeta\partial_i\zeta}a^{-2}\partial_i\zeta\partial^i\zeta] a^3 d^3x dt, \quad (33)$$

em que se definirmos os parâmetros adimensionais dependentes do tempo:

$$\alpha_K = \frac{1}{2H^2\mathcal{A}_K} \left( 2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial N} + \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial N^2} \right) \text{ e } \alpha_H = \frac{\mathcal{G}^* + \mathcal{B}_{\mathcal{R}}^*}{\mathcal{A}_K} - 1, \quad (34)$$

podemos escrever que [51]:

$$\mathcal{L}_{\dot{\zeta}\dot{\zeta}} = 2M^2 \frac{2\alpha_K + 3\alpha_B^2}{(2 - \alpha_B)^2}, \quad (35)$$

$$\mathcal{L}_{\partial_i\zeta\partial_i\zeta} = 2M^2 \left[ 1 + \alpha_T - 2\frac{1 + \alpha_H}{2 - \alpha_B} \left( 1 + \alpha_M - \frac{\dot{H}}{H^2} \right) - \frac{2}{H} \frac{d}{dt} \left( \frac{1 + \alpha_H}{2 - \alpha_B} \right) \right]. \quad (36)$$

Desta forma, em comparação com a Relatividade Geral, é possível ver que os dois parâmetros  $\alpha_K$  e  $\alpha_B$  alteram o coeficiente  $\mathcal{L}_{\dot{\zeta}\dot{\zeta}}$  do termo de energia cinética das perturbações escalares em (33). Em particular,  $\alpha_B$  caracteriza uma mistura de termos cinéticos da métrica e do campo escalar  $\phi$  já que vem de  $\delta K\delta N$ , por isso é chamado de parâmetro de trançamento (*braiding parameter*). Já o parâmetro de cinetismo (*kineticity*)  $\alpha_K$  também descreve a evolução temporal da energia cinética das perturbações, mas está relacionado às próprias flutuações do campo  $\phi$ , já que provém do termo com  $\delta N^2$  [51, 58]. Vale notar que para evitar fantasmas, temos que  $\mathcal{L}_{\dot{\zeta}\dot{\zeta}} > 0$ , o que leva a  $2\alpha_K + 3\alpha_B^2 > 0$  via (35) [51].

O formalismo apresentado aqui nos permite a descrição de perturbações num fundo FLRW a partir de coeficientes que parametrizam a diferença entre teorias escalares-tensoriais e a teoria de Einstein. As funções adimensionais e dependentes do tempo

definidas em (28), (29), (30), (32) e (34) são então os parâmetros EFTDE. Em particular, as teorias beyond-Horndeski, apresentadas no capítulo 1, geram todos esses parâmetros, já que suas funções livres estão relacionadas com os parâmetros EFTDE via as relações (25). Veremos mais sobre isso na próxima subseção, e também comentaremos sobre o parâmetro  $\alpha_H$  em 2.1.2. Para as equações perturbativas completas no calibre newtoniano veja [51, 49, 58]. É importante mencionar também que  $\alpha_B$  é característico de teorias modificadas tipo Brans-Dicke e que  $\alpha_K$  está relacionado a fluidos de  $k$ -essência. Esses dois parâmetros estão relacionados a uma aglutinação da energia escura [58]. Em geral, todos esses parâmetros modificam também a constante gravitacional usual. Para uma interpretação física mais detalhada de cada parâmetro de energia escura veja as referências [51, 58, 49, 172].

### 2.1.1 Extensão para teorias DHOST

O formalismo apresentado na subseção anterior não abrange as teorias DHOST, já que não leva em conta todas as possibilidades provenientes da densidade lagrangiana (9). Similarmente à discussão que tivemos na subseção 1.2, durante um certo tempo o formalismo efetivo de energia escura não levava em consideração uma dependência na derivada temporal da função de lapso  $N$ , como fizemos em (19), já que tal consideração estaria relacionada a um grau de liberdade escalar extra proveniente de termos de ordem superior [49]. No entanto, como discutimos, isso é resolvido por meio de condições de degenerescência apropriadas para as funções "livres" de teorias escalares-tensoriais de ordem superior genéricas. De fato, isso foi originalmente observado exatamente neste formalismo por meio de transformações disformais, o que dava origem a termos saudáveis associados às derivadas do lapso [51]. Em [49], considerando-se a dependência mencionada, o formalismo ADM foi então aplicado de forma completa à lagrangiana (9), e as condições de degenerescência das DHOST foram obtidas com relação aos novos parâmetros EFTDE.

Considerando-se então que (19) depende da derivada do lapso, todo o formalismo construído na subseção anterior pode ser feito de forma similar para este novo caso. No entanto, o processo é bem mais trabalhoso, razão pela qual mostramos somente o caso associado às teorias GLPV (veja [160, 49]), que são um subcaso muito importante para este trabalho. Utilizando-se os objetos geométricos definidos no começo deste capítulo para reescrever a lagrangiana (9) no formato ADM, é possível descobrir que quatro novos parâmetros EFTDE surgem na lagrangiana quadrática (veja o apêndice A de [49]). Há o parâmetro  $\alpha_L$  que "quebra" a parte das curvaturas extrínsecas na relação de Gauss-Codazzi (17) quando presente na ação, característico de teorias que não satisfazem a invariância de Lorentz [49]. Temos também as funções  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  e  $\beta_3$  que caracterizam os termos com derivadas de  $\delta N$ . Ignorando-se as condições de degenerescência,  $\beta_1$  é a generalização de

$\alpha_B$  para o grau de liberdade escalar extra, de forma semelhante,  $\beta_2$  é a generalização de  $\alpha_K$  para este novo caso e  $\beta_3$  está associado ao gradiente de energia do grau de liberdade adicional, que tem sua origem na aceleração das hipersuperfícies [49].

Com a parte quadrática da lagrangiana das DHOST escrita em função das variáveis ADM, é fácil obter a relação entre os parâmetros EFTDE mencionados até o momento e as funções livres apresentadas em (9). Considerando somente as combinações quadráticas (10), ou seja, fazendo  $b_i = 0$  e  $f_3 = 0$  em (9), temos que (para as relações completas com os termos cúbicos veja [49]):

$$\begin{aligned}
\alpha_L &= -6X(a_1 + a_2)/M^2, & \alpha_T &= -4Xa_1/M^2, \\
\alpha_H &= -4X(a_1 + f_{2X})/M^2, \\
\alpha_B &= 2\alpha_V + 6\beta_1 - 2\dot{\phi}(f_{2\phi} + 2Xf_{2\phi X} + XQ_X)/(HM^2), \\
\alpha_V &= -4X(f_{2X} - 2a_2 - 2Xa_{2X})/M^2, \\
\beta_1 &= -2X(a_2 - f_{2X} - Xa_3)/M^2, \\
\beta_2 &= 4X[a_1 + a_2 - 2X(a_3 + a_4) + 4X^2a_5]/M^2, \\
\beta_3 &= 4X(2Xa_4 - 2a_1 - 2f_{2X})/M^2,
\end{aligned} \tag{37}$$

tal que  $M^2 = 2(f_2 + 2Xa_1)$  e  $H = H(t)$  é o parâmetro de Hubble. Note que não colocamos  $\alpha_K$ , já que além de sua expressão ser demasiadamente grande, este parâmetro não afeta nosso trabalho, pois costuma ser relevante somente em escalas de super horizonte (*super-horizon*) [58, 173]. Note que para  $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \alpha_L = 0$  obtemos o caso de 2.1, associado às teorias beyond-Horndeski [51]. Se além disso  $\alpha_H = 0$ , é fácil ver de (37) que a configuração das funções livres retorna para o caso quadrático de Horndeski (7) [58]. Com relação à degenerescência, como comentado em 1.2, estamos interessados na classe de teorias Ia, que satisfaz as condições  $\mathcal{C}_I$ , definidas como [49]:

$$\begin{aligned}
\alpha_L &= 0, \\
\beta_2 &= -6\beta_1^2, \\
\beta_3 &= -2\beta_1[2(1 + \alpha_H) + (1 + \alpha_T)\beta_1],
\end{aligned} \tag{38}$$

o que vincula os novos parâmetros  $\beta_2$  e  $\beta_3$ , deixando  $\beta_1$  livre. As condições (38), portanto, garantem a propagação de somente um grau de liberdade escalar e que a classe correspondente esteja disformalmente relacionada com Horndeski<sup>11</sup>. Note que as funções  $P(\phi, X)$  e  $Q(\phi, X)$  não aparecem em (38), o que as torna passíveis de qualquer escolha

---

<sup>11</sup> Para transformações disformais invertíveis [63].

[160]. Por conseguinte, (37) e (38) permitem uma conexão clara entre teoria e observação, possibilitando uma restrição nas possibilidades de funções "livres" viáveis da lagrangiana das DHOST Ia via regime perturbativo.

### 2.1.2 Vazamento de Energia Escura

Como mencionado na Introdução, estamos interessados nas escalas de galáxias elípticas isoladas. Para descrever a dinâmica das estrelas destes objetos e a deflexão da luz provocada por essas galáxias é necessário descobrirmos a métrica de campo fraco correspondente. Por estarmos em escalas muito menores do que a de Hubble, podemos desconsiderar efeitos da expansão do fundo cosmológico. Além disso, para estar de acordo com o que é observado, devemos também considerar velocidades não-relativísticas para os entes materiais das galáxias. Sob essas considerações, podemos lançar mão do regime quasi-estático, aonde a evolução dinâmica das perturbações gravitacionais é muito pequena quando comparada com as evoluções puramente espaciais [57]. Isso é possível para escalas menores do que o horizonte sonoro das flutuações do campo escalar, o que nos permite ignorar derivadas temporais com respeito às espaciais em certos casos [57, 174].

Até o presente momento consideramos somente a parte quadrática da ação na forma ADM, no entanto, esse truncamento só é válido para o regime linear, i.e. escalas maiores que  $\sim 10$  Mpc [57]. Em escalas menores, as perturbações na matéria escura crescem e podem alimentar as flutuações na energia escura [57], portanto, não-linearidades devem ser levadas em consideração nesses casos. De fato, as não-linearidades são importantes por serem justamente o que permite o mecanismo de Vainshtein. Assim, termos EFTDE de mais alta ordem devem ser considerados. Por outro lado, como mostrado em [57], o problema é simplificado, já que somente os termos de até quarta ordem da lagrangiana completa não-linear contribuem para o limite quasi-estático. Neste caso, três novos parâmetros EFTDE surgem:  $\alpha_{V1}$ ,  $\alpha_{V2}$  e  $\alpha_{V3}$ . Entretanto, temos que  $\alpha_{V2} = \alpha_{V3} = 0$  pois estes coeficientes dependem das funções livres associadas às combinações cúbicas de teorias galileônicas, e estamos considerando apenas termos quadráticos. Sob essas considerações, no regime quasi-estático temos então a ação não-linear [63]:

$$\begin{aligned}
S_g^{QS} = \int \frac{M^2}{2} & \left[ \delta K_i^j \delta K_j^i - \left( 1 + \frac{2\alpha_L}{3} \right) \delta K^2 \right. \\
& + (1 + \alpha_T) \left( \mathcal{R} \frac{\delta \sqrt{h}}{a^3} + \delta_2 \mathcal{R} \right) - 2H\alpha_B \delta K \delta N \\
& + (1 + \alpha_H) \mathcal{R} \delta N + 4\beta_1 \delta K V + \beta_2 V^2 + \beta_3 \tilde{a}_i \tilde{a}^i \\
& \left. + (1 + \alpha_V) \delta N (\delta K_i^j \delta K_j^i - \delta K^2) \right] a^3 dx^3 dt,
\end{aligned} \tag{39}$$

aonde  $\alpha_{V1} = \alpha_V$ , definido em (37), está associado ao único termo de ordem cúbica [63]. Note que  $V = (\dot{N} - N^i \partial_i N)/N$  é a velocidade do lapso e  $\tilde{a}_i = (\partial_i \delta N)/N$  a aceleração [49]. Os parâmetros  $\alpha_K$  e  $\alpha_M$  não aparecem neste caso pois estão associados à evolução temporal em escalas cosmológicas. Note que para  $\beta_i = 0$  e ignorando-se o termo de ordem cúbica, obtemos a ação associada a (26).

Seguindo a dedução de [63], para descrever o espaço-tempo de uma fonte astrofísica não-relativística e esfericamente simétrica, caracterizada pela densidade de matéria  $\delta\rho(r)$ , considera-se apenas perturbações escalares no calibre newtoniano, de modo que  $\delta N = \Phi$ ,  $N^i = 0$  e  $h_{ij} = (1 - 2\Psi)\delta_{ij}$  em (18) [63]. Para reintroduzir as flutuações do campo escalar das DHOST na ação efetiva (39) e recuperar a covariância geral, é empregado o truque de Stueckelberg  $t \rightarrow t + \pi(t, \vec{x})$  [55]. Por conseguinte, considerando-as as condições de degenerescência (38) e somente os termos que contribuem no regime quasi-estático, temos que [63]:

$$\begin{aligned}
S_g^{QS} + S_m = \int \frac{M^2}{2} \Big[ & (c_1\Phi + c_2\Psi + c_3\pi) \nabla^2 \pi + c_4\Psi \nabla^2 \Phi \\
& + c_5\Psi \nabla^2 \Psi + c_6\Phi \nabla^2 \Phi + (c_7\dot{\Psi} + c_8\dot{\Phi} + c_9\ddot{\pi}) \nabla^2 \pi \\
& + \frac{b_1}{a^2} \mathcal{L}_3^{\text{Gal}} + \frac{1}{a^2} (b_2\Phi + b_3\Psi) \mathcal{E}_3^{\text{Gal}} + \frac{1}{a^2} \left( b_4 \nabla_i \Psi + b_5 \nabla_i \Phi \right. \\
& \left. + b_6 \nabla_i \dot{\pi} \right) \nabla_j \pi \Pi_{ij} + \frac{1}{a^4} \left( d_1 \mathcal{L}_4^{\text{Gal}} + d_2 \nabla_i \pi \nabla_j \pi \Pi_{ij}^2 \right) - \frac{2a^2}{M^2} \Phi \delta\rho(r) \Big] a d^4x, \quad (40)
\end{aligned}$$

em que  $\Pi_{ij} \equiv \nabla_i \nabla_j \pi$ ,  $\Pi_{ij}^n \equiv \nabla_i \nabla_{k_1} \pi \nabla_{k_1} \nabla_{k_2} \pi \dots \nabla_{k_{n-1}} \nabla_j \pi$ ,  $[\Pi^n] \equiv \delta^{ij} \Pi_{ij}^n$ ,  $\mathcal{L}_3^{\text{Gal}} \equiv -\frac{1}{2}(\nabla\pi)^2[\Pi]$ ,  $\mathcal{L}_4^{\text{Gal}} \equiv -\frac{1}{2}(\nabla\pi)^2 \mathcal{E}_3^{\text{Gal}}$  e  $\mathcal{E}_3^{\text{Gal}} \equiv [\Pi]^2 - [\Pi^2]$  [63]. Os parâmetros  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  e  $b_1$  dependem das funções EFTDE (37) e de suas derivadas temporais. Não os mostraremos aqui pois não são necessários para essa análise [63]. Já os restantes são definidos como [63]:

$$\begin{aligned}
c_4 &= 4(1 + \alpha_H), \quad c_5 = -2(1 + \alpha_T), \quad c_6 = -\beta_3 \\
c_7 &= 4\alpha_H, \quad c_8 = -2(2\beta_1 + \beta_3), \quad c_9 = 4\beta_1 + \beta_3 \\
b_2 &= \alpha_V - \alpha_H - 4\beta_1, \quad b_3 = \alpha_T, \quad b_4 = -c_7 \\
b_5 &= -c_8, \quad b_6 = -2c_9, \quad d_1 = -b_3 - b_2, \quad d_2 = c_9.
\end{aligned} \quad (41)$$

Note que os termos importantes para o mecanismo de Vainshtein são os quárticos, os que acompanham  $d_1$  e  $d_2$ , que dependem de  $\alpha_T$ ,  $\alpha_H$ ,  $\alpha_V$ ,  $\beta_1$  e  $\beta_3$  (veja (41)) [63].

Dessa forma, variando-se a ação (40) com relação a  $\Phi$ ,  $\Psi$  e  $\pi$ , integrando-se as equações resultantes no espaço e utilizando-se o teorema de Stokes, é possível obter respectivamente as equações [63]:

$$(c_1 - \dot{c}_8 - 3Hc_8)x + 2c_6y + c_4z - c_8\dot{x} + 2\Lambda^3x[(2b_2 - b_5)x - b_5rx'] = 4\mathcal{A}, \quad (42)$$

$$(c_2 - \dot{c}_7 - Hc_7)x + c_4y + 2c_5z - c_7\dot{x} + 2\Lambda^3x[(2b_3 - b_4)x - b_4rx'] = 0, \quad (43)$$

$$\begin{aligned} & 2\tilde{c}_3x + \tilde{c}_1y + \tilde{c}_2z + 2\tilde{c}_9\dot{x} + c_8\dot{y} + c_7\dot{z} + 2c_9\ddot{x} + 2\Lambda^3\{2\tilde{b}_1x^2 + (5Hb_6 + \dot{b}_6)rxx' \\ & + b_6(5x\dot{x} + 2rx\dot{x}' + r\dot{x}x') + x[(4b_2 + 3b_5)y + (4b_3 + 3b_4)z + b_5ry' + b_4rz']\} \\ & + 8\Lambda^6\{(d_1 + 3d_2)x^3 + d_2x[r^2(x')^2 + rx(6x' + rx'')]\} = 0, \end{aligned} \quad (44)$$

em que as novas variáveis são definidas como:

$$x = \frac{1}{\Lambda^3} \frac{\pi'}{a^2 r}, \quad y = \frac{1}{\Lambda^3} \frac{\Phi'}{a^2 r}, \quad z = \frac{1}{\Lambda^3} \frac{\Psi'}{a^2 r}, \quad \mathcal{A} = \frac{1}{8\pi M^2 \Lambda^3} \frac{m(r)}{r^3}, \quad (45)$$

tal que  $\Lambda \sim (MH^2)^{1/3}$  é uma escala de energia,  $m(r) = 4\pi \int \delta\rho(r)r^2 dr$  é a massa newtoniana e  $x'$ , por exemplo, denota a derivada de  $x$  com relação a variável radial  $r$  [63]. Note que os novos coeficientes com til estão relacionados com os (41) e suas derivadas [63]. Resolvendo-se as equações (42) e (43), substituindo as soluções em (44) e considerando-se (41) e (38), é possível obter uma equação só para  $x$  [63]:

$$x^3 + v_1x^2 + (v_2 + v_3\mathcal{A} + v_4\mathcal{A}')x + v_5\mathcal{A} + v_6\dot{\mathcal{A}} = 0, \quad (46)$$

cujos  $v_i$  estão relacionados com os parâmetros EFTDE [63]. Queremos agora encontrar soluções no regime de Vainshtein, aonde as não-linearidades do campo escalar dominam. Isso acontece bem adentro do raio de Vainshtein, isto é,  $r \ll r_v$  tal que  $r_v = (m/8\pi M^3 H^2)^{1/3}$  [64, 57]. Neste sentido, como buscamos soluções em regiões com alto contraste de densidade, podemos tomar  $\mathcal{A} \gg 1$  em (45). Neste caso, (46) se reduz a  $x^2 \approx -v_3\mathcal{A} - v_4\mathcal{A}'$  para  $v_2 > 0$ , que juntamente com (42) e (43), e para  $a(t) = 1$ , levam a [63]:

$$\frac{d\Phi}{dr} = G_N \left( \frac{m(r)}{r^2} + \gamma_1 \frac{d^2 m}{dr^2} \right), \quad (47)$$

$$\frac{d\Psi}{dr} = G_N \left( \frac{m(r)}{r^2} + \gamma_2 \frac{1}{r} \frac{dm}{dr} + \gamma_3 \frac{d^2 m}{dr^2} \right), \quad (48)$$

aonde  $G_N = [8\pi M^2(1 - \alpha_V - 3\beta_1)]^{-1}$  é o parâmetro de Newton efetivo e tal que:

$$\gamma_1 = \frac{[\alpha_H + (1 + \alpha_T)\beta_1]^2}{(1 + \alpha_T)(1 + \alpha_V - 4\beta_1) - \alpha_H - 1}, \quad (49)$$

$$\gamma_2 = -\frac{\alpha_H[\alpha_H - \alpha_V + 2(2 + \alpha_T)\beta_1] + \alpha_T\beta_1[1 + (1 + \alpha_T)\beta_1]}{(1 + \alpha_T)(1 + \alpha_V - 4\beta_1) - \alpha_H - 1}, \quad (50)$$

$$\gamma_3 = -\frac{\beta_1[\alpha_H + (1 + \alpha_T)\beta_1]}{(1 + \alpha_T)(1 + \alpha_V - 4\beta_1) - \alpha_H - 1}. \quad (51)$$

Se, no entanto, a velocidade das interações gravitacionais for a da luz no vácuo, temos que  $\alpha_T = 0$  e  $\alpha_V = \alpha_H$  (note que a convenção de sinal utilizada aqui é de [57]; em [63],  $\alpha_V \rightarrow -\alpha_V$ ). Neste caso, que é o considerado neste trabalho, temos que os parâmetros  $\gamma_i$  são simplificados para [63]:

$$\gamma_1 = -\frac{(\alpha_H + \beta_1)^2}{2(\alpha_H + 2\beta_1)}, \quad (52)$$

$$\gamma_2 = \alpha_H, \quad (53)$$

$$\gamma_3 = \frac{\beta_1(\alpha_H + \beta_1)}{2(\alpha_H + 2\beta_1)}. \quad (54)$$

As soluções (47) e (48) foram encontradas simultaneamente em [63, 64, 65], com a dependência completa dos parâmetros  $\gamma_i$  nas funções EFTDE (37) apresentada pela primeira vez em [63]. No entanto, foi demonstrado em [63] que há ainda outra possibilidade de solução no regime de Vainshtein (note que a eq. é cúbica), que para grandes distâncias da fonte também coincide com a solução não-blindada [63]. Nesse caso, podemos considerar que  $\mathcal{A} \gg x^2 \gg 1$  na equação (46), o que permite resolver (42) e (43) com  $x = 0$  [63]. Com essas considerações, os potenciais escalares satisfazem:

$$\frac{d\Phi}{dr} = G_\Phi \frac{m(r)}{r^2}, \quad \frac{d\Psi}{dr} = G_\Psi \frac{m(r)}{r^2}, \quad (55)$$

de modo que os novos parâmetros são dados por  $G_\Phi = G_N(1 - \alpha_H - 3\beta_1)/(1 + \alpha_H + \beta_1)^2$  e  $G_\Psi = (1 + \alpha_H)G_\Phi$  no caso de  $\alpha_T = 0$  e  $\alpha_V = \alpha_H$  [63].

Esses dois tipos diferentes de soluções das equações das DHOST para os potenciais métricos são um bom exemplo da violação do Princípio da Equivalência Forte na gravitação escalar-tensorial [139, 175]. No contexto considerado neste trabalho, isso ocorre devido aos parâmetros EFTDE  $\alpha_H$  e  $\beta_1$ , que são responsáveis pela quebra da blindagem de Vainshtein [63], fazendo com que a energia escura vaze para escalas menores. Note, no entanto, que no caso de (47) e (48) o mecanismo só é quebrado dentro de distribuições de matéria, recuperando-se então a forma da gravidade newtoniana fora destas, já no caso de (55) o limite newtoniano não é obtido [63]. Por outro lado, a energia escura naturalmente afeta a gravitação nas escalas astrofísicas via sua modificação na constante gravitacio-

nal. Sobre o parâmetro  $\alpha_H$ , introduzido em (34), conhecido como parâmetro de desvio de Horndeski, este ente está associado à mistura entre termos cinéticos das perturbações de matéria e do campo escalar em beyond-Horndeski [172]. Por fim, como mencionado,  $\beta_1 = 0$  caracteriza as teorias GLPV e  $\alpha_H = \beta_1 = 0$  a classe de Horndeski.

Dessa forma, é possível sondar os dois parâmetros  $\alpha_H$  e  $\beta_1$  em escalas astrofísicas. Em particular, iremos utilizar dados de lenteamento gravitacional forte juntamente com as dispersões de velocidades de galáxias-lentes elípticas da amostra combinada LaStBeRu [116]. Nos próximos capítulos vamos tratar exatamente dessas questões, em especial, nos dois capítulos seguintes, vamos construir o modelo de lenteamento forte e de dispersão de velocidades necessário para sondar os parâmetros EFTDE. Assim, primeiramente, introduziremos a seguir o formalismo e conceitos básicos do lenteamento gravitacional.

### 3 LENTES GRAVITACIONAIS

*"A questão que minha mente formulou foi respondida pelo céu ensolarado do Brasil."*

*Albert Einstein*

#### 3.1 Formalismo Matemático das Lentes Gravitacionais

Neste capítulo apresentaremos primeiro o básico do formalismo do lenteamento gravitacional forte, quando a lente é suficientemente massiva para distorcer, magnificar e multiplicar a imagem de fontes mais distantes. Começaremos no contexto da Relatividade Geral, mas depois, em 3.2, mostraremos o caso das DHOST no formalismo EFTDE. Para o leitor interessado na história do lenteamento gravitacional e nos seus diferentes tipos, temos o Apêndice D abordando estes tópicos. Se o leitor já está familiarizado com o formalismo das lentes gravitacionais fortes no caso da teoria de Einstein, é possível ir diretamente para a seção 3.2. Note que 3.1 está baseado em [176].

Apesar da Relatividade Geral ser conceitualmente simples, a sua estrutura físico-matemática é bem complexa. Desta maneira, é de se esperar que o fenômeno de lenteamento gravitacional também seja complicado, e, de fato, isto é verdadeiro para o caso de campos fortes, aonde, por exemplo, fótons podem orbitar um buraco negro. No entanto, na grande maioria dos casos, em particular, no regime que estamos interessados, podemos usar algumas suposições básicas que transforma o efeito das lentes gravitacionais em um formalismo extremamente simples com base na geometria elementar. Portanto, utilizando-se as referências [177, 178, 179, 180, 181, 182], esta seção busca justamente apresentar o formalismo básico deste belo fenômeno que é o lenteamento gravitacional.

De forma geral, são quatro as componentes estruturais básicas do lenteamento gravitacional. Nós temos o objeto cósmico cuja luz emitida será defletida, que é comumente chamado de fonte, temos um outro ente cósmico cujo campo gravitacional irá modificar a trajetória da luz emitida pela fonte, que é usualmente chamado de lente<sup>12</sup>. Dispomos também de um observador a uma dada distância da lente e da fonte, como um telescópio. Possuímos ainda um espaço-tempo definido por uma teoria métrica unificadora da gravitação e inércia, por um modelo cosmológico e por um modelo físico da distribuição de matéria que está gerando este campo gravitacional.

---

<sup>12</sup> Note que o termo mais apropriado é defletor, as lentes gravitacionais não funcionam integralmente como uma lente óptica usual (veja [183]).

Com base nisso, para construir o formalismo das lentes gravitacionais, podemos salientar cinco considerações básicas com base no que é observado:

- Conservação dos Fótons: A deflexão provocada pelas lentes gravitacionais não altera o número de fótons propagados pela fonte, ocorre somente um desvio da trajetória destes raios de luz. Isso naturalmente ocorre em teorias métricas, contudo, é necessário também supor que a interação entre os fótons e a matéria é desprezível, o que é o caso, dada a baixíssima densidade do plasma nas lentes (e.g. galáxias e aglomerados).
- Acromatismo Gravitacional: Raios de luz de diferentes frequências são defletidos pelo campo gravitacional das lentes de mesma maneira, ou seja, o fenômeno de lenteamento gravitacional é acromático. Consequência natural da Relatividade Geral e da maioria das teorias da gravitação.
- Aproximação de Campo Fraco: O campo gravitacional gerado pela lente obedece a relação  $|\Phi| \ll c^2$ . Desta maneira, assumindo a Relatividade Geral, o acoplamento entre a matéria e o espaço-tempo é linear e descrito pela relação newtoniana (205). Esta aproximação é muito acurada nestes casos, pois sabemos que galáxias e estrelas obedecem ao limite de campo fraco. Em particular, essa aproximação também é válida para objetos extremos como buracos negros e estrelas de nêutrons caso os raios de luz passem longe desses objetos.
- Aproximação de Pequenos Ângulos: O efeito de uma lente sobre os raios de luz da fonte acontece numa pequena região do céu, pois, como temos no caso de uma estrela (229), o ângulo de deflexão cai com o inverso da distância, por isso é eficaz considerar que os raios de luz passam perto da lente. Naturalmente, isso é uma consequência do que é medido observacionalmente.
- Aproximação de Lente Fina: Se as distâncias entre o observador e a lente e entre a lente e a fonte são muito maiores do que o tamanho físico da lente, então podemos considerar como se a lente estivesse projetada num plano. Como as galáxias se encontram a distâncias cosmológicas, esta aproximação é muito acurada no caso do lenteamento forte do tipo galáxia-galáxia<sup>13</sup>. Como comparação, podemos tomar o diâmetro médio de galáxias elípticas como sendo da ordem de 100 *kpc* e da distância até  $z \approx 1$  como 1000 *Mpc*, assim, as distâncias até tais galáxias são da ordem de  $10^4$  vezes maior do que seus tamanhos. Ou seja, num regime de tamanhos angulares da ordem de segundos de arco.

---

<sup>13</sup> Para um formalismo mais complexo veja [184].

### 3.1.1 Equação da Lente

A relação físico-matemática mais importante no estudo das lentes gravitacionais, sem dúvida alguma, é a chamada equação da lente. Esta expressão relaciona a posição angular dos pontos das imagens lenteadas com a posição angular dos pontos da fonte, por meio das distâncias cosmológicas envolvidas e, evidentemente, por intermédio do ângulo de deflexão obtido pela Relatividade Geral, ou por uma outra teoria métrica da gravitação. A partir do esquema ilustrativo da figura 1, vemos que o símbolo  $\hat{\alpha}$  representa o ângulo de deflexão sofrido pela luz,  $\theta$  representa a posição angular das imagens lenteadas em relação ao centro da lente,  $\beta$  retrata a posição angular real da fonte com relação ao centro da lente,  $\vec{\xi}$  é a posição onde ocorre a deflexão e  $\vec{\eta}$  é a posição da fonte.

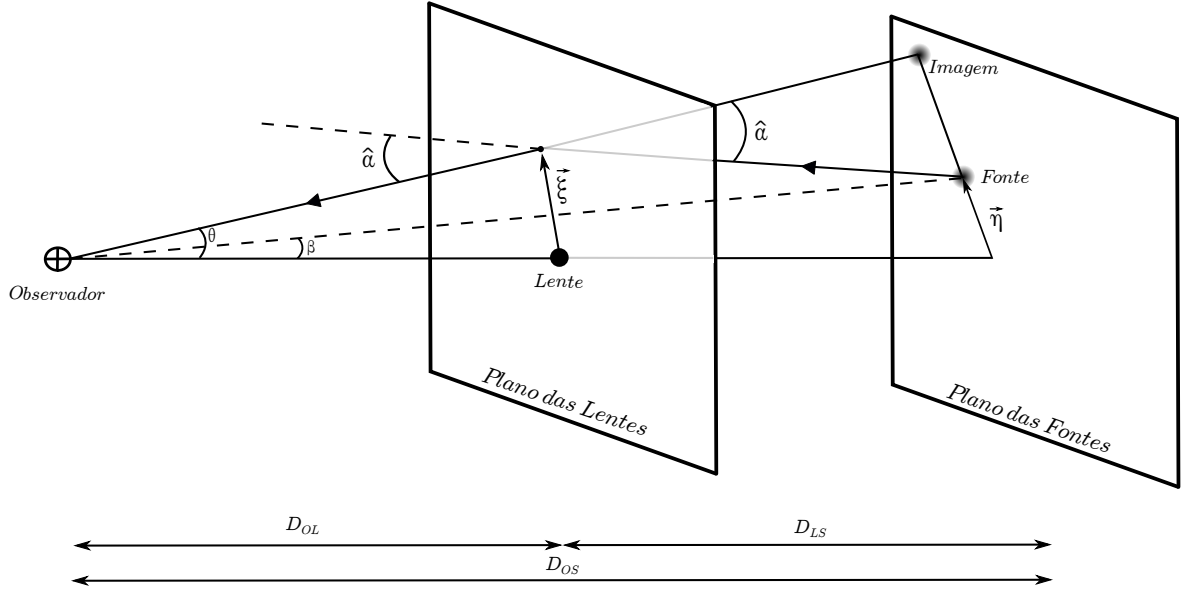
Neste caso, as distâncias relevantes são as de diâmetro angular  $D_{OL}$  entre o observador e a lente,  $D_{LS}$  entre a lente e a fonte e  $D_{OS}$  entre o observador e a fonte. Como pode ser verificado pela expressão (223) do Apêndice C,  $D_{OS} \neq D_{OL} + D_{LS}$  em geral. Como também pode ser verificado na figura 1, a nossa lente é uma só e se encontra num plano chamado de Plano das Lentes e a fonte se encontra no Plano das Fontes, pois, já que estamos mais interessados no lenteamento galáxia-galáxia, é possível fazer esta consideração por meio da aproximação de lente fina.

Por estarmos tratando de pequenas distâncias angulares, é possível utilizar a aproximação de pequenos ângulos, ou seja, fazer  $\text{tg } \omega = \omega$ ,  $\text{sen } \omega = \omega$  e  $\text{cos } \omega = 1$  já que  $|\omega| \ll 1$ . Além disso, é importante considerar que os ângulos  $\theta$ ,  $\beta$  e  $\hat{\alpha}$  possuem uma direção e sentido e podem ser escritos como vetores  $\vec{\theta}$ ,  $\vec{\beta}$  e  $\hat{\vec{\alpha}}$ . Assim, podemos utilizar novamente a ilustração da figura 1 para obtermos a equação da lente, se considerarmos o triângulo entre a imagem lenteada (I), o centro da lente projetado no plano das fontes (C) e o observador (O), obtemos facilmente que o lado entre C e I mede  $\vec{\theta} D_{OS}$ . Porém, este lado também mede  $\vec{\eta} + \vec{\epsilon} = D_{OS} \vec{\beta} + D_{LS} \hat{\vec{\alpha}}$  ao utilizarmos os triângulos subentendidos por  $\beta$  e  $\hat{\alpha}$ , aonde  $\vec{\epsilon}$  é a distância entre a fonte e I. Logo, obtemos que a equação da lente é simplesmente dada por:

$$\boxed{\vec{\beta} = \vec{\theta} - \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \hat{\vec{\alpha}}(\vec{\theta})}. \quad (56)$$

Esta equação nos diz que podemos encontrar as posições das imagens lenteadas se soubermos quem é  $\vec{\beta}$  e quem é o ângulo de deflexão  $\hat{\vec{\alpha}}(\vec{\theta})$ . No entanto, a forma como (56) está escrita é devido à questão observacional, pois, na realidade, queremos descobrir a posição e forma original da fonte, já que sabemos quem é  $\vec{\theta}$  e modelamos quem é  $\hat{\vec{\alpha}}$ . Essencialmente, a equação (56) dita o mapeamento entre os pontos no Plano das Lentes e os pontos da fonte. Uma fonte real possui então uma distribuição de brilho que é mapeada em outra via a equação da lente. Levando em consideração que  $\vec{\xi} = D_{OL} \vec{\theta}$  e  $\vec{\eta} = D_{OS} \vec{\beta}$  no

Figura 1 - Geometria de um lenteamento gravitacional.



Legenda: Esquema ilustrativo da geometria de um lenteamento gravitacional.

Fonte: Criado pelo autor no software Inkscape com base na referência [181].

limite de pequenos ângulos, podemos ainda reescrever a equação da lente em uma forma adimensional ao definir que:

$$\vec{x} = \frac{\vec{\xi}}{\xi_0}, \quad \vec{y} = \frac{\vec{\eta}}{\eta_0} \text{ e } \eta_0 = \frac{D_{OS}}{D_{OL}} \xi_0, \quad (57)$$

em que  $\xi_0$  é um parâmetro de escala no Plano das Lentes. Desta forma, ao substituírmos estas relações na equação da lente (56), obtemos que:

$$\vec{y} = \vec{x} - \vec{\alpha}(\vec{x}), \quad (58)$$

aonde  $\vec{\alpha}(\vec{x})$  é o ângulo de deflexão adimensional, dado pela relação:

$$\vec{\alpha}(\vec{x}) = \left( \frac{D_{OL} D_{LS}}{\xi_0 D_{OS}} \right) \hat{\alpha}(\xi_0 \vec{x}). \quad (59)$$

### 3.1.2 Distribuição Superficial de Massa

Como estamos utilizando a aproximação de lente fina, a deflexão dos raios de luz da fonte só ocorre no Plano das Lentes. Dessa forma, ao invés de considerarmos a distribuição de matéria tridimensional da lente  $\rho(\vec{r})$ , devemos considerar somente a densidade de matéria da lente projetada no Plano das Lentes, isto é,  $\Sigma(\vec{\xi})$ . Esta quantidade

é obtida através da integração de  $\rho(\vec{r})$  ao longo da linha de visada (linha que passa pelo observador e a lente) e é chamada de densidade superficial, densidade projetada ou de distribuição superficial de massa. Portanto, temos que:

$$\Sigma(\vec{\xi}) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\vec{\xi}, z) dz, \quad (60)$$

aonde a decomposição  $\vec{r} = \vec{\xi} + z\hat{z}$  é feita, tal que  $z$  é o chamado eixo óptico entre nós, o Plano das Lentes e o Plano das Fontes.

Além disso, como já mencionado, a gravitação na Relatividade Geral se torna linear no regime de campos fracos, portanto, podemos pensar a nossa lente como se fosse um conjunto de pequenas lentes pontuais, isto é, a nossa lente extensa pode ser descrita matematicamente como uma soma de elementos de área infinitesimais. Desta maneira, cada lente pontual infinitesimal deflete a luz de acordo com o desvio angular encontrado por Einstein em 1916, dado pela importante relação (229). Assim, cada lente pontual infinitesimal provoca um desvio de:

$$d\hat{\alpha} = \frac{4G}{c^2} \Sigma(\vec{\xi}') \frac{\vec{\xi} - \vec{\xi}'}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2} d^2\xi', \quad (61)$$

em que  $\vec{\xi}$  é a distância da origem do nosso sistema de coordenadas ao elemento de massa projetado  $dM = \Sigma(\vec{\xi}') d^2\xi'$  de uma lente pontual infinitesimal.

Por conseguinte, o ângulo de deflexão total da lente extensa será a soma de todas as contribuições infinitesimais dadas por (61). Logo, basta integrar esta relação sobre toda a extensão da lente projetada no Plano das Lentes para obter que:

$$\hat{\alpha}(\vec{\xi}) = \frac{4G}{c^2} \iint_{A_L} \Sigma(\vec{\xi}') \frac{\vec{\xi} - \vec{\xi}'}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2} d^2\xi'. \quad (62)$$

Podemos ainda encontrar o ângulo de deflexão reduzido, por meio das relações (59) e (62). Logo, obtemos que:

$$\vec{\alpha}(\vec{x}) = \frac{1}{\pi} \iint_{A_L} \frac{\Sigma(\xi_0 \vec{x}')}{\Sigma_{crit}} \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2} d^2x', \quad (63)$$

aonde o denominador, chamado de densidade crítica superficial, é definido como:

$$\Sigma_{crit} = \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_{OS}}{D_{OL} D_{LS}}. \quad (64)$$

Esse é um parâmetro de escala que divide os regimes forte e fraco do lenteamento. De modo simplificado, se  $\Sigma \gtrsim \Sigma_{crit}$  temos o regime de lenteamento gravitacional forte, enquanto  $\Sigma \ll \Sigma_{crit}$  corresponde ao regime de lenteamento gravitacional fraco (veja D.6).

### 3.1.3 Potencial Efetivo da Lente

Podemos também escrever a equação da lente em função do chamado potencial efetivo da lente, que nada mais é do que o potencial gravitacional newtoniano  $\Phi$  projetado no Plano das Lentes. Portanto, da mesma forma como foi feito para o caso da distribuição de matéria da subseção anterior, podemos definir:

$$\psi(\vec{\xi}) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\vec{\xi}, z) dz. \quad (65)$$

No entanto, se considerarmos ainda a equação de Poisson (205) projetada no Plano das Lentes, obtemos que  $\nabla_{\vec{\xi}}^2 \psi(\vec{\xi}) = 4\pi G \Sigma(\vec{\xi})$ , em que utilizando-se o método das funções de Green em duas dimensões obtemos que:

$$\psi(\vec{\xi}) = 4\pi G \iint_{A_L} \mathcal{G}(\vec{\xi} - \vec{\xi}') \Sigma(\vec{\xi}') d^2 \xi' \quad \text{e} \quad \nabla_{\vec{\xi}}^2 \mathcal{G}(\vec{\xi} - \vec{\xi}') = \delta(\vec{\xi} - \vec{\xi}'), \quad (66)$$

tal que  $\mathcal{G}(\vec{\xi} - \vec{\xi}') = \ln |\vec{\xi} - \vec{\xi}'| / 2\pi$  [185]. Dessa forma, ao aplicarmos o operador  $\vec{\nabla}_{\vec{\xi}}$  na primeira equação de (66), levamos em consideração que  $\vec{\nabla}_{\vec{\xi}} \ln |\vec{\xi} - \vec{\xi}'| = (\vec{\xi} - \vec{\xi}') / |\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2$  e compararmos este resultado com (62), obtemos que:

$$\hat{\alpha}(\vec{\xi}) = \frac{2}{c^2} \vec{\nabla}_{\vec{\xi}} \psi(\vec{\xi}). \quad (67)$$

Por conseguinte, usando coordenadas adimensionais teremos  $\vec{\alpha}(\vec{x}) = \vec{\nabla}_x \psi(\vec{x})$  tal que a equação da lente fica reescrita como:

$$\vec{y} = \vec{x} - \vec{\nabla}_x \psi(\vec{x}). \quad (68)$$

Para tal, basta substituirmos a relação (59) em (67), pois, assim, podemos reescrever (65) como:

$$\psi(\vec{x}) = \frac{2}{c^2 \xi_0^2} \frac{D_{OL} D_{LS}}{D_{OS}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi_0 \vec{x}, z) dz, \quad (69)$$

em que  $\psi(\vec{x})$  representa o potencial gravitacional reduzido projetado no Plano das Lentes. Se ainda aplicarmos o laplaciano  $\nabla^2 = \xi_0^{-2} \nabla_x^2 + \partial_z^2$  na equação (69) e considerarmos a relação (64), obtemos que:

$$\nabla_x^2 \psi(\vec{x}) = 2 \frac{\Sigma(\xi_0 \vec{x})}{\Sigma_{crit}}, \quad (70)$$

em que a distribuição de massa superficial pode ser escrita como:

$$\Sigma(\xi_0 \vec{x}) = \frac{1}{4\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} \nabla^2 \Phi(\xi_0 \vec{x}, z) dz. \quad (71)$$

Além disso, o potencial reduzido pode ser reescrito a partir de (64), (66) e (69) como:

$$\psi(\vec{x}) = \frac{1}{\pi} \iint_{A_L} \frac{\Sigma(\vec{x}')}{\Sigma_{crit}} \ln |\vec{x} - \vec{x}'| d^2 x'. \quad (72)$$

### 3.1.4 Magnificação, Convergência e Cisalhamento

De acordo com a conservação do número de fótons e o acromatismo gravitacional, é possível deduzir que o brilho superficial da fonte é conservado e, que portanto, o brilho das imagens lenteadas será maior (ou menor) num fenômeno de lenteamento gravitacional. Esta mudança de brilho dependerá somente da diferença do ângulo sólido entre a imagem lentada e a própria fonte [182], desta forma, podemos definir um parâmetro  $\mu$ , chamado de magnificação, que quantifica este aumento de área das imagens no céu, que é definido como:

$$\mu = \frac{\Delta\Omega_I}{\Delta\Omega_S}, \quad (73)$$

de tal maneira que  $\Delta\Omega_I$  é o ângulo sólido da imagem e  $\Delta\Omega_S$  o ângulo sólido da fonte.

Matematicamente, podemos compreender o fenômeno do lenteamento gravitacional como uma transformação de coordenadas entre o Plano das Fontes e o Plano das Lentes, e assim como toda transformação tem seu Jacobiano que quantifica como elementos de área ou volume se modificam, o Jacobiano das lentes gravitacionais avalia como a forma geométrica da fonte é deformada quando há a presença de uma lente gravitacional. Para fontes infinitesimais o Jacobiano corresponde à razão entre as áreas da fonte e da lente, ou seja, o inverso da magnificação:

$$\mu = \frac{1}{\det \mathbb{J}} = \det \left( \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{y}} \right) = \det \left( \frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{x}} \right)^{-1}, \quad (74)$$

em que as componentes da matriz  $\mathbb{J}$  são obtidas através da equação (58) e (68) como:

$$\mathbb{J}_{ij} = \delta_{ij} - \frac{\partial \alpha_i(\vec{x})}{\partial x_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial^2 \psi(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (75)$$

Portanto, com base na relação (75) e utilizando-se a notação  $\partial_i \partial_j \psi = \partial^2 \psi / \partial x_i \partial x_j$ , podemos escrever a matriz Jacobiana da transformação como:

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 1 - \partial_1 \partial_1 \psi & -\partial_1 \partial_2 \psi \\ -\partial_2 \partial_1 \psi & 1 - \partial_2 \partial_2 \psi \end{pmatrix}, \quad (76)$$

entretanto, podemos diagonalizar essa matriz de tal forma, que seus autovalores correspondam a uma deformação tangencial e radial. Assim, seja a convergência definida como:

$$\kappa(\vec{x}) = \frac{\Sigma(\xi_0 \vec{x})}{\Sigma_{crit}}, \quad (77)$$

de acordo com a equação (70) temos que  $\kappa(\vec{x}) = \nabla_x^2 \psi(\vec{x})/2 = (\partial_1 \partial_1 \psi + \partial_2 \partial_2 \psi)/2$ , dessa forma podemos reescrever a matriz Jacobiana como:

$$\mathbb{J} = (1 - \kappa) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (\partial_1 \partial_1 \psi - \partial_2 \partial_2 \psi)/2 & \partial_1 \partial_2 \psi \\ \partial_2 \partial_1 \psi & -(\partial_1 \partial_1 \psi - \partial_2 \partial_2 \psi)/2 \end{pmatrix}, \quad (78)$$

aonde separamos a matriz  $\mathbb{J}$  em uma parte isotrópica associada à convergência  $\kappa$  e em uma parte anisotrópica, cuja matriz possui traço nulo e é chamada de matriz de cisalhamento.

Para diagonalizarmos a relação (78), precisamos definir novas quantidades. Sendo assim, seja  $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2)$  o vetor cisalhamento,  $\gamma = (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)^{1/2}$  a magnitude do cisalhamento e  $\phi_\gamma$  o ângulo de cisalhamento, podemos definir que:

$$\begin{cases} \gamma_1(\vec{x}) = \frac{1}{2}(\partial_1 \partial_1 \psi - \partial_2 \partial_2 \psi) = \gamma(\vec{x}) \cos(2\phi_\gamma) \\ \gamma_2(\vec{x}) = \partial_1 \partial_2 \psi = \partial_2 \partial_1 \psi = \gamma(\vec{x}) \sin(2\phi_\gamma) \end{cases}, \quad (79)$$

tal que a matriz Jacobiana, levando em consideração que  $\mathbb{I}$  é a matriz identidade, será reescrita como:

$$\mathbb{J} = (1 - \kappa)\mathbb{I} - \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & -\gamma_1 \end{pmatrix} = (1 - \kappa)\mathbb{I} - \gamma \begin{pmatrix} \cos(2\phi_\gamma) & \sin(2\phi_\gamma) \\ \sin(2\phi_\gamma) & -\cos(2\phi_\gamma) \end{pmatrix}. \quad (80)$$

Assim, como a matriz de cisalhamento é uma matriz de rotação, podemos rotacioná-la de tal maneira a transformar a matriz Jacobiana numa matriz diagonal com autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Portanto, temos que:

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma & 0 \\ 0 & 1 - \kappa + \gamma \end{pmatrix}. \quad (81)$$

A convergência  $\kappa$  gera um aumento de tamanho isotrópico da fonte e o cisalhamento  $\gamma$  provoca uma distorção anisotrópica no formato da fonte. Para visualizar isto, podemos considerar uma fonte circular cujos pontos de mesma intensidade luminosa obedecem a equação  $y_1^2 + y_2^2 = R_0^2$  [181]. Assim, levando em consideração a equação da lente (58), temos que os pontos  $(y_1, y_2)$  no Plano das Fontes serão mapeados em pontos  $(x_1, x_2)$  no Plano das Lentes de acordo com a matriz Jacobiana. Logo, teremos que:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma & 0 \\ 0 & 1 - \kappa + \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad (82)$$

tal que obtemos, a partir da equação do círculo, a equação de uma elipse:

$$(1 - \kappa - \gamma)^2 x_1^2 + (1 - \kappa + \gamma)^2 x_2^2 = R_0^2, \quad (83)$$

cujos semi-eixo maior e semi-eixo menor serão dados consequentemente por:

$$a = \frac{R_0}{1 - \kappa - \gamma} \quad \text{e} \quad b = \frac{R_0}{1 - \kappa + \gamma}. \quad (84)$$

Assim, se  $\gamma = 0$ , a fonte aumenta o seu tamanho a partir da relação  $R_I = R_0(1 - \kappa)^{-1}$  e, se  $\kappa = 0$ , a fonte é distorcida em uma elipse com semi-eixo maior  $a = R_0(1 - \gamma)^{-1}$  e semi-eixo menor  $b = R_0(1 + \gamma)^{-1}$ .

Por fim, de acordo com a matriz (81) e com a definição de magnificação (74), obtemos o resultado:

$$\mu = \frac{1}{\det \mathbb{J}} = \frac{1}{(1 - \kappa)^2 - \gamma^2}, \quad (85)$$

que ao considerarmos a decomposição da magnificação em  $\mu_1$  e  $\mu_2$ , isto é, nas direções onde ocorre  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , como o inverso dos autovalores da matriz Jacobiana, ou seja:

$$\mu_1 = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{1 - \kappa - \gamma}, \quad (86)$$

$$\mu_2 = \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{1 - \kappa + \gamma}, \quad (87)$$

obtemos que a magnificação é o inverso do produto dos autovalores da matriz (81), pois:

$$\mu = \mu_1 \mu_2 = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} = \frac{1}{(1 - \kappa)^2 - \gamma^2}. \quad (88)$$

Desta forma, quando a magnificação tende ao infinito, ou seja, caso um dos autovalores

seja nulo para que  $\det \mathbb{J} = 0$  em certos pontos, definimos as chamadas *curvas críticas* no Plano das Lentes e as *cáusticas* no Plano das Fontes.

As *cáusticas* são o mapeamento das *curvas críticas* do Plano das Lentes no Plano das Fontes por meio da equação da lente. No lenteamento gravitacional, as *cáusticas* definem regiões em que o sinal da magnificação muda e aonde há o aparecimento de múltiplas imagens e, caso uma fonte esteja próxima de um desses tipos de curvas, a distorção das imagens será a maior possível [182].

### 3.1.5 Lentes com Simetria Axial

Podemos também simplificar mais ainda certos cálculos das lentes gravitacionais, ao considerarmos objetos cósmicos muito aproximadamente esféricos, como é o caso de certas galáxias ou aglomerados de galáxias aonde o conjunto de matéria bariônica mais o halo de matéria escura possui uma simetria axial, assim, podemos lançar mão da simetria esférica e simplificar as expressões anteriores. Portanto, primeiramente, utilizando-se a equação (70) e lembrando que  $\vec{\alpha}(\vec{x}) = \vec{\nabla}_x \psi(\vec{x})$ , é fácil entender que:

$$\vec{\nabla}_x \cdot \vec{\alpha}(\vec{x}) = 2 \frac{\Sigma(\xi_0 \vec{x})}{\Sigma_{crit}}, \quad (89)$$

em que se fizermos a substituição  $\vec{\nabla}_x = \xi_0 \vec{\nabla}_\xi = \xi_0 \vec{\nabla}$ , aonde descartamos  $\partial/\partial z$  pois estamos em duas dimensões, e levarmos em consideração que  $\vec{\alpha}(\vec{x}) = \vec{\alpha}(\vec{\xi})/\xi_0$ , basta definir  $\vec{\alpha}(\vec{\xi})$  através de (59), (62) e (63), obtemos que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\alpha}(\vec{\xi}) = 2 \frac{\Sigma(\vec{\xi})}{\Sigma_{crit}}. \quad (90)$$

Desta forma, se levarmos em consideração a equação (90), a simetria axial e o teorema de Gauss em duas dimensões espaciais na superfície  $S_\xi$  de borda circular  $\partial S_\xi$ , encontramos que:

$$\iint_{S_\xi} \vec{\nabla} \cdot \vec{\alpha} \, dS = \oint_{\partial S_\xi} \vec{\alpha} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} \alpha(\xi) \xi d\phi = 2\pi \alpha(\xi) \xi_0 x, \quad (91)$$

$$\iint_{S_\xi} \vec{\nabla} \cdot \vec{\alpha} \, dS = \frac{2}{\Sigma_{crit}} \iint_{S_\xi} \Sigma(\xi) \, dS = \frac{4\pi}{\Sigma_{crit}} \int_0^\xi \Sigma(\xi') \xi' d\xi' = \frac{2}{\Sigma_{crit}} M(\xi), \quad (92)$$

aonde  $M(\xi)$  é a massa da lente projetada no Plano das Lentes. Por conseguinte, se considerarmos novamente que  $\vec{\alpha}(\vec{x}) = \vec{\alpha}(\vec{\xi})/\xi_0$ , lembrarmos que  $\hat{x} = \vec{x}/x$  e utilizarmos as relações (91) e (92), é de imediato o resultado:

$$\vec{\alpha}(\vec{x}) = \frac{M(\xi_0 x)}{\pi \xi_0^2 \Sigma_{crit}} \frac{\vec{x}}{x^2}. \quad (93)$$

Desta maneira, se chamarmos  $m(x)$  de massa adimensional e a definirmos como:

$$m(x) = \frac{M(\xi_0 x)}{\pi \xi_0^2 \Sigma_{crit}}, \quad (94)$$

obtemos que a equação da lente adimensional com simetria axial pode ser escrita como:

$$\vec{y} = \vec{x} - \frac{m(x)}{x} \hat{x}. \quad (95)$$

Para obtermos as outras quantidades importantes do lenteamento gravitacional, precisamos calcular a Jacobiana da transformação entre o Plano das Lentes e o Plano das Fontes. Para fazer isto, devemos decompor o vetor ângulo de deflexão adimensional (93) nas direções cartesianas  $\vec{x} = (x_1, x_2)$  e considerar que  $\partial/\partial x_i = (x_i/x)d/dx$ , pois, desta forma, temos que:

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i} = \frac{x_i^2}{x^3} \frac{dm(x)}{dx} + m(x) \frac{x_j^2 - x_i^2}{x^4}, \quad (96)$$

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} = \frac{x_i x_j}{x^3} \frac{dm(x)}{dx} - 2m(x) \frac{x_i x_j}{x^4}, \quad (97)$$

em que  $i$  e  $j$  variam de 1 a 2 e aonde índices iguais não representam uma contração. Note que esta notação não é tensorial, como exemplo, se em (96)  $i = 1$  temos necessariamente que  $j = 2$  e vice-versa. Dessa forma, podemos escrever a matriz Jacobiana como:

$$\mathbb{J} = \mathbb{I} - \frac{m(x)}{x^4} \begin{pmatrix} x_2^2 - x_1^2 & -2x_1 x_2 \\ -2x_1 x_2 & x_1^2 - x_2^2 \end{pmatrix} - \frac{1}{x^3} \frac{dm(x)}{dx} \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 \\ x_1 x_2 & x_2^2 \end{pmatrix}, \quad (98)$$

para enfim, obter que o determinante desta matriz é dado por:

$$\det \mathbb{J} = \left[ 1 - \frac{m(x)}{x^2} \right] \left[ 1 - \frac{d(m(x)/x)}{dx} \right]. \quad (99)$$

A partir desta expressão, é possível perceber que o determinante se anula, ou seja, a magnificação de uma fonte pontual tende ao infinito, quando  $m(x)/x^2 = 1$  ou  $d(m(x)/x)/dx = 1$ . Desta forma, isto nos indica que no caso de simetria axial há em geral duas *curvas críticas* em forma de circunferência, graças à dependência radial do sistema [181]. Por fim, podemos escrever a convergência e as componentes da matriz de cisalhamento como:

$$\kappa(x) = \frac{1}{2x} \frac{dm(x)}{dx}, \quad (100)$$

$$\gamma_1(x) = \frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2) \left( \frac{2m(x)}{x^4} - \frac{1}{x^3} \frac{dm(x)}{dx} \right), \quad (101)$$

$$\gamma_2(x) = x_1 x_2 \left( \frac{1}{x^3} \frac{dm(x)}{dx} - \frac{2m(x)}{x^4} \right), \quad (102)$$

e podemos também reescrever as magnificações  $\mu_1$  e  $\mu_2$  como:

$$\mu_1 = \left[ 1 - \frac{m(x)}{x^2} \right]^{-1}, \quad (103)$$

$$\mu_2 = \left[ 1 - \frac{d(m(x)/x)}{dx} \right]^{-1}. \quad (104)$$

### 3.2 Formalismo de Lentes Gravitacionais para Teorias Alternativas

Com o formalismo do lenteamento gravitacional forte para o caso da Relatividade Geral introduzido na seção anterior, nos resta agora estender estes resultados para as teorias DHOST Ia. Como estamos no regime de campo fraco, as modificações são poucas. Para uma teoria com as mesmas considerações nas estruturas afim e métrica que a Relatividade Geral, mas com campos adicionais ou termos de ordem superior, a única diferença relevante será uma assimetria entre os potenciais escalares métricos no calibre newtoniano, consequência da já inúmeras vezes comentada quebra do Princípio da Equivalência Forte. Essencialmente, só precisamos encontrar a forma do ângulo de deflexão das DHOST e substituir no formalismo de 3.1. Com base nisso, para sondar a quebra da blindagem de Vainshtein, é então necessário encontrar uma relação entre quantidades medidas observacionalmente e o potencial métrico de lenteamento. Nesta seção, a partir de um processo bem geral, fazemos exatamente isto para o caso de uma distribuição de matéria esférica, estática e que obedece a uma lei de potência (para modelos de lentes veja o Apêndice E).

#### 3.2.1 Ângulo de Deflexão de Métricas Estáticas

Para uma métrica genérica, sem uma teoria métrica associada *a priori*, podemos encontrar o ângulo de deflexão da luz via a versão relativística do velho princípio variacional de Fermat [186]. Como em teorias métricas, no geral, a ideia do tempo em que um

feixe de luz leva para ir de um ponto a outro não é absoluta, já que o tempo depende do observador considerado, utiliza-se ao invés a propriedade estacionária do tempo de chegada invariante  $\tau$  medido por um observador que pode estar em movimento com relação a fonte [183]. Dessa forma, de acordo com [183], temos que:

- Teorema de Fermat Relativístico: Seja  $A$  um evento (fonte) e  $\sigma$  uma linha de Universo tipo-tempo (observador) num espaço-tempo métrico  $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$ . Uma curva suave nula  $\gamma$  de  $A$  a  $\sigma$  é uma geodésica tipo-luz se, e somente se, o seu tempo de chegada  $\tau$  medido por  $\sigma$  é estacionário sob variações de primeira ordem de  $\gamma$  dentro do conjunto de curvas nulas de  $A$  a  $\sigma$  [183], isto é,  $\delta\tau = 0$ .

Note que isso é uma outra maneira de definir geodésicas nulas, para a prova deste teorema veja [183]. Naturalmente, o teorema só se refere ao parâmetro de tempo próprio  $\tau$  de  $\sigma$ , mas que também pode ser uma função monotônica deste, i.e. tempo fluindo ao futuro [183]. Por outro lado, pode-se interpretar o teorema no sentido temporal inverso, tal que  $\sigma$  seja a linha de universo da fonte e  $\tau$  o tempo de chegada em  $A$  [183].

No caso de uma métrica estática podemos usar coordenadas apropriadas tal que  $g_{0i} = 0$  e  $\partial_0 g_{\mu\nu} = 0$  [187], sendo assim, como curvas nulas satisfazem  $ds^2 = 0$ , temos que:

$$dt = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{-h(x^i)}{g_{00}}} dl, \quad (105)$$

aonde  $g_{ij} = h(x^i)\delta_{ij}$  e  $dl^2 = \delta_{ij}dx^i dx^j$ . Para um observador tipo-tempo estacionário, isto é,  $\mathcal{U}^\mu \mathcal{U}_\mu = -c^2$  e  $\mathcal{U}^i = 0$  (na assinatura considerada no capítulo 2), temos que o tempo próprio  $\tau$  está relacionado com o tempo coordenado  $t$  via uma constante, já que  $\sqrt{-g_{00}(x^i)}$  é constante pois  $x^i(\tau) = \text{constante}$ . Desta forma, podemos fazer a reparametrização  $x^i(t)$  para o observador, tal que este será seu novo relógio. Neste caso, considerando-se o tempo de emissão  $t = 0$  sem perda de generalidade, temos que o tempo de chegada de uma curva nula é dado a partir de (105) e definido como [183]:

$$t = \frac{1}{c} \int_{\gamma_s} \sqrt{\frac{-h(x^i(\lambda))}{g_{00}(x^i(\lambda))}} dl, \quad (106)$$

tal que  $\gamma_s$  é a projeção espacial de uma curva nula, descrita por  $x^i(\lambda)$ , em que  $\lambda$  é um parâmetro afim. Por conseguinte, neste caso, o teorema de Fermat relativístico se reduz ao princípio de Fermat usual da óptica geométrica, isto é,  $\delta t = 0$ . A ideia central aqui é notar que o elemento de linha euclidiano óptico  $dl = |d\vec{x}|$  está sendo alterado devido a um índice de refração efetivo  $n$  que depende da posição espacial, consequência da presença de um corpo material estático, que modifica então o caminho óptico euclidiano. Logo, pelo princípio de Fermat, de (106) temos que:

$$\delta \int_{\gamma_s} n dl = \delta \int_{\gamma_s} n[\vec{x}(\lambda)] \left| \frac{d\vec{x}}{d\lambda} \right| d\lambda = 0, \quad (107)$$

aonde  $n = \sqrt{-h/g_{00}}$  é o índice de refração do nosso espaço-tempo estático e tal que  $\delta x^i(\lambda_{in}) = \delta x^i(\lambda_{out}) = 0$  sendo  $\lambda_{in}$  e  $\lambda_{out}$  os pontos final e inicial da curva espacial  $\gamma_s$ .

