



Coordenação de Formação Científica
Dissertação de Mestrado

O Modelo Padrão de Lee Wick

Felipe Guimarães Marques

Rio de Janeiro, Brasil

8 de janeiro de 2025

"O MODELO PADRÃO DE LEE-WICK"

FELIPE GUIMARÃES MARQUES

Dissertação de Mestrado em Física apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Ministério da Ciência Tecnologia e Inovação. Fazendo parte da banca examinadora os seguintes professores:



Gabriel Santos Menezes - Orientador/CBPF



Gustavo Alberto Burdman - USP



Donato Giorgio Torrieri – UNICAMP

Rio de Janeiro, 10 de setembro de 2024.

Dedico esta tese, em primeiro lugar, a meu pai Reinaldo, que faleceu 7 dias depois de eu ter me matriculado no mestrado do CBPF. Pai, eu gostaria de ter tido a oportunidade de te mostrar esse trabalho, você foi a primeira pessoa que me ensinou física, e vou carregar isso pro resto da vida. Dedico esta tese à minha família que me deu o suporte necessário para o cumprimento dessa tarefa, em especial minha mãe Ana Paula e meus irmãos Pedro, Tiago e Bebel. Dedico esta tese à humanidade, pela qual eu tento e pretendo dar o meu suor a cada dia de minha vida, acreditando sempre que o papel da ciência e do conhecimento humano são de prover as ferramentas necessárias para mitigar a, materialisticamente falando, amoralidade aparente do universo, que se manifesta de múltiplas formas na vida de cada um, porém de algumas formas universais na vida de todos, como, por exemplo, na ausência de escolha das circunstâncias que cada um tem em seu próprio nascimento. Eu torço com todas as minhas forças para que a humanidade tenha a sabedoria de usar as ferramentas geradas pela ciência para a emancipação do homem frente às intempéries e injustiças desse mundo e aos seus próprios vícios. Dedico esta tese também à minha (grande) família estendida: meus amigos e Tânia (que considero minha segunda mãe e minha primeira professora, que me alfabetizou). Dedico esta tese a todos os estudantes de pós-graduação e aspirantes à pesquisadores e cientistas, que suam todos os dias apesar da absolutamente revoltante falta de suporte financeiro e psicológico para continuarmos nesse caminho. Torço para que cada um de vocês não amargure diante de todos os sacrifícios necessários para que não se tornem versões piores de si no futuro. O futuro da humanidade depende que tenham a sabedoria para lidar com a tecnologia com responsabilidade, e não há sabedoria na amargura nem na arrogância, muito pelo contrário.

Agradecimentos

Quero agradecer em primeiro lugar ao meu orientador Gabriel Menezes, que me acolheu como orientado próximo do final de 1 ano de meu mestrado, que começou durante o auge da pandemia. Quero agradecer ao João Paulo Sinnecker que me possibilitou a escolha de orientador em até 1 ano de mestrado dadas as circunstâncias atípicas e caóticas da pandemia. Quero agradecer ao Tião, Helayël, Nami e Philippe de Fabritiis pelos excelentes cursos ministrados por eles e por algumas ajudas por fora que me deram na resolução de alguns problemas mais pontuais. Quero agradecer ao Lucas, Herus, Dudu e Bernard pelo convívio durante o mestrado no CBPF. Quero agradecer à minha família por ter me ajudado financeiramente, sem vocês essa missão seria impossível. Quero agradecer ao Hurb pelo emprego que foi crucial para me sustentar durante a maior parte do mestrado e da flexibilidade que me foi oferecida na minha situação durante todo o momento que passei lá. Quero agradecer ao Zarro e ao Tomoi pelas cartas de recomendação ao CBPF.

“Porque cada um, independente das habilitações que tenha, ao menos uma vez na vida fez ou disse coisas muito acima da sua natureza e condição, e se a essas pessoas pudéssemos retirar do cotidiano pardo em que vão perdendo os contornos, ou elas a si próprias se retirassem de malhas e prisões, quantas mais maravilhas seriam capazes de obrar, que pedaços de conhecimento profundo poderiam comunicar, porque cada um de nós sabe infinitamente mais do que julga e cada um dos outros infinitamente mais do que neles aceitamos reconhecer.” José Saramago

Resumo

Esta tese é um estudo sobre o Modelo Padrão de Lee-Wick. O Capítulo 1 (introdução) menciona brevemente sobre as origens dessa teoria e apresenta o Problema da Hierarquia resultante de correções radiativas à massa do Higgs. O Capítulo 2 é uma breve revisão sobre o Modelo Padrão da física de Partículas, focada nos aspectos relevantes para a idéia geral apresentada aqui. O capítulo 3 é a apresentação do Modelo Padrão de Lee-Wick, focada na demonstração da resolução do problema da hierarquia associada às correções de massa do Higgs. O capítulo 4 é uma pequena revisão da fenomenologia do Modelo Padrão de Lee-Wick. O capítulo 5 é a conclusão.

Palavras-chave: Problema da Hierarquia, Renormalização, Modelo Padrão, Eletrodinâmica Quântica Finita, Teorias de Lee-Wick.

Abstract

This thesis is a study about the Lee-Wick Standard Model. Chapter 1 mentions briefly about the origins of such theory and presents the Hierarchy Problem associated with the Higgs Field mass' radiative corrections. Chapter 2 is a brief review about the Standard Model, focused mainly on the relevant aspects for the idea presented here. Chapter 3 is the review on the Lee-Wick Standard Model and focuses on how it solves the Higgs mass' Hierarchy Problems. Chapter 4 is a brief phenomenological review about Lee-Wick theories. Chapter 5 is the conclusion.

Keywords: Hierarchy Problem, Renormalization, Standard Model, Finite Quantum Electrodynamics, Lee-Wick Theories

Sumário

	Resumo	7
	Abstract	9
1	CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	19
1.1	Uma Teoria Quântica de Campos finita	19
1.2	O Problema da Hierarquia	21
1.3	Soluções Alternativas para o Problema da Hierarquia	29
1.3.1	Supersimetria	29
1.3.2	Dimensões Extras	29
1.3.3	Higgs Composto - Goldstone Higgs	30
2	CAPÍTULO 2 - O MODELO PADRÃO	31
2.1	Eletrodinâmica	31
2.1.1	Polarização do vácuo e Função Beta	34
2.2	Cromodinâmica	36
2.2.1	Regras de Feynman da QCD	40
2.2.2	Liberdade Assintótica	41
2.3	Interação fraca	44
2.3.1	A Simetria $SU_L(2) \times U_Y(1)$	44
2.4	Campo de Higgs	46
2.5	Quarks	49
2.5.1	Matriz CKM e Violação de CP	51
3	CAPÍTULO 3 - O MODELO PADRÃO DE LEE-WICK	55
3.1	Modelo de Brinquedo	55
3.1.1	Campo Escalar	55
3.2	O Modelo Padrão de Lee-Wick	59
3.2.1	Campos de Calibre	59
3.2.2	Matéria Escalar	62
3.2.3	Férmions	63
3.2.4	Contagem de potências	65
3.3	Regras de Feynman do Campo Escalar	70
3.4	Correções radiativas de massa do campo escalar com vetorial de calibre	71
3.4.1	Campo Escalar Ordinário	72

3.4.2	Campo Escalar LW	73
3.5	A Lagrangiana do Modelo Padrão de Lee-Wick	76
3.5.1	O Setor de Higgs	76
3.5.1.1	Setor Higgs-calibre	76
3.5.1.2	Setor Higgs-Quarks	78
4	CAPÍTULO 4 - A FENOMENOLOGIA DO MODELO PADRÃO DE LEE-WICK	83
4.0.1	Parâmetro Eletrofraco ρ	83
4.0.2	Flavor Changing Neutral Currents e Flavor Changing Charged Currents	84
4.0.3	Fantasma tipo-axion	88
4.0.4	Potencial de Cornell emergente de Eletrodinâmica Lee-Wick	91
5	CAPÍTULO 5 - CONCLUSÃO	95
5.0.1	Perspectivas Futuras	96
	Apêndice A - Funções de Vértice e Transformada de Legendre	97
.0.2	Funções de Vértice e Transformada de Legendre	97
.0.3	Derivações dos vértices de Lee-Wick	103
.0.4	Fator de Simetria para Diagramas de Feynman	105
	Apêndice B - Métodos Matemáticos	106
.0.5	Parametrização de Feynman	106
.0.6	Regularização dimensional e dimensão canônica de massa	106
.0.7	Grau Superficial de Divergência	107
.0.8	Matrizes Gamma em d dimensões	109
	Apêndice C - Fórmulas úteis	109
.0.9	Integrais de 1 Loop	109
.0.10	Mais fórmulas úteis	110
	Apêndice D - Teoria de Grupos	111
.0.11	Teoria de Grupos	111
.0.12	Grupo SU(3)	112
.0.13	Álgebra $\mathfrak{su}(3)$	113
	Apêndice E - Causalidade	118
.1	O Problema de Ostrogradsky	118
.1.1	Oscilador de Pais-Uhlenbeck e Causalidade	121
	REFERÊNCIAS	125

Lista de Figuras

Figura 1 – Gráficos obtidos no artigo para G , o gráfico à esquerda possui as curvas rotuladas pela energia do fóton incidente, o gráfico à direita possui as curvas rotuladas pela massa do áxion LW e a escala de ω é dada em eV	91
Figura 2 – Potencial de Cornell para $\tilde{m} = ml_0$. A curva pontilhada é o potencial de Coulomb regularizado pela distribuição não puntiforme de carga.	94

Lista de Tabelas

Lista de símbolos

Γ Letra grega Gama

Λ Lambda

ζ Letra grega minúscula zeta

\in Pertence

$\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ Métrica de Lorentz

$\hbar = 1$ Constante de Planck nas unidades naturais

$c = 1$ Velocidade da luz no vácuo em unidades naturais

1 Capítulo 1 - Introdução

1.1 Uma Teoria Quântica de Campos finita

O Modelo Padrão de Lee-Wick é uma generalização do Modelo Padrão da Física de Partículas que introduz termos de derivadas de ordem superior na Lagrangiana dos campos quânticos que resultam em novas excitações massivas de campo tipo fantasma (estados de norma negativa). A principal vantagem da presença de derivadas de ordens superiores é a melhora do caráter das divergências ultravioleta de loops, tornando-as no máximo logarítmicas. Originalmente, Lee e Wick propuseram essa alteração em busca de uma Eletrodinâmica Quântica finita que apresenta o Regulador de Pauli-Villars como um grau de liberdade físico do Campo Eletromagnético [Lee e Wick 1970]. Dessa forma os termos de derivadas superiores necessariamente introduzem a massa das novas excitações, conhecidas como modos de Lee-Wick, como inputs ao modelo. Daqui em diante, todas as divergências mencionadas nesta tese são de natureza ultravioleta.

Veremos mais adiante que a unitariedade da Matriz S dessa teoria pode ser preservada ao demonstrar-se que as novas excitações introduzidas sejam instáveis, isto será constatado ao final deste capítulo e demonstrado no capítulo 3. A equivalência entre tornarmos o regulador de Pauli Villars como um campo dinâmico oriundo de uma teoria de ordem superior vem da própria forma deste propagador modificado no calibre de Feynman da QED, dado por:

$$iD_{F\mu\nu} = -ig_{\mu\nu} \left[\frac{1}{q^2} - \frac{1}{q^2 - \Lambda^2} \right] = -ig_{\mu\nu} \frac{-\Lambda^2}{q^2(q^2 - \Lambda^2)} = -ig_{\mu\nu} \frac{1}{q^2(1 - \frac{q^2}{\Lambda^2})} \quad (1.1.1)$$

Este propagador apresenta comportamento assintótico de momentum da ordem de q^{-4} , de forma a melhorar as divergências de momento de loop. No caso da QED, ele efetivamente elimina as divergências de loop. No capítulo 3, veremos que a introdução deste tipo de propagador para todos os campos físicos é capaz de tornar todas as divergências de loop do Modelo Padrão em divergências logarítmicas, essa conclusão consta no artigo [Grinstein, O'Connell e Wise 2008].

A ação de qualquer Teoria Quântica de Campos possui dimensão de massa nula. Isto significa que se incluirmos termos de derivadas de ordem superior na Lagrangiana, cada derivada contribui com uma dimensão de massa, isto é $[\partial_\mu] = M$. Logo, a introdução de termos com derivadas de ordem superior na lagrangiana requer que estes termos venham acompanhados de coeficientes com dimensão de massa para compensar a dimensão de massa introduzida pelas derivadas. Estes parâmetros de massa serão equivalentes à escala de energia Λ introduzida pelo Regularizador de Pauli-Villars. Além disso, do próprio comportamento da Regularização de Pauli Villars, percebe-se que podemos decompor o propagador do campo em dois, onde a nova excitação introduzida possui propagador de sinal invertido, isto é, é um fantasma massivo de

mesmo spin e números quânticos do campo original. Estas teorias de ordem superior se chamam **Teorias de Lee-Wick**.

As divergências logarítmicas, por sua vez, dependem sempre de uma escala de renormalização μ_R e são tratáveis pelo Grupo de Renormalização. Tipicamente, na Regularização Dimensional (Vide Apêndice B), os logaritmos resultam da expansão:

$$\begin{aligned}\mu^\varepsilon &= e^{\varepsilon \ln \mu} = 1 + \varepsilon \ln \mu + \dots (I) \\ (I) \Rightarrow \frac{\Gamma(\varepsilon/2)}{(4\pi)^{-\varepsilon/2}} \mu^\varepsilon &= \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \ln(4\pi) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) (1 + \varepsilon \ln \mu + \dots) = \\ &= \frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \ln(4\pi) + \ln \mu^2 + \mathcal{O}(\varepsilon)\end{aligned}\quad (1.1.2)$$

Onde $\gamma = 0,57221\dots$ é a constante de Euler. Em geral fazemos a integral d dimensional de loop com $\varepsilon = 4 - d$ e μ é um parâmetro de massa introduzido na Regularização Dimensional para compensar a mudança na dimensão de massa da constante de acoplamento para diferentes valores de d , de forma que $[g\mu^\varepsilon] = M^0, \forall d$. Na Regularização Dimensional, μ e ε sempre se combinam dessa maneira.

Entretanto, para ter significado físico, o argumento do log precisa ser adimensional, portanto precisamos formar um logaritmo do tipo $\ln \frac{\mu^2}{p^2}$. Este logaritmo resultará da expansão do denominador \mathcal{D} resultante da parametrização de Feynman da mesma forma como expandimos μ^ε :

$$\mathcal{D}^a = 1 + a \ln \mathcal{D} + \dots \quad (1.1.3)$$

O denominador \mathcal{D} é uma função dos momenta de loop e massa bare das partículas no loop. Dessa forma será possível obtermos o logaritmo que queremos, de forma que obtemos termos do tipo.

$$C \left(\frac{2}{\varepsilon} + \ln \frac{\mu^2}{p^2} + \dots \right) \quad (1.1.4)$$

A amplitude correspondente à qualquer diagrama com loops apresentará fatores multiplicativos globais devido à presença de interações, na equação anterior C é este fator global, e naturalmente é um coeficiente dependente da constante de acoplamento visto que ela é um número que pode ser fatorado na amplitude.

Podemos então separar a Lagrangiana numa parte que contenha valores finitos e físicos e em outra parte que contenha a divergência $1/\varepsilon$ e o logaritmo $\ln \frac{\mu^2}{p^2}$ que contém o objeto matemático não observável μ . Para lidar com a parte não física, podemos introduzir contratermos não físicos de mesma natureza, definidos numa escala de energia acessível experimentalmente p_0^2 que servirá como nosso ponto de renormalização. Na Renormalização on-shell, temos $p_0^2 = m_p^2$ que é a massa de pólo das partículas. Assim podemos definir o contratermo:

$$\delta_x = C \left(-\frac{2}{\varepsilon} - \ln \frac{\mu^2}{p_0^2} \right) \quad (1.1.5)$$

Onde C é uma constante e x é algum parâmetro renormalizável da teoria. Partindo do princípio que a diferença entre contratermos resultantes de diferentes renormalizações seja sempre finita, podemos tomar a diferença $\delta_x - \delta_{x'}$ onde $\delta_{x'}$ pode ser o contratermo obtido pela mesma renormalização à uma escala de energia $p'_0 \neq p_0$. Assim podemos eliminar a influência do parâmetro de Regularização μ para obter o seguinte valor finito com significado físico:

$$\delta_x - \delta_{x'} = C \left(-\ln \frac{\mu^2}{p_0^2} - \left(-\ln \frac{\mu^2}{p_0'^2} \right) \right) = -C \ln \frac{p_0'^2}{p_0^2} \quad (1.1.6)$$

1.2 O Problema da Hierarquia

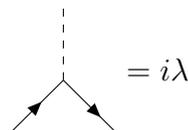
Um outro problema resolvido por essa extensão do Modelo Padrão é o problema da Hierarquia, que consiste em correções radiativas de parâmetros da teoria (via renormalização) que não são pequenas quando comparadas ao seu valor "bare" (como massa, carga e acoplamento), e que são sensíveis a correções no ultravioleta, violando assim a chamada Naturalidade Técnica ("Technical Naturalness") da teoria, que será definida adiante usando a correção radiativa de massa do Higgs, que é o exemplo central desta dissertação. Neste caso, a massa do Higgs apresenta uma correção quadrática após renormalização, isso significa que a correção é sensível ao ultravioleta. Essa sensibilidade pode significar nova física à altas energias/curtas distâncias uma vez que considera-se que as correções de renormalização em ordens superiores devem ser cada vez menores enquanto a teoria de perturbação for válida, exceto se houver algum cancelamento delicado, também conhecido como "fine-tuning", das correções radiativas.

Se essa nova física for capaz de tornar as correções radiativas de massa em logarítmicas, as massas renormalizadas da teoria perdem a sensibilidade ao ultravioleta, de forma que a renormalização deixa de sugerir nova física à maiores energias.

Vamos seguir o raciocínio em [Schwartz 2013]. O Higgs possui uma interação tipo Yukawa com os férmions massivos (exceto neutrinos) do modelo padrão. Assim podemos considerar uma lagrangiana "Toy Model" cujo termo de interação simule a interação do Higgs com os férmions:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\phi(\square + m^2)\phi + \lambda\phi\bar{\psi}\psi + \bar{\psi}(i\cancel{D} - M)\psi \quad (1.2.1)$$

Onde os férmions de Dirac possuem massa M . A Regra de Feynman da interação de Yukawa é então diretamente obtida como (vide Apêndice A):



$$= i\lambda \quad (1.2.2)$$

O objeto $\Gamma(1 - d/2)$ é um indicativo de divergência quadrática para $d = 4$. A integral no limite $\varepsilon \rightarrow 0$ é:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 dx \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{1-d/2} &= \int_0^1 dx (M^2 - p^2 x(1-x) + i\epsilon)^{d/2-1} \\
&= \int_0^1 dx (M^2 - p^2 x(1-x) + i\epsilon)^{1-\varepsilon/2} \\
&= \int_0^1 dx (M^2 - p^2 x(1-x) + i\epsilon) \\
&\quad \times \left[1 - \frac{\varepsilon}{2} \ln(M^2 - p^2 x(1-x) + i\epsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right]
\end{aligned} \tag{1.2.9}$$

Plugando este resultado na nossa expressão para o loop e nela substituindo $d \rightarrow 4 - \varepsilon$, obtemos:

$$\begin{aligned}
i\Sigma_2(p^2) &= \frac{(i\lambda)^2}{4\pi^2} \left(\frac{\mu^\varepsilon}{(4\pi)^{\varepsilon/2}} \right) \left(2\Gamma\left(-1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \right) \int_0^1 dx (M^2 - p^2 x(1-x)) \\
&\quad \times \left[1 - \frac{\varepsilon}{2} \ln(M^2 - p^2 x(1-x) + i\epsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right]
\end{aligned} \tag{1.2.10}$$

Usando a seguinte fórmula da Função Gamma (para n inteiro):

$$\Gamma\left(-n + \frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{2}{\varepsilon} + \psi(n+1) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right] \tag{1.2.11}$$

Com $\psi(1) = -\gamma$ e $\psi(z+1) = \psi(z) + 1/z$, temos:

$$\begin{aligned}
i\Sigma_2(p^2) &= \frac{(i\lambda)^2}{4\pi^2} \left(\frac{\mu^\varepsilon}{(4\pi)^{\varepsilon/2}} \right) \left(-2 \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \frac{1}{2} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) - \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \right) \\
&\quad \times \int_0^1 dx (M^2 - p^2 x(1-x) + i\epsilon)^{1-\varepsilon/2} = \\
&= \frac{(i\lambda)^2}{4\pi^2} (1 + \varepsilon(\ln \mu + \ln \sqrt{4\pi})) \left(-\frac{6}{\varepsilon} - 3\gamma - 1 + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \\
&\quad \times \int_0^1 dx (M^2 - p^2 x(1-x) + i\epsilon)^{1-\varepsilon/2} = \\
&= \frac{(i\lambda)^2}{4\pi^2} \left(-\frac{6}{\varepsilon} - \underbrace{1}_{(*)} - 3 \ln(e^\gamma 4\pi \mu^2) \right) \int_0^1 dx (M^2 - p^2 x(1-x) + i\epsilon)^{1-\varepsilon/2} \\
&= -\frac{(i\lambda)^2}{4\pi^2} \left\{ \frac{6M^2}{\varepsilon} - \frac{p^2}{\varepsilon} + M^2 - \frac{p^2}{6} + 3 \int_0^1 dx (M^2 - p^2 x(1-x)) \right. \\
&\quad \left. \times \ln \left(\frac{M^2 - p^2 x(1-x) + i\epsilon}{4\pi \mu^2 e^{-\gamma}} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{1.2.12}$$

Veremos em breve que o termo resultante de (*) contribuirá na sensibilidade de massa do Higgs ao ultravioleta. Há divergências quadráticas tanto em M^2 quanto em p^2 , além disso, existem mais dois termos quadráticos em p^2 e em M^2 , são esses dois últimos que serão responsáveis pelo Problema da Hierarquia da massa do Higgs. Diferentemente, os dois primeiros podem

ser cancelados por contratermos de renormalização. Neste caso, o Problema da Hierarquia decorre do fato que a subtração entre diferentes esquemas de renormalização possui valor finito e significado físico. Isso confere significado físico à estes termos enquanto correções de massa. Os contratermos são obtidos da renormalização do campo e da massa do escalar:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\phi(\square + m^2)\phi \xrightarrow{R} \begin{cases} -\frac{1}{2}\phi(\square + m^2)\phi - \frac{1}{2}\phi\delta_\phi(\square + \delta_m m^2)\phi \\ p^2 \mapsto \underbrace{(1 + \delta_\phi)}_{Z_\phi} p^2, \quad m \mapsto \simeq (1 + \delta_\phi + \delta_m)m_R \end{cases} \quad (1.2.13)$$

Onde δ_ϕ e δ_m são os contratermos presentes na renormalização dos objetos ϕ e m que vão cancelar as divergências obtidas da renormalização. Os objetos $Z_\phi = 1 + \delta_\phi$ e $Z_m = 1 + \delta_m$ são, respectivamente, a constante de renormalização do campo escalar e sua constante de renormalização de massa, m_R é a massa renormalizada.

O propagador vestido (renormalizado) predominantemente possui correções radiativas dos loops de menor ordem, que no caso são Σ_2 :

$$\begin{aligned} iG^{(2)R}(p) &= \frac{i}{p^2 - m_R^2 + \Sigma(p^2)} = \\ &= \frac{i}{p^2 - m_P^2} + (\text{termos regulares em } p^2 = m_P^2) \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

Onde à 1 loop, o denominador também vai apresentar as correções de momenta e massa oriundos do termo quadrático nos campos da lagrangiana:

$$\Sigma(p^2) = \Sigma_2(p^2) + \delta_\phi p^2 - (\delta_m + \delta_\phi)m_R^2 \quad (1.2.15)$$

O objeto $\Sigma_2(p^2)$ é a correção de diagramas de Feynman irreduzíveis à uma partícula em ordem λ^2 . A massa do pólo m_P é dada pela condição $p^2 - m_R^2 + \Sigma(p)|_{p^2=m_P^2} = 0$. No esquema de renormalização *on-shell*, fixamos $m_R = m_P$ de forma que as condições de contorno tornam-se:

$$\Sigma(m_P^2) = 0, \quad \left. \frac{d\Sigma(p^2)}{dp^2} \right|_{p^2=m_P^2} = 0 \quad (1.2.16)$$

Neste esquema de renormalização, a autoenergia $\Sigma(p^2)|_{p^2=m_P}$ é absorvida na massa renormalizada do campo que coincide com a massa física m_P medida experimentalmente. Essa massa física, por sua vez, é o pólo de resíduo igual à 1 para o propagador vestido. Assim temos que a correção total de massa $\Sigma(p^2)$ na massa de pólo é:

$$\begin{aligned} 0 &= \Sigma(m_P^2) = \Sigma_2(m_P^2) + \delta_\phi m_P^2 - (\delta_m + \delta_\phi)m_R^2 = \Sigma_2(m_P^2) - \delta_\phi m_R^2 \\ &\Rightarrow \delta_m = \frac{1}{m_P^2} \Sigma_2(m_P^2) \\ 0 &= \left. \frac{d\Sigma(p^2)}{dp^2} \right|_{p^2=m_P^2} = \left. \frac{d\Sigma_2(p^2)}{dp^2} \right|_{p^2=m_P^2} + \delta_\phi \Rightarrow \delta_\phi = - \left. \frac{d\Sigma_2(p^2)}{dp^2} \right|_{p^2=m_P^2} \end{aligned} \quad (1.2.17)$$

Incorporamos as constantes $-\gamma + \ln(4\pi)$ em μ sob a redefinição $\tilde{\mu}^2 = 4\pi\mu^2 e^{-\gamma}$. Assim a correção de massa do Campo Escalar usando uma renormalização *on-shell* é, para $M \gg m_P$,

fazemos a aproximação em Série de Taylor em torno de $M^2/\tilde{\mu}^2$:

$$\begin{aligned} \ln(x) &= \ln(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^{n-1} \frac{(x-x_0)^n}{x_0^n} \\ \Rightarrow \ln\left(\frac{M^2 - p^2 x(1-x) + i\epsilon}{4\pi\mu^2 e^{-\gamma}}\right) &\simeq \ln\left(\frac{M^2}{\tilde{\mu}^2}\right) + \frac{p^2 x(1-x)}{M^2} + \mathcal{O}\left(\frac{p^4}{M^4}\right) \end{aligned} \quad (1.2.18)$$

Logo

$$\begin{aligned} \delta_m &= -\frac{\lambda^2}{4\pi^2} \left\{ \left(\frac{6M^2}{m_P^2} - 1\right) \frac{1}{\epsilon} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3M^2}{m_P^2}\right) \ln \frac{M^2}{\tilde{\mu}^2} + \frac{M^2}{m_P^2} + \frac{1}{3} - \frac{m_P^2}{20M^2} + \right. \\ &\quad \left. \mathcal{O}\left(\frac{m_P^4}{M^4}\right) \right\} \end{aligned} \quad (1.2.19)$$

$$\delta_\phi = -\frac{\lambda}{4\pi^2} \left\{ \frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2} \ln \frac{M^2}{\tilde{\mu}^2} - \frac{1}{3} + \frac{m_P^2}{10M^2} + \mathcal{O}\left(\frac{m_P^4}{M^4}\right) \right\} \quad (1.2.20)$$

Neste caso, temos:

$$\Sigma(p^2) = \Sigma_2(p^2) + \delta_\phi p^2 - (\delta_m + \delta_\phi) m_R^2 = \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \left\{ \frac{(p^2 - m_P^2)^2}{20M^2} + \mathcal{O}\left(\frac{m_P^6}{M^4}\right) \right\} \quad (1.2.21)$$

Se aplicamos diretamente o esquema de renormalização \overline{MS} no lugar da renormalização on-shell sobre a equação obtida no início, obtemos

$$\delta_m = -\frac{\lambda^2}{4\pi^2} \left(\frac{6M^2}{m_P^2} - 1\right) \frac{1}{\epsilon} \quad (1.2.22)$$

A correção de massa do Higgs à altas energias corresponde à diferença entre sua massa física m_P e sua massa renormalizada em outro esquema de renormalização. Essa diferença é sempre finita, calculando esta diferença com respeito à massa renormalizada no esquema \overline{MS} na escala de energia da massa do pólo m_P , a correção de massa é a aplicação de um esquema de renormalização sobre a condição do pólo do propagador físico:

$$\begin{aligned} p^2 - m^2 - \Sigma_2(p^2)|_{p^2} = 0 &\xrightarrow{R} m_P^2 - m_R^2 - \Sigma_{2,R}(m_P^2)|_{p^2=m_P^2} = 0 \\ \Rightarrow \Sigma_{2,R}(m_P^2) &= m_P^2 - m_R^2 \end{aligned} \quad (1.2.23)$$

Escolhendo o esquema de renormalização $R = \overline{MS}$, temos:

$$\begin{aligned} m_P^2 - m_{\overline{MS}}^2(\mu) &= \frac{\lambda^2}{24\pi^2} (6M^2 - m_P^2) \\ &\quad - \frac{3\lambda^2}{4\pi^2} \int_0^1 dx [M^2 - m_P^2 x(1-x)] \ln\left(\frac{M^2 - m_P^2 x(1-x)}{\mu^2}\right) \end{aligned} \quad (1.2.24)$$

Essa diferença, embora finita (isto é, ao fixarmos o ponto de renormalização μ), é quadrática em M para $M \gg m_P$. Isso significa que para uma partícula como o Higgs, sua correção de massa é sensível ao ultravioleta através da massa de férmions massivos que interagem com o Higgs através de uma interação tipo Yukawa. Como a massa de cada férmion acoplado ao Higgs

é proporcional ao acoplamento de Yukawa entre ambos (que está demonstrado no Capítulo 2), isso significa que não há desacoplamento à altas energias, muito pelo contrário, reforçando mais ainda a sensibilidade da massa do Higgs ao ultravioleta.

A massa $m_{\overline{MS}}$ foi obtida da equação anterior com o uso do programa Wolfram Mathematica. Para $\lambda = 0,93$ (acoplamento de Yukawa do quark top), $M = 163\text{GeV}$ (quark top) e $m_P = 125\text{GeV}$, obtemos $m_{\overline{MS}} = 124,32\text{GeV}$: a correção de massa pelo quark top é menor que 1%. Logo, apesar da sensibilidade de massa do Higgs ao ultravioleta, o quark conhecido mais pesado apresenta uma contribuição preguena à correção de massa do Higgs.

Além disso, sabe que há uma escala de energia fundamental além escala de energia da simetria Eletrofraca, que é a escala de Planck, onde efeitos quânticos gravitacionais tornam-se relevantes e a Relatividade Geral, enquanto Teoria Efetiva, deixa de ser apropriada para descrever fenômenos físicos nessa escala. Experimentalmente, a massa do Higgs foi medida em $m_P \approx 125\text{GeV}$. Se considerarmos uma teoria finita de cutoff físico finito, como no caso da Teoria de Cordas, o cutoff μ^2 passa a ter significado físico e não pode ser eliminado por contratermos, além disso, ele dominaria a correção de massa do Higgs conforme calculada. Considerando o cutoff como a massa de Planck (isto é a maior escala fundamental de energia conhecida) $\mu^2 = M_{Pl}^2 = 10^{38}\text{GeV}^2$, temos $m \approx M_{Pl}^2 + m_P^2 = (1 + 10^{-34})M_{Pl}^2$.

Para que esta suposição seja verossímil aos resultados experimentais, as correções radiativas de massa do Higgs por férmions muito massivos (de massa acima do quark top), devem cancelar a correção de massa sensível ao ultravioleta do Higgs devido à escala de Planck, este equilíbrio extremamente sensível ao espectro de massa dos férmions corresponde a um ajuste fino: uma sensibilidade de observáveis físicos à variação de parâmetros da teoria.

Uma correção quântica de um parâmetro físico tão discrepante de seu valor bare não é intuitiva, pois espera-se que teorias efetivas de baixas energias (como o Modelo Padrão em relação à gravitação quântica) independam de graus de liberdade na escala da teoria mais fundamental. No caso da correção de massa do Higgs, o que ocorre é exatamente o contrário: o Higgs tem uma massa extremamente leve e ainda sensível a uma escala de energia que não pode ser considerada efetiva.

É claro que uma resolução "preguiçosa" deste problema consiste em afirmar que não há férmions mais massivos que o top quark que se acoplem ao Higgs. Todavia, tal tipo de pensamento é cientificamente infrutífero por basear-se numa conveniência do acaso resultante de uma teoria que sabemos não ser completa, visto que não é capaz de descrever fenômenos físicos, em especial de natureza gravitacional, na escala de Planck.

A grande diferença entre a escala de Planck (ou outra escala de energia maior) e a massa do Higgs é o chamado **Problema da Hierarquia**, que consiste na violação do conceito de **naturalidade** (em inglês, "naturalness"). A naturalidade (hoje em dia, dita naturalidade absoluta) é uma ideia originada por Dirac, que consiste na suposição de que os parâmetros adimensionais

de uma teoria são da ordem de 1. Numa teoria de Campos Efetiva com cutoff μ e um operador O de dimensão de massa Δ , com coeficiente de acoplamento adimensional c_O na Lagrangiana, a adimensionalidade canônica de massa da ação da teoria demanda que

$$M^0 = \left[\int d^d x \mathcal{L} \right] = \underbrace{\left[\int d^d x \right]}_{M^{-d}} [c_O] \underbrace{[O]}_{M^\Delta} \quad (1.2.25)$$

$$\Rightarrow [c_O] = \mathcal{O}(1) M^{d-\Delta} \simeq \mathcal{O}(1) \mu^{d-\Delta}$$

Onde \simeq simboliza que μ tenha a dimensão de massa e que num contexto puramente de análise dimensional, podemos trocar M por μ .

O conceito de naturalness é compatível por exemplo, com a renormalização de massa dos férmions, que é proporcional à suas respectivas massas, como no caso do eletron. O motivo disso é que a massa dessas partículas é protegida por uma **simetria custodial**. A simetria custodial consiste numa simetria residual após uma quebra espontânea de uma simetria mais abrangente. No caso dos férmions, a massa quebra a simetria quiral na lagrangiana. A simetria quiral ocorre em teorias que não misturam diferentes quiralidades, a quiralidade, por sua vez, é o equivalente de helicidade para partículas sem massa, entretanto a quiralidade é invariante sob mudança de referencial. Os projetores P_R e P_L projetam uma representação de Lorentz, respectivamente, nas quiralidades dextrógira e levógira e são definidos por:

$$P_R = \frac{1 + \gamma_5}{2}, \quad P_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} \quad (1.2.26)$$

Na Representação de Weyl, a aplicação destes projetores é dada por:

$$P_R \psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{2 \times 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (1.2.27)$$

$$P_L \psi = \begin{pmatrix} I_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.2.28)$$

Onde $I_{2 \times 2}$ é a matriz identidade em duas dimensões. Uma transformação quiral é a transformação cujo gerador é γ^5 e que portanto distingue diferentes quiralidades, aplicando uma transformação quiral global sobre os férmions direito ψ_R e esquerdo ψ_L , definida por:

$$\psi \mapsto e^{i\alpha\gamma^5} \psi \Rightarrow \psi_L \mapsto e^{-i\alpha} \psi_L, \quad \psi_R \mapsto e^{i\alpha} \psi_R$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{\psi} \not{D} \psi \mapsto e^{-i\alpha\gamma_5^\dagger} \bar{\psi}^\dagger \gamma_0 \not{D} e^{i\alpha\gamma_5} \psi = \bar{\psi} \not{D} \psi \\ m \bar{\psi} \psi \mapsto m \bar{\psi} e^{2i\alpha\gamma_5} \psi \neq m \bar{\psi} \psi \end{cases} \quad (1.2.29)$$

O termo cinético de calibre é mantido invariante sob a transformação quiral, diferentemente do termo de massa.

Há duas maneiras de recuperar-se a simetria quiral quebrada pela massa não-nula na Lagrangiana: ou fazemos o bilinear fermiônico ser nulo, $\bar{\psi}\psi \rightarrow 0$ (o que trivializaria a teoria),

ou fazemos a massa bare ir à zero, $m \rightarrow 0$. A correção radiativa de massa portanto deve ser tal que, em qualquer escala de energia:

$$m \rightarrow 0 \Rightarrow \delta_m \rightarrow 0 \quad (\text{Em todas as ordens de perturbação}) \quad (1.2.30)$$

O conceito de Simetria Custodial está relacionado ao conceito de **Naturalidade Técnica**.

Por definição, um parâmetro satisfaz Naturalidade Técnica se, em alguma escala de energia, este parâmetro seja muito menor que 1, este termo foi cunhado por t'Hooft [Hooft 1980] e é uma noção mais abrangente do que a naturalidade absoluta de Dirac. Baixos valores para o parâmetro em questão são possíveis indícios de uma "quase simetria" que se torna exata quando o valor do parâmetro é anulado. Se este parâmetro for a massa, isso significa que entre os contratermos divergentes possíveis em δ_m , o único tipo que satisfaz esse critério são os que apresentam divergências logarítmicas. Logo, um Modelo Padrão cujas únicas divergências são logarítmicas possui massas renormalizadas tecnicamente naturais.

É intuitivo que as correções radiativas no limite $m \rightarrow 0$ não irão gerar nenhuma correção δ_m devido à simetria exata recuperada na Lagrangiana, visto que qualquer geração de massa quebraria tal simetria. Se o parâmetro protegido por simetria custodial satisfizer $c_O \ll 1$ no cutoff μ , este acoplamento se mantém pequeno em todas as escalas de menor energia, assim o parâmetro pode ser tratado como uma perturbação em todas as escalas de interesse.

Se o parâmetro c_O não satisfaz Naturalidade Técnica, seu valor em alguma escala de energia mais alta sob o grupo de Renormalização pode aumentar o seu valor até ser de ordem igual ou maior que 1, neste caso a interação presente na Lagrangiana de coeficiente c_O não pode ser tratada como perturbação nas escalas de energia até o cutoff μ e isso pode ser indicativo de nova física a partir dessa escala de energia. É dessa maneira que o fine-tuning de uma teoria sugere nova física (UV-completion) do Modelo Padrão, sendo o último portanto, uma teoria efetiva de baixas energias.

Alguns exemplos de Naturalidade Técnica incluem as correções de massa do elétron e dos bósons Z e W no Modelo Padrão. No caso dos bósons Z e W, a simetria quebrada é a quebra da invariância de gauge da lagrangiana sob a simetria $SU_L(2) \times U_Y(1)$. Em todos esses casos a simetria é recuperada na anulação dessas massas. No capítulo 2 é elucidado que os bósons de gauge são invariantes de gauge enquanto forem não-massivos.

Nota-se que a quebra de Simetria Custodial altera o número de graus de liberdade dos campos envolvidos. A presença de massa torna férmions quirais, com 2 graus de liberdade, em férmions de Dirac, com 4 graus de liberdade, enquanto também torna bósons vetoriais não massivos, de apenas 2 graus de liberdade (transversos), em bósons vetoriais massivos, com 3 graus de liberdade (a massa gera um grau de liberdade de polarização longitudinal). Assim a simetria Custodial associada à massa está relacionada à representação do Campo no Grupo de Lorentz.

Em oposição, a massa de um campo escalar neutro como o valor esperado de vácuo do Higgs não possui Simetria Custodial associada visto que o Campo Escalar é invariante de Lorentz, sendo portanto uma representação trivial do Grupo de Lorentz: um campo escalar massivo e um não massivo possuem o mesmo número de graus de liberdade. Dessa maneira, o Higgs admite sensibilidade ultravioleta às suas correções de massa inclusive através de parâmetros de outros campos, como a massa dos férmions envolvidos na interação de Yukawa. Conforme visto, o Problema da Hierarquia torna-se então um indicativo de nova física pelo menos na escala de energia da massa de Planck. No Capítulo 3, veremos que o Modelo Padrão de Lee-Wick é capaz de corrigir o Problema da Hierarquia, sendo portanto uma possível "UV-completion"(uma teoria completa no ultravioleta) do Modelo Padrão.

No Modelo Padrão também existem outros Problemas de Hierarquia: um deles é a hierarquia de massa resultante do acoplamento de Yukawa do Higgs com os férmions, dado que o elétron possui em torno de 10^{-6} vezes a massa do quark top, outro é a hierarquia de escala de energia entre a interação fraca e a interação gravitacional [Burdman 2007].

1.3 Soluções Alternativas para o Problema da Hierarquia

O Modelo Padrão de Lee-Wick não é a única solução possível ao Problema da Hierarquia, outras propostas concentram-se em geração de massa através de quebra de simetria ou através da introdução de dimensões microscópicas adicionais e são mencionadas em [Dine 2015] e [Koren 2020], algumas delas são:

1.3.1 Supersimetria

A introdução de uma nova simetria quebrada pela massa do Higgs corresponderia numa Simetria Custodial que a protegeria de correções grandes no ultravioleta. A Supersimetria é um candidato de resolução para isso. Como a massa do Higgs naturalmente gera uma quebra espontânea de simetria em seu potencial de auto-interação, neste caso a Supersimetria deve ser espontaneamente quebrada pela massa do Higgs. A Supersimetria prevê a existência de parceiros supersimétricos massivos aos campos já presentes no Modelo Padrão. Baseado nos dados experimentais atuais (até 2024), nenhum parceiro supersimétrico foi descoberto. Dentro deste cenário, a diferença de massa entre o Higgs e o Higgsino (seu parceiro supersimétrico) pela quebra da supersimetria poderia tornar a massa do Higgs tecnicamente natural.

1.3.2 Dimensões Extras

Um outro mecanismo de geração de massa é a introdução de Dimensões Extras microscópicas compactas. Um exemplo clássico é a Teoria de Kaluza-Klein, inicialmente concebida como uma tentativa de unificação do Eletromagnetismo com a Gravitação. A introdução de

dimensões extras necessariamente vai alterar a quantização dos campos. Se o espaço total for um produto cartesiano do espaço-tempo com dimensões extras compactas, a periodicidade delas resultará numa quantização de momenta múltiplo de um valor dependente do comprimento de cada dimensão extra. O modo-zero (fundamental) de uma dimensão extra irá corresponder a uma massa que será maior quanto menor o raio da dimensão extra.

1.3.3 Higgs Composto - Goldstone Higgs

Uma outra alternativa consiste nos chamados "Little Higgs Models", em que o Higgs é considerado um pseudo-bóson de Goldstone de uma interação mais fundamental que as interações do Modelo Padrão. Neste caso, ocorreria uma quebra espontânea de simetria em escalas de energia acima do Modelo Padrão e que, dentre os bósons de Goldstone gerados, um deles seria o Higgs. A natureza do Higgs como pseudo-bóson de Goldstone explicaria o porque de sua massa ser pequena quando comparada a escalas de energia de teorias mais fundamentais que o Modelo Padrão.

2 Capítulo 2 - O Modelo Padrão

O Modelo Padrão da Física de Partículas é a melhor teoria que temos atualmente para descrever e prever resultados experimentais feitos em aceleradores de partículas. Ele busca descrever a física em sua forma mais fundamental, onde todas as entidades físicas presentes são os campos quânticos e o espaço-tempo. Neste modelo, todas as interações conhecidas da física, exceto a interação gravitacional são mediadas por campos quânticos de natureza bosônica, como os fótons, glúons e bósons W^\pm e Z . A quantização dos campos originam correções radiativas, que são responsáveis por novos fenômenos como polarização do vácuo, momento magnético anômalo de partículas, correções de massa conforme a escala de energia, largura de decaimento das partículas dentre outras correções. Ainda existem muitos problemas em aberto no Modelo Padrão, como os já mencionados problemas de Hierarquia, a natureza dos neutrinos e a origem de suas massas, a quantização do campo gravitacional em si (denominada gravitação quântica), a natureza da matéria e energia escuras, dentre outros. Neste capítulo iremos estudar os princípios básicos estabelecidos no Modelo Padrão. Maiores detalhes podem ser encontrados em [Donoghue, Golowich e Holstein 2014] e em [Schwartz 2013].

2.1 Eletrodinâmica

Esta seção baseia-se em [Donoghue, Golowich e Holstein 2014]. Vamos começar pela Lagrangiana Eletromagnética livre:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{e.m. free}} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\end{aligned}\tag{2.1.1}$$

A lagrangiana pode ser integrada por partes de forma que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{e.m. free}} &= -\frac{1}{4}(-A_\nu \square A^\nu + A_\nu \partial_\mu \partial^\nu A^\mu + A_\mu \partial_\nu \partial^\mu A^\nu \\ &\quad - A_\mu \square A^\mu + \text{deriv. totais}) = \\ &= \frac{1}{2}A_\mu(\square \eta^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu)A_\nu\end{aligned}\tag{2.1.2}$$

Onde "deriv. totais" refere-se à termos de superfície e que portanto não irão influenciar na variação da ação. Nessa nova forma, obtemos a equação de campo diretamente da lagrangiana como

$$(\square \eta^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu)A_\nu = \mathcal{O}^{\mu\nu} A_\nu = 0\tag{2.1.3}$$

Entretanto, o operador $\mathcal{O}^{\mu\nu}$ não possui inversa definida por ter autovalor nulo (é um projetor), com efeito, se o aplicarmos a um vetor arbitrário $\partial_\nu \xi$:

$$\mathcal{O}^{\mu\nu} \partial_\nu \xi = (\square \eta^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu) \partial_\nu \xi = (\square \partial^\mu - \partial^\mu \square) \xi = 0 \quad (2.1.4)$$

Isto significa que não há função de Green bem definida para as equações de campo livre. Esse problema é resolvido pela introdução de um termo à lagrangiana chamado "gauge-fixing" (fixação de calibre). No calibre de Lorentz, temos $\partial_\mu A^\mu = 0$, portanto um termo invariante de Lorentz dependente desta condição pode ser adicionado à Lagrangiana, obtendo então

$$\mathcal{L}_{\text{e.m. free}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi_0} (\partial_\mu A^\mu)^2 = \frac{1}{2} A_\mu \left[\square \eta^{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi_0}\right) \partial^\mu \partial^\nu \right] A_\nu \quad (2.1.5)$$

Dessa forma, o operador $\mathcal{O}'^{\mu\nu}$ modificado pela fixação de calibre possui inversa definida pela função de Green $G_{\alpha\nu}(x-y)$, satisfazendo

$$\begin{aligned} \delta^\mu_\nu \delta^{(4)}(x-y) &= \mathcal{O}'^{\mu\nu} (G_F)_{\alpha\nu}(x-y) \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(-k^2 \eta^{\mu\alpha} + \left(1 - \frac{1}{\xi_0}\right) k^\mu k^\alpha \right) e^{ik \cdot (x-y)} \tilde{G}_{\alpha\nu}(k) \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Mas

$$\delta^{(4)}(x-y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} k^\mu k^\alpha e^{ik \cdot (x-y)} \quad (2.1.7)$$

Logo

$$\left(-k^2 \eta^{\mu\alpha} + \left(1 - \frac{1}{\xi_0}\right) k^\mu k^\alpha \right) \tilde{G}_{\alpha\nu}(k) = \delta^\mu_\nu \quad (2.1.8)$$

Como $\eta_{\mu\nu}^{-1} = \eta^{\mu\nu}$ e $(k^\mu k^\nu)^{-1} \propto k_\alpha k_\nu$, usamos o Ansatz:

$$\tilde{G}_{\alpha\nu}(k) = A \eta_{\alpha\nu} + B k_\alpha k_\nu \quad (2.1.9)$$

Substituindo na equação anterior, encontramos a Função de Green no espaço de momenta como:

$$\tilde{G}_{\alpha\nu}(k) = -\frac{1}{k^2} \left(\eta_{\alpha\nu} - (1 - \xi_0) \frac{k_\alpha k_\nu}{k^2} \right) \quad (2.1.10)$$

Na definição do Propagador de Feynman, o contorno de integração para a função de Green equivale à somar um shift infinitesimal imaginário $i\epsilon$ aos pólos. Assim o propagador de Feynman pode ser obtido como

$$(\tilde{G}_F)_{\alpha\nu}(k) = -\frac{1}{k^2 + i\epsilon} \left(\eta_{\alpha\nu} - (1 - \xi_0) \frac{k_\alpha k_\nu}{k^2 + i\epsilon} \right) \quad (2.1.11)$$

Para haver interação, o campo eletromagnético deve-se acoplar a alguma corrente j^μ de forma a gerar um termo a mais na Lagrangiana $\mathcal{L}_{\text{int}} = -e j^\mu A_\mu$, de forma a reproduzir as

equações de Maxwell na presença de fontes/cargas. No caso da corrente ser gerada por campos de Dirac, temos:

$$j^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \Rightarrow \partial_\nu F^{\nu\mu} = j^\mu \text{ (eq. de mov. de } A_\mu) \quad (2.1.12)$$

Assim, a lagrangiana da Eletrodinâmica quântica é obtida como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QED}} &= \mathcal{L}_{\text{e.m. free}} + \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + \mathcal{L}_{\text{int}} = \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi_0}(\partial_\mu A^\mu)^2 + \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu = \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi_0}(\partial_\mu A^\mu)^2 + \bar{\psi}(i\not{D} - m_0)\psi \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

Onde definimos $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ como a derivada covariante de calibre.

A derivada covariante de calibre $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ pode ser definida dessa forma pelo fato do campo eletromagnético comutar com os férmions, neste caso, nota-se que o campo eletromagnético desempenha o papel de uma conexão no espaço interno dos férmions. Nota-se que a Lagrangiana quântica da eletrodinâmica

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi_0}(\partial_\mu A^\mu)^2 + \bar{\psi}(i\not{D} - m_0)\psi \quad (2.1.14)$$

É invariante sob a transformação de calibre (local) de simetria U(1) definida como

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow e^{-i\alpha(x)}\psi(x) \\ A_\mu(x) &\rightarrow A_\mu(x) + e^{-1}\partial_\mu\alpha(x) \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

Esta mesma simetria é válida para quaisquer valores de carga βe dos férmions. Férmions com esta carga irão transformar-se como $\psi'(x) \rightarrow e^{-i\beta\alpha(x)}\psi'(x)$

As regras de Feynman da QED são obtidas pela metodologia presente no Apêndice A:

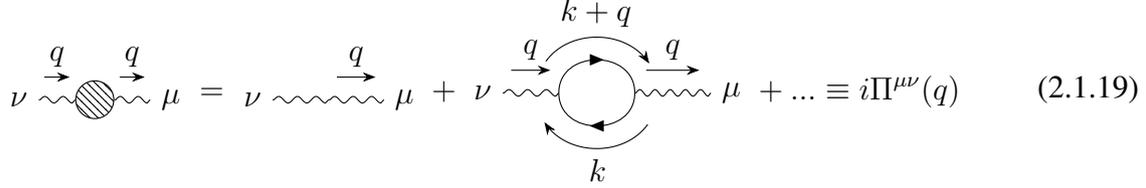
$$\begin{array}{c} \mu \\ \text{~~~~~} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \beta \quad \quad \alpha \end{array} = -ie_0(\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \quad (2.1.16)$$

$$\beta \xrightarrow{p} \alpha = \frac{i(\not{p} + m_0)_{\alpha\beta}}{p^2 - m_0^2 + i\varepsilon} \quad (2.1.17)$$

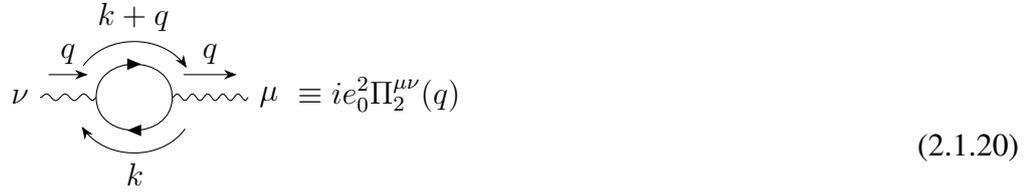
$$\beta \text{ ~~~~~ } \xrightarrow{q} \alpha = \frac{i}{q^2 + i\varepsilon} \left(-g^{\mu\nu} + (1 - \xi_0)\frac{q^\mu q^\nu}{q^2 + i\varepsilon} \right) \quad (2.1.18)$$

2.1.1 Polarização do vácuo e Função Beta

Podemos aplicar todo o raciocínio de correções radiativas desenvolvido na Introdução para a interação de Yukawa na interação da QED. A QED possui apenas um único vértice e a correção radiativa para o propagador do fóton é denominada polarização do vácuo $\Pi^{\mu\nu}(q)$:

$$\nu \begin{array}{c} \xrightarrow{q} \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \xrightarrow{q} \end{array} \mu = \nu \begin{array}{c} \xrightarrow{q} \\ \text{---} \\ \xrightarrow{q} \end{array} \mu + \nu \begin{array}{c} \xrightarrow{q} \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \xrightarrow{q} \end{array} \mu + \dots \equiv i\Pi^{\mu\nu}(q) \quad (2.1.19)$$


Cuja correção à 1 loop é:

$$\nu \begin{array}{c} \xrightarrow{q} \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \xrightarrow{q} \end{array} \mu \equiv ie_0^2 \Pi_2^{\mu\nu}(q) \quad (2.1.20)$$


$$= -(-ie_0)^2 \mu^\varepsilon \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \text{Tr} \left[\gamma^\mu \frac{i}{\not{k} - m + i\epsilon} \gamma^\nu \frac{i}{\not{k} + \not{q} - m + i\epsilon} \right]$$

Dado que os únicos tensores envolvidos na matriz S correspondente sejam $\eta^{\mu\nu}$ e p^μ , o tensor de polarização de vácuo possui uma estrutura tensorial da forma $\Pi_2^{\mu\nu}(q) = (q^2 \eta^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \Pi_2(q^2)$. Da série geométrica do propagador vestido resultante, temos:

$$\begin{aligned} \nu \begin{array}{c} \xrightarrow{q} \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \xrightarrow{q} \end{array} \mu &= iD'_{\mu\nu} = iD_{\mu\nu} + iD_{\mu\alpha} (i\Pi_2^{\alpha\beta}) iD_{\beta\nu} + \dots = \\ &= iD_{\mu\nu} + iD_{\mu\alpha} \left(\delta^\alpha_\nu - \frac{q^\alpha q_\nu}{q^2} \right) (-e_0^2 \Pi_2(q^2) + e_0^4 \Pi_2^2(q^2) + \dots) = \\ &= \frac{-i}{q^2} \left[\frac{1}{1 + e_0^2 \Pi_2(q)} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) + \xi_0 \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right] \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

O fator $\frac{1}{1+e_0^2\Pi(q)}$ vai introduzir uma correção radiativa efetiva na carga elétrica. Essa mudança consiste na polarização do vácuo: a produção de elétrons virtuais fornece uma blindagem dependente da energia de interação entre os campos. Assim a carga elétrica efetiva $e_{eff}^2(q^2)$ é definida como:

$$e_{eff}^2(q^2) = \frac{e_0^2}{1 + e_0^2 \Pi(q^2)} \simeq e_0^2 (1 - e_0^2 \Pi(q^2)) \quad (2.1.22)$$

Onde \simeq indica a expansão em Série de Taylor truncada em primeira ordem para $\Pi_2(q^2) \ll 1$, isto é, enquanto o regime perturbativo permanecer válido. Podemos primeiramente inverter a relação entre a carga efetiva e a carga nua perturbativa e iterativamente:

$$\begin{aligned} e_0^2 &= e_{eff}^2 + e_{eff}^2 e_0^2 \Pi_2 = e_{eff}^2 + e_{eff}^2 (e_{eff}^2 + e_{eff}^2 e_0^2 \Pi_2) \Pi_2 \\ &= e_{eff}^2 + e_{eff}^4 \Pi_2 + \mathcal{O}(e_{eff}^6) \end{aligned} \quad (2.1.23)$$

Conforme visto na introdução, a diferença $\Pi(q^2) - \Pi(q_0^2)$ possui significado físico por não conter divergências. Assim vamos definir a polarização relativa $\hat{\Pi}(q^2) \equiv \Pi(q^2) - \Pi(m^2)$. Podemos substituir e_0^2 em termos de $e_{eff}^2(m^2)$ em $e_{eff}^2(q^2) = e_0^2(1 + e_0^2\Pi_2(q^2))$ para obter:

$$e_{eff}^2(q^2) = e_0^2 - e_0^2\Pi_2(q^2) = e_{eff}^2(m^2) - e_{eff}^4(m^2)(\Pi_2(q^2) - \Pi_2(m^2)) + \dots \quad (2.1.24)$$

Vamos calcular o escalar de polarização de vácuo $\Pi_2(q^2)$ à partir da metodologia usada no capítulo 1 para a interação de Yukawa e das identidades das matrizes gamma em $d = 4 - \varepsilon$ dimensões, mostrada no apêndice B. Assim obtemos:

$$\Pi(q^2) = \frac{1}{6\pi^2} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} - \frac{\gamma}{2} + \ln(\sqrt{4\pi}) - 3 \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left(\frac{m^2 - q^2 x(1-x)}{\mu^2} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right\} \quad (2.1.25)$$

Logo, no limite de altas energias ($q^2 \gg m^2$), a carga elétrica efetiva torna-se (para $e_R^2 \equiv e_{eff}^2(m^2)$):

$$e_{eff}^2(q^2) \approx e_R^2 \left[1 + \frac{e_R^2}{12\pi^2} \ln \left(\frac{-q^2}{m^2} \right) + \dots \right] \quad (2.1.26)$$

Neste caso, a carga elétrica efetiva assume a forma:

$$e_{eff}^2(q^2) = \frac{e_R^2}{1 - \frac{e_R^2}{12\pi^2} \ln \left(\frac{|q|^2}{m^2} \right)} \quad (2.1.27)$$

Isto é, ao tomarmos um ponto de subtração, a carga nua pode ser substituída por uma carga renormalizada no ponto e a polarização Π pode ser substituída por $\hat{\Pi}$. Observa-se que a carga elétrica efetiva aumenta à curtas distâncias até divergir para $\frac{e_R^2}{12\pi^2} \ln \left(\frac{|q|^2}{m^2} \right) = 1$. A partir desta escala de energia, as correções radiativas dominam sobre a dinâmica à tree-level e a teoria de perturbação deixa de ser válida. A energia para o qual isso ocorre é denominada pólo de Landau e no caso da QED, ocorre para $q \sim 10^{286} eV$. O comportamento da eletrodinâmica quântica em escalas de energia acima disso é um mistério. A dependência da carga elétrica efetiva com a escala de energia é denominada um "running coupling"(corrida de acoplamento). Podemos obtê-la após algumas manipulações algébricas sobre a equação anterior considerando que não existe ponto de subtração privilegiado da renormalização, assim fazendo $m \mapsto \mu_R$, $e_R \mapsto e_{eff}(\mu_R)$:

$$\frac{1}{e_{eff}^2(\mu_R)} - \frac{1}{12\pi^2} \ln \left(\frac{|q|^2}{\mu_R^2} \right) = \frac{1}{e_{eff}^2(q^2)}, \left(\text{aplicando } \frac{d}{d\mu_R} \text{ na equação} \right) \quad (2.1.28)$$

$$-\frac{2}{e_{eff}^3(\mu_R)} \frac{de_{eff}}{d\mu_R} + \frac{1}{12\pi^2} \frac{2}{\mu_R} = 0 \Rightarrow \beta_{QED}(e) \equiv \mu_R \frac{de_{eff}^2}{d\mu_R} = \frac{e_{eff}^3}{12\pi^2} \quad (2.1.29)$$

Onde $\beta_{QED}(e)$ é a função beta à 1 loop da QED dado que consideramos apenas as correções de 1 loop na série geométrica. Ela codifica a variação da constante de acoplamento efetiva com a escala de energia.

2.2 Cromodinâmica

Inspirados na Relatividade Geral, Yang e Mills propuseram uma Lagrangiana com simetria local, posteriormente conhecida como "Gauge Symmetry" (port.: simetria de calibre). Teorias de Yang-Mills são as teorias resultantes de simetrias de calibre não-abelianas (ex.: SU(2) e SU(3)). A flexibilização das simetrias de uma lagrangiana de globais para locais permite a manutenção da simetria de Lorentz sob transformações de calibre não-abelianas. Os graus de liberdade locais/internos estão associados à espaços matemáticos ortogonais ao espaço-tempo e são formalizados por objetos matemáticos conhecidos como fibrados.

Como o quark e antiquark são representações fundamentais de SU(3) (Vide Apêndice D), vamos primeiramente considerar uma ação global do grupo sobre eles [Pascual e Tarrach 1984]

$$\begin{aligned}\psi_j^\eta &\longmapsto e^{i\theta^a \frac{\lambda_a}{2}} \psi_j^\eta, & (R = 3, j = 1, 2, 3) \\ \bar{\psi}_j^\eta &\longmapsto e^{-i\theta^a \frac{\lambda_a^*}{2}} \bar{\psi}_j^\eta, & (R = 3^*, j = 1, 2, 3)\end{aligned}\tag{2.2.1}$$

Onde $\frac{\lambda_a}{2}$ são as matrizes de Gell-Mann. Os índices j indexam estado de cor, os índices $\eta = 1, 2, \dots, N_f$ indexam estado de sabor. O quark livre, enquanto férmion massivo, naturalmente satisfaz a equação de Dirac

$$\bar{\psi}_j^\eta (i\rlap{/}\partial - m^\eta) \psi_j^\eta = 0\tag{2.2.2}$$

Por simplicidade, vamos omitir o índice de sabor uma vez que estados de diferentes sabores sentem igualmente a interação forte.

Entretanto, nota-se que essa lagrangiana não possui simetria de calibre SU(3), pois sob transformação temos:

$$\begin{aligned}(e^{-i\theta^a \frac{\lambda_a^*}{2}} \bar{\psi}_j)(i\rlap{/}\partial - m)(e^{i\theta^a \frac{\lambda_a}{2}} \psi_j) \\ = \bar{\psi}_j (i\rlap{/}\partial - m) \underbrace{(e^{-i\theta^a \frac{\lambda_a^*}{2}} e^{i\theta^a \frac{\lambda_a}{2}})}_{\neq 1 \text{ (em geral)}} \psi_j \neq \bar{\psi}_j (i\rlap{/}\partial - m) \psi_j\end{aligned}\tag{2.2.3}$$

Onde o produto destacado do grupo só é igual à 1 se $\lambda_a^* = \lambda_a$.