Logo, de (107) podemos considerar  $L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, \lambda) = n|\dot{\vec{x}}|$  como a nossa lagrangiana, em que  $\dot{\vec{x}} = d\vec{x}/d\lambda$  [188]. Utilizando-se as equações de Euler-Lagrange  $\partial L/\partial \vec{x} = d(\partial L/\partial \dot{\vec{x}})/d\lambda$  é fácil obter então que:

$$(\vec{\nabla} n)|\dot{\vec{x}}| = \frac{d(n\vec{e})}{d\lambda}, \quad (108)$$

em que  $\vec{e} = \dot{\vec{x}}/|\dot{\vec{x}}|$ . Se tomarmos  $d\lambda = dl$  sem perda de generalidade, temos naturalmente que  $|\dot{\vec{x}}| = 1$ , neste caso, podemos escrever de (108) que  $\vec{\nabla} n = (\vec{\nabla} n \cdot \vec{e})\vec{e} + n\dot{\vec{e}}$ , tal que:

$$\dot{\vec{e}} = \vec{\nabla}_{\perp} \ln n \quad \text{e} \quad \vec{\nabla}_{\perp} n = \vec{\nabla} n - (\vec{\nabla} n \cdot \vec{e})\vec{e}. \quad (109)$$

Portanto, com relação ao lenteamento, a ideia essencial é notar que o ângulo de deflexão da luz é a diferença entre a direção inicial e final da geodésica nula, isto é,  $\hat{\alpha} = \vec{e}_{in} - \vec{e}_{out}$  [183, 188], que dado o resultado em (109), já que  $\dot{\vec{e}} = d\vec{x}/dl$ , resulta consequentemente em:

$$\hat{\alpha} = \int_{\lambda_{out}}^{\lambda_{in}} \vec{\nabla}_{\perp} \ln n d\lambda, \quad (110)$$

aonde  $d\lambda = dl$ . Porém, (110) requer uma integração em toda a projeção espacial da curva nula, o que é em geral observacionalmente inviável. Afortunadamente, no caso de galáxias elípticas, podemos usar as considerações apresentadas no começo deste capítulo, i.e. cap. 3. Ou seja, por estarmos no regime de campo fraco, podemos tomar a aproximação de pequenos ângulos tal que  $|\hat{\alpha}| \ll 1$ , mas, além disso, dado o diâmetro da lente e as distâncias envolvidas, podemos utilizar a aproximação de lente fina, assim, podemos fazer a integração somente ao longo do caminho não perturbado (aproximação de Born) [183, 188]. Neste caso, considerando as coordenadas adaptadas ao Plano das Lentes apresentado na seção 3.1, temos que:

$$\hat{\alpha}(\vec{\xi}) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{\nabla}_{\xi} \ln n(\vec{\xi}, z) dz, \quad (111)$$

em que  $\xi$  é também chamado de parâmetro de impacto,  $\vec{\nabla}_{\xi}$  é o já visto gradiente no Plano das Lentes e tal que os limites de integração são  $(z_{in} = -\infty, z_{out} = \infty)$  pois

estamos considerando um espaço-tempo assintoticamente plano<sup>14</sup>. Portanto, sob todas estas considerações, (111) é o que chamamos de ângulo de deflexão para o caso de uma métrica estática.

### 3.2.2 O Lenteamento Forte em Teorias DHOST Ia

A principal razão para utilizarmos o lenteamento gravitacional forte junto com a dispersão de velocidades das estrelas de galáxias-lente *early-type* é que essa combinação permite avaliar a diferença entre a massa gravitacional ativa e a massa inercial da lente, que coincidem na Relatividade Geral [175], mas que no nosso caso são diferentes graças ao vazamento de energia escura para escalas astrofísicas (veja a seção 1.2). Na parte do lenteamento gravitacional, é possível encontrar uma relação entre o raio angular de Einstein  $\theta_E$  (veja o Apêndice E) de um sistema e a massa de lenteamento dentro deste raio, de modo que os dados de  $\theta_E$  são então usados para sondar essa massa [99, 100, 196], que no caso considerado neste trabalho possui uma dependência nos parâmetros EFTDE  $\alpha_H$  e  $\beta_1$ . Para encontrar esta relação no caso das DHOST Ia, adotamos as considerações das seções 3.2.1 e 3.1, no fundo, o regime de campo fraco e a aproximação de lente fina, de modo que a lente é projetada no plano perpendicular à linha de visada do observador.

Na subseção 2.1.2 consideramos uma métrica de campo fraco estática no calibre newtoniano, tal que  $g_{00} = -(1 + 2\Phi/c^2)$  e  $g_{ij} = (1 - 2\Psi/c^2)\delta_{ij}$  em unidades do Sistema Internacional. Como consequência, da subseção 3.2.1 temos que o índice de refração efetivo dessa métrica é dado por  $n = \sqrt{(1 - 2\Psi/c^2)/(1 + 2\Phi/c^2)} \approx 1 - (\Phi + \Psi)/c^2$  até primeira ordem nos potenciais. Já que em campo fraco temos  $\Phi/c^2 \ll 1$  e  $\Psi/c^2 \ll 1$ , podemos então truncar até essa ordem. De mesma forma, expandindo em série de Taylor o logaritmo natural dessa expressão temos que  $\ln n \approx -(\Phi + \Psi)/c^2$ . Logo, da expressão (111) obtemos que:

$$\hat{\alpha}(\vec{\xi}) = \frac{1}{c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{\nabla}_{\xi}(\Phi + \Psi) dz, \quad (112)$$

em que os potenciais métricos no caso de uma distribuição esférica dependem somente da variável radial, que é decomposta como  $r = \sqrt{\xi^2 + z^2}$ , aonde  $z$  é o eixo da linha de visada e  $\vec{\xi} = D_{OL}\vec{\theta}$  como definimos na subseção 3.1.1.

Os sistemas utilizados neste trabalho consistem de galáxias *early-type* (i.e. elípticas ou S0) massivas atuando como lentes para galáxias de fundo. Para cada lente, é então razoável assumirmos uma distribuição esférica de matéria (bárions mais matéria escura)

<sup>14</sup> No caso de métricas que não sejam assintoticamente planas veja [189, 190, 191, 192, 193], e para campos fortes veja, por exemplo, [194, 195].

dada por [197, 198, 99, 199, 200]<sup>15</sup>:

$$\rho(r) = \rho_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-\alpha}, \quad (113)$$

o que também é condizente com a modelagem de formação de estruturas em larga escala [203, 204], pois no caso das DHOST se considera também matéria escura [57, 58]. Neste caso, a massa newtoniana é simplesmente dada por [199]:

$$m(r) = \frac{4\pi\rho_0 r_0^\alpha}{(3-\alpha)} r^{3-\alpha}, \quad (114)$$

que ao utilizarmos nas expressões (47) e (48) obtemos que os potenciais DHOST Ia são dados por:

$$\Phi(r) = \frac{G_N}{(2-\alpha)} [1 + \gamma_1(3-\alpha)(2-\alpha)] \frac{m(r)}{r}, \quad (115)$$

$$\Psi(r) = \frac{G_N}{(2-\alpha)} [1 + \gamma_2(3-\alpha) + \gamma_3(3-\alpha)(2-\alpha)] \frac{m(r)}{r}, \quad (116)$$

tal que a integração foi feita fixando-se  $\Phi(r_0) = (2-\alpha)^{-1}[1 + \gamma_1(3-\alpha)(2-\alpha)]G_N m(r_0)/r_0$  e  $\Psi(r_0) = (2-\alpha)^{-1}[1 + \gamma_2(3-\alpha) + \gamma_3(3-\alpha)(2-\alpha)]G_N m(r_0)/r_0$  ( $\alpha > 0$ ). Note, contudo, que a forma dos potenciais (115) e (116) está mal definida para  $\alpha \leq 2$  [199], pois, por exemplo, nestes casos não teríamos  $\Phi(r \rightarrow \infty) = \Psi(r \rightarrow \infty) = 0$  (para mais detalhes veja [199]). Apesar disso, o ângulo de deflexão, que é o essencial para nós, é bem definido nestes casos. Para  $\alpha = 2$  temos o caso importante da esfera isotérmica singular, veja E.2.

Por conseguinte, utilizando-se os potenciais (115) e (116) na expressão (112), obtém-se o ângulo de deflexão modificado:

$$\hat{\alpha}(\vec{\xi}) = \frac{4GM_{lens}(\xi)}{c^2\xi^2} \vec{\xi}, \quad (117)$$

aonde  $\xi = \|\vec{\xi}\|$ , e tal que a massa projetada de lenteamento  $M_{lens}(\xi)$ , que é proporcional à soma da massa gravitacional ativa e da massa inercial, isto é,  $M_{lens} = (M_{grav} + M_I)/2$  [175, 133, 130], é definida como:

$$M_{lens}(\xi) = \frac{G_N}{G} \left\{ 1 + \frac{3-\alpha}{2} [(\gamma_1 + \gamma_3)(2-\alpha) + \gamma_2] \right\} M(\xi), \quad (118)$$

onde:

---

<sup>15</sup> Veja também [201, 202, 203, 204]

$$M(\xi) = \frac{2\pi^{3/2}\rho_0 r_0^\alpha \lambda(\alpha)}{3-\alpha} \xi^{3-\alpha} \quad (119)$$

é a massa newtoniana projetada no Plano das Lentes, com  $\lambda(\alpha) = \Gamma(\frac{\alpha-1}{2})/\Gamma(\frac{\alpha}{2})$ . No caso dos parâmetros  $\gamma_i$  definidos em (52), (53) e (54) serem nulos, além de  $M^2 = 1/\kappa$ , obtemos o caso da Relatividade Geral explorado nas subseções 3.1.3 e 3.1.5, ou seja,  $M_{lens} = M_{grav} = M = M_I$ . Por fim, para obtermos a relação desejada comentada no início desta seção, i.e. seção (3.2), basta considerarmos o ângulo DHOST (117) na equação da lente (56) e considerarmos  $\vec{\beta}(\vec{\theta}_E) = \vec{0}$ . O resultado é então:

$$\frac{GM_{lens,E}}{\xi_E} = \frac{c^2}{4} \frac{D_{OS}}{D_{LS}} \theta_E, \quad (120)$$

em que  $\xi_E = D_{OL}\theta_E$  e  $M_{lens,E} = M_{lens}(\xi_E)$ . Note que este resultado e o ângulo de deflexão das DHOST Ia para uma distribuição de matéria esférica e estática, (120) e (117) com (118), são resultados teóricos originais desta dissertação. Já no caso do segundo par de soluções (55), temos simplesmente que  $M_{lens} = (G_\Phi + G_\Psi)M(\xi)/2G$ .

## 4 DINÂMICA GALÁCTICA

*"Não há talvez, na natureza, nada mais antigo do que o movimento [...]."*

*Galileo Galilei*

No capítulo anterior, a partir do fenômeno de lenteamento gravitacional forte, construímos um modelo que permite sondar a massa de lenteamento associada às teorias DHOST Ia por meio do raio angular de Einstein medido a partir da modelagem de imagens lentesadas. Já neste capítulo, para podermos avaliar a quebra do Princípio da Equivalência Forte causada pela quebra do mecanismo de Vainshtein por teorias DHOST, é necessário considerarmos informações dinâmicas que nos permitam avaliar somente a massa gravitacional. No entanto, para galáxias elípticas esse processo envolve ainda diversas considerações para que o nosso modelo final se adeque ao que de fato é propriamente medido.

### 4.1 Dispersão de Velocidades

No caso de galáxias espirais, as estrelas ou gás (HI) que compõem o disco servem como traçadores relativamente simples da massa gravitacional dessas galáxias [199]. Já para galáxias *early-type*, não é possível medir a velocidade orbital individual de cada componente da galáxia de forma adequada [199], o que é agravado com o viés associado à projeção particular com que vemos essas galáxias na esfera celeste. Para resolver este problema recorreremos ao espaço de fase no qual a probabilidade, por unidade de volume, de encontrarmos uma estrela na posição  $\vec{x}$  é dada por [199]:

$$\nu(\vec{x}) = \int f(\vec{x}, \vec{v}) d^3\vec{v}, \quad (121)$$

onde  $f(\vec{x}, \vec{v})$  é a função de distribuição normalizada do sistema e aonde integra-se em todo o espaço de possibilidades de velocidade  $\vec{v}$  da estrela. Note que estamos considerando todas as estrelas idênticas sem perda de generalidade [199]. Galáxias *early-type* possuem pouco gás, o que faz com que a maior parte da radiação eletromagnética emitida seja oriunda das estrelas [199]. Assim, a densidade de luminosidade dessas galáxias difere de (121) apenas por uma constante multiplicativa que contém informação da luminosidade da população estelar [199].

A partir deste formalismo estatístico é então natural descrevermos a dinâmica das componentes da galáxia por meio de uma velocidade média e um desvio com relação a esta média. Neste sentido, temos que a velocidade média das estrelas numa galáxia *early-type*

é definida como:

$$\langle \vec{v}(\vec{x}) \rangle = \frac{1}{\nu(\vec{x})} \int f(\vec{x}, \vec{v}) \vec{v} d^3\vec{v}, \quad (122)$$

tal que o tensor de dispersão de velocidades em cada ponto é dado por:

$$\sigma_{ij}^2(\vec{x}) = \langle v_i v_j \rangle - \langle v_i \rangle \langle v_j \rangle = \frac{1}{\nu(\vec{x})} \int (v_i - \langle v_i \rangle) f(\vec{x}, \vec{v}) (v_j - \langle v_j \rangle) d^3\vec{v}. \quad (123)$$

Por outro lado, considerando que as estrelas da galáxia não colidem, podemos enxergar as coordenadas do espaço de fase como coordenadas canônicas associadas a uma hamiltoniana  $H$  via as equações de Hamilton. Como a evolução temporal pode ser vista como uma transformação canônica gerada por  $H$ , pelo teorema de Liouville temos que a evolução dinâmica conserva o volume de qualquer região do espaço de fase. Desta forma, temos que  $df/dt = 0$ , o que leva a  $\partial_t f = \{H, f\}$ , aonde  $\{H, f\}$  é o parênteses de Poisson (veja mais em [186, 199]). Assim, considerando uma hamiltoniana  $H = \|\vec{v}\|^2/2 + \Phi(\vec{x}, t)$  para cada estrela, obtemos a famosa equação de Boltzmann [199]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f - \vec{\nabla} \Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0, \quad (124)$$

tal que se considerarmos um sistema esférico, aonde podemos ignorar a maior parte das derivadas com relação às coordenadas angulares, e estacionário, ou seja,  $\partial_t f = \partial_t \Phi = 0$ , obtemos a famosa equação de Jeans [199]:

$$\frac{d[\nu(r)\sigma_r^2(r)]}{dr} + \frac{2\beta}{r}\nu(r)\sigma_r^2(r) = -\nu(r)\frac{d\Phi}{dr}, \quad (125)$$

aonde a equação (124) com as considerações acima foi multiplicada pelo momentum canônico na direção radial, integrado no espaço dos momenta e tal que o teorema da divergência fora utilizado para eliminar as derivadas com relação aos momenta (veja [199] para mais detalhes). Note também que para um sistema estacionário temos que  $\langle \vec{v} \rangle = \vec{0}$ , por isso a equação de Jeans está escrita com relação às dispersões de velocidades em coordenadas esféricas  $\sigma_{ij}^2 = \sigma_{(i)}^2 \delta_{ij}$  ( $\sigma_{(i)}^2 = \sigma_r^2, \sigma_\theta^2$  ou  $\sigma_\phi^2$ ), já que de (123) temos  $\langle v_i^2 \rangle = \sigma_{(i)}^2$  [199, 205].

A relação (125) é justamente o que conecta a teoria com as observações de dinâmica estelar de galáxias *early-type*, na próxima seção veremos mais sobre isso. O parâmetro  $\beta$  é o que faz com que a equação de Jeans não seja fechada [199], chamado de parâmetro de anisotropia e definido como  $\beta = 1 - \sigma_t^2/\sigma_r^2$ , este coeficiente quantifica a diferença entre as dispersões de velocidades tangencial e radial. Por exemplo, se  $\beta = 0$  temos um sistema isotrópico, se  $\beta = 1$  temos órbitas perfeitamente radiais já que  $\sigma_\theta = \sigma_\phi = 0$  e se  $\beta = -\infty$  temos órbitas circulares já que  $\sigma_r = 0$  [199]. Note que  $\sigma_\theta = \sigma_\phi = \sigma_t$  na simetria

esférica [199]. Este parâmetro traz diversos problemas para esse tipo de análise, já que não pode ser medido de forma direta (veja mais detalhes em [199, 205, 206]). Assim, esse é um dos motivos para o considerarmos como sendo constante [100], o que é razoável assumir de acordo com as análises de [198, 206]. Além disso, como assumimos uma relação espacialmente constante entre a densidade numérica estelar e a densidade de luminosidade [101], tomaremos agora  $\nu(r)$  como a densidade de luminosidade das galáxias da amostra, tal que escolhemos  $\nu(r)$  como sendo uma lei de potência [100]:

$$\nu(r) = \nu_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-\delta}. \quad (126)$$

Portanto, com a equação (125) construída, só nos resta agora uma forma de relacionar a massa gravitacional com o modelo de lenteamento do capítulo anterior. Naturalmente, para descrever a dinâmica das estrelas de uma galáxia-lente, temos a equação de Poisson:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho_{grav.}, \quad (127)$$

que quando combinada com o potencial (115) nos leva a seguinte densidade de matéria gravitacional:

$$\rho_{grav.} = G_N [1 + \gamma_1(3 - \alpha)(2 - \alpha)] \rho_0 r_0^\alpha r^{-\alpha} / G. \quad (128)$$

Como feito em (60), ao integrarmos essa expressão ao longo de todo o eixo  $z$ , levando em consideração que  $r^2 = \xi^2 + z^2$ , obtém-se a densidade projetada. A massa gravitacional projetada [130, 133] dentro do raio de Einstein  $\xi_E$  resulta então da integração da densidade projetada sobre um círculo de raio  $\xi_E$  no Plano das Lentes (como feito em (92)). Esta quantidade é então dada por:

$$M_{grav.,E} = G_N [1 + \gamma_1(3 - \alpha)(2 - \alpha)] M_E / G, \quad (129)$$

tal que  $M_E = M(\xi_E)$  em (119). Por fim, usando (129) na relação (120) é fácil encontrar a relação desejada que combina dinâmica com a informação de lenteamento, dada por:

$$\frac{GM_{grav.,E}}{\xi_E} = \frac{2}{1 + \eta} \frac{c^2}{4} \frac{D_{OS}}{D_{LS}} \theta_E, \quad (130)$$

aonde o parâmetro de *slip*  $\eta = \Psi/\Phi$  deste caso é:

$$\eta = \frac{1 + (3 - \alpha)[\gamma_2 + \gamma_3(2 - \alpha)]}{1 + \gamma_1(3 - \alpha)(2 - \alpha)}. \quad (131)$$

Por conseguinte, utilizando-se (47), (113) e (126), obtém-se que a solução de (125) é dada

por:

$$\sigma_r^2 = \left[ \frac{GM_{grav.,E}}{\xi_E} \right] \frac{2}{\sqrt{\pi}(\bar{\zeta} - 2\beta)\lambda(\alpha)} \left( \frac{r}{\xi_E} \right)^{2-\alpha}, \quad (132)$$

tal que  $\bar{\zeta} = \delta + \alpha - 2$  e aonde (130) faz a conexão com os dados de lenteamento, permitindo a sondagem do *slip*.

## 4.2 Efeitos Observacionais e Modelo Final

Para descrever adequadamente as dispersões de velocidades medidas a partir dos espectros tomados pelos grandes telescópios terrestres é também necessário considerar os efeitos observacionais. A medida de dispersão de velocidades de uma galáxia se baseia no alargamento das linhas de absorção do espectro destes objetos. Assim, é essencial primeiro integrar (132) ao longo do eixo da linha de visada e ponderá-lo pela densidade de luminosidade (126), de modo que [100]:

$$\sigma_{\parallel}^2 = \frac{1}{I(\xi)} \int_{-\infty}^{\infty} \nu(r) \left( 1 - \beta \frac{\xi^2}{r^2} \right) \sigma_r^2(r) dz, \quad (133)$$

aonde  $I(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \nu(r) dz$ . Desta forma, (133) corresponde à projeção da dispersão de velocidades que é de fato observada. Em seguida, precisamos também considerar os efeitos da abertura  $\theta_{ap}$  do espectrômetro e do *seeing* astronômico medido  $\sigma_{atm}$  [116, 100]. O *seeing* é essencialmente a variação espacial e temporal do índice de refração entre o telescópio e o objeto observado. Neste trabalho, no entanto, consideramos a abordagem utilizada em [113, 102, 103], aonde metade do raio angular efetivo de uma galáxia lente, isto é,  $\theta_{eff}/2$ , é usada no lugar de  $\theta_{ap}$  (no próximo capítulo explicamos melhor esta escolha). Esses efeitos são implementados através de [100]:

$$\langle \sigma_{\parallel,*}^2 \rangle = \frac{\int_0^{\infty} \omega(\xi) I(\xi) \sigma_{\parallel}^2(\xi) \xi d\xi}{\int_0^{\infty} \omega(\xi) I(\xi) \xi d\xi}, \quad (134)$$

aonde a função de ponderação de abertura efetiva é dada por  $\omega(\xi) \approx e^{-\xi^2/2D_{OL}^2\tilde{\sigma}_{atm}^2}$ , com  $\tilde{\sigma}_{atm}^2 \approx \sigma_{atm}^2 [1 + (1/4)(\theta_{eff}/2\sigma_{atm})^2 + (1/40)(\theta_{eff}/2\sigma_{atm})^4]$  [100]. Note que  $\omega(\xi)$  é a convolução de uma PSF (Point Spread Function) gaussiana, para o seeing, com uma abertura de fibra circular. Neste caso, contudo, podemos aproximar essa função por uma gaussiana (para mais detalhes veja [100]).

Portanto, considerando a relação entre a massa gravitacional e o raio angular de Einstein em (130), a expressão (134) leva a:

$$\langle \sigma_{\parallel,*}^2 \rangle = \left[ \frac{2}{1+\eta} \frac{c^2}{4} \frac{D_{OS}}{D_{LS}} \theta_E \right] \frac{2}{\sqrt{\pi}(\bar{\zeta} - 2\beta)} \left( \frac{\sqrt{2}\tilde{\sigma}_{atm}}{\theta_E} \right)^{2-\alpha} \frac{\lambda(\bar{\zeta}) - \beta\lambda(\bar{\zeta} + 2)}{\lambda(\alpha)\lambda(\delta)} \frac{\Gamma\left(\frac{3-\bar{\zeta}}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-\delta}{2}\right)}, \quad (135)$$

em que  $\lambda(x) = \Gamma(\frac{x-1}{2})/\Gamma(\frac{x}{2})$ . O modelo (135) relaciona então a dispersão de velocidades observada com os coeficientes EFTDE  $\alpha_H$  e  $\beta_1$  via (52), (53) e (54) no parâmetro de *slip* (131). Se, no entanto, as soluções em (55) forem usadas, a única mudança será no parâmetro de *slip*, que neste caso é dado por:

$$\eta_s = 1 + \alpha_H, \quad (136)$$

que, ao contrário de (131), não depende do expoente da lei de potência da densidade de matéria da galáxia. Além disso, devido à aproximação usada para  $\omega(\xi)$ , o modelo (135) é válido enquanto  $\theta_{eff}/2\sigma_{atm} \lesssim 1.5$  [100], aonde o raio angular efetivo é o raio de meia-luz da lente (*half-light radius*) [113]. Note que o modelo (135) no caso das duas soluções DHOST Ia é um resultado original deste trabalho, já no caso particular de beyond-Horndeski, este tipo de modelo foi obtido anteriormente em [207], mas sem uma conexão direta com os parâmetros de energia escura.

## 5 AMOSTRA COMBINADA LASTBERU

*"Ó telescópio, que sabe muito, mais precioso do que qualquer cetro."*

*Johannes Kepler*

Conforme mencionado brevemente na Introdução, grande parte dos dados considerados neste trabalho são provenientes do *Last Stand Before Rubin* (LaStBeRu) [116], uma compilação de 31.569 sistemas candidatos a lentes gravitacionais fortes encontrados na literatura e cujos dados foram cruzados e incrementados com os de múltiplos levantamentos fotométricos e espectroscópicos (veja [116] para maiores detalhes). Em particular, utilizamos o conjunto de dados LASTBERU\_COSMO\_GROUND, que possui 206 sistemas. Esta subamostra contém apenas galáxias-lente *early-type* isoladas, cujas imagens obtidas por telescópios terrestres de campo amplo (e.g. DES, HSC, KiDS, CFHTLenS, RCSLenS e CS82)<sup>16</sup> foram inspecionadas visualmente para a confirmação de sinais claros característicos do lenteamento gravitacional forte, como a presença de arcos e anéis (veja, por exemplo, os sistemas na Figura 2). Além desses, consideramos também 74 sistemas com dados extraídos de [110, 113]<sup>17</sup>, formando então uma amostra combinada de 280 sistemas de lenteamento galáxia-galáxia<sup>18</sup>. Na Figura 3 podemos ver a interseção entre as três subamostras, é possível ver que 50 sistemas são compartilhados entre os três conjuntos e que 103 são exclusivamente pertencentes ao LASTBERU\_COSMO\_GROUND.

Todos os sistemas da amostra combinada possuem por construção medidas de dispersão de velocidades  $\sigma_{SDSS}$  obtidas a partir de dados espectroscópicos do *Sloan Digital Sky Survey* (SDSS), também dispõem de dados do raio angular de Einstein  $\theta_E$ , obtidos via modelagem das imagens lenteadas de cada sistema [116], e redshifts da lente ( $z_l$ ) e da fonte ( $z_s$ ) [116]. Além disso, cada imagem tem seu *seeing* observacional  $\sigma_{atm}$  dos dados espectroscópicos determinado a partir de dados do SDSS [116]. O mesmo vale para  $\theta_{eff}$ , que é escolhido como o raio de Petrosian, pois é obtido de forma mais consistente a partir dos dados [116].

Com relação às medições de dispersão de velocidades, estas medidas são determinadas apenas pela quantidade de luz da galáxia-lente captada pela fibra espectroscópica,

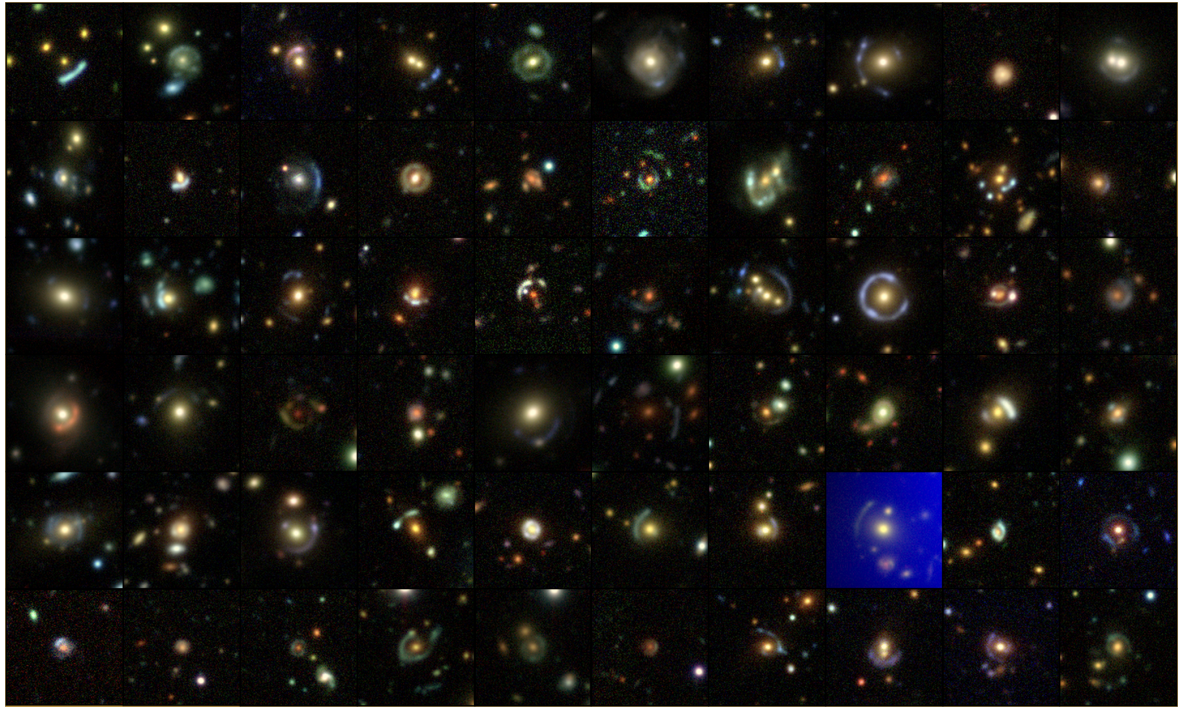
---

<sup>16</sup> Veja a subseção D.5.

<sup>17</sup> Alguns destes sistemas não estão presentes na subamostra LASTBERU\_COSMO\_GROUND devido à ausência de sinais claros de lenteamento nas imagens disponíveis obtidas em solo [116], contudo, incluem ao invés imagens de alta resolução feitas pelo Telescópio Espacial Hubble (HST). Veja mais detalhes em [116].

<sup>18</sup> Note que o LaStBeRu é uma compilação de dados de lenteamento forte para ciência imediata mas também é uma preparação para a enorme quantidade de dados que virá do LSST Rubin, por isso o foco em *surveys* terrestres [116].

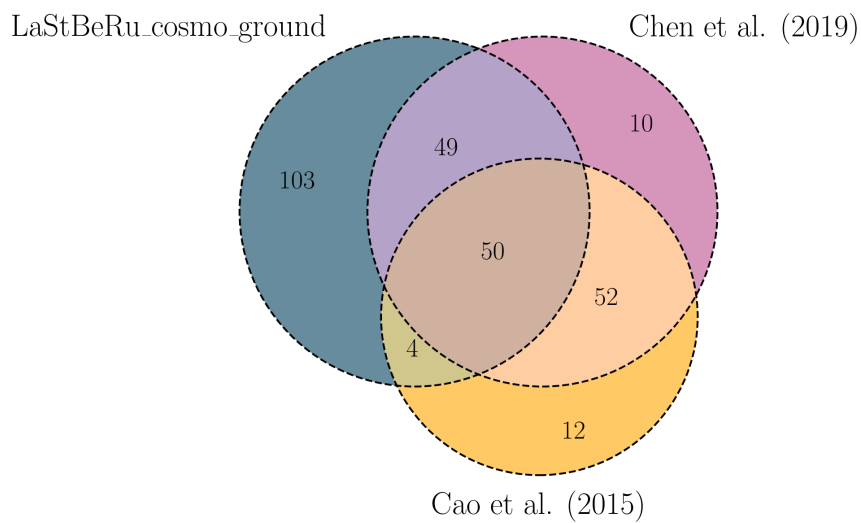
Figura 2 - Mosaico de *cutouts* de sistemas de lenteamento forte do LaStBeRu



Legenda: Exemplos de sistemas presentes no LaStBeRu. Note que as lentes são galáxias *early-type*, por isso são mais avermelhadas/amareladas, já que possuem estrelas mais velhas. Já as imagens lenteadas, os arcs e anéis azulados, são em sua maioria galáxias espirais. A maioria destas imagens foram obtidas pelo *Hyper Suprime-Cam* (HSC), em bandas fotométricas individuais R, G e B (vermelho, verde e azul).

Fonte: Produzido pelo primeiro autor de [116] via o software *Trilogy*.

Figura 3 - Diagrama de Venn das subamostras de sistemas de lenteamento gravitacional forte.



Legenda: Diagrama de Venn comparando as subamostras LASTBERU\_COSMO\_GROUND, de [110] e de [113]. No total, a amostra combinada contém 280 sistemas únicos. Para mais detalhes veja [116].

Fonte: Produzido pelo primeiro autor de [116].

como resultado, existe um viés devido ao tamanho fixo da abertura das fibras ópticas do espectrógrafo do SDSS, uma vez que cada galáxia tem um tamanho angular distinto quando visto da Terra [116]. Para corrigir esse problema, utiliza-se ao invés o tamanho efetivo da abertura,  $\theta_{eff}/2$ , pois seu valor típico é próximo ao do raio angular de Einstein [113]. Juntamente com o efeito de *seeing*, isso já está implementado no modelo (135). Como consequência dessa consideração, os dados  $\sigma_{SDSS}$  precisam ser normalizados para os novos tamanhos de abertura física de acordo com [116]:

$$\sigma_0 \equiv \sigma_{SDSS} [\theta_{eff} / (2\theta_{ap})]^{\bar{\eta}}, \quad (137)$$

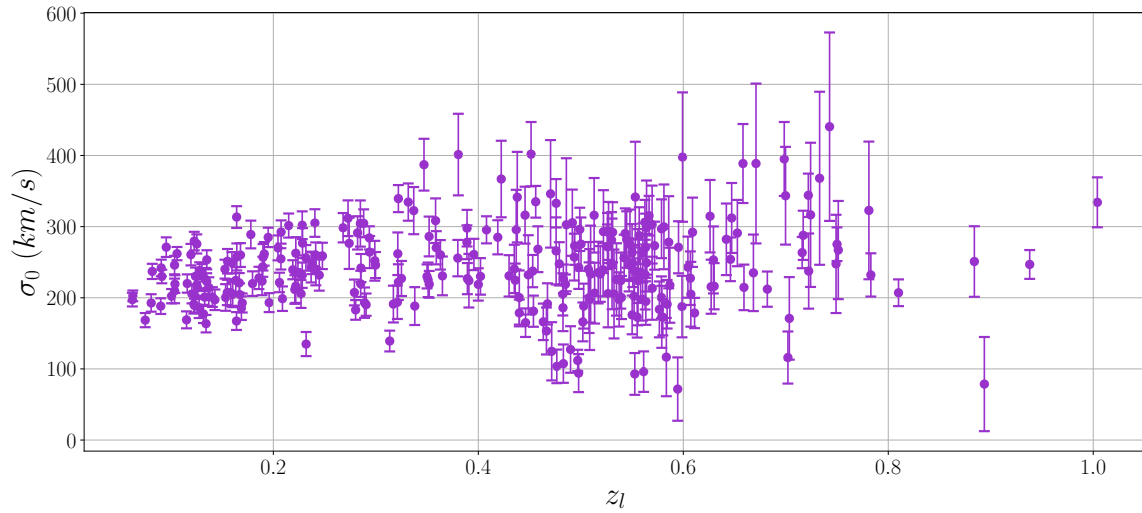
em que o raio da fibra do SDSS é  $\theta_{ap} = 1.5''$  e o expoente é dado por  $\bar{\eta} = -0.066 \pm 0.033$  [208]. Já as incertezas correspondentes são obtidas propagando-se os erros:

$$\delta\sigma_0^2 = \sigma_0^2 \left\{ \frac{\delta\sigma_{SDSS}^2}{\sigma_{SDSS}^2} + 0.03^2 + \left[ \ln \left( \frac{\theta_{eff}}{2\theta_{ap}} \right) \delta\bar{\eta} \right]^2 \right\}, \quad (138)$$

em que a parte de 3% da incerteza modela os efeitos das distribuições de matéria ao longo da linha de visada [209].

No que concerne aos dados em si, no gráfico da Figura 4 são mostradas as dispersões de velocidades normalizadas, com suas respectivas barras de erro, com relação aos redshifts das lentes, que variam de  $z_l = 0.062$  a  $1.004$ . Note que a maioria dos sistemas possui  $200 \text{ km/s} \leq \sigma_0 \leq 300 \text{ km/s}$ , indicando que a maioria das lentes consideradas aqui são galáxias massivas mas na escala intermediária destes objetos [101]. Quanto às fontes, como podemos ver no primeiro gráfico da Figura 5, seus redshifts variam de  $z_s = 0.196$  a  $z_s = 3.595$ . Além disso, no gráfico da segunda coluna da Figura 5 é possível observar que o valor típico do raio de Einstein para cada sistema da amostra combinada é em torno de  $\theta_E = 1''$ . Consequentemente, considerando um fundo plano  $\Lambda$ CDM, é possível obter que as escalas físicas analisadas neste trabalho estão no intervalo  $\xi_E \in (0.88, 32.12) \text{ kpc}$ , tal que a média dos raios de Einstein dos sistemas é de cerca de  $6 \text{ kpc}$ . Logo, estas são as escalas em que estamos sondando o vazamento de energia escura DHOST Ia.

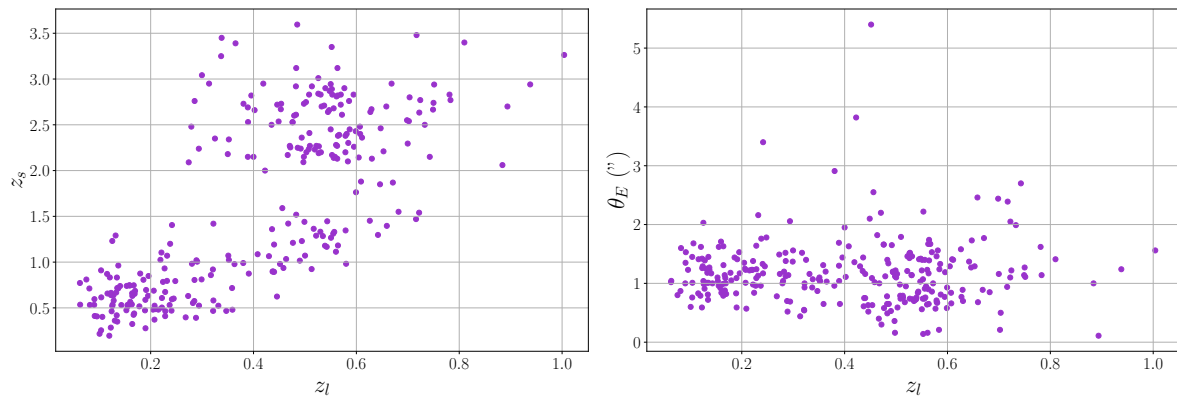
Figura 4 - Dados de  $\sigma_0 + \delta\sigma_0$  por  $z_l$  dos 280 sistemas da amostra combinada.



Legenda: As dispersões de velocidades medidas e normalizadas plotadas com relação ao redshift de cada galáxia-lente da amostra combinada [116].

Fonte: Feito pelo autor deste trabalho utilizando-se o *Python*.

Figura 5 - Dados de  $z_s$  e  $\theta_E$  por  $z_l$  dos 280 sistemas da amostra combinada.



Legenda: Gráficos dos redshifts das fontes e dos raios angulares de Einstein plotados com relação ao redshift de cada galáxia-lente da amostra combinada [116].

Fonte: Feito pelo autor deste trabalho utilizando-se o *Python*.

## 6 ANÁLISES BAYESIANAS E RESULTADOS

*"A teoria das probabilidades é, no fundo, apenas o bom senso reduzido ao cálculo; ela permite avaliar com exatidão aquilo que os espíritos justos percebem por uma espécie de instinto, sem que muitas vezes consigam se dar conta disso."*

*Pierre-Simon Laplace*

Neste capítulo, utilizamos uma abordagem bayesiana para obtermos as distribuições de probabilidade posteriores dos parâmetros efetivos de energia escura das teorias DHOST Ia na escala de kiloparsecs. Utilizamos os modelos construídos nos capítulos 3 e 4 para descrever os 280 sistemas lente-fonte da amostra combinada LaStBeRu (capítulo 5). Consideramos as duas soluções das DHOST Ia comentadas na subseção 2.1.2, assim como o subcaso associado às teorias GLPV. Avaliamos também os resultados em diferentes fundos cosmológicos planos. Já no final deste capítulo, comparamos nossos resultados com diversas outras estimativas obtidas a partir da literatura, com diferentes observáveis e escalas consideradas.

### 6.1 Análise Estatística para a Primeira Solução

Para obtermos, nas escalas de interesse, uma restrição nos valores dos parâmetros EFTDE sendo investigados nesta dissertação, é necessário compararmos o modelo de dispersão de velocidades (135) com os dados observacionais normalizados  $\sigma_0$  de cada galáxia-lente da amostra combinada LaStBeRu. Dessa forma, é essencial que cada sistema galáxia-galáxia possua dados sobre alguns dos parâmetros do modelo de acordo com:

$$\sqrt{\langle \sigma_{\parallel,*}^2 \rangle} \equiv \bar{\sigma}_*(\theta_E, z_l, z_s, \theta_{eff}, \sigma_{atm}, \alpha, \beta, \delta; \alpha_H, \beta_1), \quad (139)$$

tal que os redshifts da lente e da fonte são utilizados para calcular as distâncias de diâmetro angular que aparecem em (135). No entanto, para os parâmetros de massa, anisotropia da dispersão de velocidades e de luminosidade, isto é,  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\delta$ , não há ainda dados individuais na amostra combinada, sendo necessário, portanto, considerarmos *priors* globais no modelo estatístico final a fim de fixar esses parâmetros de *nuisance* (veja [100]). Já os parâmetros restantes em (139), como vimos no capítulo 5, todos os 280 sistemas possuem dados destas grandezas, restando somente  $\alpha_H$  e  $\beta_1$  a serem determinados via uma distribuição de probabilidade *a posteriori* apropriada.

Nas análises estatísticas, portanto, é considerada uma abordagem bayesiana [210] na qual a distribuição de densidade de probabilidade *posterior* de  $\alpha_H$  e  $\beta_1$ , dado as dispersões de velocidades normalizadas  $\{\sigma_{0,i}\}$  de todas as 280 galáxias-lente *early-type*, é definida a partir de:

$$P(\alpha_H, \beta_1 | \{\sigma_{0,i}\}) \propto \int \prod_{i=1}^{280} P(\sigma_{0,i} | \bar{\sigma}_*) P(\alpha_H) P(\beta_1) P(\alpha) P(\beta) P(\delta) d\alpha d\beta d\delta, \quad (140)$$

aonde marginalizamos sobre os parâmetros de estrutura  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\delta$ ; assumindo que  $\alpha_H$  e  $\beta_1$  são constantes no intervalo de redshift das lentes da amostra combinada. Seguindo a abordagem de [100], em (140), a *likelihood* (função de verossimilhança) para um único sistema é escolhida como uma distribuição Gaussiana dada por:

$$P(\sigma_{0,i} | \bar{\sigma}_*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta\sigma_{0,i}^2}} \exp \left[ -\frac{(\sigma_{0,i} - \bar{\sigma}_*)^2}{2\delta\sigma_{0,i}^2} \right], \quad (141)$$

em que a incerteza  $\delta\sigma_{0,i}$  para cada sistema é obtida a partir da fórmula (138). As incertezas estatísticas dos raios de Einstein e dos redshifts não são consideradas nesta abordagem, já que são subdominantes com relação às incertezas das dispersões de velocidades [100]. Note também que não nos referimos à evidência bayesiana em (140), já que na nossa análise esta quantidade funciona somente como uma normalização da *posterior* [210, 100].

A abordagem bayesiana encapsula a essência do empirismo científico junto com a inerente liberdade físico-matemática, e interpretativa, de modelos físicos. Fundamentalmente, ela nos fornece uma regra na qual uma hipótese qualquer se torna mais ou menos confiável a medida que atualizamos essa hipótese *a priori* numa *a posteriori* por meio de novos dados observacionais, isto é,  $P(\text{modelo}|\text{dados}) \propto P(\text{dados}|\text{modelo})P(\text{modelo})$  [210]. É a ideia de um método científico posta em linguagem estatística, levando-se em conta a persistente incerteza clássica entre observador e medidas.

No nosso caso, consideramos razoável distinguir as escalas físicas em que as medidas são feitas. Sendo assim, apesar de existirem estimativas do parâmetro  $\alpha_H$  em diferentes escalas, este trabalho é o único até então a sondar os parâmetros EFTDE nas escalas de kpc, desta forma, escolhemos *priors* uniformes para os parâmetros de energia escura. O parâmetro  $\alpha_H$  pode ter qualquer valor real, mas assume-se que  $\beta_1$  esteja limitado entre  $-10$  e  $10$ . Permitir que  $\beta_1$  tenha qualquer valor gera problemas numéricos na análise final devido à forma de (131), então consideramos que este coeficiente não ultrapassa uma ordem de grandeza, pois não se espera que supere esse limite, uma vez que aparece apenas a nível perturbativo.

Já com relação às *priors* dos parâmetros de *nuisance*, todas são consideradas distribuições Gaussianas com médias e dispersões amplamente utilizadas na literatura (veja

[99, 107, 100, 101]) e que são dadas por:

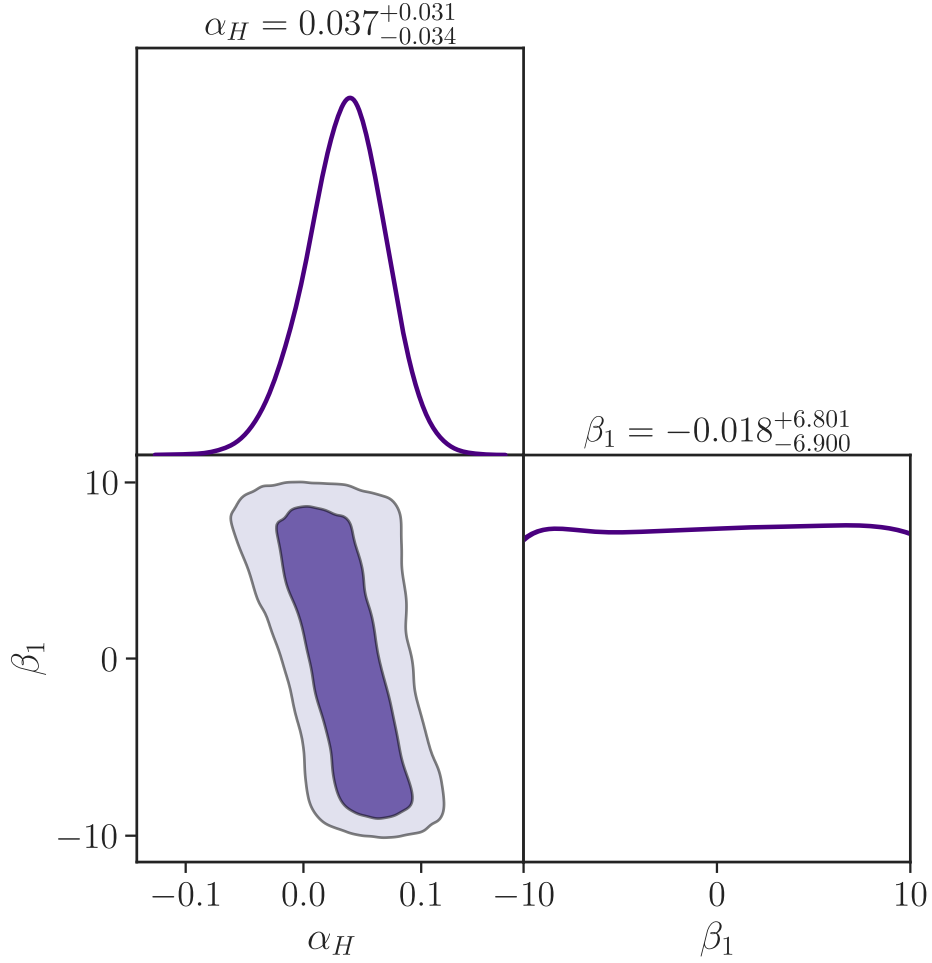
$$\begin{aligned}\bar{\alpha} &= 2.00 \text{ e } \sigma_{\alpha} = 0.08, \\ \bar{\beta} &= 0.18 \text{ e } \sigma_{\beta} = 0.13, \\ \bar{\delta} &= 2.40 \text{ e } \sigma_{\delta} = 0.11.\end{aligned}\tag{142}$$

O valor médio  $\bar{\alpha}$  é consistente com a análise independente de modelo realizada por [198], aonde utilizam a amostra do Sloan Lens ACS (SLACS). Quanto à sua dispersão, bem como para  $\bar{\beta}$  e  $\sigma_{\beta}$ , são considerados os valores obtidos por [211] através de uma amostra de galáxias elípticas não tão distantes de nós. Já para o parâmetro de luminosidade, assume-se a média e a dispersão obtidas por [100] a partir de parte do conjunto de dados do SLACS. Note que o valor de  $\bar{\alpha}$  também é consistente com [201, 202, 203, 204], que envolvem também simulações de N-corpos. Em particular, baseado nas referências [203, 204], é razoável considerar  $\alpha$  constante quando  $z_l \lesssim 1$  [205].

Para construir a amostragem associada à distribuição de probabilidade *posterior* (140), utilizamos o pacote *emcee* [212] de MCMC (Markov Chain Monte Carlo) em *Python* para gerar as cadeias de Markov. Para as distâncias de diâmetro angular, consideramos principalmente um fundo cosmológico  $\Lambda$ CDM plano a partir dos dados do *Planck* 2018 [115] via o pacote *Astropy* [213]. As posteriores marginalizadas resultantes para  $\alpha_H$  e  $\beta_1$  são apresentadas no *corner plot* da Figura 6, juntamente com o gráfico 2D da distribuição conjunta dos parâmetros EFTDE, que mostra uma anti-correlação entre estes dois coeficientes, dado as *priors* utilizadas. Como se pode observar, a distribuição para o parâmetro de desvio de Horndeski é aproximadamente Gaussiana com uma mediana e dispersões de  $\alpha_H = 0,037^{+0,031}_{-0,034}$ , enquanto para  $\beta_1$  obtemos de volta uma distribuição de densidade de probabilidade uniforme. Note que um *kernel density estimator* (KDE) foi utilizado para obter as distribuições da Figura 6 a partir das amostragens geradas por meio do *emcee*. É válido mencionar também que um período de *burn-in* apropriado para a convergência das correntes de Markov foi considerado, assim como um processo de *thinning* adequado para evitar problemas de autocorrelação nas amostras.

É importante notar, na extensão do trabalho feito aqui, que não há por ora um limite teórico ou observacional em  $\beta_1$  somente. Há limites observacionais conjuntos em  $\alpha_H$  e  $\beta_1$ , mas em escalas da astrofísica estelar como em [63]. No entanto, como mencionado, optamos por não utilizar esses limites como *priors* na nossa análise, pois estamos diferenciando as escalas de distância dos observáveis utilizados. O intervalo da *flat prior* de  $\beta_1$  é apenas uma hipótese de trabalho, já que para um intervalo infinito ou que não contenha o zero, as cadeias de Markov não convergem. Por essa razão, efetuamos uma análise empírica das consequências de se variar o intervalo da *prior* em  $\beta_1$  nas *posteriores* de  $\alpha_H$ . Consideramos, intervalos maiores e também assimétricos:  $[-400, 150]$ ,  $[-10, 10]$ ,

Figura 6 - Distribuição posterior para a primeira solução DHOST Ia



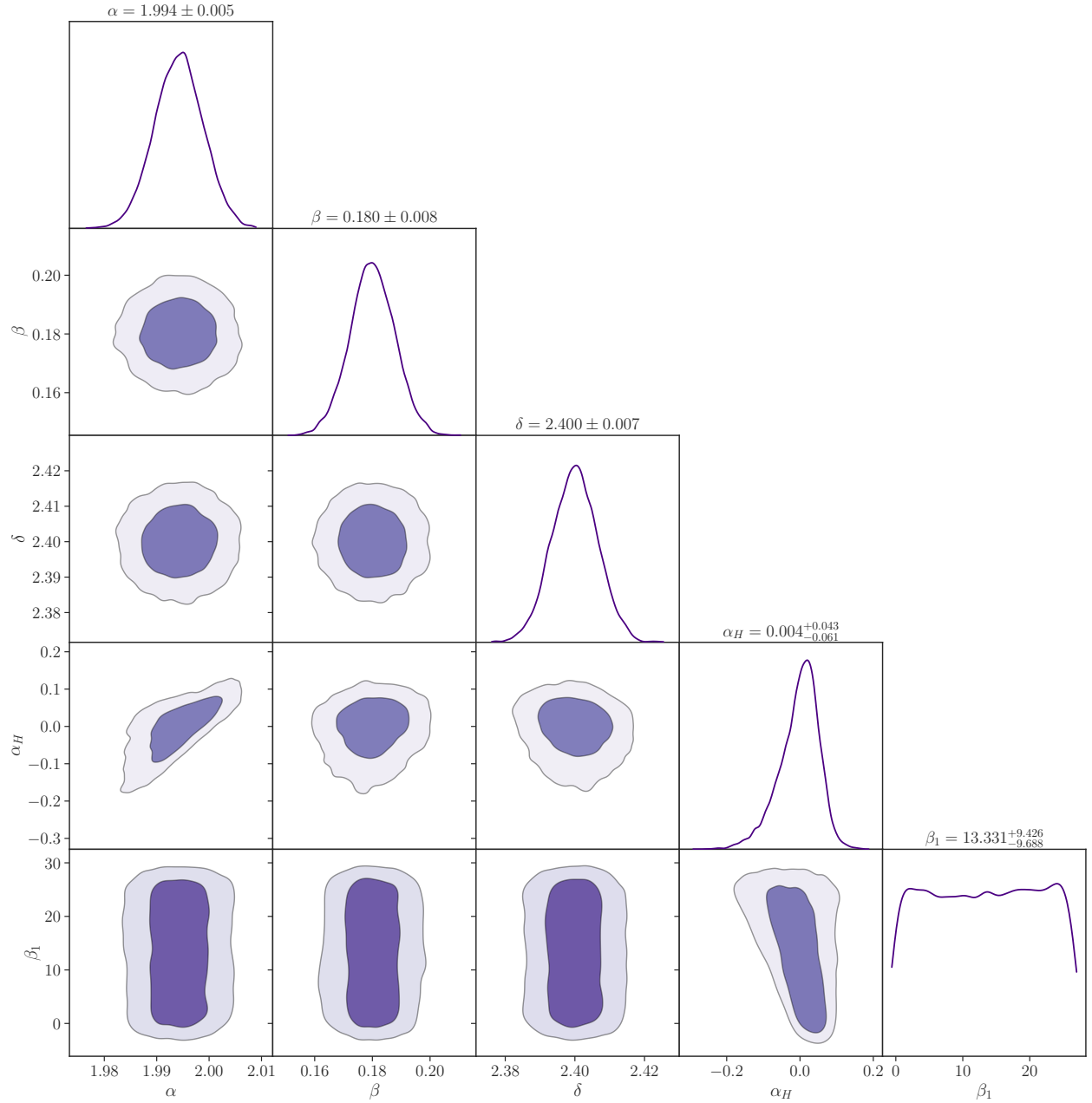
Legenda: Distribuições de densidade de probabilidade *posterior* marginalizadas dos parâmetros  $\alpha_H$  e  $\beta_1$  obtidas por meio da combinação de informações dinâmicas e de lenteamento dos 280 sistemas galáxia-galáxia da amostra combinada LaStBeRu. O gráfico inferior à esquerda mostra as regiões de credibilidade de 68,3% e 95,5% da *posterior* conjunta.

Fonte: Feito pelo autor deste trabalho utilizando-se a biblioteca *emcee* do *Python*.

$[-0.6, 27]$ ,  $[-1, 1]$ ,  $[-200, 200]$ ,  $[-100, 100]$ ,  $[0, 10]$ ,  $[-75, 1]$ . Veja, como exemplo, os gráficos 7, 8 e 9. Descobrimos que intervalos assimétricos e relativamente grandes (maiores que 10) causam uma assimetria na distribuição de  $\alpha_H$  (veja Figura 7). O que também se reflete nas distribuições conjuntas de  $\alpha_H$  com  $\beta_1$ , e também com  $\alpha$ . Note que há um estreitamento das distribuições nos valores  $\alpha = 2$  e  $\beta_1 = 0$  como no caso da Figura 8, indicando um favorecimento desses valores pela amostragem. Essencialmente, quanto maior o intervalo da *flat prior* de  $\beta_1$ , maior é a dispersão em  $\alpha_H$ . Mas no geral, a mediana em  $\alpha_H$  se mantém na mesma escala de ordem de grandeza:  $0.01 \sim 0.1$ . Perceba então que medidas em  $\alpha_H$  são bastante dependentes das *priors* em  $\beta_1$ .

Usando, ao invés, fundos  $w$ CDM e  $w_0 w_a$ CDM planos via os valores de melhor ajuste da análise de supernovas do DES de 5 anos [22], encontramos apenas uma leve

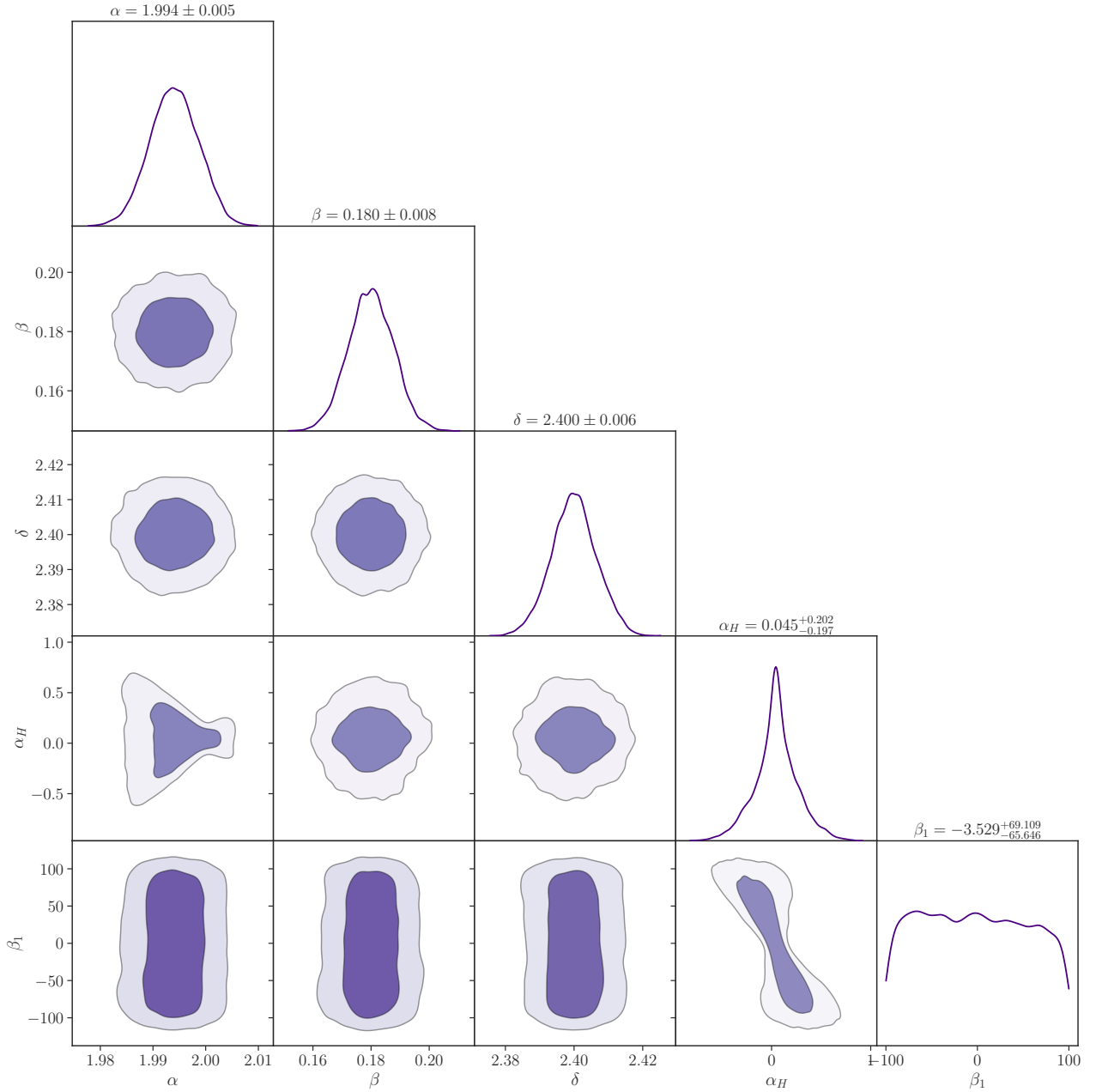
Figura 7 - *Corner plot* da primeira solução DHOST Ia com *flat prior*  $[-0.6, 27]$  em  $\beta_1$



Legenda: Distribuições de densidade de probabilidade *posterior* dos parâmetros  $\alpha_H$ ,  $\beta_1$ ,  $\alpha$ ,  $\delta$  e  $\beta$ . Note que os parâmetros  $\alpha$ ,  $\delta$  e  $\beta$  são de *nuisance*, não podendo ser interpretados no sentido bayesiano de atualização de credibilidade devido às *priors* fiduciais utilizadas. *Flat prior* com intervalo  $[-0.6, 27]$  em  $\beta_1$ .

Fonte: Feito pelo autor deste trabalho utilizando-se a biblioteca *emcee* do *Python*.

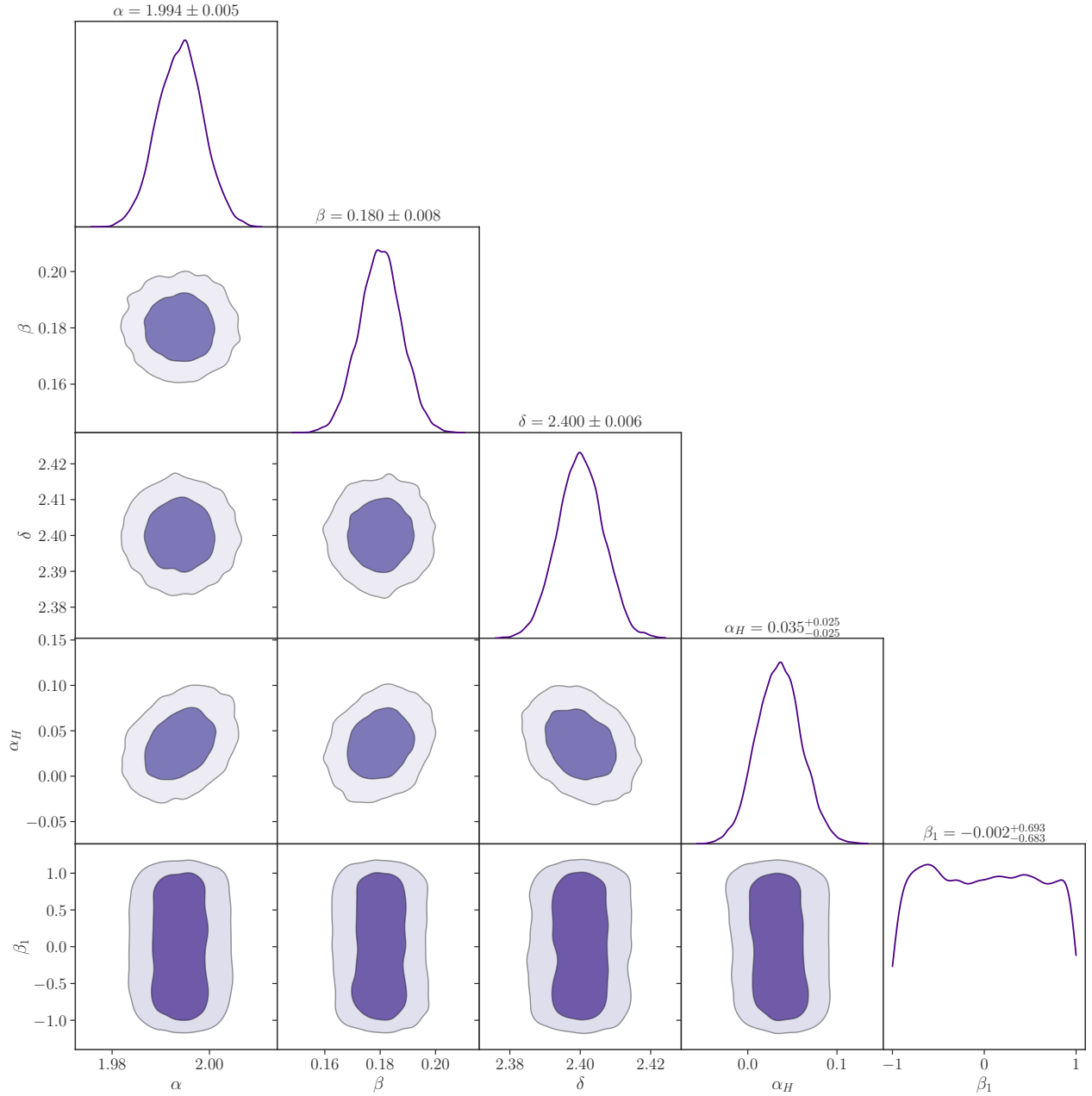
Figura 8 - *Corner plot* da primeira solução DHOST Ia com *flat prior*  $[-100, 100]$  em  $\beta_1$



Legenda: Distribuições de densidade de probabilidade *posterior* dos parâmetros  $\alpha_H$ ,  $\beta_1$ ,  $\alpha$ ,  $\delta$  e  $\beta$ . Note que os parâmetros  $\alpha$ ,  $\delta$  e  $\beta$  são de *nuisance*, não podendo ser interpretados no sentido bayesiano de atualização de credibilidade devido às *priors* fiduciais utilizadas. *Flat prior* com intervalo  $[-100, 100]$  em  $\beta_1$ .

Fonte: Feito pelo autor deste trabalho utilizando-se a biblioteca *emcee* do *Python*.

Figura 9 - *Corner plot* da primeira solução DHOST Ia com *flat prior*  $[-1, 1]$  em  $\beta_1$



Legenda: Distribuições de densidade de probabilidade *posterior* dos parâmetros  $\alpha_H$ ,  $\beta_1$ ,  $\alpha$ ,  $\delta$  e  $\beta$ . Note que os parâmetros  $\alpha$ ,  $\delta$  e  $\beta$  são de *nuisance*, não podendo ser interpretados no sentido bayesiano de atualização de credibilidade devido às *priors* fiduciais utilizadas. *Flat prior* com intervalo  $[-1, 1]$  em  $\beta_1$ .

Fonte: Feito pelo autor deste trabalho utilizando-se a biblioteca *emcee* do *Python*.

diferença nos valores das medianas das posteriores de  $\alpha_H$ , que são compatíveis a dois sigma com o valor apresentado na Figura 6. No caso em que  $\Omega_m = 0.495$ ,  $w_0 = -0.36$  e  $w_a = -8.8$ , obtivemos que  $\alpha_H = 0,056^{+0,031}_{-0,034}$ , já no caso  $\Omega_m = 0.264$ ,  $w_0 = -0.8$  e  $w_a = 0$ , que  $\alpha_H = 0,039^{+0,031}_{-0,034}$ . Esses resultados são esperados devido à razão de distâncias de diâmetro angular presente em (130), o que leva a (135) possuir uma dependência fraca nessas quantidades. Isso também é consistente com [102], aonde é mostrado que usar um método independente de modelo para as distâncias cosmológicas tem pouco impacto na inferência do parâmetro pós-newtoniano  $\gamma_{PPN}$  em comparação com um fundo  $\Lambda$ CDM.

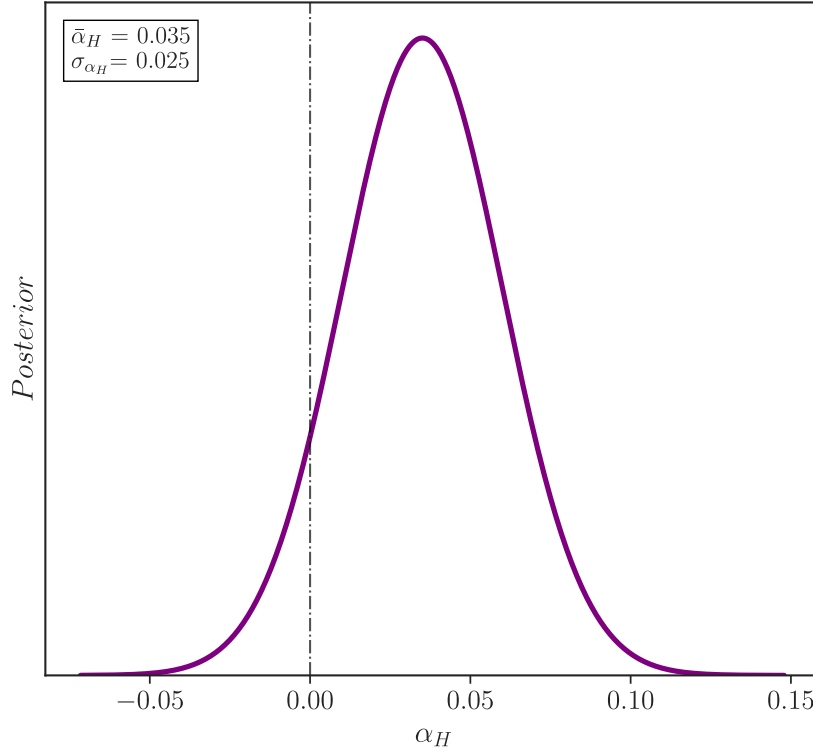
Além disso, conforme mencionado na subseção 2.1.2, ao definirmos  $\beta_1 = 0$  no modelo (135), é possível investigarmos apenas a subclasse de teorias beyond-Horndeski. Nesse caso, os fatores  $\gamma_i$  se reduzem para:  $\gamma_1 = -\alpha_H/2$ ,  $\gamma_2 = \alpha_H$  e  $\gamma_3 = 0$ . Ajustando uma Gaussiana ao resultado da amostragem da *posterior* deste caso, obtém-se a distribuição mostrada na Figura 10. Nesse caso, há uma diminuição na dispersão da distribuição quando comparada com a posterior marginalizada de  $\alpha_H$  da Figura 6, uma vez que agora temos  $\alpha_H = 0,035 \pm 0,025$  a um sigma. Similar ao cenário completo DHOST Ia, considerar outros fundos cosmológicos nesta análise também produz resultados compatíveis a dois sigma. No caso em que  $\Omega_m = 0.495$ ,  $w_0 = -0.36$  e  $w_a = -8.8$ , obtivemos que  $\alpha_H = 0,054 \pm 0,025$ , já no caso  $\Omega_m = 0.264$ ,  $w_0 = -0.8$  e  $w_a = 0$ , que  $\alpha_H = 0,037 \pm 0,025$ .

## 6.2 Análise Estatística para a Segunda Solução

Quanto ao segundo par de soluções DHOST em (55), embora quase certamente estejam excluídas nas escalas do sistema solar, já que  $\Phi \neq \Psi$  até mesmo fora de distribuições de matéria, este caso é explorado uma vez que este trabalho investiga escalas de kiloparsec. Para os potenciais obtidos de (55), o parâmetro de *slip* é dado pela (136), de modo que a análise bayesiana para este caso leva a uma distribuição semelhante à da Figura 10, mas com uma média ligeiramente diferente para a Gaussiana, pois agora é obtido que  $\alpha_H = 0,036 \pm 0,025$ . Além disso, como esperado, alterar o fundo cosmológico também leva a valores compatíveis a dois sigma com o cenário  $\Lambda$ CDM plano. Por exemplo, no caso em que  $\Omega_m = 0.495$ ,  $w_0 = -0.36$  e  $w_a = -8.8$ , temos que  $\alpha_H = 0,053 \pm 0,025$ , e quando  $\Omega_m = 0.264$ ,  $w_0 = -0.8$  e  $w_a = 0$ , que  $\alpha_H = 0,039 \pm 0,025$ .

Ademais, é essencial observar que o motivo para as três análises estatísticas feitas até agora produzirem resultados semelhantes para a *posterior* de  $\alpha_H$  é a mesma que faz com que  $\beta_1$  devolva uma distribuição uniforme no primeiro caso (Figura 6). Tudo se resume à conspiração bojo-halo, na qual a combinação do halo de matéria escura e da matéria bariônica em galáxias *early-type* leva a um perfil aproximadamente isotérmico [214, 200]. O fato de que a *prior* para  $\alpha$  em (142) está centrada no valor para um perfil isotérmico torna (135) insensível a  $\beta_1$ , já que para esse valor específico, o parâmetro de

Figura 10 - Distribuição posterior para a primeira solução no subcaso GLPV



Legenda: Ajuste Gaussiano da distribuição posterior para o parâmetro de desvio de Horndeski na subclasse de teorias GLPV. A linha vertical tracejada representa o valor compatível com a Relatividade Geral em escalas astrofísicas.

Fonte: Feito pelo autor deste trabalho utilizando-se a biblioteca *emcee* do *Python*.

*slip* (131) se reduz à (136). Portanto, para restringir adequadamente  $\beta_1$  é necessária uma análise de lenteamento com objetos mais massivos, como grupos e aglomerados, de modo que perfis isotérmicos sejam evitados. Outra possibilidade é abandonar a hipótese de matéria escura, similar ao que é feito nas referências [93, 94, 95].

### 6.3 Comparação com a Literatura

Mudando para uma abordagem mais frequentista, os resultados acima podem ser vistos como estimativas do parâmetro de desvio de Horndeski em escalas de kiloparsec para teorias DHOST Ia e a subclasse GLPV, dadas as suposições apresentadas ao longo deste trabalho. Como as distribuições encontradas para  $\alpha_H$  são Gaussianas, ou aproximadamente Gaussianas, temos que os valores das medianas coincidem com os valores que maximizam a *posterior* (MAP), assim, os valores da MAP são as nossas estimativas, juntamente com os respectivos desvios padrões obtidos de cada distribuição. É importante

notar também, que devido à imposição relacionada à velocidade de ondas gravitacionais mencionada na subseção 2.1.2, isto é,  $\alpha_V = \alpha_H$ , esses resultados estão simultaneamente restringindo o parâmetro  $\alpha_V$ . Além disso, como observado em [63], para casos particulares como  $Q = f_{2\phi} = \beta_1 = 0$ , o parâmetro de trançamento  $\alpha_B$  também é restringido, uma vez que de (37) obtém-se que  $\alpha_B = 2\alpha_V$  neste caso.

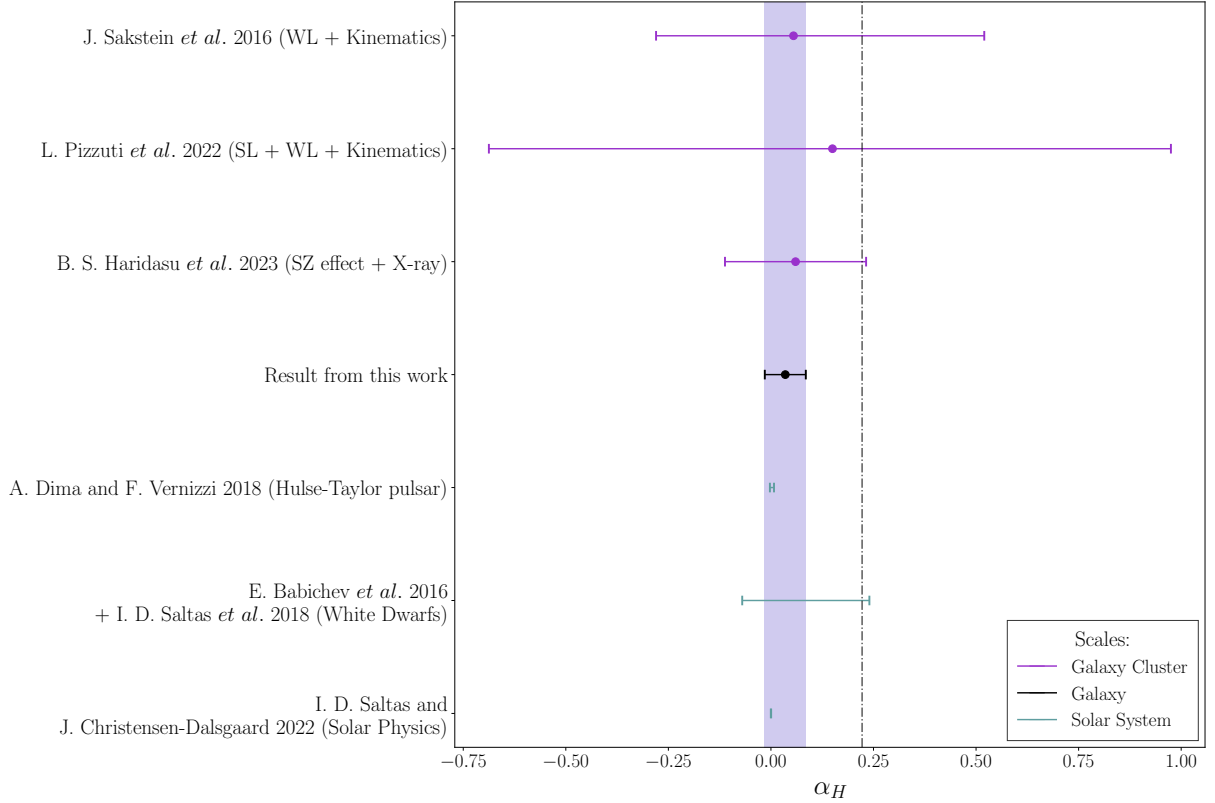
Um passo importante da nossa análise é então comparar as estimativas obtidas de  $\alpha_H$  com os valores existentes na literatura, em escalas similares e distintas. A principal razão para essa comparação é avaliar se há uma dependência de escala no regime de campo fraco e, assim, verificar a compatibilidade com a teoria de Einstein. Por outro lado, esse tipo de análise também é uma forma de comparar a consistência de nossos resultados com o resto da literatura sobre este tópico. Na Figura 11, por exemplo, tal comparação é feita para o caso de beyond-Horndeski apresentado na Figura 10. É possível observar que o resultado desta dissertação para este cenário é compatível em dois sigma com restrições em escalas do sistema solar e também via aglomerados de galáxias. Na escala de lentes por uma única galáxia, pelo nosso conhecimento da literatura atual, a estimativa de  $\alpha_H$  obtida neste trabalho é a única até então.

Conforme mencionado na Introdução, a maioria dos trabalhos apenas investiga os parâmetros efetivos de energia escura de forma indireta, de modo que na Figura 11, alguns dos valores de  $\alpha_H$  considerados são estimativas representativas, já que são resultados indiretos nossos obtidos a partir da literatura. Como exemplo, para o primeiro valor na Figura 11, de cima para baixo, fizemos uma simples propagação de erros da medida de  $\Upsilon_1 = 4\gamma_1$  em [91] para encontrar uma estimativa para  $\alpha_H$ , que verificamos ser compatível com a estimativa obtida via o resultado de [91] para  $\Upsilon_2 = -4\gamma_2/5$ . Para o segundo valor na escala de aglomerados, o mesmo procedimento é realizado via a restrição em  $Y_2 = -4\gamma_2/5$  do aglomerado MACS 1206 de [92]. Quanto às referências [90] e [79], a estimativa é simplesmente obtida das restrições de  $\gamma_1$ . Para os limites restantes, é utilizado o resultado direto de [63] e, para o outro, o limite inferior é derivado da restrição de [78] e o superior de [76].

Na Figura 11 mostramos também uma linha vertical pontilhada que representa o valor de limite superior do parâmetro de desvio de Horndeski para o qual estrelas esfericamente simétricas e estáticas possam existir dentro das teorias GLPV. Esse limite foi obtido em [76] para  $\Upsilon_1$  considerando-se correções relativísticas. Como pode-se observar, o resultado deste trabalho não excede esse limite teórico. Ademais, embora a nossa estimativa a um sigma indique uma gravidade levemente mais forte em escalas de kiloparsec dadas as suposições utilizadas, isto é,  $\alpha_H > 0$  [63], nosso resultado em dois sigma é compatível com a Relatividade Geral.

Já para o caso DHOST completo associado ao *slip* (131), não é possível investigar a compatibilidade com a teoria de Einstein, pois  $\beta_1$  não fora propriamente restringido. Entretanto, para as soluções em (55) isso é uma tarefa simples, já que o *slip* (136) depende

Figura 11 - Comparação entre o resultado de  $\alpha_H$  da primeira solução no caso GLPV com estimativas indiretas obtidas da literatura.



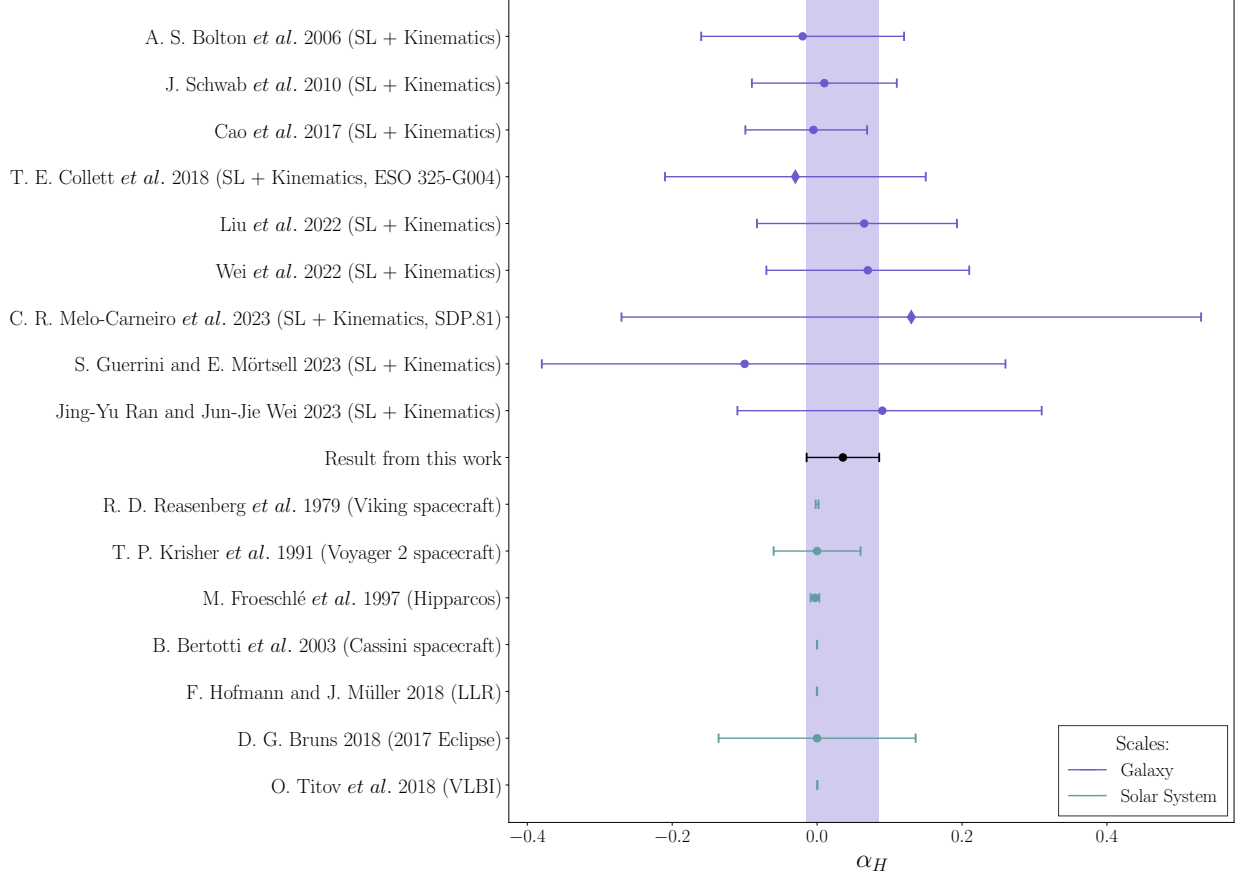
Legenda: Comparação a dois sigma entre a restrição GLPV de  $\alpha_H$  e várias estimativas representativas derivadas de medições indiretas da literatura. Três diferentes escalas físicas são consideradas com base nos observáveis utilizados: roxo para aglomerados de galáxias, preto para o resultado deste trabalho e verde para física estelar. No eixo y são mostradas as referências para cada estimativa indireta junto com os observáveis utilizados. De cima para baixo: [91], [92], [90], [63], [76], [78] e [79]. As siglas WL, SL e SZ referem-se, respectivamente, a lentes fracas, lentes fortes e ao efeito Sunyaev–Zeldovich. A linha pontilhada vertical representa o limite teórico de  $2/9$  para  $\alpha_H$ , com base no resultado de [76].

Fonte: Feito pelo autor deste trabalho utilizando-se o *Python*.

apenas de  $\alpha_H$ . Essa independência do parâmetro de *slip* com relação ao coeficiente  $\alpha$  da distribuição de matéria, junto com a suposição de que  $\alpha_H$  é constante nas escalas investigadas, permite estimativas para esse parâmetro apenas utilizando-se restrições do parâmetro pós-Newtoniano  $\gamma_{PPN}$  já presentes na literatura (veja [215] para a relação entre o *slip* e o parâmetro pós-Newtoniano). Devido a esse fato, na Figura 12 mostramos uma variedade de estimativas de  $\alpha_H$  obtidas através de medições pós-Newtonianas da literatura. A maioria dessas medidas foram feitas por meio do mesmo procedimento deste trabalho. Os valores graficados como losangos foram obtidos em análises mais complexas envolvendo somente um sistema lente-fonte. Adicionamos também diversos testes clássicos da Relatividade Geral para comparação, como o lenteamento de estrelas de fundo pelo Sol

observadas no eclipse de 2017, medidas de *time-delay* via a *Voyager 2* e a sonda Cassini *etc.* Assim, pode-se ver que a estimativa deste caso também é compatível em dois sigma com a Relatividade Geral, sendo a mais precisa entre os resultados mostrados nas escalas de lentes fortes *early-type*. Por fim, note que estes resultados serão em breve submetidos à revista *Physical Review D* [216].

Figura 12 - Comparação entre o resultado de  $\alpha_H$  da segunda solução DHOST Ia com estimativas indiretas obtidas da literatura.



Legenda: Comparação a dois sigma entre a restrição DHOST Ia de  $\alpha_H$  para as soluções com *slip* (136) e várias estimativas indiretas derivadas de medições pós-Newtonianas da literatura. Duas escalas são consideradas: azul para estimativas de lentes fortes galáxia-galáxia e verde para testes da Relatividade Geral no sistema solar. O resultado deste trabalho é mostrado em preto. No eixo y são mostradas as referências para cada estimativa pós-Newtoniana junto com os observáveis utilizados. De cima para baixo: [99], [100], [101], [217], [102], [103], [218], [104], [105], [219], [220], [221], [152], [222], [223] e [224]. A estimativa de [223] foi obtida através do resultado do ângulo de deflexão da lente. O símbolo de diamante refere-se a análises que utilizam apenas uma galáxia-lente. As siglas SL, LLR e VLBI referem-se, respectivamente, a *Strong Lensing*, *Lunar Laser Ranging* e *Very-long-baseline interferometry*. Resultados de escalas de aglomerados de galáxias, como em [225], não são mostrados aqui devido às barras de erro excessivamente grandes.

Fonte: Feito pelo autor deste trabalho utilizando-se o *Python*.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS

*"Ergues em perfeição no horizonte do céu,  
Aton vivo, que deu início à vida. Sempre que  
surges no horizonte a leste, preenches todas  
as terras com sua perfeição. [...] Embora  
longínquo, teus raios estão sobre a Terra;"*  
Akhenaton, *Hino ao Sol*

Por meio da combinação de galáxias-lentes gravitacionais fortes e suas informações dinâmicas, construímos um modelo teórico para sondar o efeito de vazamento de energia escura em escalas de kiloparsec usando dados da amostra combinada LaStBeRu [116]. Composta por 280 sistemas com galáxias-lente elípticas ou S0, esse conjunto de dados permitiu a avaliação do parâmetro de desvio de Horndeski com boa precisão em escalas nas quais ainda não havia sido investigado. O modelo possui considerações observacionais, como o efeito de *seeing* e uma correção de abertura. Os parâmetros EFTDE entram nas análises por meio do parâmetro de *slip*. Ao todo, foram considerados três casos conhecidos: duas soluções distintas para os potenciais métricos de campo fraco da classe quadrática DHOST Ia, uma das quais o *slip* não depende da distribuição de matéria, e outra decorrente da subclasse beyond-Horndeski.

Consideramos que ondas gravitacionais propagam-se à velocidade da luz no vácuo, para o qual os únicos parâmetros EFTDE relevantes no limite quase-estático são  $\alpha_H$  e  $\beta_1$  [63]. Assumindo que esses parâmetros são constantes no intervalo de redshift das lentes da amostra, encontramos que  $\alpha_H = 0,037^{+0,031}_{-0,034}$  para o caso DHOST com *slip* dependente da matéria, para o segundo cenário DHOST obteve-se  $\alpha_H = 0,036 \pm 0,025$  e para o caso de beyond-Horndeski que  $\alpha_H = 0,035 \pm 0,025$ . A razão para esses três resultados serem semelhantes é a mesma que causou uma distribuição *posterior* uniforme para  $\beta_1$ , isto é, a *prior* global para o parâmetro  $\alpha$  da lei de potência da densidade de matéria newtoniana das lentes está centrado em um perfil isotérmico, o que conspira para que o *slip* desses três casos coincidam no mesmo valor. Note que para  $\alpha = 2$ , os três *slips* coincidem para  $1 + \alpha_H$ , sendo então não dependentes de  $\beta_1$  neste contexto de uma distribuição de matéria de lei de potência. Para restringir adequadamente  $\beta_1$  neste tipo de análise, concluímos que é necessário um conjunto de dados com lentes mais massivas que escapem da conspiração bojo-halo (*e.g.* grupos ou aglomerados). Ou, como mencionado anteriormente, seguir o procedimento de [93, 94, 95], que não consideram matéria escura.

Mostramos que a análise e resultados do primeiro caso são dependentes da *prior* em  $\beta_1$ , de tal forma que não é possível medir simultaneamente  $\beta_1$  e  $\alpha_H$ . Em essência, uma medida razoável de  $\alpha_H$  dentro deste modelo requer uma *prior* física e mais informativa em  $\beta_1$ . Por outro lado, aumentar ou diminuir o intervalo da *prior* de  $\beta_1$  leva a poucas

mudanças no valor da mediana da *posterior* de  $\alpha_H$ , o que nos mostra que nossos resultados são sempre compatíveis com  $\alpha_H = 0$ , apesar da *prior* uniforme em  $\beta_1$ . Observe que isso também é um resultado de  $\alpha$  estar centrado em um perfil isotérmico, o que ocasiona no parâmetro de *slip* mencionado no parágrafo anterior ( $\sim 1 + \alpha_H$ ).

Para a densidade de luminosidade, bem como para a distribuição de matéria, assumimos perfis de lei de potência cujas inclinações são definidas a partir de *priors* fiduciais globais baseadas em resultados anteriores da literatura. O mesmo procedimento é aplicado ao parâmetro de anisotropia, que é assumido como constante. É importante notar, como mostrado em [100], que as maiores fontes de erros sistemáticos são esses três parâmetros, ou seja,  $\alpha$ ,  $\delta$  e  $\beta$ . Para melhorar a precisão dos resultados, é importante considerar *priors* individuais, o que geralmente é uma tarefa complicada, pois exige dados de imagem de alta qualidade para cada sistema. Em trabalhos futuros, pretendemos utilizar *priors* individuais para  $\alpha$  e  $\delta$ , que estão sendo obtidos diretamente pelo nosso grupo de lentes a partir das imagens do LaStBeRu. Os erros sistemáticos de  $\beta$ , no entanto, são muito mais complicados de serem tratados, uma vez que são necessários dados de Unidades de Campo Integral (IFU) para identificar adequadamente a variação espacial desse parâmetro [205].

Foi avaliada a compatibilidade estatística da restrição no caso de beyond-Horndeski com vários resultados da literatura. Essa comparação mostrou que a medida deste trabalho é compatível a dois sigma com múltiplas estimativas representativas de  $\alpha_H$  obtidas a partir de referências que investigam diferentes escalas. Também foi demonstrado que esta medida é compatível com a Relatividade Geral em dois sigma e que não ultrapassa o limite para o qual estrelas podem existir nesse contexto. O mesmo procedimento foi feito para o caso DHOST cujo *slip* não depende da distribuição de matéria. Nesse cenário, restrições pós-Newtonianas podem ser usadas para estabelecer limites em  $\alpha_H$ . Assumindo que  $\alpha_H$  é constante nos diferentes redshifts investigados, verificou-se então que a estimativa para este cenário é compatível a dois sigma com vários resultados em escalas de kiloparsec e com testes clássicos da teoria de Einstein no sistema solar.

Ademais, também foi observado que os resultados de  $\alpha_H$  restringem o parâmetro  $\alpha_V$  no cenário considerado. Essencialmente, neste caso em que  $\alpha_H$  é constante e  $\alpha_T = 0$ , das relações (37) temos que o parâmetro de desvio de Horndeski na verdade caracteriza a dependência da função de acoplamento  $f_2$  com relação ao termo cinético  $X$ . Essa função é justamente o que acopla a curvatura espaço-temporal com a energia escura, isto é,  $f_2$  está acoplada ao escalar de Ricci na lagrangiana das DHOST Ia (9). Por conseguinte, se  $\alpha_H = 0$  obtemos que o acoplamento não-mínimo da energia escura com a curvatura é no mínimo da forma de Brans-Dicke, i.e.  $f_2(\phi, X) = f_2(\phi)$ . Note então, como esperado, que mesmo que recuperemos as formas dos potenciais newtonianos nas escalas estudadas, isso significa que em distâncias cosmológicas ainda pode haver uma teoria da classe de Horndeski atuando, tal que a blindagem de Vainshtein não é quebrada. Por isso temos no mínimo algo *à la* Brans-Dicke em escalas maiores, sendo fundamental então um número

maior de observações em escalas distintas. Além disso, é importante perceber que a nossa análise só é sensível ao parâmetro de *slip*, fazendo com que a constante gravitacional efetiva  $G_N$  fique indeterminada. De fato, se  $\alpha_H = 0$  só podemos afirmar que os potenciais métricos no regime quase-estático são da forma da Relatividade Geral, de modo que  $G_N = G$  para a teoria de Einstein e  $G_N = G_N(z_l)$  para teorias mais gerais *à la* Horndeski.

Portanto, os resultados desta dissertação indicam exatamente esse fato, isto é, nas escalas  $\sim 1 - 10$  kpc temos que  $f_{2X} = 0$  a dois sigma e, portanto,  $f_2 = f_2(\phi)$ . Como vimos, esse resultado também é consistente com outras análises em diferentes escalas.

Contudo, há ainda diversas questões a serem melhor estudadas no que concerne os sistemáticos. Da parte teórica, por exemplo, temos que o mecanismo de Vainshtein só é bem definido e estudado para distribuições de matéria esféricas, o que pode resultar em estimativas bem distintas caso consideremos distribuições com simetrias axiais diferentes [226]. Outra consideração que fizemos foi a de que os parâmetros EFTDE não dependem do redshift da lente para  $z_l \lesssim 1$  (Note que isso é uma hipótese de trabalho, já que o formalismo EFTDE permite uma dependência temporal desses parâmetros). Supomos também galáxias-lente descritas por métricas de campo fraco com efeitos de rotação negligenciáveis e consideramos por simplicidade a equação de Jeans esfericamente simétrica (veja mais em [199]). Utilizamos também fundos cosmológicos limitados aos casos planos do  $\Lambda$ CDM,  $w$ CDM e  $w_0 w_a$ CDM, mas que apesar disso, como esperado, pouco alteram o resultado final.

Desta forma, diversas suposições foram feitas, cada qual com seu grau de confiabilidade e nível de relevância nas estimativas finais. A maioria das suposições mencionadas acima, no entanto, possuem efeitos sistemáticos subdominantes quando comparadas às próprias incertezas das dispersões de velocidades, que como vimos no capítulo 5, não são nada pequenas [100]. Como mencionamos também, os sistemáticos nos parâmetros de *nuisance* da estrutura das lentes são de fato o que domina, como evidenciado pelas referências [100, 101]. Por exemplo, como demonstrado em [205], o parâmetro de anisotropia  $\beta$  é altamente correlacionado com o parâmetro pós-newtoniano e os resultados podem variar bastante se considerarmos uma dependência radial [205], e isso, naturalmente, também se reflete na nossa análise para o caso das DHOST.

Em suma, como o natural de qualquer ciência empírica, nossos resultados são bastante dependentes das hipóteses e *priors* utilizadas para os parâmetros de estrutura das galáxias-lente. Uma melhora nesse sentido será considerar, em trabalhos futuros, *priors* individuais para esses parâmetros a fim de mitigar esses problemas. Além disso, também estamos interessados em investigar diferentes parametrizações das funções EFTDE que dependem do redshift da lente e queremos utilizar o atraso temporal de imagens lenteadas para também impor limites nos parâmetros EFTDE. As estimativas deste trabalho são as mais precisas nas escalas consideradas e são consistentes com outros trabalhos da literatura. Contudo, essa precisão crescerá ainda mais com o aumento no número de

sistemas de lenteamento galáxia-galáxia, em até duas ordens de grandeza, devido ao LSST do Observatório Rubin [116].<sup>19</sup> Esta nova leva de dados representará uma grande oportunidade para investigar a quebra parcial do mecanismo de Vainshtein por teorias DHOST no regime de campo fraco e até mesmo o teste de outras teorias modificadas.

---

<sup>19</sup> O aumento da precisão é essencial para sondar o *slip*, já que um valor de  $\eta$  próximo a 1 mas não exatamente igual pode tanto indicar gravitação modificada como também a Relatividade Geral com matéria com pressão anisotrópica.

## REFERÊNCIAS

- 1 SOBRERO, F.; AO, E. C. V. "Charged spherically symmetric black holes in the Lyra geometry and a preliminary investigation on the overcharging process". *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 110, p. 024043, Jul 2024. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.110.024043>>. Citado na página 5.
- 2 VALADÃO, E. C.; SOBRERO, F.; BERGLIAFFA, S. E. P. Geometrizing Brans-Dicke gravity and the 4D Einstein-Gauss-Bonnet scalar-tensor theory with the Lyra geometry (provisory title). *in prep.*, 2024. Citado 2 vezes nas páginas 5 e 17.
- 3 Riess *et al.*, A. G. "Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant". *Astro. J.*, American Astronomical Society, v. 116, n. 3, p. 1009–1038, sep 1998. ISSN 0004-6256. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1086/300499>>. Citado na página 11.
- 4 Perlmutter *et al.*, S.  $\Omega$  and  $\Lambda$  from 42 High-Redshift Supernovae@". *Astro. J.*, American Astronomical Society, v. 517, n. 2, p. 565–586, jun 1999. ISSN 1538-4357. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1086/307221>>. Citado na página 11.
- 5 ARMENDARIZ-PICON, C.; MUKHANOV, V.; STEINHARDT, P. J. "A Dynamical Solution to the Problem of a Small Cosmological Constant and Late-Time Cosmic Acceleration". *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society (APS), v. 85, n. 21, p. 4438–4441, nov 2000. ISSN 1079-7114. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.85.4438>>. Citado na página 11.
- 6 RUGH, S. E.; ZINKERNAGEL, H. "The Quantum Vacuum and the Cosmological Constant Problem". 2000. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/hep-th/0012253>>. Citado na página 11.
- 7 GRANDE, J.; SOLà, J.; ŠTEFANČÍČ, H.  $\Lambda$ XCDM: a cosmon model solution to the cosmological coincidence problem?@". *J. Cosmo. Astropart. Phys.*, IOP Publishing, v. 2006, n. 08, p. 011–011, aug 2006. ISSN 1475-7516. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2006/08/011>>. Citado na página 11.
- 8 FRIEMAN, J. A.; TURNER, M. S.; HUTERER, D. "Dark Energy and the Accelerating Universe". *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, Annual Reviews, v. 46, n. 1, p. 385–432, sep 2008. ISSN 1545-4282. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1146/annurev.astro.46.060407.145243>>. Citado na página 11.
- 9 AMENDOLA, L.; TSUJIKAWA, S. "Dark Energy: Theory and Observations". Cambridge University Press, 2010. ISBN 9780511750823. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/CBO9780511750823>>. Citado na página 11.
- 10 WEINBERG, D. H. et al. "Observational probes of cosmic acceleration". *Phys. Rept.*, Elsevier BV, v. 530, n. 2, p. 87–255, sep 2013. ISSN 0370-1573. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2013.05.001>>. Citado na página 11.
- 11 Li, M. et al. "Dark energy: A brief review". *Front. Phys.*, v. 8, n. 6, p. 828–846, dec 2013. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1209.0922>>. Citado na página 11.

- 12 SAMI, M.; MYRZAKULOV, R. "Late-time cosmic acceleration: ABCD of dark energy and modified theories of gravity". *Int. J. Mod. Phys. D*, v. 25, n. 12, p. 1630031, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/S0218271816300317>>. Citado na página 11.
- 13 FRUSCIANTE, N.; PERENON, L. "Effective field theory of dark energy: A review". *Phys. Rept.*, Elsevier BV, v. 857, p. 1–63, may 2020. ISSN 0370-1573. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2020.02.004>>. Citado na página 11.
- 14 MOTTA, V. et al. "*Taxonomy of Dark Energy Models*". 2021. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2104.04642>>. Citado na página 11.
- 15 YUSOFI, E. et al. "Surface tension of cosmic voids as a possible source for dark energy". *Mon. Not. R. Astron. Soc.: Lett.*, Oxford University Press (OUP), v. 511, n. 1, p. L82–L86, jan 2022. ISSN 1745-3933. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1093/mnrasl/slac006>>. Citado na página 11.
- 16 HOYUELOS, M.; SISTERNA, P. "*Dark energy based on exotic statistics*". 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.48550/arXiv.2210.16368>>. Citado na página 11.
- 17 Farrah *et al.*, D. "Observational Evidence for Cosmological Coupling of Black Holes and its Implications for an Astrophysical Source of Dark Energy". *Astrophys. J. Lett.*, American Astronomical Society, v. 944, n. 2, p. L31, feb 2023. ISSN 2041-8213. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.3847/2041-8213/acb704>>. Citado na página 11.
- 18 VICENTE, A. M.; JESUS, J. F.; PEREIRA, S. H. "*Kinematic reconstruction of torsion as dark energy in Friedmann cosmology*". 2024. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2402.00844>>. Citado na página 11.
- 19 HUTERER, D.; TURNER, M. S. "Prospects for probing the dark energy via supernova distance measurements". *Phys. Rev. D*, American Physical Society (APS), v. 60, n. 8, aug 1999. ISSN 1089-4918. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.60.081301>>. Citado na página 11.
- 20 Aghanim *et al.*, N. "Planck2018 results: VI. Cosmological parameters". *Astron. Astrophys.*, EDP Sciences, v. 641, p. A6, sep 2020. ISSN 1432-0746. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/201833910>>. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 176.
- 21 Alam *et al.*, S. "Completed SDSS-IV extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: Cosmological implications from two decades of spectroscopic surveys at the Apache Point Observatory". *Phys. Rev. D*, American Physical Society (APS), v. 103, n. 8, apr 2021. ISSN 2470-0029. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.103.083533>>. Citado na página 11.
- 22 Abbott *et al.*, T. M. C. "*~1500 New High-redshift Type Ia Supernovae Using The Full 5-year Dataset@*". 2024. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2401.02929>>. Citado 3 vezes nas páginas 11, 27 e 69.
- 23 Adame *et al.*, A. G. "*DESI 2024 VI: Cosmological Constraints from the Measurements of Baryon Acoustic Oscillations*". 2024. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2404.03002>>. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 27.

- 24 EINSTEIN, A. "Cosmological Considerations in the General Theory of Relativity". *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, v. 1917, p. 142–152, 1917. Citado na página 11.
- 25 Camilleri *et al.*, R. "The dark energy survey supernova program: investigating beyond- $\Lambda$ CDM". *MNRAS*, v. 533, n. 3, p. 2615–2639, sep 2024. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2024MNRAS.533.2615C>>. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 27.
- 26 COLLABORATION, D.; ABDUL-KARIM, M.; AL. *et.* *DESI DR2 Results II: Measurements of Baryon Acoustic Oscillations and Cosmological Constraints*. 2025. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2503.14738>>. Citado na página 11.
- 27 SOTIRIOU, T. P.; FARAONI, V. "f(R) theories of gravity". *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society (APS), v. 82, n. 1, p. 451–497, mar 2010. ISSN 1539-0756. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.82.451>>. Citado 4 vezes nas páginas 11, 15, 17 e 20.
- 28 TSUJIKAWA, S. "Quintessence: a review". *Class. Quantum Grav.*, IOP Publishing, v. 30, n. 21, p. 214003, oct 2013. ISSN 1361-6382. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/30/21/214003>>. Citado na página 11.
- 29 KOYAMA, K. "Cosmological tests of modified gravity". *Rept. Prog. Phys.*, IOP Publishing, v. 79, n. 4, p. 046902, mar 2016. ISSN 1361-6633. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/0034-4885/79/4/046902>>. Citado na página 11.
- 30 Bull *et al.*, P.  $\Lambda$ CDM Problems, solutions, and the road ahead@". *Phys. Dark Univ.*, Elsevier BV, v. 12, p. 56–99, jun 2016. ISSN 2212-6864. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.dark.2016.02.001>>. Citado na página 11.
- 31 BABICHEV, E.; DEFFAYET, C. "An introduction to the Vainshtein mechanism". *Class. Quantum Grav.*, IOP Publishing, v. 30, n. 18, p. 184001, sep 2013. ISSN 1361-6382. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/30/18/184001>>. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 12.
- 32 AMENDOLA, L. *et al.* "Measuring Gravity at Cosmological Scales". *Universe*, MDPI AG, v. 6, n. 2, p. 20, jan 2020. ISSN 2218-1997. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.3390/universe6020020>>. Citado na página 11.
- 33 CAPOZZIELLO, S.; LAURENTIS, M. D. "Extended Theories of Gravity". *Phys. Rept.*, Elsevier BV, v. 509, n. 4–5, p. 167–321, dec 2011. ISSN 0370-1573. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2011.09.003>>. Citado 5 vezes nas páginas 11, 14, 15, 17 e 19.
- 34 CLIFTON, T. *et al.* "Modified gravity and cosmology". *Phys. Rept.*, Elsevier BV, v. 513, n. 1–3, p. 1–189, mar 2012. ISSN 0370-1573. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2012.01.001>>. Citado 7 vezes nas páginas 11, 14, 15, 16, 17, 19 e 20.
- 35 JOYCE, A.; LOMBRISER, L.; SCHMIDT, F. "Dark Energy Versus Modified Gravity". *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.*, Annual Reviews, v. 66, n. 1, p. 95–122, out. 2016. ISSN 1545-4134. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1146/annurev-nucl-102115-044553>>. Citado na página 11.

- 36 FERREIRA, P. G. "Cosmological Tests of Gravity". *Annu. Rev. Astro. Astrophys.*, Annual Reviews, v. 57, n. 1, p. 335–374, aug 2019. ISSN 1545-4282. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1146/annurev-astro-091918-104423>>. Citado na página 11.
- 37 ARMENDARIZ-PICON, C.; MUKHANOV, V.; STEINHARDT, P. J. "Essentials of k-essence". *Phys. Rev. D*, American Physical Society (APS), v. 63, n. 10, apr 2001. ISSN 1089-4918. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.63.103510>>. Citado na página 11.
- 38 KAMENSHCHIK, A.; MOSCHELLA, U.; PASQUIER, V. "An alternative to quintessence". *Phys. Lett. B*, Elsevier BV, v. 511, n. 2–4, p. 265–268, jul 2001. ISSN 0370-2693. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/S0370-2693\(01\)00571-8](http://dx.doi.org/10.1016/S0370-2693(01)00571-8)>. Citado na página 11.
- 39 AGUIRREGABIRIA, J. M.; CHIMENTO, L. P.; LAZKOZ, R. "Quintessence as k-essence". *Phys. Lett. B*, Elsevier BV, v. 631, n. 3, p. 93–99, dec 2005. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2005.10.011>>. Citado na página 11.
- 40 HORNDESKI, G. W. "Second-Order Scalar-Tensor Field Equations in a Four-Dimensional Space". *Int. J. Theor. Phys.*, v. 10, n. 6, p. 363–384, sep 1974. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1974IJTP...10..363H>>. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 21.
- 41 DEFFAYET, C. et al. "From k-essence to generalized Galileons". *Phys. Rev. D*, American Physical Society (APS), v. 84, n. 6, sep 2011. ISSN 1550-2368. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.84.064039>>. Citado 3 vezes nas páginas 11, 21 e 22.
- 42 KOBAYASHI, T. "Horndeski theory and beyond: a review". *Rept. Prog. Phys.*, IOP Publishing, v. 82, n. 8, p. 086901, jul 2019. ISSN 1361-6633. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/1361-6633/ab2429>>. Citado 8 vezes nas páginas 11, 15, 21, 22, 23, 24, 25 e 26.
- 43 KASE, R.; TSUJIKAWA, S. "Dark energy in Horndeski theories after GW170817: A review". *Int. J. Mod. Phys. D*, World Scientific Pub Co Pte Lt, v. 28, n. 05, p. 1942005, apr 2019. ISSN 1793-6594. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1142/S0218271819420057>>. Citado na página 11.
- 44 LANGLOIS, D.; NOUI, K. "Degenerate higher derivative theories beyond Horndeski: evading the Ostrogradski instability". *JCAP*, IOP Publishing, v. 2016, n. 02, p. 034–034, feb 2016. ISSN 1475-7516. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2016/02/034>>. Citado 4 vezes nas páginas 11, 23, 24 e 25.
- 45 LANGLOIS, D.; NOUI, K. "Hamiltonian analysis of higher derivative scalar-tensor theories". *JCAP*, IOP Publishing, v. 2016, n. 07, p. 016–016, jul 2016. ISSN 1475-7516. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2016/07/016>>. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 25.
- 46 CRISOSTOMI, M.; KOYAMA, K.; TASINATO, G. "Extended scalar-tensor theories of gravity". *JCAP*, IOP Publishing, v. 2016, n. 04, p. 044–044, apr 2016. ISSN 1475-7516.

Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2016/04/044>>. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 24.

47 ACHOUR, J. B.; LANGLOIS, D.; NOUI, K. "Degenerate higher order scalar-tensor theories beyond Horndeski and disformal transformations". *Phys. Rev. D*, American Physical Society (APS), v. 93, n. 12, jun 2016. ISSN 2470-0029. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.93.124005>>. Citado 3 vezes nas páginas 11, 12 e 24.

48 ACHOUR, J. B. et al. "Degenerate higher order scalar-tensor theories beyond Horndeski up to cubic order". *JHEP*, Springer Science and Business Media LLC, v. 2016, n. 12, dec 2016. ISSN 1029-8479. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1007/JHEP12\(2016\)100](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP12(2016)100)>. Citado 4 vezes nas páginas 11, 12, 24 e 26.

49 LANGLOIS, D. et al. "Effective description of higher-order scalar-tensor theories". *JCAP*, IOP Publishing, v. 2017, n. 05, p. 033–033, maio 2017. ISSN 1475-7516. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2017/05/033>>. Citado 10 vezes nas páginas 11, 12, 24, 25, 26, 27, 32, 33, 34 e 36.

50 BATISTA, R. C. "A Short Review on Clustering Dark Energy". *Universe*, MDPI AG, v. 8, n. 1, p. 22, dec 2021. ISSN 2218-1997. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.3390/universe8010022>>. Citado na página 11.

51 GLEYZES, J.; LANGLOIS, D.; VERNIZZI, F. "A unifying description of dark energy". *Int. J. Mod. Phys. D*, World Scientific Pub Co Pte Lt, v. 23, n. 13, p. 1443010, nov 2014. ISSN 1793-6594. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1142/S021827181443010X>>. Citado 8 vezes nas páginas 12, 28, 29, 30, 31, 32, 33 e 34.

52 CREMINELLI, P. et al. "The effective theory of quintessence:  $w < -1$  side unveiled". *JCAP*, IOP Publishing, v. 2009, n. 02, p. 018–018, feb 2009. ISSN 1475-7516. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2009/02/018>>. Citado na página 12.

53 GUBITOSI, G.; PIAZZA, F.; VERNIZZI, F. "The effective field theory of dark energy". *JCAP*, IOP Publishing, v. 2013, n. 02, p. 032–032, feb 2013. ISSN 1475-7516. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2013/02/032>>. Citado na página 12.

54 BLOOMFIELD, J. et al. "Dark energy or modified gravity? An effective field theory approach". *JCAP*, IOP Publishing, v. 2013, n. 08, p. 010–010, aug 2013. ISSN 1475-7516. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2013/08/010>>. Citado na página 12.

55 GLEYZES, J. et al. "Essential building blocks of dark energy". *JCAP*, IOP Publishing, v. 2013, n. 08, p. 025–025, aug 2013. ISSN 1475-7516. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2013/08/025>>. Citado 3 vezes nas páginas 12, 27 e 36.

56 BLOOMFIELD, J. "A simplified approach to general scalar-tensor theories". *JCAP*, IOP Publishing, v. 2013, n. 12, p. 044–044, dec 2013. ISSN 1475-7516. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2013/12/044>>. Citado na página 12.

- 57 CUSIN, G.; LEWANDOWSKI, M.; VERNIZZI, F. "Nonlinear effective theory of dark energy". *JCAP*, IOP Publishing, v. 2018, n. 04, p. 061–061, apr 2018. ISSN 1475-7516. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2018/04/061>>. Citado 6 vezes nas páginas 12, 27, 35, 37, 38 e 55.
- 58 BELLINI, E.; SAWICKI, I. "Maximal freedom at minimum cost: linear large-scale structure in general modifications of gravity". *JCAP*, IOP Publishing, v. 2014, n. 07, p. 050–050, jul 2014. ISSN 1475-7516. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2014/07/050>>. Citado 6 vezes nas páginas 12, 18, 32, 33, 34 e 55.
- 59 GLEYZES, J. et al. "Exploring gravitational theories beyond Horndeski". *JCAP*, IOP Publishing, v. 2015, n. 02, p. 018–018, feb 2015. ISSN 1475-7516. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2015/02/018>>. Citado 3 vezes nas páginas 12, 24 e 27.
- 60 ARNOWITT, R.; DESER, S.; MISNER, C. W. "Republication of: The dynamics of general relativity". *Gen. Relativ. Gravit.*, Springer Science and Business Media LLC, v. 40, n. 9, p. 1997–2027, aug 2008. ISSN 1572-9532. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s10714-008-0661-1>>. Citado na página 12.
- 61 CORICHI, A.; NÚÑEZ, D. "Introduction to the ADM formalism". 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.48550/arXiv.2210.10103>>. Citado na página 12.
- 62 KOBAYASHI, T.; WATANABE, Y.; YAMAUCHI, D. "Breaking of Vainshtein screening in scalar-tensor theories beyond Horndeski". *Phys. Rev. D*, American Physical Society (APS), v. 91, n. 6, mar 2015. ISSN 1550-2368. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.91.064013>>. Citado na página 12.
- 63 DIMA, A.; VERNIZZI, F. "Vainshtein screening in scalar-tensor theories before and after GW170817: Constraints on theories beyond Horndeski". *Phys. Rev. D*, American Physical Society (APS), v. 97, n. 10, may 2018. ISSN 2470-0029. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.97.101302>>. Citado 12 vezes nas páginas 12, 13, 26, 34, 35, 36, 37, 38, 68, 75, 76 e 79.
- 64 CRISOSTOMI, M.; KOYAMA, K. "Vainshtein mechanism after GW170817". *Phys. Rev. D*, American Physical Society (APS), v. 97, n. 2, jan 2018. ISSN 2470-0029. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.97.021301>>. Citado 3 vezes nas páginas 12, 37 e 38.
- 65 LANGLOIS, D. et al. "Scalar-tensor theories and modified gravity in the wake of GW170817". *Phys. Rev. D*, American Physical Society (APS), v. 97, n. 6, mar 2018. ISSN 2470-0029. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.97.061501>>. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 38.
- 66 VAINSHTEIN, A. I. "To the problem of nonvanishing gravitation mass". *Phys. Lett. B*, v. 39, n. 3, p. 393–394, may 1972. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1972PhLB...39..393V>>. Citado na página 12.
- 67 HUI, L.; NICOLIS, A. "Proposal for an Observational Test of the Vainshtein Mechanism". *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society (APS), v. 109, n. 5, aug 2012.

ISSN 1079-7114. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.109.051304>>. Citado na página 12.

68 KOYAMA, K.; SAKSTEIN, J. "Astrophysical probes of the Vainshtein mechanism: Stars and galaxies". *Phys. Rev. D*, American Physical Society (APS), v. 91, n. 12, jun 2015. ISSN 1550-2368. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.91.124066>>. Citado na página 12.

69 SAKSTEIN, J. "*Astrophysical Tests of Screened Modified Gravity*". 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.48550/arXiv.2002.04194>>. Citado na página 12.

70 BRAX, P. et al. "Testing Screened Modified Gravity". *Universe*, MDPI AG, v. 8, n. 1, p. 11, dec 2021. ISSN 2218-1997. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.3390/universe8010011>>. Citado na página 12.

71 Saridakis *et al.*, E. N. "*Modified Gravity and Cosmology: An Update by the CANTATA Network*". 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.48550/arXiv.2105.12582>>. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 15.

72 SAITO, R. et al. "Modified gravity inside astrophysical bodies". *JCAP*, IOP Publishing, v. 2015, n. 06, p. 008–008, jun 2015. ISSN 1475-7516. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2015/06/008>>. Citado na página 12.

73 SAKSTEIN, J. "Hydrogen Burning in Low Mass Stars Constrains Scalar-Tensor Theories of Gravity". *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society (APS), v. 115, n. 20, nov 2015. ISSN 1079-7114. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.115.201101>>. Citado na página 12.

74 SAKSTEIN, J. "Testing gravity using dwarf stars". *Phys. Rev. D*, American Physical Society (APS), v. 92, n. 12, dec 2015. ISSN 1550-2368. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.92.124045>>. Citado na página 12.

75 JAIN, R. K.; KOUVARIS, C.; NIELSEN, N. G. "White Dwarf Critical Tests for Modified Gravity". *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society (APS), v. 116, n. 15, apr 2016. ISSN 1079-7114. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.151103>>. Citado na página 12.

76 BABICHEV, E. et al. "Relativistic stars in beyond Horndeski theories". *Class. Quantum Grav.*, IOP Publishing, v. 33, n. 23, p. 235014, nov 2016. ISSN 1361-6382. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/33/23/235014>>. Citado 3 vezes nas páginas 12, 75 e 76.

77 SAKSTEIN, J.; KENNA-ALLISON, M.; KOYAMA, K. "Stellar pulsations in beyond Horndeski gravity theories". *JCAP*, IOP Publishing, v. 2017, n. 03, p. 007–007, mar 2017. ISSN 1475-7516. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2017/03/007>>. Citado na página 12.

78 SALTAS, I. D.; SAWICKI, I.; LOPES, I. "White dwarfs and revelations". *JCAP*, IOP Publishing, v. 2018, n. 05, p. 028–028, may 2018. ISSN 1475-7516. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2018/05/028>>. Citado 3 vezes nas páginas 12, 75 e 76.

- 79 SALTAS, I. D.; CHRISTENSEN-DALSGAARD, J. "Searching for dark energy with the Sun". *Astron. Astrophys.*, EDP Sciences, v. 667, p. A115, nov 2022. ISSN 1432-0746. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/202244176>>. Citado 3 vezes nas páginas 12, 75 e 76.
- 80 KOZAK, A.; SOIEVA, K.; WOJNAR, A. "Cooling process of substellar objects in scalar-tensor gravity". *Phys. Rev. D*, American Physical Society (APS), v. 108, n. 2, jul 2023. ISSN 2470-0029. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.108.024016>>. Citado na página 12.
- 81 KOZAK, A.; WOJNAR, A. "*Earthquakes as probing tools for gravity theories*". 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.48550/arXiv.2308.01784>>. Citado na página 12.
- 82 CREMINELLI, P.; VERNIZZI, F. "Dark Energy after GW170817 and GRB170817A". *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society (APS), v. 119, n. 25, dec 2017. ISSN 1079-7114. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.251302>>. Citado na página 12.
- 83 SAKSTEIN, J.; JAIN, B. "Implications of the Neutron Star Merger GW170817 for Cosmological Scalar-Tensor Theories". *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society (APS), v. 119, n. 25, dec 2017. ISSN 1079-7114. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.251303>>. Citado na página 12.
- 84 EZQUIAGA, J. M.; ZUMALACÁRREGUI, M. "Dark Energy After GW170817: Dead Ends and the Road Ahead". *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society (APS), v. 119, n. 25, dec 2017. ISSN 1079-7114. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.251304>>. Citado na página 12.
- 85 BAKER, T. et al. "Strong Constraints on Cosmological Gravity from GW170817 and GRB 170817A". *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society (APS), v. 119, n. 25, dec 2017. ISSN 1079-7114. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.251301>>. Citado na página 12.
- 86 CREMINELLI, P. et al. "Gravitational wave decay into dark energy". *JCAP*, IOP Publishing, v. 2018, n. 12, p. 025–025, dec 2018. ISSN 1475-7516. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2018/12/025>>. Citado na página 12.
- 87 JIMÉNEZ, J. B.; PIAZZA, F.; VELTEN, H. "Evading the Vainshtein Mechanism with Anomalous Gravitational Wave Speed: Constraints on Modified Gravity from Binary Pulsars". *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society (APS), v. 116, n. 6, feb 2016. ISSN 1079-7114. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.061101>>. Citado na página 12.
- 88 CRISOSTOMI, M.; LEWANDOWSKI, M.; VERNIZZI, F. "Vainshtein regime in scalar-tensor gravity: Constraints on degenerate higher-order scalar-tensor theories". *Phys. Rev. D*, American Physical Society (APS), v. 100, n. 2, jul 2019. ISSN 2470-0029. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.100.024025>>. Citado na página 12.
- 89 LAUDATO, E.; SALZANO, V.; UMETSU, K. "Multicomponent DHOST analysis in galaxy clusters". *MNRAS*, Oxford University Press (OUP), v. 511, n. 2, p. 1878–1892,

jan 2022. ISSN 1365-2966. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1093/mnras/stac180>>. Citado na página 12.

90 HARIDASU, B. S. et al. "Testing generalized scalar-tensor theories of gravity with clusters of galaxies". *Phys. Rev. D*, American Physical Society (APS), v. 107, n. 12, jun 2023. ISSN 2470-0029. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.107.124059>>. Citado 3 vezes nas páginas 12, 75 e 76.

91 SAKSTEIN, J. et al. "Testing gravity using galaxy clusters: new constraints on beyond Horndeski theories". *JCAP*, IOP Publishing, v. 2016, n. 07, p. 019–019, jul 2016. ISSN 1475-7516. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2016/07/019>>. Citado 3 vezes nas páginas 12, 75 e 76.