Podemos remediar o problema introduzindo um campo vetorial auxiliar A_μ acoplado aos quarks analogamente ao caso eletromagnético. Definindo portanto uma derivada modificada:

$$\begin{aligned}\partial_\mu &\mapsto D_\mu \equiv \partial_\mu + igA_\mu \quad (g \in \mathbb{R}) \\ \bar{\psi}_j (i\rlap{/}\partial - m) \psi_j &\mapsto \bar{\psi}_j (i\rlap{/}D - m) \psi_j\end{aligned}\tag{2.2.4}$$

De tal forma que a derivada modificada, denominada *derivada covariante de calibre*, mantenha

a covariância dos quarks sob transformação de calibre, isto é: $e^{i\theta^a \frac{\lambda_a}{2}} (D_\mu \psi_j) = D'_\mu \psi'_j$ (I) :

$$\begin{aligned}
D'_\mu \psi'_j &= \partial_\mu \psi'_j + ig A'_\mu \psi'_j = \partial_\mu (e^{i\theta^a \frac{\lambda_a}{2}} \psi_j) + ig A'_\mu (e^{i\theta^a \frac{\lambda_a}{2}} \psi_j) = \\
&= \underbrace{(i\partial_\mu \theta^a \frac{\lambda_a}{2})}_{\neq 0 \Leftrightarrow \theta^a = \theta^a(x)} e^{i\theta^a \frac{\lambda_a}{2}} \psi_j + e^{i\theta^a \frac{\lambda_a}{2}} (\partial_\mu \psi_j) + ig A'_\mu (e^{i\theta^a \frac{\lambda_a}{2}} \psi_j) \\
e^{i\theta^a \frac{\lambda_a}{2}} (D_\mu \psi_j) &= e^{i\theta^a \frac{\lambda_a}{2}} (\partial_\mu \psi_j) + ig A_\mu (e^{i\theta^a \frac{\lambda_a}{2}} \psi_j) \\
(I) \Rightarrow ig A'_\mu (e^{i\theta^a \frac{\lambda_a}{2}} \psi_j) &+ (i\partial_\mu \theta^a \frac{\lambda_a}{2}) e^{i\theta^a \frac{\lambda_a}{2}} \psi_j = ig A_\mu (e^{i\theta^a \frac{\lambda_a}{2}} \psi_j) \\
\Rightarrow A_\mu(x)' &= A_\mu(x) + \frac{1}{g} (\partial_\mu \theta^a(x)) \frac{\lambda_a}{2} \quad (\text{caso infinitesimal}) \\
\Rightarrow A_\mu(x)' &= e^{ig\theta(x)} (A_\mu(x) + \frac{1}{g} \partial_\mu) e^{-ig\theta(x)} \quad (\text{caso finito})
\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Dessa forma, se quisermos manter a covariância de A_μ , temos que A_μ é uma representação de $\mathfrak{su}(3)$ do mesmo tipo que o termo $\frac{1}{g} (\partial_\mu \theta^a(x)) \frac{\lambda_a}{2}$. Assim identificamos, no caso de transformações infinitesimais (com índice livre a):

$$\frac{1}{g} (\partial_\mu \theta^a(x)) = i\epsilon^b (d_b)_{ca}(R) \xrightarrow[\epsilon^b \rightarrow 0]{\theta^a \rightarrow 0} i(d_b)_{ca}(R) = \frac{1}{g} (\partial_\mu \theta^a(x))|_{\theta^a=0} \tag{2.2.6}$$

Isto é, no caso geral (transformações locais) A_μ é um elemento da representação adjunta de $\mathfrak{su}(3)$ (vide Apêndice D) para que a derivada seja covariante sob $SU(3)$. Analogamente, para o antiquark, a covariância de calibre exige que:

$$\overline{D'_\mu \psi'_j} = \overline{(D_\mu \psi_j)'} = \partial_\mu \bar{\psi}'_j - ig A_\mu^{\dagger'} \bar{\psi}'_j = \partial_\mu (e^{i\theta^a \frac{\lambda_a^*}{2}} \bar{\psi}_j) - ig A_\mu^{\dagger'} (e^{i\theta^a \frac{\lambda_a^*}{2}} \bar{\psi}_j) \tag{2.2.7}$$

Agora seja a transformação infinitesimal para um bóson de calibre massivo:

$$\begin{aligned}
m^2 A_\mu(x) A^\mu(x) &\mapsto m^2 A'_\mu(x) A'^\mu(x) = \\
&= m^2 \left(A_\mu(x) + \frac{1}{g} (\partial_\mu \theta^a(x)) \frac{\lambda_a}{2} \right) \left(A^\mu(x) + \frac{1}{g} (\partial^\mu \theta^b(x)) \frac{\lambda_b}{2} \right) = \\
&= m^2 \left[A_\mu(x) A^\mu(x) + A_\mu(x) \frac{1}{g} (\partial^\mu \theta^b(x)) \frac{\lambda_b}{2} + \frac{1}{g} (\partial_\mu \theta^a(x)) A^\mu(x) \frac{\lambda_a}{2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{g^2} (\partial_\mu \theta^a(x)) (\partial^\mu \theta^b(x)) \frac{\lambda_a}{2} \frac{\lambda_b}{2} \right] \Bigg|_{\theta^a, \theta^b=0}
\end{aligned} \tag{2.2.8}$$

Temos então que a massa do bóson de calibre é invariante sob transformações de Lorentz e sob transformações de calibre se

$$\begin{aligned}
&\left[\underbrace{A_\mu(x) \frac{1}{g} (\partial^\mu \theta^b(x)) \frac{\lambda_b}{2} + \frac{1}{g} (\partial_\mu \theta^a(x)) A^\mu(x) \frac{\lambda_a}{2}}_{\frac{2}{g} A^\mu(x) (\partial_\mu \theta^c(x)) \frac{\lambda_c}{2}} + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{g^2} (\partial_\mu \theta^a(x)) (\partial^\mu \theta^b(x)) \frac{\lambda_a}{2} \frac{\lambda_b}{2} \right] \Bigg|_{\theta^a, \theta^b=0} = 0
\end{aligned} \tag{2.2.9}$$

O que em geral **não é verdade**. Logo exigimos que a massa do bóson de calibre seja nula para manter sua covariância de calibre.

No caso do eletromagnetismo, o tensor de forças de campo pode ser escrito como

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = [D^\mu, D^\nu]; \\ D^\mu &= \partial^\mu - ieA^\mu \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Isto é, o tensor de forças pode ser pensado como uma curvatura num espaço interno cuja conexão é o próprio campo A^μ . Podemos generalizar isso para um campo de calibre qualquer, inclusive o campo de gluons $A_a^\mu = A^\mu \frac{\lambda_a}{2}$. Neste caso, o subíndice a refere-se ao grau de liberdade interno do campo, no caso de simetria SU(3), corresponde à sua cor.

Assim construímos o *Tensor de Força de Gluons* como:

$$\begin{aligned} D_\mu &= \partial_\mu - igA_\mu^a \frac{\lambda_a}{2} \\ [D_\mu, D_\nu] &= \left(\partial_\mu - igA_\mu^a \frac{\lambda_a}{2} \right) \left(\partial_\nu - igA_\nu^b \frac{\lambda_b}{2} \right) - \\ &\quad \left(\partial_\nu - igA_\nu^b \frac{\lambda_b}{2} \right) \left(\partial_\mu - igA_\mu^a \frac{\lambda_a}{2} \right) = \underbrace{(\partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu)}_0 + \\ &\quad - ig \left\{ \underbrace{\left(\partial_\mu A_\nu^b \frac{\lambda_b}{2} - \partial_\nu A_\mu^a \frac{\lambda_a}{2} \right)}_{\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu} + \underbrace{\left(A_\mu^a \frac{\lambda_a}{2} \partial_\nu - A_\nu^b \frac{\lambda_b}{2} \partial_\mu \right)}_{\text{termo de superfície (=0)}} + \right. \\ &\quad \left. - ig \underbrace{[A_\mu, A_\nu]}_{if_{abc}A_\mu^a A_\nu^b \frac{\lambda_c}{2}} \right\} \equiv -igG_{\mu\nu} \Rightarrow G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf_{abc}A_\mu^b A_\nu^c \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Finalmente construímos a Lagrangiana da Cromodinâmica "clássica".

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{CD} &= -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} + \sum_{\eta=1}^{N_f} \bar{\psi}_j^\eta (i\not{D}_{jk} - m^\eta \delta_{jk}) \psi_k^\eta = \\ &= -\frac{1}{4} \left[\underbrace{(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)(\partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu)}_{\text{cinético}} - gf_{abc}A_\mu^b A_\nu^c (\partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu) \right. \\ &\quad \left. - (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) gf^{abc} A_b^\mu A_c^\nu + g^2 f_{abc} f^{ade} A_\mu^b A_\nu^c A_d^\mu A_e^\nu \right] + \\ &\quad \sum_{\eta=1}^{N_f} \left[\bar{\psi}_j^\eta (i\gamma^\mu \partial_\mu - m^\eta \delta_{jk}) \psi_k^\eta - g \bar{\psi}_j^\eta A_\mu^a \frac{(\lambda_a)_{jk}}{2} \psi_k^\eta \right] \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Onde j e k indexam estados de cor dos quarks e η e a indexam, respectivamente, estados de sabor dos quarks e cor dos glúons. O número N_f é a quantidade de sabores existentes.

Dessa forma, a Lagrangiana Cromodinâmica, pela sua natureza não abeliana, apresenta termos a mais das seguintes formas quando comparada com teorias abelianas (ao deixarmos os

$(i\cancel{\partial} - m)_{jk}$, o propagador livre resultante será:

$$\text{quarks: } iS_{jk}^{\alpha\beta}(p) = \delta_{jk} \frac{i(\cancel{\not{p}} + m_0)_{\alpha\beta}}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} = \beta, k \longrightarrow \xrightarrow{p} \alpha, j \quad (2.2.17)$$

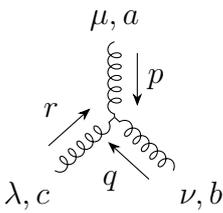
O propagador livre do fantasma vem direto de invertermos o d'Alembertiano, que é o único operador bilinear livre atuando sobre ele, assim temos, com a prescrição de Feynman:

$$i\Delta^{ab}(p) = \frac{i\delta^{ab}}{p^2 + i\epsilon} = b \cdots \cdots a \xrightarrow{p} \quad (2.2.18)$$

As deltas de cor que aparecem em todos os propagadores livres podem ser interpretadas como a conservação de carga das correntes.

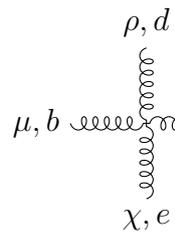
2.2.1 Regras de Feynman da QCD

O vértice triplo de glúons é dado por [Pascual e Tarrach 1984]



$$= -gf_{abc}[\eta^{\lambda\mu}(r-p)^\nu + \eta^{\mu\nu}(p-q)^\lambda + \eta^{\nu\lambda}(q-r)^\mu] \quad (2.2.19)$$

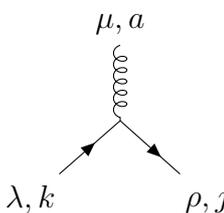
O vértice de 4 glúons é:



$$= g^2 f_{abc} f_{qde} (\eta^{\rho\mu} \eta^{\chi\nu} - \eta^{\chi\mu} \eta^{\rho\nu}) + \quad (2.2.20)$$

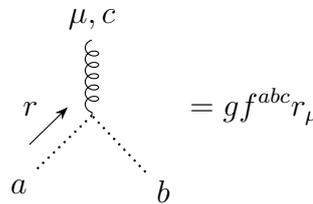
$$g^2 f_{qec} f_{qdb} (\eta^{\chi\mu} \eta^{\rho\nu} - \eta^{\chi\nu} \eta^{\rho\mu}) - g^2 f_{qbc} f_{qde} (\eta^{\chi\nu} \eta^{\rho\mu} - \eta^{\chi\mu} \eta^{\rho\nu})$$

O vértice de quark glúon é dado por:



$$= -ig(\gamma^\mu)_{\rho\lambda} \frac{(\lambda_a)_{jk}}{2} \quad (2.2.21)$$

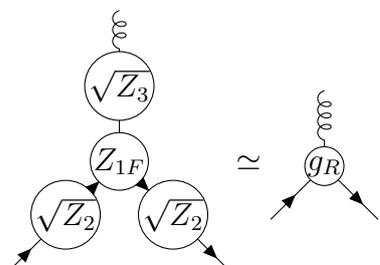
O vértice glúon-fantasma é dado por:



$$= g f^{abc} r_\mu \quad (2.2.22)$$

2.2.2 Liberdade Assintótica

Nesta seção, vamos mostrar que o acoplamento efetivo da QCD em leading order diminui conforme a escala de energia aumenta. Neste caso, em altas energias, os quarks deixam de exibir confinamento, este fenômeno é conhecido como Liberdade Assintótica. a constante de acoplamento renormalizada g_R como o acoplamento efetivo em um diagrama de n-pontos corrigido pela renormalização dos campos e vértices:



$$\quad (2.2.23)$$

Isto é, absorvemos as constantes de renormalização dos campos e vértice na constante de acoplamento renormalizada:

$$g_R = \frac{g}{Z_g} = g Z_{1F}^{-1} Z_2 Z_3^{1/2} \quad (2.2.24)$$

Vamos começar obtendo Z_3 . A polarização do vácuo da QCD é qualitativamente diferente do caso da QED. Podemos aplicar o mesmo raciocínio feito na seção anterior às correções radiativas do glúon à 1 loop. Entretanto haverá mais diagramas contribuindo, dado que a cromodinâmica

quântica apresenta mais interações. Os diagramas são:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{p} \\
 \begin{array}{c}
 \xrightarrow{q} \text{---} \text{---} \text{---} \xrightarrow{q} \\
 \text{---} \text{---} \text{---} \\
 \xleftarrow{p-q} \text{---} \text{---} \text{---} \xleftarrow{q}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \beta, b \quad \alpha, a = i\Pi_{\alpha\beta}^{ab}(q)|_{\text{quark}} \quad (2.2.25)$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{k} \\
 \begin{array}{c}
 \xrightarrow{q} \text{---} \text{---} \text{---} \xrightarrow{q} \\
 \text{---} \text{---} \text{---} \\
 \xleftarrow{k-q} \text{---} \text{---} \text{---} \xleftarrow{q}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \beta, b \quad \alpha, a = i\Pi_{\alpha\beta}^{ab}(q)|_{\text{gluon}} \quad (2.2.26)$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{k} \\
 \begin{array}{c}
 \xrightarrow{q} \text{---} \text{---} \text{---} \xrightarrow{q} \\
 \text{---} \text{---} \text{---} \\
 \xleftarrow{k-q} \text{---} \text{---} \text{---} \xleftarrow{q}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \beta, b \quad \alpha, a = i\Pi_{\alpha\beta}^{ab}(q)|_{\text{ghost}} \quad (2.2.27)$$

Além disso, a QCD é invariante por sabor de quarks, logo o primeiro diagrama deve ser multiplicado por N_f , que é o número de sabores de quarks presentes no universo. O resultado para cada um desses diagramas pode ser encontrado em [Donoghue, Golowich e Holstein 2014]. Existe ainda um quarto diagrama de correção à 1 loop do glúon, mas este resulta numa integral "scaleless"(sem escala). Essas integrais são da ordem de $\int \frac{d^d k}{k^2} = 0$ para $d = 4 - \epsilon$. A polarização do vácuo resultante, em leading order é:

$$\begin{aligned}
 i\Pi_{\alpha\beta}^{ab}(q) &= i\Pi_{\alpha\beta}^{ab}(q)|_{\text{quark}} + i\Pi_{\alpha\beta}^{ab}(q)|_{\text{gluon}} + i\Pi_{\alpha\beta}^{ab}(q)|_{\text{ghost}} = \\
 &= i\delta^{ab}(q_\alpha q_\beta - \eta_{\alpha\beta} q^2) \frac{g^2}{8\pi^2} \left(\frac{\mu^2}{-q^2} \right)^{\frac{\epsilon}{2}} \left[\frac{N_f}{2} C_2(1, 0) - \frac{5}{3} C_2(1, 1) \right] \frac{1}{\epsilon} + \dots \quad (2.2.28)
 \end{aligned}$$

Nota-se que o sinal da polarização do vácuo em leading order depende explicitamente da quantidade de sabores de quarks no universo. Assim como no caso eletrodinâmico, identificamos o projetor $\delta^{ab}(q_\alpha q_\beta - \eta_{\alpha\beta} q^2)$ como o projetor sobre estados de massa nula, assim consideramos o escalar de polarização do vácuo $\Pi(q)$:

$$\begin{aligned}
 \Pi_{\alpha\beta}^{ab}(q) &= \delta^{ab}(q_\alpha q_\beta - \eta_{\alpha\beta} q^2) \Pi(q) \\
 \Rightarrow \Pi(q) &= \frac{g^2}{8\pi^2} \left(\frac{\mu^2}{-q^2} \right)^{\frac{\epsilon}{2}} \left[\frac{N_f}{2} C_2(1, 0) - \frac{5}{3} C_2(1, 1) \right] \frac{1}{\epsilon} + \dots \quad (2.2.29)
 \end{aligned}$$

Com o coeficiente do pólo em ϵ identificado, podemos renormalizar em $q^2 = -\mu_R^2$ pelo Minimal Subtraction Scheme (estamos subtraindo apenas termos dependentes de ϵ):

$$Z_3 = 1 - \frac{g^2}{8\pi^2} \left(\frac{\mu}{\mu_R} \right)^\epsilon \left[\frac{N_f}{2} C_2(1, 0) - \frac{5}{3} C_2(1, 1) \right] \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(g^4) \quad (2.2.30)$$

Onde $\mathcal{O}(g^4)$ são as correções de loops em ordens superiores.

Para a correção do vértice quark-glúon, existem dois diagramas que contribuem à 1 loop:

$$(2.2.31)$$

A soma desses dois diagramas em [Donoghue, Golowich e Holstein 2014] é:

$$\begin{aligned} (\Gamma_\nu^{a,(1)})_{ij}(p_1, p_2)|_{total} &= \left[(\Gamma_\nu^{a,(1)})_{ij}(p_1, p_2)|_{gluon} + (\Gamma_\nu^{a,(1)})_{ij}(p_1, p_2)|_{quark} \right] = \\ &= \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)_{ji} \gamma_\nu [C_2(1, 0) + C_2(1, 1)] \frac{g^2}{8\pi^2} \left(\frac{\mu^2}{-p^2} \right)^{\frac{\epsilon}{2}} \frac{1}{\epsilon} + \dots \end{aligned} \quad (2.2.32)$$

Dessa forma, a Minimal Subtraction Scheme Renormalization de vértice de quark-glúon para $p_i^2 = -\mu_R^2$ à 1 loop é:

$$\begin{aligned} Z_{1F} &= 1 - (\Gamma_\nu^{a,(1)})_{ij}(p_1, p_2)|_{total} = \\ &= 1 - \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)_{ji} \gamma_\nu [C_2(1, 0) + C_2(1, 1)] \frac{g^2}{8\pi^2} \left(\frac{\mu^2}{-p^2} \right)^{\frac{\epsilon}{2}} \frac{1}{\epsilon} \Big|_{p_i^2 = -\mu_R^2} + \dots = \\ &= 1 - \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)_{ji} \gamma_\nu [C_2(1, 0) + C_2(1, 1)] \frac{g^2}{8\pi^2} \left(\frac{\mu}{\mu_R} \right)^\epsilon \frac{1}{\epsilon} + \dots \end{aligned} \quad (2.2.33)$$

Agora faremos a renormalização do quark. A correção de 1 loop correspondente vem do diagrama:

$$(2.2.34)$$

Novamente, em [Donoghue, Golowich e Holstein 2014], a renormalização do quark Z_2 no esquema Minimal Subtraction para $p^2 = -\mu_R^2$:

$$Z_2 = 1 - C_2(1, 0) \frac{g^2}{8\pi^2} \left(\frac{\mu}{\mu_R} \right)^\epsilon \frac{1}{\epsilon} + \dots \quad (2.2.35)$$

Agora podemos obter a constante de acoplamento renormalizada.

$$\begin{aligned} g_R &= g Z_{1F}^{-1} Z_2 Z_3^{1/2} = \\ &= \left(1 - [C_2(1, 0) + C_2(1, 1)] \frac{g^2}{8\pi^2} \left(\frac{\mu}{\mu_R} \right)^\epsilon \frac{1}{\epsilon} + \dots \right)^{-1} \times \\ &\quad \left(1 - C_2(1, 0) \frac{g^2}{8\pi^2} \left(\frac{\mu}{\mu_R} \right)^\epsilon \frac{1}{\epsilon} + \dots \right) \times \\ &\quad \left(1 - \left[\frac{N_f}{2} C_2(1, 0) - \frac{5}{3} C_2(1, 1) \right] \frac{g^2}{8\pi^2} \left(\frac{\mu}{\mu_R} \right)^\epsilon \frac{1}{\epsilon} + \dots \right)^{1/2} g \end{aligned} \quad (2.2.36)$$

Usando a expansão de McLaurin, temos $(1-x)^a \simeq 1-ax$. Vamos aplicar essa expansão sobre as constantes de renormalização no cálculo da constante de acoplamento renormalizada/running g_R .

$$\begin{aligned}
g_R &\simeq \left(1 + [C_2(1,0) + C_2(1,1)] \frac{g^2}{8\pi^2} \left(\frac{\mu}{\mu_R}\right)^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} + \dots\right) \times \\
&\left(1 - C_2(1,0) \frac{g^2}{8\pi^2} \left(\frac{\mu}{\mu_R}\right)^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} + \dots\right) \times \\
&\left(1 - \frac{1}{2} \left[\frac{N_f}{2} C_2(1,0) - \frac{5}{3} C_2(1,1)\right] \frac{g^2}{8\pi^2} \left(\frac{\mu}{\mu_R}\right)^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} + \dots\right) g = \\
&g + \left\{ -\frac{N_f}{4} C_2(1,0) + \frac{11}{6} C_2(1,1) \right\} \frac{g^3}{8\pi^2} \left(\frac{\mu}{\mu_R}\right)^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} + \mathcal{O}(g^5)
\end{aligned} \tag{2.2.37}$$

Para dois loops, haverão mais dois vértices, de forma que a contribuição da constante de acoplamento bare torna-se da ordem $\mathcal{O}(g^5)$.

A partir de g_R , obtemos a função beta da QCD, β_{QCD} definida por:

$$\begin{aligned}
\beta_{QCD} &\equiv \mu_R \frac{\partial g_R}{\partial \mu_R} = - \left[\frac{11}{3} C_2(1,1) - \frac{N_f}{2} C_2(1,0) \right] \frac{g^3}{16\pi^2} + \mathcal{O}(g^5) = \\
&= - \left(11 - \frac{2N_f}{3} \right) \frac{g^3}{16\pi^2} + \mathcal{O}(g^5)
\end{aligned} \tag{2.2.38}$$

Onde está implícito que tomamos o limite $\varepsilon \mapsto 0$. Nota-se que para um universo com menos de 17 sabores, a contribuição em leading order da função beta é negativa. Isso significa que para baixas energias, a constante de acoplamento é maior. Dessa forma, contrariamente ao caso eletromagnético, a blindagem resultante dos glúons virtuais é maior no infravermelho, atualmente suspeita-se que isso relaciona-se com o confinamento. Da mesma forma, à altas energias a Cromodinâmica Quântica exhibe Liberdade Assintótica.

2.3 Interação fraca

Esta seção baseia-se no curso disponibilizado na playlist [[Helayël-Neto](#)].

2.3.1 A Simetria $SU_L(2) \times U_Y(1)$

Vamos começar pelo Setor de léptons $\{l^-, l^+, \nu^l, \tilde{\nu}^l\}$. Onde $l^-, l^+, \nu^l, \tilde{\nu}^l$ denotam, respectivamente, um lépton, seu antilépton, o neutrino e o antineutrino do lépton. Os léptons l^-, l^+ possuem, respectivamente, carga elétrica $-e$ e $+e$, onde e é a carga fundamental. O dubleto de $SU_L(2)$ é portanto:

$$L \equiv \begin{pmatrix} \nu^l \\ l \end{pmatrix}_L \tag{2.3.1}$$

Onde o subíndice L denota quiralidade levógira. A Lagrangiana dos campos de matéria leptônica sob $SU_L(2)$ é:

$$\mathcal{L}_{mat.} = \bar{L} i \gamma^\mu D_\mu L = \bar{L} i \gamma^\mu \partial_\mu L - \frac{g}{2} \bar{L} i \gamma^\mu B_\mu^a \sigma_a L \tag{2.3.2}$$

Onde σ_a são as matrizes de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.3.3)$$

E o dubleto leptônico transforma-se como representação fundamental:

$$L'_i = S^j_i L_j = (e^{i\omega^a \frac{\sigma_a}{2}})^j_i L_j \quad (2.3.4)$$

$$\left[\frac{\sigma_a}{2}, \frac{\sigma_b}{2} \right] = i\epsilon_{abc} \frac{\sigma_c}{2}$$

O termo de interação é:

$$\begin{aligned} & \frac{-ig}{2} (\bar{\nu}_L^l \quad \bar{l}_L) \gamma^\mu \begin{pmatrix} B_\mu^3 & B_\mu^1 - iB_\mu^2 \\ B_\mu^1 + iB_\mu^2 & -B_\mu^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L^l \\ l_L \end{pmatrix} = \\ & = \frac{-ig}{2} \left\{ \bar{\nu}_L^l \gamma^\mu B_\mu^3 \nu_L^l + \bar{\nu}_L^l \gamma^\mu (B_\mu^1 - iB_\mu^2) l_L + \bar{l}_L \gamma^\mu (B_\mu^1 + iB_\mu^2) \nu_L^l - \bar{l}_L \gamma^\mu B_\mu^3 l_L \right\} \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Como as correntes $\bar{\nu}_L^l \gamma^\mu l_L$ e $\bar{l}_L \gamma^\mu \nu_L^l$ possuem, respectivamente, carga elétrica -1 e +1, a conservação de carga nos vértices implica que os campos $B_\mu^1 - iB_\mu^2$ e $B_\mu^1 + iB_\mu^2$ possuem, respectivamente, carga +1 e -1 e que também são, respectivamente, os bósons W_μ^+ e W_μ^- . O campo B_μ^3 é eletricamente neutro. Dada a carga elétrica e o isospin fraco (o autovalor dos léptons pelo operador $\frac{\sigma_3}{2}$) de alguns dos bósons e léptons envolvidos, torna-se necessária a introdução de uma simetria $U(1)$ na teoria, equivalente à simetria do eletromagnetismo. Existe uma relação entre esses autovalores chamada relação de Gell-Mann-Nishijima:

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2} \quad (2.3.6)$$

Onde Y é a hipercarga fraca que atua como carga da simetria $U_Y(1)$. Entretanto agora os léptons diretos participam dessa interação. A derivada covariante de calibre dos léptons envolvidos é:

$$\begin{aligned} L & \xrightarrow{U_Y(1)} L' = e^{i(y=-1)\alpha} L = e^{-i\alpha} L \\ l_R & \xrightarrow{U_Y(1)} l'_R = e^{i(y=-2)\alpha} l_R = e^{-2i\alpha} l_R \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

Introduzindo a Lagrangiana dos Campos de calibre da maneira usual: através dos tensores de força de campo, dados pela curvatura da derivada covariante de calibre, a lagrangiana do setor leptônico torna-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} & = \mathcal{L}_{mat} + \mathcal{L}_{YM} = \\ & = \frac{-ig}{2} \left\{ \bar{\nu}_L^l \gamma^\mu B_\mu^3 \nu_L^l + \bar{\nu}_L^l \gamma^\mu (B_\mu^1 - iB_\mu^2) l_L + \bar{l}_L \gamma^\mu (B_\mu^1 + iB_\mu^2) \nu_L^l - \bar{l}_L \gamma^\mu B_\mu^3 l_L \right\} \\ & + \frac{g'}{2} \bar{\nu}_L^l \gamma^\mu Y_\mu \nu_L^l + \frac{g'}{2} \bar{l}_L \gamma^\mu Y_\mu l_L + \bar{\nu}_L^l \gamma^\mu \partial_\mu \nu_L^l + \bar{l}_L \gamma^\mu \partial_\mu l_L + \\ & + \bar{l}_R \gamma^\mu \partial_\mu l_R + g' \bar{l}_R \gamma^\mu Y_\mu l_R - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} - \frac{1}{4} Y_{\mu\nu} Y^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

Com $F_{\mu\nu}$ e B_μ sendo, respectivamente, os campos de calibre da simetria $SU_L(2)$ e $U_Y(1)$, dados por:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &\equiv \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu + ig[B_\mu, B_\nu] \\ \Rightarrow F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu B_\nu^a - \partial_\nu B_\mu^a - g\epsilon^{abc} B_\mu^b B_\nu^c \\ Y_{\mu\nu} &= \partial_\mu Y_\nu - \partial_\nu Y_\mu \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

Entretanto sabemos que os léptons em geral possuem massa, com uma possível exceção de um único neutrino, dado que existe oscilação de neutrinos. A massa não está presente nessa Lagrangiana, a seguir veremos uma maneira de gerá-la dinamicamente.

2.4 Campo de Higgs

Sabemos que os elétrons são campos de Dirac e que possuem massa de natureza escalar. Podemos introduzir um campo escalar Φ que realizará o seguinte acoplamento tipo Yukawa, resultando numa massa m_l ao lépton l :

$$\underbrace{y_l \Phi}_{\equiv m_l} \bar{L} l_R = m_l (\bar{l}_L l_R + \bar{l}_R l_L) \quad (2.4.1)$$

O neutrino em L não é considerado visto que nunca se detectou neutrinos dextrógiros. Para que este termo de interação (e portanto a lagrangiana correspondente) seja invariante sob $SU_L(2) \times U_Y(1)$, o produto dos campos envolvidos terá que se comportar como singleto sob a ação da simetria de calibre. Isso somente é possível se o Higgs for representação fundamental de $SU_L(2)$:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad (2.4.2)$$

Se observarmos a a carga eletromagnética Q do termo de Yukawa:

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = y_l \bar{L} l_R \Phi = \begin{pmatrix} \bar{\nu}_L^l & \bar{l}_L \end{pmatrix} l_R \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = y_l \underbrace{\bar{\nu}_L^l l_R}_{Q=-1} \phi_1 + y_l \underbrace{\bar{l}_L l_R}_{Q=0} \phi_2 \quad (2.4.3)$$

Aplicando a conservação de carga aos vértices, temos $Q(\phi_1) = +1$ e $Q(\phi_2) = 0$. Assim renomeamos as componentes do campo de Higgs:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi^{(+)}, \phi_2 = \phi^{(0)}, \Phi = \begin{pmatrix} \phi^{(+)} \\ \phi^{(0)} \end{pmatrix} \\ y_l \bar{L} l_R \Phi &= y_l \bar{\nu}_L^l l_R \phi^{(+)} + y_l \bar{l}_L l_R \phi^{(0)} + \text{h.c.} = \\ &= y_l \bar{\nu}_L^l l_R \phi^{(+)} + y_l \bar{l}_L l_R \phi^{(0)} + y_l \bar{l}_R \nu_L^l \phi^{(+)*} + y_l \bar{l}_R l_L \phi^{(0)*} \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Apenas o campo $\phi^{(0)}$ pode acoplar quiralidades opostas de cargas opostas, mas de mesma magnitude, do lépton l . Como sabemos que elétrons e pósitrons possuem a mesma massa, porém

cargas opostas, apenas o campo $\phi^{(0)}$ irá contribuir na geração de massa aos léptons. Além disso, a invariância de Lorentz do Campo de Higgs enquanto campo escalar o permite admitir valor esperado de vácuo não nulo. Com efeito:

$$\langle 0|\Phi(t, \vec{x})|0\rangle = \langle 0|e^{ip \cdot x}\Phi(0, \vec{0})e^{-ip \cdot x}|0\rangle = \langle 0|\Phi(0, \vec{0})|0\rangle = \text{constante} \quad (2.4.5)$$

Onde impomos a condição $\langle 0|\phi^{(+)}|0\rangle = 0$ para que se satisfaça a conservação de carga. O valor esperado de vácuo pode ser Introduzido através de um potencial de autointeração $V(\Phi)$ na Lagrangiana do Higgs, dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_H = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - V(\Phi) = & (\partial_\mu \Phi)^\dagger (\partial^\mu \Phi) + \frac{ig}{2} (\partial_\mu \Phi)^\dagger \sigma^a \Phi B_\mu^a + \\ & \frac{ig'}{2} (\partial_\mu \Phi)^\dagger \Phi Y^\mu - \frac{ig}{2} \Phi^\dagger \sigma_a (\partial^\mu \Phi) B_\mu^a + \frac{g^2}{4} \Phi^\dagger \sigma_a \sigma_b \Phi B_\mu^a B^{\mu, b} + \\ & \frac{gg'}{4} \Phi^\dagger \sigma_a \Phi B_\mu^a Y^\mu - \frac{ig'}{2} \Phi^\dagger (\partial_\mu \Phi) Y^\mu + \frac{gg'}{4} \Phi^\dagger \sigma_a \Phi B_\mu^a Y^\mu + \\ & \underbrace{\frac{(g')^2}{4} \Phi^\dagger \Phi Y_\mu Y^\mu - \frac{1}{2} \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \frac{\lambda}{4} (\Phi^\dagger \Phi)^2}_{-V(\Phi)} \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

Cuja derivada covariante de calibre é obtida a partir da representação do Higgs em cada simetria envolvida.

$$\begin{aligned} D_\mu \Phi &= \partial_\mu \Phi + ig B_\mu^a \frac{\sigma_a}{2} \Phi + ig' Y_\mu \frac{y}{2} \Phi = \\ &= \partial_\mu \Phi + ig B_\mu^a \frac{\sigma_a}{2} \Phi + \frac{ig'}{2} Y_\mu \Phi \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

Na Lagrangiana do Higgs, nota-se termos bilineares nos campos de calibre que gerarão massa, inclusive um deles mistura os campos de calibre, resultando numa matriz de massa não diagonal.