92 PIZZUTI, L. et al. "Probing vainsthein-screening gravity with galaxy clusters using internal kinematics and strong and weak lensing". *MNRAS*, Oxford University Press (OUP), v. 512, n. 3, p. 4280–4290, mar 2022. ISSN 1365-2966. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1093/mnras/stac746>>. Citado 3 vezes nas páginas 12, 75 e 76.

93 SALZANO, V. et al. "No need for dark matter in galaxy clusters within Galileon theory". *JCAP*, IOP Publishing, v. 2016, n. 10, p. 033–033, oct 2016. ISSN 1475-7516. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2016/10/033>>. Citado 3 vezes nas páginas 12, 74 e 79.

94 LAUDATO, E.; SALZANO, V. "DHOST gravity in ultra-diffuse galaxies – part I: the case of NGC1052-DF2". *EPJ C*, Springer Science and Business Media LLC, v. 82, n. 10, oct 2022. ISSN 1434-6052. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-022-10901-0>>. Citado 3 vezes nas páginas 12, 74 e 79.

95 LAUDATO, E.; SALZANO, V. "DHOST gravity in ultra-diffuse galaxies—Part II: NGC 1052-DF4 and Dragonfly 44". *EPJ C*, Springer Science and Business Media LLC, v. 83, n. 5, may 2023. ISSN 1434-6052. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-023-11564-1>>. Citado 3 vezes nas páginas 12, 74 e 79.

96 Abbott *et al.*, B. P. "Gravitational Waves and Gamma-Rays from a Binary Neutron Star Merger: GW170817 and GRB 170817A". *Astrophys. J. Lett.*, American Astronomical Society, v. 848, n. 2, p. L13, oct 2017. ISSN 2041-8213. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.3847/2041-8213/aa920c>>. Citado na página 12.

97 Abbott *et al.*, B. P. "GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral". *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society (APS), v. 119, n. 16, oct 2017. ISSN 1079-7114. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.161101>>. Citado na página 13.

98 Goldstein *et al.*, A. "An Ordinary Short Gamma-Ray Burst with Extraordinary Implications: Fermi-GBM Detection of GRB 170817A". *Astrophys. J. Lett.*, American Astronomical Society, v. 848, n. 2, p. L14, oct 2017. ISSN 2041-8213. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.3847/2041-8213/aa8f41>>. Citado na página 13.

- 99 BOLTON, A. S.; RAPPAPORT, S.; BURLES, S.  $\gamma$  on Galactic Size Scales". *Phys. Rev. D*, American Physical Society (APS), v. 74, n. 6, sep 2006. ISSN 1550-2368. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.74.061501>>. Citado 5 vezes nas páginas 13, 54, 55, 68 e 78.
- 100 SCHWAB, J.; BOLTON, A. S.; RAPPAPORT, S. A. "GALAXY-SCALE STRONG-LENSING TESTS OF GRAVITY AND GEOMETRIC COSMOLOGY: CONSTRAINTS AND SYSTEMATIC LIMITATIONS". *Astrophys. J.*, American Astronomical Society, v. 708, n. 1, p. 750–757, dec 2009. ISSN 1538-4357. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/0004-637X/708/1/750>>. Citado 11 vezes nas páginas 13, 54, 59, 60, 61, 66, 67, 68, 78, 80 e 81.
- 101 CAO, S. et al. "TEST OF PARAMETRIZED POST-NEWTONIAN GRAVITY WITH GALAXY-SCALE STRONG LENSING SYSTEMS". *Astrophys. J.*, American Astronomical Society, v. 835, n. 1, p. 92, jan 2017. ISSN 1538-4357. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/835/1/92>>. Citado 6 vezes nas páginas 13, 59, 64, 68, 78 e 81.
- 102 LIU, X.-H. et al. "Galaxy-scale Test of General Relativity with Strong Gravitational Lensing". *Astrophys. J.*, American Astronomical Society, v. 927, n. 1, p. 28, mar 2022. ISSN 1538-4357. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/ac4c3b>>. Citado 4 vezes nas páginas 13, 60, 73 e 78.
- 103 WEI, J.-J. et al. "Direct Estimate of the Post-Newtonian Parameter and Cosmic Curvature from Galaxy-scale Strong Gravitational Lensing". *Astrophys. J. Lett.*, American Astronomical Society, v. 927, n. 1, p. L1, feb 2022. ISSN 2041-8213. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.3847/2041-8213/ac551e>>. Citado 3 vezes nas páginas 13, 60 e 78.
- 104 GUERRINI, S.; MÖRTSELL, E. "Probing a scale dependent gravitational slip with galaxy strong lensing systems". *Phys. Rev. D*, American Physical Society (APS), v. 109, n. 2, jan 2024. ISSN 2470-0029. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.109.023533>>. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 78.
- 105 RAN, J.-Y.; WEI, J.-J. "Extragalactic test of general relativity from strong gravitational lensing by using artificial neural networks". *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 109, p. 043001, Feb 2024. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.109.043001>>. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 78.
- 106 BIESIADA, M. "Strong lensing systems as a probe of dark energy in the universe". *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 73, p. 023006, Jan 2006. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.73.023006>>. Citado na página 13.
- 107 GRILLO, C.; LOMBARDI, M.; BERTIN, G. "Cosmological parameters from strong gravitational lensing and stellar dynamics in elliptical galaxies". *Astro. Astrophys.*, EDP Sciences, v. 477, n. 2, p. 397–406, jan 2008. ISSN 1432-0746. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361:20077534>>. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 68.
- 108 BIESIADA, M.; PIÓRKOWSKA, A.; MALEC, B. "Cosmic equation of state from strong gravitational lensing systems: Cosmic equation of state from strong lenses". *MNRAS*, Oxford University Press (OUP), may 2010. ISSN 1365-2966. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-2966.2010.16725.x>>. Citado na página 13.

- 109 CAO, S. et al. "Constraints on cosmological models from strong gravitational lensing systems". *JCAP*, IOP Publishing, v. 2012, n. 03, p. 016–016, mar 2012. ISSN 1475-7516. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2012/03/016>>. Citado na página 13.
- 110 CAO, S. et al. "Cosmology with Strong Lensing Systems". *Astrophys. J.*, American Astronomical Society, v. 806, n. 2, p. 185, jun 2015. ISSN 1538-4357. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/0004-637X/806/2/185>>. Citado 3 vezes nas páginas 13, 62 e 63.
- 111 CARDONE, V. F.; PIEDIPALUMBO, E.; SCUDELLARO, P. "Cosmological parameters from lenses distance ratio". *MNRAS*, Oxford University Press (OUP), v. 455, n. 1, p. 831–837, nov 2015. ISSN 0035-8711. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1093/mnras/stv2200>>. Citado na página 13.
- 112 LI, Z. et al. "Curvature from Strong Gravitational Lensing: A Spatially Closed Universe or Systematics?". *Astrophys. J.*, American Astronomical Society, v. 854, n. 2, p. 146, feb 2018. ISSN 1538-4357. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/aaa76f>>. Citado na página 13.
- 113 CHEN, Y. et al. "Assessing the effect of lens mass model in cosmological application with updated galaxy-scale strong gravitational lensing sample". *MNRAS*, Oxford University Press (OUP), v. 488, n. 3, p. 3745–3758, jul 2019. ISSN 1365-2966. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1093/mnras/stz1902>>. Citado 6 vezes nas páginas 13, 60, 61, 62, 63 e 64.
- 114 ZHOU, H.; LI, Z. "Model-independent Estimations for the Cosmic Curvature from the Latest Strong Gravitational Lensing Systems". *Astrophys. J.*, American Astronomical Society, v. 889, n. 2, p. 186, feb 2020. ISSN 1538-4357. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/ab5f61>>. Citado na página 13.
- 115 Aghanim *et al.*, N. "Planck2018 results: VI. Cosmological parameters". *Astro. Astrophys.*, EDP Sciences, v. 641, p. A6, sep 2020. ISSN 1432-0746. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/201833910>>. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 68.
- 116 OLIVEIRA, R. A. de; FRANÇA, J. P. C.; MAKLER, M. "*The Last Stand Before Rubin: a consolidated sample of strong lensing systems in wide-field surveys (in prep.)*". 2024. Citado 11 vezes nas páginas 13, 39, 60, 62, 63, 64, 65, 79, 82, 188 e 189.
- 117 WILL, C. M. *Theory and Experiment in Gravitational Physics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2018. ISBN 978-1-108-67982-4, 978-1-107-11744-0. Citado 5 vezes nas páginas 14, 15, 17, 18 e 19.
- 118 WANG, M.-T. *Four lectures on quasi-local mass*. 2015. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1510.02931>>. Citado na página 14.
- 119 WANG, M.-T. *Limits of quasi-local angular momentum on an isolated gravitating system*. 2020. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2010.14059>>. Citado na página 14.

- 120 LOVELOCK, D. "The uniqueness of the Einstein field equations in a four-dimensional space". *Arch. Rational Mech. Anal.*, v. 33, n. 1, p. 54–70, jan 1969. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF00248156>>. Citado na página 15.
- 121 Berti *et al.*, E. Testing general relativity with present and future astrophysical observations. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 32, n. 24, p. 243001, dec 2015. ISSN 1361-6382. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/32/24/243001>>. Citado na página 15.
- 122 EINSTEIN, A. *The Meaning of Relativity*. 5. ed. [S.l.]: Princeton Univ. Press, 1955. v. 1. 200 p. Citado 4 vezes nas páginas 15, 16, 154 e 158.
- 123 JIMENEZ, J. B.; HEISENBERG, L.; KOIVISTO, T. S. *The Geometrical Trinity of Gravity*. 2019. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1903.06830>>. Citado na página 16.
- 124 DAMIANOS, I. *METRIC-AFFINE GRAVITY AND COSMOLOGY/ ASPECTS OF TORSION AND NON-METRICITY IN GRAVITY THEORIES*. 2019. 270 p. Tese (Doctor of Philosophy) — Physics Department of Aristotle University of Thessaloniki, Rio de Janeiro. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1902.09643>>. Citado na página 16.
- 125 CAPOZZIELLO, S.; FALCO, V. D.; FERRARA, C. Comparing equivalent gravities: common features and differences. *The European Physical Journal C*, Springer Science and Business Media LLC, v. 82, n. 10, oct 2022. ISSN 1434-6052. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-022-10823-x>>. Citado na página 16.
- 126 GUTFREUND, H.; RENN, J. *The Road to Relativity: The History and Meaning of Einstein's "The Foundation of General Relativity"*. [S.l.]: Princeton University Press, 2015. v. 1. 240 p. Citado 8 vezes nas páginas 16, 152, 153, 154, 156, 158, 159 e 164.
- 127 BRANS, C. H. Scalar-tensor Theories of Gravity: Some personal history. *AIP Conference Proceedings*, v. 1083, n. 1, p. 34–46, 12 2008. ISSN 0094-243X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.3058577>>. Citado 7 vezes nas páginas 16, 17, 18, 19, 20, 21 e 154.
- 128 FUJII, Y.; MAEDA, K. *The Scalar-Tensor Theory of Gravitation*. Cambridge University Press, 2003. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). ISBN 9781139436021. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=cRim42Z2hBsC>>. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 21.
- 129 FARAONI, V. *"Cosmology in Scalar-Tensor Gravity"*. Springer Dordrecht, 2004. 274 p. (Fundamental Theories of Physics). ISSN 0168-1222. ISBN 978-90-481-6564-3. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/978-1-4020-1989-0>>. Citado 4 vezes nas páginas 16, 17, 20 e 21.
- 130 OHANIAN, H. C. "Inertial and gravitational mass in the brans-dicke theory". *Ann. Phys.*, v. 67, n. 2, p. 648–661, 1971. ISSN 0003-4916. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0003491671901552>>. Citado 3 vezes nas páginas 17, 55 e 59.

- 131 DICKE, R. H. Eötvös Experiment and the Gravitational Red Shift. *American Journal of Physics*, v. 28, n. 4, p. 344–347, abr. 1960. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1960AmJPh..28..344D>>. Citado na página 17.
- 132 NORDTVEDT, K. Equivalence Principle for Massive Bodies. II. Theory. *Physical Review*, v. 169, n. 5, p. 1017–1025, may 1968. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1968PhRv..169.1017N>>. Citado na página 17.
- 133 VOLLICK, D. N. "On the Meaning of Various Mass Definitions for Asymptotically Flat Spacetimes". 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.48550/arXiv.2101.12570>>. Citado 3 vezes nas páginas 17, 55 e 59.
- 134 BRANS, C.; DICKE, R. H. "Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation". *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 124, p. 925–935, Nov 1961. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.124.925>>. Citado 4 vezes nas páginas 17, 18, 19 e 20.
- 135 BRANS, C. H. Mach's principle and a relativistic theory of gravitation. ii. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 125, p. 2194–2201, Mar 1962. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.125.2194>>. Citado 3 vezes nas páginas 17, 18 e 19.
- 136 CASOLA, E. D.; LIBERATI, S. Nonequivalence of equivalence principles. *American Journal of Physics*, v. 83, 2015. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1310.7426v2>>. Citado 5 vezes nas páginas 17, 19, 118, 154 e 157.
- 137 CASOLA, E. D.; LIBERATI, S.; SONEGO, S. Weak equivalence principle for self-gravitating bodies: A sieve for purely metric theories of gravity. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 89, n. 8, apr 2014. ISSN 1550-2368. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.89.084053>>. Citado na página 17.
- 138 BRANS, C. H. "The roots of scalar-tensor theory: an approximate history". 2005. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/gr-qc/0506063v1>>. Citado 4 vezes nas páginas 17, 19, 20 e 21.
- 139 HUI, L.; NICOLIS, A.; STUBBS, C. W. Equivalence principle implications of modified gravity models. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 80, n. 10, nov 2009. ISSN 1550-2368. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.80.104002>>. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 38.
- 140 GOENNER, H. Some remarks on the genesis of scalar-tensor theories. *General Relativity and Gravitation*, Springer Science and Business Media LLC, v. 44, n. 8, p. 2077–2097, jun 2012. ISSN 1572-9532. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s10714-012-1378-8>>. Citado 3 vezes nas páginas 17, 19 e 21.
- 141 CHARMOUSIS, C. et al. General Second-Order Scalar-Tensor Theory and Self-Tuning. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 108, n. 5, jan 2012. ISSN 1079-7114. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.108.051101>>. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 21.
- 142 DIRAC, P. A. M. The Cosmological Constants. *Nature*, v. 139, n. 8, p. 323–323, feb 1937. ISSN 1476-4687. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/139323a0>>. Citado na página 18.

- 143 DIRAC, P. A. M. A New Basis for Cosmology. *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, v. 165, n. 921, p. 199–208, apr 1938. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1938RSPSA.165..199D>>. Citado na página 18.
- 144 DIRAC, P. A. M. Long Range Forces and Broken Symmetries. *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, v. 333, n. 1595, p. 403–418, jun 1973. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1973RSPSA.333..403D>>. Citado na página 18.
- 145 WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. New York: John Wiley and Sons, 1972. ISBN 978-0-471-92567-5. Citado 4 vezes nas páginas 18, 20, 173 e 175.
- 146 FABRIS, J. C. et al. *Newtonian-like gravity with variable G*. 2021. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2009.04434>>. Citado na página 18.
- 147 SCIAMA, D. W. On the origin of inertia. *MNRAS*, v. 113, p. 34, jan 1953. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1953MNRAS.113...34S>>. Citado na página 18.
- 148 DICKE, R. H. New Research on Old Gravitation. *Science*, v. 129, n. 3349, p. 621–624, mar 1959. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1959Sci...129..621D>>. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 19.
- 149 ASSELMAYER-MALUGA, T. (Ed.). *At the Frontier of Spacetime: Scalar-Tensor Theory, Bells Inequality, Machs Principle, Exotic Smoothness*. Cham: Imprint: Springer, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 20.
- 150 PEEBLES, P. J. E. Robert Dicke and the naissance of experimental gravity physics, 1957–1967. *The European Physical Journal H*, Springer Science and Business Media LLC, v. 42, n. 2, p. 177–259, oct 2016. ISSN 2102-6467. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1140/epjh/e2016-70034-0>>. Citado na página 19.
- 151 FARAONI, V. Scalar field mass in generalized gravity. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 26, n. 14, p. 145014, jun 2009. ISSN 1361-6382. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/26/14/145014>>. Citado na página 19.
- 152 BERTOTTI, B.; IEISS, L.; TORTORA, P. "A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft". *Nature*, v. 425, n. 6956, p. 374–376, sep 2003. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 78.
- 153 DICKE, R. H. Mach's Principle and Invariance under Transformation of Units. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 125, p. 2163–2167, Mar 1962. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.125.2163>>. Citado na página 21.
- 154 CHIBA, T.; YAMAGUCHI, M. Conformal-frame (in)dependence of cosmological observations in scalar-tensor theory. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2013, n. 10, p. 040–040, oct 2013. ISSN 1475-7516. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2013/10/040>>. Citado na página 21.
- 155 QUIROS, I. Selected topics in scalar–tensor theories and beyond. *International Journal of Modern Physics D*, World Scientific Pub Co Pte Lt, v. 28, n. 07, p. 1930012, may 2019. ISSN 1793-6594. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1142/S021827181930012X>>. Citado na página 21.

- 156 NICOLIS, A.; RATTAZZI, R.; TRINCHERINI, E. Galileon as a local modification of gravity. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 79, n. 6, mar 2009. ISSN 1550-2368. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.79.064036>>. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 22.
- 157 DEFFAYET, C.; ESPOSITO-FARÈSE, G.; VIKMAN, A. Covariant galileon. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 79, n. 8, apr 2009. ISSN 1550-2368. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.79.084003>>. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 22.
- 158 KOBAYASHI, T.; YAMAGUCHI, M.; YOKOYAMA, J. Generalized g-inflation: –inflation with the most general second-order field equations–. *Progress of Theoretical Physics*, Oxford University Press (OUP), v. 126, n. 3, p. 511–529, sep 2011. ISSN 1347-4081. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1143/PTP.126.511>>. Citado na página 22.
- 159 GANZ, A.; NOUI, K. Reconsidering the Ostrogradsky theorem: Higher-derivatives Lagrangians, Ghosts and Degeneracy. *Class. Quant. Grav.*, v. 38, n. 7, p. 075005, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.
- 160 LANGLOIS, D. “Dark energy and modified gravity in degenerate higher-order scalar–tensor (DHOST) theories: A review”. *International Journal of Modern Physics D*, World Scientific Pub Co Pte Lt, v. 28, n. 05, p. 1942006, apr 2019. ISSN 1793-6594. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1142/S0218271819420069>>. Citado 9 vezes nas páginas 23, 24, 25, 26, 27, 29, 32, 33 e 35.
- 161 WOODWARD, J. F. Gravity and inertia in general relativity. In: ESSA, K. S. (Ed.). *Gravitational Field*. Rijeka: IntechOpen, 2021. cap. 2. Disponível em: <<https://doi.org/10.5772/intechopen.99760>>. Citado 3 vezes nas páginas 23, 153 e 154.
- 162 ZUMALACÁRREGUI, M.; GARCÍA-BELLIDO, J. Transforming gravity: From derivative couplings to matter to second-order scalar-tensor theories beyond the horndeski lagrangian. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 89, n. 6, mar 2014. ISSN 1550-2368. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.89.064046>>. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.
- 163 GLEYZES, J. et al. New class of consistent scalar-tensor theories. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 114, n. 21, may 2015. ISSN 1079-7114. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.114.211101>>. Citado na página 24.
- 164 TAKAHASHI, K.; MOTOHASHI, H.; MINAMITSUJI, M. Invertible disformal transformations with higher derivatives. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 105, n. 2, jan 2022. ISSN 2470-0029. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.105.024015>>. Citado na página 26.
- 165 TAKAHASHI, K.; MINAMITSUJI, M.; MOTOHASHI, H. Generalized disformal horndeski theories: Cosmological perturbations and consistent matter coupling. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, Oxford University Press (OUP), v. 2023, n. 1, nov 2022. ISSN 2050-3911. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1093/ptep/ptac161>>. Citado na página 26.

- 166 DEFFAYET, C.; GARCIA-SAENZ, S. Degeneracy, matter coupling, and disformal transformations in scalar-tensor theories. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 102, n. 6, sep 2020. ISSN 2470-0029. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.102.064037>>. Citado na página 26.
- 167 TAKAHASHI, K. Invertible disformal transformations with arbitrary higher-order derivatives. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 108, n. 8, oct 2023. ISSN 2470-0029. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.108.084031>>. Citado na página 26.
- 168 KOBAYASHI, T.; HIRAMATSU, T. Weak-field regime of scalar-tensor theories with an instantaneous mode. *Phys. Rev. D*, v. 109, n. 6, p. 064091, 2024. Citado na página 26.
- 169 BLAU, M. *Lecture Notes on General Relativity*. Albert Einstein Center for Fundamental Physics Institut für Theoretische Physik Universität Bern: [s.n.], 2022. 988 p. Disponível em: <<http://www.blau.itp.unibe.ch/GRLecturenotes.html>>. Citado 5 vezes nas páginas 27, 28, 29, 167 e 168.
- 170 CARROLL, S. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. [S.l.]: Pearson Education, 2004. 525 p. Citado 10 vezes nas páginas 27, 28, 123, 126, 134, 136, 142, 162, 163 e 167.
- 171 PIATTELLA, O. *Lecture Notes in Cosmology*. Springer International Publishing, 2018. ISSN 2198-7890. ISBN 9783319955704. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-95570-4>>. Citado 8 vezes nas páginas 31, 171, 172, 173, 174, 175, 176 e 177.
- 172 D'AMICO, G. et al. "Weakening gravity on redshift-survey scales with kinetic matter mixing". *JCAP*, IOP Publishing, v. 2017, n. 02, p. 014–014, feb 2017. ISSN 1475-7516. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2017/02/014>>. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 39.
- 173 DODELSON, S.; SCHMIDT, F. *Modern Cosmology*. [S.l.: s.n.], 2020. Citado 6 vezes nas páginas 34, 171, 172, 174, 175 e 176.
- 174 SAWICKI, I.; BELLINI, E. Limits of quasistatic approximation in modified-gravity cosmologies. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 92, n. 8, oct 2015. ISSN 1550-2368. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.92.084061>>. Citado na página 35.
- 175 TINO, G. et al. "Precision gravity tests and the Einstein Equivalence Principle". *Prog. Part. Nucl. Phys.*, Elsevier BV, v. 112, p. 103772, may 2020. ISSN 0146-6410. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.ppnp.2020.103772>>. Citado 3 vezes nas páginas 38, 54 e 55.
- 176 VALADÃO, E. C. *Lentes Gravitacionais: Seção de Choque de Formação de Arcos e Simulações Astronômicas*. 2022. 192 p. Tese (Bacharelado em Física) — Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro. Citado 4 vezes nas páginas 40, 117, 171 e 178.

- 177 SCHNEIDER, P.; EHLERS, J.; FALCO, E. E. *Gravitational Lenses*. 1. ed. [S.l.]: Springer, 1992. 564 p. Citado na página 40.
- 178 SCHNEIDER, P.; KOCHANKEK, C.; WAMBSGANSS, J. *Gravitational Lensing: Strong, Weak and Micro*. 1. ed. [S.l.]: Springer, 2006. 565 p. Citado 3 vezes nas páginas 40, 178 e 190.
- 179 MOLLERACH, S.; ROULET, E. *Gravitational Lensing and Microlensing*. 1. ed. [S.l.]: World Scientific, 2002. 204 p. Citado na página 40.
- 180 PETTERS, A. O.; LEVINE, H.; WAMBSGANSS, J. *Singularity Theory and Gravitational Lensing*. 1. ed. [S.l.]: Springer, 2001. 615 p. Citado na página 40.
- 181 FREITAS, V. P. d. *Arcos Gravitacionais na Escala Galáctica: Modelagem Analítica e Seções de Choque*. 2018. 140 p. Tese (Doutorado em Ciências Físicas) — Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro. Disponível em: <[http://cbpfindex.cbpf.br/publication\\_pdfs/teseDeDoutorado\\_2021-07-20-09-09-37dGVzZURlRG91dG9yYWRv.pdf](http://cbpfindex.cbpf.br/publication_pdfs/teseDeDoutorado_2021-07-20-09-09-37dGVzZURlRG91dG9yYWRv.pdf)>. Citado 9 vezes nas páginas 40, 43, 48, 50, 178, 188, 190, 194 e 196.
- 182 DÚMET-MONTOYA, H. S. *Modelagens Semianalíticas para Arcos Gravitacionais: Seção de Choque e Método Perturbativo em Lentes Pseudoelípticas*. 2011. 219 p. Tese (Doutorado em Ciências Físicas) — Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro. Disponível em: <[http://cbpfindex.cbpf.br/publication\\_pdfs/Tese\\_Habib-Dumet.2012\\_05\\_08\\_15\\_48\\_30.pdf](http://cbpfindex.cbpf.br/publication_pdfs/Tese_Habib-Dumet.2012_05_08_15_48_30.pdf)>. Citado 5 vezes nas páginas 40, 46, 49, 178 e 190.
- 183 SCHNEIDER, P.; EHLERS, J.; FALCO, E. E. *"Gravitational Lenses"*. [S.l.]: Springer Berlin, Heidelberg, 1992. 560 p. ISSN 0941-7834. Citado 4 vezes nas páginas 40, 52, 53 e 177.
- 184 FLEURY, P.; LARENA, J.; UZAN, J.-P. Gravitational lenses in arbitrary space-times. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 38, n. 8, p. 085002, mar 2021. ISSN 1361-6382. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/1361-6382/abea2d>>. Citado na página 41.
- 185 HANCOCK, M. J. *Method of Green's Functions*. 2006. Disponível em: <<https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-303-linear-partial-differential-equations-fall-2006/lecture-notes/greensfn.pdf>>. Citado na página 45.
- 186 LEMOS, N. A. *Mecânica Analítica*. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2007. 398 p. Citado 4 vezes nas páginas 51, 58, 140 e 162.
- 187 FALCIANO, F. T. *Gravitation: Foundations and Applications (Lecture Notes)*. 1. ed. [S.l.: s.n.], 2022. v. 1. 264 p. Citado 5 vezes nas páginas 52, 160, 163, 167 e 168.
- 188 MENEGHETTI, M. *Introduction to Gravitational Lensing: With Python Examples*. Springer International Publishing, 2021. (Lecture Notes in Physics). ISBN 9783030735821. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=2HlMEAAQBAJ>>. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 190.
- 189 PERIVOLAROPOULOS, L.; ANTONIOU, I.; PAPADOPOULOS, D. Probing dark fluids and modified gravity with gravitational lensing. *Monthly Notices of the Royal*

*Astronomical Society*, v. 524, n. 1, p. 1246–1257, 06 2023. ISSN 0035-8711. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/mnras/stad1882>>. Citado na página 54.

190 ISHAK, M.; RINDLER, W. The relevance of the cosmological constant for lensing. *General Relativity and Gravitation*, Springer Science and Business Media LLC, v. 42, n. 9, p. 2247–2268, apr 2010. ISSN 1572-9532. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s10714-010-0973-9>>. Citado na página 54.

191 TAKIZAWA, K.; ONO, T.; ASADA, H. Gravitational lens without asymptotic flatness: Its application to weyl gravity. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 102, n. 6, Sep 2020. ISSN 2470-0029. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.102.064060>>. Citado na página 54.

192 RINDLER, W.; ISHAK, M. Contribution of the cosmological constant to the relativistic bending of light revisited. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 76, n. 4, aug 2007. ISSN 1550-2368. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.76.043006>>. Citado na página 54.

193 BHATTACHARYA, A. et al. Light bending in the galactic halo by rindler-ishak method. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2010, n. 09, p. 004–004, sep 2010. ISSN 1475-7516. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2010/09/004>>. Citado na página 54.

194 KUANG, X.-M.; ÖVGÜN, A. Strong gravitational lensing and shadow constraint from m87\* of slowly rotating kerr-like black hole. *Annals of Physics*, Elsevier BV, v. 447, p. 169147, dec 2022. ISSN 0003-4916. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.aop.2022.169147>>. Citado na página 54.

195 BOZZA, V. et al. Strong field limit of black hole gravitational lensing. *General Relativity and Gravitation*, Springer Science and Business Media LLC, v. 33, n. 9, p. 1535–1548, sep 2001. ISSN 1572-9532. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1023/A:1012292927358>>. Citado na página 54.

196 JAIN, B.; VIKRAM, V.; SAKSTEIN, J. “ASTROPHYSICAL TESTS OF MODIFIED GRAVITY: CONSTRAINTS FROM DISTANCE INDICATORS IN THE NEARBY UNIVERSE”. *ApJ*, American Astronomical Society, v. 779, n. 1, p. 39, nov 2013. ISSN 1538-4357. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/0004-637X/779/1/39>>. Citado na página 54.

197 KOOPMANS, L. & Stellar Dynamics@. *EAS Publications Series*, EDP Sciences, v. 20, p. 161–166, 2006. ISSN 1638-1963. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1051/eas:2006064>>. Citado na página 55.

198 KOOPMANS, L. V. E. et al. "THE STRUCTURE AND DYNAMICS OF MASSIVE EARLY-TYPE GALAXIES: ON HOMOLOGY, ISOTHERMALITY, AND ISOTROPY INSIDE ONE EFFECTIVE RADIUS". *Astrophys. J.*, American Astronomical Society, v. 703, n. 1, p. L51–L54, sep 2009. ISSN 1538-4357. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/0004-637X/703/1/L51>>. Citado 3 vezes nas páginas 55, 59 e 68.

- 199 BINNEY, J.; TREMAINE, S. *Galactic Dynamics: Second Edition*. Princeton University Press, 2011. (Princeton Series in Astrophysics). ISBN 9781400828722. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=6mF4CKxlbLsC>>. Citado 5 vezes nas páginas 55, 57, 58, 59 e 81.
- 200 SHAJIB, A. J. et al. *Strong Lensing by Galaxies*. 2024. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2210.10790>>. Citado 3 vezes nas páginas 55, 73 e 195.
- 201 HUMPHREY, P. J.; BUOTE, D. A. The slope of the mass profile and the tilt of the fundamental plane in early-type galaxies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press (OUP), v. 403, n. 4, p. 2143–2151, apr 2010. ISSN 1365-2966. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-2966.2010.16257.x>>. Citado 2 vezes nas páginas 55 e 68.
- 202 BELLSTEDT, S. et al. The slugs survey: a comparison of total-mass profiles of early-type galaxies from observations and cosmological simulations, to  $\tilde{4}$  effective radii. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 476, n. 4, p. 4543–4564, 02 2018. ISSN 0035-8711. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/mnras/sty456>>. Citado 2 vezes nas páginas 55 e 68.
- 203 WANG, Y. et al. Early-type galaxy density profiles from illustrisng – i. galaxy correlations and the impact of baryons. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press (OUP), v. 491, n. 4, p. 5188–5215, nov 2019. ISSN 1365-2966. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1093/mnras/stz3348>>. Citado 2 vezes nas páginas 55 e 68.
- 204 XU, D. et al. The inner structure of early-type galaxies in the illustris simulation. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press (OUP), v. 469, n. 2, p. 1824–1848, apr 2017. ISSN 1365-2966. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1093/mnras/stx899>>. Citado 2 vezes nas páginas 55 e 68.
- 205 BEZERRA, G. R. IMPACT OF GALAXY DYNAMICS ON MODIFIED GRAVITY CONSTRAINTS FROM EINSTEIN RINGS (in prep.). p. 73, jul 2023. Disponível em: <[http://cbpfindex.cbpf.br/publication\\_pdfs/dissertacaoDeMestrado\\_2024-06-20-14-56-42ZGlzc2VydGFjYW9EZU1lc3RyYWRv.pdf](http://cbpfindex.cbpf.br/publication_pdfs/dissertacaoDeMestrado_2024-06-20-14-56-42ZGlzc2VydGFjYW9EZU1lc3RyYWRv.pdf)>. Citado 5 vezes nas páginas 58, 59, 68, 80 e 81.
- 206 CAPPELLARI, M. Structure and kinematics of early-type galaxies from integral field spectroscopy. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, Annual Reviews, v. 54, n. 1, p. 597–665, sep 2016. ISSN 1545-4282. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1146/annurev-astro-082214-122432>>. Citado na página 59.
- 207 OLIVEIRA, F. A. de. Testando teorias de gravitação modificada com lentes gravitacionais. p. 74, set 2022. Disponível em: <[http://cbpfindex.cbpf.br/publication\\_pdfs/dissertacaoDeMestrado\\_2024-06-24-09-56-31ZGlzc2VydGFjYW9EZU1lc3RyYWRv.pdf](http://cbpfindex.cbpf.br/publication_pdfs/dissertacaoDeMestrado_2024-06-24-09-56-31ZGlzc2VydGFjYW9EZU1lc3RyYWRv.pdf)>. Citado na página 61.
- 208 JORGENSEN, I.; FRANX, M.; KJAERGAARD, P. "Spectroscopy for E and S0 galaxies in nine clusters". *MNRAS*, v. 276, n. 4, p. 1341–1364, oct 1995. Citado na página 64.

- 209 JIANG, G.; KOCHANNEK, C. S. "The Baryon Fractions and Mass-to-Light Ratios of Early-Type Galaxies". *The Astrophysical Journal*, American Astronomical Society, v. 671, n. 2, p. 1568–1578, dec 2007. ISSN 1538-4357. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1086/522580>>. Citado na página 64.
- 210 PADILLA, L. E. et al. Cosmological parameter inference with bayesian statistics. *Universe*, MDPI AG, v. 7, n. 7, p. 213, jun 2021. ISSN 2218-1997. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.3390/universe7070213>>. Citado na página 67.
- 211 GERHARD, O. et al. "Dynamical Family Properties and Dark Halo Scaling Relations of Giant Elliptical Galaxies". *Astron. J.*, American Astronomical Society, v. 121, n. 4, p. 1936–1951, apr 2001. ISSN 0004-6256. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1086/319940>>. Citado na página 68.
- 212 Foreman-Mackey, D. et al. "emcee: The MCMC Hammer". *PASP*, v. 125, n. 925, p. 306, mar 2013. Citado na página 68.
- 213 Price-Whelan *et al.*, A. M. "The Astropy Project: Sustaining and Growing a Community-oriented Open-source Project and the Latest Major Release (v5.0) of the Core Package". *Astrophys. J.*, American Astronomical Society, v. 935, n. 2, p. 167, aug 2022. ISSN 1538-4357. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/ac7c74>>. Citado na página 68.
- 214 DUTTON, A. A.; TREU, T. "The bulge–halo conspiracy in massive elliptical galaxies: implications for the stellar initial mass function and halo response to baryonic processes". *MNRAS*, Oxford University Press (OUP), v. 438, n. 4, p. 3594–3602, jan 2014. ISSN 0035-8711. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1093/mnras/stt2489>>. Citado na página 73.
- 215 TONIATO, J. D.; RODRIGUES, D. C.  $\gamma$ -like parameters and the gravitational slip in scalar-tensor and  $f(R)$  theories". *Phys. Rev. D*, American Physical Society (APS), v. 104, n. 4, aug 2021. ISSN 2470-0029. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.104.044020>>. Citado 2 vezes nas páginas 76 e 191.
- 216 VALADÃO, E. C. et al. Probing the dark energy leakage effect on kiloparsec scales through gravitational lensing (in prep.). 2025. Citado 2 vezes nas páginas 77 e 191.
- 217 COLLETT, T. E. et al. "A precise extragalactic test of General Relativity". *Science*, American Association for the Advancement of Science (AAAS), v. 360, n. 6395, p. 1342–1346, jun 2018. ISSN 1095-9203. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1126/science.aao2469>>. Citado na página 78.
- 218 MELO-CARNEIRO, C. R.; FURLANETTO, C.; CHIES-SANTOS, A. L.  $\sim 0.3\%$ . *MNRAS*, Oxford University Press (OUP), v. 520, n. 2, p. 1613–1629, jan 2023. ISSN 1365-2966. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1093/mnras/stad162>>. Citado na página 78.
- 219 REASENBERG, R. D. et al. "Viking relativity experiment - Verification of signal retardation by solar gravity". *Astrophys. J. Lett.*, v. 234, p. L219–L221, dec 1979. Citado na página 78.

- 220 KRISHER, T. P.; ANDERSON, J. D.; TAYLOR, A. H. "Voyager 2 Test of the Radar Time-Delay Effect". *Astrophys. J.*, v. 373, p. 665, jun 1991. Citado na página 78.
- 221 Froeschle, M.; Mignard, F.; Arenou, F. [S.l.: s.n.], 1997. v. 402. 49-52 p. (ESA Special Publication, v. 402). Citado na página 78.
- 222 HOFMANN, F.; MÜLLER, J. "Relativistic tests with lunar laser ranging". *Class. Quantum Grav.*, v. 35, n. 3, p. 035015, feb 2018. Citado na página 78.
- 223 BRUNS, D. G. "Gravitational starlight deflection measurements during the 21 August 2017 total solar eclipse". *Class. Quantum Grav.*, IOP Publishing, v. 35, n. 7, p. 075009, mar 2018. ISSN 1361-6382. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/1361-6382/aaaf2a>>. Citado na página 78.
- 224 Titov *et al.*, O. "Testing general relativity with geodetic VLBI: What a single, specially designed experiment can teach us". *Astron. Astrophys.*, EDP Sciences, v. 618, p. A8, oct 2018. ISSN 1432-0746. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/201833459>>. Citado na página 78.
- 225 Simpson *et al.*, F. "CFHTLenS: testing the laws of gravity with tomographic weak lensing and redshift-space distortions". *MNRAS*, Oxford University Press (OUP), v. 429, n. 3, p. 2249–2263, dec 2012. ISSN 0035-8711. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1093/mnras/sts493>>. Citado na página 78.
- 226 BLOOMFIELD, J. K.; BURRAGE, C.; DAVIS, A.-C. Shape dependence of vainshtein screening. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 91, n. 8, apr 2015. ISSN 1550-2368. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.91.083510>>. Citado na página 81.
- 227 SILVA, V. C. da. Filosofia Natural, Física Teórica e Metafísica: Da física dos filósofos antigos à filosofia dos físicos modernos. *Perspectivas: Revista de Filosofia da Universidade Federal do Tocantins*, v. 6, 2021. Disponível em: <<https://sistemas.uft.edu.br/periodicos/index.php/perspectivas/article/view/12445>>. Citado na página 116.
- 228 BASSALO; CARUSO; MARQUES. *Introdução às bases filosóficas da Física: Uma abordagem histórica*. 1. ed. [S.l.]: Livraria da Física, 2021. 228 p. Citado 2 vezes nas páginas 116 e 117.
- 229 EINSTEIN, A. Zur allgemeinen Relativitätstheorie (On the General Theory of Relativity). *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, 1915. Citado 2 vezes nas páginas 116 e 164.
- 230 EINSTEIN, A. Zur allgemeinen Relativitätstheorie (Nachtrag) (On the General Theory of Relativity (Addendum)). *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, 1915. Citado 2 vezes nas páginas 116 e 164.
- 231 EINSTEIN, A. "Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie (Explanation of the Perihelion Motion of Mercury from the General Theory of Relativity). *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, 1915. Citado 2 vezes nas páginas 116 e 165.

- 232 EINSTEIN, A. Die Feldgleichungen der Gravitation (The Field Equations of Gravitation). *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, p. 844–847, 1915. Citado 2 vezes nas páginas 116 e 164.
- 233 EINSTEIN, A. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie (The Foundation of the General Theory of Relativity). *Annalen der Physik*, v. 354, p. 769–822, 1916. Citado 4 vezes nas páginas 116, 158, 159 e 182.
- 234 NEWTON, I. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (Princípios Matemáticos de Filosofia Natural)*. 3 (tradução). ed. [S.l.]: edUSP, 1729. 325 p. Citado 3 vezes nas páginas 117, 145 e 152.
- 235 JR, O. P. O que é Filosofia da Física? *Aula para o curso de Filosofia da Física, UERJ, em 26/08/2021*, 2021. Citado na página 117.
- 236 WALD, R. M. *General Relativity*. Chicago, IL: Chicago Univ. Press, 1984. 495 p. Citado 14 vezes nas páginas 118, 119, 120, 122, 123, 126, 134, 138, 142, 162, 163, 166, 167 e 168.
- 237 MOFFAT, J. A new nonsymmetric gravitational theory. *Physics Letters B*, Elsevier BV, v. 355, n. 3-4, p. 447–452, Aug 1995. ISSN 0370-2693. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/0370-2693\(95\)00670-G](http://dx.doi.org/10.1016/0370-2693(95)00670-G)>. Citado na página 126.
- 238 TERUEL, G. Nonsymmetric metric tensor and anticommutative geometry. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A, Matemáticas*, 05 2013. Disponível em: <<http://www.raczar.es/webracz/ImageServlet?mod=publicaciones&subMod=revistas&car=revista67&archivo=p105.pdf>>. Citado na página 126.
- 239 D'INVERNO, R. *Introducing Einstein's Relativity*. [S.l.]: Oxford University Press, 1992. 387 p. Citado 17 vezes nas páginas 129, 134, 136, 139, 141, 142, 150, 152, 153, 154, 157, 160, 162, 163, 165, 166 e 184.
- 240 EXTERIOR Derivative vs. Covariant Derivative vs. Lie Derivative. Disponível em: <<https://math.stackexchange.com/questions/209241/exterior-derivative-vs-covariant-derivative-vs-lie-derivative>>. Acesso em: 27 de Dezembro de 2021. Citado na página 129.
- 241 WHY do we need connections, if we have the Lie derivative? Disponível em: <<https://physics.stackexchange.com/questions/245675/why-do-we-need-connections-if-we-have-the-lie-derivative>>. Acesso em: 27 de Dezembro de 2021. Citado na página 129.
- 242 BUNGE, M. *Física e Filosofia*. [S.l.]: Editora Perspectiva, 2007. 344 p. Citado na página 131.
- 243 BAHAMONDE, S. *Modified Teleparallel theories of gravity*. 2018. 271 p. Tese (PhD in Applied Mathematics) — University College London. Disponível em: <[file:///tmp/SebastianBahamonde-ModifiedTeleparalleltheoriesofgravity\[PhDThesis\]-UCL\(2018\).pdf](file:///tmp/SebastianBahamonde-ModifiedTeleparalleltheoriesofgravity[PhDThesis]-UCL(2018).pdf)>. Citado na página 132.

- 244 SILVA, V. C.; VIDEIRA, A. A. P. “As relações entre física e metafísica a partir do realismo científico”. *Perspectivas*, v. 7, n. 2, p. 233–264, 2022. ISSN 2448-2390. Disponível em: <<https://sistemas.uft.edu.br/periodicos/index.php/perspectivas/article/view/14631>>. Citado na página 132.
- 245 SHABANI, H.; ZIAIE, A. H. Static vacuum solutions on curved space-times with torsion. *International Journal of Modern Physics A*, World Scientific Pub Co Pte Lt, v. 33, n. 16, Jun 2018. ISSN 1793-656X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1142/S0217751X18500951>>. Citado na página 132.
- 246 REIS, V. M. S.; VIDEIRA, A. A. P. John Ziman e a ciência pós-acadêmica: consensibilidade, consensualidade e confiabilidade. *scientiæ studia*, 2013. Disponível em: <<https://www.scielo.br/j/ss/a/wdySgPmwXtzkrXjLy98QWNC/?lang=pt>>. Citado na página 133.
- 247 EUCLIDES; BICUDO, I. *Os elementos*. [S.l.]: Editora UNESP, 2009. 595 p. Citado na página 136.
- 248 Prékopa *et al.*, A. *Non-Euclidean Geometries: János Bolyai Memorial Volume*. [S.l.]: Springer New York, 2006. v. 1. 506 p. (Mathematics and Its Applications, v. 1). Citado na página 137.
- 249 CIUFOLINI, I.; WHEELER, J. *Gravitation and Inertia*. [S.l.]: Princeton University Press, 1995. (Princeton Series in Physics). ISBN 9780691033235. Citado 5 vezes nas páginas 137, 153, 154, 155 e 157.
- 250 EINSTEIN, A. Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt (On a Heuristic Point of View Concerning the Production and Transformation of Light). *Annalen der Physik*, v. 17, p. 132–148, 1905. Citado na página 142.
- 251 EINSTEIN, A. Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen (On the Movement of Small Particles Suspended in Stationary Liquids Required by the Molecular Kinetic Theory of Heat). *Annalen der Physik*, v. 17, p. 549–560, 1905. Citado na página 142.
- 252 EINSTEIN, A. Zur Elektrodynamik bewegter Körper (On the Electrodynamics of Moving Bodies). *Annalen der Physik*, v. 17, p. 891–921, 1905. Citado 3 vezes nas páginas 142, 147 e 180.
- 253 EINSTEIN, A. Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig? (Does the Inertia of a Body Depend Upon Its Energy Content?). *Annalen der Physik*, v. 18, p. 639–641, 1905. Citado na página 142.
- 254 THE debated legacy of Einstein’s first wife. Disponível em: <<https://www.nature.com/articles/d41586-019-00741-6>>. Acesso em: 06 de Janeiro de 2022. Citado na página 142.
- 255 HISTORY: Einstein was no lone genius. Disponível em: <<https://www.nature.com/articles/527298a>>. Acesso em: 06 de Janeiro de 2022. Citado na página 142.

- 256 EINSTEIN, A. *A Teoria da Relatividade Especial e Geral*. [S.l.]: Editora Contraponto, 2015. 136 p. Citado 3 vezes nas páginas 144, 159 e 183.
- 257 GRIFFITHS, D. J. *Introduction to Electrodynamics*. [S.l.]: Prentice-Hall, 1999. 596 p. Citado na página 144.
- 258 JACKSON, J. D. *Classical Electrodynamics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., 1999. 833 p. Citado na página 144.
- 259 DRORY, A. The necessity of the second postulate in special relativity. *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, Elsevier BV, v. 51, p. 57–67, Aug 2015. ISSN 1355-2198. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.shpsb.2014.08.015>>. Citado 2 vezes nas páginas 146 e 147.
- 260 JACKSON, J. D. *Classical Electrodynamics*. 3. ed. California: John Wiley & Sons, Inc., 1999. 833 p. Citado na página 147.
- 261 MILLER, A. I. *Albert Einstein's Special Theory of Relativity. Emergence (1905) and Early Interpretation (1905–1911)*. [S.l.]: Addison-Wesley, Reading, 1981. v. 1. 484 p. Citado na página 147.
- 262 GOENNER, H. F. M. *On the History of Geometrization of Space-time: From Minkowski to Finsler Geometry*. 2008. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/0811.4529>>. Citado na página 147.
- 263 NORTON, J. D. *Mach's Principle: From Newton's Bucket to Quantum Gravity*. [S.l.]: Birkhäuser Boston, MA, 1995. v. 6. 536 p. (Einstein Studies, v. 6). ISSN 2381-5833. Citado na página 153.
- 264 Narlikar *et al.*, J. *Mach's Principle and the Origin of Inertia*. [S.l.]: C. Roy Keys Inc., 2003. v. 1. 145 p. (Proceedings of the International Workshop on Mach's Principle and the Origin of Inertia, v. 1). Citado na página 153.
- 265 FAY, J. Mach's principle and mach's hypotheses. *Studies in History and Philosophy of Science*, v. 103, p. 58–68, 2024. ISSN 0039-3681. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0039368123001644>>. Citado na página 153.
- 266 PFISTER, H.; KING, M. *Inertia and Gravitation: The Fundamental Nature and Structure of Space-Time*. [S.l.]: Springer International, 2015. v. 1. 180 p. (Lecture Notes in Physics, v. 1). Citado na página 153.
- 267 MISNER, C. W.; THORNE, K. S.; WHEELER, J. A. *Gravitation*. [S.l.]: W. H. Freeman and Co., 1973. 1301 p. Citado 5 vezes nas páginas 153, 160, 163, 167 e 168.
- 268 EINSTEIN, A. Is there a gravitational effect which is analogous to electrodynamic induction? *Vierteljahrsschrift für gerichtliche Medizin und öffentliches Sanitätswesen*, v. 44, p. 37–40, 1912. Disponível em: <<https://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol4-trans/138>>. Citado na página 154.
- 269 GHARIB, M.; ROH, C.; NOCA, F. Leonardo da vinci's visualization of gravity as a form of acceleration. *Leonardo*, v. 56, p. 21–27, 11 2022. Citado na página 157.

- 270 STACHEL, J. Einstein and the Rigidly Rotating Disk. In: HELD, A. (Ed.). *General Relativity and Gravitation. Vol. 1. One hundred years after the birth of Albert Einstein. Edited by A. Held. New York.* [s.n.], 1980. v. 1, p. 1. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1980grg1.conf....1S>>. Citado na página 158.
- 271 GRØN, Ø. Relativistic description of a rotating disk with angular acceleration. *Foundations of Physics*, v. 9, n. 5-6, p. 353–369, 1979. Citado na página 158.
- 272 GRØN, Ø. Space geometry in rotating reference frames: A historical appraisal. In: \_\_\_\_\_. *Relativity in Rotating Frames: Relativistic Physics in Rotating Reference Frames*. Dordrecht: Springer Netherlands, 2004. p. 285–333. ISBN 978-94-017-0528-8. Disponível em: <[https://doi.org/10.1007/978-94-017-0528-8\\_17](https://doi.org/10.1007/978-94-017-0528-8_17)>. Citado na página 158.
- 273 POISSON, E.; WILL, C. *Gravity: Newtonian, Post-Newtonian, Relativistic*. Cambridge University Press, 2014. ISBN 9781107032866. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=PZ5cAwAAQBAJ>>. Citado na página 160.
- 274 ENERGY Is Not Conserved. Disponível em: <<https://www.preposterousuniverse.com/blog/2010/02/22/energy-is-not-conserved/>>. Acesso em: 24 de Janeiro de 2022. Citado na página 162.
- 275 CURIEL, E. On geometric objects, the non-existence of a gravitational stress-energy tensor, and the uniqueness of the einstein field equation. *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, Elsevier BV, v. 66, p. 90–102, May 2019. ISSN 1355-2198. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.shpsb.2018.08.003>>. Citado na página 162.
- 276 ROWE, D. E. *Emmy Noether on Energy Conservation in General Relativity*. 2019. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1912.03269v1>>. Citado na página 162.
- 277 DYER, E.; HINTERBICHLER, K. Boundary terms, variational principles, and higher derivative modified gravity. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 79, n. 2, jan 2009. ISSN 1550-2368. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.79.024028>>. Citado na página 163.
- 278 JANSSEN, M.; RENN, J. Arch and scaffold: How Einstein found his field equations. *Physics Today*, v. 68, n. 11, p. 30–36, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/PT.3.2979>>. Citado na página 164.
- 279 EINSTEIN, A. Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie (Cosmological Considerations in the General Theory of Relativity). *j-S-B-PREUSS-AKAD-WISS-1*, p. 142–152, 1917. Citado 2 vezes nas páginas 164 e 170.
- 280 ABBOTT, B. P.; ABBOTT, R.; ABBOTT, T. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 116, p. 061102, Feb 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.061102>>. Citado na página 165.
- 281 AKIYAMA, K.; BOUMAN, K.; WOODY, D. First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole. *Astrophysical Journal Letters*, v. 875, 04 2019. Disponível em: <<https://iopscience.iop.org/article/10.3847/2041-8213/ab0ec7/pdf>>. Citado na página 165.

- 282 DAHIA, F.; SILVA, P. J. F. da. Static observers in curved spaces and non-inertial frames in minkowski spacetime. *General Relativity and Gravitation*, Springer Science and Business Media LLC, v. 43, n. 1, p. 269–292, sep 2010. ISSN 1572-9532. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s10714-010-1086-1>>. Citado na página 168.
- 283 BISWAS, T. *Physical Interpretation of Coordinates for the Schwarzschild Metric*. 2008. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/0809.1452>>. Citado na página 168.
- 284 CARNEIRO, F.; ULHOA, S.; LOBO, M. On reference frames and coordinate transformations. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, Fa-pUNIFESP (SciELO), v. 46, 2024. ISSN 1806-1117. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2024-0043>>. Citado na página 168.
- 285 GAUTREAU, R.; HOFFMANN, B. The schwarzschild radial coordinate as a measure of proper distance. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 17, p. 2552–2555, May 1978. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.17.2552>>. Citado na página 168.
- 286 HOBSON, M.; EFSTATHIOU, G.; LASENBY, A. *General Relativity: An Introduction for Physicists*. Cambridge University Press, 2006. ISBN 9781139447546. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=xma1QuTJphYC>>. Citado na página 169.
- 287 WAS Giordano Bruno Burned at the Stake for Believing in Exoplanets? Disponível em: <<https://blogs.scientificamerican.com/observations/was-giordano-bruno-burned-at-the-stake-for-believing-in-exoplanets/>>. Acesso em: 26 de Outubro de 2021. Citado na página 170.
- 288 VEIGA, C. H. *Ensino a Distância: Cosmologia. Da Origem ao Fim do Universo. 2015*. Módulo 2: Conhecendo o universo em que vivemos. [S.l.]: Observatório Nacional, 2015. 56 p. Citado na página 170.
- 289 FALCIANO, F. T.; FABRIS, J. C. A hipótese do átomo primordial de georges lemaître. *CADERNOS DE ASTRONOMIA*, v. 4, n. 2, p. 165–175, set 2023. ISSN 2675-4754. Citado na página 171.
- 290 VEIGA, C. H. *Ensino a Distância: Cosmologia. Da Origem ao Fim do Universo. 2015*. Módulo 3: A teoria relativística da gravitação e a nova visão do conteúdo do universo. [S.l.]: Observatório Nacional, 2015. 56 p. Citado na página 171.
- 291 BAUMANN, D. *Cosmology*. Cambridge University Press, 2022. ISBN 9781108838078. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=fAK1zgEACAAJ>>. Citado 7 vezes nas páginas 171, 172, 173, 174, 175, 176 e 177.
- 292 MARTENS, N. C. M. Dark Matter Realism. *Foundations of Physics*, Springer Science and Business Media LLC, v. 52, n. 1, Dec 2021. ISSN 1572-9516. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s10701-021-00524-y>>. Citado na página 172.
- 293 AGHANIM, N. et al. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, EDP Sciences, v. 641, p. A6, Sep 2020. ISSN 1432-0746. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/201833910>>. Citado na página 172.

- 294 ZYLA, P. A. et al. Astrophysical Constants and Parameters. *Particle Data Group*, 2021. Disponível em: <<https://pdg.lbl.gov/2021/web/viewer.html?file=../reviews/rpp2021-rev-astrophysical-constants.pdf>>. Citado na página 172.
- 295 COLIN, J. et al. Evidence for anisotropy of cosmic acceleration. *Astronomy & Astrophysics*, EDP Sciences, v. 631, p. L13, Nov 2019. ISSN 1432-0746. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/201936373>>. Citado na página 173.
- 296 SECREST, N. J. et al. A Test of the Cosmological Principle with Quasars. *The Astrophysical Journal Letters*, American Astronomical Society, v. 908, n. 2, p. L51, Feb 2021. ISSN 2041-8213. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.3847/2041-8213/abdd40>>. Citado na página 173.
- 297 MO, H.; BOSCH, F. van den; WHITE, S. *Galaxy Formation and Evolution*. Cambridge University Press, 2010. (Galaxy Formation and Evolution). ISBN 9780521857932. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=Zj7fDU3Z4wsC>>. Citado na página 174.
- 298 NOVAES, M.; STUDART, N. Eddington e o encurvamento gravitacional da luz — com a tradução de Weighting Light do seu clássico livro Space, Time and Gravitation. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 41, p. 8, Dez 2019. ISSN 1806-9126. Disponível em: <<https://www.scielo.br/j/rbef/a/rkvYFC7kfw4cHjvQFkTZWg/?lang=pt>>. Citado 2 vezes nas páginas 178 e 179.
- 299 LENZI, C. H.; POMPEIA, P. J.; STUDART, N. A deflexão gravitacional da luz: De Newton a Einstein. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 41, p. 19, Dez 2019. ISSN 1806-9126. Disponível em: <<https://www.scielo.br/j/rbef/a/NBrZSDXXpG87X3v4KjD4FKQ/?lang=pt>>. Citado na página 178.
- 300 VALLS-GABAUD, D. The conceptual origins of gravitational lensing. In: *AIP Conference Proceedings*. AIP, 2006. v. 861, p. 1163–1163. ISSN 0094-243X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1063/1.2399715>>. Citado 3 vezes nas páginas 178, 179 e 188.
- 301 MARAT, J. P. *Découvertes [de M. Marat] sur la lumière*. 1780. Disponível em: <<https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k1516399p/f1.vertical>>. Citado na página 179.
- 302 MARAT, J. P. *Notions élémentaires d'optique*. 1784. Disponível em: <<https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k6213679b/f43.vertical>>. Citado na página 179.
- 303 SOLDNER, J. G. v. Über die ablenkung eines lichtstrahls von seiner geradlinigen bewegung durch die attraktion eines weltkörpers, an welchem er nahe vorbeigeht. *Berliner Astronomisches Jahrbuch*, p. 161–172, 1801. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/andp.19213701503>>. Citado na página 179.
- 304 EINSTEIN, A. Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen (On the Relativity Principle and the Conclusions Drawn from It). *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik*, v. 4, p. 411–462, 1907. Citado na página 180.
- 305 EINSTEIN, A. Über den Einfluß der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes (On the Influence of Gravitation on the Propagation of Light). *Annalen der Physik*, v. 10, p. 898–908], 1911. Citado na página 181.

- 306 FERRARO, R. The equivalence principle and the bending of light. *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers (AAPT), v. 71, n. 2, p. 168–170, Feb 2003. ISSN 1943-2909. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1119/1.1517597>>. Citado na página 184.
- 307 EHLERS, J.; RINDLER, W. Local and Global Light Bending in Einstein's and Other Gravitational Theories. *General Relativity and Gravitation*, American Association of Physics Teachers (AAPT), v. 29, n. 4, p. 519–529, Apr 1997. Disponível em: <<https://doi.org/10.1023/A:1018843001842>>. Citado na página 184.
- 308 CATCHPOLE, R.; DOLAN, G. *General Relativity and the 1919 Solar Eclipse*. Disponível em: <<http://www.royalobservatorygreenwich.org/articles.php?article=1283>>. Citado 2 vezes nas páginas 185 e 186.
- 309 NUNES, M. R. *Einstein no Brasil: País que provou por duas vezes sua Teoria da Relatividade*. 2005. Citado na página 185.
- 310 RENN, J.; SAUER, T. Eclipses of the Stars - Mandl, Einstein, and the Early History of Gravitational Lensing. *Revisiting the Foundations of Relativistic Physics - Festschrift in Hono of John Stachel*, p. 28, 2000. Disponível em: <<https://www.mpiwg-berlin.mpg.de/Preprints/P160.PDF>>. Citado na página 186.
- 311 CHWOLSON, O. Über eine mögliche Form fiktiver Doppelsterne. *Astronomische Nachrichten*, v. 221, p. 329, jun 1924. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1924AN....221..329C/abstract>>. Citado na página 186.
- 312 EINSTEIN, A. Lens-Like Action of a Star by the Deviation of Light in the Gravitational Field. *Science*, v. 84, n. 2188, p. 506–507, dec 1936. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1936Sci....84..506E/abstract>>. Citado na página 186.
- 313 RENN, J.; SAUER, T.; STACHEL, J. The Origin of Gravitational Lensing: A Postscript to Einstein's 1936 Science Paper. *Science*, v. 275, n. 5297, p. 184–186, 1997. Disponível em: <<https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.275.5297.184>>. Citado na página 186.
- 314 ZWICKY, F. Nebulae as Gravitational Lenses. *Physical Review*, v. 51, n. 4, p. 290–290, feb 1937. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1937PhRv...51..290Z/abstract>>. Citado na página 187.
- 315 REFSDAL, S. The gravitational lens effect. *MNRAS*, v. 128, p. 295, jan 1964. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1964MNRAS.128..295R/abstract>>. Citado na página 187.
- 316 REFSDAL, S. On the Possibility of Determining Hubble's Parameter and the Masses of Galaxies from the Gravitational Lens Effect. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 128, n. 4, p. 307–310, 09 1964. ISSN 0035-8711. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/mnras/128.4.307>>. Citado 2 vezes nas páginas 187 e 191.
- 317 REFSDAL, S. On the possibility of determining Hubble's parameter and the masses of galaxies from the gravitational lens effect. *MNRAS*, v. 128, p. 307, jan 1964. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1964MNRAS.128..307R/abstract>>. Citado na página 187.

- 318 WALSH, D.; CARSWELL, R. F.; WEYMANN, R. J. 0957+561 A, B: twin quasistellar objects or gravitational lens? *Nature*, v. 279, p. 381–384, may 1979. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1979Natur.279..381W>>. Citado na página 187.
- 319 LYND, R.; PETROSIAN, V. Giant Luminous Arcs in Galaxy Clusters. *Bulletin of the American Astronomical Society*, v. 18, p. 1014, sep 1986. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1986BAAS...18R1014L>>. Citado na página 187.
- 320 PACZYŃSKI, B. Giant luminous arcs discovered in two clusters of galaxies. *Nature*, v. 12, p. 572–573, feb 1987. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/325572a0>>. Citado na página 187.
- 321 SOUCAIL, G. et al. The giant arc in A 370 : spectroscopic evidence for gravitational lensing from a source at  $Z=0.724$ . *AAP*, v. 191, p. L19–L21, feb 1988. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1988A&A...191L..19S>>. Citado na página 187.
- 322 HEWITT, J. N. et al. Unusual radio source MG1131+0456: a possible Einstein ring. *Nature*, v. 333, n. 6173, p. 537–540, jun 1988. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1988Natur.333..537H>>. Citado na página 187.
- 323 KING, L. et al. A complete infrared Einstein ring in the gravitational lens system B1938 + 666. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 295, n. 2, p. L41–L44, 04 1998. ISSN 0035-8711. Disponível em: <<https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.1998.295241.x>>. Citado na página 187.
- 324 KEEL, B. *The double QSO 0957+561*. 2002. Disponível em: <<http://pages.astronomy.ua.edu/keel/agn/q0957.html>>. Citado na página 188.
- 325 ESA. *The last of the Frontier Fields — Abell 370*. 2017. Disponível em: <<https://esahubble.org/images/heic1711a/>>. Citado na página 188.
- 326 ALGARVE, A. O. line. Núcleo de Astronomia: Centro Ciência Viva do. *Astrónomos encontram agulha cósmica "enterrada" durante duas décadas; descoberta lança luz sobre o famoso Anel de Einstein*. 2020. Disponível em: <[https://www.ccvalg.pt/astronomia/noticias/2020/06/9\\_mg\\_1131\\_0456.htm](https://www.ccvalg.pt/astronomia/noticias/2020/06/9_mg_1131_0456.htm)>. Citado na página 188.
- 327 CERN COURIER. *Einstein ring reveals dwarf dark-matter galaxy*. 2012. Disponível em: <<https://cerncourier.com/a/einstein-ring-reveals-dwarf-dark-matter-galaxy/>>. Citado na página 188.
- 328 NASA. *Exoplanet Catalog*. 2012. Disponível em: <<https://exoplanets.nasa.gov/discovery/exoplanet-catalog/>>. Citado na página 188.
- 329 PHYSICS, T. U. of Utah. Department of; ASTRONOMY. *The Master Lens Database and The Orphan Lenses Project*. 2012. Disponível em: <<http://admin.masterlens.org/index.php>>. Citado na página 188.
- 330 HILDEBRANDT, H. et al. RCSLenS: The Red Cluster Sequence Lensing Survey. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 463, n. 1, p. 635–654, 08 2016. ISSN 0035-8711. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/mnras/stw2013>>. Citado na página 189.