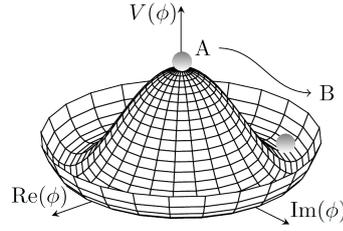
Estes termos são:

$$\begin{aligned} \frac{g^2}{4} \Phi^\dagger \sigma_a \sigma_b \Phi \underbrace{B_\mu^a B^{\mu, b}}_{B_\mu^b B^{\mu, a}} &= \frac{g^2}{4} \Phi^\dagger \frac{1}{2} \underbrace{\{\sigma_a, \sigma_b\}}_{\delta_{ab} 1} \Phi B_\mu^a B^{\mu, b} = \frac{g^2}{4} \Phi^\dagger \Phi B_\mu^a B^{\mu, a} \\ \frac{(g')^2}{4} |\Phi|^2 Y_\mu Y^\mu & \\ \frac{gg'}{2} \Phi^\dagger \sigma_a \Phi B_\mu^a Y^\mu & \text{ (termo misto)} \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

A estabilidade do valor esperado de vácuo do Higgs requer mínimos globais no potencial de autointeração, que é possível para $\mu^2 < 0$ e $\lambda > 0$, resultando no gráfico abaixo.

Apenas um dentre os infinitos mínimos possíveis o valor esperado de vácuo pode ocupar, resultando numa **quebra espontânea de simetria**. Da conservação de carga, sabemos que, no vácuo, o Higgs é eletricamente neutro. Além disso, nunca se detectou neutrinos dextrógiros, logo não podemos atribuir no momento, uma massa resultante de uma interação tipo Yukawa para eles, logo podemos escolher o estado do Higgs no vácuo sem perda de generalidade como:

$$\Phi|_{\text{vácuo}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi^{(0)}|_{\text{vácuo}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (2.4.9)$$



Onde $v = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}}$ é o valor de Φ no mínimo de potencial para $\Phi \in \mathbb{R}$. O fator de normalização $\frac{1}{\sqrt{2}}$ foi aqui introduzido para reproduzir o fator usual $\frac{1}{2}$ no termo cinético da Lagrangiana dum campo escalar como o Higgs. da conservação de carga elétrica, o Higgs só pode misturar os modos B_μ^3 e Y_μ dos campos de calibre, logo a massa dos modos neutros torna-se a matriz:

$$\begin{aligned} & -\frac{gg'v^2}{4}B_\mu^3Y^\mu + \frac{(g'v)^2}{8}Y_\mu Y^\mu + \frac{(gv)^2}{8}B_\mu^3B^{\mu,3} = \\ & = \frac{v^2}{8} \begin{pmatrix} B_\mu^3 & Y_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & (g')^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu^3 \\ Y_\mu \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

Podemos diagonalizá-la por uma rotação de $SO(2)$ por um ângulo θ_W para obter os autoestados de massa e que portanto serão os estados físicos (observáveis) dos modos neutros.

$$\begin{pmatrix} \cos \theta_W & -\sin \theta_W \\ \sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & (g')^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^2 + g'^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.4.11)$$

Os autoestados de massa (físicos) resultantes são:

$$\begin{aligned} Z_\mu &= \cos \theta_W B_\mu^3 - \sin \theta_W Y_\mu \\ A_\mu &= \sin \theta_W B_\mu^3 + \cos \theta_W Y_\mu \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

Onde a massa do campo Z_μ é $M_Z^2 = \frac{v^2}{8}(g^2 + (g')^2)$, o campo A_μ possui massa nula. Os quantas dos dois campos são, respectivamente, o bóson Z e o fóton. Da diagonalização das massas obtemos o valor de θ_W , também conhecido como weak angle ou ângulo de Weinberg:

$$\tan(\theta_W) = \frac{g'}{g} \quad (2.4.13)$$

Experimentalmente, mede-se $\sin^2(\theta_W) \simeq 0,23$. Da Lagrangiana do Higgs, também podemos obter as massas dos bósons eletricamente carregados:

$$W_\mu^{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(B_\mu^1 \mp iB_\mu^2), \quad W_\mu^{(-)} = (W_\mu^{(+)})^* \quad (2.4.14)$$

A massa M_W^2 desses modos é dada por:

$$\frac{(gv)^2}{8}(B_\mu^1 B_\mu^1 + B_\mu^2 B_\mu^2) = \frac{(gv)^2}{4}W^{\mu(+)}W_\mu^{(-)} \Rightarrow M_W^2 = \frac{(gv)^2}{4} \quad (2.4.15)$$

O ângulo de Weinberg também pode então ser obtido pelas massas dos campos Z e W:

$$\frac{M_W}{M_Z} = \cos \theta_W \quad (2.4.16)$$

Ao realizarmos a mudança de base na Lagrangiana para os campos físicos (autoestados de massa), obtemos a Lagrangiana dos bósons $\mathcal{L}_{\text{bósons}}$ como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{bósons}} = & -\frac{1}{2}(D_\mu W_\nu^{(+)} - D_\nu W_\mu^{(+)})(D^\mu W^{\nu(-)} - D^\nu W^{\mu(-)}) + \\ & \frac{1}{2}M_W^2 W_\mu^{(+)}W^{\mu(-)} + \frac{1}{4}Z_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}M_Z^2 Z_\mu Z^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 \\ & - i(g \sin \theta_W)W^{\mu(+)}W^{\nu(-)}F_{\mu\nu} - i(g \cos \theta_W)W^{\mu(+)}W^{\nu(-)}Z_{\mu\nu} \\ & + \frac{1}{2}g^2 W^{\mu(+)}W_\mu^{(+)}W^{\nu(-)}W_\nu^{(-)} - \frac{1}{2}g^2 W^{\mu(+)}W_\mu^{(-)}W^{\nu(+)}W_\nu^{(-)} \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

Onde $Z_{\mu\nu} = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu$ e $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, isto é, o último é o tensor de Faraday. Assim identificamos a carga eletromagnética fundamental como $e \equiv g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W$ a partir do acoplamento entre os bósons W com o campo eletromagnético. Podemos também identificar um acoplamento fraco $g_W = g \cos \theta_W$.

2.5 Quarks

Há 3 famílias de quarks, cada uma formando uma representação da simetria Eletrofraca, denotaremos os dubletos levógiros da seguinte forma:

$$\underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix} \right\}}_{\text{levógiros, dubletos de } SU_L(2)} \simeq \begin{pmatrix} p_L \\ n_L \end{pmatrix} \equiv q_L \quad (2.5.1)$$

Enquanto que denotaremos os singletos levógiros correspondentes como p_R e n_R . As letras u , c , t , d , s e b referem-se, respectivamente, aos quarks up, charm, top, down, strange e bottom. Sabe-se que a carga eletromagnética dos quarks p é $Q(p) = 2/3$, enquanto que $Q(n) = -1/3$. Usando a fórmula de Gell-Mann-Nishijima, obtemos então as hipercargas dos quarks como:

$$\begin{aligned} y(p_L) &= y(n_L) = 1/3 \\ y(p_R) &= 4/3 \\ y(n_R) &= -2/3 \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

Entretanto essa definição dos quarks apresenta um problema na geração de suas massas que não ocorria no caso dos léptons: a massa dos quarks de isospin fraco $+1/2$ torna-se nula ao usarmos a configuração do Higgs no calibre unitário, com efeito:

$$\bar{q}_L p_R \Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \bar{p}_L & \bar{n}_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H \end{pmatrix} p_R = 0 \quad (2.5.3)$$

Entretanto sabemos que as massas dos quarks up, charm e top não são nulas. No caso dos léptons, a componente de isospin fraco $+1/2$ era o neutrino, cuja massa não é gerada pelo mecanismo de Higgs, o que naquele caso evita esse problema.

A correção para a massa dos quarks de isospin $+1/2$ vem da representação complexo conjugada do campo de Higgs no calibre unitário. Seja R uma representação que transforma-se por geradores G_a :

$$\Phi' = e^{i\omega^a G_a} \Phi, \quad \Phi, \Phi' \in R \quad (2.5.4)$$

A transformação complexo conjugada R^* é definida por:

$$\Phi'^* = e^{-i\omega^a G_a^*} \Phi^*, \quad \Phi^*, \Phi'^* \in R^* \quad (2.5.5)$$

Dizemos que R é representação unitária se $G_a^\dagger = G_a \Leftrightarrow G_a^* = (G_a)^T$. A representação complexo conjugada satisfaz a mesma álgebra de Lie que a representação original. Além disso, existe a possibilidade de uma representação ser auto-conjugada (também conhecida como representação real), onde $R^* = R$ (por exemplo, toda representação adjunta satisfaz esse caso), é inclusive por isso que todas as componentes A_μ^a de um campo de calibre são números reais. Mesmo que os campos W^+ e W^- sejam carregados, e portanto são campos complexos, eles são diferentes componentes de um único gerador de simetria, e são as componentes do gerador que absorvem a parte imaginária desses campos, de forma que a carga é codificada no gerador do grupo em si.

Na representação auto-conjugada, temos então

$$R^* = R \Rightarrow e^{-i\omega^a G_a^*} = e^{i\omega^a G_a} \Rightarrow -G_a^T \text{ satisfaz a mesma álgebra} \quad (2.5.6)$$

Como as matrizes de Pauli são hermitianas/autoadjuntas e são geradores das representações em questão, então as últimas são auto-adjuntas. Isso significa que Φ^* e Φ são equivalentes sob alguma transformação de calibre de $SU_L(2)$. Precisamos descobrir qual transformação de similaridade S mapeia os geradores da primeira na segunda, isto é:

$$\begin{aligned} \exists S \Phi^* \in R &\Rightarrow S(-\sigma_a^T)S^{-1} = \sigma_a \Rightarrow S\sigma_a^T = -\sigma_a S \\ e^{i\omega^a S(-G_a^T)S^{-1}} S \Phi^* &= S e^{i\omega^a (-G_a^T)} S^{-1} S \Phi^* = S e^{i\omega^a (-G_a^T)} \Phi^* \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

Como $\sigma_1^T = \sigma_1$ e $\sigma_3^T = \sigma_3$, S anticomuta com esses geradores. Em contrapartida S comuta com $\sigma_2 \Rightarrow S \propto \sigma_2$. Outra maneira de pensarmos isso vem do fato de $\sigma_2 = -\sigma_2^T$, assim satisfazendo a condição de um gerador de uma álgebra auto-conjugada.

Para manter o vácuo de Higgs eletricamente neutro (para que se satisfaça conservação de cargas) em sua representação complexo-conjugada, S é uma matriz de entradas reais, além disso, exigimos que S seja unitária para preservar a norma dos campos, assim obtemos $S = i\sigma_2 = C$ (operador de conjugação de carga) e portanto:

$$i\sigma_2 \Phi^*|_{\text{vácuo}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v^* \\ 0 \end{pmatrix} \in R \quad (2.5.8)$$

No calibre unitário, temos analogamente $\Phi^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v + H \\ 0 \end{pmatrix}$.

Em geral, temos

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^{(+)} \\ \phi^{(0)} \end{pmatrix} \Rightarrow S\Phi^* = \begin{pmatrix} \phi^{(0)*} \\ -\phi^{(+)*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^{(0)*} \\ -\phi^{(-)} \end{pmatrix} \equiv \Phi^c \quad (2.5.9)$$

Onde Φ^c é o Higgs conjugado de carga.

Portanto no calibre unitário no vácuo, os quarks adquirem massa via o mecanismo de Higgs da forma:

$$\begin{aligned} (y_n)^{ij} \bar{q}_{L,i} \Phi n_{R,j} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (y_n)^{ij} v \bar{n}_{L,i} n_{R,j} \\ (y_p)^{ij} \bar{q}_{L,i} \Phi^c p_{R,j} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (y_p)^{ij} v \bar{p}_{L,i} p_{R,j} \end{aligned} \quad (2.5.10)$$

Onde $i,j=1,2,3$ indexam as gerações de quarks.

2.5.1 Matriz CKM e Violação de CP

As matrizes de acoplamento y_n e y_p não são necessariamente diagonais. De fato, experimentalmente constata-se a não conservação de estranheza nas interações eletrofracas entre os quarks de isospin fraco down. Para resolver isso, Cabibbo propôs um mixing entre os quarks d e s [Cabibbo 1963], de forma que os quarks físicos, que por definição são autoestados de massa, não são autoestados de calibre (como ocorre analogamente entre os campos B_μ^3 e Y_μ com os campos Z_μ e A_μ).

Cabibbo introduziu uma rotação por um ângulo θ_c , denominado ângulo de Cabibbo, onde

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} u \\ d \cos \theta_c + s \sin \theta_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ d_f \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} c \\ s \cos \theta_c - d \sin \theta_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ s_f \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} d_f \\ s_f \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.5.11)$$

Onde d_f e s_f são os quarks down e strange físicos. Como o quark strange é bem mais pesado que o quark down, para que haja supressão de estranheza, o ângulo θ_c é pequeno, experimentalmente obtêm-se $\theta_c \simeq 13,02^\circ$. Os quarks físicos diagonalizam os acoplamentos y_p e y_n .

Interações como a Higgs-quarks misturam diferentes quiralidades, diferentemente de interações tipo calibre-férmions. Portanto existem correntes resultantes de termos na Lagrangiana do tipo $\bar{p}_{L,i} \gamma^\mu n_{L,i} W_\mu$. Entretanto aqui, $\bar{p}_{L,i}$ e $n_{L,i}$ são autoestados de calibre e não quarks físicos. Assim nos é de interesse escrever esta interação em termos dos quarks físicos.

Vamos usar o Teorema das Transformações biunitárias para diagonalizar as matrizes y_p e y_n , onde:

$$\begin{aligned} y_p &= P_p (y_p)_{\text{diag}} Q_p \\ y_n &= P_n (y_n)_{\text{diag}} Q_n \end{aligned} \quad (2.5.12)$$

Onde $(y_p)_{\text{diag}}$ e $(y_n)_{\text{diag}}$ são matrizes diagonais reais e P_p, P_n, Q_p, Q_n são matrizes unitárias.

Da equação anterior, obtemos a base de autoestados de y_p como:

$$Q_p p_R = p_{R,f} \quad Q_n n_R = n_{R,f} \quad (2.5.13)$$

$$P_p^\dagger p_L = p_{L,f} \quad P_n^\dagger n_L = n_{L,f} \quad (2.5.14)$$

Novamente o subíndice f denota os autoestados físicos (de massa). As mudanças de base nos setores left e right são independentes entre si. Portanto temos, novamente, para i, j como índices de geração de quark:

$$\bar{p}_{L,i} \gamma^\mu n_{L,j} W_\mu = \bar{p}_{L,i,f} \gamma^\mu \underbrace{(P_p Q_n)_{ij}}_{(K_{CKM})_{ij}} n_{L,j,f} W_\mu \quad (2.5.15)$$

Onde K_{CKM} é a Matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa também conhecida como Matriz CKM [Kobayashi e Maskawa 1973]. Ela é uma matriz unitária por ser o produto de duas matrizes unitárias. Para uma quantidade m de sabores, a matriz gira os autoestados de calibre nos autoestados físicos.

A Matriz CKM generaliza a matriz de rotação introduzida por Cabibbo para uma quantidade arbitrária de sabores e portanto atua também sobre pelo menos uma terceira geração de quarks. A necessidade de sua introdução resulta da violação de CP na interação fraca. A violação de CP nas interações fracas foi descoberta através de observações de decaimento de kaons neutros, feita por Cronin e Fitch [Christenson et al. 1964].

Para que uma interação viole CP, ela precisa apresentar ao menos um acoplamento complexo. A matriz CKM, enquanto matriz unitária $m \times m$ possui álgebra de Lie hermitiana, os geradores podem ser decompostos em geradores reais simétricos e geradores imaginários antissimétricos. Os geradores reais podem ser então diagonalizados e os parâmetros associados podem ser interpretados como fases, que podem ou não ser incorporadas nos quarks através de uma redefinição (como veremos adiante). Os geradores imaginários são elementos de uma álgebra de rotações $SO(m)$ e portanto seus parâmetros reais podem ser interpretados como ângulos.

De maneira geral há portanto $m(m+1)/2$ fases reais e $m(m-1)/2$ ângulos reais.

Usando os índices anteriormente usados para nos referir aos sabores de quarks dos autoestados de calibre, identificamos os elementos de K_{CKM} como:

$$K_{CKM} = \begin{pmatrix} K_{ud} & K_{us} & K_{ub} \\ K_{cd} & K_{cs} & K_{cb} \\ K_{td} & K_{ts} & K_{tb} \end{pmatrix} \quad (2.5.16)$$

Onde, em boa aproximação, $K_{us} \simeq \sin^2 \theta_c \simeq 0,22$, isto é, o acoplamento entre quark up e bottom em algumas situações pode ser considerado desprezível (porém não é nulo). Os elementos K_{ij} são basicamente o mixing entre os autoestados físicos relativos aos autoestados de sabor. Por exemplo, o dubleto up-down de calibre é mapeado no dubleto físico da forma:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \xrightarrow{K_{CKM}} \begin{pmatrix} u \\ K_{ud}d + K_{us}s + K_{ub}b \end{pmatrix} \quad (2.5.17)$$

Para $m = 2$, há 3 fases e 1 parâmetro angular, as 3 fases podem ser incorporadas pelos quarks redefinindo-os como, por exemplo, via a refasagem:

$$\begin{aligned} p_{L,i} &\mapsto e^{i\theta_i^p} p_{L,i} \\ n_{L,i} &\mapsto e^{i\theta_i^n} n_{L,i} \end{aligned} \quad (2.5.18)$$

Essa absorção vai mapear um elemento da matriz CKM como:

$$(K_{CKM})_{ij} \mapsto (K_{CKM})_{ij} e^{i(\theta_i^p - \theta_j^n)} \quad (2.5.19)$$

Para $N_f = 2m$ sabores de quark, há, naturalmente $2m$ refasagens possíveis, entretanto como uma refasagem global na matriz CKM não altera sua física, a refasagem é capaz de absorver até $2m - 1$ fases. Para $m = 3$ gerações de quarks, há 6 fases, das quais 5 podem ser absorvidas restando uma fase. Portanto $m \geq 3$ é a condição para violação de CP.

Existem diferentes representações da matriz CKM, uma delas é a representação de Kobayashi-Maskawa, que consiste numa composição de 3 rotações Eulerianas com uma matriz de fase:

$$\begin{aligned} K_{CKM} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ 0 & \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \\ &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{i\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_3 & \sin \theta_3 \\ 0 & -\sin \theta_3 & \cos \theta_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.5.20)$$

No limite $\theta_1 = \theta_3 = 0$, a matriz CKM reduz-se à matriz de Cabibbo, misturando apenas os quarks das duas primeira gerações (up, down, strange e charm).

Agora vimos o suficiente sobre o Modelo Padrão para abordarmos o tema principal desta dissertação: a Extensão do Modelo Padrão de Lee-Wick (que por conveniência aqui será chamado de "Modelo Padrão de Lee-Wick"). Conforme mencionado na introdução, cada campo do Modelo Padrão apresentará uma lagrangiana de ordem superior. Essa lagrangiana será equivalente a uma teoria de derivadas de ordem "normal", entretanto apresentando uma excitação fantasma massiva conforme apresentado na introdução. Começaremos com o modelo mais simples e depois apresentaremos modelos mais próximos do Modelo Padrão para finalmente apresentar o Modelo Padrão estendido. Nesta tese serão abordadas lagrangianas de ordem até 4 nas derivadas.

3 Capítulo 3 - O Modelo Padrão de Lee-Wick

3.1 Modelo de Brinquedo

3.1.1 Campo Escalar

Seja ϕ campo escalar não carregado, de Lagrangiana de ordem superior $\mathcal{L}_{h.d.}$ dada por:

$$\mathcal{L}_{h.d.} = \frac{1}{2}\partial_\mu\hat{\phi}\partial^\mu\hat{\phi} - \frac{1}{2M^2}(\square\hat{\phi})^2 - \frac{1}{2}m^2\hat{\phi}^2 - \frac{1}{3!}g\hat{\phi}^3 \quad (3.1.1)$$

Onde M é a massa do modo de Lee-Wick. Vamos obter as equações de movimento:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}_{h.d.}}{\partial\hat{\phi}} &= -m^2\hat{\phi} - \frac{1}{2}g\hat{\phi}^2 \\ \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}_{h.d.}}{\partial(\partial_\mu\hat{\phi})}\right) &= \partial_\mu(\partial^\mu\hat{\phi} - \frac{1}{M^2}\partial^\mu\hat{\phi}\square\hat{\phi}) = \square\hat{\phi} - \frac{1}{M^2}(\square\hat{\phi})^2 \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Assim a equação de movimento é:

$$-m^2\hat{\phi} - \frac{1}{2}g\hat{\phi}^2 - \square\hat{\phi} + \frac{1}{M^2}(\square\hat{\phi})^2 = 0 \quad (3.1.3)$$

Portanto obtemos o propagador livre da teoria como

$$D(p) = \frac{i}{p^2 - p^4/M^2 - m^2} \quad (3.1.4)$$

Para $M \gg m$ os pólos encontram-se em torno de $p^2 \simeq m^2$ e $p^2 \simeq M^2$. Assim o propagador apresenta mais um grau de liberdade.

É possível decompor o campo $\hat{\phi}$ nos dois modos (o ordinário e o de Lee-Wick) pela introdução de um campo auxiliar $\tilde{\phi}$ à partir da seguinte lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\hat{\phi}\partial^\mu\hat{\phi} - \tilde{\phi}\square\hat{\phi} - \frac{1}{2}m^2\hat{\phi}^2 + \frac{1}{2}M^2\tilde{\phi}^2 - \frac{1}{3!}g\hat{\phi}^3 \quad (3.1.5)$$

Seja $\phi = \hat{\phi} + \tilde{\phi}$, vamos agora demonstrar que essa lagrangiana é equivalente à $\mathcal{L}_{h.d.}$.

Primeiramente vamos obter as equações de movimento para $\tilde{\phi}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\tilde{\phi}} &= -\square\hat{\phi} + M^2\tilde{\phi} \\ \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\tilde{\phi})}\right) &= 0 \Rightarrow M^2\tilde{\phi} = \square\hat{\phi} \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Logo faremos as seguinte substituições em \mathcal{L} :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}M^2\tilde{\phi}^2 &= \frac{1}{2M^2}(\square\hat{\phi})^2 \\ \tilde{\phi}\square\hat{\phi} &= \frac{1}{M^2}(\square\hat{\phi})^2\end{aligned}\quad (3.1.7)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\hat{\phi}\partial^\mu\hat{\phi} - \frac{1}{M^2}(\square\hat{\phi})^2 - \frac{1}{2}m^2\hat{\phi}^2 + \frac{1}{2M^2}(\square\hat{\phi})^2 - \frac{1}{3!}g\hat{\phi}^3 = \mathcal{L}_{h.d} \quad (3.1.8)$$

Agora definimos $\phi \equiv \hat{\phi} + \tilde{\phi}$ e, integrando por partes, temos:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}\partial_\mu\tilde{\phi}\partial^\mu\tilde{\phi} - \frac{1}{2}m^2(\phi - \tilde{\phi})^2 + \frac{1}{2}M^2\tilde{\phi}^2 - \frac{1}{3!}g(\phi - \tilde{\phi})^3 \quad (3.1.9)$$

A Lagrangiana resultante então apresenta dois modos, um escalar ordinário ϕ e um de Lee-Wick $\tilde{\phi}$. A parte quadrática do modo de Lee-Wick possui sinal negativo, sendo portanto um fantasma, se desprezamos m , o propagador livre resultante é o propagador de $\tilde{\phi}$, que é:

$$\tilde{D}(p) = \frac{-i}{p^2 - M^2} \quad (3.1.10)$$

Para $M > 2m$, um modo de Lee-Wick decai espontaneamente em dois modos ordinários nessa teoria, sendo assim consistente com o requerimento de unitariedade à Matriz S, feito por Lee e Wick. A seguir, mostraremos que essa condição será automaticamente satisfeita ao diagonalizarmos as massas dado que ocorre uma mistura de massas. Essa mistura é o bilinear simétrico:

$$\frac{1}{2}M^2\tilde{\phi}^2 - \frac{1}{2}m^2(\phi - \tilde{\phi})^2 = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \phi & \tilde{\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m^2 & -m^2 \\ -m^2 & m^2 - M^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \tilde{\phi} \end{pmatrix} \quad (3.1.11)$$

Os autovalores são $\lambda_\pm = \frac{1}{2}[2m^2 - M^2 \pm \sqrt{4m^4 + M^4}]$. A transformação que irá diagonalizar a matriz de massa sem misturar as derivadas na lagrangiana é uma rotação hiperbólica.

$$\begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m^2 & -m^2 \\ -m^2 & m^2 - M^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_- & 0 \\ 0 & \lambda_+ \end{pmatrix} \quad (3.1.12)$$

O que ocorre para

$$\tanh 2\theta = \frac{-2m^2/M^2}{1 - 2m^2/M^2} \quad (3.1.13)$$

Usando

$$\operatorname{arctanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad |x| < 1 \Rightarrow \theta = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{M^2 - 4m^2}{M^2}\right) \quad (3.1.14)$$

Logo, a solução de θ existe para $M > 2m$, provando assim o decaimento da partícula Lee-Wick desde que ela interaja com a partícula ordinária, a mesma lógica também se aplica ao oscilador de Pais-Uhlenbeck mencionado na introdução. A Lagrangiana diagonalizada torna-se:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\partial_\mu\phi'\partial^\mu\phi' - \frac{1}{2}\partial_\mu\tilde{\phi}'\partial^\mu\tilde{\phi}' - \frac{1}{2}m'^2\phi'^2 + \frac{1}{2}M'^2\tilde{\phi}'^2 \\ &\quad - \frac{1}{3!}\underbrace{(\cosh \theta - \sinh \theta)}_{\equiv g'}g(\phi' - \tilde{\phi}')^3\end{aligned}\quad (3.1.15)$$

Essa lagrangiana é mais intuitiva e mais conveniente para cálculos. Os quantas ϕ' são os modos ordinários do campo original enquanto que os modos $\tilde{\phi}'$ são os modos de Lee-Wick. Sem perda de generalidade, podemos remover as linhas dos campos e demais parâmetros diagonalizados da teoria e trabalhar na base de autoestados de massa.

Desprezando a massa m , vamos calcular a correção de loops do propagador do modo de Lee-Wick para obtenção de sua largura de decaimento:

$$\tilde{D}(p) = \frac{-i}{p^2 - M^2} + \frac{-i}{p^2 - M^2} (-i\Sigma_2(p^2)) \frac{-i}{p^2 - M^2} + \dots = \frac{-i}{p^2 - M^2 + \Sigma(p^2)} \quad (3.1.16)$$

Isto é, no caso de partículas fantasma, como o modo de Lee-Wick, o sinal dos termos da série geométrica são alternados, e isso resulta na contribuição de massa da autoenergia ser com o sinal contrário (para partículas ordinárias teríamos $-\Sigma(p^2)$ no resultado da série). Isso significa que a parte imaginária da massa de uma ressonância tipo Lee-Wick tem o sinal oposto ao das partículas usuais.

Do Teorema Ótico, a parte imaginária de $\Sigma(p)$ estará relacionada à largura de decaimento Γ do modo de Lee-Wick através de:

$$\Gamma = \frac{-1}{M} \text{Im} \Sigma^2(M^2) \quad (3.1.17)$$

O sinal do tempo de decaimento é o oposto do que para partículas ordinárias pelo fato da contribuição da autoenergia do modo de Lee-Wick à sua massa ter o sinal contrário. Isso significa que a instabilidade do modo de Lee-Wick requer que ele siga uma seta de causalidade contrária à de partículas ordinárias, essa causalidade é melhor discutida no apêndice E. Caso contrário, o modo de Lee-Wick teria um "tempo de decaimento negativo", que acarretaria numa produção assintoticamente infinita dessas partículas.

Vamos agora obter as regras de Feynman. As Regras de Feynman das funções de vértice à tree-level da interação cúbica podem ser obtidas diretamente da ação usando-se (vide apêndice A):

$$\Gamma^{(3)} = i \frac{\delta^3 S}{\delta^3 \phi} \Big|_{\phi=0} + i \frac{\delta^3 S}{\delta^3 \tilde{\phi}} \Big|_{\tilde{\phi}=0} + i \frac{\delta^3 S}{\delta^2 \phi \delta \tilde{\phi}} \Big|_{\phi, \tilde{\phi}=0} + i \frac{\delta^3 S}{\delta^2 \tilde{\phi} \delta \phi} \Big|_{\phi, \tilde{\phi}=0} \quad (3.1.18)$$

Cada uma dessas derivadas funcionais será uma função de vértice.

$$\frac{\delta^3 S}{\delta^3 \phi} = \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \text{---} = -ig \quad (3.1.19)$$

$$\frac{\delta^3 S}{\delta^3 \tilde{\phi}} = \begin{array}{c} \cdots \\ \cdots \end{array} \text{---} = ig \quad (3.1.20)$$

$$\frac{\delta^3 S}{\delta^2 \phi \delta \tilde{\phi}} = \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \cdots = ig \quad (3.1.21)$$

$$\frac{\delta^3 S}{\delta^2 \tilde{\phi} \delta \phi} = \text{---} \text{---} \text{---} = -ig \quad (3.1.22)$$

A partir disso, podemos calcular a taxa de decaimento da partícula LW (Lee-Wick), do Teorema Ótico, haverá apenas contribuição de loop: o loop do campo ordinário ($\Sigma_2(p)|_{\text{ordinario}}$):

$$\begin{aligned} -i\Sigma_2(p)|_{\text{ordinario}} &= \text{---} \text{---} \text{---} = \\ &= \frac{(ig)^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{(k-p)^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} = \\ &= \frac{i}{(4\pi)^2} (ig)^2 \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln(4\pi) - \int_0^1 dx \ln \left(\frac{m^2 - p^2 x(1-x)}{\mu^2} \right) \right) + \mathcal{O}(\epsilon) \end{aligned} \quad (3.1.23)$$

O fator 1/2 aparece devido à simetria de permutação entre as partículas do loop.

A autoenergia à 1 loop então será:

$$\begin{aligned} \Sigma_2(p)|_{\text{ordinario}} &= \\ &= -\frac{g^2}{16\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi - \frac{1}{2} \int_0^1 dx \left[\ln \left(\frac{m^2 - p^2 x(1-x)}{\mu^2} \right) \right] \right) + \mathcal{O}(\epsilon) \end{aligned} \quad (3.1.24)$$

Isto é, identificamos a renormalização no Minimal Subtraction Scheme (MS) como:

$$Z^{(MS)} = 1 - \frac{g^2}{16\pi^2} \frac{1}{\epsilon} \quad (3.1.25)$$

Apenas o logaritmo na expressão encontrada para $\Sigma_2(p)|_{\text{ordinario}}$ poderá contribuir com uma parte imaginária se $m^2 - p^2 x(1-x) < 0$. Como $x(1-x) < 1/4$, então haverá parte imaginária para $p^2 > 4m^2$.

Aplicando o Teorema Ótico, a largura de decaimento Γ da partícula LW é:

$$\Gamma = \frac{-1}{M} \text{Im}(\Sigma_2(M)) \quad (3.1.26)$$

Para $M > 2m$, temos $1 > \frac{4m^2}{M^2}$ e usando $\ln(-A - i\epsilon) = \ln A - i\pi\Theta(A)$, temos

$$\begin{aligned} \text{Im} \left(\int_0^1 dx \ln \left(\frac{m^2 - p^2 x(1-x)}{\mu^2} \right) \Big|_{p^2=M^2} \right) &= \pi \int_0^1 dx \Theta(M^2 x(1-x) - m^2) \\ &= \pi \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}} \Theta(M - 2m) \end{aligned} \quad (3.1.27)$$

Onde Θ é a função degrau de Heaviside. Assim obtemos a largura como:

$$\Gamma = -\frac{g^2}{32\pi M} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}} \quad (3.1.28)$$

Próximo de $p^2 = M^2$, o pólo da partícula LW domina a amplitude de espalhamento, e temos, para o forward scattering de $\phi\phi$:

$$\begin{aligned} \text{Im } \mathcal{M} &= (ig)^2 \frac{1}{2i} \left(\frac{-1}{p^2 - m^2 + iM\Gamma} - \frac{-1}{p^2 - m^2 - iM\Gamma} \right) = \\ &= -g^2 \frac{M\Gamma}{(p^2 - M^2)^2 + M^2\Gamma^2} \end{aligned} \quad (3.1.29)$$

O sinal do propagador compensa o sinal da largura de decaimento na Distribuição de Breit-Wigner, de forma que a parte imaginária da amplitude seja positiva. Do Teorema Ótico aplicado ao Forward Scattering [Schwartz 2013], temos:

$$\text{Im}(\mathcal{M}(k_1 k_2 \rightarrow k_1 k_2)) = 2p_{CM} E_{CM} \sigma_{tot}(k_1 k_2 \rightarrow \text{qualquer coisa}) > 0 \quad (3.1.30)$$

Onde $\mathcal{M}(k_1 k_2 \rightarrow k_1 k_2)$ é a amplitude invariante de Lorentz do Forward Scattering, de 2 partículas com momenta k_1 e k_2 , p_{CM} e E_{CM} são, respectivamente o momenta e energia no centro de massa das partículas envolvidas e σ_{tot} é a seção de choque total do espalhamento. Como o Teorema Ótico resulta da unitariedade da Matriz S, tal propriedade é satisfeita apenas se $\text{Im } \mathcal{M} > 0$, portanto essa teoria possui unitariedade à um loop.

3.2 O Modelo Padrão de Lee-Wick

Neste seção, apresentamos e discutiremos o Modelo apresentado em [Grinstein, O'Connell e Wise 2008], que é o artigo central desta dissertação.

3.2.1 Campos de Calibre

A Lagrangiana de derivadas superiores dos campos de calibre é definida como:

$$\mathcal{L}_{hd} = -\frac{1}{2} \text{Tr}(\hat{F}_{\mu\nu} \hat{F}^{\mu\nu}) + \frac{1}{M_A^2} \text{Tr}((\hat{D}^\mu \hat{F}_{\mu\nu})(\hat{D}^\lambda \hat{F}_\lambda^\nu)) \quad (3.2.1)$$

Onde $\hat{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu - ig[\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu]$ e $\hat{D}_\mu \tilde{A}_\nu = \partial_\mu \tilde{A}_\nu - ig[\hat{A}_\mu, \tilde{A}_\nu]$. O traço é tomado sobre os índices dos geradores do grupo de calibre, isto é, $\text{Tr}(A_\mu A^\mu) = A_\mu^a A_a^\mu$, com $A_\mu = A_\mu^a T_a$, onde T_a é o gerador do grupo de calibre. Cada bóson é descrito pela Lagrangiana intermediária:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \text{Tr} \hat{F}_{\mu\nu} \hat{F}^{\mu\nu} - M_A^2 \text{Tr}(\tilde{A}_\mu \tilde{A}^\mu) + 2 \text{Tr}(\hat{F}_{\mu\nu} \hat{D}^\mu \tilde{A}^\nu) \quad (3.2.2)$$

Primeiramente, vamos provar a equivalência das duas lagrangianas a menos de termos de superfície, isto é, que:

$$\frac{1}{M_A^2} \text{Tr}((\hat{D}^\mu \hat{F}_{\mu\nu})(\hat{D}^\lambda \hat{F}_\lambda^\nu)) = -M_A^2 \text{Tr}(\tilde{A}_\mu \tilde{A}^\mu) + 2 \text{Tr}(\hat{F}_{\mu\nu} \hat{D}^\mu \tilde{A}^\nu) \quad (3.2.3)$$

Como a derivada covariante de calibre satisfaz a Regra de Leibniz temos por partes:

$$\hat{F}_{\mu\nu} \hat{D}^\mu \tilde{A}^\nu = \underbrace{\hat{D}^\mu (\hat{F}_{\mu\nu} \tilde{A}^\nu)}_{\text{superf.}} - (\hat{D}^\mu \hat{F}_{\mu\nu}) \tilde{A}^\nu \quad (3.2.4)$$

Logo

$$\begin{aligned}
& -M_A^2 \text{Tr}(\tilde{A}_\mu \tilde{A}^\mu) + 2 \text{Tr}(\hat{F}_{\mu\nu} \hat{D}^\mu \tilde{A}^\nu) \simeq -M_A^2 \text{Tr}(\tilde{A}_\mu \tilde{A}^\mu) - 2 \text{Tr}((\hat{D}^\mu \hat{F}_{\mu\nu}) \tilde{A}^\nu) \\
& = \text{Tr}((-M_A^2 \tilde{A}^\mu \eta_{\mu\nu} - 2 \hat{D}^\mu \hat{F}_{\mu\nu}) \tilde{A}^\nu)
\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}_{hd}}{\partial \tilde{A}_\rho} &= \text{Tr}(-2M_A \tilde{A}^\rho - 2 \hat{D}_\mu \hat{F}^{\mu\rho}), \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{hd}}{\partial (\partial_\sigma \tilde{A}_\rho)} = 0 \\
\Rightarrow 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}_{hd}}{\partial \tilde{A}_\rho} = \text{Tr}(-2M_A \tilde{A}^\rho - 2 \hat{D}_\mu \hat{F}^{\mu\rho})
\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

Como $A_\mu = A_\mu^a T_a$, onde T_a é gerador da representação fundamental, temos $\text{Tr}(A_\mu) = \text{Tr}(A_\mu^a T_a) = A_\mu^a \text{Tr}(T_a) = 0, \forall A_\mu^a$. Enquanto que $\text{Tr}([A, B]) = 0, \forall A, B$ devido à ciclicidade do traço. Logo trivialmente temos $0 = \text{Tr}(-2M_A \tilde{A}^\rho - 2 \hat{D}_\mu \hat{F}^{\mu\rho})$. Entretanto a solução alternativamente não trivial é quando o argumento do traço é nulo, isto é, quando:

$$\begin{aligned}
0 &= -2M_A \tilde{A}^\rho - 2 \hat{D}_\mu \hat{F}^{\mu\rho} \\
\Rightarrow \tilde{A}^\rho &= \frac{-1}{M_A^2} \hat{D}_\mu \hat{F}^{\mu\rho} \\
\Rightarrow \begin{cases} -M_A^2 \text{Tr}(\tilde{A}_\mu \tilde{A}^\mu) = \frac{-1}{M_A^2} \text{Tr}((\hat{D}_\mu \hat{F}^{\mu\nu})(\hat{D}^\lambda \hat{F}_{\lambda\nu})) \\ -2 \text{Tr}((\hat{D}_\mu \hat{F}^{\mu\nu}) \tilde{A}^\nu) = \frac{2}{M_A^2} \text{Tr}((\hat{D}_\mu \hat{F}^{\mu\nu})(\hat{D}^\lambda \hat{F}_{\lambda\nu})) \end{cases} & \tag{3.2.7} \\
\frac{1}{M_A^2} \text{Tr}((\hat{D}^\mu \hat{F}_{\mu\nu})(\hat{D}^\lambda \hat{F}_{\lambda}{}^\nu)) &= -M_A^2 \text{Tr}(\tilde{A}_\mu \tilde{A}^\mu) + 2 \text{Tr}(\hat{F}_{\mu\nu} \hat{D}^\mu \tilde{A}^\nu)
\end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

Portanto provamos que uma lagrangiana de calibre com derivadas de ordem superior é equivalente à uma lagrangiana intermediária com um campo auxiliar dada por (reescrevendo):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \text{Tr} \hat{F}_{\mu\nu} \hat{F}^{\mu\nu} - M_A^2 \text{Tr}(\tilde{A}_\mu \tilde{A}^\mu) + 2 \text{Tr}(\hat{F}_{\mu\nu} \hat{D}^\mu \tilde{A}^\nu) \tag{3.2.8}$$

O último termo de \mathcal{L} é um termo cinético não diagonalizado (é análogo ao termo $\tilde{\phi} \square \phi$ do caso anterior). Vamos diagonalizá-lo introduzindo o shift nos campos:

$$\hat{A}_\mu = A_\mu + \tilde{A}_\mu \tag{3.2.9}$$

Neste caso, temos

$$\hat{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} + D_\mu \tilde{A}_\nu - D_\nu \tilde{A}_\mu - ig[\tilde{A}_\mu, \tilde{A}_\nu] \tag{3.2.10}$$

E o termo cinético torna-se:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \text{Tr}\{\hat{F}_{\mu\nu}(\hat{F}^{\mu\nu} - 4\hat{D}^\mu \tilde{A}^\nu)\} = \\
& -\frac{1}{2} \text{Tr}\left\{F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu \tilde{A}_\nu - D_\nu \tilde{A}_\mu)(D^\mu \tilde{A}^\nu - D^\nu \tilde{A}^\mu) + F_{\mu\nu}(D^\mu \tilde{A}^\nu - D^\nu \tilde{A}^\mu) \right. \\
& + (D_\mu \tilde{A}_\nu - D_\nu \tilde{A}_\mu)F^{\mu\nu} - ig[\tilde{A}_\mu, \tilde{A}_\nu]F^{\mu\nu} - igF_{\mu\nu}[\tilde{A}_\mu, \tilde{A}_\nu] \\
& - ig[\tilde{A}_\mu, \tilde{A}_\nu](D^\mu \tilde{A}^\nu - D^\nu \tilde{A}^\mu) - ig(D_\mu \tilde{A}_\nu - D_\nu \tilde{A}_\mu)[\tilde{A}_\mu, \tilde{A}_\nu] \\
& - g^2[\tilde{A}_\mu, \tilde{A}_\nu][\tilde{A}_\mu, \tilde{A}_\nu] - 4\left(F_{\mu\nu}D^\mu \tilde{A}^\nu + (D_\mu \tilde{A}_\nu - D_\nu \tilde{A}_\mu)D^\mu \tilde{A}^\nu \right. \\
& \left. - ig[\tilde{A}_\mu, \tilde{A}_\nu]D^\mu \tilde{A}^\nu - g^2[\tilde{A}_\mu, \tilde{A}_\nu][\tilde{A}_\mu, \tilde{A}_\nu]\right\} \quad (3.2.11)
\end{aligned}$$

Da ciclicidade do traço, temos $\text{Tr}(F_{\mu\nu}[\tilde{A}_\mu, \tilde{A}_\nu]) = \text{Tr}([\tilde{A}_\mu, \tilde{A}_\nu]F_{\mu\nu})$. Além disso, temos

$$[\tilde{A}_\mu, \tilde{A}_\nu]D^\mu \tilde{A}^\nu = [\tilde{A}_\nu, \tilde{A}_\mu]D^\mu \tilde{A}^\nu \underbrace{=}_{\text{reindex.}} -[\tilde{A}_\mu, \tilde{A}_\nu]D^\nu \tilde{A}^\mu \quad (3.2.12)$$

Onde *reindex.* significa a reindexação de índices mudos. Logo, a lagrangiana resulta em

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = \text{Tr}\left\{ -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(D_\mu \tilde{A}_\nu - D_\nu \tilde{A}_\mu)(D^\mu \tilde{A}^\nu - D^\nu \tilde{A}^\mu) - ig[\tilde{A}_\mu, \tilde{A}_\nu]F^{\mu\nu} \right. \\
\left. - \frac{3}{2}g^2[\tilde{A}_\mu, \tilde{A}_\nu][\tilde{A}^\mu, \tilde{A}^\nu] - 4ig[\tilde{A}_\mu, \tilde{A}_\nu]D^\mu \tilde{A}^\nu - M_A^2 \tilde{A}_\mu \tilde{A}^\mu \right\} \quad (3.2.13)
\end{aligned}$$

Para um bóson de calibre de simetria U(1), todos os comutadores são nulos devido ao caráter abeliano do grupo e aparece um fator multiplicativo global de 1/2 necessário para reproduzir a Lagrangiana de Maxwell-Proca. Para bósons de calibre não abelianos, surge um fator adicional através do traço dos geradores normalizados, por exemplo para SU(3) as matrizes de Gell-Mann $T_a = \lambda_a$ satisfazem

$$\text{Tr}(\lambda_a \lambda_b) = 2\delta_{ab} \quad (3.2.14)$$

Normalizando a Forma de Killing, temos:

$$\text{Tr}(T_a T_b) = \text{Tr}\left(\frac{\lambda_a}{2} \frac{\lambda_b}{2}\right) = \frac{1}{2}\delta_{ab} \quad (3.2.15)$$

Assim, o fator global usual surge naturalmente da ortonormalização dos geradores de simetria.

Introduzindo a fixação de calibre $\frac{1}{2\xi} \text{Tr}(\partial_\mu A^\mu)^2$ em \mathcal{L} , os propagadores podem ser obtidos através dos operadores inversos da função de 2 pontos, dada por $\frac{\delta^2 S}{\delta A_\mu(x)\delta A_\mu(y)}|_{A_\mu=0}$. Observa-se que como os comutadores são quadráticos nos campos, seus termos de interação são cúbicos ou quárticos, enquanto que

$$\begin{aligned}
& \text{Tr}\left\{\frac{1}{2}(D_\mu \tilde{A}_\nu - D_\nu \tilde{A}_\mu)(D^\mu \tilde{A}^\nu - D^\nu \tilde{A}^\mu) - M_A^2 \tilde{A}_\mu \tilde{A}^\mu\right\} = \\
& = \text{Tr}\left\{\frac{1}{2}(\partial_\mu \tilde{A}_\nu - \partial_\nu \tilde{A}_\mu - ig[\tilde{A}_\mu, \tilde{A}_\nu] + ig[\tilde{A}_\nu, \tilde{A}_\mu]) \times \right. \\
& \left. (\partial^\mu \tilde{A}^\nu - \partial^\nu \tilde{A}^\mu - ig[\tilde{A}_\nu, \tilde{A}_\mu] + ig[\tilde{A}_\mu, \tilde{A}_\nu]) - M_A^2 \tilde{A}_\mu \tilde{A}^\mu\right\} \quad (3.2.16)
\end{aligned}$$

Novamente, os termos com comutadores serão cúbicos nos campos, os termos relevantes para a função de vértice $\Gamma^{(2)} = \tilde{D}_{\mu\nu}^{AB}(p)$ são apenas os termos de um campo de Proca usual com o sinal invertido. Os mesmos argumentos com os comutadores podem ser realizados para a partícula ordinária

Portanto, os propagadores são, usando a fixação de calibre para o campo sem massa:

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}^{AB}(p) &= -\delta^{AB} \frac{i}{p^2} \left(\eta_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \\ \tilde{D}_{\mu\nu}^{AB}(p) &= \delta^{AB} \frac{i}{p^2 - M_A^2} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{M_A^2} \right) \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

O propagador $\tilde{D}_{\mu\nu}^{AB}(p)$ descreve a propagação do campo de calibre de Lee-Wick, pelo seu sinal fica evidente que é um campo fantasma. Concluimos então que teorias de calibre de derivadas de ordem superior são equivalentes a teorias de calibre com fantasmas de Lee-Wick massivos.

É demonstrado em [Grinstein, O'Connell e Wise 2008] que amplitudes de espalhamento envolvendo bósons vetoriais massivos não abelianos satisfazem unitariedade se a teoria for equivalente a uma de operadores de dimensão 4 ou menor.

3.2.2 Matéria Escalar

A Lagrangiana de um campo escalar tipo Higgs $\hat{\phi}$ de ordem superior é dada por:

$$\mathcal{L}_{hd} = (\hat{D}_\mu \hat{\phi})^\dagger (\hat{D}^\mu \hat{\phi}) - \frac{1}{M_\phi^2} (\hat{D}_\mu \hat{D}^\mu \hat{\phi})^\dagger (\hat{D}_\nu \hat{D}^\nu \hat{\phi}) - V(\hat{\phi}) \quad (3.2.18)$$

Introduzindo o Campo LW $\tilde{\phi}$ com termos cinéticos mistos com o campo $\hat{\phi}$, temos:

$$\mathcal{L} = (\hat{D}_\mu \hat{\phi})^\dagger (\hat{D}^\mu \hat{\phi}) + M_\phi^2 \tilde{\phi}^\dagger \tilde{\phi} + (\hat{D}_\mu \hat{\phi})^\dagger (\hat{D}^\mu \tilde{\phi}) + (\hat{D}_\mu \tilde{\phi})^\dagger (\hat{D}^\mu \hat{\phi}) - V(\hat{\phi}) \quad (3.2.19)$$

Cuja derivada covariante é $\hat{D}_\mu = \partial_\mu + ig\hat{A}_\mu^a T_a$. Para mostrar que as duas lagrangianas são equivalentes à menos de termos de superfície, precisamos provar que

$$-\frac{1}{M_\phi^2} (\hat{D}_\mu \hat{D}^\mu \hat{\phi})^\dagger (\hat{D}_\nu \hat{D}^\nu \hat{\phi}) = M_\phi^2 \tilde{\phi}^\dagger \tilde{\phi} + (\hat{D}_\mu \hat{\phi})^\dagger (\hat{D}^\mu \tilde{\phi}) + (\hat{D}_\mu \tilde{\phi})^\dagger (\hat{D}^\mu \hat{\phi}) \quad (3.2.20)$$

Podemos integrar por partes a lagrangiana usando a relação

$$\partial_\mu (\phi^\dagger \phi) = (D_\mu \phi)^\dagger \phi + \phi^\dagger (D_\mu \phi), \quad \forall \phi, D_\mu \quad (3.2.21)$$

Onde D_μ é uma derivada covariante de calibre qualquer. Logo, por partes, temos:

$$\begin{aligned} M_\phi^2 \tilde{\phi}^\dagger \tilde{\phi} + (\hat{D}_\mu \hat{\phi})^\dagger (\hat{D}^\mu \tilde{\phi}) + (\hat{D}_\mu \tilde{\phi})^\dagger (\hat{D}^\mu \hat{\phi}) &\simeq \\ \simeq M_\phi^2 \tilde{\phi}^\dagger \tilde{\phi} - (\hat{D}_\mu \hat{D}^\mu \hat{\phi})^\dagger \tilde{\phi} - \tilde{\phi}^\dagger (\hat{D}_\mu \hat{D}^\mu \hat{\phi}) &= \mathcal{L}' \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

Logo, das equações de movimento de $\tilde{\phi}$ e $\tilde{\phi}^\dagger$, temos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho \tilde{\phi}^\dagger)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho \tilde{\phi})} = 0 \quad (3.2.23)$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{\phi}} = M_\phi^2 \tilde{\phi}^\dagger - (\hat{D}_\mu \hat{D}^\mu \hat{\phi})^\dagger \Rightarrow \tilde{\phi}^\dagger = \frac{1}{M_\phi^2} (\hat{D}_\mu \hat{D}^\mu \hat{\phi})^\dagger \quad (3.2.24)$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{\phi}^\dagger} = M_\phi^2 \tilde{\phi} - \hat{D}_\mu \hat{D}^\mu \hat{\phi} \Rightarrow \tilde{\phi} = \frac{1}{M_\phi^2} \hat{D}_\mu \hat{D}^\mu \hat{\phi} \quad (3.2.25)$$

Substituindo os valores obtidos de $\tilde{\phi}$ e $\tilde{\phi}^\dagger$ em \mathcal{L}' , temos:

$$\begin{aligned} & M_\phi^2 \tilde{\phi}^\dagger \tilde{\phi} - (\hat{D}_\mu \hat{D}^\mu \hat{\phi})^\dagger \tilde{\phi} - \tilde{\phi}^\dagger (\hat{D}_\mu \hat{D}^\mu \hat{\phi}) = \\ & = \frac{1}{M_\phi^2} (\hat{D}_\mu \hat{D}^\mu \hat{\phi})^\dagger (\hat{D}_\nu \hat{D}^\nu \hat{\phi}) - \frac{1}{M_\phi^2} (\hat{D}_\mu \hat{D}^\mu \hat{\phi})^\dagger (\hat{D}_\nu \hat{D}^\nu \hat{\phi}) \\ & - \frac{1}{M_\phi^2} (\hat{D}_\mu \hat{D}^\mu \hat{\phi})^\dagger (\hat{D}_\nu \hat{D}^\nu \hat{\phi}) = -\frac{1}{M_\phi^2} (\hat{D}_\mu \hat{D}^\mu \hat{\phi})^\dagger (\hat{D}_\nu \hat{D}^\nu \hat{\phi}) \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

O que prova que \mathcal{L} e \mathcal{L}_{hd} descrevem fisicamente o mesmo campo.

Introduzindo o shift $\hat{\phi} = \phi - \tilde{\phi}$, vamos diagonalizar a parte cinética de \mathcal{L} para obter os propagadores dos campos. Para esta finalidade podemos, por simplicidade, ignorar o potencial $V(\hat{\phi})$ no shift pois analogamente ao primeiro caso, o potencial $V(\phi, \tilde{\phi})$ em termos dos novos campos irá simplesmente absorver a diagonalização em seus parametros de acoplamento.

Como nos campos de calibre definimos $\hat{A}_\mu = A_\mu + \tilde{A}_\mu$, substituímos a derivada covariante $\hat{D}_\mu = D_\mu + ig\tilde{A}_\mu^a T_a$, pois os campos de calibre foram definidos tais que $\hat{A}_\mu = A_\mu + \tilde{A}_\mu$. Assim, a lagrangiana assume a forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \left[D_\mu(\phi - \tilde{\phi}) + ig\tilde{A}_\mu^a T_a(\phi - \tilde{\phi}) \right]^\dagger \left[D^\mu(\phi - \tilde{\phi}) + ig\tilde{A}_\mu^a T_a(\phi - \tilde{\phi}) \right] + \\ & M_\phi^2 \tilde{\phi}^\dagger \tilde{\phi} + \left[D_\mu(\phi - \tilde{\phi}) + ig\tilde{A}_\mu^a T_a(\phi - \tilde{\phi}) \right]^\dagger \left[D^\mu \tilde{\phi} + ig\tilde{A}^{\mu b} T_b \tilde{\phi} \right] \\ & + \left[D_\mu \tilde{\phi} + ig\tilde{A}_\mu^a T_a \tilde{\phi} \right]^\dagger \left[D_\mu(\phi - \tilde{\phi}) + ig\tilde{A}_\mu^a T_a(\phi - \tilde{\phi}) \right] = \\ & = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - (D_\mu \tilde{\phi})^\dagger (D^\mu \tilde{\phi}) + M_\phi^2 \tilde{\phi}^\dagger \tilde{\phi} + ig(D_\mu \phi)^\dagger \tilde{A}_\mu^a T_a \phi \\ & + g^2 \phi^\dagger \tilde{A}_\mu^a T_a \tilde{A}_\mu^b T_b \phi - ig\phi^\dagger \tilde{A}_\mu^a T_a D^\mu \phi - ig(D_\mu \tilde{\phi})^\dagger \tilde{A}_\mu^a T_a \tilde{\phi} + ig\tilde{\phi}^\dagger \tilde{A}_\mu^a T_a D^\mu \tilde{\phi} \\ & - g^2 \tilde{\phi}^\dagger \tilde{A}_\mu^a T_a \tilde{A}_\mu^b T_b \tilde{\phi} \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

Nota-se que os termos de interação entre o escalar LW são idênticos aos de interação do escalar ordinário, porém com o sinal trocado.

3.2.3 Férmions

Sem perda de generalidade, vamos considerar o dubleto de quark \hat{Q}_L . A Lagrangiana cinética de ordem superior é:

$$\mathcal{L}_{hd} = \overline{\hat{Q}_L} i \hat{D} \hat{Q}_L + \frac{1}{M_Q^2} \overline{\hat{Q}_L} i \hat{D}^3 \hat{Q}_L \quad (3.2.28)$$

Vamos agora introduzir os quarks de Lee-Wick \tilde{Q}_L e \tilde{Q}'_R . Conforme visto anteriormente, as massas das partículas Lee-Wick originam-se diretamente do novo parâmetro massivo presente na teoria de ordem superior. Dessa forma, as massas dos quarks LW não originam-se (pelo menos não completamente) através da interação de Yukawa com o Higgs, portanto por simplicidade, vamos assumir que os quarks LW formam uma representação real do grupo de calibre, para que seja mantida a invariância de calibre antes da quebra de simetria. A lagrangiana a ser introduzida é:

$$\mathcal{L} = \overline{\tilde{Q}_L} i \hat{D} \tilde{Q}_L + M_Q (\overline{\tilde{Q}_L} \tilde{Q}'_R + \overline{\tilde{Q}'_R} \tilde{Q}_L) + \underbrace{\overline{\tilde{Q}_L} i \hat{D} \tilde{Q}_L + \overline{\tilde{Q}_L} i \hat{D} \tilde{Q}_L}_{(*)} - \overline{\tilde{Q}'_R} i \hat{D} \tilde{Q}'_R \quad (3.2.29)$$

Onde (*) são termos cinéticos não diagonalizados e a derivada covariante de calibre é dada por:

$$\hat{D}_\mu = D_\mu + ig \tilde{A}_\mu^a T_a + ig_2 \tilde{W}_\mu^a T_a + ig_1 \tilde{B}_\mu Y \equiv D_\mu + i \vec{\tilde{A}}_\mu \quad (3.2.30)$$

Onde $\tilde{A}_\mu^a T_a$, $\tilde{W}_\mu^a T_a$ e \tilde{B}_μ são, respectivamente, os parceiros LW dos gluons, os bósons W e o bóson B (antes da quebra de simetria devido ao Higgs), enquanto que D_μ contém seus respectivos modos ordinários.

Como os campos de calibre pertencem à representação adjunta, suas componentes são reais, isto é: $\tilde{A}_\mu^a = \tilde{A}_\mu^{a*}$, $\tilde{W}_\mu^a = \tilde{W}_\mu^{a*}$, $\tilde{B}_\mu = \tilde{B}_\mu^*$, idem para os campos de calibre ordinários, de forma que, por partes:

$$\overline{(\hat{D} \tilde{Q}_L)} \tilde{Q}_L + \overline{\tilde{Q}_L} \hat{D} \tilde{Q}_L = \underbrace{\hat{D}(\overline{\tilde{Q}_L} \tilde{Q}_L)}_{superf.} \Rightarrow \overline{(\hat{D} \tilde{Q}_L)} \tilde{Q}_L = -\overline{\tilde{Q}_L} \hat{D} \tilde{Q}_L \quad (3.2.31)$$

Usando isso, as equações de movimento a partir da Lagrangiana \mathcal{L} são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{Q}_L} &= M_Q \overline{\tilde{Q}'_R} - i \overline{(\hat{D} \tilde{Q}_L)}, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \tilde{Q}_L)} &= 0 \Rightarrow \overline{\tilde{Q}'_R} = \frac{i}{M_Q} \overline{\hat{D} \tilde{Q}_L} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{Q}_L} &= M_Q \tilde{Q}'_R + i (\hat{D} \tilde{Q}_L), & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \tilde{Q}_L)} &= 0 \Rightarrow \tilde{Q}'_R = \frac{-i \hat{D}}{M_Q} \tilde{Q}_L \quad (*) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{Q}'_R} &= M_Q \tilde{Q}_L - i (\hat{D} \tilde{Q}'_R), & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \tilde{Q}'_R)} &= 0 \Rightarrow \tilde{Q}_L = \frac{i \hat{D}}{M_Q} \tilde{Q}'_R \underbrace{=}_{(*)} \frac{\hat{D}^2}{M_Q^2} \tilde{Q}_L \end{aligned} \quad (3.2.32)$$

Analogamente, temos $\overline{\tilde{Q}_L} = \frac{1}{M_Q^2} \overline{(\hat{D}^2 \tilde{Q}_L)}$. Substituindo os valores dos campos de Lee-Wick em termos do campo original \hat{Q}_L encontrados, temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \overline{\tilde{Q}_L} i \hat{D} \tilde{Q}_L + \frac{1}{M_Q^2} (\overline{(\hat{D}^2 \tilde{Q}_L)} (-i \hat{D} \tilde{Q}_L) + i \overline{(\hat{D} \tilde{Q}_L)} (-i \hat{D}^2 \tilde{Q}_L)) + \\ &\frac{1}{M_Q^2} [\overline{(\hat{D}^2 \tilde{Q}_L)} (i \hat{D} \tilde{Q}_L) + \tilde{Q}_L (-i \hat{D}^3 \tilde{Q}_L) - \overline{(\hat{D} \tilde{Q}_L)} (-i \hat{D}^2 \tilde{Q}_L)] = \\ &= \overline{\tilde{Q}_L} i \hat{D} \tilde{Q}_L + \frac{1}{M_Q^2} \overline{\tilde{Q}_L} i \hat{D}^3 \tilde{Q}_L = \mathcal{L}_{hd} \end{aligned} \quad (3.2.33)$$

Onde da penúltima à última linha integramos cada termo por partes de forma que as derivada covariante sejam aplicadas sobre \hat{Q}_L , provando que uma teoria de férmions com derivadas de ordem superior equivale a uma teoria com férmions de Lee-Wick.

Agora vamos diagonalizar os termos cinéticos de \mathcal{L} definindo $\hat{Q}_L = Q_L - \tilde{Q}_L$, de forma que

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \overline{Q}_L i \not{D} Q_L - \overline{\tilde{Q}}_L i \not{D} \tilde{Q}_L + M_Q (\overline{\tilde{Q}}_L \tilde{Q}'_R + \overline{\tilde{Q}}'_R \tilde{Q}_L) - \overline{\tilde{Q}}'_R i \not{D} \tilde{Q}'_R = \\ &= \overline{Q}_L i \not{D} Q_L - \overline{\tilde{Q}}_L i \not{D} \tilde{Q}_L + M_Q (\overline{\tilde{Q}}_L \tilde{Q}'_R + \overline{\tilde{Q}}'_R \tilde{Q}_L) - \overline{\tilde{Q}}'_R i \not{D} \tilde{Q}'_R \\ &\quad - \overline{Q}_L \gamma_\mu \vec{A}^\mu Q_L + \overline{\tilde{Q}}_L \gamma_\mu \vec{A}^\mu \tilde{Q}'_R + \overline{\tilde{Q}}'_R \gamma_\mu \vec{A}^\mu \tilde{Q}'_R\end{aligned}\quad (3.2.34)$$

Os férmions \tilde{Q}_L e \tilde{Q}_R se combinam num férmion LW de Dirac da maneira usual:

$$\tilde{\psi} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{Q}_L \\ \tilde{Q}_R \end{pmatrix} \quad (3.2.35)$$

De forma que a Lagrangiana livre de um férmion LW é $\mathcal{L}_{free} = -\tilde{\psi}(i\not{\partial} - M_Q)\tilde{\psi}$. Assim o propagador de um férmion LW:

$$i\tilde{S}_{ij}^{\alpha\beta} = -\delta_{ij} \frac{i(\not{p} + M_Q)_{\alpha\beta}}{p^2 - M_Q^2 + i\epsilon} \quad (3.2.36)$$

Onde aqui colocamos explícitos índices de sabor i, j e índices de spin α, β . O propagador obtido é basicamente o mesmo de um férmion ordinário porém com o sinal e massa modificados.

3.2.4 Contagem de potências

Uma análise de "power counting"(contagem de potências) de momenta dos propagadores nos permite estimar o comportamento das divergências da Teoria de Lee-Wick no ultravioleta. Vamos usar a lagrangiana \mathcal{L}_{hd} do campo de calibre. Introduzindo a fixação de calibre, temos

$$\mathcal{L}_{hd} = -\frac{1}{2} \text{Tr}(\hat{F}_{\mu\nu} \hat{F}^{\mu\nu}) + \frac{1}{M_A^2} \text{Tr}((\hat{D}^\mu \hat{F}_{\mu\nu})(\hat{D}^\lambda \hat{F}_\lambda^\nu)) - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu \hat{A}^\mu)^2 \quad (3.2.37)$$

Onde por simplicidade, estamos omitindo índices de gerador de calibre. Para obtenção do propagador, basta considerar apenas os termos quadráticos nos campos desta Lagrangiana, para o termo de derivada superior, temos

$$\hat{D}^\mu \hat{F}_{\mu\nu} = \underbrace{\partial^\mu \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial^\mu \partial_\nu \hat{A}_\mu}_{*} - ig[\hat{A}^\mu, \partial_\mu \hat{A}_\nu] - g^2[\hat{A}^\mu, [\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu]] \quad (3.2.38)$$

Apenas os termos marcados em * irão contribuir à parte quadrática nos campos da lagrangiana, os comutadores aparecem nos termos de interação, logo não nos são de interesse para a presente finalidade.