- 331 KUBO, J. M.; DELL'ANTONIO, I. P. A method to search for strong galaxy–galaxy lenses in optical imaging surveys. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press (OUP), v. 385, n. 2, p. 918–928, Apr 2008. ISSN 1365-2966. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-2966.2008.12880.x>>. Citado na página 189.
- 332 MORE, A. et al. The CFHTLS-Strong Lensing Legacy Survey (SL2S): Investigating the Group-scale Lenses with the SARCS Sample. *ApJ*, v. 749, n. 1, p. 38, apr 2012. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2012ApJ...749...38M>>. Citado na página 189.
- 333 MORAES, B. et al. The CFHT/MegaCam Stripe-82 Survey. v. 44, p. 202–203, oct 2014. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2014RMxAC..44..202M>>. Citado na página 189.
- 334 ABDURRO'UF et al. The Seventeenth Data Release of the Sloan Digital Sky Surveys: Complete Release of MaNGA, MaStar and APOGEE-2 Data. 2022. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2112.02026>>. Citado na página 189.
- 335 ABBOTT, T. M. C. et al. Dark Energy Survey Year 3 results: Cosmological constraints from galaxy clustering and weak lensing. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 105, n. 2, Jan 2022. ISSN 2470-0029. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.105.023520>>. Citado 2 vezes nas páginas 189 e 192.
- 336 LI, R. et al. High-quality Strong Lens Candidates in the Final Kilo-Degree Survey Footprint. *The Astrophysical Journal*, American Astronomical Society, v. 923, n. 1, p. 16, Dec 2021. ISSN 1538-4357. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/ac2df0>>. Citado na página 189.
- 337 WONG, K.; GROUP, H. S. S. L. W. Strong Lensing Science Results from the Hyper Suprime-Cam Survey. v. 231, p. 226.01, jan 2018. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2018AAS...23122601W>>. Citado na página 189.
- 338 BLANDFORD, R. D. Strong Gravitational Lensing on the Hubble Deep Field. v. 186, p. 439, jan 1999. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1999IAUS..186..439B>>. Citado na página 189.
- 339 RATNATUNGA, K. U.; GRIFFITHS, R. E.; OSTRANDER, E. J. The Top 10 List of Gravitational Lens Candidates from the HST Medium Deep Survey. *The Astronomical Journal*, American Astronomical Society, v. 117, n. 5, p. 2010–2023, May 1999. ISSN 0004-6256. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1086/300840>>. Citado na página 189.
- 340 FASSNACHT, C. D. et al. Strong Gravitational Lens Candidates in the GOODS ACS Fields. *ApJ*, v. 600, n. 2, p. L155–L158, jan 2004. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2004ApJ...600L.155F>>. Citado na página 189.
- 341 MARSHALL, P. J. et al. Automated Detection of Galaxy-Scale Gravitational Lenses in High-Resolution Imaging Data. *The Astrophysical Journal*, American Astronomical Society, v. 694, n. 2, p. 924–942, Mar 2009. ISSN 1538-4357. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/0004-637X/694/2/924>>. Citado na página 189.

- 342 JACKSON, N. Gravitational lenses and lens candidates identified from the COSMOS field. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 389, n. 3, p. 1311–1318, 09 2008. ISSN 0035-8711. Disponível em: <<https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2008.13629.x>>. Citado na página 189.
- 343 WEINER, C.; SERJEANT, S.; SEDGWICK, C. Predictions for Strong-lens Detections with the Nancy Grace Roman Space Telescope. *Research Notes of the AAS*, American Astronomical Society, v. 4, n. 10, p. 190, Oct 2020. ISSN 2515-5172. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.3847/2515-5172/abc4ea>>. Citado 2 vezes nas páginas 189 e 190.
- 344 VERMA, A. et al. *Strong Lensing considerations for the LSST observing strategy*. 2019. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1902.05141>>. Citado na página 189.
- 345 MARSHALL, P. et al. *LSST Science Book. Chapter 12: Strong Gravitational Lenses*. 2009. Disponível em: <[https://www.lsst.org/sites/default/files/docs/sciencebook/SB\\_12.pdf](https://www.lsst.org/sites/default/files/docs/sciencebook/SB_12.pdf)>. Citado na página 189.
- 346 E-NEWS, L. *Strong Gravitational Lensing – LSST Investigates Cosmology, Distant Galaxies and Dark Matter*. 2011. Disponível em: <<https://www.lsst.org/sites/default/files/enews/lensing-201107.html>>. Citado na página 189.
- 347 PERCIVAL, W. et al. The Euclid Mission. v. 2020, p. 20, oct 2019. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2019clrp.2020...20P>>. Citado na página 189.
- 348 TEAMS, T. I. R. . E. *Euclid-Rubin Synergies: A Summary For The October, 2020 INP23 Scientific Council*. 2020. Disponível em: <<https://atrium.in2p3.fr/nuxeo/nxfile/default/fabee321-2d0d-42e5-bdaa-b47d42ab210e/blobholder:0/5-Doc-Synergie-Aubourg.pdf>>. Citado na página 190.
- 349 TREU, T. et al. "REFSDAL"MEETS POPPER: COMPARING PREDICTIONS OF THE RE-APPEARANCE OF THE MULTIPLY IMAGED SUPERNOVA BEHIND MACSJ1149.5+2223. *The Astrophysical Journal*, American Astronomical Society, v. 817, n. 1, p. 60, jan 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.3847/0004-637x/817/1/60>>. Citado na página 190.
- 350 RIZZO, F. et al. A dynamically cold disk galaxy in the early Universe. *Nature*, Springer Science and Business Media LLC, v. 584, n. 7820, p. 201–204, Aug 2020. ISSN 1476-4687. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/s41586-020-2572-6>>. Citado na página 190.
- 351 BLANDFORD, R. D.; NARAYAN, R. Cosmological Applications of Gravitational Lensing. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, v. 30, n. 1, p. 311–358, 1992. Disponível em: <<https://doi.org/10.1146/annurev.aa.30.090192.001523>>. Citado na página 191.
- 352 TREU, T. Strong Lensing by Galaxies. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, v. 48, n. 1, p. 87–125, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1146/annurev-astro-081309-130924>>. Citado na página 191.
- 353 KNEIB, J. P. et al. The distribution of dark matter in distant cluster-lenses : modelling modelling A 370. *A&A*, v. 273, p. 367, jun 1993. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1993A&A...273..367K>>. Citado na página 191.

- 354 KNEIB, J.-P.; NATARAJAN, P. Cluster lenses. *The Astronomy and Astrophysics Review*, Springer Science and Business Media LLC, v. 19, n. 1, Nov 2011. ISSN 1432-0754. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s00159-011-0047-3>>. Citado na página 191.
- 355 GILMAN, D. et al. Strong lensing signatures of self-interacting dark matter in low-mass haloes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 507, n. 2, p. 2432–2447, 08 2021. ISSN 0035-8711. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/mnras/stab2335>>. Citado na página 191.
- 356 AMORISCO, N. C. et al. *Halo concentration strengthens dark matter constraints in galaxy-galaxy strong lensing analyses*. 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.48550/arXiv.2109.00018>>. Citado na página 191.
- 357 NADLER, E. O. et al. Dark Matter Constraints from a Unified Analysis of Strong Gravitational Lenses and Milky Way Satellite Galaxies. *The Astrophysical Journal*, American Astronomical Society, v. 917, n. 1, p. 7, Aug 2021. ISSN 1538-4357. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/abf9a3>>. Citado na página 191.
- 358 YANG, X.-J.; CHEN, D.-M.  $f(R)$  gravity theories in the Palatini formalism constrained from strong lensing. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 394, n. 3, p. 1449–1458, 04 2009. ISSN 0035-8711. Disponível em: <<https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2008.14318.x>>. Citado na página 191.
- 359 MANCINI, A. S. et al. KiDS+GAMA: constraints on horndeski gravity from combined large-scale structure probes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 490, n. 2, p. 2155–2177, 09 2019. ISSN 0035-8711. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/mnras/stz2581>>. Citado na página 191.
- 360 SADEGHI, J.; VAEZ, H. Strong gravitational lensing with Gauss-Bonnet correction. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2014, n. 06, p. 028–028, jun 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1475-7516/2014/06/028>>. Citado na página 191.
- 361 WU, J. et al. Constrains on  $f(T)$  gravity with the strong gravitational lensing data. *Science China Physics, Mechanics & Astronomy*, v. 57, p. 988–993, 2014. Citado na página 191.
- 362 CAMINHA, G. B. et al. CLASH-VLT: A highly precise strong lensing model of the galaxy cluster RXC J2248.7-4431 (Abell S1063) and prospects for cosmography. *A&A*, v. 587, p. A80, February 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1051/0004-6361/201527670>>. Citado na página 191.
- 363 SHAJIB, A. J. et al. STRIDES: a 3.9 per cent measurement of the Hubble constant from the strong lens system DES J0408-5354. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 494, n. 4, p. 6072–6102, 03 2020. ISSN 0035-8711. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/mnras/staa828>>. Citado na página 191.
- 364 WONG, K. C. et al. H0LiCOW - XIII. A 2.4 per cent measurement of  $H_0$  from lensed quasars: 5.3 $\sigma$  tension between early- and late-Universe probes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 498, n. 1, p. 1420–1439, 09 2019. ISSN 0035-8711. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/mnras/stz3094>>. Citado na página 191.

- 365 SAHU, K. C. et al. An Isolated Stellar-Mass Black Hole Detected Through Astrometric Microlensing. *arXiv e-prints*, jan 2022. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2022arXiv220113296S>>. Citado na página 192.
- 366 BARTELMANN, M.; MATURI, M. Weak gravitational lensing. *Scholarpedia*, 2016. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1612.06535>>. Citado na página 192.
- 367 TAMBURRI, S. et al. The population of early-type galaxies: how it evolves with time and how it differs from passive and late-type galaxies. *Astronomy & Astrophysics*, EDP Sciences, v. 570, p. A102, Oct 2014. ISSN 1432-0746. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/201424040>>. Citado na página 195.
- 368 GAVAZZI, R. et al. The Sloan Lens ACS Survey. IV. The Mass Density Profile of Early-Type Galaxies out to 100 Effective Radii. *Apj*, v. 667, n. 1, p. 176–190, sep 2007. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2007ApJ...667..176G>>. Citado na página 195.
- 369 KOOPMANS, L. V. E. et al. The Structure and Dynamics of Massive Early-Types Galaxies: On Homology, Isothermality and Isotropy Inside One Effective Radius. *The Astrophysical Journal*, American Astronomical Society, v. 703, n. 1, p. L51–L54, Sep 2009. ISSN 1538-4357. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/0004-637X/703/1/L51>>. Citado na página 195.
- 370 BLUNDELL, K. M. et al. A doubled double hot spot in j0816+5003 and the logarithmic slope of the lensing potential. *The Astrophysical Journal*, American Astronomical Society, v. 723, n. 2, p. 1319–1324, oct 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0004-637x/723/2/1319>>. Citado na página 195.
- 371 GRILLO, C. On the average density profile of dark-matter halos in the inner regions of massive early-type galaxies. *The Astrophysical Journal*, American Astronomical Society, v. 747, n. 1, p. L15, Feb 2012. ISSN 2041-8213. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/2041-8205/747/1/L15>>. Citado na página 195.
- 372 DUTTON, A. A.; TREU, T. The bulge-halo conspiracy in massive elliptical galaxies: implications for the stellar initial mass function and halo response to baryonic processes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press, v. 438, n. 4, p. 3594–3602, jan 2014. Disponível em: <<https://arxiv.org/pdf/1303.4389v2.pdf>>. Citado na página 195.

## APÊNDICE A – Gravitação

### A.1 Relatividade Geral

Desde o início das civilizações humanas, nós nos questionamos sobre a origem de tudo aquilo que percebemos com nossos sentidos. Durante nossos poucos milênios de existência, sempre buscamos agregar diferentes fenômenos da natureza ao atribuímo-los a uma causa única (monismo), seja esta devido a entes não visíveis criados a nossa semelhança ou a teses metafísicas originárias dos *physikós* helênicos [227]. Correlacionar fenômenos aparentemente distintos sob um mesmo conjunto de explicações, isto é, o unificacionismo, é uma característica humana, que por meio da lógica, tenta descrever o *cosmos*<sup>20</sup>.

Nos séculos VII ao V a. C., o unificacionismo tomou outro rumo e ganhou força com os filósofos pré-socráticos (ou *physikós*), conceitos como *kósmos*, aonde o nosso mundo é um todo ordenado e passível de ser compreendido por meio da razão, e como o *arché*, o elemento que funciona como princípio primeiro da pluralidade da natureza, dominaram o campo das ideias. Para Tales de Mileto, este elemento básico gerador era a água, para Heráclito de Éfeso, o fogo, para Anaximandro de Mileto, o ápeiron, para Pitágoras de Samos, o número, para Demócrito, o átomo e para Platão, a geometria [228].

O mais surpreendente, é que estes conceitos permaneceram ao longo da história no modo de pensar de diversos grupos humanos. Em especial, o unificacionismo e a geometrização dos fenômenos naturais se tornaram fortes novamente com as ideias de Copérnico e Kepler [228], e se imbricaram plenamente na ciência com a teoria da Relatividade Geral de Albert Einstein em 1915 [229, 230, 231, 232, 233], processo conhecido como a Terceira Geometrização da Física [228]. Assim, ao longo das eras, teses metafísicas como a unificação e geometrização da natureza permearam o pensamento humano e guiaram o desenvolvimento científico por meio dos ideais e concepções pessoais de cada pesquisador.

No mundo ocidental, o unificacionismo sobrenatural deu lugar em parte ao pensamento helênico, que por conseguinte tornou-se o unificismo científico por volta do século XVII ao atual XXI. O uso deste termo se deve ao fato de que esta ideia se manteve presente ao longo do desenvolvimento da ciência moderna, e não que o conceito de unificação seja propriamente "científico", de fato esta idealização nada mais é do que uma ideia metafísica, que se provou frutífera ao longo da história. Por exemplo, Maxwell e Faraday ao unificarem a eletricidade e o magnetismo possibilitaram uma nova visão destes fenômenos naturais através do eletromagnetismo, Newton conseguiu descrever o movimento dos

---

<sup>20</sup> Neste trabalho, me dou a liberdade de definir *cosmos* como sendo o universo observável tal como o percebemos ao longo das eras e *kósmos* como o todo ideal ordenado aonde o universo observável pode estar contido. O primeiro se refere ao que observamos e o segundo ao que idealizamos.

objetos celestes e dos corpos terrestres com as mesmas leis e Glashow, Salam e Weinberg conseguiram unificar o eletromagnetismo com a interação fraca.

O leitor pode ainda questionar se o uso destas ideias é benéfico ou maléfico à ciência, em particular, os exemplos que citei foram extremamente vantajosos, pois permitiram uma evolução científica tanto na produção tecnológica como também nas diferentes concepções de mundo criadas. No entanto, também há malefícios, na busca cega por uma grande teoria unificadora, podemos ficar muitas vezes negligentes a outros conceitos, o que de fato parece acontecer atualmente dada a busca até agora inalcançada por uma lei matemática única capaz de descrever toda a natureza. Seja o que for, a realidade é que o unificacionismo científico é um princípio norteador da pesquisa.

Essa concepção unificadora da natureza teve um de seus ápices em Einstein, pois o físico-filósofo alcançou o sonho platônico supremo com a sua teoria da Relatividade Geral, ao interpretar a gravitação como uma generalização da lei da inércia de Newton [234] em geometrias espaço-temporais curvas, unificando assim os conceitos de inércia e gravidade. Além de unificar o espaço e o tempo como um ente só, esta teoria foi capaz de mudar a nossa concepção acerca da realidade por meio de suas equações de campo, pois, como veremos nesta seção, a matéria em si modifica os conceitos Newtonianos de espaço e tempo. Einstein foi então capaz de **unificar** inércia e gravidade por meio da **geometrização** do espaço-tempo [228], a peça que faltava à completude da Mecânica Clássica e da visão mecanicista da natureza.

Por fim, é importante notar que neste trabalho recorreremos ao conceito de realismo ontológico [235], isto é, para nossos fins, o espaço-tempo é um ente real independente da nossa existência e que de fato é curvado perante a localização de matéria-energia, aonde tal efeito é reconhecido pelos nossos sentidos como gravidade. Desta forma, pretendo expor nesta seção as bases teóricas conceituais e matemáticas desta teoria unificadora. Note que esta primeira seção deste capítulo é uma adaptação do trabalho autoral [176].

### A.1.1 Variedades

Quando aprendemos um idioma novo, por exemplo, o francês, precisamos aprender 3 coisas: os símbolos usados e o que representam (no caso, o alfabeto latino e seus fonemas), a estrutura e relação entre os símbolos (a gramática) e como essas duas coisas são usadas na prática (a escrita e a fala). Com a Relatividade Geral, acontece algo similar: os símbolos são dados por caracteres dos alfabetos latino e grego e pelos algarismos indo-árabicos, e representam as variedades (ou *manifolds*) e tensores, esses por conseguinte se relacionam através da estrutura lógica da geometria diferencial e se transformam na teoria da Relatividade Geral quando aplicamos esta nova "linguagem" na Física. Assim, para "falar" esta teoria, precisamos primeiro aprender seus constituintes básicos, isto é, as

variedades diferenciáveis e os tensores.

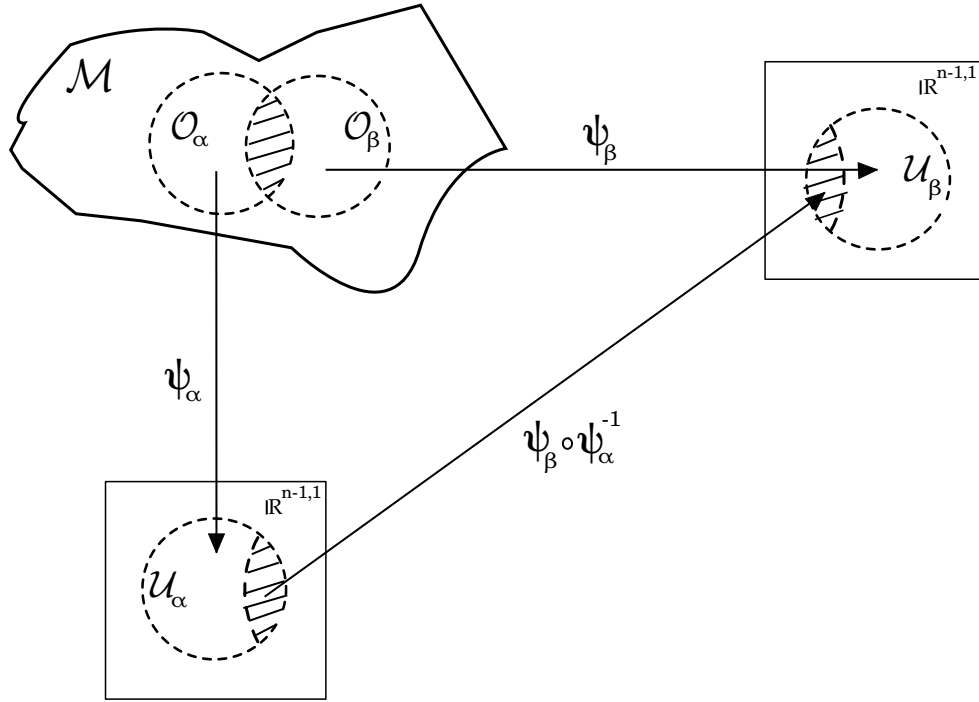
Na Matemática, uma variedade (*manifold*) diferenciável de  $n$  dimensões é um conjunto que localmente possui a estrutura diferencial de um espaço euclidiano, mas que não necessariamente possui suas propriedades globais (topologia). Na Relatividade Geral, queremos representar o espaço-tempo por um *continuum* quadridimensional, assim como é na Relatividade Especial, aonde um evento é caracterizado por 4 coordenadas, porém, não queremos assumir uma geometria global *a priori* e teremos que admitir que qualquer espaço-tempo nesta nova teoria seja localmente plano, isto é, localmente um espaço-tempo de Minkowski, para ficar de acordo com o princípio da equivalência de Einstein [136], verificado observacionalmente. Naturalmente, dado essas duas condições, uma boa opção seria representar o espaço-tempo como uma variedade.

Deste modo, diferentemente da última teoria mencionada, aonde todos os eventos do espaço-tempo podem ser colocados em uma correspondência direta e contínua com pontos do espaço-tempo de Minkowski, na teoria da Relatividade Geral o espaço-tempo é representado por uma variedade de 4 dimensões localmente (localmente aqui possui o sentido matemático, fisicamente pode-se dizer localmente-instantaneamente) equivalente a um espaço-tempo de Minkowski e cuja natureza topológica por definição não é definida *a priori*. Assim, nesta teoria, nas proximidades de um evento qualquer num espaço-tempo aleatório os fenômenos físicos obedecem às regras da Relatividade Especial.

Genericamente, temos as variedades Riemannianas e as pseudo-Riemannianas, no nosso caso, trabalhamos somente com as variedades Lorentzianas que são um caso particular das pseudo-Riemannianas. Estritamente e usando-se como base a referência [236], temos que uma variedade Lorentziana é um conjunto formado por subconjuntos abertos de  $\mathbb{R}^{n-1,1}$  (união de bolas abertas em Minkowski  $n$ -dimensional) que se unem suavemente. Assim, uma variedade real  $\mathcal{M}$ , de  $n$  dimensões e diferenciável  $\mathcal{C}^\infty$  é um conjunto de pontos, juntamente com a coleção de subconjuntos  $\{\mathcal{O}_\alpha\}$ , que satisfaz:

- Cada ponto  $p \in \mathcal{M}$  está em pelo menos uma bola aberta  $\mathcal{O}_\alpha$ , os  $\{\mathcal{O}_\alpha\}$  cobrem  $\mathcal{M}$ ;
- Para cada  $\alpha$ , existe um mapa injetor que cobre todo o contradomínio (sobrejetor),  $\Psi_\alpha : \mathcal{O}_\alpha \rightarrow \mathcal{U}_\alpha$  (bijetor), em que  $\mathcal{U}_\alpha$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^{n-1,1}$ ;
- Se dois conjuntos  $\mathcal{O}_\alpha$  e  $\mathcal{O}_\beta$  se sobrepõem ( $\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta \neq \emptyset$ ) podemos considerar o mapa  $\Psi_\beta \circ \Psi_\alpha^{-1}$  (ou  $\Psi_\beta[\Psi_\alpha^{-1}]$ ) que leva os pontos de  $\Psi_\alpha[\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta] \subset \mathcal{U}_\alpha \subset \mathbb{R}^{n-1,1}$  aos pontos em  $\Psi_\beta[\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta] \subset \mathcal{U}_\beta \subset \mathbb{R}^{n-1,1}$ . Estes subconjuntos de  $\mathbb{R}^{n-1,1}$  precisam ser abertos e o mapa  $\Psi_\beta \circ \Psi_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^{n-1,1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1,1}$  diferenciável  $\mathcal{C}^\infty$ ;
- $\mathcal{M}$  possui um tensor métrico não degenerado, simétrico, suave e definido em todo o conjunto, que pode possuir assinatura métrica  $(+, -, -, -, \dots)$  ou  $(-, +, +, +, \dots)$ , o que define o produto interno e a classificação de vetores em tipo-tempo, tipo-luz (nulos) ou tipo-espaço (como veremos nas próximas subseções).

Figura 13 - Variedade e suas cartas.



Legenda: Esquema ilustrativo das propriedades que uma variedade diferenciável tem que possuir.

Fonte: Criado pelo autor no software Inkscape com base num desenho similar de [236].

Dois aspectos importantes emergem desta definição, a primeira é o fato de que com este formalismo não há a necessidade do espaço-tempo estar contido num outro espaço hiperdimensional, há a possibilidade, porém com a Relatividade Geral não há a necessidade de dimensões espaciais e temporais maiores do que as que percebemos. A outra questão, é que um  $\Psi_\alpha$  é chamado de carta e nada mais é do que um sistema de coordenadas sobre o conjunto aberto  $\mathcal{O}_\alpha$ , e o conjunto de todas as cartas que formam a variedade ( $\cup \mathcal{O}_\alpha = \mathcal{M}$ ) e que são unidas suavemente ( $\Psi_\beta \circ \Psi_\alpha^{-1} : \Psi_\alpha[\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta] \subset \mathcal{U}_\alpha \subset \mathbb{R}^{n-1,1} \rightarrow \Psi_\beta[\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta] \subset \mathcal{U}_\beta \subset \mathbb{R}^{n-1,1}$  são mapas  $\mathcal{C}^\infty$ ) é um atlas.

Desta maneira, por exemplo, uma esfera (variedade  $\mathcal{S}^2$ ) embutida no espaço tridimensional euclidiano, só pode ser descrita através de um atlas com duas cartas abertas ou mais (por exemplo, a projeção estereográfica), tal como  $\Psi_1$  e  $\Psi_2$ , cuja lei de transformação entre as duas é  $\Psi_2 \circ \Psi_1^{-1}$ . Caso queiramos usar um único sistema de coordenadas para toda a esfera, um dos polos desta sempre ficará de fora, por isso, é necessário no mínimo duas cartas.

Consequentemente, na Relatividade Geral, não há uma correspondência direta e contínua com pontos do espaço-tempo de Minkowski, pois por definição a nossa variedade

pode possuir qualquer topologia. No entanto, dada essa mesma definição, possuímos agora uma regra de como relacionar uma variedade e um espaço-tempo de Minkowski  $n$ -dimensional localmente a partir dos conjuntos abertos e cartas, logo, podemos analisar qualquer função na variedade através dessa nova correspondência.

### A.1.2 Vetores Tangentes

Na teoria da Relatividade Especial, os elementos e operações do espaço-tempo de Minkowski satisfazem os axiomas de um espaço vetorial. Dessa forma, em todo o espaço-tempo podemos definir os conhecidos quadrivetores que se transformam de acordo com as transformações de Lorentz. No entanto, na Relatividade Geral isso não mais acontece, pois o nosso espaço-tempo não necessariamente possui uma geometria global Minkowskiana. Apesar disso, no limite de deslocamentos infinitesimais sobre um ponto é possível recuperar o conceito de espaço vetorial, pois, como definimos, a nossa variedade é localmente plana.

Isto significa que podemos usar o conceito de vetor tangente, a ideia de deslocamento infinitesimal, a apenas um ponto na variedade. Em outras palavras, cada ponto da nossa variedade possui seu próprio espaço vetorial com seus próprios vetores tangentes definidos. É nessa ideia simples que o cálculo em variedades se baseia. Novamente com base na referência [236], seja  $\mathcal{F}$  a coleção de funções do tipo  $f : \mathcal{O} \subset \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  que são diferenciáveis  $\mathcal{C}^\infty$ , definimos o vetor tangente  $\vec{v}$  no ponto  $p \in \mathcal{M}$  como o mapa  $\vec{v} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

- $\vec{v}(af + bg) = a\vec{v}(f) + b\vec{v}(g), \forall f, g \in \mathcal{F} \text{ e } \forall a, b \in \mathbb{R};$
- $\vec{v}(fg) = f(p)\vec{v}(g) + \vec{v}(f)g(p).$

A partir dessa definição, chamamos de espaço vetorial  $V_p$  a coleção de vetores tangentes ao ponto  $p$  que obedecem a:

- $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)(f) = \vec{v}_1(f) + \vec{v}_2(f);$
- $(a\vec{v})(f) = a\vec{v}(f).$

Por conseguinte, este espaço vetorial possui  $n$  dimensões, isto é, existem  $n$  linearmente independentes vetores tangentes cujas combinações lineares formam  $V_p$ . Assim, naturalmente, como as derivadas parciais obedecem a condição de linearidade e a regra de Leibniz, isto é, são tangentes a partir da nossa definição, e seja a carta  $\Psi : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{n-1,1}$  identificada pelas coordenadas  $\{x^\mu\}$  num ponto  $p \in \mathcal{O}$ ,  $f \in \mathcal{F}$  e levando em consideração que por definição  $f \circ \Psi^{-1} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  é  $\mathcal{C}^\infty$ , temos que os  $n$  linearmente independentes vetores:

$$\xi_\mu(f) = \frac{\partial(f \circ \Psi^{-1})}{\partial x^\mu} \Big|_{\Psi(p)} \quad (143)$$

formam uma base do espaço vetorial  $V_p$ .

Logo, como os  $\{\xi_\mu\}$  formam uma base de coordenadas do espaço vetorial tangente para qualquer ponto  $p \in \mathcal{M}$ , temos que qualquer vetor neste espaço pode ser escrito da forma:

$$\vec{v}(f) = v^\mu \xi_\mu(f), \quad (144)$$

em que usamos aqui a convenção de soma de Einstein, aonde há um somatório implícito no lado da relação com os dois índices iguais  $\mu$  que variam de 0 até  $n - 1$ .

Poderíamos também, ao invés de escolher esta carta, escolher uma denominada  $\Psi'$  de coordenadas  $\{x'^\mu\}$ , cuja base  $\{\xi'_\mu\}$  seria diferente. Se fizermos a regra da cadeia em  $\xi_\mu$  encontramos a relação entre as duas bases:

$$\xi_\mu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \xi'_\nu. \quad (145)$$

Tal que a derivada nesta expressão é avaliada em  $\Psi(p)$  e aonde  $x'^\nu$  é uma componente do mapa  $\Psi' \circ \Psi^{-1}$ . Como podemos escrever um mesmo vetor em duas bases de coordenadas diferentes, mas este continua sendo o mesmo vetor, as componentes também precisam mudar de acordo com a base usada, assim, igualando-se o mesmo vetor escrito em bases diferentes e utilizando-se a relação (145), obtemos a lei de transformação entre as componentes:

$$v'^\nu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} v^\mu. \quad (146)$$

É importante notar que a base de um vetor se transforma de uma maneira mas as componentes deste mesmo vetor nesta base se transformam de outro modo. Podemos perceber isto ao fazermos a transformação inversa das relações (145) e (146):

$$\xi'_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \xi_\mu \quad \text{e} \quad v^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} v'^\nu. \quad (147)$$

De maneira prática, isto significa que as componentes de um vetor tangente se transformam de acordo com uma matriz Jacobiana e a sua base de acordo com a matriz Jacobiana inversa. Uma forma simples de memorizar essas leis de transformação, é pensar que índices iguais do mesmo lado da igualdade ficam separados em diagonal e índices iguais separados dos dois lados da igualdade ficam na mesma altura.

Com este formalismo, podemos ir além e definir vetores tangentes com relação a

curvas. Com base no livro [236], uma curva suave  $C$  em  $\mathcal{M}$ , é um mapa  $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$  que é  $\mathcal{C}^\infty$ . A cada ponto da curva  $C$  podemos associar um vetor tangente  $T$  do espaço vetorial  $V_p$ . Uma questão importante, é que cada ponto dessa curva possui seu próprio espaço vetorial, estes sendo diferentes entre si fazem com que a noção de vetor tangente em cada ponto seja distinta. Por exemplo, não podemos definir se um vetor tangente num ponto  $p$  é o mesmo que um vetor tangente num outro ponto  $q$ .

Portanto, não há como compararmos os espaços vetoriais  $V_p$  e  $V_q$  só com a estrutura da nossa variedade, pois, como veremos nas próximas subseções, precisamos de um objeto chamado conexão equipado em  $\mathcal{M}$  para que possamos ter a noção de transporte paralelo de vetores entre  $p$  e  $q$  ao longo de uma curva  $C$ . Assim, na Relatividade Geral, como estamos em geometrias não-planas, a comparação entre dois espaços vetoriais  $V_p$  e  $V_q$  será dependente da escolha da curva. No caso plano esta identificação é independente da curva, e portanto, todos os espaços vetoriais são equivalentes entre si.

Apesar desse problema, podemos nesta subseção definir o que é um vetor tangente a uma curva  $C$  parametrizada por uma variável  $\lambda \in \mathbb{R}$  qualquer, sem a necessidade de mencionar as conexões. Em vista disso, para  $f \in \mathcal{F}$  qualquer e seja  $f \circ C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , podemos fazer no ponto  $p$ :

$$T(f) = \frac{d(f \circ C)}{d\lambda}. \quad (148)$$

Desse modo, o vetor de base  $\xi_\mu$  da carta  $\Psi$  é tangente à curva na variedade obtidas ao manter todas as coordenadas constantes, a não ser por  $x^\mu$ . Logo, obtemos o mapa  $x^\mu(\lambda) : C \rightarrow \mathbb{R}^{n-1,1}$ .

Podemos perceber isto melhor se expandirmos a relação (148) na base  $\{\xi_\mu\}$  utilizando a regra da cadeia:

$$\frac{d(f \circ C)}{d\lambda} = \frac{d[(f \circ \Psi^{-1}) \circ (\Psi \circ C)]}{d\lambda} = \frac{d(\Psi \circ C)^\mu}{d\lambda} \frac{\partial(f \circ \Psi^{-1})}{\partial x^\mu} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \xi_\mu. \quad (149)$$

Portanto, em qualquer base, já que agora conhecemos as leis de transformações destas, as componentes do vetor tangente à curva  $C$  parametrizada por  $\lambda$  num ponto  $p$  qualquer, são dadas a partir da relação:

$$T^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}. \quad (150)$$

Vale notar também que a nossa base nada mais é do que um conjunto de derivadas direcionais, isto é, a derivada direcional ao longo da curva definida por  $x^\mu$  (com as outras coordenadas constantes) é a derivada parcial com relação a  $x^\mu$  e parametrizada por este.

Podemos também definir o que é um campo vetorial na variedade  $\mathcal{M}$ , basta apli-

carremos um vetor  $\vec{v} \in V_p$  em cada ponto da variedade. Afirmando novamente, que essas duas subseções iniciais deste apêndice, assim como as próximas duas, estão fortemente baseadas na referência [236], a maioria das definições utilizadas foram retiradas deste livro, se o leitor quiser se aprofundar mais no assunto, por favor, veja também a referência [170].

### A.1.3 Tensores

Quando representamos uma quantidade física por um vetor, queremos dizer que esta possui uma dependência linear com o deslocamento, isto é, esta grandeza varia de acordo com a direção e o sentido deste vetor. Se considerarmos um deslocamento espacial em 3 dimensões, basta fazermos medidas em 3 direções linearmente independentes (a base), que a partir de uma combinação linear podemos obter o valor da nossa quantidade física na direção desse vetor. Mais precisamente, a nossa grandeza física é um vetor dual, isto é, um mapa linear de vetores em números, pois, neste caso, obtemos uma coleção de 3 números associados a uma base qualquer de vetores de deslocamento espacial.

No entanto, existem certas quantidades na física que possuem uma dependência multilinear em deslocamentos, isto é, dado uma coleção de vetores, estas grandezas dependem linearmente de cada um destes. Por exemplo, supondo um corpo material, podemos imaginar um plano qualquer dentro deste, equipado com um vetor normal  $\vec{n}$  num ponto  $p$ , cuja matéria num dos lados do plano causa uma pressão no outro lado em  $p$ . Assim, neste ponto, podemos medir a pressão  $P$  numa dada direção  $\vec{l}$ , e por conseguinte,  $P$  dependerá linearmente tanto de  $\vec{l}$  como de  $\vec{n}$ . Apesar das infinitas possibilidades de escolhas destes vetores, o valor da pressão pode ser calculado unicamente por  $3 \times 3 = 9$  números, que são os valores de  $P$  quando esses vetores são projetados numa base.

Estes novos objetos matemáticos são generalizações dos vetores e são chamados de tensores, mais especificamente, os tensores são mapas multilineares que levam vetores e vetores duais em números. Com base em [236] podemos definir o que são esses vetores duais, assim, seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita sobre os números reais e  $V^*$  a coleção de mapas lineares do tipo  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  com a adição e multiplicação por escalares definidas, chamamos  $V^*$  de espaço vetorial dual de  $V$  e os seus elementos de vetores duais.

Se os elementos  $\{\xi_\mu\}$  são uma base do espaço vetorial e  $\{\xi^\mu\}$  do seu espaço dual, e considerando que  $\delta^\mu_\nu$  é o delta de Kronecker ( $\delta^\mu_\nu = 0$  se  $\mu \neq \nu$  e  $\delta^0_0 = \delta^1_1 = \delta^2_2 = \delta^3_3 = 1$ ), podemos definir a ação dos funcionais  $\xi^\mu : V \rightarrow \mathbb{R}$  na base  $\{\xi_\mu\}$  como:

$$\xi^\mu(\xi_\nu) = \delta^\mu_\nu. \quad (151)$$

Esta correspondência entre as bases gera um isomorfismo entre o espaço vetorial e o seu dual, isto é, existe um mapa linear e bijetor entre os dois. Porém, esta relação é dependente

da base utilizada e assim não há uma maneira natural de comparar os dois espaços, a não ser que exista uma outra estrutura definida em  $V$  como, por exemplo, uma métrica.

Poderíamos ter feito também o caminho contrário, isto é, definir o espaço vetorial dual duplo  $V^{**}$  como um mapa de vetores duais em números e ter identificado naturalmente  $V^{**}$  como sendo o espaço vetorial  $V$ . Com estas conceituações, podemos definir um tensor  $T$  do tipo  $(k, l)$  como o mapa:

$$T : V^* \times \dots \times V^* \times V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad (152)$$

que leva  $k$  vetores duais e  $l$  vetores normais em números. Dessa maneira, um tensor  $(0, 1)$  é um vetor dual e um  $(1, 0)$  um vetor dual duplo que pode ser identificado como um vetor ordinário. Assim, dado as regras de multiplicação e soma por escalar, a coleção  $\mathcal{T}(k, l)$  de todos os tensores  $(k, l)$  é um espaço vetorial de dimensão  $n^{k+l}$ .

Além disso, podemos enxergar os tensores de outra maneira, se fixarmos o vetor pertencente a  $V$  num tensor  $(1, 1)$ , isto é, ir de  $T : V^* \times V \rightarrow \mathbb{R}$  para  $T : V^* \rightarrow \mathbb{R}$ , vemos que dado este vetor em  $V$ ,  $T$  gera um vetor dual duplo que pode ser identificado como um vetor ordinário. Desta maneira, um tensor  $(1, 1)$  pode ser visualizado como um mapa linear de  $V$  em  $V$ , ou, se tivéssemos fixado o vetor dual em  $T$ , um mapa de  $V^*$  em  $V^*$ .

Da mesma forma que um vetor pode ser escrito em termos de uma base qualquer, um tensor também pode. Porém, devido a propriedade de multilinearidade, se  $\{\xi_\mu\}$  é base de  $V$  e  $\{\xi^\nu\}$  base de  $V^*$ , temos que os  $n^{k+l}$  tensores  $\{\xi_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \xi_{\mu_k} \otimes \xi^{\nu_1} \otimes \dots \otimes \xi^{\nu_l}\}$  formam uma base de  $\mathcal{T}(k, l)$ . Portanto, na notação de soma de Einstein, um tensor pode ser escrito como:

$$T = T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \xi_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \xi_{\mu_k} \otimes \xi^{\nu_1} \otimes \dots \otimes \xi^{\nu_l}, \quad (153)$$

tal que  $T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}$  são as componentes deste tensor. Para compreender esta relação, é necessário a definição de duas operações em tensores:

- Contração: Mapa  $\mathcal{K} : \mathcal{T}(k, l) \rightarrow \mathcal{T}(k-1, l-1)$  tal que:

$$(\mathcal{K}T)^{\mu_1 \dots \mu_{(k-1)}}_{\nu_1 \dots \nu_{(l-1)}} = T^{\mu_1 \dots \sigma \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \sigma \dots \nu_l}; \quad (154)$$

- Produto tensorial: O produto tensorial (ou externo) entre um tensor  $T$  do tipo  $(k, l)$  e um outro  $T'$  do tipo  $(k', l')$  nos dá um novo tensor  $S = T \otimes T'$  do tipo  $(k+k', l+l')$  com componentes definidas por:

$$S^{\mu_1 \dots \mu_{(k+k')}}_{\nu_1 \dots \nu_{(l+l')}} = T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} T'^{\mu_{(k+1)} \dots \mu_{(k+k')}}_{\nu_{(l+1)} \dots \nu_{(l+l')}}. \quad (155)$$

Assim, por exemplo, a contração de um tensor  $(1, 1)$  através da notação de compo-

mentes em um espaço de  $n = 4$  dimensões é dada por  $T^\mu_\nu \rightarrow T^\mu_\mu = T^0_0 + T^1_1 + T^2_2 + T^3_3$ , que é o traço de uma matriz de componentes iguais a do tensor, ou seja, a contração de um tensor  $(1, 1)$  é apenas uma constante. É interessante notar também, que a partir da definição de produto externo podemos construir um tensor apenas ao tomar este produto entre vetores e vetores duais.

Até este momento definimos os tensores e suas operações de uma forma bem geral, no entanto, no caso de uma variedade Lorentziana, como vimos, o símbolo  $V_p$  designa o espaço vetorial tangente no ponto  $p$ . Por conseguinte, da mesma forma que definimos este espaço, podemos definir um outro espaço vetorial que é cotangente a este ponto, acontece que este novo espaço vetorial nada mais é do que o dual  $V_p^*$ . Assim, os elementos de  $V_p^*$  são chamados de vetores cotangentes e os de  $V_p$  de vetores tangentes.

Como vimos na subseção anterior, dado um sistema de coordenadas  $\{x^\mu\}$  em  $p$ , podemos definir a base de  $V_p$  como sendo  $\{\partial_\mu\}$ , aonde nesta nova notação denotamos  $\partial/\partial x^\mu$  por  $\partial_\mu$ . Posto isto, a partir da nossa relação (151), podemos agora definir a base do nosso espaço cotangente  $V_p^*$  como  $\{dx^\mu\}$ , que é meramente um símbolo para o mapa linear  $dx^\mu(\partial_\nu) = \delta^\mu_\nu$ . Portanto, em Relatividade Geral, estas são as bases dos vetores tangentes e cotangentes.

No entanto, há ainda mais um tipo de definição, seja  $v^\mu$  as componentes de um vetor de  $V_p$  numa base e  $v'^\mu$  as componentes deste mesmo vetor numa outra base, a lei de transformação entre essas componentes, como já demonstrado na subseção anterior, é dada por:

$$v'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} v^\nu, \quad (156)$$

e seja  $\omega_\mu$  as componentes de um vetor dual de  $V_p^*$  numa base e  $\omega'_\mu$  as componentes deste mesmo vetor dual numa outra base, temos que:

$$\omega'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \omega_\nu. \quad (157)$$

Assim, como em (156) as componentes se transformam de uma forma e em (157) a lei de transformação é invertida, dizemos que os elementos de  $V_p$  são vetores contravariantes e os de  $V_p^*$  são vetores covariantes.

De uma maneira mais simples, dizemos que tensores com índices puramente sobrescritos são **contravariantes**, tipos  $(k, 0)$ , e com índices puramente subscritos, tipos  $(0, l)$ , de tensores **covariantes**. Portanto, levando em consideração as relações (156) e (157) e a notação de soma de Einstein novamente, temos que a lei de transformação das componentes de um tensor misto de uma base de coordenadas  $\{x^\mu\}$  a uma outra  $\{x'^\mu\}$  é dada por:

$$T'^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_k}}{\partial x^{\alpha_k}} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\beta_l}}{\partial x'^{\nu_l}} T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_l}. \quad (158)$$

No geral, nas referências voltadas para os estudantes de física, a lei de transformação (158) é usada para definir o que é um tensor. Vale notar que a definição de um campo tensorial numa variedade lorentziana é bastante similar a de um campo vetorial da subseção anterior. Para um aprofundamento maior, basta se guiar pelas referências [236] e [170].

#### A.1.4 Tensor Métrico

Agora iremos definir o que é a métrica, mencionada diversas vezes nas subseções anteriores. Em suma, numa variedade lorentziana, a métrica  $\mathbb{G}$  é uma família de produtos internos definida em cada ponto de uma variedade. A estrutura métrica contém toda a informação geométrica e causal do espaço-tempo em variedades metricamente compatíveis. Este ente é utilizado para definir a distância espaço-temporal infinitesimal ao quadrado,  $ds^2$ , associada a um deslocamento infinitesimal. Como  $ds^2$  depende quadraticamente de deslocamentos infinitesimais, ou seja, de vetores tangentes, temos que  $\mathbb{G} : V_p \times V_p \rightarrow \mathbb{R}$ . Assim, a métrica é um tensor covariante  $(0, 2)$ , com a condição adicional de ser simétrica, isto é, suas componentes satisfazem  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ , e de ser não degenerada, ou seja, em notação matricial, o determinante  $g$  é diferente de zero.

Portanto, como a métrica é um tensor covariante, ao assumirmos uma base qualquer de coordenadas, podemos expandir  $\mathbb{G}$  em termos de suas componentes  $g_{\mu\nu}$  como:

$$\mathbb{G} = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu, \quad (159)$$

aonde utilizamos novamente a convenção de soma de Einstein. Por conseguinte, a quantidade  $ds^2$  é naturalmente definida como:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (160)$$

Em relação as duas propriedades mencionadas, temos que o caso da simetria da métrica é meramente uma escolha inicial, tanto que há diversos estudos de teorias cujas métricas são compostas por partes simétricas e antissimétricas ( $g_{\mu\nu} = -g_{\nu\mu}$ ), até mesmo Einstein e muitos outros tentaram sem sucesso **unificar** a gravidade com o eletromagnetismo a partir dessa antissimetrização da métrica [237, 238]. No entanto, o fato da nossa métrica ser não degenerada tem um objetivo mais direto, com base nisto há a possibilidade da construção de uma métrica inversa da mesma maneira como fazemos com as

matrizes, isto é, a métrica inversa  $g^{\mu\nu}$  é tal que:

$$g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu. \quad (161)$$

A questão principal, é que graças a esta métrica inversa possuímos agora uma maneira de estabelecer uma correspondência injetiva entre vetores e vetores duais. Por isso, em geral, a introdução de vetores duais não é feita numa sala de aula ou em certas referências, mas como estamos tratando da Relatividade Geral e não sabemos de começo a forma da métrica, é fundamental a distinção entre vetores e vetores duais. A forma simbólica de observar isso, é através da "propriedade de abaixamento e levantamento de índices" da métrica:

$$V^\mu = g^{\mu\alpha}V_\alpha \quad \text{e} \quad V_\alpha = g_{\alpha\nu}V^\nu, \quad (162)$$

em que, se substituirmos  $V_\alpha$  na primeira relação do lado esquerdo e utilizarmos a expressão (162), obtemos que  $V^\mu = g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu}V^\nu = g^\mu_\nu V^\nu = \delta^\mu_\nu V^\nu = V^\mu$ . Por conseguinte, o mesmo acontece com os tensores.

Devido a essas propriedades, a métrica satisfaz todas as características de um produto interno sobre o espaço tangente de cada ponto da variedade. Portanto, como estamos numa variedade lorentziana, isto é, há sinais negativos e positivos ocorrendo na métrica<sup>21</sup>, o produto interno entre dois vetores constantes quaisquer  $V^\mu$  e  $U^\nu$  é dado por:

$$g_{\mu\nu}V^\mu U^\nu = V_\nu U^\nu = k, \quad (163)$$

cujas constante  $k$  pode ser tanto negativa quanto positiva, ou até mesmo nula.

#### A.1.5 Geometria Diferencial

Até agora construímos uma variedade lorentziana em que cada ponto possui seus próprios espaços vetoriais  $V_p$  correlacionados com os  $V_p^*$  através da métrica, ou seja, temos uma variedade equipada com tensores e com uma métrica qualquer. A métrica basicamente nos diz como medir distâncias espaço-temporais localmente, nos dá uma noção de causalidade, é como se fosse uma régua especial que nos permitisse definir o conceito de distância e intervalo temporal na vizinhança de qualquer ponto (evento do espaço-tempo) da nossa variedade, assim, de certa forma, a métrica tem um caráter "global".

---

<sup>21</sup> Chamamos de assinatura métrica a quantidade de sinais negativos e positivos que aparecem nos autovalores de uma métrica diagonalizada.

No entanto, ainda não sabemos como conectar dois pontos distintos na variedade, isto é, não podemos no momento correlacionar espaços vetoriais de pontos diferentes. Como veremos nesta subseção, precisamos construir um novo objeto na variedade que nos permita associar espaços vetoriais diferentes através da noção de transporte paralelo. A partir deste novo elemento chamado de conexão, poderemos finalmente definir o conceito de não planicidade de uma variedade em geometria diferencial. Em outras palavras, iremos definir o significado físico-matemático de curvatura espaço-temporal.

Curiosamente, a forma mais natural de conectar dois pontos diferentes é através da diferenciação, pois o ato de derivar implica na divisão da diferença de uma função qualquer avaliada em pontos distintos pela "distância" entre estes dois pontos levada a zero. Assim, a escolha mais direta para a conexão seria um objeto matemático relacionado com o operador derivada parcial. No entanto, queremos construir primeiro um operador derivada que seja independente do sistema de coordenadas utilizado, porque no caso de derivadas parciais a lei de transformação (158) não é obedecida, pois, por exemplo:

$$\partial'_\mu V^\nu = \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \left( \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\alpha} V^\alpha \right) = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\mu} \partial_\gamma V^\alpha + \frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\mu} V^\alpha. \quad (164)$$

Dessa forma, a derivada parcial de qualquer tensor não é necessariamente um tensor. A melhor maneira de enxergar tal fato é através de (158), pois caso as componentes de um tensor sejam nulas em um dado sistema de coordenadas, então também serão nulas em qualquer outro sistema de coordenadas. Porém, no caso da relação (164) o termo com a derivada de segunda ordem não necessariamente é nulo e portanto o tensor  $\partial'_\mu V^\nu$  pode ser diferente de zero num outro sistema de coordenadas. Assim, por simplicidade e praticidade, há a necessidade da construção de um novo operador derivada que se transforme como um tensor.

Ao criarmos um novo operador derivada, nada nos garante que um objeto adicional que conecta espaços vetoriais surgirá. No geral, há três formas canônicas de diferenciação de tensores em variedades: A derivada de Lie que envolve a comutação de campos tensoriais e nos diz como um tensor muda ao longo das curvas integrais definidas pela congruência de curvas de um campo vetorial qualquer, a derivada exterior que é uma derivada parcial antissimetrizada que atua em campos  $p$ -formas (tensor covariante de ordem  $p$  antissimétrico) e as derivadas covariantes que são um mapa geral de um tensor  $(k, l)$  a um tensor  $(k, l + 1)$  que necessitam de uma estrutura geométrica adicional na variedade.

Portanto, há uma miríade de maneiras de derivar um tensor numa variedade da forma que buscamos. O fato principal é que a derivada exterior e a de Lie não atuam como conexões, esse papel cabe à estrutura adicional criada no caso particular em que as derivadas covariantes se reduzem localmente (espaço plano com coordenadas inerciais) às derivadas parciais. Assim, essa derivada covariante é uma generalização da derivada parcial em variedades arbitrárias e possui a estrutura geométrica que queremos. Para

mais discussões sobre o assunto, veja [239, 240, 241].

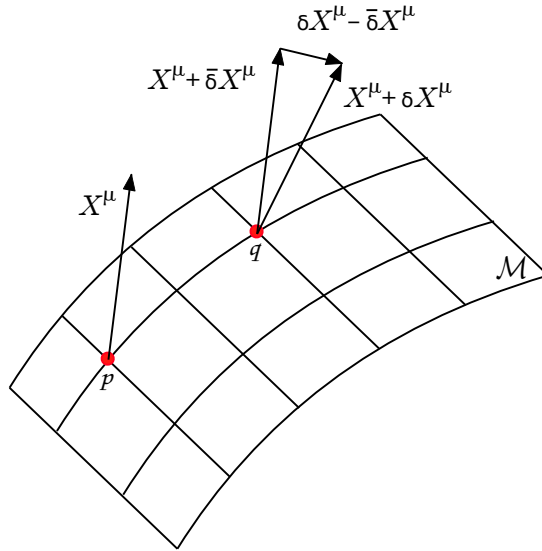
Podemos construir a nossa derivada covariante da seguinte forma, seja  $p$  um ponto na nossa variedade com coordenadas  $\{x^\mu\}$ ,  $q$  um ponto infinitesimalmente próximo com coordenadas  $\{x^\mu + \delta x^\mu\}$  e  $X^\mu(x)$  um campo contravariante em  $p$ . Pelo teorema de Taylor, temos que este campo em  $q$  é dado até primeira ordem por:

$$X^\mu(x + \delta x) = X^\mu(x) + \delta x^\nu \partial_\nu X^\mu(x), \quad (165)$$

tal que a diferença  $\delta X^\mu(x) = X^\mu(x + \delta x) - X^\mu(x) = \delta x^\nu \partial_\nu X^\mu(x)$ , por estar avaliada em 2 pontos diferentes, não é tensorial.

Queremos introduzir uma derivada tensorial, para isso basta definirmos um vetor  $X^\mu(x) + \bar{\delta}X^\mu(x)$  no ponto  $q$  que seja paralelo a  $X^\mu(x)$  em  $p$ . Como estes dois pontos estão bem próximos, o nosso vetor paralelo difere de  $X^\mu$  apenas pela pequena quantidade  $\bar{\delta}X^\mu(x)$ . Pelo mesmo argumento anterior, este novo objeto não é tensorial, no entanto, iremos construí-lo de tal maneira que a diferença entre o vetor  $X^\mu(x + \delta x)$  e o nosso vetor paralelo seja tensorial. Para uma melhor compreensão, basta vermos a figura 14.

Figura 14 - Derivada Covariante.



Legenda: Esquema ilustrativo do processo de construção da derivada covariante.

Fonte: Criado pelo autor no software Inkscape com base num desenho similar de [239].

Podemos construir  $\bar{\delta}X^\mu(x)$  como um objeto matemático linear em  $X^\mu(x)$  e  $\delta x^\mu$ , pois, por exemplo, caso uma dessas duas últimas quantidades seja nula, é natural pensar que  $\bar{\delta}X^\mu(x)$  também vai a zero. Desse modo, existe um fator multiplicativo  $\Gamma^\mu_{\nu\alpha}$  tal que:

$$\bar{\delta}X^\mu(x) = -\Gamma^\mu_{\nu\alpha}(x)X^\nu(x)\delta x^\alpha, \quad (166)$$

em que o sinal negativo serve para concordar com a nossa convenção. Logo, definindo a derivada covariante, simbolizada por  $\nabla_\alpha$ , de um vetor contravariante como a razão da diferença entre  $X^\mu$  avaliado em  $q$  e  $X^\mu$  transportado paralelamente de  $p$  a  $q$  pela distância entre estes pontos levada a zero, temos que:

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha X^\mu &= \lim_{\delta x^\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\delta x^\alpha} \{X^\mu(x + \delta x) - [X^\mu(x) + \bar{\delta}X^\mu(x)]\} = \\ &= \lim_{\delta x^\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\delta x^\alpha} \{\delta X^\mu(x) - \bar{\delta}X^\mu(x)\} = \\ &= \lim_{\delta x^\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\delta x^\alpha} \{\partial_\beta X^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\beta}X^\nu\}\delta x^\beta, \end{aligned} \quad (167)$$

e assim, considerando que  $\delta x^\beta/\delta x^\alpha = \delta^\beta_\alpha$ , obtemos o resultado:

$$\nabla_\alpha X^\mu = \partial_\alpha X^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\alpha}X^\nu. \quad (168)$$

Com esta definição obtemos 3 propriedades interessantes, isto é, a derivada covariante de um vetor satisfaz as propriedades de linearidade, de multiplicação de Leibniz e caso esteja atuando em um escalar (tensor de ordem zero) recuperamos a derivada parcial:

- $\nabla_\alpha(X^\mu + Y^\nu) = \nabla_\alpha X^\mu + \nabla_\alpha Y^\nu$ ;
- $\nabla_\alpha(X^\mu Y^\nu) = X^\mu(\nabla_\alpha Y^\nu) + (\nabla_\alpha X^\mu)Y^\nu$ ;
- $\nabla_\alpha\phi = \partial_\alpha\phi$ .

A partir dessas propriedades, podemos definir como este novo operador atua em vetores duais, pois supondo que  $\nabla_\alpha\omega_\mu = \partial_\alpha\omega_\mu + \Omega^\nu_{\alpha\mu}\omega_\nu$  e considerando que  $\nabla_\alpha(\omega_\mu v^\mu) = (\partial_\alpha\omega_\mu)v^\mu + (\Omega^\nu_{\alpha\mu}\omega_\nu)v^\mu + \omega_\mu(\partial_\alpha v^\mu) + \omega_\mu(\Gamma^\mu_{\alpha\nu}v^\nu) = \partial_\alpha(\omega_\mu v^\mu)$ , obtemos que  $\Omega^\nu_{\alpha\mu}\omega_\nu v^\mu = -\Gamma^\nu_{\alpha\mu}\omega_\nu v^\mu$ . Por conseguinte, descobrimos que:

$$\nabla_\alpha\omega_\mu = \partial_\alpha\omega_\mu - \Gamma^\nu_{\alpha\mu}\omega_\nu, \quad (169)$$

o que nos permite generalizar a derivada covariante para atuar em qualquer tensor:

$$\nabla_\alpha T^{\mu\dots}_{\nu\dots} = \partial_\alpha T^{\mu\dots}_{\nu\dots} + \Gamma^\mu_{\gamma\alpha}T^{\gamma\dots}_{\nu\dots} + \dots - \Gamma^\gamma_{\nu\alpha}T^{\mu\dots}_{\gamma\dots} - \dots. \quad (170)$$

O mais interessante é que ao estabelecermos que a derivada covariante de um tensor é um tensor e pelo fato de que uma derivada parcial não é tensorial, o objeto  $\Gamma^\mu_{\nu\alpha}$  necessa-

riamente não pode ser um tensor. Deste modo, se impormos a condição de transformação tensorial na relação (168) obtemos quase de imediato a lei de transformação:

$$\Gamma'^{\mu}_{\sigma\alpha} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\alpha}} \Gamma^{\beta}_{\rho\gamma} - \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\alpha}}, \quad (171)$$

que ao considerarmos a relação:

$$\frac{\partial \delta'^{\mu}_{\sigma}}{\partial x'^{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial x'^{\alpha}} \left( \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\sigma}} \right) = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\alpha}} = - \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\sigma} \partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}}, \quad (172)$$

obtemos que:

$$\Gamma'^{\mu}_{\sigma\alpha} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\alpha}} \Gamma^{\beta}_{\rho\gamma} + \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\sigma} \partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}}. \quad (173)$$

Dessa forma, caso a derivada de segunda ordem em (173) não seja nula, este objeto não será um tensor, e assim, qualquer quantidade que mude de acordo com esta nova lei de transformação é denominada de conexão afim ou simplesmente de conexão.

Apesar desse caráter não tensorial, a diferença entre duas conexões se transforma como um tensor. Portanto, por exemplo, a quantidade:

$$\tau^{\mu}_{\nu\alpha} = \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\nu}, \quad (174)$$

é um tensor. Este objeto é chamado de tensor torsão e nada mais é do que a parte antissimétrica da conexão. Na Relatividade Geral,  $\tau^{\mu}_{\nu\alpha} = 0$  e assim a conexão é simétrica nos dois índices inferiores, a razão para isso, como veremos, é para que geodésicas afim (i.e. curvas autoparalelas) definidas pela conexão sejam equivalentes às geodésicas métricas dadas a partir da extremização do intervalo espaço-temporal.

O fato da torsão ser nula é apenas uma suposição da teoria, assim como as diversas outras suposições feitas. O importante é quando estas suposições são postas à prova diante da natureza, isto é, no fim são os experimentos e dados observacionais que encerram a questão. Na realidade, o problema é mais complexo, o que foi agora percorrido é apenas um engodo, que infelizmente faz parte do "credo do físico inocente"[242]. A questão principal que devemos nos perguntar é se uma teoria física é apenas um modelo matemático ajustado a uma coleção de dados ou vai além e busca uma interpretação causal de fenômenos naturais, em outras palavras, a ciência se resume a estatística ou busca alcançar uma cosmovisão objetiva baseada em pressupostos metafísicos, físicos, constructos matemáticos e, principalmente, no empirismo?