Assim, a parte quadrática do termo de ordem superior é

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2M_A^2} \text{Tr}\{(\partial^\mu \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial^\mu \partial_\nu \hat{A}_\mu)(\partial^\lambda \partial_\lambda \hat{A}^\nu - \partial^\lambda \partial^\nu \hat{A}_\lambda)\} \\ &= \frac{1}{2M_A^2} \text{Tr}\{(\square \hat{A}_\nu)^2 - (\square \hat{A}_\nu)(\partial^\mu \partial^\nu \hat{A}_\mu) - (\partial^\mu \partial^\nu \hat{A}_\mu)(\square \hat{A}^\nu) + (\partial^\mu \partial_\nu \hat{A}_\mu)^2\} \end{aligned} \quad (3.2.39)$$

Da ciclicidade do traço, temos $\text{Tr}(\square \hat{A}_\nu)(\partial^\mu \partial^\nu \hat{A}_\mu) = \text{Tr}(\partial^\mu \partial^\nu \hat{A}_\mu)(\square \hat{A}^\nu)$. Vamos integrar por partes para extrair a forma quadrática dos argumentos do traço, os termos de superfície serão indicados por *superf.* e não contribuirão à ação, logo vamos desprezá-los.

$$\begin{aligned} (\square \hat{A}_\nu)^2 &= (\partial^\rho \partial_\rho A_\nu)(\partial^\mu \partial_\mu A^\nu) = \underbrace{\partial^\rho (\partial_\rho \hat{A}_\nu \partial^\mu \partial_\mu \hat{A}^\nu)}_{\text{superf.}} - \partial_\rho \hat{A}_\nu (\partial^\rho \partial^\mu \partial_\mu \hat{A}^\nu) \\ &= \underbrace{-\partial_\rho (\hat{A}_\nu \partial^\rho \partial^\mu \partial_\mu \hat{A}^\nu)}_{\text{superf.}} + \hat{A}_\nu \partial_\rho \partial^\rho \partial^\mu \partial_\mu \hat{A}^\nu = \hat{A}_\nu \square^2 \hat{A}^\nu \end{aligned} \quad (3.2.40)$$

Analogamente, temos

$$(\square \hat{A}_\nu)(\partial^\mu \partial^\nu \hat{A}_\mu) = \hat{A}_\nu (\square \partial^\mu \partial^\nu \hat{A}_\mu) \quad (3.2.41)$$

$$\begin{aligned} (\partial^\mu \partial_\nu \hat{A}_\mu)^2 &= \underbrace{\partial^\mu ((\partial_\nu \hat{A}_\mu)(\partial_\rho \partial^\nu \hat{A}^\rho))}_{\text{superf.}} - (\partial_\nu \hat{A}_\mu) \partial^\mu \partial_\rho \partial^\nu \hat{A}^\rho \\ &= \underbrace{-\partial_\nu (\hat{A}_\mu \partial^\mu \partial_\rho \partial^\nu \hat{A}^\rho)}_{\text{superf.}} + \hat{A}_\mu \partial_\nu \partial^\mu \partial_\rho \partial^\nu \hat{A}^\rho = \hat{A}_\nu \square \partial^\mu \partial^\nu \hat{A}_\mu \end{aligned} \quad (3.2.42)$$

Portanto, à menos de termos de superfície, a parte quadrática nos campos da lagrangiana de ordem superior é

$$\frac{1}{2M_A^2} \text{Tr}\{\hat{A}_\mu \square^2 \hat{A}^\mu - \hat{A}_\nu \square \partial^\mu \partial^\nu \hat{A}_\mu\} = \frac{1}{2M_A^2} \text{Tr}\{\hat{A}_\nu (\square^2 \eta^{\mu\nu} - \square \partial^\mu \partial^\nu) \hat{A}_\mu\} \quad (3.2.43)$$

O argumento do traço é idêntico à forma quadrática da lagrangiana de Maxwell multiplicada por $\frac{-\square}{M_A^2}$.

Assim a parte quadrática da Lagrangiana fica

$$\mathcal{L}_{h.d.}|_{quad.} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \hat{A}_\nu \underbrace{\left((-\square \eta^{\mu\nu} + \partial^\mu \partial^\nu) \left(1 - \frac{\square}{M_A^2} \right) + \frac{1}{\xi} \partial^\mu \partial^\nu \right)}_{\mathcal{O}^{\mu\nu}} \hat{A}_\mu \right\} \quad (3.2.44)$$

O propagador $\hat{D}_{\mu\nu}^{ab}(x-y)$, sendo o inverso da forma quadrática na lagrangiana, satisfaz:

$$\begin{aligned} \delta^{ab} \delta(x-y) &= \mathcal{O}^{\mu\nu} \hat{D}_{\mu\nu}^{ab}(x-y) = \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \underbrace{\left((k^2 \eta^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) \left(1 - \frac{k^2}{M_A^2} \right) - \frac{1}{\xi} k^\mu k^\nu \right)}_{\delta^{ab}} D_{\mu\nu}^{ab}(k) e^{-ik \cdot (x-y)} \end{aligned} \quad (3.2.45)$$

Onde usamos a representação integral da delta: $\delta^4(x-y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-y)}$.

Usando Ansatz para o propagador:

$$D_{\mu\nu}^{ab}(k) = \delta^{ab} \underbrace{(A\eta_{\mu\nu} + Bk_\mu k_\nu)}_{D_{\mu\nu}(k)} \quad (3.2.46)$$

Temos

$$\begin{aligned} \delta^\mu{}_\nu = \mathcal{O}^{\mu\lambda} D_{\lambda\nu}(k) &= \left((k^2 \eta^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) \left(1 - \frac{k^2}{M_A^2} \right) - \frac{1}{\xi} k^\mu k^\nu \right) (A\eta_{\mu\nu} + Bk_\mu k_\nu) \\ &= \delta^\mu{}_\nu \underbrace{\left(k^2 - \frac{k^4}{M_A^2} \right)}_{A = \frac{1}{k^2 - \frac{k^4}{M_A^2}}} A + \\ &+ \underbrace{k^\mu k_\nu \left(- \left(1 - \frac{k^2}{M_A^2} \right) A - \frac{A}{\xi} + (Bk^2 - BK^2) \left(1 - \frac{k^2}{M_A^2} \right) - \frac{Bk^2}{\xi} \right)}_0 \end{aligned} \quad (3.2.47)$$

Substituindo o valor de A encontrado na porção nula, obtemos

$$B = \frac{1}{k^2 - \frac{k^4}{M_A^2}} \left(\frac{1}{k^2} (\xi - 1) + \frac{\xi}{M_A^2} \right) \quad (3.2.48)$$

Finalmente obtemos então o propagador como

$$\hat{D}_{\mu\nu}^{ab}(k) = \delta^{ab} \frac{-i}{k^2 - \frac{k^4}{M_A^2}} \left(\eta_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} - \xi \frac{k_\mu k_\nu}{M_A^2} \right) \quad (3.2.49)$$

Os fantasmas de Fadeev-Popov acoplam-se normalmente aos bósons de calibre. Trabalhando no calibre de Landau, temos $\xi = 0$ e o propagador é da ordem de k^{-4} à altas energias. Analogamente, o propagador para o campo escalar à altas energias é

$$\hat{D}^{ab}(p) = \delta^{ab} \frac{-i}{p^2 - \frac{p^4}{M_\phi^2}} \quad (3.2.50)$$

Para analisar a ordem de momenta assintótico dos vértices bosônicos na teoria de derivada de ordem superior, vamos abrir os termos de interação da lagrangiana de Lee-Wick em \mathcal{L}_{hd} para a obtenção direta destes através dos termos de ordem maior que 2 na lagrangiana:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{M_A^2} \text{Tr}(\hat{D}^\mu \hat{F}_{\mu\nu})^2 &= \frac{1}{M_A^2} \text{Tr} \left((\square \hat{A}_\nu)(\square \hat{A}^\nu) - 2(\square \hat{A}_\nu) \partial_\lambda \partial^\nu \hat{A}^\lambda \right. \\
&- 2ig(\square \hat{A}_\nu) \partial_\lambda [\hat{A}^\lambda, \hat{A}^\nu] - 2ig(\square \hat{A}_\nu) [\hat{A}_\lambda, \partial^\lambda \hat{A}^\nu] + 2ig(\square \hat{A}_\nu) [\hat{A}_\lambda, \partial^\nu \hat{A}^\lambda] \\
&- 2g^2(\square \hat{A}_\nu) [\hat{A}_\lambda, [\hat{A}^\lambda, \hat{A}^\nu]] + (\partial^\mu \partial_\nu \hat{A}_\mu)(\partial_\lambda \partial^\nu \hat{A}^\lambda) + 2ig(\partial^\mu \partial_\nu \hat{A}_\mu) \partial_\lambda [\hat{A}^\lambda, \hat{A}^\nu] \\
&+ 2ig(\partial^\mu \partial_\nu \hat{A}_\mu) [\hat{A}_\lambda, \partial^\lambda \hat{A}^\nu] - 2ig(\partial^\mu \partial_\nu \hat{A}_\mu) [\hat{A}_\lambda, \partial^\nu \hat{A}^\lambda] \\
&+ 2g^2(\partial^\mu \partial_\nu \hat{A}_\mu) [\hat{A}_\lambda, [\hat{A}^\lambda, \hat{A}^\nu]] - g^2(\partial^\mu [\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu])(\partial_\lambda [\hat{A}^\lambda, \hat{A}^\nu]) \\
&- 2g^2(\partial^\mu [\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu]) [\hat{A}_\lambda, \partial^\lambda \hat{A}^\nu] + 2g^2(\partial^\mu [\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu]) [\hat{A}_\lambda, \partial^\nu \hat{A}^\lambda] \\
&+ 2ig^3(\partial^\mu [\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu]) [\hat{A}_\lambda, [\hat{A}^\lambda, \hat{A}^\nu]] - g^2[\hat{A}^\mu, \partial_\mu \hat{A}_\nu] [\hat{A}_\lambda, \partial^\lambda \hat{A}^\nu] \\
&+ 2g^2[\hat{A}^\mu \partial_\mu \hat{A}_\nu] [\hat{A}_\lambda, \partial^\nu \hat{A}^\lambda] + 2ig^3[\hat{A}^\mu, \partial_\mu \hat{A}_\nu] [\hat{A}_\lambda, [\hat{A}^\lambda, \hat{A}^\nu]] \\
&- g^2[\hat{A}^\mu, \partial_\nu \hat{A}_\mu] [\hat{A}_\lambda, \partial^\nu \hat{A}^\lambda] - 2ig^3[\hat{A}^\mu, \partial_\nu \hat{A}_\mu] [\hat{A}_\lambda, [\hat{A}^\lambda, \hat{A}^\nu]] \\
&\left. + g^4[\hat{A}^\mu, [\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu]] [\hat{A}_\lambda, [\hat{A}^\lambda, \hat{A}^\nu]] \right) \tag{3.2.51}
\end{aligned}$$

Se contarmos a potência dos momenta que aparecem nesses vértices, percebemos que a tree-level um vértice de n bósons vetoriais é da ordem p^{6-n} . No caso da Lagrangiana de matéria escalar, o termo de ordem superior equivale, à menos de um termo de superfície, à

$$\frac{1}{M_\phi^2} (\hat{D}_\mu \hat{D}^\mu \hat{\phi})^\dagger (\hat{D}_\nu \hat{D}^\nu \hat{\phi}) \simeq \frac{1}{M_\phi^2} \hat{\phi} \hat{D}^4 \hat{\phi} \simeq \phi^\dagger (\partial^2 + \partial \cdot A + A \cdot \partial + A^2)^2 \phi \tag{3.2.52}$$

O teorema binomial aplicado à $\hat{\phi} \hat{D}^4 \hat{\phi}$ elucidada uma "competição de potências" entre a ordem das derivadas e as potências de campos vetoriais presentes em cada termo de interação, de forma que à tree-level um vértice de 2 escalares com n vetores é da ordem de p^{4-n} , o mesmo raciocínio pode ser aplicado às interações do campo de calibre. Se trabalhamos no calibre de Lorentz, temos $\partial \cdot A = 0$ e os termos de interação com maiores potências de momenta serão os mais divergentes, que são $\phi^\dagger A \cdot \partial \partial^2 \phi$ e $\phi^\dagger \partial^2 A \cdot \partial \phi$ onde ϕ aparece como linha interna no diagrama. Entretanto, através de integração por partes, podemos fazer uma dessas derivadas atuar no campo externo ϕ^\dagger , de forma a reduzir a divergência. À um loop, isso pode ser feito duas vezes no diagrama, de forma a reduzir seu grau superficial de divergência em 2 unidades.

Os fantasmas de Fadeev-Popov comportam-se identicamente ao modelo padrão usual, assim os vértices de 2 fantasmas com 1 campo de calibre são da ordem de p .

Faremos agora uma análise do grau superficial de divergência (vide Apêndice B) dos diagramas de Feynman possíveis nessa teoria. Seja um diagrama com L loops, I_A linhas internas vetoriais, I_s linhas internas escalares, I_g linhas internas de ghost, então o grau superficial de divergência d é

$$d = 4L - 4I_A - 4I_s - 2I_g + \sum_n V'_n (6 - n) + \sum_n V_n (4 - n) + V_g \tag{3.2.53}$$

O primeiro termo é a contribuição dos momenta de loop independentes (cada um contribui com 4 potências de momenta), os seguintes 3 termos são devido às potências de momenta assintóticos

nos propagadores dos campos, enquanto que os 3 últimos são as contribuições de potência de momentum dos vértices, respectivamente, de n bósons vetoriais, n bósons escalares e os vetores de bóson-fantasma. O número de loops depende das linhas e vértices através da relação topológica conhecida (vide apêndice B):

$$L = I_s + I_A + I_g - \sum_n (V'_n + V_n) - V_g + 1 \quad (3.2.54)$$

Vamos somar as relações entre vértices, pernas externas e pernas internas no diagrama para obter as seguintes relações:

$$\sum_n (nV'_n + (n+2)V_n) + 3V_g = 2(I_s + I_A + I_g) + E_s + E_A + E_g \quad (3.2.55)$$

Onde E denota o número de linhas externas para os campos dos correspondentes subíndices já explicados. Usando as três últimas equações, obtemos o grau superficial de divergência como:

$$d = 6 - 2L - E_s - E_A - 2E_g \quad (3.2.56)$$

No caso da renormalização de um campo escalar temos, $E_A = E_g = 0$ e $E_s = 2$. Logo $d = 4 - 2L$ de forma que a única divergência de grau superior à logarítmica é quadrática possível ocorre à 1 loop. Entretanto a análise feita anteriormente sobre o termo $\hat{\phi}^\dagger D^4 \hat{\phi}$ nos permite reduzir o grau de divergência em 2 unidades através de integrações por partes e da validade do calibre de Lorentz. Nessas condições, temos $d = 2 - 2L \leq 0$ e a teoria se torna no máximo divergente logaritmicamente.

Vamos agora fazer separadamente o power counting do setor fermiônico, visto que não dá para incluí-lo na análise anterior preservando a dependência do grau superficial de divergência apenas para com a quantidade de momenta de loops e pernas externas dos diagramas. O vértice fermiônico de 2 pontos da teoria de ordem superior é (vide apêndice A):

$$\Gamma_\psi^{(2)} = i\not{p} - m + \frac{i}{M_Q^2} \not{p}^3 \quad (3.2.57)$$

Logo o propagador no espaço de momenta é:

$$S(p) = \frac{1}{i(1 + \frac{p^2}{M_Q^2})p - m} = \frac{i[(1 + \frac{p^2}{M_Q^2})\not{p} + m]}{(1 + \frac{p^2}{M_Q^2})^2 p^2 - m^2} \sim p^{-3} \text{ assintoticamente} \quad (3.2.58)$$

Enquanto que, usando o comportamento do teorema binomial analogamente ao que foi usado para os novos vértices do campo escalar, temos:

$$\widehat{\psi} \not{D}^3 \widehat{\psi} \sim \widehat{\psi} (\not{p} + i\not{A})^3 \widehat{\psi} = \widehat{\psi} (\not{p}^2 \not{p} + i\not{p}^2 \not{A} + i\not{A} \not{p}^2 + i\not{p} \not{A} \not{p} + \dots) \widehat{\psi} \quad (3.2.59)$$

Assim cada vértice V_n novo de n vetores com 2 férmions possui potência de momenta p^{3-n} . O grau superficial de divergência do setor fermions-bósons de calibre (no calibre de Landau) é:

$$d = 4L - 4I_A - 3I_\psi + \sum_n (3 - n)V_n \quad (3.2.60)$$

O número de momenta independentes do diagrama é dado pela relação topológica:

$$\begin{aligned}
L &= I_A + I_\psi - \sum_n V_n + 1 \\
\Rightarrow d &= 4(I_A + I_\psi - \sum_n V_n + 1) - 4I_A - 3I_\psi + \sum_n (3 - n)V_n \\
&= 4 + I_\psi - \sum_n (n + 1)V_n = 4 + \sum_n V_n - \frac{E_\psi}{2} - \sum_n (n + 1)V_n \\
&= 4 - \sum_n nV_n - \frac{E_\psi}{2}
\end{aligned} \tag{3.2.61}$$

Onde usamos $2I_\psi + E_\psi = 2\sum_n V_n$. O primeiro termo em L existe para qualquer diagrama com loops. Logo o maior grau superficial de divergência dos férmions ocorre em diagramas de autoenergia a 1 loop análogos ao do Modelo Padrão usual, isto é $\sum_n nV_n = 2$, $E_\psi = 2 \Rightarrow d = 1$. Analogamente ao caso do campo escalar, podemos integrar por partes para isolar uma derivada na perna externa $\widehat{\psi}$ usando:

$$\widehat{\psi} \widehat{D}^3 \widehat{\psi} = (\widehat{D} \widehat{\psi}) \widehat{D}^2 \widehat{\psi} - \partial_\mu (\widehat{\psi} i\gamma^\mu \widehat{D}^2 \widehat{\psi}) \tag{3.2.62}$$

Resta então uma divergência quadrática para o diagrama com 2 bósons vetoriais e 1 loop fermiônico. Entretanto, na formulação de modos desacoplados (de ordem normal nas derivadas), os vértices entre os fermions com vetor ordinário ou vetor Lee-Wick são idênticos exceto por um sinal trocado, de forma que a polarização de vácuo de ambos os casos se comporte como um tensor de polarização de vácuo usual, que contém divergências logarítmicas. Isso acontece devido à estrutura tensorial do tensor de polarização de vácuo $\Pi_{ab}^{\mu\nu}(p^2) = \delta_{ab}(p^2\eta^{\mu\nu} - p_\mu p_\nu)\Pi(p^2)$, enquanto que p^μ é o momentum das pernas externas do diagrama, reduzindo o grau superficial de divergência em 2 unidades.

3.3 Regras de Feynman do Campo Escalar

Para a renormalização dos campos escalares, vamos usar os propagadores dos bósons vetoriais ordinário e LW desacoplados e a Regularização Dimensional com dimensão n . Abrindo a Lagrangiana do campo de matéria escalar com os termos cinéticos desacoplados, temos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - (D_\mu \tilde{\phi})^\dagger (D^\mu \tilde{\phi}) + M_\phi^2 \tilde{\phi}^\dagger \tilde{\phi} + ig(D_\mu \phi)^\dagger \tilde{A}_a^\mu T^a \phi \\
&+ g^2 \phi^\dagger \tilde{A}_\mu^a T_a \tilde{A}_b^\mu T^b \phi - ig \phi^\dagger \tilde{A}_\mu^a T_a D^\mu \phi + ig(D_\mu \tilde{\phi})^\dagger \tilde{A}_a^\mu T^a \tilde{\phi} + ig \tilde{\phi}^\dagger \tilde{A}_\mu^a T_a D^\mu \tilde{\phi} \\
&- g^2 \tilde{\phi}^\dagger \tilde{A}_\mu^a T_a \tilde{A}_b^\mu T^b \tilde{\phi} \\
&= \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - ig \phi^\dagger A_\mu^a T_a \partial^\mu \phi + ig(\partial_\mu \phi^\dagger) A_\mu^a T^a \phi + g^2 \phi^\dagger A_\mu^a T_a A_b^\mu T^b \phi \\
&- \partial_\mu \tilde{\phi}^\dagger \partial^\mu \tilde{\phi} + ig \tilde{\phi}^\dagger A_\mu^a T_a \partial^\mu \tilde{\phi} - ig(\partial_\mu \tilde{\phi}^\dagger) A_\mu^a T_a \tilde{\phi} - g^2 \tilde{\phi}^\dagger A_\mu^a T_a A_b^\mu T^b \tilde{\phi} \\
&+ M_\phi^2 \tilde{\phi}^\dagger \tilde{\phi} + ig(\partial^\mu \phi^\dagger) \tilde{A}_\mu^a T_a \phi + g^2 \phi^\dagger A_\mu^a T_a \tilde{A}_b^\mu T^b \phi + g^2 \phi^\dagger \tilde{A}_\mu^a T_a \tilde{A}_b^\mu T^b \phi \\
&- ig \phi^\dagger \tilde{A}_\mu^a T_a \partial^\mu \phi + g^2 \phi^\dagger \tilde{A}_\mu^a T_a A_b^\mu T^b \phi - ig \partial_\mu \tilde{\phi}^\dagger \tilde{A}_b^\mu T^b \tilde{\phi} - g^2 \tilde{\phi}^\dagger A_b^\mu T^b \tilde{A}_\mu^a T_a \tilde{\phi} \\
&+ ig \tilde{\phi}^\dagger \tilde{A}_\mu^a T_a \partial^\mu \tilde{\phi} - g^2 \tilde{\phi}^\dagger \tilde{A}_\mu^a T_a A_b^\mu T^b \tilde{\phi} - g^2 \tilde{\phi}^\dagger \tilde{A}_\mu^a T_a \tilde{A}_b^\mu T^b \tilde{\phi}
\end{aligned} \tag{3.3.1}$$

$$\begin{aligned}
\begin{array}{c} \xrightarrow{p} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \xrightarrow{p-k} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \xrightarrow{p} \end{array} = D(p^2)(-i\Sigma_c(p^2))D(p^2) \\
-i\Sigma_c(p^2) = (-ig)^2 \mu^\varepsilon \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \underbrace{(T_a)^2}_{C_2(N)} \frac{i}{(p-k)^2} (p^\mu + (p-k)^\mu) \\
\times \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2} ((p-k)^\nu + p^\nu) = \\
= -gC_2(N)\mu^\varepsilon \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2(p-k)^2} (4p^2 - 4p \cdot k + k^2)
\end{aligned} \tag{3.4.6}$$

Para $p^2 = 0$, temos:

$$-i\Sigma_c(0) = -gC_2(N)\mu^\varepsilon \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2} \tag{3.4.7}$$

Para o próximo propagador, temos:

$$\begin{aligned}
\begin{array}{c} \xrightarrow{p} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \xrightarrow{p-k} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \xrightarrow{p} \end{array} = D(p^2)(-i\Sigma_d(p^2))D(p^2) \\
-i\Sigma_d(p^2) = (-ig)^2 \mu^\varepsilon \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} (T_a)^2 \frac{i}{(p-k)^2} (p^\mu + (p-k)^\mu) \\
\times \frac{i}{k^2 - M_A^2} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M_A^2} \right) (p^\nu + (p-k)^\nu) = \\
= g^2 C_2(N) \mu^\varepsilon \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(p-k)^2 (k^2 - M_A^2)} \\
\times \left[4p^2 - 4p \cdot k + k^2 - \frac{1}{M_A^2} (2p \cdot k - k^2)^2 \right]
\end{aligned} \tag{3.4.8}$$

Para $p^2 = 0$, temos:

$$-i\Sigma_d(0) = -g^2 C_2(N) \mu^\varepsilon \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{M_A^2} \tag{3.4.9}$$

As divergências quadráticas e quárticas se anulam ao somarmos as contribuições dos diagramas obtidos. Dessa maneira, o Campo de Higgs ordinário enquanto campo de matéria escalar que se acopla aos bósons vetoriais e Lee-Wick da simetria eletrofraca não apresenta divergências quadráticas devido à sua interação com esses campos.

3.4.2 Campo Escalar LW

No caso do Campo Escalar de LW, usaremos os mesmos diagramas porém serão denotados um ' (linha) para indicar que os campos escalares envolvidos são tipo LW. Como visto antes, as Funções de vértice envolvendo o escalar LW são idênticas porém com sinal trocado das funções de vértice do campo escalar ordinário. Pelo fato dos loops (a) e (b) não envolverem

3.5 A Lagrangiana do Modelo Padrão de Lee-Wick

3.5.1 O Setor de Higgs

3.5.1.1 Setor Higgs-calibre

A Lagrangiana do Higgs de ordem superior é definida como:

$$\mathcal{L}_{hd} = (\hat{D}_\mu \hat{H})^\dagger (\hat{D}^\mu \hat{H}) - \frac{1}{M_H^2} (\hat{D}_\mu \hat{D}^\mu \hat{H})^\dagger (\hat{D}_\nu \hat{D}^\nu \hat{H}) - V(\hat{H}) \quad (3.5.1)$$

A derivada covariante do Modelo Padrão de Lee-Wick é:

$$\begin{aligned} \hat{D}_\mu &= \partial_\mu + ig\hat{A}_\mu^a T_a + ig_2\hat{W}_\mu^a T_a + ig_1\hat{B}_\mu Y = \\ &= D_\mu + \underbrace{ig\hat{A}_\mu^a T_a + ig_2\hat{W}_\mu^a T_a + ig_1\hat{B}_\mu Y}_{\equiv i\vec{\hat{A}}_\mu} \\ D_\mu &= \partial_\mu + \underbrace{igA_\mu^a T_a}_{SU(3)} + \underbrace{ig_2W_\mu^a T_a}_{SU_L(2)} + \underbrace{ig_1B_\mu Y}_{U_Y(1)} \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

Entretanto nota-se que como o Higgs não se acopla aos glúons, temos

$$\begin{aligned} \hat{D}_\mu \hat{H} &= \partial_\mu + ig_2\hat{W}_\mu^a T_a + ig_1\hat{B}_\mu Y \\ D_\mu \hat{H} &= \partial_\mu \hat{H} + ig_2W_\mu^a T_a \hat{H} + ig_1B_\mu Y \hat{H} \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

e o potencial é dado por:

$$V(\hat{H}) = \frac{\lambda}{4} \left(\hat{H}^\dagger \hat{H} - \frac{v^2}{2} \right)^2 \quad (3.5.4)$$

O desacoplamento entre Higgs ordinário e Higgs LW é praticamente idêntico ao feito com o campo escalar de matéria, porém com potencial e campos de calibre diferentes. Logo, definimos $\hat{H} = H - \tilde{H}$ para diagonalizar os termos cinéticos da Lagrangiana. Em seguida, Podemos usar a nossa resolução do campo de matéria escalar como proxy para a Lagrangiana desacoplada de Lee-Wick do Higgs ao mapearmos:

$$\begin{aligned} \phi &\mapsto H, \quad \tilde{\phi} \mapsto \tilde{H} \\ igA_\mu^a T_a &\mapsto i\vec{\hat{A}}_\mu \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - (D_\mu \tilde{\phi})^\dagger (D^\mu \tilde{\phi}) + M_\phi^2 \tilde{\phi}^\dagger \tilde{\phi} + ig(D_\mu \phi)^\dagger \vec{\hat{A}}_\mu^a T^a \phi \\ &+ g^2 \phi^\dagger \vec{\hat{A}}_\mu^a T_a \vec{\hat{A}}_\mu^b T^b \phi - ig \phi^\dagger \vec{\hat{A}}_\mu^a T_a D^\mu \phi - ig(D_\mu \tilde{\phi})^\dagger \vec{\hat{A}}_\mu^a T^a \tilde{\phi} + ig \tilde{\phi}^\dagger \vec{\hat{A}}_\mu^a T_a D^\mu \tilde{\phi} \\ &- g^2 \tilde{\phi}^\dagger \vec{\hat{A}}_\mu^a T_a \vec{\hat{A}}_\mu^b T^b \tilde{\phi} \mapsto \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Higgs} &= (D_\mu H)^\dagger (D^\mu H) - (D_\mu \tilde{H})^\dagger D^\mu \tilde{H} + M_H^2 \tilde{H}^\dagger \tilde{H} - V(H, \tilde{H}) + i(D_\mu H)^\dagger \vec{\hat{A}}^\mu H \\ &- iH^\dagger \vec{\hat{A}}_\mu D^\mu H + H^\dagger \vec{\hat{A}}_\mu \vec{\hat{A}}^\mu H - i(D_\mu \tilde{H})^\dagger \vec{\hat{A}}^\mu \tilde{H} + i\tilde{H}^\dagger \vec{\hat{A}}_\mu D^\mu \tilde{H} - \tilde{H}^\dagger \vec{\hat{A}}_\mu \vec{\hat{A}}^\mu \tilde{H} \end{aligned}$$

Notando que aqui, $\vec{\hat{A}}^\mu$ não inclui os glúons pelo fato do Higgs não se acoplar, à nível de árvore, a eles. Incluímos o potencial de Higgs pela sua relevância na geração de massa aos férmions do

Modelo Padrão. O potencial de Higgs desacoplado é dado por:

$$\begin{aligned}
V(\hat{H}) = V(H, \tilde{H}) = V(H - \tilde{H}) &= \frac{\lambda}{4} \left(H^\dagger H - \frac{v^2}{2} \right)^2 + \frac{\lambda}{2} \left(H^\dagger H - \frac{v^2}{2} \right) \tilde{H}^\dagger \tilde{H} \\
&- \frac{\lambda}{2} \left(H^\dagger H - \frac{v^2}{2} \right) (\tilde{H}^\dagger H + H^\dagger \tilde{H}) + \frac{\lambda}{4} \left[(H^\dagger \tilde{H})^2 + (\tilde{H}^\dagger H)^2 + (\tilde{H}^\dagger \tilde{H})^2 \right. \\
&\left. + 2(H^\dagger \tilde{H})(\tilde{H}^\dagger H) - 2(H^\dagger \tilde{H})(\tilde{H}^\dagger \tilde{H}) - 2(\tilde{H}^\dagger H)(\tilde{H}^\dagger \tilde{H}) \right]
\end{aligned} \tag{3.5.7}$$

No calibre unitário, o dubleto de Higgs ordinário H assume sua forma padrão, diferentemente, o dubleto LW de Higgs possui maior liberdade de definição, podendo incluir uma excitação carregada LW, \tilde{h}^+ , e uma excitação pseudoescalar LW, \tilde{P} :

$$H = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+h}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \tilde{H} = \begin{pmatrix} \tilde{h}^+ \\ \frac{\tilde{h}+i\tilde{P}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{3.5.8}$$

Vamos assumir que o valor esperado de vácuo de \tilde{H} é nulo. Os termos quadráticos no potencial de autointeração que vão contribuir à massa do Higgs são:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{mass,H} &= -\frac{\lambda v^2}{4} \left(H^\dagger H + \tilde{H}^\dagger \tilde{H} \right) + M_H^2 \tilde{H}^\dagger \tilde{H} = \\
&= -\frac{\lambda v^2}{4} (h - \tilde{h})^2 + \frac{M_H^2}{2} (\tilde{h}\tilde{h} + \tilde{P}\tilde{P} + 2\tilde{h}^+\tilde{h}^-)
\end{aligned} \tag{3.5.9}$$

Para os campos de Lee-Wick da Simetria $SU_L(2) \times U_Y(1)$, o com o valor esperado de vácuo do Higgs vai induzir um mixing de massa entre \tilde{W}_μ^3 e \tilde{B}_μ , que diferentemente dos campos ordinários, também apresentam, cada um, uma massa de Lee-Wick (input do nosso modelo).