A razão pela qual eu entrei nessa discussão epistemológica, é justamente o fato de que a nulidade da torsão é uma suposição simples mas que é afetada pela maneira

como definimos o papel da ciência. O aspecto importante envolvido nesta discussão se resume a duas perguntas, isto é, entre duas teorias com os mesmos resultados fenomenológicos mas com interpretações físicas diferentes qual devemos escolher? E entre uma teoria particular e sua generalização cujas previsões não puderam ainda serem verificadas experimentalmente por motivos de insuficiência tecnológica prático-experimental, qual devemos escolher? No fundo, a canonicidade de uma teoria física se deve a um consenso científico que parte de pressupostos epistemológicos simples e práticos.

Nesse sentido, muitas possibilidades surgem quando consideramos que a torsão não é nula. Por exemplo, Albert Einstein por volta de 1928 tentou novamente, sem sucesso, **unificar** a gravitação com o eletromagnetismo a partir de um formalismo que atualmente é conhecido como teoria Teleparalela da gravitação [243]. Nesta teoria, a curvatura é tida como globalmente nula e a torsão é assumida como arbitrária, dessa forma, obtemos as mesmas equações de movimento da Relatividade Geral mas a interpretação da gravidade é feita a partir de forças no sentido clássico.

Se a ciência se resume somente ao ajuste de dados e como estas duas teorias preveem os mesmos fenômenos, podemos ignorar essa disparidade de interpretações e considerar as duas teorias como canônicas, ou podemos simplesmente jogar uma para "debaixo do tapete" e utilizar somente a mais simples (Navalha de Ockham). Contudo, o surgimento de múltiplas interpretações, caso consideremos a ciência como um corpo complexo que busca compreender e interpretar a natureza, é extremamente benéfico e curioso, pois, neste caso, não só podemos enxergar a gravidade de diversas formas como também refletir se essa disparidade é fruto de alguma estrutura mais fundamental da realidade. A interpretação física é o motor que move a ciência, as diferentes teorias com suas interpretações particulares nos ajudam a questionar a visão realista ingênua da Física, nos forçando a assumir outros tipos de realismo (e.g. realismo platônico, relacional etc) ou até mesmo uma postura antirrealista [244].

Há ainda a teoria de Einstein-Cartan-Kibble-Sciama, que nada mais é do que uma generalização da teoria da Relatividade Geral com torsão não nula. Nesta teoria, a densidade de energia é acoplada à métrica e o spin ao tensor de torsão, assim, o momento angular intrínseco (spin) da matéria influencia na estrutura geométrica do espaço-tempo [245]. Portanto, diferente da Relatividade Geral aonde a métrica caracteriza o espaço-tempo de forma única, nesta nova teoria a torsão se faz necessária para a descrição completa.

O único problema é de caráter experimental, pois as diferenças entre as duas teorias só surgem em densidades extremas, como por exemplo no interior de um buraco negro ou no começo do Universo. Como consequência, certos autores afirmam que nessas regiões superdensas o acoplamento entre o spin da matéria e a torsão do espaço-tempo gera uma interação gravitacional repulsiva capaz de evitar a formação de singularidades [245].

Assim, seja a ciência vista como um conjunto de modelos matemáticos ajustados a dados empíricos ou como uma formadora de cosmovisões baseada em dados experimentais,

o consenso científico é a escolha da teoria estruturalmente mais simples e que explique os dados obtidos (Navalha de Ockham), isto é, a Relatividade Geral. No entanto, a diferença sutil é que ao optarmos pela primeira opção (ciência  $\approx$  estatística), a teoria de Einstein e Cartan está fadada ao esquecimento, justamente por não possuir valor prático e utilitário no momento, já no segundo caso (ciência = cosmovisão complexa), esta nova teoria é um presente à reflexão, pois este tipo de interpretação generalizadora pode trazer frutos interessantes, como por exemplo a possibilidade do desaparecimento de singularidades.

A partir de uma visão histórica da ciência, é possível perceber que a Física é uma formadora de cosmovisões e possui como objetivo descrever e compreender a realidade, e para tal, é necessário a interpretação das teorias físicas. Portanto, peço desculpas ao leitor por esse grande desvio do assunto principal, mas é importante salientar a relação dos pormenores de uma teoria com a forma que fazemos ciência. Poderíamos ter passado por essa questão da torsão sem nos preocuparmos, porém toda esta discussão traz muita informação acerca da construção da teoria da Relatividade Geral, e também de qualquer outra teoria física. No fim, a canonicidade de uma teoria não depende completamente de uma "decisão" da natureza, mas sim de uma consensualidade científica [246].

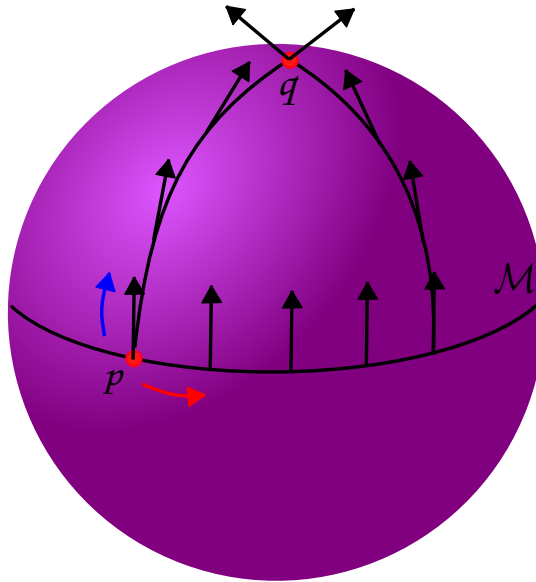
De volta ao assunto principal, vamos falar agora sobre geodésicas afim e aprender um pouco mais sobre o transporte paralelo de tensores ao longo de curvas, feito isto, poderemos então definir a chamada planicidade afim e finalmente chegar nas estruturas matemáticas essenciais da Relatividade Geral, isto é, a planicidade métrica e as geodésicas métricas. No fundo, queremos descrever a curvatura do espaço-tempo e a trajetória de partículas (no sentido clássico) através da linguagem matemática, para tal, utilizamos a ausência da primeira (planicidade) para defini-la e as geodésicas para representar as trajetórias clássicas.

Antes de tudo, precisamos elucidar primeiro como uma conexão afim de fato conecta espaços vetoriais diferentes. A derivada covariante dada por (170), da forma como construímos, nada mais é do que uma medida da taxa de variação instantânea de um campo tensorial em relação ao que o tensor seria se sofresse um transporte paralelo. Portanto, como vimos na demonstração de (168), o papel da conexão é determinar uma maneira de manter um tensor constante ao longo de um caminho em particular, assim, podemos comparar tensores em pontos próximos.

No caso de vetores no espaço plano, isso é feito de forma natural ao manter as componentes de um vetor constante, dessa maneira a conexão fica implícita. No entanto, a noção de propagar um vetor de maneira constante ao longo de um caminho num espaço curvo, isto é, o transporte paralelo, requer a adição de uma conexão na variedade. O mais interessante de tudo, é que o transporte paralelo de um tensor num espaço não plano depende do caminho tomado. Assim, por exemplo, caso um vetor num ponto  $p$  numa esfera seja transportado paralelamente a um outro ponto  $q$  através de dois caminhos diferentes, no final, os dois vetores resultantes em  $q$  serão diferentes. Podemos ver isto

melhor a partir dos dois caminhos da (seta azul e vermelha) Figura 15.

Figura 15 - Transporte Paralelo.



Legenda: Esquema ilustrativo do processo de transporte paralelo de um vetor.

Fonte: Criado pelo autor no software Inkscape com base num desenho similar de [170].

É válido salientar, diferentemente das subseções anteriores aonde utilizamos quase que exclusivamente a referência [236], esta subseção está fortemente baseada nas referências [170, 239]. Como acabamos de ver, numa variedade arbitrária e suave, os tensores só podem ser comparados naturalmente se pertencerem ao mesmo espaço vetorial. Ao interpretarmos fisicamente esta ideia, como em [170], temos que duas partículas numa mesma vizinhança de um espaço-tempo curvo possuem uma noção bem definida de velocidade relativa, que não pode ser maior do que a da luz. No entanto, se as partículas estiverem em pontos diferentes e distantes, o conceito de velocidade relativa não possui mais sentido.

Por exemplo, sabemos que o espectro de luz de galáxias distantes possui um desvio para o vermelho (redshift) em comparação ao espectro de fontes estacionárias, assim, com base no efeito Doppler, somos tentados a dizer que estas galáxias estão se afastando de nós com uma certa velocidade. Porém, esta "velocidade" muitas vezes é maior do que a da luz, o que aparentemente evidencia uma contradição com a Relatividade Restrita. Na realidade não há contradição, a noção de velocidade relativa entre nós e as galáxias é que não é bem definida, o Universo está em expansão acelerada, assim, o que está mudando é a métrica, a noção de distância, entre a Terra e as galáxias distantes [170]. Desta maneira, a nossa construção matemática tem profundas consequências físicas e até

mesmo observacionais.

Discutimos bastante sobre a ideia e implicações do transporte paralelo de tensores e sua relação com os espaços vetoriais tangentes numa variedade, vamos ver agora como isso é feito na prática. Como visto, uma curva qualquer parametrizada por  $\lambda$  possui um vetor tangente dado por (150), no entanto, podemos dizer também que um campo vetorial contravariante determina uma congruência local de curvas  $x^\mu = x^\mu(\lambda)$ , isto é, apenas uma curva passa por cada ponto da variedade, em que o campo tangente é dado por (150).

Se definirmos a derivada absoluta de um tensor arbitrário ao longo de uma curva  $C$  da congruência como:

$$\frac{DT^{\mu\dots}_{\nu\dots}}{D\lambda} = X^\alpha \nabla_\alpha T^{\mu\dots}_{\nu\dots}, \quad (175)$$

tal que  $X^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$  é o campo vetorial tangente da congruência, dizemos que o tensor  $T^{\mu\dots}_{\nu\dots}$  é transportado paralelamente ao longo de  $C$  se:

$$\frac{DT^{\mu\dots}_{\nu\dots}}{D\lambda} = 0. \quad (176)$$

Dessa maneira, esta equação diferencial ordinária de primeira ordem determina um tensor na curva que é "paralelo" a  $T^{\mu\dots}_{\nu\dots}$  em qualquer ponto de  $C$ .

Dado este formalismo matemático, uma curva autoparalela é definida como uma curva cujo vetor tangente é propagado paralelamente a si mesmo. Podemos generalizar a equação (176), para o caso em que o vetor transportado paralelamente num ponto da curva não seja somente equivalente, mas sim proporcional ao vetor tangente naquele ponto. Desta forma, temos que:

$$\frac{D}{D\lambda} \left( \frac{dx^\mu}{d\lambda} \right) = \eta(\lambda) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \rightarrow X^\alpha \nabla_\alpha X^\mu = \eta X^\mu. \quad (177)$$

Abrindo esta equação em termos da derivada parcial e da conexão e utilizando-se a regra da cadeia, obtemos de imediato que:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\nu} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = \eta \frac{dx^\mu}{d\lambda}. \quad (178)$$

Podemos fazer uso também do formalismo usado para construir (168), se  $p$  e  $q$  forem pontos próximos de  $C$  com coordenadas  $x^\mu(\lambda)$  e  $x^\mu(\lambda + \delta\lambda)$  respectivamente, temos pelo teorema de Taylor que  $\delta x^\mu = (dx^\mu/d\lambda)\delta\lambda$ . Como vimos, e utilizando-se a expressão anterior,  $X^\mu + \delta X^\mu = (dx^\mu/d\lambda) - \Gamma^\mu_{\nu\alpha}(dx^\nu/d\lambda)(dx^\alpha/d\lambda)\delta\lambda$  é o vetor em  $q$  paralelo ao vetor em  $p$ . Assim, por Taylor novamente, se o vetor avaliado em  $q$  é dado por  $(dx^\mu/d\lambda)(\lambda + \delta\lambda) = (dx^\mu/d\lambda) + (d^2 x^\mu/d\lambda^2)\delta\lambda$ , de acordo com a definição de curva autoparalela, estes dois últimos vetores devem ser paralelos de tal maneira, que se  $\delta\lambda \rightarrow 0$ ,

o vetor tangente original em  $p$  deve ser obtido, portanto, devemos considerar estes dois vetores como proporcionais pela quantidade  $(1 + \eta(\lambda)\delta\lambda)$ , assim, ao fazermos o limite mencionado, obtemos (178).

É possível ainda simplificar a equação (178), pois caso a curva  $C$  seja parametrizada de tal maneira que o vetor tangente seja propagado em si mesmo, isto é, os "comprimentos" dos dois vetores são iguais, temos que  $\eta = 0$  e assim obtemos que:

$$\boxed{\frac{d^2 x^\mu}{d\zeta^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\nu} \frac{dx^\alpha}{d\zeta} \frac{dx^\nu}{d\zeta} = 0}. \quad (179)$$

Esta expressão é chamada de equação da geodésica afim, e a variável  $\zeta$  denominada de parâmetro afim. Reciprocamente, basta utilizarmos a definição (176) para chegar nesta expressão. Além disso, dizemos que  $\zeta$  é um parâmetro afim caso a transformação  $\zeta \rightarrow \zeta' = a\zeta + b$  para  $a$  e  $b$  reais, mantenha a forma de (179) invariante.

Com estas estruturas definidas, podemos finalmente falar sobre a curvatura da nossa variedade, e para tal, usarei como base a bela discussão em [170] e o formalismo matemático de [239]. Como fora mencionado na primeira subseção, o nosso espaço-tempo representado por uma variedade lorentziana não necessariamente está embutido em um outro espaço hiperdimensional, pois, a priori, só conhecemos 1 dimensão temporal e 3 espaciais. Sendo assim, buscamos uma noção intrínseca de curvatura, algo fora do senso comum, pois tendemos a pensar em curvatura como uma característica de objetos espaciais de 2 dimensões embutidos em 3 dimensões.

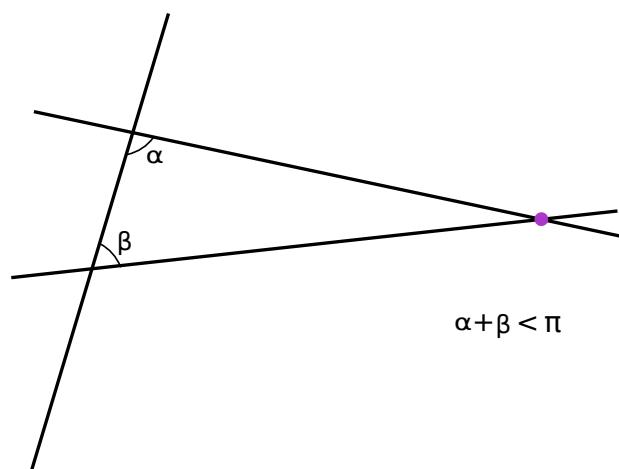
É sempre interessante obter múltiplas percepções sobre um mesmo conceito, no caso da geometria diferencial podemos obter essa noção intrínseca de curvatura de duas maneiras, que, claro, estão correlacionadas. Para a primeira conceituação, precisamos voltar para a antiga Alexandria do Egito por volta do ano 300 a. C., aonde Euclides escreveu o seu tratado matemático "Os Elementos". Particularmente, estamos interessados no quinto postulado de Euclides, mais conhecido como "Postulado das Paralelas", que diz:

- "E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.- [247].

O nome "Postulado das Paralelas", tem a ver com o fato de que esta definição também caracteriza o que é o paralelismo, isto é, caso  $\alpha + \beta = \pi$ , as duas retas serão paralelas. Na verdade, o significado de paralelismo euclidiano aparece antes mesmo do quinto postulado, na definição 23 do livro I de "Os Elementos" temos que:

- "Paralelas são retas que, estando no mesmo plano, e sendo prolongadas ilimitadamente em cada um dos lados, em nenhum se encontram.- [247].

Figura 16 - Postulado das Paralelas de Euclides.



Legenda: Esquema ilustrativo do quinto postulado de "Os Elementos".

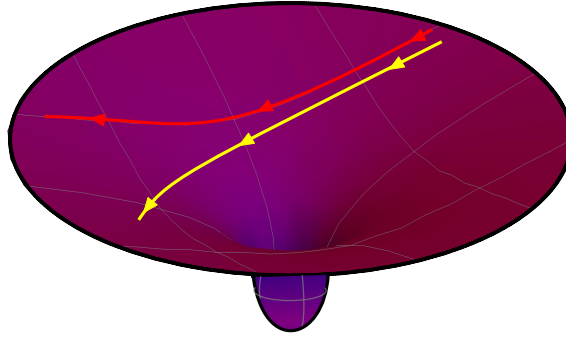
Fonte: Criado pelo autor no software Inkscape.

O que eu não mencionei ainda, é o fato de que uma geodésica é a generalização de uma reta no caso de espaços curvos. Desta forma, uma curva cuja tangente é transportada paralelamente ao longo de si mesma, como mostraremos, é a curva mais curta possível entre dois pontos numa variedade sem torsão e metricamente compatível. Para vermos isto, basta considerarmos a conexão como sendo nula em (179), assim, obtemos uma equação diferencial cuja solução é uma reta em coordenadas cartesianas. Caso  $\Gamma^\mu_{\alpha\nu} = 0$  seja globalmente verdadeiro, uma reta será a curva mais curta em toda a variedade. Por conseguinte, se isto é verdade, então segue que o quinto postulado de Euclides também é globalmente verdadeiro e assim dizemos que a nossa geometria é plana.

A questão importante que devemos notar, é que a generalização do quinto postulado de "Os Elementos" para o caso de geodésicas em variedades arbitrárias não é mais verdadeiro. Pois, por exemplo, geodésicas próximas e inicialmente paralelas, poderão se encontrar ou se separar em um outro lugar da variedade, ou, da mesma maneira, geodésicas que inicialmente se cruzam ou estão separadas poderão no futuro se tornarem paralelas. Nesse sentido, dizemos que uma variedade é curva caso o quinto postulado de Euclides falhe, isto é, geodésicas inicialmente paralelas não permanecerão paralelas ao longo da variedade. De fato, esta ideia foi a fagulha que deu início a criação das geometrias não-Euclidianas por Gauss, Bolyai, Lobachevsky e Riemann [248, 249].

Como discutimos bastante, o transporte paralelo de tensores sobre uma variedade arbitrária depende do caminho tomado. Se transportarmos paralelamente um vetor de um ponto  $p$  ao longo de um caminho fechado (loop) num plano, o vetor que retornará a  $p$  será o mesmo que saiu deste antes do loop. No entanto, se fizermos este mesmo processo

Figura 17 - Geodésicas numa variedade curva.



Legenda: Esquema ilustrativo da falha do Postulado das Paralelas para geodésicas em variedades curvas.  
 Fonte: Criado pelo autor no software Inkscape.

numa esfera, por exemplo no loop da Figura 15, o vetor propagado paralelamente através do loop, quando retornar ao ponto  $p$ , estará rotacionado em relação ao vetor inicial. Em suma, a noção de transporte paralelo sob um caminho fechado nos permite caracterizar a curvatura de uma variedade, isto é, a geometria será plana se o tensor final propagado através do loop for igual ao inicial, caso contrário, será curva.

Como o transporte paralelo está intimamente relacionado com as conexões, e estas relacionadas com as derivadas covariantes, é mais conveniente trabalhar só com as derivadas covariantes. Desta maneira, como mesmo diz o autor de [236], a falha de um vetor em retornar ao seu valor original quando transportado paralelamente num loop se traduz na falta de comutatividade das derivadas covariantes. Portanto, podemos definir curvatura com base na não comutatividade de sucessivas diferenciações de vetores.

O comutador de uma derivada covariante atuando num campo vetorial qualquer é dado pela expressão:

$$[\nabla_\gamma, \nabla_\alpha]X^\mu = \nabla_\gamma \nabla_\alpha X^\mu - \nabla_\alpha \nabla_\gamma X^\mu. \quad (180)$$

Se abrirmos a derivada covariante sucessiva no campo vetorial  $X^\mu$  em termos das conexões e derivadas parciais, obtemos a relação:

$$\nabla_\gamma \nabla_\alpha X^\mu = \partial_\gamma (\partial_\alpha X^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\alpha} X^\nu) + \Gamma^\mu_{\nu\gamma} (\partial_\alpha X^\nu + \Gamma^\nu_{\rho\alpha} X^\rho) - \Gamma^\nu_{\alpha\gamma} (\partial_\nu X^\mu + \Gamma^\mu_{\rho\nu} X^\rho), \quad (181)$$

que ao substituírmos em (180), e após uma manipulação de índices mudos, obtemos finalmente que:

$$[\nabla_\gamma, \nabla_\alpha]X^\mu = R^\mu{}_{\nu\gamma\alpha}X^\nu + \tau^\nu{}_{\gamma\alpha}\nabla_\nu X^\mu, \quad (182)$$

aonde  $\tau^\nu{}_{\gamma\alpha}$  é o tensor torsão e  $R^\mu{}_{\nu\gamma\alpha}$  é dado por:

$$R^\mu{}_{\nu\gamma\alpha} = \partial_\gamma \Gamma^\mu{}_{\nu\alpha} - \partial_\alpha \Gamma^\mu{}_{\nu\gamma} + \Gamma^\mu{}_{\rho\gamma} \Gamma^\rho{}_{\nu\alpha} - \Gamma^\mu{}_{\rho\alpha} \Gamma^\rho{}_{\nu\gamma}. \quad (183)$$

No entanto, como já mencionamos, estamos interessados no caso em que a torsão é nula, se considerarmos isto e ao levarmos em conta que um tensor antissimétrico pode ser escrito como  $Y^\mu{}_{[\gamma\alpha]} = (Y^\mu{}_{\gamma\alpha} - Y^\mu{}_{\alpha\gamma})/2$ , é possível obter que:

$$\nabla_{[\gamma} \nabla_{\alpha]} X^\mu = \frac{1}{2} R^\mu{}_{\nu\gamma\alpha} X^\nu. \quad (184)$$

Como o lado esquerdo da expressão acima é um tensor, o lado direito também será, portanto,  $R^\mu{}_{\nu\gamma\alpha}$  se transforma como um tensor  $(1,3)$ . Este objeto é chamado de tensor de Riemann, e caso seja nulo, automaticamente o comutador também vai a zero.

Da forma como definimos uma variedade lorentziana, isto é, como sendo localmente plana, é possível encontrar um sistema de coordenadas especial em cada ponto  $p$ , de tal maneira que  $\Gamma^\mu{}_{\nu\alpha}(p) = 0$  nestas coordenadas. No entanto, caso exista um sistema de coordenadas em que a conexão seja nula em qualquer ponto da variedade, dizemos então que esta variedade é plana afim.

Uma condição necessária e suficiente para que uma variedade seja plana afim, isto é,  $\Gamma^\mu{}_{\nu\alpha} = 0$  globalmente, é o fato de que a conexão tem de ser simétrica e integrável, ou seja, o tensor torsão deve ser nulo e o transporte paralelo de tensores deve ser independente do caminho tomado. Desta maneira, como o comutador (184) expressa justamente o fato de que o transporte paralelo depende do caminho, temos que uma condição necessária e suficiente para que uma conexão seja integrável é o fato de que o tensor de Riemann tem de ser zero, ou seja, as derivadas covariantes de um campo vetorial comutam.

Por conseguinte, e como já estávamos assumindo torsão nula, uma condição suficiente e necessária para que uma variedade seja plana afim é que  $R^\mu{}_{\nu\gamma\alpha} = 0$ . Portanto, note que a partir de agora o fato de uma variedade ser curva se resume ao caso em que o tensor de Riemann não zera globalmente, em outras palavras, uma variedade curva é aquela que não é plana afim. Optei neste texto por uma definição mais intuitiva do conceito de curvatura, para uma demonstração mais completa veja a referência [239], aonde o autor faz uma demonstração usando um loop infinitesimal para encontrar o tensor de Riemann.

No entanto, ainda é necessário mais um passo conceitual para representar o nosso espaço-tempo. Precisamos encontrar uma conexão particular, aonde a noção intrínseca de curvatura seja única. Para a nossa sorte, a métrica é capaz de gerar uma noção única de transporte paralelo em que o produto interno de todos os pares de vetores se preserva. Isto é feito por meio do tensor de não-metricidade:

$$Q_{\alpha\mu\nu} = -\nabla_\alpha g_{\mu\nu}, \quad (185)$$

que relaciona as estruturas métrica e afim da variedade. Desta maneira, como veremos, podemos obter a chamada conexão métrica (conexão de Levi-Civita), que, como consequência, nos permite descrever o nosso espaço-tempo  $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$  apenas pela métrica.

Primeiro, precisamos construir as geodésicas métricas a partir do formalismo do Cálculo Variacional. Assim, seja  $C$  uma curva tipo-tempo com equação paramétrica  $x^\mu = x^\mu(u)$  e  $ds$  o intervalo espaço-temporal entre dois eventos infinitesimalmente próximos dado por (160), temos que o intervalo  $s$  entre dois eventos  $p_1$  e  $p_2$  em  $C$  é dado por:

$$s = \int_{p_1}^{p_2} ds = \int_{p_1}^{p_2} \frac{ds}{du} du = \int_{p_1}^{p_2} \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{du} \frac{dx^\nu}{du}} du. \quad (186)$$

Utilizando-se a referência [186], podemos extremizar o funcional  $s$  a partir do Princípio Variacional  $\delta s = 0$ . Considerando que  $\dot{x}^\mu = dx^\mu/du$  e que  $f$  é o integrando de (186), ao fazermos  $\delta s = 0$  obtemos as equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial f}{\partial x^\mu} - \frac{d}{du} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}^\mu} \right) = 0. \quad (187)$$

Deste modo, ao abrirmos as contas em (187), descobrimos a equação diferencial:

$$\frac{d^2 x^\gamma}{du^2} + \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \frac{dx^\mu}{du} \frac{dx^\nu}{du} = \frac{d^2 s}{du^2} \left( \frac{ds}{du} \right)^{-1} \frac{dx^\gamma}{du}, \quad (188)$$

em que:

$$\left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\gamma\alpha} \left( \partial_\mu g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu} \right), \quad (189)$$

são os famosos símbolos de Christoffel do segundo tipo. Porém, podemos simplificar a equação (188), pois caso  $u = as + b$ , para qualquer  $a$  e  $b$  reais, obtemos que:

$$\frac{d^2 x^\gamma}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0. \quad (190)$$

Portanto, as geodésicas afim definidas a partir de (179) serão geodésicas métricas se e somente se a conexão for simétrica, para que então (189) coincida com a conexão:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\gamma = \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}. \quad (191)$$

Como já fora explicado, a razão para que a conexão seja simétrica, ou seja, torsão

nula, tem a ver com o fato de que a equação (179) envolve somente a parte simétrica da conexão. Pois, a parte antissimétrica, caso exista, automaticamente se anula ao ser contraída com a quantidade simétrica  $(dx^\alpha/d\zeta)(dx^\nu/d\zeta)$ . Desta forma, para que a conexão seja completamente equivalente aos símbolos de Christoffel do segundo tipo é necessário que a conexão seja simétrica nos dois índices inferiores.

De fato, poderíamos ter chegado na conexão métrica sem a ajuda do Princípio Variacional, bastaria utilizarmos a suposição de compatibilidade métrica. Porém, é interessante evidenciar que a consequência deste formalismo é justamente mostrar que as geodésicas métricas são as curvas mais curtas<sup>22</sup> em  $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$ . Portanto, seria suficiente considerarmos a conexão simétrica, pois de acordo com o formalismo de Palatini [239], obtemos de imediato a chamada compatibilidade métrica, isto é,  $Q_{\alpha\mu\nu} = 0$ . Dessa maneira, se fizermos  $-Q_{\alpha\mu\nu} + Q_{\mu\nu\alpha} + Q_{\nu\alpha\mu} = 0$  segue de imediato que:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\gamma = \frac{1}{2}g^{\gamma\alpha}(\partial_\mu g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}). \quad (192)$$

Para concluir, antes de mencionarmos algumas propriedades interessantes do tensor de Riemann, dizemos que uma métrica é plana se existe um sistema de coordenadas em toda a variedade tal que a métrica se reduz a uma matriz diagonal com elementos  $\pm 1$ . Caso isso seja verdade, segue que a conexão métrica (192) se anula globalmente, e por conguite, segue que o tensor de Riemann (183) é zero globalmente. Portanto, uma condição necessária e suficiente para que  $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$  seja plano, é que o tensor de Riemann seja nulo em toda a variedade.

Por fim, se considerarmos o tensor de Riemann equipado com a conexão métrica, e abaixarmos o seu índice contravariante com a métrica  $g_{\mu\rho}$ , obtemos as propriedades:

- $R_{\rho\nu\alpha\gamma} = -R_{\rho\nu\gamma\alpha} = -R_{\nu\rho\alpha\gamma} = R_{\alpha\gamma\rho\nu}$ ;
- $R_{\rho\nu\alpha\gamma} + R_{\rho\gamma\nu\alpha} + R_{\rho\alpha\gamma\nu} = 0$ .

É possível ainda provar as famosas identidades de Bianchi:

$$\nabla_\beta R_{\mu\nu\alpha\gamma} + \nabla_\gamma R_{\mu\nu\beta\alpha} + \nabla_\alpha R_{\mu\nu\gamma\beta} = 0, \quad (193)$$

tal que se definirmos os tensores:

$$R_{\mu\nu} = g^{\gamma\alpha} R_{\gamma\mu\alpha\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu} \quad \text{e} \quad R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^\nu_{\nu}, \quad (194)$$

chamados de tensor de Ricci e escalar de Ricci, respectivamente, podemos definir também

---

<sup>22</sup> Mais especificamente, dizemos que  $s$  é estacionário sobre pequenas variações que se anulam nos extremos  $p_1$  e  $p_2$ . Assim, este intervalo pode ser um mínimo, máximo ou o chamado ponto de sela.

o chamado tensor de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}, \quad (195)$$

que conseqüentemente, após contrações com a métrica e mudanças de índices mudos, irá satisfazer as chamadas identidades de Bianchi contraídas:

$$\nabla_\mu G^\mu{}_\nu = 0. \quad (196)$$

Portanto, através das referências [236, 170, 239], vimos que podemos representar o espaço-tempo por uma variedade lorentziana arbitrária equipada com uma métrica, mas para associar os diferentes espaços vetoriais, literalmente conectar pontos, é necessário a adição de uma nova estrutura chamada de conexão. A partir da métrica, descobrimos que existe uma maneira única e intrínseca de definir curvatura através do transporte paralelo de tensores em caminhos fechados produzido pela conexão métrica. Assim, neste caso, e como a torsão é nula, a métrica descreve o espaço-tempo de maneira unívoca.

Em vista disso, simbolizamos o nosso espaço-tempo por  $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$  e representamos sua curvatura através do objeto  $R^\mu{}_{\nu\alpha\gamma}$ . Porém, dada as nossas discussões anteriores, podemos representar o espaço-tempo apenas por  $g_{\mu\nu}$  e a sua curvatura somente pelo tensor simétrico  $R_{\mu\nu}$  e pelo escalar  $R$ . Não somente isto, descobrimos também que o nosso espaço-tempo possui trajetórias especiais chamadas de geodésicas métricas, definidas a partir de (190), que nada mais são do que generalizações de retas em variedades curvas.

#### A.1.6 Relatividade Restrita e a Métrica de Minkowski

Até o momento vimos que certos conceitos da teoria da Relatividade Geral estão profundamente relacionados com a estrutura da Relatividade Especial, iremos nesta subseção apresentar finalmente esta teoria física revolucionária que modificou para sempre a nossa concepção da realidade. Vale notar também, como veremos, que devido ao fato de que esta teoria envolve a priori somente referenciais inerciais, é comum a chamarmos de teoria da Relatividade Restrita.

A teoria da Relatividade Especial foi apresentada ao mundo no ano de 1905, no chamado *annus mirabilis* de Einstein, quando 4 artigos que modificaram profundamente a Física foram publicados [250, 251, 252, 253]. Formalmente, sabe-se que foi Albert Einstein que escreveu o artigo [252] apresentando a Relatividade Restrita, no entanto, através de evidências históricas, é possível que sua esposa Mileva Marić [254] e seu amigo Michele Besso [255] tenham tido um papel bem fundamental na construção da teoria.

Historicamente, a premissa principal de Einstein para chegar na teoria da Relatividade Restrita foi através de uma aparente contradição entre o eletromagnetismo de

Maxwell e a mecânica de Newton, chamada de problema do ímã e do condutor. Muitos outros pesquisadores como Poincaré e Lorentz chegaram perto de obter a teoria da Relatividade Especial, no entanto, foi Einstein que percebeu as implicações mais profundas ao notar que a assimetria gerada ao aplicar a eletrodinâmica em corpos em movimento não necessariamente era inerente ao fenômeno.

Neste sentido, o problema é posto da seguinte maneira, se um ímã está em movimento e um condutor em repouso, de acordo com a Lei de Faraday um campo elétrico surgirá nas cercanias do sistema e assim uma corrente elétrica será induzida no condutor, inversamente, caso o ímã esteja em repouso e o condutor se movendo, uma corrente elétrica será gerada a partir da força magnética que o campo do ímã produzirá nas cargas elétricas do condutor. Assim, há uma aparente discordância de interpretação física, pois, experimentalmente, a corrente no condutor será a mesma nos dois casos, desta forma, no primeiro exemplo temos um campo elétrico gerando uma corrente e no segundo caso temos um campo magnético gerando a mesma corrente.

À primeira vista, o fato de um referencial observar o surgimento de um campo elétrico e o outro apenas a ação de um campo magnético, pode significar que o eletromagnetismo não é invariante sob a mudança de um referencial inercial a outro, isto é, as equações de Maxwell mudam quando trocamos de um observador a outro cuja velocidade relativa é constante ou nula. De fato, se aplicarmos as transformações de Galileu nas equações de Maxwell, ou seja, as transformações de um referencial inercial a outro na mecânica clássica cuja consequência principal é manter as Leis de Newton invariantes, vemos que estas não permanecem as mesmas. Desta forma, dizemos que o eletromagnetismo é incompatível com a mecânica newtoniana.

A partir desta inconsistência, podemos pensar em três possíveis explicações, isto é, o eletromagnetismo maxwelliano está errado e uma teoria invariante sob transformações de Galileu é a mais apropriada, a Relatividade Galileana só se aplicaria à mecânica clássica e assim o eletromagnetismo deve possuir um referencial privilegiado ou as transformações de Galileu estão erradas, e, portanto, a mecânica clássica tem de ser reformulada a partir de novas transformações que deixem as equações de Maxwell invariantes.

A primeira e terceira opção são muito radicais do ponto de vista histórico, pois no final do século XIX tanto a mecânica clássica como o eletromagnetismo de Maxwell já estavam muito bem consolidadas no meio acadêmico. Por conseguinte, a solução mais apropriada era a da segunda explicação, mais especificamente, a do chamado éter luminífero, um meio material elástico hipotético com o papel de ser um referencial estacionário único, com respeito ao qual todas as velocidades no eletromagnetismo seriam medidas.

O éter luminífero é uma hipótese bem simples e tem suas raízes históricas no surgimento do eletromagnetismo, particularmente, no problema da propagação das ondas eletromagnéticas. No fundo, o éter é como se fosse uma contrapartida histórica da atual matéria escura, isto é, se há algum problema numa teoria física, basta adicionar um meio

material invisível que mude as equações ou a interpretação física do fenômeno.

No entanto, como a história nos ensina, raramente estas suposições estão corretas, pois, podemos mencionar ainda, a hipótese da presença do planeta Vulcano no sistema solar para tentar explicar a discrepância de 43" (segundos de arco) por século de precessão do periélio de Mercúrio, numa tentativa de salvar a gravitação de Newton. No fim, foi a Relatividade Geral, uma teoria física com uma base conceitual simples mas bem mais complexa, que explicou esta inconsistência e mostrou que Vulcano era apenas mais uma hipótese de corpo ou meio material "invisível" cujo objetivo é remendar uma teoria datada.<sup>23</sup>

Assim, com base no que eu mencionei, no século XIX descobriu-se que as equações de Maxwell preveem o surgimento de ondas a partir dos campos elétrico e magnético com velocidade igual a da luz, isto é,  $c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ . Posto isto, a luz passou a ser interpretada como uma onda eletromagnética, numa espécie de **unificação** do eletromagnetismo com a óptica. No entanto, restavam problemas, pois até onde se sabia uma onda precisava de um meio para se propagar, dessa maneira, surgiu um meio invisível chamado de éter luminífero, com respeito ao qual a luz se propagaria com velocidade  $c$ .

Portanto, a hipótese consensual nessa época era a desse meio que permeava todo o *cosmos*, logo, só podia haver um referencial correto, no caso, aquele do éter. Para os simpatizantes dessa ideia, só poderia haver uma interpretação física, ou era o campo elétrico que atuava ou era o magnético. O ponto principal, é que o fato da corrente ser a mesma para os dois referenciais era apenas uma coincidência para os defensores do éter, mas para Einstein era muito mais, era uma dica forte de que o eletromagnetismo obedecia ao Princípio da Relatividade de alguma forma, assim, de certa maneira, a explicação que ele escolheu e que de fato resolveu todos os problemas aparentes foi a terceira.

Com base em todas essas questões discutidas, e em outras presentes em [256, 257, 258], Einstein erigiu sua teoria da Relatividade Especial sobre dois postulados simples mas que modificaram o planeta Terra completamente:

- Princípio da Relatividade no sentido restrito: "Se  $K'$  é um sistema de coordenadas que efetua um movimento uniforme e sem rotação em relação a  $K$ , os fenômenos da natureza que se desenrolam em relação a  $K'$  obedecem exatamente às mesmas leis que em relação a  $K$ - [256];
- Princípio da Invariância da velocidade da luz no vácuo: A velocidade da luz no vácuo, isto é,  $c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ , é a mesma em todos os sistemas inerciais.

O primeiro postulado é apenas uma generalização do princípio da Relatividade de

---

<sup>23</sup> Por outro lado, temos os casos de Netuno e Plutão, que fortalecem o argumento contrário.

Galileu, isto é, o que antes era apenas um simples fato observado da natureza da mecânica passou a ser um postulado válido para toda a Física. Podemos ver isto melhor, através da comparação deste novo postulado com o corolário V do livro I dos *Principia* de Newton:

- "O movimento de corpos encerrados em um dado espaço são os mesmos entre si, esteja esse espaço em repouso, ou se movendo uniformemente em uma linha reta sem qualquer movimento circular.- [234].

Para compreender melhor estes postulados, precisamos definir com mais rigor o que é um referencial inercial. Basicamente, um referencial é chamado de inercial se e somente se a primeira Lei de Newton é válida neste sistema, ou seja, num referencial destes:

- "Todo corpo continua em seu estado de repouso ou de movimento uniforme em uma linha reta, a menos que ele seja forçado a mudar aquele estado por forças imprimidas sobre ele.- [234].

Desta forma, num referencial inercial, na ausência de forças, um corpo se movendo com velocidade constante permanecerá com velocidade constante e um corpo em repouso permanecerá em repouso. No entanto, isso não será mais verdade caso o referencial seja acelerado, pois, por exemplo, se estivermos num carro com velocidade constante segurando uma pequena mesa com uma bolinha de gude em repouso no centro, a bolinha irá continuar em repouso, porém, caso o carro faça uma curva, isto é, acelere, veremos que a bolinha se movimentará mesmo na ausência de forças imprimidas diretamente nela.

Usualmente, dizemos que um referencial  $K'$  é inercial se este está em repouso ou em velocidade constante com relação a um outro referencial inercial  $K$ . Se olharmos com cuidado o primeiro postulado de Einstein, vemos que este nos diz que as leis da Física são as mesmas para qualquer referencial inercial, desta maneira, há uma equivalência entre estes referenciais e assim é impossível distinguir um referencial em repouso de um com velocidade constante. Em outras palavras, se efetuarmos experimentos físicos numa caixa completamente vedada do mundo exterior e observarmos que a primeira Lei de Newton é válida, é impossível dizer se estamos num referencial em repouso ou com velocidade constante, justamente pelo fato desta definição ser relativa.

Já o segundo postulado é completamente novo, e de fato é o que trouxe mudanças profundas. Essencialmente, se estivermos no vácuo num referencial  $K$  observando um outro referencial  $K'$  com velocidade constante  $v$  em relação a nós, e caso  $K'$  esteja equipado com uma fonte de luz, de acordo com as transformações de Galileu veremos que a velocidade da luz no referencial  $K$  é dada por  $c + v$ , no entanto, de acordo com o segundo postulado, a velocidade da luz medida em  $K$  na verdade será a mesma que em  $K'$ , isto é, será  $c$ . Este resultado simples produz consequências profundas, pois, para o segundo postulado ser válido, é necessário que o espaço e o tempo não sejam mais absolutos e rígidos, isto é, o espaço pode ser contraído e o tempo dilatado.

O primeiro resultado físico importante notado por Einstein foi a chamada relatividade da simultaneidade, em que eventos simultâneos para um referencial não necessariamente serão para um outro. Neste sentido, podemos perceber isto melhor através do famoso *Gedankenexperiment* (experimento mental) do trem e dos raios de Einstein. Assim, supondo um observador  $B$  num trem de velocidade constante indo do ponto  $\beta$  ao  $\alpha$  e um observador  $A$  em repouso fora dos trilhos e equidistante destes dois pontos, caso dois raios caiam em  $\alpha$  e  $\beta$  simultaneamente de acordo com  $A$ , devido a constância da luz em relação aos referenciais inerciais, o  $B$  verá que o raio em  $\beta$  caiu depois do raio em  $\alpha$ , ou seja, a noção de tempo é diferente nos dois referenciais.

Portanto, com base nos dois postulados, se considerarmos um referencial inercial  $K'$  de coordenadas  $(ct', x', y', z')$  que emita pulsos de luz e se movimente com velocidade constante  $v$  na direção  $x'$  em relação a um outro referencial simbolizado por  $K$  e com coordenadas  $(ct, x, y, z)$ , além de levarmos em conta que em  $t = t' = 0$  os referenciais coincidam os eixos  $x$  e  $x'$ , é possível demonstrar que as transformações de Lorentz:

$$\begin{cases} t' = \gamma \left( t - \frac{v}{c^2} x \right) \\ x' = \gamma (x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}, \quad (197)$$

são satisfeitas, em que  $\gamma$  é o famoso fator de Lorentz, dado por:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (198)$$

Nesta demonstração utilizamos os dois postulados de Einstein para obter as transformações de Lorentz, no entanto, certos autores afirmam que não há a necessidade do segundo postulado. Pois, como fora provado, ao considerar somente o primeiro postulado, juntamente com a isotropia e homogeneidade do espaço-tempo, é possível chegar em transformações tipo Lorentz com um parâmetro livre  $k$ , cujo valor no caso particular da Relatividade Especial é  $1/c^2$ , ou seja,  $\mu_0 \epsilon_0$  [259]. Poderia este fato indicar então uma possível relação entre o eletromagnetismo e as simetrias espaço-temporais, nos levando a uma **unificação** do eletromagnetismo com a teoria de Einstein?

Talvez sim, no entanto, o fato importante a se considerar aqui é a relação física-observador. Se considerarmos somente o primeiro postulado mais as simetrias mencionadas, obtemos as transformações de Lorentz com o parâmetro  $k$ , porém, isso é só matemática, este novo objeto é vazio de significado físico. O papel do segundo postulado é justamente dar valor físico a teoria, isto é, a luz é o veículo que transmite informação de um referencial inercial a outro sempre com velocidade constante  $c$ , sem esta sequer

poderíamos fazer Física. Desta maneira, o segundo postulado não é meramente um fato experimental a ser medido, mas sim o cerne que liga a Física aos observadores [259].

Podemos ainda generalizar as transformações (197), basta considerarmos uma transformação  $x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$  com velocidade  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ , em que os índices se dão através de  $(x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z)$ , que obtemos a matriz [260]:

$$[\Lambda^\mu{}_\nu] = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v_x/c & -\gamma v_y/c & -\gamma v_z/c \\ -\gamma v_x/c & 1 + (\gamma - 1)\frac{v_x^2}{v^2} & (\gamma - 1)\frac{v_x v_y}{v^2} & (\gamma - 1)\frac{v_x v_z}{v^2} \\ -\gamma v_y/c & (\gamma - 1)\frac{v_y v_x}{v^2} & 1 + (\gamma - 1)\frac{v_y^2}{v^2} & (\gamma - 1)\frac{v_y v_z}{v^2} \\ -\gamma v_z/c & (\gamma - 1)\frac{v_z v_x}{v^2} & (\gamma - 1)\frac{v_z v_y}{v^2} & 1 + (\gamma - 1)\frac{v_z^2}{v^2} \end{pmatrix}. \quad (199)$$

Desta maneira, se aplicarmos estas transformações aos campos elétrico e magnético é possível mostrar que as equações de Maxwell são invariantes sob (199). Einstein fez isso na segunda parte de seu artigo [252], aonde demonstrou que os campos elétrico e magnético estavam imbricados linearmente através destas transformações. Como consequência, ficou provado que o que pode ser um campo magnético num certo referencial inercial, pode ser observado como um campo elétrico mais um magnético num outro (e.g.  $\vec{E}' = -\gamma \vec{v} \times \vec{B}$  e  $\vec{B}' = \gamma \vec{B}$ ). Portanto, o eletromagnetismo esteve correto o tempo todo, e graças aos experimentos, percebeu-se que a mecânica clássica precisava ser reformulada de acordo com a Relatividade Restrita.

Apesar disso, para baixas velocidades ainda é possível obter essa mesma interpretação do problema do ímã e do condutor somente com transformações galileanas. A questão central da motivação do Einstein acerca desse problema é a forma como era interpretado em sua época, isto é, as velocidades eram com relação ao suposto éter, ao invés de se considerar a velocidade relativa do sistema em si [261].

Como eu havia mencionado, a implicação mais importante da Relatividade Restrita na mecânica é o fato de que o tempo e o espaço não são mais absolutos e rígidos. Pois, por exemplo, supondo os mesmos sistemas  $K$  e  $K'$  da demonstração de (197), caso uma régua de tamanho  $\Delta x'$  esteja em repouso com relação a  $K'$ , pelas transformações de Lorentz teremos que  $\Delta x = \gamma^{-1} \Delta x'$ , e, assim,  $K$  verá a régua com tamanho contraído  $\Delta x < \Delta x'$ , pois  $\gamma^{-1}$  será menor que 1 para corpos materiais, visto que neste caso,  $v < c$ . De maneira similar, um relógio em repouso no referencial  $K'$ , de acordo com o  $K$  terá o tempo dilatado, isto é,  $\Delta t > \Delta t'$  pois  $\Delta t = \gamma \Delta t'$ . Em outras palavras, o tempo em  $K'$  passa mais devagar do que em  $K$  e o espaço em  $K'$  é visto de  $K$  como sendo "menor".

O próximo grande passo na sistematização da Relatividade Especial, foi na verdade uma geometrização. Poincaré primeiro, mas principalmente Minkowski [261, 262], percebeu que é possível introduzir um *continuum* quadridimensional chamado de espaço-tempo cuja distância ao quadrado entre dois eventos infinitesimalmente próximos dada por:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (200)$$

é invariante sob transformações de Lorentz. Desta forma, foi Minkowski que **unificou** o espaço e o tempo num ente matemático só na Relatividade Restrita, de tal maneira que o objeto (200), conhecido como métrica de Minkowski<sup>24</sup>, nada mais é do que a representação da variedade Lorentziana globalmente plana de que tanto falamos na subseção anterior.

Com a base da Relatividade Especial definida, podemos partir agora para algumas definições que vão nos ajudar a construir a Relatividade Geral. Se escrevermos a métrica de Minkowski como  $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ , tal que:

$$[\eta_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (201)$$

temos que a norma de um vetor é definida como  $X^2 = \eta_{\mu\nu} X^\mu X^\nu = X^\mu X_\mu$ , em que se  $X^2 > 0$  o vetor é tipo-tempo, se  $X^2 < 0$  o vetor é tipo-espaço e se  $X^2 = 0$  o vetor é dito nulo ou tipo-luz.

Dizemos assim, que um vetor nulo é ortogonal a si mesmo. Não só isso, mas o conjunto de todos os vetores nulos num ponto  $p$  formam um cone chamado de cone de luz ou cone nulo, para tal, basta vermos que  $\eta_{\mu\nu} X^\mu X^\nu = 0$  dá origem a equação de um hipercone  $(X^0)^2 - (X^1)^2 - (X^2)^2 - (X^3)^2 = 0$ . Este cone possui a propriedade interessante de definir a causalidade na Relatividade Restrita, isto é, todo efeito tem uma causa que exige que a causa anteceda o efeito, dessa maneira o cone de luz, ou cone causal, define uma estrutura espaço-temporal para que isso ocorra.

Posto isto, se considerarmos um vetor  $V^\mu = (1, 0, 0, 0)$  tipo-tempo em coordenadas de Minkowski, dizemos que um vetor  $X^\mu$  nulo ou tipo-tempo aponta para o futuro se  $\eta_{\mu\nu} X^\mu V^\nu > 0$  ou aponta para o passado se  $\eta_{\mu\nu} X^\mu V^\nu < 0$ . No entanto, podemos ir além e definir o cone com base em geodésicas, dessa forma, seja uma geodésica nula uma geodésica cujos vetores tangentes são todos tipo-luz, dizemos que o cone de luz em  $p$  é o objeto formado por todas as geodésicas nulas que passam por este ponto.

Assim, seja uma linha de universo tipo-tempo definida como uma curva cujo vetor tangente é tipo-tempo em qualquer ponto e cujo objetivo é representar as trajetórias de corpos materiais no espaço-tempo de Minkowski, como por exemplo, geodésicas. Devido ao fato de que partículas materiais nunca podem ultrapassar a velocidade da luz no vácuo,

---

<sup>24</sup> É possível também, sem nenhum problema, escrever essa métrica como  $ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ .



A importância do tempo próprio aparece quando consideramos uma terceira hipótese na Relatividade Especial, a fim de descrever a trajetória de observadores acelerados. Pois, como já vimos, esta teoria não trata inicialmente de referenciais acelerados, assim, é necessário a introdução da chamada hipótese do relógio. Basicamente, esta hipótese nos diz que um relógio não é afetado pela aceleração instantânea, mas somente pela velocidade relativa instantânea, dessa forma, há uma equivalência local entre um observador acelerado e um observador inercial instantaneamente comóvel.

Deste modo, um observador acelerado arbitrário pode ser descrito ao se considerar um referencial inercial instantâneo diferente em cada ponto da trajetória deste observador, pois, desta maneira, a velocidade e a noção de tempo da trajetória acelerada terão uma correspondência local e direta com os referenciais inerciais, por isso, cada ponto da curva da figura 18 possui um cone de luz diferente. Podemos expressar esta ideia através do  $\tau$ , dessa forma, seja  $\vec{v} = \vec{v}(t)$  a velocidade de um observador acelerado, temos que:

$$d\tau^2 = \frac{ds^2}{c^2} = \left(1 - \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2\right) dt^2 = \gamma(t)^{-2} dt^2 \rightarrow d\tau = \frac{dt}{\gamma(t)}, \quad (202)$$

assim, o tempo próprio de um observador acelerado é localmente equivalente ao tempo  $t$  de um referencial inercial dividido pela função  $\gamma(t)$ . Por fim, podemos integrar essa expressão e obter qualquer curva na Relatividade Restrita através de:

$$\tau = \int_{t_0}^t \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} dt. \quad (203)$$

Posto isto, com base na referência [239] podemos geometrizar por completo a teoria da Relatividade Restrita por meio de dois axiomas simples, aonde o primeiro define a geometria e o segundo define a Física. Desta maneira, temos que:

- O espaço-tempo é representado por uma variedade lorentziana quadridimensional dotada de uma conexão simétrica e um tensor métrico que satisfazem:  $g_{\mu\nu}$  tem assinatura  $(+, -, -, -)$  e é invertível,  $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$  e  $R^\alpha_{\mu\nu\rho} = 0$ ;
- Existem curvas privilegiadas tal que: relógios ideais medem o parâmetro  $\tau$  ao longo de curvas tipo-tempo arbitrárias, corpos materiais livres de forças viajam em geodésicas tipo-tempo e ondas eletromagnéticas viajam em geodésicas nulas.

O primeiro axioma nos diz basicamente que a conexão utilizada é a conexão métrica, e que a nossa variedade é globalmente plana. Já o segundo axioma, antecipa o que iremos fazer para a Relatividade Geral, isto é, como a primeira Lei de Newton diz que na ausência de forças, um objeto se moverá em linha reta ou ficará em repouso, e como

as geodésicas são generalizações de retas, podemos representar a trajetória de partículas materiais livres de forças por geodésicas, mais especificamente, por geodésicas tipo-tempo, pois, como vimos, estas obedecem a estrutura da causalidade.

Por outro lado, representamos a trajetória dos raios de luz por geodésicas nulas. Pois, se considerarmos que  $k^\mu = dx^\mu/d\lambda$ , temos que a equação de uma geodésica nula em coordenadas de Minkowski é dada por  $dk^\mu/d\lambda = 0$  em que  $\eta_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = 0$ , desta forma, seja  $v^i = dx^i/dt = c(k^i/k^0)$  as componentes espaciais da velocidade ao longo da geodésica nula, pois,  $(dx^i/dx^0)(dx^0/d\lambda) = (dx^i/dt)(k^0/c) = k^i$ , ao considerarmos que  $v^2 = [c^2/(k^0)^2][(k^1)^2 + (k^2)^2 + (k^3)^2]$  e abrirmos  $\eta_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = (k^0)^2 - [(k^1)^2 + (k^2)^2 + (k^3)^2] = 0$ , é de imediato que  $v^2 = c^2$ . Portanto, geodésicas nulas possuem naturalmente a velocidade  $c$  e são invariantes sob transformações de Lorentz, assim, é natural dizermos que a trajetória da luz é dada por uma geodésica nula.

Por fim, seja  $\vec{v}$  a velocidade de uma partícula,  $\vec{a} = d\vec{v}/dt$  sua aceleração,  $m = \gamma m_0$  sua "massa relativística" em função de sua massa de repouso  $m_0$ ,  $\vec{p} = m\vec{v}$  seu momentum e  $\vec{F} = d\vec{p}/dt$  a força imprimida sobre ela, podemos definir objetos chamados de quadrivetores que se transformam de acordo com as transformações de Lorentz da seguinte maneira:

- Quadrivelocidade:  $\mathcal{U}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \rightarrow \vec{\mathcal{U}} = \gamma(c, \vec{v})$ ;
- Quadriaceleração:  $\mathcal{A}^\mu = \frac{d\mathcal{U}^\mu}{d\tau} \rightarrow \vec{\mathcal{A}} = \left( \gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c}, \gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \vec{v} + \gamma^2 \vec{a} \right)$ ;
- Quadrimomentum:  $\mathcal{P}^\mu = m_0 \mathcal{U}^\mu \rightarrow \vec{\mathcal{P}} = \left( \frac{E}{c}, \vec{p} \right)$ ;
- Quadriforça:  $\mathcal{F}^\mu = \frac{d\mathcal{P}^\mu}{d\tau} \rightarrow \vec{\mathcal{F}} = \gamma \left( \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c}, \vec{F} \right)$ .

Desta forma, a mecânica clássica teve de ser reformulada a partir destas novas quantidades, assim, esta nova teoria ficou conhecida como mecânica relativística. Não somente isso, mas por meio dos invariantes de Lorentz  $\mathcal{U}^\mu \mathcal{U}_\mu = c^2$  e  $\mathcal{P}^\mu \mathcal{P}_\mu = (E^2/c^2) - p^2$ , e considerando que  $\mathcal{P}^\mu \mathcal{P}_\mu = \mathcal{U}^\mu \mathcal{U}_\mu m_0^2 = m_0^2 c^2$ , é possível encontrar a equação mais famosa do planeta, isto é:

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2} = mc^2 \sqrt{\gamma^{-2} + v^2/c^2} \rightarrow E = mc^2. \quad (204)$$

A equação (204) relaciona a "massa relativística" de uma partícula com a energia armazenada por esta. Assim, por exemplo, uma partícula qualquer de massa não nula nunca pode alcançar a velocidade da luz, pois, para tal, seria necessário uma energia infinita, já que o fator de Lorentz  $\gamma$  vai ao infinito quando  $v \rightarrow c$ . Portanto, Einstein

descobriu que existe um limite cósmico de velocidade para a matéria. É por este motivo também que descrevemos a trajetória de corpos materiais livres de forças por geodésicas tipo-tempo, pois, a velocidade deste tipo de curva é sempre menor do que  $c$ .

### A.1.7 Ideias de Einstein

Iremos comentar nesta subseção sobre o conjunto de ideias filosóficas e físicas que guiaram Einstein, de maneira explícita e implícita, rumo a construção de sua teoria. Tudo o que será exposto nesta parte do trabalho está profundamente baseado numa mesma discussão presente na referência [239]. Os princípios que vamos mencionar aqui são uma visão parcialmente anacrônica dos fatos históricos, portanto encare o que vem a seguir mais como um guia moderno de ideias filosóficas que vai nos ajudar a erigir a Relatividade Geral do que como uma lista histórica de condições fixas a serem satisfeitas pela teoria de Einstein. Para uma visão histórica mais completa e acurada veja a referência [126].

São cinco os princípios que iremos expor, primeiro veremos o princípio de Mach, que no fundo se trata da visão de Einstein sobre certas ideias do positivista Ernst Mach, e em seguida veremos o(s) princípio(s) da equivalência, que é provavelmente a ideia mais importante de Einstein; o conceito mais fundamental da Gravitação. Por fim, veremos três ideias físico-matemáticas que vão nos ajudar a construir as equações de Einstein, isto é, os princípios da covariância, do acoplamento gravitacional mínimo e da correspondência.

A premissa das ideias machianas começa numa tentativa de interpretar fisicamente as chamadas forças inerciais, e se resume ao experimento mental do balde com água. Como vimos, as Leis de Newton só são válidas em referenciais inerciais, isto é, aqueles referenciais em que um corpo permanece com velocidade constante na ausência de forças aparentes. Já nos referenciais acelerados há o surgimento de novos termos na segunda Lei de Newton que curiosamente possuem a massa como constante de proporcionalidade, por exemplo, em referenciais girantes há a ocorrência das famosas forças centrífuga e de Coriolis. A estes tipos de forças que surgem em referenciais acelerados e que não possuem uma causa física aparente, damos o nome de forças inerciais.

A teoria de Newton enxergava essas forças apenas como uma curiosidade que surgia do movimento acelerado de um referencial em relação ao espaço absoluto<sup>25</sup>, dessa forma, se suspendêssemos um balde com água através de uma corda, quando torcêssemos esta corda veríamos que a água iria se curvar por meio de efeitos centrífugos devido a rotação desta em relação ao referencial absoluto. Por conseguinte, de acordo com Newton, esta concavidade não estaria a princípio associada diretamente a rotação do balde, pois no

---

<sup>25</sup> "Espaço absoluto, em sua própria natureza, sem relação com qualquer coisa externa, se mantém sempre igual e imóvel.- [234]

momento inicial o balde gira mas a água não e no fim o inverso acontece, isto é, o balde alcança o repouso mas a superfície d'água continua num formato côncavo.

Portanto, para diferenciar um referencial acelerado de um inercial com relação ao espaço absoluto [126], bastaria carregar um balde com água, pois, num sistema em rotação absoluta a superfície da água teria uma forma côncava, num sistema acelerado linearmente a água teria um ângulo oblíquo e num referencial inercial a superfície seria plana horizontal (gravidade implícita). Em contraposição, o filósofo Ernst Mach propôs em 1893, com base em ideias similares de Berkeley e Leibniz, que somente o conceito de movimento relativo fazia sentido [263]. Assim, para Mach, um corpo material num *kósmos* vazio, já que não existiria nenhum ponto de referência físico, não possuiria o conceito de movimento definido [263, 264, 265].

A partir desta ideia, Mach foi além e afirmou que a origem física dos efeitos inerciais em referenciais acelerados se deve a interação, não necessariamente e unicamente a da gravidade, que ocorre entre toda a matéria presente no *cosmos* [264]. Para este autor, um referencial inercial local só poderia ser determinado com relação às chamadas estrelas fixas, pois esta extensão de matéria no *cosmos*, com suas massas, movimentos e distribuições basicamente definiria o que são esses efeitos inerciais. É importante notar novamente, que muito dos fatos históricos presentes aqui são anacrônicos, isto é, são uma visão atual do que realmente aconteceu, tanto que é complexo compreender por qual motivo se adotava um referencial absoluto quando a própria mecânica implicava na relatividade galileana. Para uma análise histórica mais detalhada veja [263, 249, 266, 161].

Com relação ao experimento do balde, o ponto de vista newtoniano não dava nenhuma explicação para o fato da superfície da água se curvar quando esta estivesse girando em relação ao espaço absoluto. No entanto, de acordo com Mach, a curvatura surge da rotação relativa da água com as estrelas fixas. Para ver a diferença entre os dois modos de pensar podemos utilizar o *gedankenexperiment* de [239], pois, caso girássemos o Universo e o balde estivesse fixo, de acordo com a relatividade do movimento de Mach, veríamos a água se curvar, enquanto que para Newton não veríamos efeito algum [126]. Em vista disso, para Mach, o que teria maior efeito na curvatura da água seria justamente a interação provocada pelo movimento relativo desta com as outras massas do *cosmos*.

Em outras palavras, na visão machiana a inércia teria sua origem num tipo de interação entre todos os corpos materiais do Universo. É importante tomar cuidado com esta afirmação, pois dizer que a inércia tem essa origem física é na verdade uma visão de Einstein das ideias de Mach, podemos ver isso melhor através de uma carta de Einstein para o autor positivista: "... inércia se origina num tipo de interação entre corpos, muito no sentido de suas considerações do experimento do balde de Newton.- [267, 263, 249].

Na visão Einsteiniana-Machiana, os efeitos inerciais não variam muito localmente, já que é a interação entre a água do balde e a matéria dos corpos distantes e numerosos do Universo que predomina. Pois, como mencionamos anteriormente, as forças inerciais

dependem da massa do corpo que as experienciam, assim é natural impor que os efeitos inerciais também dependam das massas das estrelas fixas, no entanto, é observado que massas próximas como o Sol e a Terra não interferem nestes efeitos, portanto é plausível supor que é a interação com as diversas massas distantes que realmente importa.