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{mass,LW} &= \frac{g_2^2 v^2}{8} (\tilde{W}_\mu^a \tilde{W}_a^\mu) - \frac{g_1 g_2 v^2}{4} \tilde{W}_\mu^3 \tilde{B}^\mu + \frac{g_1^2 v^2}{8} \tilde{B}_\mu \tilde{B}^\mu - \frac{M_1^2}{2} \tilde{B}_\mu \tilde{B}^\mu \\
&- \frac{M_2^2}{2} \tilde{W}_\mu^a \tilde{W}_a^\mu
\end{aligned} \tag{3.5.10}$$

Nota-se que consideramos que o LW-Higgs possui valor esperado de vácuo nulo e que não quebra espontaneamente nenhuma simetria do modelo padrão. Os autoestados de massa são obtidos diagonalizando-se a matriz de massa resultante:

$$\begin{pmatrix} \tilde{W}^3 \\ \tilde{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{V} \end{pmatrix} \tag{3.5.11}$$

O ângulo de mixing é então obtido diagonalizando-se a matriz de massa de maneira análoga ao que foi feito na seção sobre o Campo de Higgs:

$$\tan 2\phi = \frac{g_1 g_2 v^2}{2} \left(M_1^2 - M_2^2 + (g_2^2 - g_1^2) \frac{v^2}{4} \right)^{-1} \tag{3.5.12}$$

Dos resultados obtidos até hoje no LHC, M_1 e M_2 são de, no mínimo, da ordem de TeV.

Também há um mixing entre os campos ordinários e os campos de LW em \mathcal{L}_{Higgs} oriundos dos termos:

$$i(D_\mu H)^\dagger \vec{A}^\mu H - iH^\dagger \vec{A}_\mu D^\mu H \quad (3.5.13)$$

O mixing resultante é:

$$\mathcal{L}_{mixing} = M_W^2 (W_\mu^+ \tilde{W}^{-\mu} + \tilde{W}_\mu^+ W^{-\mu}) + M_Z^2 Z_\mu (\cos \theta_W \tilde{W}^{3\mu} - \sin \theta_W \tilde{B}^\mu) \quad (3.5.14)$$

Onde θ_W é o ângulo de Weinberg e M_W e M_Z são, respectivamente, as massas do Modelo Padrão dos bósons W e Z.

3.5.1.2 Setor Higgs-Quarks

Sejam \hat{Q}_L^i quark levógiro de i -ésima geração e \hat{L}^j o dubleto de sabor leptônico de j -ésima geração, temos

$$\hat{Q}_L^i = \begin{pmatrix} u_L^i - \tilde{u}_L^i \\ d_L^i - \tilde{d}_L^i \end{pmatrix} \quad (3.5.15)$$

$$\hat{L}^j = \begin{pmatrix} e_L^j - \tilde{e}_L^j \\ \nu_L^j \end{pmatrix} \quad (3.5.16)$$

os singletos dextrógiros de sabor up e down são, respectivamente $\hat{u}_R^i = u_R^i - \tilde{u}_R^i$ e $\hat{d}_R^i = d_R^i - \tilde{d}_R^i$, o singlete dextrógiro de sabor leptônico é $\hat{e}_R^i = e_R^i - \tilde{e}_R^i$.

Vamos construir a Lagrangiana de Yukawa usando o Minimal Flavor Violation (MFV) na teoria de ordem superior. O Minimal Flavor Violation afirma que a quebra da simetria de sabor $SU_{Q_L}(3) \times SU_{u_R}(3) \times SU_{d_R}(3)$ envolvendo diferentes gerações de quarks levógiros Q_L e quarks dextrógiros up u_R e down d_R ocorre exclusivamente através do acoplamento de Yukawa, de forma que qualquer quebra dessa simetria ocorre através de acoplamentos que se transformam da mesma forma que o acoplamento de Yukawa $g_{u,d}^{ij}$, onde i e j são índices de geração de quarks. Feitas essas definições, a Lagrangiana de Yukawa assume a forma:

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = g_u^{ij} \overline{\hat{u}_R^i} \hat{H} \epsilon \hat{Q}_L^j - g_d^{ij} \overline{\hat{d}_R^i} \hat{H} \hat{Q}_L^j - g_e^{ij} \overline{\hat{e}_R^i} \hat{H} \hat{L}_L^j + h.c. \quad (3.5.17)$$

Onde $h.c.$ significa o hermitiano conjugado da soma dos termos anteriores. O objeto $\epsilon = i\sigma_2$ onde σ_2 é matriz de Pauli indica a interação de Yukawa da Representação Complexo conjugada do Higgs com os singletos \hat{u}_R , elucidada no Capítulo 2. Decompondo os campos da teoria de ordem superior nos modos ordinário e Lee-Wick usando os métodos já explicitados, a Lagrangiana de Yukawa torna-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y = & g_u^{ij} (\overline{u_R^i} - \overline{\tilde{u}_R^i}) (H - \tilde{H}) \epsilon (Q_L^j - \tilde{Q}_L^j) - g_d^{ij} (\overline{d_R^i} - \overline{\tilde{d}_R^i}) (H - \tilde{H}) (Q_L^j - \tilde{Q}_L^j) \\ & - g_e^{ij} (\overline{e_R^i} - \overline{\tilde{e}_R^i}) (H - \tilde{H}) (L_L^j - \tilde{L}_L^j) + h.c. \end{aligned} \quad (3.5.18)$$

Assim, haverão novas interações do Higgs com os férmions Lee-Wick além de um mixing de massa entre os férmions LW e os férmions ordinários. Os vértices das interações de Yukawa são os mais simples, usando como exemplo os quarks u_R , temos:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} H \\ \vdots \\ \swarrow \quad \searrow \\ Q_L^j \quad \bar{u}_R^i \end{array} & = ig_u^{ij}, & \begin{array}{c} H \\ \vdots \\ \swarrow \quad \searrow \\ \tilde{Q}_L^j \quad \bar{u}_R^i \end{array} & = -ig_u^{ij} & (3.5.19)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} H \\ \vdots \\ \swarrow \quad \searrow \\ Q_L^j \quad \bar{\tilde{u}}_R^i \end{array} & = -ig_u^{ij}, & \begin{array}{c} H \\ \vdots \\ \swarrow \quad \searrow \\ \tilde{Q}_L^j \quad \bar{u}_R^i \end{array} & = ig_u^{ij} & (3.5.20)
 \end{array}$$

As interações dos férmions LW com o Higgs irão cancelar a divergência quadrática de massa do Higgs ao somarmos todos os diagramas envolvidos para a correção de massa do Higgs. Vamos demonstrar agora como isso acontece considerando os loops, por simplicidade, faremos a conta apenas envolvendo os quarks \bar{u}_R^i :

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} p+k \\ \curvearrowright \\ Q_L \\ \curvearrowleft \\ \bar{u}_R \\ k \end{array} & \text{---} H \text{---} H & , & \begin{array}{c} p+k \\ \curvearrowright \\ \tilde{Q}_L \\ \curvearrowleft \\ \bar{u}_R \\ k \end{array} & \text{---} H \text{---} H & (3.5.21)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} p+k \\ \curvearrowright \\ Q_L \\ \curvearrowleft \\ \bar{\tilde{u}}_R \\ k \end{array} & \text{---} H \text{---} H & , & \begin{array}{c} p+k \\ \curvearrowright \\ \tilde{Q}_L \\ \curvearrowleft \\ \bar{u}_R \\ k \end{array} & \text{---} H \text{---} H & (3.5.22)
 \end{array}$$

Denotando por m_Q a massa dos férmions ordinários e por M_Q a massa dos férmions Lee-Wick, temos:

$$\begin{aligned}
 i\Sigma_{2,a}(p) &= (ig_u^{ij})(ig_u^{lm}) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \delta_{jl} \delta_{im} \frac{\text{Tr}[(\not{p} + \not{k} + m_Q)(\not{k} + m_Q)]}{[(p+k)^2 - m_Q^2 + i\epsilon][k^2 - m_Q^2 + i\epsilon]} \\
 &= (ig_u^{ij})(ig_{u,ij}) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr}[(\not{p} + \not{k} + m_Q)(\not{k} + m_Q)]}{[(p+k)^2 - m_Q^2 + i\epsilon][k^2 - m_Q^2 + i\epsilon]} & (3.5.23)
 \end{aligned}$$

A integral está resolvida no capítulo 1, o resultado dela aqui é simplesmente a substituição de M (a massa presente no capítulo 1) por m_Q . Vamos deixar o resultado obtido da Regularização dimensional em $d = 4 - \varepsilon$ numa forma conveniente:

$$i\Sigma_{2,a}(p) = \frac{(ig_u^{ij})(ig_{u,ij})}{4\pi^2} \left(\frac{-6}{\varepsilon} - 1 + 3 \ln(4\pi\mu^2 e^\gamma) \right) \int_0^1 dx \Delta_a \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \ln \Delta_a \right) \quad (3.5.24)$$

Com $\Delta_a = m_Q^2 - p^2 x(1-x)$. A parte sensível às massas dos férmions na escala de massa acima do quark top é:

$$-\frac{(ig_u^{ij})(ig_{u,ij})}{4\pi^2} \int_0^1 dx \Delta_a \quad (3.5.25)$$

Analogamente, para o loop (d), temos:

$$\begin{aligned} i\Sigma_{2,d}(p) &= (ig_u^{ij})(ig_{u,ij}) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr}[(\not{p} + \not{k} + M_Q)(\not{k} + M_Q)]}{[(p+k)^2 - M_Q^2 + i\epsilon][k^2 - M_Q^2 + i\epsilon]} \\ &= \frac{(ig_u^{ij})(ig_{u,ij})}{4\pi^2} \left(\frac{-6}{\varepsilon} - 1 + 3 \ln(4\pi\mu^2 e^\gamma) \right) \int_0^1 dx \Delta_d \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \ln \Delta_d \right) \end{aligned} \quad (3.5.26)$$

Com $\Delta_d = M_Q^2 - p^2 x(1-x)$. A parte sensível às massas dos férmions na escala de massa acima do quark top oriunda da amplitude do loop (d), em $d = 4 - \varepsilon$ dimensões, está contida no termo:

$$-\frac{(ig_u^{ij})(ig_{u,ij})}{4\pi^2} \int_0^1 dx \Delta_d \quad (3.5.27)$$

Os loops (b) e (c), pelo fato de possuírem apenas 1 partícula Lee-Wick, contém um fator global -1 a mais na integral que não é compensado por uma segunda partícula Lee-Wick:

$$i\Sigma_b(p) = (-1)(-ig_u^{ij})(-ig_{u,ij}) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr}[(\not{p} + \not{k} + M_Q)(\not{k} + m_Q)]}{[(p+k)^2 - M_Q^2 + i\epsilon][k^2 - m_Q^2 + i\epsilon]} \quad (3.5.28)$$

Aplicando a Regularização Dimensional, temos:

$$i\Sigma_b(p) = (-1)(-ig_u^{ij})(-ig_{u,ij})\mu^\varepsilon \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{d(k^2 + (p \cdot k) + m_Q M_Q)}{[(p+k)^2 - M_Q^2 + i\epsilon][k^2 - m_Q^2 + i\epsilon]} \quad (3.5.29)$$

Na Parametrização de Feynman (vide Apêndice B), temos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{[(p+k)^2 - M_Q^2 + i\epsilon][k^2 - m_Q^2 + i\epsilon]} = \\ &= \int_0^1 dx \frac{1}{[x((p+k)^2 - M_Q^2 + i\epsilon) + (1-x)(k^2 - m_Q^2 + i\epsilon)]^2} \end{aligned} \quad (3.5.30)$$

Vamos completar quadrados no denominador:

$$\begin{aligned} x((p+k)^2 - M_Q^2 + i\epsilon) + (1-x)(k^2 - m_Q^2 + i\epsilon) &= \\ &= (k+px)^2 - p^2 x^2 + p^2 x - m_Q^2 - x(M_Q^2 - m_Q^2) + i\epsilon \equiv l^2 - \Delta_b \end{aligned} \quad (3.5.31)$$

Com $l = k^\mu + p^\mu x$ e $\Delta_b = m_Q^2 + x(M_Q^2 - m_Q^2) - p^2 x(1-x)$. O numerador então é:

$$k^2 + k \cdot p + m_Q M_Q = l^2 + \Delta_b + m_Q(M_Q - 1) - x(m_Q^2 - M_Q^2) \quad (3.5.32)$$

Logo

$$i\Sigma_b(p) = -(ig_u^{ij})(ig_{u,ij})d\mu^\varepsilon \int_0^1 dx \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \left[\frac{l^2}{(l^2 - \Delta_b)^2} + \frac{\Delta_b}{(l^2 - \Delta_b)^2} + \frac{m_Q(M_Q - 1) - x(M_Q^2 - m_Q^2)}{(l^2 - \Delta_b)^2} \right] \quad (3.5.33)$$

Já sabemos a resolução dos primeiros dois termos em $d = 4 - \varepsilon$ dimensões, que são análogos aos casos anteriores a menos de um sinal global e uma outra definição para Δ_b , a contribuição de massa sensível ao ultravioleta é:

$$\frac{(ig_u^{ij})(ig_{u,ij})}{4\pi^2} \int_0^1 dx \Delta_b \quad (3.5.34)$$

O caso (c) é idêntico ao caso (b) após a troca $m_Q \leftrightarrow M_Q$, logo $\Delta_c = M_Q^2 + x(m_Q^2 - M_Q^2) - p^2 x(1 - x)$. Assim podemos somar as contribuições sensíveis ao ultravioleta desses quatro loops:

$$\frac{(ig_u^{ij})(ig_{u,ij})}{4\pi^2} \int_0^1 dx \underbrace{(\Delta_b + \Delta_c - \Delta_a - \Delta_d)}_0 = 0 \quad (3.5.35)$$

Essa contribuição que é anulada na soma é a única que envolve o loop contendo exclusivamente correntes de quarks ordinários. É justamente dessa maneira que a Extensão do Modelo Padrão de Lee-Wick resolve o problema da hierarquia do Modelo Padrão. O termo restante em $i\Sigma_b$ e $i\Sigma_c$ resulta do mixing entre quarks LW e quarks ordinários, que pode ser desprezada se consideramos esse mixing como uma perturbação, além disso, estes termos restantes resultam em divergências logarítmicas à altas energias. As interações entre os férmions Lee-Wick e férmions ordinários naturalmente resulta no decaimento dos primeiros nos segundos, de forma que a energia indetectada nos experimentos em aceleradores seja atribuída aos neutrinos, como usual.

4 Capítulo 4 - A fenomenologia do Modelo Padrão de Lee-Wick

Neste capítulo, apresentaremos um pouco da fenomenologia da teoria estudada. Começaremos falando um pouco sobre a viabilidade da teoria, estabelecendo limites mínimos para a massa de algumas partículas Lee-Wick, para depois analisarmos se a escala de energia atual dos maiores colisores, como o LHC, é compatível ao modelo. Em seguida, apresentamos alguns resultados mais recentes que apresentam possibilidades inusitadas para nova física.

4.0.1 Parâmetro Eletrofraco ρ

O mixing de massa entre os bósons Z_μ e W_μ ordinários com os bósons LW \tilde{W}_μ e \tilde{B}_μ resulta numa correção do parâmetro eletrofraco ρ , definido por

$$\rho = \frac{M_{\tilde{W}}^2}{M_Z^2 \cos^2 \theta_W} \quad (4.0.1)$$

O mixing de massa pode ser escrito em forma matricial, como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{mix} &= M_{\tilde{W}}^2 (W_\mu^+ \tilde{W}^{-\mu} + \tilde{W}_\mu^+ W^{-\mu}) + M_Z^2 (\cos \theta_W \tilde{W}^{3\mu} - \sin \theta_W \tilde{B}^\mu) \\ &= \begin{pmatrix} Z_\mu & \tilde{B}_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_Z^2 & -M_Z^2 \sin \theta_W \\ -M_Z^2 \sin \theta_W & -M_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z^\mu \\ \tilde{B}^\mu \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.0.2)$$

Os autovalores são:

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(-M_1^2 + M_Z^2 \pm \sqrt{(M_1^2 + M_Z^2)^2 + 4M_Z^2 \sin^2 \theta_W} \right) \quad (4.0.3)$$

Usando

$$(a + x)^{1/2} \Big|_{x \approx 0} \approx \sqrt{a} + \frac{1}{2} a^{-1/2} x + \dots \quad (4.0.4)$$

E identificando λ_+ como a massa corrigida do bóson Z, temos:

$$\begin{aligned} M_Z'^2 &= \lambda_+ \approx M_Z^2 + \frac{M_Z^4 \sin^2 \theta_W}{M_1^2 - M_Z^2} \simeq M_Z^2 + \frac{M_Z^4 \sin^2 \theta_W}{M_1^2} \\ \Rightarrow \rho'^{-1} &= \frac{M_Z'^2 \cos^2 \theta_W}{M_{\tilde{W}}^2} = \frac{M_Z'^2}{M_Z^2} = 1 + \frac{M_Z^2 \sin^2 \theta_W}{M_1^2} \\ M_1^2 &\gg M_Z^2 \Rightarrow \frac{M_Z^2 \sin^2 \theta_W}{M_1^2} \ll 1 \end{aligned} \quad (4.0.5)$$

Substituindo os valores das massas $M_{\tilde{W}}^2$ e M_Z^2 no Modelo Padrão usual (cujos valores encontram-se no capítulo 2), obtemos $\rho = 1$. O mixing então vai introduzir uma correção à tree-level dada por

$$\Delta\rho = \rho - 1 = -\frac{\sin^2 \theta_W M_Z^2}{M_1^2} \quad (4.0.6)$$

Atualmente o vínculo para este parâmetro é $|\Delta\rho| < 10^{-4}$ [Workman et al. 2022], resultando em $M_1 > 1TeV$.

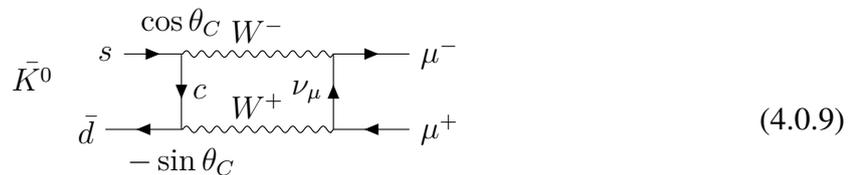
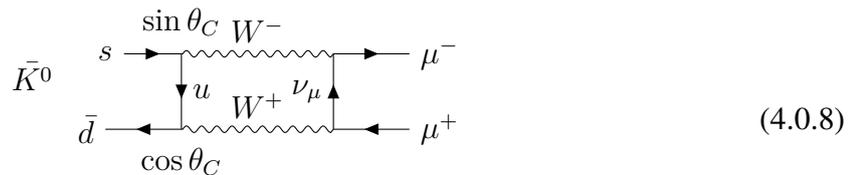
4.0.2 Flavor Changing Neutral Currents e Flavor Changing Charged Currents

Aqui apresentamos a fenomenologia investigada em [Dulaney e Wise 2008].

"Flavor Changing Neutral Currents"(FCNC, correntes neutras que mudam de sabor) são processos hipotéticos de natureza eletrofraca previstos pelo modelo padrão além do tree-level que ainda não foram observados experimentalmente e violam conservação de sabor. Um exemplo é o diagrama:



Que corresponde a um decaimento $\tau \rightarrow \gamma e^-$. Outros exemplos são



Onde θ_C é o ângulo de Cabibbo, os senos e cossenos sinalizam as projeções entre os autoestados de sabor sobre os autoestados de massa (físicos) nos vértices. Nota-se que se a massa dos quarks up e charm fossem idênticas, as duas amplitudes se anulariam. Ainda sim, ocorre a supressão do processo $\bar{K}^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ devido a soma dessas amplitudes. Esta supressão é denominada um mecanismo GIM [Glashow, Iliopoulos e Maiani 1970] e ela é maior quanto menor o ângulo de mixing entre os autoestados de sabor resultante nos autoestados de massa.

Os termos de derivadas de ordem superior da Lagrangiana de Lee-Wick no setor eletrofraco irão introduzir novos acoplamentos Flavor Changing entre os quarks ordinários mediados pelos bósons Z (FCNC) e pelos bósons W, estes últimos originando "Flavor Changing Charged Currents"(FCCC, correntes carregadas que mudam de sabor) [Dulaney e Wise 2008]. Neste artigo, o termo de ordem superior é tratado como uma perturbação onde os férmions LW são integrados no funcional gerador para dar origem à uma teoria efetiva à baixas energias. Através disso, podemos investigar novos processos físicos possíveis resultantes além do Modelo Padrão resultantes de uma Teoria de Lee-Wick em escalas de energia acessíveis.

A Lagrangiana cinética de ordem superior no setor de sabor é introduzida como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{hd}^{(kin)} = & \bar{Q}_L^i i \hat{D} Q_L^i + r_Q^{ij} \bar{Q}_L^i i \hat{D}^3 Q_L^j + \bar{L}_L^i i \hat{D} L_L^i + r_L^{ij} \bar{L}_L^i i \hat{D}^3 L_L^j \\ & + \bar{u}_R^i i \hat{D} u_R^i + r_u^{ij} \bar{u}_R^i i \hat{D}^3 u_R^j + \bar{d}_R^i i \hat{D} d_R^i + r_d^{ij} \bar{d}_R^i i \hat{D}^3 d_R^j \\ & + \bar{e}_R^i i \hat{D} e_R^i + r_e^{ij} \bar{e}_R^i i \hat{D}^3 e_R^j \end{aligned} \quad (4.0.10)$$

Os índices i e j são índices de geração de férmions e suas repetições aos pares indicam soma. As matrizes r_Q, r_L, r_u, r_d e r_e são matrizes hermitianas de massa dos férmions LW e podem misturar gerações diferentes. Elas são definidas como

$$r_X = (M_X^{-1})^\dagger (M_X^{-1}), \quad X = Q, L, U, D, E \quad (4.0.11)$$

Onde Q, L, U, D, E refere-se, respectivamente, ao quark levógiro, ao lépton levógiro, ao quark dextrógiro de isospin fraco up, ao quark dextrógiro de isospin fraco down, e ao lépton levógiro. A diagonalização dos autoestados de massa LW é dada por:

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{L/R} & \mapsto Y(\tilde{X}_{L/R})\tilde{X}_{L/R} \\ Y(\tilde{X}_L)^\dagger M_{\tilde{X}} Y(\tilde{X}_R) & = M_{\tilde{X}}^{diag} \end{aligned} \quad (4.0.12)$$

Onde Y são transformações unitárias, logo temos $M_{\tilde{X}} = Y(\tilde{X}_L) M_{\tilde{X}}^{diag} Y(\tilde{X}_R)^\dagger$, o que implica em:

$$r_{\tilde{X}} = Y(\tilde{X}_L) \left(\frac{1}{M_{\tilde{X}}^{diag}} \right)^2 Y(\tilde{X}_R)^\dagger \quad (4.0.13)$$

Assim, a lagrangiana de Yukawa nos autoestados de massa é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y = & g_u^{ij} (\bar{u}_R^i - \bar{u}_R^i Y(\tilde{u}_R^i)^\dagger) (H - \tilde{H}) \epsilon (Q_L^j - Y(\tilde{Q}_L^j) \tilde{Q}_L^j) \\ & - g_d^{ij} (\bar{d}_R^i - \bar{d}_R^i Y(\tilde{d}_R^i)^\dagger) (H - \tilde{H}) (Q_L^j - Y(\tilde{Q}_L^j) \tilde{Q}_L^j) \\ & - g_e^{ij} (\bar{e}_R^i - \bar{e}_R^i Y(\tilde{e}_R^i)^\dagger) (H - \tilde{H}) (L_L^j - Y(\tilde{L}_L^j) \tilde{L}_L^j) + h.c. \end{aligned} \quad (4.0.14)$$

Na presença de MFV, as matrizes $Y(\tilde{X})$ são proporcionais à matriz identidade, logo todos os quarks envolvidos quebram a simetria de sabor $SU_{Q_L}(3) \times SU_{u_R}(3) \times SU_{d_R}(3)$ da mesma maneira, dada exclusivamente pela transformação dos acoplamentos de Yukawa. Podemos então, num regime a baixas energias, calcular a Lagrangiana efetiva do Modelo pela integração dos férmions LW no funcional gerador à baixas energias.

A Lagrangiana Efetiva foi obtida ao integrar-se os diagramas:

$$(4.0.15)$$

Os três diagramas superiores numa Teoria efetiva irão resultar em FCNCs envolvendo o bóson Z, enquanto que os dois diagramas inferiores irão resultar em FCCCs envolvendo os bósons W. Podemos visualizar isso pois, numa Teoria de baixas energias, o tempo de vida das partículas Lee-Wick é curto demais para que sejam detectáveis, de tal forma que podemos reduzir, diagramaticamente, seus propagadores à um vértice efetivo de interação, por exemplo:

$$(4.0.16)$$

A Lagrangiana efetiva obtida é:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(eff)} = & \bar{u}_R(g_u r_Q g_u^\dagger) H^T \epsilon i \not{D}(\epsilon H^* u_R) - \bar{d}_R(g_d r_Q g_d^\dagger) H^\dagger i \not{D}(H d_R) \\
& - \bar{e}_R(g_e r_L g_e^\dagger) H^\dagger i \not{D}(H e_R) + [\bar{Q}_L](g_u^\dagger r_u g_u) i \not{D}[H^T \epsilon Q_L] \\
& - [\bar{Q}_L H](g_d^\dagger r_d g_d) i \not{D}[H^\dagger Q_L] - [\bar{L}_L H](g_e r_e g_e) i \not{D}[H^\dagger L_L] \\
& - \{ \bar{d}_R(g_d r_q g_u) H^\dagger i \not{D}[\epsilon H^* u_R] + h.c. \}
\end{aligned}
\tag{4.0.17}$$

Onde os colchetes [] indicam a contração de índices de $SU(2)$ dos dubletos e a contração de índices de geração de férmions está subentendida em todos os termos. No valor esperado de vácuo do Higgs, as massas dos férmions são

$$m_x = g_x v / \sqrt{2}, \quad x = u, d, e \tag{4.0.18}$$

As massas são diagonalizadas por transformações unitárias $\mathcal{U}(x, L/R)$:

$$\begin{aligned}
x_L & \mapsto \mathcal{U}(x, L) x_L, \quad x_R \mapsto \mathcal{U}(x, R) x_R \\
\mathcal{U}(x, R)^\dagger m_x \mathcal{U}(x, L) & = m_x^{(d)} \\
\mathcal{U}(x, R)^\dagger g_x \mathcal{U}(x, L) & = g_x^{(d)} = g_x^{(d)\dagger}
\end{aligned}
\tag{4.0.19}$$

Trabalhando no valor esperado do Higgs e nas massas diagonalizadas, temos, por exemplo:

$$\begin{aligned}
& \bar{u}_R(g_u r_Q g_u^\dagger) H^T \epsilon i \not{D}(\epsilon H^* u_R) \\
& \mapsto \bar{u}_R(\mathcal{U}(u, R)^\dagger g_u^{(d)} \underbrace{\mathcal{U}(u, R) r_Q \mathcal{U}(u, R)^\dagger}_{r_Q \mathcal{U}(u, R) \mathcal{U}(u, R)^\dagger = r_Q} g_u^{(d)} \mathcal{U}(u, R)) H^T \epsilon i \not{D}(\epsilon H^* u_R) \\
& \xrightarrow{v.e.v} \bar{u}_R(\mathcal{U}(u, R)^\dagger r_Q \mathcal{U}(u, R)) \underbrace{H^T g_u^{(d)}}_{m_u^{(d)}} \epsilon i \not{D}(\epsilon \underbrace{g_u^{(d)} H^*}_{m_u^{(d)}} u_R)
\end{aligned}
\tag{4.0.20}$$

Trabalhando nos autoestados de massa, a Lagrangiana efetiva resulta em novos acoplamentos

entre os bósons Z e W com os fermions além do Modelo Padrão, dados por $\Delta\mathcal{L}_Z$ e $\Delta\mathcal{L}_W$:

$$\begin{aligned}
\Delta\mathcal{L}_Z = & \sqrt{g_1^2 + g_2^2} Z_\mu [\bar{u}_R m_u^{(d)} (\mathcal{U}(u, L)^\dagger r_Q \mathcal{U}(u, L)) m_u^{(d)} \gamma^\mu u_R \\
& + \bar{d}_R m_d^{(d)} (\mathcal{U}(d, L)^\dagger r_Q \mathcal{U}(d, L)) m_d^{(d)} \gamma^\mu d_R \\
& + \bar{e}_R m_e^{(d)} (\mathcal{U}(e, L)^\dagger r_L \mathcal{U}(e, L)) m_e^{(d)} \gamma^\mu e_R \\
& + \bar{u}_L m_u^{(d)} (\mathcal{U}(u, R)^\dagger r_u \mathcal{U}(u, R)) m_u^{(d)} \gamma^\mu u_L \\
& + \bar{d}_L m_d^{(d)} (\mathcal{U}(d, L)^\dagger r_d \mathcal{U}(d, L)) m_d^{(d)} \gamma^\mu d_L \\
& + \bar{e}_L m_e^{(d)} (\mathcal{U}(e, R)^\dagger r_e \mathcal{U}(e, R)) m_e^{(d)} \gamma^\mu e_L]
\end{aligned} \tag{4.0.21}$$

A matriz de acoplamento em $\Delta\mathcal{L}_Z$ é uma rotação unitária sobre os acoplamentos de derivada de ordem superior r_X^{ij} . Há também uma FCNC que viola conservação de família de léptons, podendo resultar num vértice $\mu^\pm \rightarrow Z e^\pm$.

No modelo Padrão, o múon decai predominantemente no processo $\Gamma(\mu \rightarrow e \bar{\nu}_e \nu_\mu)$. Considerando a massa dos léptons LW da ordem de TeV , temos $r_e \sim 1TeV^{-2}$. Assim podemos estimar a ordem da branching fraction:

$$\frac{\Gamma(\mu \rightarrow 3e)}{\Gamma(\mu \rightarrow e \bar{\nu}_e \nu_\mu)} \sim \left(\frac{m_e m_\mu}{(1TeV)^2} \right)^2 \sim 10^{-21} \tag{4.0.22}$$

Na presença de Minimal Flavor Violation as matrizes r_X são proporcionais à matriz identidade, logo a matriz de acoplamento de gerações pode ser escrita como:

$$MFV \Rightarrow (\mathcal{U}(X, L/R)^\dagger r_X \mathcal{U}(X, L/R)) = r_X \mathcal{U}(X, L/R)^\dagger \mathcal{U}(X, L/R) = r_X \tag{4.0.23}$$

Neste caso, não há FCNC envolvendo bóson Z .

$$\begin{aligned}
\Delta\mathcal{L}_W = & \frac{g_2}{\sqrt{2}} W_\mu^- \left[\bar{d}_R m_d^{(d)} (\mathcal{U}(d, L)^\dagger r_Q \mathcal{U}(u, L)) m_u^{(d)} \gamma^\mu u_R \right. \\
& + (1/2) \bar{d}_L K_{CKM}^\dagger m_d^{(d)} (\mathcal{U}(u, R)^\dagger r_u \mathcal{U}(u, R)) m_u^{(d)} \gamma^\mu u_L \\
& + (1/2) \bar{d}_L m_d^{(d)} (\mathcal{U}(d, R)^\dagger r_d \mathcal{U}(d, R)) m_d^{(d)} \gamma^\mu K_{CKM}^\dagger u_L + \\
& \left. (1/2) \bar{e}_L m_e^{(d)} (\mathcal{U}(e, R)^\dagger r_e \mathcal{U}(e, R)) m_e^{(d)} \gamma^\mu \nu_L \right]
\end{aligned} \tag{4.0.24}$$

Onde $K_{CKM} = \mathcal{U}(u, L)^\dagger \mathcal{U}(d, L)$ é a matriz CKM usual do Modelo Padrão. As novas interações dos quarks left com os bósons W portanto introduzem uma mudança efetiva na Matriz CKM, regulada pela massa dos férmions LW implícita em r_u e r_d . Como visto anteriormente, na presença de MFV, as matrizes de sabor envolvidas é diagonalizada e não ocorre o acoplamento efetivo entre quarks dextrogiros com os bósons W e também não há violação de família leptônica.