Desta forma, com base em tudo que foi exposto e segundo a visão Machiana, sem matéria no Universo não teríamos efeitos inerciais na água do balde. Não somente isto, mas se introduzíssemos uma outra partícula de pequena massa neste hipotético universo quase vazio, observaríamos que a água do balde reganharia suas propriedades inerciais com uma magnitude inferior ao caso de um universo cheio de matéria. De maneira similar, num *kósmos* não isotrópico, isto é, com uma sobredensidade de matéria numa determinada direção, veríamos que os efeitos inerciais seriam dependentes da direção. Portanto, os efeitos inerciais teriam de variar de acordo com a massa do Universo e sua distribuição.

Assim, numa teoria dita Machiana, a inércia de um corpo material tem de ser definida a partir de toda a matéria do Universo. Esse efeito de indução inercial foi explorado por Einstein em [268], e no contexto da Relatividade Geral em [122]. No entanto, apesar da inspiração em Mach, o resultado de Einstein para esse efeito é apenas resultado de um efeito de coordenada [127, 161], uma das razões da teoria da Relatividade Geral não ser Machiana, há, porém, teorias alternativas da gravitação que são parcialmente Machianas, por exemplo, a teoria de Brans-Dicke nos diz que a grandeza  $G$  na verdade é um campo escalar que varia de acordo com a época e local do nosso *cosmos*. Essencialmente, as críticas de Mach à mecânica Newtoniana motivaram Einstein na busca por uma teoria que não tratasse referenciais inerciais de maneira privilegiada [126].

Posto estas reflexões filosóficas e históricas das ideias de Mach e lembrando que neste trabalho a palavra *kósmos* se refere a uma idealização humana do Universo e da realidade, caso pensemos na geometria do Universo como sendo as curvas privilegiadas em que partículas materiais e ondas eletromagnéticas se movimentam, de acordo com [239], podemos axiomatizar a visão de Einstein das ideias machianas da seguinte maneira:

- A geometria do *kósmos* é determinada pela distribuição de matéria;
- Se não há matéria, não haverá geometria do *kósmos*;
- Um corpo material num *kósmos* vazio não possui propriedades inerciais.

Em relação ao princípio da equivalência, se considerarmos a proposta da referência [136], a visão moderna e mais acurada seria de que na verdade existem cinco tipos deste princípio. No entanto, por motivos de praticidade e com base nas referências [239, 249], iremos comentar neste trabalho somente quatro versões desta ideia física. Em vista disso, veremos que essencialmente a primeira versão está relacionada com a definição de massa na mecânica clássica e com o famoso experimento da torre de Pisa de Galileu, a segunda

formulação baseada na relação massa-energia da Relatividade Restrita e as duas últimas versões fundamentadas no experimento mental do elevador de Einstein.

Se olharmos com cuidado para a mecânica de Newton veremos que há três definições diferentes de massa, a principal delas é a massa inercial baseada na segunda Lei de Newton, que nos informa a quantidade de inércia de um corpo, ou seja, a medida da resistência que um corpo material tem a uma mudança de movimento. Já as outras duas definições são obtidas a partir da Lei da gravitação de Newton, uma é a massa gravitacional passiva que mede a reação de um corpo a gravidade e a outra é a massa gravitacional ativa que mede a capacidade de um corpo em gerar um campo gravitacional.

Na mecânica clássica essas três definições são consideradas iguais de maneira implícita, pois como fora verificado por Galileu na torre de Pisa<sup>26</sup> e séculos depois por meio do experimento de Eötvös, e também com um martelo e uma pena na Lua pela Apollo 15, corpos num campo gravitacional constante e na ausência de ar caem da mesma maneira independente de suas composições e massas inerciais. Assim, a consequência disto é que a massa inercial de um corpo é idêntica a sua massa gravitacional passiva, e dada a reciprocidade da gravitação, é de imediato que a massa inercial também é igual a massa gravitacional ativa no caso de uma partícula material.

Este fato importante, que é considerado somente uma curiosidade na gravitação newtoniana, é uma hipótese fundamental da Relatividade Geral e pode ser posto da seguinte maneira:

- Princípio da Equivalência Fraco<sup>27</sup>: O movimento de uma partícula material<sup>28</sup> num campo gravitacional não depende de sua massa e nem de sua composição física.

Além disso, queremos elevar ao nível de princípio o fato de que a matéria é afetada pela gravidade mas também é geradora desta, só que como a Relatividade Especial nos diz que a matéria possui uma relação matemática com a energia, podemos postular que:

- Princípio da Universalidade da Gravitação: Tudo que existe é afetado pela gravidade e pode gerar um campo gravitacional<sup>29</sup>.

Para compreender melhor as duas últimas versões do princípio da equivalência, teremos que entender primeiro o que Einstein disse ser o pensamento mais feliz de sua

<sup>26</sup> Na verdade, não se sabe realmente se o experimento de Galileu foi verdade ou se foi apenas um conto de sua biografia escrita pelo seu aluno Vincenzo Viviani. Não somente isto, mas muitos autores antes mesmo de Galileu nascer já verificaram este fato em contraposição à visão aristotélica de que objetos caem proporcionalmente a seus pesos.

<sup>27</sup> Também chamado de Princípio da Equivalência de Galileu ou de Universalidade da Queda Livre.

<sup>28</sup> Mais especificamente, esta partícula não pode perturbar este campo gravitacional com a sua auto-gravidade, somente ser afetada por este campo externo. É uma partícula eletricamente neutra com momento angular negligível e suficientemente pequena [249].

<sup>29</sup> Como diria o físico Mario Novello do CBPF: "Caio, logo existo."

vida e assim nos imaginar dentro de um elevador vedado de qualquer estímulo do mundo exterior [126]. Supondo que este elevador esteja em queda livre, tudo o que estiver dentro dele também estará, dessa maneira, sentiríamos uma espécie de "gravidade zero" em relação às paredes do elevador, isto é, estaríamos flutuando. Equivalentemente, se de alguma forma colocássemos esse elevador no espaço distante e longe de corpos massivos, de tal maneira que este possuísse uma velocidade constante com relação a algum referencial inercial, sentiríamos a mesma sensação de "gravidade zero".

Portanto, para um observador dentro do elevador seria impossível distinguir entre estes dois casos, pois o resultado prático seria o mesmo, isto é, seu corpo estaria flutuando em relação às paredes do elevador. Dessa forma, essa igualdade entre os dois casos nos permite postular o primeiro princípio:

- Princípio da Equivalência de Einstein 1: É impossível distinguir localmente uma queda livre sem rotações em um campo gravitacional de um movimento retilíneo uniforme no espaço na ausência da gravidade.

Este princípio é tão importante, que até mesmo os astronautas da ISS (Estação Espacial Internacional) têm que lidar com ele. Como a ISS se encontra a apenas 418~422 quilômetros de distância da superfície da Terra, a aceleração da gravidade terrestre lá ainda é sentida com 89% de seu valor aqui ( $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ ), só que como a estação está em queda livre ao redor da Terra, ou seja, em órbita, o que eles sentem na verdade é o mesmo que iriam perceber se estivessem num referencial inercial qualquer longe de campos gravitacionais. É por esta razão que vemos astronautas flutuarem na ISS, e é graças ao princípio da equivalência que dizemos que estas pessoas se encontram em "gravidade zero".

A imposição de localidade que fizemos no princípio acima é tão importante quanto, pois, no caso do experimento mental mencionado, significa que o nosso elevador é suficientemente pequeno para que não ocorra os efeitos de maré devido a variações do campo gravitacional de um ponto a outro, desta forma o campo gravitacional dentro do elevador é altamente uniforme. Assim, num caso mais geral, se escolhermos um referencial não girante e em queda livre com uma partícula material qualquer, reganhamos um referencial inercial localmente. Por essa razão, isto é, por podermos retirar efeitos gravitacionais localmente de referenciais arbitrários e assim retornar à Relatividade Especial, é que consideramos uma variedade lorentziana como sendo localmente um espaço de Minkowski.

De maneira similar, caso este elevador especial esteja em repouso com relação ao planeta Terra, sentiríamos o nosso peso em relação ao chão do elevador. Equivalentemente, se de algum jeito pudéssemos acelerar este elevador com o exato valor de  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$  numa porção do espaço longe de corpos massivos, sentiríamos uma força inercial com a mesma magnitude do evento anterior no sentido contrário do vetor aceleração. Desta forma, se largássemos um objeto dentro do elevador, diferentemente do primeiro princípio aonde este flutuaria, veríamos que este corpo cairia em direção ao chão do elevador de

forma igual nestes dois novos casos.

Sendo assim, para um observador de dentro do elevador os dois casos seriam indistinguíveis, o seu peso seria o mesmo nos dois eventos e um objeto abandonado dentro do elevador cairia de maneira idêntica. Portanto, mesmo que de fora nós consigamos distinguir a origem física do fenômeno, isto é, no primeiro caso há a força peso e no segundo temos uma força inercial empurrando constantemente o observador, é impossível para quem está dentro do elevador diferenciar os dois casos, pois, fenomenologicamente, os dois podem ser interpretados como sendo a força peso ou como uma força inercial.

Posto isto, essa igualdade fenomenológica local entre estes dois eventos de diferentes origens físicas nos permite postular a forma mais importante do princípio da equivalência pensado por Albert Einstein:

- Princípio da Equivalência de Einstein 2: É impossível distinguir localmente um referencial em repouso num campo gravitacional de um referencial linearmente acelerado relativamente a um referencial inercial numa porção do espaço sem gravidade.<sup>30</sup>

Essencialmente, estes dois princípios nos dão uma correspondência local entre referenciais em um campo gravitacional e referenciais na ausência de gravidade, podemos então unificá-los como [249, 136]:

- Princípio da Equivalência de Einstein: Qualquer fenômeno físico de origem não-gravitacional (dinâmica relativística no sentido restrito, eletromagnetismo, termodinâmica etc) não é afetado localmente pela presença de um campo gravitacional.

Como consequência deste princípio, e ao notar que tanto as forças inerciais como a força gravitacional são proporcionais a massa do corpo as experienciando, Einstein deu o passo essencial e afirmou que a gravitação pode ser entendida como um efeito inercial de espaços-tempos curvos. Neste sentido, se considerarmos um referencial inercial com coordenadas de Minkowski, temos que a equação de movimento de uma partícula material livre é dada por  $d^2x^\mu/d\tau^2 = 0$ , mas se considerarmos um referencial acelerado, a equação correta será a (179) com  $\Gamma^\mu_{\alpha\nu}$  sendo a conexão métrica e  $\zeta = \tau$  o tempo próprio [239]; por exemplo, o movimento de uma partícula com relação a um observador de Rindler.

Deste modo, a métrica neste caso, apesar de ainda ser plana, será diferente e por conseguinte estes novos termos não nulos que surgem envolvendo a conexão métrica serão naturalmente interpretados como os efeitos inerciais sentidos pela partícula neste referencial acelerado. Mas como pelo princípio da equivalência os efeitos inerciais são

---

<sup>30</sup> É interessante notar que antes mesmo de Galileu e da mecânica clássica, da Vinci já tentava relacionar gravidade e aceleração no que chamou de *Equatione di Moti*, uma espécie de "princípio da equivalência" primitivo (mas distante das ideias de Einstein), como evidenciado no Codex Arundel (1480-1518) [269].

equivalentes aos efeitos gravitacionais, temos que de alguma forma o objeto  $\Gamma^\mu_{\alpha\nu}$  também deve representar a gravidade, só que como a métrica ainda é plana no primeiro caso e como a origem física dos dois fenômenos é bem diferente, a opção mais natural é dizer que os efeitos da gravidade num corpo são dados a partir da conexão métrica com uma métrica não plana, pois assim é possível distinguir conceitualmente esses dois fenômenos.

Historicamente, no entanto, a passagem conceitual para uma geometria não-Euclidiana como descrição da gravidade tem seu cerne num referencial acelerado girante  $K'$  [270, 233, 126]. De acordo com Einstein, um círculo num referencial girante tem a razão entre sua circunferência e diâmetro maior que  $\pi$ , já que ao considerar o sistema num tempo fixo com relação a um referencial inercial  $K$  alinhado com o eixo de rotação, a partir da Relatividade Especial obtém-se uma contração de Lorentz de réguas padrão na periferia do círculo, fazendo com que falem réguas para medir a circunferência, isto é, o perímetro do círculo é maior do que  $2\pi r$  [233, 122].

Desta forma, no referencial girante, a geometria seria não-Euclidiana. A conclusão de Einstein, em seu livro [122], foi então: "... de acordo com o princípio da equivalência,  $K'$  pode também ser considerado como um sistema em repouso, com relação ao qual há um campo gravitacional (campo de força centrífuga, e força de Coriolis). Chegamos então no resultado: o campo gravitacional influencia e até mesmo determina as leis métricas do *continuum* espaço-temporal. Se as leis de configuração de corpos rígidos ideais devem ser expressas geometricamente, então na presença de um campo gravitacional a geometria não é Euclidiana.". Lidar com referenciais girantes não é tão simples, alguns autores afirmam que a circunferência seria contraída, e outros que a geometria é Euclidiana, para informações detalhadas sobre o assunto veja as referências [271, 270, 272].

Assim, a gravidade não é mais entendida como uma força no sentido clássico, mas sim como uma manifestação de espaços-tempos curvos, representada matematicamente por  $\Gamma^\mu_{\alpha\nu}$  de uma métrica não plana. Uma interpretação física que tem então suas bases no princípio da equivalência; como o próprio Einstein diz em [122]: "De fato, por meio dessa concepção nós chegamos na unidade da natureza da inércia e gravitação.". O campo físico na Relatividade Geral será então o próprio espaço-tempo, desta forma a métrica  $g_{\mu\nu}$  pode ser interpretada como o potencial desse campo. Portanto, como a equação de campo de Poisson da gravitação newtoniana é uma equação diferencial parcial de segunda ordem no potencial:

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho, \quad (205)$$

aonde  $\rho$  é a densidade de matéria, é de se esperar que a nova equação de campo da gravitação seja também de segunda ordem na métrica.

Podemos dizer então, com base em tudo o que foi discutido, que a Relatividade Geral interpreta os efeitos gravitacionais como consequências da curvatura do espaço-

tempo causada pela localização de matéria-energia e sua representação matemática se dá através da conexão métrica de uma métrica curva, que será definida a partir de equações de campo envolvendo termos de até segunda ordem nas derivadas parciais de  $g_{\mu\nu}$ .

No entanto, ainda faltam certas ideias para nos ajudar a construir as equações de campo desta nova teoria. Para Einstein, um conceito muito importante era o de generalizar o princípio da relatividade no sentido restrito, isto é, fazer com que as leis da Física sejam aplicadas para qualquer tipo de observador, inercial ou não, de maneira não privilegiada. No seu artigo de 1916 [233] isso fica evidente, os princípios de Mach e da equivalência servem como motivadores para generalizar o postulado da relatividade especial, sendo uma teoria da gravitação uma consequência natural devido ao princípio da equivalência. Dessa forma, ele criou o seguinte princípio:

- Princípio da Relatividade Geral: "Todos os sistemas de coordenadas gaussianos são essencialmente equivalentes para a formulação das leis gerais da natureza- [256],

em que coordenadas gaussianas significa que estamos tratando de geometrias curvas. É importante notar, como já fora mencionado, que a Relatividade Especial é capaz de tratar de referenciais não-inerciais de maneira simples ao postular que a aceleração instantânea não afeta relógios. Desta maneira, essa teoria já resolvia o problema da descrição física via observadores acelerados, sendo a gravitação a peça fundamental faltante [126].

Matematicamente, este princípio nos diz que uma teoria física tem que ser invariante sob uma transformação de coordenadas. Por exemplo, isso seria satisfeito se uma equação tensorial descrevesse uma teoria qualquer, pois as componentes de um lado possuiriam uma transformação de coordenadas bem definida e as do outro lado teriam essa mesma transformação, assim, a parte fenomenológica pode mudar de um referencial a outro, mas a equação tensorial descrevendo estes fenômenos seria a mesma para qualquer observador. Neste sentido, podemos reescrever o princípio acima como:

- Princípio da Covariância Geral: Uma teoria da Física deve ser descrita por meio de equações tensoriais<sup>31</sup>.

Por fim, os dois últimos princípios também vão nos ajudar a construir as equações de campo, o primeiro se chama princípio do acoplamento gravitacional mínimo e nos diz que a transição entre a Relatividade Especial e Geral deve ser a mais simples possível, tal que o tensor de curvatura de Riemann não deve aparecer explicitamente em certas generalizações. Por exemplo, a generalização mais apropriada para a derivada parcial seria somente a derivada covariante (170). Já o segundo princípio, o da correspondência,

---

<sup>31</sup> Atualmente muitos autores criticam este princípio, pois no fundo qualquer teoria pode ser posta na forma tensorial. No entanto, como esta ideia foi essencial para Einstein, é válido mencioná-la.

nos diz que a Relatividade Geral no limite de campos gravitacionais fracos e de baixas velocidades deve ser matematicamente idêntica a gravitação newtoniana (ignorando a dilatação temporal), da mesma forma, na ausência de gravidade esta nova teoria deverá ser reduzida a Relatividade Especial.

### A.1.8 Equações de Campo

Para encontrar as equações de campo completas da teoria de Einstein, utilizaremos o procedimento heurístico de [239], aonde precisamos primeiro encontrar essas equações no vácuo. Dito isso, como os efeitos gravitacionais e os inerciais são localmente equivalentes, a única maneira de detectar a presença de um campo gravitacional sem ambivalência é através de seus efeitos não locais, isto é, através da sua variação manifestada nos famosos efeitos de maré. Dessa forma, se estivéssemos no elevador especial do experimento mental do Einstein e largássemos duas esferas materiais, caso este elevador estivesse em repouso com relação a Terra, veríamos as duas bolas caírem e convergirem em direção ao centro desta. Portanto, supondo que as bolas sejam largadas de uma distância grande o suficiente, veríamos estas duas caírem e se aproximarem.

Já se este elevador estivesse em queda livre, veríamos as duas esferas se aproximarem numa espécie de atração mútua, pois todos os corpos neste caso cairiam em linhas que também convergem no centro do nosso planeta. Por outro lado, se o elevador estivesse acelerando ou em velocidade constante num local sem campos gravitacionais, veríamos as duas bolas caírem paralelamente no primeiro caso e no segundo as veríamos flutuarem com uma distância constante. Desse modo, num determinado limite de distância surgem os efeitos de maré e o princípio da equivalência não segue mais sendo verdade.

Ao transcrevermos este fenômeno para a linguagem da Matemática, percebemos que este resultado emerge do fato de que geodésicas convergem ou divergem num espaço-tempo curvo e trajetórias clássicas curvam num potencial gravitacional. No caso de um potencial clássico chamamos isto de desvio newtoniano e no caso de um espaço-tempo curvo de desvio geodésico<sup>32</sup>. O importante aqui, se considerarmos a referência [239], é que a equação do desvio newtoniano nos retorna a equação de campo da gravitação no vácuo, isto é,  $\nabla^2\Phi = 0$ , se o objeto  $k^i_i = \partial^i\partial_i\Phi$  for nulo.

Com base nisso e considerando uma correspondência newtoniana, se calcularmos a equação do desvio geodésico somente nas três dimensões espaciais, descobrimos que o

---

<sup>32</sup> É interessante notar, já que localmente sempre podemos eliminar efeitos gravitacionais via uma transformação de coordenadas (exemplos: coordenadas de Fermi, Riemann), a gravidade de fato não está codificada na equação geodésica mas sim na equação de desvio de congruências [187, 267, 273]. Visão que está de acordo com as ideias de Mach, já que se compara o movimento de uma partícula com relação a outra, descrição puramente relacional.

objeto  $k^i_i$  possui uma relação matemática com o tensor de Ricci, portanto, de acordo com o princípio da correspondência, é de imediato supormos que as equações de campo da Relatividade Geral no vácuo são dadas a partir da nulidade do tensor de Ricci, ou seja,  $R_{\mu\nu} = 0$  se não há matéria no espaço-tempo em questão. Além disso, é interessante notar também que o tensor de Ricci é a única contração não nula do tensor de Riemann e que o tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$  só será zero se e somente se o tensor de Ricci for nulo.

No fim, levando em consideração tudo o que foi visto nas subseções anteriores, temos que a teoria da Relatividade Geral é construída com base na geometria diferencial, na teoria da Relatividade Especial, na mecânica newtoniana e nos cinco princípios físico-filosóficos de Einstein. Dessa forma, de acordo com o princípio da equivalência podemos tratar a gravitação como um fenômeno inercial de espaços-tempos curvos e reganhar a Relatividade Especial localmente no caso de corpos em queda livre, a partir da geometria diferencial podemos representar o espaço-tempo por uma métrica de uma variedade lorentziana não plana e por meio do princípio de Mach e da Relatividade Restrita podemos dizer que tanto matéria como energia interferem na métrica.

Temos ainda, de acordo com a Relatividade Restrita e com o princípio da equivalência, que as trajetórias de partículas materiais livres e de raios de luz são dadas, respectivamente, por geodésicas tipo-tempo e geodésicas nulas, tal que os efeitos gravitacionais surgem da conexão métrica da métrica não plana do espaço-tempo do ponto de vista do desvio geodésico. A partir do princípio da correspondência com a mecânica newtoniana e de acordo com o princípio da covariância geral, também temos que a métrica é interpretada como o potencial gravitacional da teoria e que as equações diferenciais da Relatividade Geral devem ser tensoriais de segunda ordem nas derivadas parciais do tensor métrico.

Além do mais, segundo o desvio geodésico, os efeitos não locais da gravidade se manifestam por meio da convergência ou divergência de geodésicas num espaço-tempo curvo, logo o que descreve estes fenômenos é o tensor de Riemann. Sendo assim, ao levarmos em consideração o desvio newtoniano, temos que as equações de campo no vácuo são dadas a partir de  $R_{\mu\nu} = 0$ , o que nos diz, portanto, que as equações completas da teoria muito provavelmente devem envolver termos com o tensor de Ricci.

Porém, até o momento vimos somente as representações tensoriais dos objetos geométricos que podem ser definidos numa variedade curva, falta ainda, no entanto, saber como representar a matéria de uma maneira tensorial. Para isto, lançamos mão novamente da Relatividade Restrita, pois, nesta teoria há o chamado tensor momento-energia  $T_{\mu\nu}$  que se conserva de acordo com a relação  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ . Para transpormos este fato para um espaço-tempo curvo da nova teoria, basta utilizarmos o princípio do acoplamento gravitacional mínimo, pois, assim, na teoria da Relatividade Geral teremos o tensor  $T_{\mu\nu}$  cuja relação de conservação será a generalização dada por  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ .

No entanto, esta última expressão é um pouco enganadora, pois, na verdade, a

energia total na Relatividade Geral não necessariamente se conserva, visto que, se o espaço-tempo se modifica de alguma forma, a energia alterar-se-á de acordo [274]. Correlatamente, Einstein na gênese de sua teoria considerou que  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu})$ , aonde  $t^{\mu\nu}$  representa a energia do espaço-tempo, contudo, este objeto não é um tensor, e, portanto, traz problemas não locais na definição da energia gravitacional. Este problema ficou conhecido como não localizabilidade da energia gravitacional [275], e curiosamente foi a faísca que levou Emmy Noether a criar um dos teoremas mais profundos e belos da Física, isto é, o seu teorema que relaciona simetrias e leis de conservação [186, 276].

De volta a parte geométrica, é interessante perceber que o tensor de Einstein, relação (195), satisfaz todas as propriedades matemáticas impostas a partir do princípio da correspondência e do desvio geodésico e newtoniano. Mas além disso, ele também satisfaz as identidades de Bianchi contraídas, isto é, a equação (196). Porém, o tensor momento-energia também satisfaz esta mesma relação, dessa forma, com base em tudo o que vimos, é de imediato impormos uma relação de equivalência entre estes dois tensores através de uma constante de acoplamento  $\kappa$ . Não somente isto, podemos ir além e generalizá-la, pois a relação (196) continuará sendo válida se adicionarmos um termo  $\Lambda g_{\mu\nu}$  em (195), desta maneira, podemos escrever que  $G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$  [170].

Esta última equação é apenas uma estrutura puramente matemática, é como se fosse um golem inane, que só emergirá do vazio à vida através de um sopro divino, em outras palavras, a nossa equação só terá significado físico quando a atribuirmos constantes físico-experimentais apropriadas. Neste sentido, se aplicarmos o princípio da correspondência com a gravitação newtoniana, em que consideramos partículas com velocidades bem menores do que a da luz e levamos em conta o limite de campo fraco estático por meio de uma métrica de Minkowski levemente perturbada, isto é,  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x^i)$ , obtemos as famosas equações de campo da teoria da Relatividade Geral [170]:

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}}. \quad (206)$$

Naturalmente, considerando campos de matéria  $\Psi^a$ , podemos obter (206) a partir de um princípio variacional cujo funcional da parte gravitacional é dado pela ação de Einstein-Hilbert e a de matéria por uma ação  $S_m$  definida via uma densidade lagrangiana qualquer [236, 239]:

$$S[g_{\mu\nu}, \Psi^a] = \frac{1}{c} \frac{1}{2\kappa} \int_{\Omega \in \mathcal{M}} (R + 2\Lambda) \sqrt{-g} d^4x + S_m[g_{\mu\nu}, \Psi^a]. \quad (207)$$

Considerando variações arbitrárias da métrica que se anulam no bordo  $\partial\Omega \in \mathcal{M}$ , já que mantém a ação estacionária de acordo com o princípio da ação estacionária ( $\delta S = S[g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}] - S[g_{\mu\nu}] = 0$ ), obtém-se então as equações de Einstein notando-se que

$\delta R^\mu_{\nu\alpha\beta} = \nabla_\alpha(\delta\Gamma^\mu_{\nu\beta}) - \nabla_\beta(\delta\Gamma^\mu_{\nu\alpha})$ ,  $\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\delta g^{\alpha\beta}$ ,  $\delta\sqrt{-g} = -\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}/2$ ,  $\delta\Gamma^\gamma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\gamma\alpha}(\nabla_\mu(\delta g_{\nu\alpha}) + \nabla_\nu(\delta g_{\alpha\mu}) - \nabla_\alpha(\delta g_{\mu\nu}))$  e  $T_{\mu\nu} = -2\frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}}/\sqrt{-g}$  [170]. Além disso, por meio do teorema de Stokes, deve-se notar que os termos de superfície são eliminados a partir de contratermos apropriados [236, 277, 187]. Já a conservação do tensor momento-energia e as identidades de Bianchi contraídas podem ser obtidas de (207) via invariância por difeomorfismo [236]. Por outro lado, num caso sem torsão, considerando a conexão como um campo independente da métrica, também é possível encontrar as equações de Einstein ao se variar a ação com respeito a esses dois campos [239].

Em suma, esta teoria da gravitação definida por (207), também chamada de geometrodinâmica [267], é uma **unificação** da inércia com a gravidade. De maneira simples, a Relatividade Geral nos diz que matéria e energia curvam o espaço-tempo e que a gravidade é apenas inércia nesses espaços-tempos não planos, matematicamente, seus efeitos emergem da conexão métrica a partir da descrição relacional do desvio de congruências. As equações de campo desta teoria relacionam a densidade de energia e matéria com a estrutura geométrica do espaço-tempo, desta maneira, basta colocar uma distribuição de matéria qualquer no lado direito de (206), que obtemos uma métrica  $g_{\mu\nu}$  correspondente dado suposições geométricas iniciais deste objeto, que, por conseguinte, nos permite descobrir univocamente os efeitos da gravidade a partir da conexão métrica (192).

No total, levando-se em conta que todos os tensores nas equações de campo são simétricos e que estamos tratando das quatro dimensões perceptíveis, isto é, índices variando de zero a três, temos dez equações não lineares em (206). Além disso, para dar mais significado físico à teoria, podemos definir, a título de exemplo, alguns tipos gerais de campos de matéria-energia:

- Poeira:  $T^{\mu\nu} = \rho_0 \mathcal{U}^\mu \mathcal{U}^\nu$ , matéria incoerente de densidade própria  $\rho_0$  que não interage;
- Fluido Perfeito:  $T^{\mu\nu} = \left(\rho_0 + \frac{p}{c^2}\right) \mathcal{U}^\mu \mathcal{U}^\nu - pg^{\mu\nu}$ , campo de matéria com pressão  $p$  e densidade própria  $\rho_0$ ;
- Fluido Imperfeito:  $T^{\mu\nu} = \left(\rho_0 + \frac{p}{c^2}\right) \mathcal{U}^\mu \mathcal{U}^\nu - pg^{\mu\nu} + 2q^{(\mu} \mathcal{U}^{\nu)} + \Pi^{\mu\nu}$ , campo de matéria com pressão  $p$ , densidade própria  $\rho_0$ , fluxo de calor  $q_\mu$  e  $\Pi_{\mu\nu} = \Pi h_{\mu\nu} + \pi_{\mu\nu}$ , sendo  $\Pi$  a viscosidade,  $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \mathcal{U}_\mu \mathcal{U}_\nu / c^2$  o projetor e  $\pi_{\mu\nu}$  a pressão anisotrópica;<sup>33</sup>
- Campo Eletromagnético:  $T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left[ F^{\mu\sigma} F_\sigma{}^\nu + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right]$ , campo em que  $F_{\mu\nu}$  é o tensor eletromagnético.

O caminho histórico até se chegar nas equações corretas da Relatividade Geral foi sinuoso e durou de 1907 ao final de 1915, quando a relação  $R_{\mu\nu} = -\kappa_0(T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}T/2)$

<sup>33</sup> Qualquer fluido pode ser escrito desta forma via decomposição irredutível, quando projeta-se o tensor momento-energia de acordo com um observador [187].

foi apresentada ao mundo<sup>34</sup>. Cronologicamente, Einstein e seu amigo Marcel Grossmann desenvolveram a chamada teoria *Entwurf* da gravitação entre 1912 e 1914, já em 4 de novembro de 1915 esta teoria foi substituída por uma outra cujas equações  $\partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\beta} \Gamma^\beta_{\nu\alpha} = -\kappa_0 T_{\mu\nu}$  são invariantes sob transformações unimodulares (determinante da métrica é +1 ou -1) [229], em 11 de novembro esta outra teoria foi alterada para equações  $R_{\mu\nu} = -\kappa_0 T_{\mu\nu}$  covariantes gerais [230], e, finalmente, em 25 de novembro de 1915 as equações corretas da Relatividade Geral foram publicadas em [232].

Curiosamente, de acordo com a referência [278], Einstein poderia ter chegado nas equações do artigo de 4 de novembro de 1915 antes mesmo de ter construído a sua teoria *Entwurf*, pois, há uma frase numa das páginas do seu famoso caderno de Zurique, dizendo que metade do tensor de Ricci provavelmente seria o tensor da gravitação. Dessa forma, a teoria da Relatividade Geral talvez poderia ter sido construída logo em 1913 [126].

Além disso, como é geralmente propagado no meio científico, David Hilbert foi o primeiro a submeter um artigo em 20 de novembro de 1915, mas que só foi publicado em 31 de março de 1916, apresentando as equações da Relatividade Geral antes mesmo de Einstein. No entanto, de acordo com a [278], nos anos noventa descobriu-se através de documentos históricos, que o artigo original submetido no dia 20 não possuía as equações corretas da teoria, somente a lagrangiana desta estava certa. Desta maneira, o artigo publicado em março foi modificado depois das descobertas de Einstein, portanto, foi o físico-filósofo a publicar primeiro as equações corretas da nova teoria da gravitação [126].

Com relação ao termo  $\Lambda g_{\mu\nu}$  das equações de campo completas, como já deu para notar, este não se encontra presente no artigo original de 25 de novembro de 1915. Na verdade, este termo só apareceu em 1917 no famoso artigo de Einstein que trata de considerações cosmológicas [279], de tal maneira que o símbolo  $\Lambda$  ficou conhecido posteriormente como constante cosmológica. Einstein adicionou este novo termo numa tentativa de tornar a sua teoria mais machiana, pois as suas equações no vácuo, já que possuem o espaço-tempo de Minkowski como solução, admitem efeitos inerciais mesmo não existindo matéria para produzir inércia<sup>35</sup>.

Podemos perceber isto melhor através de uma frase em seu artigo [279]: "Numa teoria da relatividade consistente não pode haver inércia relativamente ao "espaço", mas somente uma inércia de massas relativamente umas as outras. Se, portanto, eu tenho uma massa numa distância suficiente de todas as outras massas no universo, sua inércia deverá cair a zero.". No fundo, Einstein utilizou a Cosmologia primitiva da época como condição de contorno para provar seu ponto, particularmente, ele usou um modelo cosmológico

<sup>34</sup> Para chegar neste resultado, basta considerar  $\Lambda = 0$  em (206), fazer  $\kappa = -\kappa_0$  e contrair os índices de (206) para obter que  $R = \kappa_0 T$ , assim, basta substituir este resultado em (206) para encontrar o resultado original de Einstein.

<sup>35</sup> O conceito de inércia aqui é aquele proposto pelas ideias de Mach e Einstein, portanto, tome a palavra inércia como "inércia machiana".

estático, finito e homogêneo. Porém, no fim, a solução se mostrou instável, com o universo se tornando dinâmico, e a adição da constante cosmológica só evidenciou o caráter não machiano da teoria, pois, mesmo  $G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 0$  possui solução de vácuo [239].

Atualmente, apesar de Einstein ter dito que a adição de  $\Lambda$  foi o maior erro que já cometeu, a constante cosmológica é uma hipótese *ad hoc* essencial para o modelo cosmológico contemporâneo. Uma vez que, como comentado na Introdução, em escalas de distâncias cosmológicas, a expansão acelerada do nosso Universo é causada por um ente que se manifesta matematicamente de forma similar a da constante cosmológica.

A teoria da Relatividade Geral provavelmente é um dos corpos de conhecimentos científicos mais testados experimentalmente de maneira contínua ao longo da história, tanto que em 2015 fora detectado pela primeira vez ondas gravitacionais [280] e em 2019 foi publicado a primeira foto de um buraco negro [281]. Durante todo o século XX esta teoria foi verificada centenas de vezes, e em especial, descobriu-se que esta funciona extremamente bem na escala de um sistema solar, porém falha em escalas galácticas e cosmológicas. Para a teoria de Einstein descrever corretamente o comportamento de galáxias e do Universo em larga escala são necessárias hipóteses *ad hoc*, isto é, a matéria escura e a energia escura.

Curiosamente, a primeira verificação experimental desta teoria foi feita por Einstein em seu artigo [231] de 18 de novembro de 1915, antes mesmo desta teoria estar totalmente completa. Basicamente, o físico-filósofo encontrou a quantidade exata que faltava para explicar por completo a precessão do periélio de Mercúrio. Além disso, o redshift gravitacional<sup>36</sup> e o atraso no tempo de viagem da luz num campo gravitacional (atraso de Shapiro) foram extensivamente verificados por satélites e sondas espaciais [239]. Mas mais importante ainda, pelo menos no nosso caso, é o fato de que o lenteamento gravitacional é uma das principais consequências observadas da teoria de Einstein e atualmente é um dos observáveis fundamentais da Cosmologia, e cada vez mais tornar-se-á uma sonda fundamental de modificações da Relatividade Geral.

#### A.1.9 Métrica de Schwarzschild e o Limite de Campo Fraco

Pouco depois de Albert Einstein ter publicado suas equações em 1915, o físico Karl Schwarzschild encontrou a primeira solução não trivial exata da Relatividade Geral. Sua solução é a de um espaço-tempo estático em torno de um corpo material de simetria esférica, e a sua métrica é utilizada para modelar estrelas com baixas velocidades de rotação. Esta solução foi encontrada na mesma época de maneira independente por Johannes

---

<sup>36</sup> Na verdade, este fenômeno pode ser encontrado somente considerando-se o princípio da equivalência. Por essa razão, este princípio é o mais fundamental da Gravitação.

Droste e uma de suas consequências mais importantes é a previsão da existência dos exóticos buracos negros. Curiosamente, Schwarzschild morreu logo depois de publicar seu artigo com sua métrica homônima em 1916, após ter desenvolvido uma doença autoimune num fronte de batalha da primeira guerra mundial.

Para construir esta métrica devemos considerar uma estrela, tal que dentro desta temos uma métrica e fora temos uma outra diferente. Como não estamos em escalas cosmológicas, para o espaço-tempo interno da estrela consideramos a relação  $G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}/c^4$  e para a métrica de Schwarzschild externa utilizamos as equações no vácuo  $G_{\mu\nu} = 0$ . O primeiro passo é considerar uma métrica estática, isto é, que não muda com o passar do tempo, e cuja estrutura geométrica é esférica. Matematicamente, uma métrica estática é estacionária, isto é,  $\partial g_{\mu\nu}/\partial t = 0$  num determinado sistema de coordenadas, e não possui termos cruzados como  $dxdt$ . Dessa maneira, levando-se em conta tudo isso, temos que:

$$ds^2 = e^\psi c^2 dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (208)$$

é a métrica estática e com simetria esférica mais geral possível [239, 236].

O segundo passo é o trabalho árduo de calcular todas as componentes da conexão métrica a partir de (208), feito isso, para encontrar quem são as funções  $\psi$  e  $\lambda$ , basta substituir as componentes da conexão em  $G_{\mu\nu} = 0$  para obter as equações diferenciais:

$$\begin{cases} \frac{e^{-\lambda}}{r} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r^2} = 0 \\ \frac{e^{-\lambda}}{r} \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = 0 \\ \frac{\partial \lambda}{\partial t} = 0 \end{cases} \quad (209)$$

Portanto, após certos cálculos como em [239] e considerando  $-2\xi$  como a constante de integração, obtemos que  $e^\lambda = (1 - 2\xi/r)^{-1}$  e  $e^\psi = (1 - 2\xi/r)$ .

No entanto, para dar valor físico a esta nova constante precisamos ver como as equações de Einstein se comportam dentro da nossa estrela hipotética. Para tal, basta considerarmos uma esfera de raio  $R$  e densidade  $\rho(r)$ , cujo tensor momento-energia é dado pela expressão do fluido perfeito da subseção anterior. Assim, se considerarmos o referencial em que  $\mathcal{U}^\mu = (\mathcal{U}^0, \vec{0})$  e levarmos em conta que  $\mathcal{U}^\mu \mathcal{U}_\mu = c^2$ , obtemos que  $T_0^0 = \rho c^2$ . Dessa forma, se fizermos  $G_0^0 = 8\pi GT_0^0/c^4$ , obtemos a equação diferencial:

$$\frac{d}{dr} \left[ r \left( 1 - \frac{1}{e^\lambda} \right) \right] = \frac{8\pi G}{c^2} \rho r^2. \quad (210)$$

Deste modo, se integrarmos os dois lados da equação acima na variável radial de 0 a  $r \leq R$ , obtemos que  $e^\lambda = (1 - 2Gm(r)/c^2 r)^{-1}$  na métrica interna, aonde  $m(r)$  é a

massa na gravitação newtoniana dada por:

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'. \quad (211)$$

Em vista disso, ao considerarmos  $r > R$  é lógico supormos que a massa que vai estar distorcendo o espaço-tempo externo é a massa total da estrela, isto é,  $M = m(R)$ . Portanto, considerando-se isso e a relação (208), a constante  $\xi$  vai ser simplesmente  $GM/c^2$ , e, assim, a métrica de Schwarzschild externa a uma estrela vai ser dada por [236, 170]:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (212)$$

É importante salientar que um referencial e um sistema de coordenadas são conceitos diferentes, o primeiro está atrelado a um observador qualquer numa linha de Universo tipo-tempo que carrega consigo réguas e relógios padrões, enquanto o último é apenas um construto matemático arbitrário utilizado para se posicionar eventos espaço-temporais, e que não necessariamente está adaptado a um observador. É essencial então compreender a relação entre os dois, já que o primeiro contém a Física mas o segundo é a linguagem na qual a métrica está escrita. Em outras palavras, o elemento de linha em si, que é invariante por difeomorfismo, contém a informação física, mas  $dt^2$  ou  $dr^2$  sozinhos a priori não nos dizem nada sobre distâncias espaço-temporais reais medidas por observadores físicos.

No caso da métrica (212), por ser estática, podemos considerar um observador tipo-tempo, isto é,  $\mathcal{U}^\mu \mathcal{U}_\mu = c^2$ , e estático com relação às coordenadas tipo-espaço  $(r, \theta, \phi)$ , ou seja,  $\mathcal{U}^\mu = (\mathcal{U}^0, 0, 0, 0)$  em alguma posição espacial  $r > 2GM/c^2$  [169, 187]. Desta forma, temos que  $g_{00} \mathcal{U}^0 \mathcal{U}^0 = c^2$ , o que leva a  $\mathcal{U}^0 = c/\sqrt{1 - 2GM/c^2 r}$ , que nos diz que o tempo próprio do observador estático está relacionado com o tempo coordenado por meio de  $c d\tau = \sqrt{1 - 2GM/c^2 r} dt$ . Como no limite  $r \rightarrow \infty$  sabemos que (212) se reduz à métrica de Minkowski, podemos então interpretar o tempo coordenado  $t$  como o tempo medido por um observador inercial no infinito [267, 187]. Além disso, como  $c^2 d\tau^2 > 0$  e já que  $c^2 d\tau^2 = ds^2$  pois o elemento de linha é invariante, sabemos então que a coordenada  $t$  é tipo-tempo por meio da relação entre este tempo e  $\tau$ , assim, necessariamente, as coordenadas restantes são tipo-espaço.

Diferentemente de um observador estático num espaço plano com coordenadas de Minkowski, um observador estático em Schwarzschild (212) é acelerado, como esperado pelo princípio da equivalência. Isto é, sua aceleração própria é dada por  $\sqrt{-\mathcal{A}^\mu \mathcal{A}_\mu} = (1 - 2GM/c^2 r)^{-1/2} GM/r^2$ , já que  $\mathcal{A}^\mu = \mathcal{U}^\alpha \nabla_\alpha \mathcal{U}^\mu = (0, GM/r^2, 0, 0)$  [169]. Por outro lado, se considerarmos dois eventos simultâneos de acordo com o tempo coordenado e nas posições coordenadas  $(r, \theta, \phi)$  e  $(r + dr, \theta, \phi)$ , temos que  $dl = \sqrt{-ds^2} = dr/\sqrt{1 - 2GM/c^2 r}$

é a distância própria do intervalo tipo-espaço  $dr$ . Podemos interpretar  $dl$  como a distância "real" medida por réguas padrões entre os dois pontos coordenados no instante  $t$ . Se fixarmos  $dt = dr = 0$  obtemos o elemento de linha de uma superfície esférica em  $r$ , o que nos permite calcular a área própria deste objeto como  $A = 4\pi r^2$  [267], assim, a coordenada  $r$  pode ser entendida como uma espécie de distância de luminosidade.<sup>37</sup> Apesar desses resultados simples, a interpretação de uma métrica e a sua relação com observadores nem sempre é trivial, para mais sobre o assunto veja [187, 267, 169, 282, 283, 284, 285].

É importante notar também que na teoria da Relatividade Geral o acoplamento entre a matéria e o espaço-tempo não é linear, fisicamente isto significa que a matéria curva o espaço-tempo de tal maneira, que a própria curvatura deste ente também gera mais gravidade. Podemos perceber isto parcialmente através da chamada massa própria, pois acontece que a definição de massa na teoria de Einstein é um pouco problemática. O elemento de volume na Relatividade Geral é dado por uma  $n$ -forma diferencial, mais especificamente por  $\sqrt{|g|}d^n x$ , em que  $g$  é o determinante da métrica, dessa forma, como  $|g| \neq 1$  no caso de Schwarzschild, a massa deste objeto na verdade possuirá o termo  $(1 - 2Gm(r)/c^2 r)^{-1/2}$  dentro da integral de (211).

Portanto, dizemos que a massa própria de um corpo neste caso é dada por  $m_p$ , aonde a equação deste ente será dada pela parte do lado direito da expressão (211), em que o termo mencionado acima estará dentro desta integral. Se fizermos a diferença entre a massa newtoniana e a massa própria, podemos interpretar o resultado como uma "energia gravitacional de acoplamento", assim,  $m_p - m(r) = E_{ag}/c^2$  pode ser vista como a energia extra que o acoplamento entre a matéria e o espaço-tempo gera provocando mais gravidade do que Newton previa. Para mais informações, basta ver a referência [236].

Além disso, como temos que  $T_1^1 = -p$ , através das equações de Einstein obtemos parte da famosa equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff do equilíbrio hidrostático da astrofísica estelar. Se considerarmos o caso  $r > R$ ,  $p = 0$  e que a nossa variedade é assintoticamente plana no infinito, obtemos que  $\psi = \ln(1 - 2GM/c^2 r)$ , e se considerarmos o limite newtoniano  $r^3 p \ll m(r)$  (baixas velocidades) e  $2GM(R) \ll rc^2$ , obtemos a equação da gravitação newtoniana no caso esférico. Note então que o potencial de Schwarzschild é dado por  $\Phi = c^2 \ln(1 - 2GM/c^2 r)/2$ .

Se, contudo, expandirmos este potencial em série de Taylor no caso de  $2GM/c^2 r \ll 1$ , descobrimos que  $\Phi = -GM/r + \mathcal{O}[(GM/r)^2]$ , ou seja, em baixas ordens obtemos o potencial clássico newtoniano. Esta aproximação é conhecida como aproximação de campo fraco, e neste caso o acoplamento entre matéria-energia e o espaço-tempo é linear, tal que o potencial deste campo deve satisfazer a relação  $\Phi/c^2 \ll 1$  e obedecer a equação

<sup>37</sup> Um resultado interessante disso é que o diâmetro próprio  $2l = \int_0^r \sqrt{-g_{11}(r')} dr'$  (calculado a partir de outro sistema de coordenadas apropriado) pode ser maior que o comprimento  $2\pi r$  da circunferência correspondente.

(205).

Nós já vimos na subseção anterior o limite de campo fraco no momento de encontrar a constante de acoplamento das equações de Einstein, acontece que neste caso podemos construir uma métrica genérica para um potencial  $\Phi$  arbitrário. Como vimos, podemos fazer que  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ , só que depois de muitos cálculos podemos descobrir que  $h_{00} = 2\Phi/c^2$  e  $h_{11} = h_{22} = h_{33} = -2\Phi/c^2$ . Portanto, temos que a métrica de campo fraco é dada por [286]:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (213)$$

em que se considerarmos  $\Phi = -GM/r$ , obtemos a métrica de Schwarzschild no limite de campo fraco, que pode ser interpretada como o espaço-tempo de uma massa pontual  $M$ .

## APÊNDICE B – Cosmologia

*"Quando no alto, os céus não eram nomeados, que em baixo a terra não portava nome, é Apsu que era o primeiro, seu ancestral, a criadora era Tiamat, sua mãe de todos. Eles tinham misturado suas águas, [...]"*

*Enuma Elish, mito de criação babilônico*

Uns podem afirmar que a Astronomia é a mais antiga das ciências, pois vou além e afirmo que esse papel cabe à Cosmologia. Pois antes mesmo dos *Homo sapiens* se tornarem a espécie humana predominante na Terra e inventarem a escrita, os povos de nosso planeta projetavam seus medos, angústias e esperanças em mitos de criação e destruição de seus *cosmos*. Com o passar dos milênios e das diversas migrações humanas, as chamadas cosmogonias foram se tornando cada vez mais complexas, refletindo a necessidade inerente ao ser humano de descobrir sua origem, seu destino e seu lugar na natureza.

Antes mesmo da ciência atual se estabelecer, o ser humano sempre procurou explicações a respeito da criação, estrutura e possível destruição de seu universo conhecido. No entanto, nas últimas centenas de anos aconteceu uma quebra de paradigma por meio da instauração da física. A passagem das cosmogonias para a Cosmologia atual, baseada em modelos físico-matemáticos e em evidências observacionais, se deu em 4 etapas. Nos séculos XVI ao XVIII, houve um grande desenvolvimento teórico a partir de Copérnico, Kepler e Newton por meio da descrição de órbitas elípticas feitas pelos planetas em torno do Sol. Associado a isto, Galileu aperfeiçoando o telescópio, olhou para o céu noturno e aumentou o tamanho de nosso *cosmos* ao descobrir as luas de Júpiter, além de permitir que outros como Cassini, Huygens e os Herschel fizessem muitas descobertas. Pode-se mencionar também, eventos importantes como a disputa ocidental entre a visão geocêntrica e heliocêntrica, que começou com Aristarco de Samos e culminou em Copérnico, ou até mesmo a epifania presciente de Giordano Bruno em relação aos exoplanetas e a não existência de um centro no *cosmos* [287].

Centenas de anos depois, no começo do século XX, aconteceu algo parecido, de um lado houve o desenvolvimento teórico da Relatividade Geral que possibilitou uma melhor descrição da mecânica celeste, e observacionalmente, graças a Hubble e ao método de medição de distâncias das variáveis Cefeidas de Henrietta Leavitt, descobriu-se que as "nebulosas espirais" não estavam contidas na nossa Via Láctea, e que portanto seriam outras galáxias similares a nossa, isto é, os "Universos Ilha" pontuados por Kant [288]. Dessa forma, nasceu a Cosmologia científica, marcada principalmente pelo artigo [279] de 1917 do Einstein, pelos trabalhos de Friedmann, Lemaître e Gamow e pela descoberta de Hubble, Slipher, Wirtz, Humason e de Sitter de que nosso Universo está em expansão. Um

marco dessa origem, no caso da interpretação física e na ideia de um Universo primordial, se deve principalmente a Lemaître, já que este de certa forma "previu" tanto a CMBR (*rayons du feu d'artifice primitif*) e a formação de estruturas a partir do seu protótipo de *big bang*, isto é, *l'hypothèse de l'atome primitif*, que seria então a origem de toda a multiplicidade do *cosmos* [289]. Por outro lado, foi também Lemaître que interpretou os resultados de Hubble como consequência da expansão do Universo [289].

Apesar do distanciamento da Cosmologia contemporânea com as cosmogonias antigas, ainda existem semelhanças, conceitos como a estaticidade, ciclicidade, infinitude ou finitude espacial e temporal do Universo são muito presentes tanto nos mitos antigos de criação como nas teorias modernas cosmológicas. Não só isso, mas a hipótese do *Big Bang* e até mesmo a do plasma primordial de partículas que gerou toda a estrutura atual do Universo, guarda similaridades com os conceitos de vazio ou mar primordial das culturas arcaicas, como o Apsu e Tiamat, Nun, Hundun, Ginnungagap e o *kaos*.

Assim, ao longo das eras, graças aos telescópios e à criatividade da mente humana, o nosso *cosmos* foi crescendo de tamanho e o nosso *kósmos* se tornando mais complexo, e o que antes era apenas uma porção de terra com mar ou rios, se tornou um planeta, um sistema solar, uma galáxia, um aglomerado de galáxias, um filamento de galáxias e por fim o também sempre crescente universo observável atual [290]. Posto isto, a Cosmologia busca então estudar a estrutura de nosso Universo e sua possível origem e fim.

Por permear este trabalho, já que o lenteamento gravitacional forte envolve distâncias cosmológicas e o formalismo efetivo de energia escura envolve um background FLRW, é fundamental compreender o Modelo Padrão da Cosmologia atual, o  $\Lambda$ CDM, por isso, nesta seção, proponho elucidar o básico deste modelo simples que descreve muito bem o Universo. Note que este apêndice é uma adaptação de um trabalho autoral anterior [176].

## B.1 O Universo Observável e a Métrica de FLRW

O modelo cosmológico padrão  $\Lambda$ CDM tem sua base teórica na Relatividade Geral e no modelo padrão da Física de Partículas. Em essência, seu sucesso se deve a uma descrição simples da evolução do Universo e de sua geometria em grandes escalas, de sua história térmica e da formação de estruturas que é compatível com os dados observacionais de diversas fontes [171, 291, 173]. Contudo, o seu próprio nome evidencia alguns de seus problemas, já que para uma descrição adequada é necessário considerar matéria escura fria (CDM) e energia escura ( $\Lambda$ ), assim como a inflação cósmica em tempos iniciais. Um de seus conceitos fundamentais é a ideia de um *Big Bang*, uma origem super densa e quente

de nosso Universo<sup>38</sup>. Atualmente, sabemos que houve de fato esse começo denso por meio de observações da Radiação Cósmica de Fundo de Microondas (CMBR), da expansão de nosso *cosmos* e seu efeito nas estruturas, da quantidade de Hélio e Hidrogênio presentes no Universo, da idade das estrelas mais velhas e de outros observáveis [171, 291, 173].

É importante saber diferenciar a hipótese de que o nosso Universo começou como uma singularidade cósmica da noção de *Big Bang*, a primeira não pode ser verificada atualmente por experimentação direta e a segunda fora verificada observacionalmente uma miríade de vezes. Dessa forma, podemos dizer com muita precisão que o nosso Universo teve um começo quente e denso, mas não podemos afirmar com muita certeza que o nosso *cosmos* começou em um tempo  $t = 0$  como uma singularidade cósmica inicial, apesar de ser exatamente o previsto pela Relatividade Geral por meio de uma análise de incompletude geodésica via equação de Raychaudhuri.

Com relação aos outros conceitos mencionados, temos que a CDM,  $\Lambda$  e a inflação são hipóteses *ad hoc* na parte de matéria-energia da teoria da Relatividade Geral, ou seja, não podemos por ora afirmar nada sobre o realismo material destes entes [292], já que até então não existem observações diretas destes. Estes conceitos são construtos matemáticos que satisfazem os dados, a significação e origem física verdadeira ainda são desconhecidas. Por outro lado, pode-se tomar um passo mais complexo e atribuir tais fenômenos à modificações da gravitação, cuja abstração possui significado físico um pouco mais concreto, pois não há a necessidade de postular a existência de um ente material não observado. Por exemplo, a inflação pode ser descrita por uma teoria  $f(R)$ . Assim, como mencionado em 1, são por essas razões, além dos problemas de  $H_0$  e  $\sigma_8$  [171, 173], que teorias alternativas são consideradas em escalas cosmológicas. De modo resumido, no  $\Lambda$ CDM, a inflação corrige os famosos problemas do horizonte, da planicidade e dos monopolos magnéticos, a matéria escura garante a formação de estruturas, já que pela teoria de Einstein a matéria luminosa existente não é suficiente para formar aglomerados, galáxias, estrelas etc, e a constante cosmológica  $\Lambda$  descreve o fato de que o nosso Universo atual está em expansão acelerada e é praticamente plano [171, 173, 291].

Naturalmente, a Cosmologia trata também do conteúdo mais tangível do Universo, isto é, a matéria luminosa (que interage com a luz) formada por hádrons (bárions e mésons) e léptons, os neutrinos e a radiação eletromagnética (fótons) [173]. Com base nos dados mais recentes do satélite *Planck* [293], sabemos que esta matéria e radiação visíveis são só 5%<sup>39</sup> do conteúdo de energia total do nosso Universo atual. Por outro lado, o conteúdo que não conhecemos verdadeiramente, isto é, a matéria e energia escuras, são 95% de nosso *cosmos*.

A maior parte da descrição físico-matemática sobre o nosso *cosmos* vem das equa-

<sup>38</sup> O termo "Universo" designa o nosso *cosmos* atual, isto é, tudo o que observamos com nossos telescópios.

<sup>39</sup> Considero que  $\Omega_b + \Omega_\gamma + \Omega_\nu = 0,0493 + 0,0000538 + 0,0012 = 0,0505538$  [294]

ções de campo da Relatividade Geral associadas a uma consideração fundamental, isto é, o Princípio Cosmológico. Esta hipótese supõe que o universo observável em larga escala ( $\gtrsim 370$  Mpc) é homogêneo (invariante por translações espaciais) e isotrópico (invariante por rotações espaciais), ou seja, suas propriedades físicas são, respectivamente, iguais em todos os lugares e em todas as direções [171]. Esta consideração é uma forma de facilitar os cálculos de maneira expressiva, porém, com o aumento dos dados observacionais, muitos autores afirmam que a expansão de nosso Universo pode ter um grau de anisotropia [295, 296].

Matematicamente, o Princípio Cosmológico implica numa decomposição da métrica em uma parte temporal e noutra puramente espacial cujas hipersuperfícies a cada tempo  $t$  são maximalmente simétricas, o que resulta numa curvatura espacial constante, parametrizada por  $k$ , em cada subespaço espacial [145, 171]. Para descrever então a expansão do Universo, de acordo com o Princípio Cosmológico, as componentes métricas tipo-espaço são funções de uma única função temporal, i.e. o fator de escala  $a(t)$ . Levando em consideração todos estes fatores podemos escrever que:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[ d\chi^2 + S_k^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (214)$$

é a métrica geral, conhecida como métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), do nosso *kósmos* em larga escala. Note que a coordenada comóvel  $\chi$  se relaciona com a esférica  $r$  via  $d\chi^2 = dr^2/(1 - Kr^2)$  com  $K = k/R_0^2$ , aonde  $R_0$  é uma escala de curvatura que pode ser absorvida pelas coordenadas. Se  $k = 0$  temos uma geometria plana e  $S_0 = \chi$ , se  $k = +1$  temos uma geometria esférica tal que  $S_{+1} = R_0 \sin(\chi/R_0)$  e se  $k = -1$  temos uma geometria hiperbólica, com  $S_{-1} = R_0 \sinh(\chi/R_0)$  [291].

Se considerarmos esta métrica e utilizarmos o exato procedimento que fizemos para encontrar a métrica de Schwarzschild em A.1.9, isto é, considerar o tensor momento-energia de um fluido perfeito em um referencial comóvel com este fluido, componentes  $T_0^0 = \rho c^2$  e  $T_i^j = -p\delta_i^j$ , ao aplicarmos estas considerações em (206) obtemos as famosas equações de Friedmann. No caso dos índices 00, obtemos que:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{Kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}, \quad (215)$$

que nos diz como o conteúdo material afeta a expansão do Universo. Já no caso dos índices espaciais, descobrimos que:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3}, \quad (216)$$

que nos informa como a matéria ordinária ( $\rho > 0$  e  $p > 0$ ) de um lado tenta desacelerar a expansão do universo observável e do outro a constante cosmológica tenta acelerar esta

expansão [291, 171]. Se ainda derivarmos a equação (215) e utilizarmos nela a equação (216), obtemos a equação de conservação de energia do sistema:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0. \quad (217)$$

Estas equações e a métrica de FLRW são a base do nosso entendimento do universo observável<sup>40</sup> em larga escala e formam a estrutura conceitual físico-matemática de nosso *kósmos*. No entanto, como mencionado anteriormente, o importante é como isso afeta a estrutura do Universo em menores escalas, já que é o que de fato observamos. Neste caso, o Princípio Cosmológico necessariamente tem que ser quebrado para que haja a formação de estruturas. Isto é feito por meio de perturbações na métrica de FLRW, tal que as equações perturbadas de Einstein-Boltzmann descrevem como essas perturbações na métrica se relacionam com as flutuações de densidade e temperatura da matéria e radiação ao longo do tempo cósmico, descrevendo, portanto, como pequenas flutuações iniciais cresceram em galáxias e aglomerados devido ao colapso gravitacional e a expansão do Universo. Para uma revisão completa sobre o assunto veja [171, 173, 297].

---

<sup>40</sup> O termo "universo observável" se refere a região do espaço em que a luz de objetos distantes conseguiu chegar até nós, esta região, devido a expansão do Universo, é uma esfera de raio próprio de aproximadamente 46,3 bilhões de anos-luz.

## APÊNDICE C – Distância de Diâmetro Angular

Assim como fizemos em A.1.9, a distância própria, no caso de (214), entre dois eventos tipo espaço  $(t, \chi, \theta, \phi)$  e  $(t, \chi + d\chi, \theta, \phi)$  é dada por  $dl = a(t)d\chi$ . Assim, a expansão do Universo implica no aumento da distância própria de objetos ao longo do tempo, já que  $D_p = a(t)\chi$ . Se derivarmos essa relação obtemos a taxa de variação de  $D_p$  entre hipersuperfícies, isto é,  $v = H(t)D_p$  para objetos que se movem somente pelo *Hubble flow* (sem velocidade peculiar), tal que  $H(t) = \dot{a}/a$  é o famoso parâmetro de Hubble e  $\dot{a}$  representa a derivada de  $a(t)$  com relação ao tempo [145, 171, 291]. É importante notar que  $v$  é uma variável não local e por isso pode ultrapassar em muitas vezes a velocidade da luz no vácuo se as distâncias envolvidas forem muito grandes. Já que se baseia na distância própria, não se trata de uma velocidade física, pois nada pode ser medido de forma simultânea. Para objetos próximos, em primeira ordem, temos a lei de Hubble-Lemaître dada por  $v \approx H_0 D_{p,0}$ , aonde  $H_0 = H(t_0)$  é o parâmetro de Hubble no tempo presente  $t_0$ . Neste caso, se fixarmos  $a(t_0) = 1$  (válido para  $k = 0$ ),  $D_{p,0} = \chi$ .

Como o nosso Universo está em expansão, as galáxias distantes possuem um desvio no espectro em direção ao vermelho. Este fenômeno é similar ao efeito Doppler usual de dois objetos trocando informação em forma de ondas sonoras ou eletromagnéticas com velocidade relativa  $v$ , mas neste caso é o espaço entre nós e as galáxias que se expande. Para caracterizar este fato, utiliza-se o chamado redshift cosmológico  $z$ , definido como:

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_e} = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} - 1, \quad (218)$$

em que  $\Delta\lambda = \lambda_o - \lambda_e$ , tal que  $\lambda_e$  é o comprimento de onda da luz emitida pela galáxia,  $\lambda_o$  é o comprimento de onda observado e  $v$  é a velocidade de recessão da galáxia. Para velocidades baixas, isto é, distâncias próximas e portanto  $t \approx t_0$ , temos então que  $z \approx H_0 D_{p,0}/c$ , que torna possível estimativas de  $H_0$  como fora feito por Hubble [291, 173].

O resultado acima é uma consequência direta da energia de um fóton decair proporcionalmente ao fator de escala, facilmente visto via geodésicas nulas [145, 291]. Desta forma, o comprimento de onda de um fóton deve aumentar  $\propto a(t)$ , assim, como  $1 + z = \lambda_o/\lambda_e$ , podemos escrever que  $1 + z = a(t_o)/a(t_e)$ , em que  $a(t_o)$  é o fator de escala no momento que observamos esta luz e  $a(t_e)$  é o fator de escala no momento de emissão. Considerando o momento de observação como o presente  $t_o = t_0$ , e fazendo  $t_e = t$ , obtemos então que [171, 291, 173]:

$$a(t) = (1 + z)^{-1}. \quad (219)$$

A partir de (217) é possível descobrir que para um universo só de matéria não relativística (poeira)  $\rho = \rho_0/a^3(t)$ . Para um *kósmos* só de radiação  $\rho = \rho_0/a^4(t)$  e para um universo só de energia escura  $\rho = \rho_0/a^{3(1+w)}(t) = \rho_0$ , tal que  $w \approx -1$  atualmente (constante cosmológica). Utilizando-se (219), podemos então reescrever a equação (215) como  $H^2 = 8\pi G\rho/3$ , tal que  $\rho = \rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda + \rho_k = \rho_c(t_0)(\rho_m/\rho_c(t_0) + \rho_r/\rho_c(t_0) + \rho_\Lambda/\rho_c(t_0) + \rho_k/\rho_c(t_0)) = \rho_c(t_0)[\Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_\Lambda + \Omega_{k,0}(1+z)^2]$  e finalmente escrever [171, 291, 173]:

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{k,0}(1+z)^2 + \Omega_\Lambda}, \quad (220)$$

em que  $\rho_c(t_0) = 3H_0^2/8\pi G$ ,  $\rho_{k,0} = -3Kc^2/8\pi Ga^2$  e  $\rho_\Lambda = \Lambda c^2/8\pi G$ . Atualmente, de acordo com os dados de 2018 do satélite *Planck* e desconsiderando-se os neutrinos, temos como valores médios que  $\Omega_{m,0} = 0,315$ ,  $\Omega_r = 0,0000538$ ,  $\Omega_{K,0} = 0,0007$  e  $\Omega_\Lambda = 0,685$  [20]. Note que  $\Omega_{r,0} + \Omega_{m,0} + \Omega_{k,0} + \Omega_\Lambda = 1$  [291, 173, 171].

A medida de distâncias em Cosmologia não é algo trivial, o fato da velocidade de propagação da luz (ou ondas gravitacionais) ser finita num Universo em contínua expansão é a causa disso, já que qualquer distância de fato medida se referirá a objetos em um tempo  $t$  anterior a  $t_0$ . A distância própria como mencionamos não pode ser de fato medida, então há a necessidade de definições que sejam observáveis e que se relacionem com esta distância "real", mas que além disso nos permitam testar a própria expansão do Universo. As principais definições que permitem isso são a distância de luminosidade e a distância de diâmetro angular, a primeira tem como base a medida de luminosidade e fluxo de objetos e a segunda no tamanho angular de objetos na esfera celeste.

Todas as definições de distância naturalmente devem se referir ao redshift cosmológico  $z$ , já que é de fato o que é medido, e que por si só já nos fornece uma noção de distância e tempo cósmico. Todas essas definições de distância, assim como no caso da distância própria, no limite de pequenos redshifts se igualam à distância comóvel  $\chi$ . A partir de geodésicas nulas  $ds^2 = 0$  na métrica de FLRW (214) e fazendo  $d\theta = d\phi = 0$ , podemos obter que:

$$D_c = \chi = \int_{r_e}^{r_r} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} = c \int_{t_e}^{t_r} \frac{dt}{a(t)}, \quad (221)$$

em que  $t_e$  e  $r_e$  correspondem ao momento e distância em que a luz é emitida pelo objeto, e  $t_r = t_0$  e  $r_r = 0$  ao tempo e local em que a onda eletromagnética é recebida. Levando em consideração que  $dt = da/Ha$  e  $da = -dz/(1+z)^2$  (a partir de (219)) podemos escrever então de forma mais apropriada que:

$$D_c = c \int_{z_r}^{z_e} \frac{dz}{H(z)}, \quad (222)$$

aonde  $z_r = 0$  e tal que a distância própria hoje é dada por  $D_p = a(t_r)D_c = D_c/(1 + z_r)$ .

Já com relação à distância de diâmetro angular  $D_A$ , se, por exemplo, uma galáxia possui um tamanho angular  $\delta$  quando observada por um telescópio e um tamanho físico  $d$ , por geometria básica, a distância entre o telescópio e esta galáxia é  $d/\sin \delta$ , porém, como os objetos astronômicos distantes possuem pequenos tamanhos angulares, da ordem de um segundo de arco, podemos fazer  $\sin \delta \simeq \delta$  e definir  $D_A = d/\delta$  [291]. Assim, a distância de diâmetro angular é uma espécie de medida do tamanho aparente de um objeto cósmico. O mais importante de tudo, é o fato de que esta definição é a distância padrão utilizada nos cálculos de lenteamento gravitacional [183].

A partir da métrica de FLRW (214), podemos ver que um objeto de tamanho próprio transversal  $dl$  a uma distância comóvel  $\chi$  da origem (de nós) e num tempo  $t_e$  com  $\phi$  fixo resulta em  $dl = a(t_e)S_k(\chi)d\theta$ . Sendo  $d\theta$  seu tamanho angular no céu, temos então que a distância de diâmetro angular a este objeto é de  $dl/d\theta = a(t_e)S_k(\chi)$  [291, 171]. No caso de um Universo espacialmente plano, como vimos,  $S_0 = \chi$ , desta forma, de (222) temos:

$$D_A = \frac{c}{H_0(1 + z_e)} \int_{z_r}^{z_e} \frac{dz}{\sqrt{\Omega_{r,o}(1 + z)^4 + \Omega_{m,o}(1 + z)^3 + \Omega_\Lambda}}. \quad (223)$$

Já a distância de luminosidade se relaciona com (223) por meio de  $D_L = (1 + z_e)^2 D_A$  [291, 171]. É fácil ver então que para objetos próximos  $z_e \approx 0$  que  $D_L \approx D_A \approx D_p \approx \chi$ . É também importante notar que no caso plano  $\chi = r$ . Há também o chamado *look-back time distance* que conta de forma cumulativa a expansão do Universo com base em geodésicas nulas, nesse caso  $cdt = -dz/H(z)(1 + z) = a(t)d\chi$  [171].

## APÊNDICE D – História do Lenteamento Gravitacional

Não existe um único método científico. Há, porém, inúmeras formas de se fazer ciência, e através da História podemos compreender melhor todas essas maneiras de se trabalhar, e, com isso, podemos ir além e aprender a sempre melhorar e aperfeiçoar a forma como fazemos ciência. Isto também se aplica à Física, pois este corpo de saberes necessita da criatividade humana tanto do ponto de vista experimental como do teórico.

Neste sentido, é essencial aprendermos a história do lenteamento gravitacional, pois esta nos conta sobre a evolução de um dos pilares observacionais centrais da Relatividade Geral e da Cosmologia. Como veremos, a história do lenteamento é fantástica, entre revoluções e guerras o ser humano conseguiu olhar para o céu e descobrir uma conexão quase mágica entre gravidade, inércia e luz. Todas as informações presentes nesta seção foram retiradas diretamente das referências [181, 182, 298, 299, 178, 300]. Note que esta seção está baseada num mesmo texto de [176].

### D.1 Época da Gravitação Newtoniana

Naturalmente, até onde se sabe, a primeira pessoa a questionar se as trajetórias de raios de luz podem ser curvadas pela ação de um campo gravitacional gerado por um conjunto de corpos foi Isaac Newton (1643-1727). Em sua famosa obra *Opticks* de 1704, particularmente, ele indaga na questão 1 do livro III se "Os corpos não agem sobre a luz a uma distância, e pela ação destes curvam seus raios, e não é esta ação (*coeteris paribus*) mais forte na menor distância?"<sup>41</sup>. É incrível perceber como um simples questionamento tem implicações profundas no meio científico.

Já em 1772, o polímata e clérigo John Michell<sup>42</sup> (1724-1793), adotando o modelo corpuscular da luz, supôs que as partículas de luz eram afetadas pela gravidade e começou a trabalhar no cálculo da mudança da velocidade de raios de luz ao passarem perto de corpos massivos. No ano de 1784 é publicado uma carta de Michell ao famoso físico e químico Henry Cavendish (1731-1810), aonde o clérigo deduz o retardamento da velocidade da luz por meio de um sistema binário de estrelas.

Curiosamente, Jean-Paul Marat (1743-1793), sim, aquele jacobino da Revolução Francesa que teve um grande papel no expurgo dos girondinos e foi assassinado numa

---

<sup>41</sup> O termo em latim *coeteris paribus* é equivalente a "mantidas inalteradas todas as outras coisas".

<sup>42</sup> O filósofo John Michell foi um dos primeiros a supor a existência dos buracos negros, na época chamados de "estrelas escuras", pois toda luz emitida por estes objetos era forçada a retornar pela gravidade, já que a velocidade de escape destes corpos seria maior do que a velocidade da luz.

banheira em 13 de julho de 1793, também conjecturava que a luz era atraída por corpos. No seu livro *Découvertes de M. Marat sur la lumière* de 1780, podemos encontrar "Como todos os corpos atraem a luz..." e também que "Ela [a força atrativa] varia com a densidade dos corpos, elas variam também com sua natureza; porque se isto é uma lei constante que a força atrativa se dá proporcionalmente a massa..." e ainda que "Como a energia da força atrativa se dá sempre na razão inversa do quadrado da distância..."<sup>43</sup>.

No seu livro *Notions élémentaires d'optique* de 1784, ele também diz que "Não há dúvida, que os raios de luz sempre mudam de direção em um mesmo meio, quando eles passam a uma certa distância de um corpo. Se encontram eles nesta esfera de atração? eles se curvam até certo ponto nesta circunferência, e se prolongam em seguida em linha reta.", página 16 de [302]. No entanto, é provável que essas frases possam ser apenas uma escolha de palavras curiosas, já que em nenhum momento há menção à gravidade.

Apesar de todo este desenvolvimento conceitual, o primeiro cálculo do ângulo de desvio que um raio de luz sofre ao passar perto de um corpo massivo de acordo com a mecânica newtoniana só foi encontrado em 1801 pelo autodidata Johann Georg von Soldner (1776-1833). Em seu artigo "Sobre o desvio de um raio luminoso de seu movimento retilíneo, devido à atração de um corpo celestial que passa próximo"[303], o autor chega a um resultado muito interessante e já esperado pela mecânica celeste: "Se assim um raio de luz passa por um corpo celestial, então será forçado pela atração do corpo a descrever uma hipérbole cujo lado côncavo é direcionado diretamente ao corpo atraente...".

Mas além disso, ele obteve o importante resultado de desvio angular de  $0,84''$  para a diferença entre a posição aparente de uma estrela cujo raio de luz passa próximo da superfície do Sol e o caso em que a luz desta estrela passa sem ser atraída pela gravidade do Sol. No entanto, Soldner também apontara o fato de que este ângulo era ínfimo e imperceptível para a instrumentação da época. Este seu artigo, apesar de possuir implicações profundas, ficou esquecido até o começo do século XX, e até chegou a ser reimpresso e usado por Lenard como propaganda antisemita contra Einstein (1879-1955).

Porém, o resultado de Soldner possuía considerações erradas da teoria newtoniana, este considerava a velocidade da luz como  $c$  num ponto próximo da superfície da estrela, enquanto a consideração correta é considerar  $c$  como a velocidade da luz que está vindo do infinito. Assim, por volta de 1802, provavelmente inspirado pela carta de Michell de 1784 e talvez até por Soldner, Henry Cavendish calculou o desvio angular correto para um raio de luz passando perto de um corpo massivo. Apesar de considerações diferentes, até primeira ordem os resultados eram os mesmos, então a originalidade de ter calculado primeiro este desvio é de Soldner. Curiosamente, o resultado de Cavendish não fora publicado e só foi encontrado através da compilação de seus papéis por Frank Dyson (1868-1939) [298].

---

<sup>43</sup> Tradução livre do autor, a partir da referência [301]. A primeira frase se encontra na página 13, a segunda na 22 e a terceira na 24. Veja mais em [300]

O chamado resultado newtoniano pode ser obtido de uma maneira simplificada, primeiro devemos considerar a luz como um conjunto de corpúsculos e considera-las vindo do infinito a uma velocidade  $c$ . Estes raios de luz, ao passarem por um corpo massivo  $M$  sofrem um desvio angular  $\hat{\alpha}_N$  em relação a trajetória que percorreriam caso não houvesse esta massa. De acordo com a gravitação de Newton, a luz é acelerada por uma quantidade  $g = GM/r^2$ , em que  $r$  é aproximadamente a distância da superfície de  $M$  ao seu centro.

Desta maneira, podemos separar a velocidade da luz em duas componentes no momento em que esta é desviada, na direção em que a luz continuaria em movimento retilíneo caso não existisse  $M$  a velocidade é  $v_t = c$  e na direção de  $r$  a velocidade é  $v_r = gt = gd/c$ , em que  $d = 2r$  é o diâmetro do corpo massivo. Podemos fazer um triângulo retângulo cujos catetos são  $v_t$  e  $v_r$ , e o ângulo entre a hipotenusa, pelo teorema de Pitágoras  $v = \sqrt{v_t^2 + v_r^2}$ , e  $c$  é  $\hat{\alpha}_N$ . Assim, para ângulos pequenos, temos que  $\text{tg } \hat{\alpha}_N = v_r/c \simeq \hat{\alpha}_N$  e portanto:

$$\hat{\alpha}_N = \frac{2GM}{rc^2}, \quad (224)$$

tal que na superfície do Sol, pelos valores atuais, temos que  $\hat{\alpha}_N = 0,875''$ , bem próximo ao valor obtido por Soldner em 1801.

## D.2 Época pós-Relatividade Especial e pré-Relatividade Geral

Albert Einstein publicou sua teoria da Relatividade Especial no ano de 1905 [252], e logo em 1907 começou a questionar se era possível descrever a gravidade através da sua teoria focada em referenciais inerciais. Neste mesmo ano, o físico-filósofo concebeu o seu simples e genial princípio da equivalência entre referenciais acelerados e campos gravitacionais através de um simples *gedankenexperiment* e deduziu o efeito Doppler gravitacional a partir desta ideia em seu artigo *Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen* [304]. Neste artigo, encontramos a relação  $t_2 = t_1(1 + \Phi_2/c^2)$  entre o tempo medido  $t_1$  em um referencial com potencial gravitacional  $\Phi_1 = 0$  e o tempo  $t_2$  medido em um referencial de potencial  $\Phi_2$  no caso de campo fraco.

Neste mesmo artigo, ele assume que a velocidade da luz pode mudar ao passar por um campo gravitacional e chega ao resultado  $v = c(1 + \Phi/c^2)$  para esta variação. Portanto, de maneira similar às deduções newtonianas, ele diz que "A partir disto segue que aqueles raios de luz que não se propagam ao longo do eixo  $\xi$  são curvados pelo campo gravitacional; pode ser facilmente visto que a mudança de direção é proporcional a  $(\Phi/\xi c^2) \sin \varphi$  por cm de trajetória da luz, aonde  $\varphi$  denota o ângulo entre a direção da gravidade e àquela do raio de luz." [304]. Assim, o ano de 1907 marca a data em que Einstein começou a teorizar sobre o fenômeno de lenteamento gravitacional.

Já no ano de 1911, Albert Einstein publica um artigo intitulado *Über den Einfluß der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes* [305] numa tentativa de obter o ângulo de desvio que um raio de luz sofre ao passar próximo de um corpo massivo e motivado pela descoberta de que é possível inferir este desvio experimentalmente, já que em 1907, assim como Soldner, ele não tinha esperanças para tal acontecimento. Assim, utilizando-se a expressão para o retardamento da velocidade da luz num potencial  $\Phi$  obtida pelo princípio da equivalência e considerando-se frentes de ondas e o Princípio de Huygens, Einstein encontrou como ângulo de desvio da luz o valor newtoniano dado por (224).

A partir daí, o físico-filósofo pediu o apoio da comunidade astronômica a fim de observar este efeito. Para tal, era necessário esperar um eclipse para que fosse possível enxergar as estrelas no limbo do Sol e comparar as imagens obtidas com as imagens feitas das mesmas estrelas sem a presença do Sol, se houvesse uma distância entre as mesmas estrelas nas duas imagens, então a gravidade de fato afetava a trajetória da luz. Em hipótese isto é algo simples, mas devido ao equipamento da época, aos locais de difícil acesso e a presença de nuvens, o maior inimigo dos astrônomos, estes tipos de observações eram extremamente complicadas e, assim, aconteceram diversas expedições a fim de observar a luz de estrelas distantes na borda de um eclipse.

Logo em 1912 aconteceu a primeira tentativa de observar um eclipse para inferir o desvio da trajetória de luz causado pelo Sol, após ser contactado pelo astrônomo Erwin Finlay-Freundlich (1885-1964) do Observatório de Berlim, o diretor do Observatório de Córdoba na Argentina, Charles Dillon Perrine (1867-1951), comandou a expedição para observar o eclipse na cidade de Cristina em Minas Gerais. Paralelamente, o astrônomo Arthur Stanley Eddington (1882-1944) participou de uma expedição inglesa a este mesmo eclipse. Infelizmente, chuva e nuvens impediram que as observações fossem efetuadas.

No dia 21 de agosto de 1914, uma expedição alemã comandada por Freundlich, uma norte americana supervisionada por William Wallace Campbell (1862-1938) e uma argentina por Perrine rumaram a região da Crimeia para observar um outro eclipse. No entanto, com o surgimento da Primeira Guerra Mundial, Erwin Freundlich e os astrônomos alemães foram presos pelo império russo e tiveram seus equipamentos apreendidos. Apesar deste contratempo, as expedições norte americana e argentina conseguiram efetuar observações, mas, infelizmente, o céu nublado não permitiu bons resultados.

Pode parecer que estas duas expedições foram um completo fracasso, porém, o resultado de Einstein para o desvio angular da trajetória de um raio de luz sob efeito da gravidade do ano de 1911 estava errado. A consideração que a velocidade da luz sofre retardamento ao passar por um campo gravitacional é correta como artifício matemático, no entanto, estava errado do ponto de vista físico e da forma como fora usado por ele. A expressão correta para este ângulo só surgiu com a construção completa da teoria da Relatividade Geral, dessa forma, para a sorte da imagem pública de Albert Einstein, o céu nas expedições mencionadas ficara coberto de nuvens.

### D.3 Época da Relatividade Geral e as Observações de Sobral e Príncipe

Como mencionado, o resultado correto para o desvio angular da luz ao passar perto de um corpo massivo só ocorreu com a criação da Relatividade Geral por Albert Einstein no final de 1915. Mais especificamente, este resultado foi publicado primeiramente no final de seu artigo *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie* [233] de 1916, no caso, esta relação é a equação de número 74 deste trabalho. Utilizando o aparato matemático de 1911, isto é, o Princípio de Huygens, mas considerando o limite newtoniano de sua nova teoria e aplicando aproximações de primeira ordem, o físico-filósofo conseguiu descobrir o ângulo de desvio correto em seu artigo.

No entanto, para descobrirmos este resultado nesta monografia, irei utilizar a métrica de Schwarzschild, pois este espaço-tempo parece ser o mais fisicamente apropriado, já que queremos calcular o desvio do caminho da luz por uma estrela. Consideremos então as equações presentes em A.1, a partir da métrica de Schwarzschild (212) podemos descobrir as componentes da conexão métrica (192) e, assim, encontrar as componentes da equação geodésica dessa métrica, dada por (141). Seja  $\lambda$  um parâmetro afim qualquer, se tomarmos  $\mu = 2$  (corresponde à variável  $\theta$ ) em (141), obtemos uma equação que nos diz que um movimento plano é possível nesta métrica, assim, podemos escolher que  $\theta = \pi/2$ .

Se, além disso, fizermos  $\mu = 0$  (corresponde à variável  $ct$ ) na equação geodésica e, depois, fizermos  $\mu = 3$  (corresponde à variável  $\phi$ ), obtemos as duas equações a seguir:

$$\begin{cases} \frac{dt}{d\lambda} = k \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} \\ \frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{h}{r^2} \end{cases}, \quad (225)$$

em que  $k$  e  $h$  são constantes de integração. Como estamos interessados na trajetória de um raio de luz, devemos considerar uma geodésica nula e fazer  $ds^2 = 0$  na relação (212), se ainda "dividirmos" esta relação por  $d\lambda$ , levamos em consideração o movimento planar e substituir as relações de (225) neste novo resultado, obtemos que:

$$\left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 = c^2 k^2 - \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \frac{h^2}{r^2}. \quad (226)$$

Podemos reescrever esta equação de uma forma mais agradável, da mesma forma como fazemos com a equação de Binet das órbitas da mecânica clássica, ou seja, fazer  $u = 1/r$ , tal que  $dr/d\lambda = -hdu/d\phi$  por (225), na equação (226) e derivar este resultado com relação a  $\phi$ . Dessa forma, obtemos que:

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{3GM}{c^2} u^2. \quad (227)$$

Feito isso, para resolver esta equação, podemos considerar que a trajetória do raio de luz é uma perturbação do caminho retilíneo percorrido no espaço de Minkowski, ou seja, devemos considerar o limite de campo fraco  $GM/rc^2 \ll 1$ . Portanto,  $u = u_0 + u_p$ , aonde  $u_0 = \xi^{-1} \sin \phi$  é solução de (227) com  $M = 0$ , em que  $\xi$  é o chamado parâmetro de impacto, isto é, a distância de máxima aproximação a origem de nosso sistema de coordenadas.

Para a solução não homogênea, isto é, (227) com  $M \neq 0$ , podemos fazer o *ansatz*  $u_p = 3GMu_1/c^2$ , aonde descobrimos por meio de (227) que  $u_1 = (1 + \beta \cos \phi + \cos^2 \phi)/3\xi^2$ . Logo, vemos que:

$$u = \frac{\sin \phi}{\xi} + \frac{GM}{c^2} \frac{(1 + \beta \cos \phi + \cos^2 \phi)}{\xi^2}, \quad (228)$$

em que  $\beta$  é mais uma constante de integração. Portanto, com base nisso, para podermos encontrar o ângulo de deflexão da trajetória da luz de uma estrela distante ao passar, por exemplo, pelo Sol, temos que considerar o esquema geométrico ilustrado na figura 19.

Dessa forma, levando em consideração a figura 19, temos que o ângulo de deflexão da luz será  $\hat{\alpha} = \omega_1 + \omega_2$ . Para encontrarmos  $\omega_1$ , basta fazermos  $\phi = -\omega_1$ ,  $u = 0$  ( $r$  tendendo ao infinito) e considerarmos  $\omega_1 \ll 1$ , pois, assim,  $\sin \omega_1 \simeq \omega_1$  e  $\cos \omega_1 \simeq 1$ . Para encontrarmos  $\omega_2$ , basta fazermos o mesmo processo anterior em (228), mas considerando que  $\phi = \pi + \omega_2$ . Feito isso, obtemos que  $\omega_1 = GM(2 + \beta)/\xi c^2$  e que  $\omega_2 = GM(2 - \beta)/\xi c^2$ . Portanto, somando estes dois resultados, obtemos finalmente que:

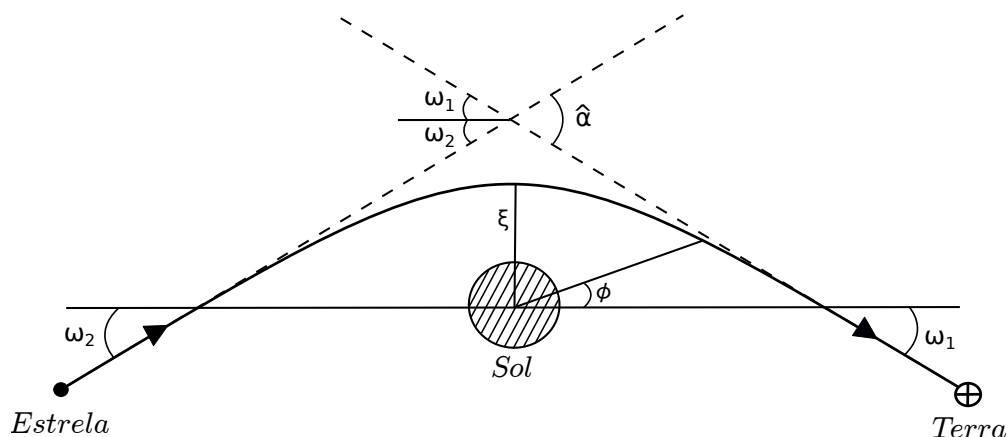
$$\boxed{\hat{\alpha} = \frac{4GM}{\xi c^2}}, \quad (229)$$

aonde, caso  $\xi$  seja igual ao raio do Sol, obtemos um valor de 1,75", ou seja, o dobro do valor newtoniano obtido por Soldner em 1801 e por Einstein em 1911.

O valor obtido do desvio da luz pela Relatividade Geral é o dobro do valor obtido através da gravitação newtoniana, da Relatividade Restrita e do Princípio da Equivalência de 1911, pois o espaço-tempo é descrito corretamente somente por meio de uma teoria métrica. A primeira dedução feita por Einstein só considerava esta mudança na parte temporal da métrica, é por essa razão que ele obteve somente metade do valor real.

Ele mesmo chega a notar isso em seu livro *A Teoria da Relatividade Especial e Geral* [256], pois lá ele diz que "Devemos acrescentar que metade deste desvio, segundo a teoria, deve-se ao campo de atração (newtoniano) do Sol e metade à modificação geométrica do espaço ("curvatura") provocada pelo Sol". Neste sentido, teorias métricas de gravidade modificada não necessariamente possuem este mesmo valor de desvio angular, já que estas teorias não possuem uma igualdade do potencial gravitacional na parte temporal da métrica de campo fraco em comparação com o setor espacial desta devido a quebra do

Figura 19 - Ilustração da trajetória de um raio de luz na presença do Sol.



Legenda: Esquema do lenteamento gravitacional da luz de uma estrela distante pelo Sol.

Fonte: Criado pelo autor no software Inkscape com base na referência [239].

### Princípio de Equivalência Forte.

Além deste fato, alguns afirmam que é possível obter o ângulo de desvio correto da trajetória da luz num campo gravitacional fraco somente através do Princípio da Equivalência, como mostra a referência [306]. Já outros autores, como os da referência [307], são mais cautelosos e fazem uma distinção clara entre o lenteamento "gravitacional" local que se obtém pela equivalência com um observador acelerado e o lenteamento gravitacional global que envolve a curvatura do espaço de um corpo massivo.

Portanto, havia três possibilidades a partir de 1916, ou a gravitação newtoniana estava correta e o desvio era dado por  $\hat{\alpha}_N$ , ou Einstein estava correto e o ângulo era  $\hat{\alpha} = 2\hat{\alpha}_N$  ou a luz não era afetada pela gravidade e  $\hat{\alpha} = 0$ . Assim, em 1918 foi feita uma observação de um eclipse pelo Observatório de Lick, mas infelizmente o céu ficou nublado. No dia 29 de maio de 1919 ocorreu um outro eclipse numa região do céu rica em estrelas, o aglomerado das Híades na constelação de Touro, aonde uma expedição inglesa supervisionada por Eddington e Edwin Cottingham (1869-1940) foi enviada para observar este eclipse na ilha de Príncipe, no Golfo da Guiné, e uma outra comandada por Charles Davidson (1875-1970) e Andrew Crommelin (1865-1939) enviada a Sobral, no Ceará.

Estas duas expedições foram organizadas pelo astrônomo Frank Dyson (1868-1939). A expedição enviada a Sobral era do Observatório de Greenwich e a enviada a Príncipe do Observatório de Cambridge. Junto aos ingleses, foi enviado uma comissão norte americana e uma brasileira do Observatório Nacional, no Rio de Janeiro. Dos brasileiros, temos pessoas como Henrique Morize (1860-1930) e Lélío Gama (1892-1981). O maior desafio dessas expedições foi o clima quente, que poderia destruir as placas fotográficas, e os locais de difícil acesso, pois carregar as lunetas até estes locais sem prejudicá-las era uma tarefa árdua. Além destes equipamentos, também eram utilizados celóstatos para manter a posição das lunetas fixas no chão e acompanhar o movimento de rotação da Terra.

Em janeiro de 1919 foram efetuadas observações na Inglaterra das Híades com o mesmo telescópio de Príncipe, mas sem a presença do Sol, já que era necessário essa comparação para verificar experimentalmente o ângulo de desvio. Já a comissão de Sobral, ficou ainda mais dois meses no Brasil para efetuadas observações de mesmo tipo. A manhã do dia do eclipse na ilha de Príncipe foi de chuva forte e céu nublado, somente perto da totalidade do eclipse o céu ficou limpo. Ao todo, sete placas conseguiram captar a luz das estrelas, mas somente duas estavam em boa qualidade de análise.

Já em Sobral o céu também começou nublado, mas durante o eclipse estava praticamente limpo. No total, 7 placas mostraram as 12 estrelas esperadas. As placas de Príncipe estavam em melhor estado do que as de Sobral, mas devido ao céu nublado, as do Ceará tinham muito mais dados. No fim, o desvio angular da trajetória da luz medido pela expedição de Sobral foi de  $1,98'' \pm 0,12''$  e o inferido pela de Príncipe de  $1,61'' \pm 0,30''$  [308]. Assim, os dados de Sobral é que foram decisivos para a "validação" do lenteamento gravitacional previsto pela teoria de Einstein, pois, além de possuírem um erro menor, o valor de Príncipe sozinho não seria capaz de confirmar este fato estatisticamente.

Podemos perceber isto claramente por meio de uma frase de Eddington sobre as placas de Sobral em seu livro *Weighting Light*, lá ele diz que "Desde o começo ninguém teve dúvida de que a decisão final se basearia nelas, já que as imagens eram quase ideais e estavam em escala maior que as outras fotografias.". Se ainda há dúvidas, o próprio Einstein em 1925 disse a um jornal que "A questão que minha mente formulou foi respondida pelo céu ensolarado do Brasil.". Curiosamente, graças aos jornais da época, foi a partir dos dados das expedições de 1919 que a imagem pública de Einstein cresceu espantosamente. A forma atual como a população conhece este físico, surge exatamente deste momento histórico, quando Einstein se tornou um fenômeno mundial [308].

Apesar do protagonismo brasileiro, através da cidade de Sobral, na verificação experimental da relação (229) e apesar das informações presentes aqui estarem disponíveis facilmente na Internet, a cidade de Sobral é sempre esquecida quando contam a história da Relatividade Geral e de Einstein. Por exemplo, e infelizmente, na série *Genius - A Vida De Einstein* e no filme *Einstein and Eddington* somente Príncipe é lembrada, até mesmo a página oficial do prêmio Nobel na rede social *Facebook* esqueceu de mencionar Sobral numa publicação sobre o eclipse de 1919, várias pessoas solicitaram que isso fosse corrigido, inclusive este autor, e prontamente o erro foi reparado.

Além disso, houve e ainda há uma desconfiança quanto a acurácia e precisão dos dados de 1919 por certos autores e pesquisadores, alguns afirmam que Eddington tinha um viés para as ideias de Einstein e por isso desconsiderou as placas em que pareciam confirmar um desvio newtoniano. No entanto, houve inúmeras outras expedições depois de 1919 que confirmaram o desvio calculado por Einstein em 1916, em 1922 houve expedições para a Austrália, em 1929 para a ilha de Sumatra, em 1936 para a União Soviética e Japão, em 1947 para Minas Gerais e em 1952 para o Sudão [309]. Há ainda mais, em

1979 mediram novamente os desvios nas placas de Sobral com novos equipamentos e confirmaram os valores obtidos na expedição de 1919 [308].

#### D.4 Época Contemporânea e as Observações pós-Sobral

A história do lenteamento gravitacional logo após Sobral é uma evidência de como a ciência está fortemente relacionada a falibilidade humana, isto é, não sabemos tudo e nunca saberemos, e às vezes podemos cometer erros. Diversos autores dessa época, assim como o próprio Einstein, consideravam este efeito meramente uma curiosidade da teoria que nunca poderia ser observada ou ser utilizada para outros fins. Na minha visão, isso pode ter acontecido pois neste momento mal se sabia da escala real do universo observável e as galáxias nem sequer eram consideradas "ilhas universo". Apesar disso, graças a certas pessoas, que muitas vezes eram ignoradas, o lenteamento gravitacional se tornou o fenômeno importante que é atualmente.

De acordo com a história canônica do lenteamento gravitacional, Eddington logo em 1920 considerou ser possível que o lenteamento produzisse imagens duplas de um mesmo objeto distante em seu livro *Space, Time and Gravitation*, no entanto, ele também afirmava ser impossível detectar tal fato [310]. Já no ano de 1924 foi publicado o pequeno artigo *Über eine mögliche Form fiktiver Doppelsterne* por Chwolson (1852-1934), considerado o primeiro artigo de lentes gravitacionais, aonde o autor afirma que é possível o surgimento de uma imagem em forma de anel caso haja alinhamento entre nós e duas estrelas (a lente e a fonte) [311]. Atualmente, este fenômeno é chamado de Anel de Einstein-Chwolson ou somente de Anel de Einstein.

No ano de 1936, convencido pelo cientista amador Rudi W. Mandl, Einstein publica um artigo intitulado *Lens-Like Action of a Star by the Deviation of Light in the Gravitational Field* [312] em que apresenta equações básicas do lenteamento gravitacional, isto é, o ângulo de deflexão quando acontece um Anel de Einstein e a magnificação das imagens formadas (as imagens lenteadas podem sofrer um aumento de área, por isso podem aparecer mais brilhantes do que a fonte original). Neste artigo, Einstein apresenta os mesmos resultados de Chwolson mas diz que não há esperanças de observar este fenômeno, ele é completamente pessimista em relação a este efeito e ainda diz que é apenas um efeito curioso e, em uma carta, diz que esta publicação era de pequeno valor.

No entanto, sabe-se atualmente que em 1912, antes mesmo de Einstein obter o ângulo de deflexão correto, o físico obteve a equação da lente, a equação quadrática que nos diz que pode haver duas imagens e a magnificação dessas imagens [313]. Muito provavelmente, por não acreditar na observabilidade deste fenômeno, Einstein deixou essas anotações de lado e não publicou nada até Mandl o convencê-lo em 1936. Um ano depois, em 1937, inspirado pelo artigo de Einstein, o famoso astrônomo Fritz Zwicky

(1898-1974), aquele que descobriu a matéria escura a partir do teorema do virial aplicado ao aglomerado de Coma, sugeriu utilizar o efeito de lenteamento gravitacional produzido pelas "nebulosas extragalácticas", em seu artigo *Nebulae as Gravitational Lenses* [314].

Nebulosas extragalácticas é somente a nomenclatura antiga das galáxias e, neste mesmo artigo, Zwicky também afirma que o efeito das lentes gravitacionais pode servir como um telescópio cósmico natural para observar galáxias distantes, já que as imagens destas são magnificadas por este fenômeno. Ele vai além e afirma que com este efeito poderia ser possível medir a massa das galáxias e eliminar a discrepância que ele obteve com o aglomerado de Coma, isto é, uma massa gravitacional 400 vezes maior do que o esperado. Infelizmente, essa discrepância ainda existe e é chamada de matéria escura, mas é interessante saber como a origem do lenteamento gravitacional está associada a da matéria escura. Apesar disso tudo, este artigo foi ignorado pelo meio acadêmico da época.

Em 1961, Jean M. Barnothy sugeriu utilizar quasares (quasi-stellar radios sources) para estudar o lenteamento. No ano de 1964, o norueguês Sjur Refsdal (1935-2009) publica dois artigos aonde deduz a equação da lente, calcula o tempo de atraso da luz de duas imagens num fenômeno de lentes gravitacionais [315] e afirma ser possível calcular o parâmetro de Hubble e a massa das galáxias a partir deste fenômeno [316]. Em 1965 ele vai além, e demonstra como é possível testar modelos cosmológicos com lentes gravitacionais [317]. Já em 1979, é descoberto o primeiro efeito de lente gravitacional extragaláctico por Walsh, Carswell e Weymann, uma imagem dupla, de mesmo redshift  $z = 1,41$ , do quasar QSO 0957+561 lenteado por uma galáxia em  $z = 0,36$  [318].

Com a criação da CCD (Charge Coupled Device) nessa época e o seu uso em grandes telescópios, houve uma revolução na Astronomia. Por causa dessa tecnologia, Lynds e Petrosian anunciaram em 1986 a descoberta de estruturas gigantes em forma de arcos azuis no aglomerado galáctico Abell 370 em  $z = 0,374$  [319], em 1987 Paczyński sugeriu que estes arcos eram imagens lenteadas gravitacionalmente [320] por este aglomerado e num artigo de 1988 por Soucail, Mellier, Fort, Mathez e Cailloux praticamente confirmou-se essa hipótese a partir de uma análise espectroscópica em que descobriu-se que o arco era uma galáxia em  $z = 0,724$  [321].

Logo em 1988, Hewitt, Turner, Schneider, Burke e Langston descobriram o primeiro Anel de Einstein (MG1131+0456) incompleto por meio de observações na faixa do rádio [322]. No entanto, somente em 1998 foi descoberto o primeiro Anel de Einstein-Chwolson totalmente completo (B1938+666) por um grupo de dez pesquisadores que utilizaram imagens do telescópio espacial *Hubble* [323]. Na astrofísica moderna, há um abuso do termo Anel de Einstein, pois qualquer arco formado na escala galáctica ou na de aglomerados é chamado desta maneira pela maioria dos autores.

É válido mencionar também a descoberta dos belos arcos gravitacionais pelo telescópio *Hubble* gerado pelo lenteamento gravitacional dos aglomerados Abell 2218 e Abell 1689, no final dos anos 90 e começo dos anos 2000. Há ainda mais descobertas, por exem-

Figura 20 - Primeiros sistemas gravitacionais lente-fonte extragalácticos descobertos.



Legenda: Da esquerda para a direita temos: imagem dupla do quasar QSO 0957+561, arcos azuis do aglomerado A370, Anel de Einstein incompleto MG1131+0456 e o anel completo B1938+666.

Fonte: Imagens retiradas respectivamente das referências [324, 325, 326, 327].

plo, por volta de 1991, Paczyński sugeriu usar o lenteamento, mais especificamente, o microlenteamento, para encontrar exoplanetas na nossa galáxia. Em 2022 já descobrimos 5021 exoplanetas, em que 130 [328] deles foram descobertos através do efeito de lenteamento. Há, inclusive, planetas tipo Tatooine, isto é, que orbitam duas estrelas. Para mais sobre a história inicial do lenteamento gravitacional veja a referência [300].

## D.5 Época dos Grandes Telescópios e dos Grandes Levantamentos de Dados

Para esta subseção estarei utilizando como base a referência [181], que compilou mais de 42 referências sobre os levantamentos de dados (*surveys*) de galáxias e de sistemas de arcos gravitacionais e anéis (lenteamento forte) existentes. Sendo assim, de acordo com a *Master Lens Database* [329] há atualmente em torno de 11629 candidatos a sistemas lente-fonte na escala de galáxias e aglomerados de galáxias. No entanto, de acordo com um artigo que será publicado ainda este ano pelo nosso grupo de lentes do CBPF, este número pode ser bem maior (veja [116]). Dessa maneira, esta quantidade de possíveis sistemas só existe graças aos levantamentos de dados feitos pelos grandes telescópios terrestres e espaciais desde o começo dos anos 1990, pois, até então, sistemas lente-fonte eram considerados bem raros.

Há, em geral, três tipos de levantamentos de dados que podem encontrar sistemas de lentes gravitacionais, as de grande área, que buscam numa área do céu na ordem de 100, 1000 ou até 10000 graus quadrados ( $\text{deg}^2$ ). Essencialmente, qualquer levantamento de grande área com resolução angular melhor (menor) que um segundo de arco vai conseguir encontrar estes sistemas. Há também buscas específicas, pois, por exemplo, sabemos que aglomerados de galáxias são objetos cósmicos massivos e, portanto, ao apontarmos o telescópio para estas estruturas é bem provável encontrarmos arcos gravitacionais. Estes objetos podem ser identificados na faixa do raio-X e do óptico, e até mesmo através de

distorções na radiação cósmica de fundo (CMB).

Por fim, temos também buscas espectroscópicas, em que o espectro de uma galáxia fica misturado a linhas de emissão de uma outra galáxia de *redshift* mais alto. Neste caso, são duas galáxias aproximadamente alinhadas, tal que a mais distante está sendo magnificada pela outra, de tal maneira que essas linhas de emissão podem ser identificadas. Este método é muito utilizado quando temos espectro de muitos objetos, como nos levantamentos espectroscópicos atuais. Encontrando-se esse tipo de sistema, obtém-se posteriormente imagens de alta resolução para comprovar o lenteamento.

Dos levantamentos de dados terrestres e fotométricos de grande área, temos a *Red Cluster Sequence Lensing Survey* (RCSLenS [330]) de  $700 \text{ deg}^2$ , a *Deep Lens Survey* (DLS [331]) de  $20 \text{ deg}^2$ , a *Canada-France Hawaii Telescope Lensing Survey* (CFHTLenS [332]) de  $154 \text{ deg}^2$  e o *Canada-France Hawaii Telescope Stripe 82 Survey* (CS82 [333]) de  $184 \text{ deg}^2$ , que possui forte participação brasileira a partir do grupo de lentes gravitacionais do CBPF. Dos levantamentos fotométricos terrestres de maiores áreas, temos as famosas *Sloan Digital Sky Survey* (SDSS [334]) de  $14555 \text{ deg}^2$ , *Dark Energy Survey* (DES [335]) de  $5000 \text{ deg}^2$ , *Kilo-Degree Survey* (KiDS [336]) de  $1350 \text{ deg}^2$  e *Hyper Suprime-Cam* (HSC [337]) Subaru Strategic Survey de  $1400 \text{ deg}^2$ .

Temos também as belas imagens de arcos gravitacionais captadas pelo *Hubble Space Telescope* (HST) (Telescópio Espacial Hubble) através de seus levantamentos de dados como o *Hubble Deep Field* (HDF [338]), o *HST Medium Deep Survey* [339], o *Great Observatories Origins Deep Survey* (GOODS [340]), o *Extended Groth Strip* (EGS [341]) e o *HST Cosmic Evolution Survey* (COSMOS [342]). De forma rigorosa, os eventos de lenteamento forte são raros, pois o alinhamento entre galáxia-galáxia ou aglomerado-galáxia não são tão comuns devido a vastidão do universo observável, mas como existem muitas galáxias e *surveys* diferentes, é bem mais fácil encontrar diversos destes objetos.

Já para as próximas décadas, é esperado que o número de candidatos a sistemas de arcos gravitacionais descobertos aumente de  $10^4$  para a ordem de  $10^5$  destas estruturas [343, 116]. Para tal acontecimento, será lançado a grande survey *Legacy Survey of Space and Time* (LSST [344, 345, 346]) do futuro *Vera C. Rubin Observatory* no Cerro Pachón (Chile) com um telescópio com espelho de 8,4 metros, e os incríveis telescópios espaciais *Nancy Grace Roman Space Telescope* (antigo WFIRST [343]) da NASA<sup>44</sup>, que terá uma área de observação 100 vezes maior do que a do HST, e o *Euclid* [347] da ESA<sup>45</sup> com uma área de observação de  $15000 \text{ deg}^2$ . O Euclid já foi lançado, o telescópio Roman por volta

<sup>44</sup> Administração Nacional da Aeronáutica e Espaço dos Estados Unidos

<sup>45</sup> Agência Espacial Europeia

de 2026 e o LSST deve começar a operar em 2025.<sup>46</sup>

## D.6 Regimes e Aplicações do Lenteamento Gravitacional

O fenômeno de lenteamento gravitacional possui diversas manifestações na natureza e as aplicações possíveis na ciência são inúmeras, para ajudar a diferenciar os variados casos, este efeito é subdividido em duas categorias. A primeira categoria diz respeito à intensidade do fenômeno, se é fraco ou forte, e a segunda categoria, uma subcategoria do efeito forte, separa os sistemas lente-fonte com base na escala angular em segundos de arco que observamos estes eventos no nosso céu, assim, temos o macrolenteamento, mililenteamento, microlenteamento e até o femtolenteamento. No nosso trabalho, estamos interessados somente na escala de macrolenteamento do efeito forte das lentes gravitacionais. Todas as informações desta seção foram retiradas das referências [181, 182, 178, 188].

### D.6.1 Lenteamento Forte: Macro, Mili e Micro

O efeito forte do lenteamento gravitacional na escala de macrolenteamento, ou seja, tamanhos angulares da ordem de um segundo de arco ( $1''$ ), é a manifestação mais bela deste fenômeno. Este efeito da natureza, também chamado de lenteamento forte, é capaz de produzir múltiplas imagens altamente distorcidas e magnificadas em forma de arcos e anéis de uma galáxia distante (fonte) e ainda pode produzir um atraso temporal entre estas. Portanto, o macrolenteamento gravitacional forte gera várias imagens de um mesmo objeto, pode magnificar bastante a fonte, distorce o formato original da galáxia e em alguns casos produz um atraso temporal entre as imagens formadas.

Como o efeito de lentes gravitacionais conserva o brilho superficial da fonte, ao ser magnificada, isto é, ao ter sua área aumentada, o tamanho angular das imagens será maior do que o da fonte e, portanto, serão mais brilhantes para nós, ou seja, chegam mais fótons ao observador, “canalizados” pelo efeito de lente gravitacional. Devido a este efeito, o macrolenteamento funciona como uma espécie de telescópio cósmico natural para observar galáxias primordiais e pouco brilhantes [349, 350].

Tão importante quanto, é o fato de que as distorções e as posições das imagens múltiplas dependem do potencial gravitacional da lente, desta forma, o macrolenteamento

---

<sup>46</sup> O LSST terá uma área de observação de  $18000 \text{ deg}^2$  e uma resolução angular em torno de  $0,7''$ , já os espaciais *Euclid* e *Nancy Grace Roman Space Telescope* tem/terão uma resolução em torno de  $0,1''$  [343, 348]. Cada telescópio tem suas particularidades, por exemplo, bandas fotométricas utilizadas ou a presença de um espectrógrafo, o importante será a sinergia entre esses instrumentos.

serve como um meio de mapear a distribuição de matéria em aglomerados e galáxias que atuam como lente [351, 352, 353, 354]. Por conseguinte, este fenômeno pode ser utilizado para mapear a distribuição de matéria escura nas lentes gravitacionais [355, 356, 357] e testar modelos de gravidade modificada [358, 359, 360, 215, 361, 216].

Além disso, o macrolenteamento forte nos permite calcular certos parâmetros cosmológicos devido ao atraso temporal entre as imagens formadas. Como os raios de luz percorrem diferentes caminhos no campo gravitacional de uma lente, acontece o chamado atraso de Shapiro, aonde as imagens formadas chegam a nossos telescópios com uma defasagem temporal [362]. Por exemplo, utilizando-se o atraso temporal das imagens de uma mesma supernova lenteada por um quasar, é possível inferir o valor do parâmetro de Hubble atual [316, 362, 363, 364]. Por fim, como já deu para perceber, o efeito forte na escala de macrolenteamento só acontece quando a fonte é uma galáxia e a lente também é uma galáxia ou um aglomerado destes objetos cósmicos.

Já o mililenteamento gravitacional é um termo pouco usado pelos trabalhos de lentes atuais, pois, em geral, considera-se somente as escalas macro e micro. Um provável motivo para isto é o raro sistema lente-fonte deste caso, pois a fonte no mililenteamento é um quasar e a lente são estrelas em outra galáxia. Neste efeito, há o aparecimento de múltiplas imagens com separação angular da ordem de  $0,001''$ . Este fenômeno pode ser utilizado para o estudo da população de estrelas na galáxia-lente, para estudar discos de acreção em quasares e até mesmo para estudar a distribuição de matéria escura ou bariônica nas lentes. Além disso, estes eventos possuem uma variabilidade de meses.

No entanto, o microlenteamento forte vem a cada ano ganhando mais força no meio científico, por exemplo, o nosso grupo de lentes do CBPF trabalha com o microlenteamento e femtolenteamento de buracos negros de pequena massa a fim de impor limites à possibilidade destes objetos serem a matéria escura. Este efeito é observado principalmente quando a lente é um sistema estelar ou um planeta errante no bojo da nossa galáxia, ou na Pequena e Grande Nuvem de Magalhães, e quando a fonte é uma outra estrela. As imagens formadas possuem uma separação de  $10^{-6}''$  e por isso não podem ser resolvidas pelos telescópios atuais, estes eventos só são identificados através da variabilidade do brilho das estrelas-fonte durante um período de segundos, dias ou anos.

Dessa forma, se tivermos uma estrela bem distante cujo movimento observado é ínfimo e um sistema estelar próximo passa entre nós e essa estrela, caso este sistema possua um exoplaneta (ou um buraco negro, ou uma estrela mais fraca etc), devido a magnificação que o sistema-lente causa, veríamos uma curva de luz característica com dois picos, um máximo de brilho quando nós, o sistema e a estrela estivéssemos alinhados e do lado desse máximo o outro pico referente a presença do exoplaneta. Portanto, diferente dos outros métodos de detecção, com o microlenteamento é possível encontrar exoplanetas distantes no bojo de nossa galáxia ou até mesmo em outras galáxias. Atualmente há centenas de exoplanetas confirmados por este método.

Este método de detecção foi proposto por Paczyński em 1991, em 1993 ocorreu as primeiras descobertas do microlenteamento entre estrelas no bojo da Via Láctea e na Grande Nuvem de Magalhães, pois para serem observados é necessário uma grande densidade estelar, e em 2004 foi descoberto o primeiro exoplaneta por este método. Este efeito pode ser utilizado também para medir a massa dos mais variados objetos da Astrofísica Estelar, por exemplo, em 2022, foi descoberto o primeiro buraco negro isolado com  $7,1 \pm 1,3$  massas solares na direção do bojo através do microlenteamento [365]. No entanto, muitos autores afirmam também que pode ser uma estrela de nêutrons. Há ainda o femtolenteamento, aonde as imagens sofrem interferência e, portanto, a óptica ondulatória tem que ser levada em consideração.

#### D.6.2 Lenteamento Fraco

O efeito fraco do lenteamento gravitacional merece grande destaque, pois é um dos principais meios de se obter informações da estrutura em larga escala do universo observável, a partir dele é possível obter o parâmetro cosmológico  $\Omega_m$  e o parâmetro de Hubble atual  $H_0$ . É graças aos dados da CMBR do satélite *Planck* e à análise de lenteamento gravitacional fraco dos dados dos levantamentos de grande área como o DES [335], KiDS e HSC que sabemos tanto sobre o nosso universo observável.

A característica principal deste efeito é que as distorções nas imagens das fontes são inferidas por meio da estatística, portanto, é necessário uma grande quantidade de dados observacionais. O lenteamento fraco se dá quando a lente é a estrutura em larga escala do Universo (teia cósmica) e as fontes são as galáxias distantes, dessa forma o que acontece é uma pequena distorção, chamada de cisalhamento, na forma elíptica das galáxias de fundo, por isso é necessário muitas galáxias para se medir este efeito.

Com este fenômeno é possível estudar os halos de matéria escura em galáxias e seus aglomerados, é possível literalmente fazer mapas da distribuição de matéria entre nós e as galáxias de fundo, testar teorias de gravidade modificada e modelos cosmológicos, avaliar a "aglutinação" dos aglomerados na teia cósmica através do parâmetro  $\sigma_8$ , estudar a energia escura e estudar a não gaussianidade da teia cósmica em pequenas escalas. Como nesta dissertação estamos interessados somente no efeito forte, peço desculpas ao leitor pelas poucas palavras sobre o assunto, para mais informações veja a referência [366].

## APÊNDICE E – Modelos de Lentes

### E.1 Lente Pontual

O modelo mais básico, e o primeiro a ser estudado na história da ciência, sem dúvida alguma é o da Lente Pontual, também chamado de Lente de Schwarzschild. Neste modelo se busca representar o espaço-tempo fora de uma estrela "normal" de pequena rotação atuando como lente e cujo ângulo de deflexão previsto pela teoria da Relatividade Geral é dado pela famosa relação (229). Mas além disso, este modelo também serve para representar o lenteamento feito por um buraco negro ao levar-se em conta que os raios de luz da fonte não passem próximos do horizonte de eventos deste objeto.

Devido às distâncias galácticas ou cosmológicas envolvidas nestes tipos de sistemas, a nossa lente é observada do planeta Terra como se fosse um ponto de massa  $M$ , por isso é dado o nome de Lente Pontual a este modelo físico. Assim, substituindo o ângulo de deflexão (229) em (59) e aplicando este novo resultado na equação da lente adimensional (58), obtemos que:

$$\vec{y} = \vec{x} - \frac{4GM}{c^2} \frac{D_{OL}D_{LS}}{x^2\xi_0^2 D_{OS}} \vec{x}, \quad (230)$$

que ao escolhermos  $\xi_0$  como:

$$\xi_0 = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{OL}D_{LS}}{D_{OS}}}, \quad (231)$$

descobrimos que a equação da lente adimensional para a lente pontual é dada por:

$$\vec{y} = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \vec{x}. \quad (232)$$

Se considerarmos a decomposição cartesiana do tipo  $\vec{v} = (v_1, v_2)$  nos vetores da equação (232) e tomarmos somente as componentes  $y_1$  e  $x_1$  desta equação, descobrimos a relação quadrática  $y_1 = x_1 - 1/x_1$ . Se ainda resolvermos esta expressão para a variável  $x_1$ , ou seja, se utilizarmos a chamada (no Brasil) fórmula de Bhaskara, obtemos de imediato:

$$x_1^\pm = \frac{y_1 \pm \sqrt{4 + y_1^2}}{2}, \quad (233)$$

que nos diz que para cada posição  $y_1$  da fonte, há duas imagens sendo formadas pela Lente Pontual em  $x_1^+$  e  $x_1^-$ . Devido a simetria radial do sistema, a equação (233) é válida para qualquer eixo cartesiano rotacionado, ou seja, para certas posições da fonte no plano será

formada duas imagens diametralmente opostas em relação a posição da fonte.

No entanto, caso a fonte e a lente estejam alinhadas, isto é,  $y_1 = 0$ , uma imagem em forma de anel será formada na posição  $x_1 = 1$ . Em coordenadas dimensionais, o raio deste anel será dado por  $\xi_0 = D_{OL}\theta_E$ , expressão (231), e o raio angular será consequentemente definido como:

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_{OL}D_{OS}}}, \quad (234)$$

que nada mais é do que o raio angular do chamado Anel de Einstein-Chwolson.

Como  $\vec{\alpha}(\vec{x}) = \hat{x}/x$  neste caso, basta substituírmos esta expressão na relação (75) e aplicarmos o resultado em (74) para obtermos a magnificação que a Lente Pontual provoca. Logo, fazendo este passo a passo, é possível descobrir que:

$$\mu = \left(1 - \frac{1}{x^4}\right)^{-1}, \quad (235)$$

aonde vemos que a magnificação tende ao infinito no caso do Anel de Einstein, isto é,  $x = 1$ . Além disso, se considerarmos  $\mu = \mu_1\mu_2$ , obtemos que:

$$\mu_1 = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{-1} \quad \text{e} \quad \mu_2 = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{-1}, \quad (236)$$

aonde é possível perceber que  $\mu_1$  tende ao infinito e  $\mu_2 = 1/2$  quando  $x = 1$ . A quantidade  $\mu_1$  pode ser relacionada a uma magnificação tangencial e  $\mu_2$  a uma magnificação radial, é por essa razão que um ponto é mapeado em um anel no caso de alinhamento fonte-lente, pois o ponto é distorcido infinitamente na direção tangencial quando  $y = 0$  [181].

Considerando-se o ângulo de deflexão da Lente Pontual e as relações (70), (77) e (79), é fácil descobrir que a convergência e o cisalhamento deste modelo são dados por:

$$\kappa = \pi\delta(\vec{x}) \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{1}{x^2}, \quad (237)$$

em que  $\delta(\vec{x})$  é a famosa delta de Dirac. Por fim, considerando (232), a relação para o raio angular de Einstein (234), as equações (58) e (59), é possível escrever que:

$$\begin{cases} \hat{\alpha}(\vec{\theta}) = \frac{4GM}{c^2 D_{OL}} \frac{\vec{\theta}}{\theta^2} \\ \vec{x} = \vec{\theta}/\theta_E \\ \vec{y} = \vec{\beta}/\theta_E \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{\beta} = \left(1 - \frac{\theta_E^2}{\theta^2}\right) \vec{\theta}}. \quad (238)$$

## E.2 Esfera Isotérmica Singular (SIS)

No modelo da Esfera Isotérmica Singular (*Singular Isothermal Sphere*, SIS), as componentes de massa desta lente se comportam como partículas autogravitantes de um gás ideal isotérmico em equilíbrio hidrostático, entretanto, apesar de ser construído sob estas considerações simples e de muitas vezes ser chamado de *toy model*, o perfil radial de densidade do modelo da SIS é bastante próximo do perfil de densidade interno de galáxias-lente massivas dos tipos elípticas e lenticulares da classe S0 [367, 200], como fora verificado pelas referências [368, 369, 370, 371]. O mais curioso é o fato da composição de matéria bariônica com o halo de matéria escura destas galáxias se assemelhar a um modelo isotérmico tão simples, este fato empírico notável ficou conhecido como conspiração bojo-halo [372, 200].

É possível mostrar que o perfil radial de densidade deste modelo físico, em que  $\rho(r \rightarrow 0) \rightarrow \infty$  e por isso o nome "singular" na sua designação, é dado pela expressão:

$$\rho(r) = \frac{\sigma_v^2}{2\pi G r^2}, \quad (239)$$

em que  $\sigma_v$  é a dispersão de velocidades unidimensional das partículas,  $G$  a constante de Newton da gravitação e  $r = \sqrt{\xi^2 + z^2}$  a posição radial. O  $\sigma_v$  é uma das medidas espectroscópicas mais importantes e complicadas da Astronomia, tanto do ponto de vista teórico como do experimental, esta quantidade é uma medida estatística da dispersão de velocidades das componentes luminosas de uma galáxia *early-type* com relação a sua velocidade média.

Se considerarmos a distribuição superficial de massa dada pela relação (60) e o perfil radial de densidade da SIS dado pela expressão (239), descobrimos que:

$$\Sigma(\xi_0 x) = \frac{\sigma_v^2}{2\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(\xi_0 x)^2 + z^2} = \frac{\sigma_v^2}{2G\xi_0 x}, \quad (240)$$

que ao escolhermos  $\xi_0 = \sigma_v^2 / G\Sigma_{crit}$ , em que  $\Sigma_{crit}$  é dado pela expressão (64) e aonde o raio angular de Einstein do modelo da SIS será consequentemente definido por:

$$\theta_E = 4\pi \left( \frac{\sigma_v}{c} \right)^2 \frac{D_{LS}}{D_{OS}}, \quad (241)$$

podemos reescrever a distribuição superficial de massa da esfera isotérmica singular como:

$$\Sigma(\xi_0 x) = \frac{\Sigma_{crit}}{2x}. \quad (242)$$

Dessa forma, com base na expressão (240) para a distribuição superficial de massa da SIS, obtemos que a massa deste modelo projetado no Plano das Lentes é dado por:

$$M(\xi_0 x) = 2\pi\xi_0^2 \int_0^x \Sigma(\xi_0 x') x' dx' = \frac{\sigma_v^2 \pi \xi_0}{G} x, \quad (243)$$

o que nos permite, por meio da relação (94), encontrar que a massa adimensional do modelo é dada por  $m(x) = x$ . Assim, utilizando-se a relação (95), é fácil ver que a equação da lente adimensional do modelo da SIS é dada por:

$$\vec{y} = (x - 1)\hat{x}, \quad (244)$$

aonde podemos descobrir, a partir das equações (93), (100), (101) e (102), que o ângulo de deflexão adimensional, a convergência e o cisalhamento da SIS são dados por:

$$\vec{\alpha}(\vec{x}) = \hat{x} \quad \text{e} \quad \kappa(x) = \gamma(x) = \frac{1}{2x}. \quad (245)$$

Se aplicarmos o resultado da convergência e do cisalhamento da relação (245) nos autovalores da matriz Jacobiana dada por (81), obtemos que:

$$\lambda_1 = 1 - \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 1, \quad (246)$$

o que nos permite encontrar a magnificação total do modelo da esfera isotérmica singular:

$$\mu = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-1}. \quad (247)$$

Dessa forma, como o autovalor  $\lambda_1$  está associado a uma magnificação tangencial e o  $\lambda_2$  a uma magnificação radial, as imagens formadas pela SIS sofrem apenas uma magnificação tangencial, já que a magnificação radial é  $\mu_2 = 1$ . Neste caso, o Jacobiano só será zero caso  $x = 1$ , de modo que a SIS só terá uma curva crítica tangencial neste raio. Já no Plano das Fontes, a curva crítica será mapeada num ponto em  $y = 0$  chamado de cáustica tangencial e no raio  $y = 1$  há a chamada pseudocáustica radial, tal que se a fonte estiver dentro deste raio aparecem duas imagens e fora desta região apenas uma surge [181]. Por fim, se levarmos em consideração o raio angular de Einstein deste modelo, isto é, a expressão (241), e utilizarmos as relações (245), (57), (58) e (59) é de imediato que:

$$\hat{\alpha}(\vec{\theta}) = \frac{4\pi\sigma_v^2}{c^2} \frac{\vec{\theta}}{\theta} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\beta} = \left(1 - \frac{\theta_E}{\theta}\right) \vec{\theta}}. \quad (248)$$