Por exemplo, se $M_{\tilde{X}} \sim 1TeV$, a mudança efetiva sobre o elemento de matriz $(K_{CKM})_{cb}$, por exemplo, é da ordem de:

$$\begin{aligned} & \bar{c}_L (K_{CKM}^\dagger)_{cb} m_c^{(d)} (\mathcal{U}(u, R)^\dagger r_c \mathcal{U}(u, R)) m_b^{(d)} \gamma^\mu b_L \\ \Rightarrow \Delta(K_{CKM}^\dagger)_{cb} &= \Delta(K_{CKM})_{bc} \sim \left(\frac{m_c m_b}{(1TeV)^2} \right) \sim 10^{-4} \end{aligned} \quad (4.0.25)$$

4.0.3 Fantasmas tipo-axion

No artigo [Carone 2020], propõe-se a possibilidade de estudar a existência de partículas tipo áxion¹ no Modelo Padrão de Lee-Wick através de um experimento tipo "Light Shining Through Wall" (luz brilhando através da parede). Este tipo de experimento propõe uma partícula que se acopla somente ao fóton. Colocando duas fontes de fótons em dois lados de uma parede na presença de campo magnético, é possível que o fóton, na iminência de incidir sobre a parede, produza um áxion sob interação, o áxion por sua vez, por não interagir com os férmions constituintes da parede, pode atravessá-la e então produzir fótons do outro lado, de maneira que "o fóton incidente de um lado da parede poderia atravessá-la", a este fenômeno chama-se "regeneração do fóton". A presença de um áxion Lee-Wick implicaria numa correção na probabilidade de regeneração do fóton após atravessar uma parede. A partícula axiônica considerada no artigo pode ser tanto de natureza escalar quanto pseudoescalar. O áxion pseudoescalar ordinário acopla-se ao campo eletromagnético da seguinte forma:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu a \partial^\mu a - \frac{1}{2} m^2 a^2 + \frac{1}{4} g_{a\gamma\gamma} a \tilde{F}_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (4.0.26)$$

Onde a é o áxion pseudoescalar e $\tilde{F}_{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$ é o dual do campo eletromagnético. Numa teoria de derivada de ordem superior, a lagrangiana do áxion é:

$$\mathcal{L}_{h.d.,axion} = -\frac{1}{2} \hat{a} \square \hat{a} - \frac{1}{2} m^2 \hat{a}^2 - \frac{1}{2M^2} \hat{a} \square^2 \hat{a} \quad (4.0.27)$$

Podemos usar o truque do campo auxiliar de Lee-Wick definindo $\hat{a} = a - \tilde{a}$, onde a é o áxion ordinário e \tilde{a} o áxion Lee-Wick. Usando o áxion Lee-Wick como campo auxiliar, obtemos, analogamente ao caso do campo escalar no início do capítulo 3, a Lagrangiana equivalente:

$$\mathcal{L}_{\hat{a}xion} = -\frac{1}{2} a \square a + \frac{1}{2} \tilde{a} \square \tilde{a} - \frac{1}{2} m^2 (a - \tilde{a})^2 + \frac{1}{2} M^2 \tilde{a}^2 + \mathcal{L}_{int}(a - \tilde{a}) \quad (4.0.28)$$

Diagonalizamos as massas da mesma maneira (através de uma rotação simplética) e obtemos:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} a_0 \square a_0 + \frac{1}{2} \tilde{a}_0 \square \tilde{a}_0 - \frac{1}{2} m_0 a_0^2 + \frac{1}{2} M_0^2 \tilde{a}_0^2 + \mathcal{L}_{int}(e^{-\theta}(a_0 - \tilde{a}_0)) \quad (4.0.29)$$

Assim a interação dos áxions de massas diagonalizadas com o campo eletromagnético torna-se

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{1}{4} g_{a\gamma\gamma} e^{-\theta} (a_0 - \tilde{a}_0) \tilde{F}_{\mu\nu} F^{\mu\nu}.$$

¹ O áxion é uma partícula hipotética proposta para resolver o problema CP forte da interação forte através do mecanismo de Peccei-Quinn. Para mais informações, vide [Peccei e Quinn 1977]. Além disso, também são candidatos à matéria escura.

Vamos considerar uma parede em $x = L/2$ e duas regiões de potenciais clássicos distintos $V(x)_L$ para $-L/2 \leq x \leq L/2$ e $V(x)_R$ para $L/2 \leq x \leq 3L/2$, onde a primeira fica à esquerda da parede enquanto a segunda fica à direita da parede (a parede é considerada fina e localizada). Considerando um áxion como o estado intermediário que atravessa a parede descrito pelo experimento em questão, este interage com o campo eletromagnético imediatamente antes de incidir sobre a parede e imediatamente depois de emergir dela. Considerando um dos tensores de Faraday envolvidos na interação como a fonte clássica e para uma primeira conta, desconsideraremos a presença do áxion LW, neste caso podemos descrever a amplitude de regeneração do fóton como:

$$i\mathcal{M} = \frac{g_{a\gamma\gamma}}{4} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon^{\rho\sigma\kappa\eta} \epsilon_\mu(p) \epsilon_\rho^*(p') p_\nu p'_\sigma \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m_0^2 + i\epsilon} [iF_{\alpha\beta}^{cl}(q-p)_L] [iF_{\kappa\eta}^{cl}(p'-q)_R] \quad (4.0.30)$$

Onde q é o momentum do áxion, e p e p' são, respectivamente, o momentum do fóton incidente e do fóton emergente. Os campos $F_{\alpha\beta}^{cl}$ são os campos aqui considerados clássicos. As polarizações do fóton incidente e do fóton emergente são, respectivamente $\epsilon_\mu(p)$ e $\epsilon_\rho^*(p')$. A presença dos pseudotensores de Levi-Civita e os momenta $p_\nu p'_\sigma$ vem da função de vértice obtida após a consideração de um dos campos como campo clássico (sobre o qual não se toma a derivada funcional na derivação do vértice), o fator combinatório resulta das 4 possibilidades de escolha do campo eletromagnético para ser o campo clássico considerando os dois vértices envolvidos no espalhamento. No referencial de laboratório, vamos assumir a fonte clássica como um campo magnético $\vec{B} = B_z \hat{z}$ com

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B_z & 0 \\ 0 & B_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_\mu = \begin{pmatrix} \omega \\ \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon^\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.0.31)$$

Substituindo esses valores na amplitude resultante, temos:

$$|\mathcal{M}|^2 = g_{a\gamma\gamma}^2 \omega^2 (p_0'^2 - p_3'^2) |I_0(p', p)|^2 \quad (4.0.32)$$

$$I_0(p', p) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{B_{z,L}(q-p) B_{z,R}(p'-q)}{q^2 - m_0^2 + i\epsilon}$$

Para campo magnético de valor constante $B_z = B_0$ e assumindo que o fóton incidente tenha pacote de onda suficientemente localizada no plano yz , podemos trabalhar com as componentes de Fourier do campo magnético na direção x (vamos tomar a transformada de Fourier apenas na direção x):

$$\int_{-L/2}^{L/2} dx B_{z,L}(x) e^{-iq_1 x} = B_0 L \frac{\sin(q_1 L/2)}{q_1 L/2} \equiv B_0 L F(q_1) \quad (4.0.33)$$

$$\int_{L/2}^{3L/2} dx B_{z,R}(x) e^{-iq_1 x} = \int_{-L/2}^{L/2} dx B_{z,L}(x-L) e^{-iq_1(x-L)} = B_0 L e^{iq_1 L} F(q_1)$$

Desenvolvendo as contas nessas condições, podemos chegar à probabilidade de regeneração do fóton para quaisquer estados assintóticos de fótons incidente e emergente como:

$$P = \frac{1}{4} g_{a\gamma\gamma}^4 B_0^4 L^4 \omega^2 |I(\omega)|^2 \quad (4.0.34)$$

Onde a integral $I(\omega)$ é dada por:

$$I(\omega) = \int \frac{dq_1}{2\pi} \frac{F(q_1)^2 e^{iq_1 L}}{(q_1 + \omega)^2 - \underbrace{(\omega^2 - m_0^2)}_{\equiv k_a^2} - i\epsilon} \quad (4.0.35)$$

Fechando o contorno de integração sobre o pólo em $q_{1*} = k_a - \omega$, obtém-se:

$$P = \frac{1}{16} g_{a\gamma\gamma}^4 B_0^4 L^4 \left(\frac{\omega}{k_a} \right)^2 F(q_{1*})^4 \quad (4.0.36)$$

A conta com o áxion LW é idêntica porém com a nova integral $I'(\omega)$ resultante da interação com os modos ordinário e LW desacoplados obtidos no começo que resultará em:

$$I'(\omega) = \int \frac{dq_1}{2\pi} \frac{F(q_1)^2 e^{iq_1 L}}{(q_1 + \omega)^2 - \underbrace{(\omega^2 - m_0^2)}_{\equiv k_a^2} - i\epsilon} - \int \frac{d\tilde{q}_1}{2\pi} \frac{F(\tilde{q}_1)^2 e^{i\tilde{q}_1 L}}{(\tilde{q}_1 + \omega)^2 - \underbrace{(\omega^2 - M_0^2)}_{\equiv \tilde{k}_a^2} - i\epsilon} \quad (4.0.37)$$

Observando o fator global $e^{-\theta}$ da interação dos campos desacoplados devido à diagonalização das massas, temos:

$$P = \frac{1}{16} g_{a\gamma\gamma}^4 B_0^4 L^4 e^{-4\theta} G(\omega, m_0, M_0, L) \quad (4.0.38)$$

$$G(\omega, m_0, M_0, L) = \left[\left(\frac{\omega}{k_a} \right)^2 F(q_{1*})^4 + \left(\frac{\omega}{\tilde{k}_a} \right)^2 F(\tilde{q}_{1*})^4 - 2 \left(\frac{\omega}{k_a} \right) \left(\frac{\omega}{\tilde{k}_a} \right) F(q_{1*})^2 F(\tilde{q}_{1*})^2 \cos[(q_{1*} - \tilde{q}_{1*})L] \right]$$

A seguir apresentamos dois gráficos obtidos no artigo [Carone 2020]. Em ambos os gráficos, $G = 1$ corresponde à ausência do áxion LW. O fator $e^{-4\theta}$ é da ordem $\mathcal{O}(1)$ e também contribui na variação não desprezível observada à regeneração do fóton. Nota-se que a probabilidade de regeneração do fóton demonstra-se sensível à razão das massas do áxion e o áxion LW.

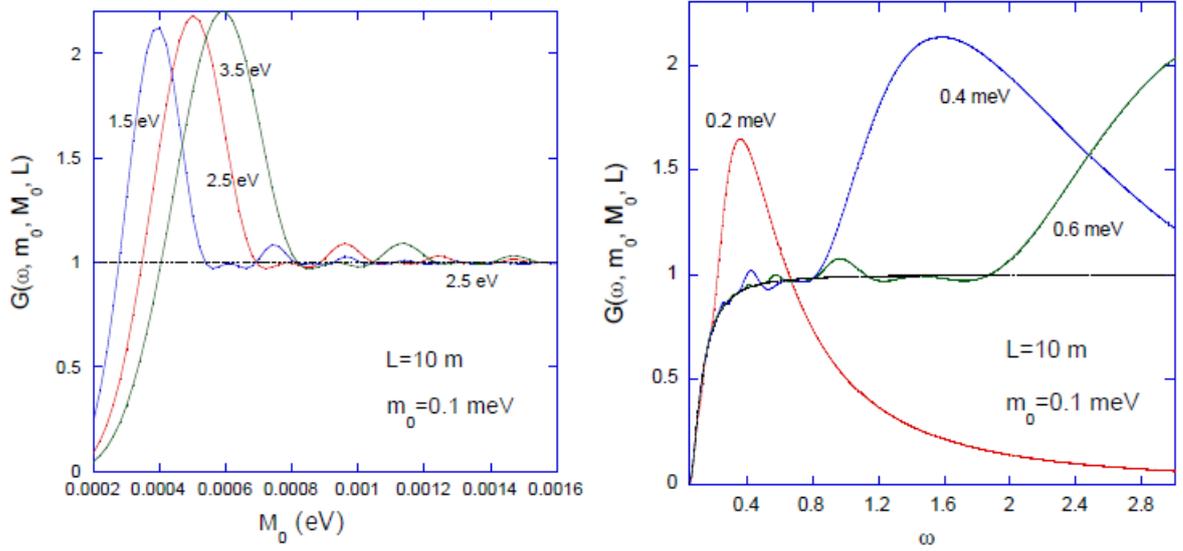


Figura 1 – Gráficos obtidos no artigo para G , o gráfico à esquerda possui as curvas rotuladas pela energia do fóton incidente, o gráfico à direita possui as curvas rotuladas pela massa do áxion LW e a escala de ω é dada em eV .

4.0.4 Potencial de Cornell emergente de Eletrodinâmica Lee-Wick

No artigo [Smailagic e Spallucci 2020], demonstra-se uma modificação proposta na Eletrodinâmica de Lee-Wick que reproduz um potencial confinante clássico. O Potencial de Cornell é um modelo fenomenológico de potencial usado para descrever o confinamento dos quarks. Ele possui um comportamento linear à grandes distâncias, dado por:

$$g_s V_C(r) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} + \sigma r \quad (4.0.39)$$

Onde $\alpha_s = g_s^2/4\pi$ é a constante de estrutura fina da interação forte, e g_s é a constante de acoplamento da mesma interação e σ é denominado tensão do tubo de fluxo². À curtas distâncias, ele exibe um caráter coulombiano enquanto que à longas distâncias, o comportamento linear domina, o que impede cargas livres no infinito e seria responsável pelo confinamento neste modelo fenomenológico. Atualmente suspeita-se que o caráter não-abeliano da cromodinâmica quântica é responsável pelo confinamento, entretanto este artigo mostra que é possível reproduzir confinamento a partir de uma teoria abeliana. A Lagrangiana da eletrodinâmica modificada proposta é:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} \left(\frac{-\partial^2}{-\partial^2 + m^2} \right) F^{\mu\nu} - e j^\mu A_\mu \quad (4.0.40)$$

² O modelo fenomenológico de tubo de fluxo consiste na descrição do confinamento dos quarks num núcleon onde a configuração de glúons como "cordas elásticas" que conectam os quarks [Bulava et al. 2019], ao aumentarmos a energia dos quarks, esses tubos podem romper-se, mas a energia para isso torna energeticamente favorável a produção de mais quarks, preservando o confinamento. Entretanto há objeções à este modelo [Krein], pois nele, a massa física do pión exibe um rompimento dos tubos à menos de 1 fermi de distância, sendo uma distância menor que o raio do nucleon, isso impossibilitaria a coesão do núcleo atômico através dessas cordas.

Onde ∂^2 é o laplaciano (tridimensional). Aqui o potencial de Cornell é uma modificação do potencial eletrostático, portanto consideraremos apenas o laplaciano na derivação. Usando $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -2(E^2 - B^2)$, com $E_i = \partial_0 A_i - \partial_i A_0$ e $B_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}(\partial^j A^k - \partial^k A^j)$, temos:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}E^i \left(\frac{-\partial^2}{-\partial^2 + m^2} \right) E_i - \frac{1}{2}B^i \left(\frac{-\partial^2}{-\partial^2 + m^2} \right) B_i - e\rho A_0 - e j^k A_k \quad (4.0.41)$$

O momentum é dado por

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_i)} = - \left(\frac{-\partial^2}{-\partial^2 + m^2} \right) F^{0i} = - \left(\frac{-\partial^2}{-\partial^2 + m^2} \right) E^i = \Pi^i \quad (4.0.42)$$

Assim a hamiltoniana obtida é (desconsiderando a componente Π^0):

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \sum_i \Pi^i \partial_0 A_i - \mathcal{L} = \underbrace{(E_i + \partial_i A_0)}_{\partial_0 A_i} \left(\frac{-\partial^2}{-\partial^2 + m^2} \right) E^i - \mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2}E^i \left(\frac{-\partial^2}{-\partial^2 + m^2} \right) E_i - \frac{1}{2}B^i \left(\frac{-\partial^2}{-\partial^2 + m^2} \right) B_i \\ &\quad - A_0 \left(e\rho - \left(\frac{-\partial^2}{-\partial^2 + m^2} \right) \partial_i E^i \right) - e j^k A_k \end{aligned} \quad (4.0.43)$$

Onde na passagem à última linha usou-se uma integração por partes sobre $\partial_i A_0$. Usando a conservação de momentum, obtemos uma Lei de Gauss modificada:

$$\partial_i E^i = -\frac{e}{\epsilon_0} \left(\frac{-\partial^2 + m^2}{-\partial^2} \right) \rho \quad (4.0.44)$$

Onde explicitamos a constante dielétrica do vácuo. A dependencia com a energia através de ∂^2 dessa nova Lei de Gauss permite uma reinterpretação de uma constante dielétrica do meio devido à polarização do vácuo. Agora vamos obter o potencial ϕ resultante.

$$E^i = -\nabla\phi \Rightarrow \partial_i E^i = -\partial^2\phi = -\frac{e}{\epsilon_0} \left(\frac{-\partial^2 + m^2}{-\partial^2} \right) \rho \quad (4.0.45)$$

Vamos admitir uma distribuição de carga gaussiana de largura finita l_0 , diagonalizando a equação do potencial em termos das componentes de fourier:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \phi(\vec{k}) \\ \rho(\vec{r}) &= \frac{1}{(2\pi l_0^2)^{3/2}} e^{-r^2/4l_0^2} \Rightarrow \rho(\vec{k}) = e^{-\vec{k}^2 l_0^2} \end{aligned} \quad (4.0.46)$$

Temos:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \vec{k}^2 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \phi(\vec{k}) &= -\frac{e}{\epsilon_0} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\vec{k}^2 + m^2}{\vec{k}^2} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{-\vec{k}^2 l_0^2} \\ \phi(\vec{r}, l_0) &= -\frac{e}{\epsilon_0} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\vec{k}^2} \left(1 + \frac{m^2}{k^2} \right) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{-\vec{k}^2 l_0^2} \end{aligned} \quad (4.0.47)$$

Se a distribuição de carga fosse puntiforme, o primeiro termo resultaria num potencial coulombiano padrão. Vamos chamar a integral resultante do primeiro termo de $\phi(r, l_0; m = 0)$ e a integral resultante do segundo de $\phi(r, l_0; m)$. Usando a parametrização de Schwinger, a integral gaussiana em n dimensões e as propriedades das funções Gamma incompletas (Vide Apêndice), temos:

$$\phi(r, l_0; m = 0) = -\frac{e}{\epsilon_0} \frac{1}{4\pi\sqrt{\pi}} \frac{1}{r} \gamma\left(\frac{1}{2}; \frac{r^2}{4l_0^2}\right) \quad (4.0.48)$$

Onde $\gamma\left(\frac{1}{2}; \frac{r^2}{4l_0^2}\right)$ é a Função Gamma Incompleta inferior. O comportamento assintótico de $\phi(r, l_0; m = 0)$ é:

$$\phi(r, l_0; m = 0) \sim \begin{cases} -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}, & r \rightarrow \infty, \\ -\frac{e}{\epsilon_0} \frac{1}{4\pi^{3/2}l_0} \left(1 - \frac{r^2}{4l_0^2 + \dots}\right), & r \ll l_0 \end{cases} \quad (4.0.49)$$

Analogamente para a parte massiva, obteve-se:

$$\phi(r, l_0; m) = -\frac{e}{\epsilon_0} \frac{m^2}{8\pi^{3/2}} \int_{l_0}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau^{1/2}} \left(1 - \frac{l_0^2}{\tau}\right) e^{-r^4/4\tau}, \quad \tau = s + l_0 \quad (4.0.50)$$

Onde s é o parâmetro da parametrização de Schwinger. Denominando $\phi(r, l_0 = 0, m)$ a integração sobre o primeiro termo, obtém-se:

$$\phi(r, l_0 = 0, m) = -\frac{e}{\epsilon_0} \frac{m^2}{8\pi^{3/2}} \frac{r}{2} \gamma(-1/2; r^2/4l_0^2) \sim \frac{em^2}{8\pi\epsilon_0} r, \quad r \gg l_0 \quad (4.0.51)$$

Que reproduz o comportamento assintótico do potencial de Cornell. Performando a integral para o termo dependente em l_0 , obtêm-se:

$$\phi(r, l_0; m) = -\frac{e}{4\pi^{3/2}\epsilon_0 r} \left[(1 - m^2 l_0^2) \gamma(1/2; r^2/4l_0^2) + \frac{m^2}{4} r^2 \gamma(-1/2; r^2/4l_0^2) \right] \quad (4.0.52)$$

Em torno da origem, o comportamento assintótico do potencial resultante é:

$$\phi(r = 0) = -\frac{e}{4\pi^{3/2}\epsilon_0 l_0} (1 - m^2 l_0^2) \quad (4.0.53)$$

A distribuição de carga regular torna o potencial finito na origem. A seguir, temos o gráfico obtido no artigo [[Smailagic e Spallucci 2020](#)] para $\phi(r, l_0; m)$ em função de r , com dois valores diferentes para $\tilde{m} = ml_0$. O gráfico ilustra a comparação do potencial de Cornell com o potencial coulombiano, ambos regularizados pela distribuição de carga, resultantes da teoria.

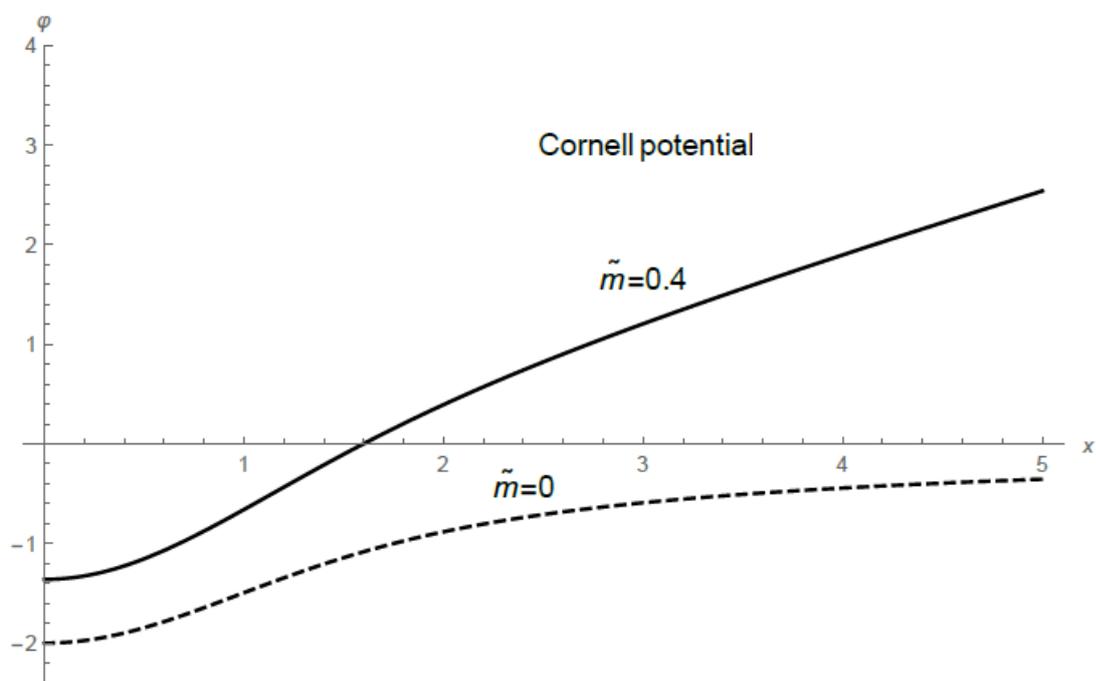


Figura 2 – Potencial de Cornell para $\tilde{m} = ml_0$. A curva pontilhada é o potencial de Coulomb regularizado pela distribuição não puntiforme de carga.

5 Capítulo 5 - Conclusão

Apresentamos uma Extensão do Modelo Padrão de Lee-Wick com derivadas de até quarta ordem e provamos que ela resolve o problema da Hierarquia associado à correção radiativa de massa do Higgs ao considerarmos os diagramas envolvendo os quarks LW enquanto consideramos a correção resultante do "mixing"(mistura) dos quarks como uma perturbação. Dessa forma, o Modelo Padrão de Lee-Wick apresenta-se como uma resolução que não requer a implementação de uma nova simetria que tornaria a massa do Higgs em tecnicamente natural. Através de power counting e análise do grau superficial de divergência, a formulação de ordem superior da teoria exhibe apenas divergências logarítmicas, uma característica desejável que evita Problemas de Hierarquia, conforme explicado na introdução. A formulação de ordem superior da teoria é equivalente a uma formulação que reproduz campos quânticos ordinários acoplados à campos fantasmas massivos, que decaem nos primeiros quando há interação entre eles e desde que os segundos possuam um limite mínimo de massa. Ao final da introdução vimos o caráter acausal de uma Teoria de Lee-Wick, como um exemplo de teoria com instabilidades de Ostrogradsky cuja existência pode ser conciliada pelas possibilidades de quantização dos campos. Esse caráter acausal é discutido em mais detalhes em [COLEMAN 1970] e pode ser desejável para novas teorias da física, como gravitação quântica. Vimos no capítulo 3, através da aplicação do Teorema ótico para a obtenção da largura de decaimento, que a causalidade distinta dos fantasmas massivos não viola a unitariedade desde que as partículas LW não apareçam no espectro assintótico da teoria.

Mostramos também alguns resultados fenomenológicos que estabelecem um limite mínimo de massa das partículas Lee-Wick na escala de TeV . Entretanto, esta é a escala de energia do atual "Run 3" do LHC [CERN 2022] ("Large Hadron Collider", Grande Colisor de Hádrons) e a ausência de partículas Lee-Wick sendo experimentalmente detectadas nesta escala de energia faz com que esse limite inferior seja empiricamente descartado. Entretanto, um artigo mais recente [Abu-Ajamieh e Chattopadhyay 2024] apresenta "lower bounds"(limites inferiores) maiores na massa dos férmions Lee-Wick a partir de correções sobre os fatores de forma do vértice usual da QED devido à presença das partículas Lee-Wick, no caso dos neutrinos serem férmions de Dirac, este limite inferior é da ordem de $10^4 TeV$, o que é mais favorável à este modelo. Apresentamos nesta dissertação uma fenomenologia baseada em teorias tipo Lee-Wick capazes de reproduzir potenciais confinantes, o que pode enriquecer a exploração e o debate sobre o que deve ser responsável pelo confinamento na QCD. De fato, uma teoria com derivadas de ordem superior possui mais possibilidades e flexibilidade do que uma de ordem "normal", sendo portanto um bom "framework"(estrutura) para investigar fenômenos ainda não explicados matematicamente no modelo padrão, como foi no caso do confinamento. Outro resultado recente modela possibilidades de física para o áxion através de experimentos de mesa.

5.0.1 Perspectivas Futuras

Embora os resultados aqui apresentados usem em sua maioria a prescrição de Feynman para propagadores à tree-level, o caráter acausal de uma teoria de Lee-Wick (vide Apêndice E) abre uma discussão para novas prescrições de contorno de integração para os propagadores dos campos envolvidos. Em [COLEMAN 1970] e [Lee e Wick 1970] mostra-se que num espaço de Hilbert/Fock de norma indefinida, os autoestados de energia aparecem em pares complexo-conjugados.

Pelo fato destes pólos não serem reais e um deles encontrar-se na folha de Riemann física, a Rotação de Wick não é bem definida nestas teorias, necessitando de uma deformação no contorno de integração dos propagadores. Entretanto ainda não há um consenso de qual prescrição seria a correta neste caso. Algumas das prescrições de contorno mais conhecidas são a prescrição de Lee-Wick [Lee e Wick 1970], que mantém pólos de frequência positiva abaixo da curva e pólos de frequência negativa acima da curva, e a prescrição CLOP [Cutkosky et al. 1969], que é uma prescrição proposta para cálculos de 1 loop que perserva o comportamento causal de cada pólo individualmente independente da energia de centro de massa, impedindo-os de cruzarem o contorno de integração, dado que o comportamento causal de cada pólo está associado à função degrau associada ao sinal de sua frequência nos propagadores, que por sua vez está associada ao fecho do contorno de integração pelo hemisfério superior ou inferior do plano complexo. Mais recentemente discutiu-se também o papel da Distribuição Espectral de Källén-Lehmann, que é deformada numa teoria de Lee-Wick e discutida em [COLEMAN 1970] e [Donoghue e Menezes 2020]. Uma possibilidade seria investigar que diferenças diferentes prescrições de contorno causariam no Modelo Padrão de Lee-Wick.

Uma outra possibilidade muito interessante, e talvez a mais famosa, de aplicação de teorias de Lee-Wick é a investigação de Gravidade Quadrática [Donoghue e Menezes 2021], dado que é uma teoria de gravitação renormalizável. Ela consiste na generalização da Lagrangiana de Einstein-Hilbert para uma Lagrangiana com termos quadráticos no tensor de Ricci e no escalar de curvatura, consistindo portanto em termos com derivadas de ordem superior na métrica e que portanto se aplicam às perturbações da métrica, que por sua vez consistem nos grávitons.

Apêndice

Apêndice A - Funções de Vértice e Transformada de Legendre

Nesta seção, vamos seguir o desenvolvimento apresentado por [Greiner e Reinhardt 1996].

.0.2 Funções de Vértice e Transformada de Legendre

De maneira geral, uma Função de Green $G^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ de n-pontos relaciona-se com o funcional do vácuo $Z[j]$ através de sua derivada funcional pelas fontes externas: $j(x_i)$, $i = 1, \dots, n$:

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = (-i)^n \frac{\delta^n Z[j]}{\delta j(x_1) \dots \delta j(x_n)} \Big|_{j=0} \quad (.0.1)$$

O funcional de vácuo livre é $Z_0[j] = \exp(\frac{-i}{2} \int dx' dx j(x') \Delta_F(x - x') j(x))$. O Funcional do vácuo em geral é:

$$Z[j] = e^{iW[j]} = \mathcal{N} \exp \left(i \int d^4x \mathcal{L}_{int} \left(-i \frac{\delta}{\delta j(x)} \right) \right) Z_0[j] \quad (.0.2)$$

Onde \mathcal{N} é a constante de normalização dos campos, que é igual a 1 para vácuos estáveis. O objeto $W[j]$ é o gerador funcional de todos os campos envolvidos na teoria considerada. O objeto \mathcal{L}_{int} é a lagrangiana de interação da teoria. Em geral, $W[j]$ inclui lagrangianas de campos fantasmas gauge fixing, potenciais de interação e o acoplamento linear $j\phi_i$ entre corrente e campo. Aqui usamos ϕ_i como campos escalares, mas sem perda de generalidade, podemos considerar contrações escalares de produtos de campos de quaisquer natureza, como $j_\mu A^\mu$. Por simplicidade, aqui as demonstrações serão feitas para campos escalares.

Portanto podemos reescrever a função de n-pontos em termos do Funcional Gerador:

$$\begin{aligned} G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) &= (-i)^n \frac{\delta^n Z[j]}{\delta j(x_1) \dots \delta j(x_n)} \Big|_{j=0} = \\ &= (-i)^n \frac{\delta^n e^{iW[j]}}{\delta j(x_1) \dots \delta j(x_n)} \Big|_{j=0} = (-i)^{n-1} e^{iW[j]} \frac{\delta^n W[j]}{\delta j(x_1) \dots \delta j(x_n)} \Big|_{j=0} = \\ &= (-i)^{n-1} Z[j] \frac{\delta^n W[j]}{\delta j(x_1) \dots \delta j(x_n)} \Big|_{j=0} \end{aligned} \quad (.0.3)$$

Onde $Z[j]|_{j=0} = \langle 0|0 \rangle$ é a amplitude de persistência do vácuo, ou equivalentemente, a amplitude de bolhas de vácuo. Assim identificamos a Função de Green como o produto de duas amplitudes

de probabilidade. As funções de Green conexas $G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ são identificadas como o fator que sobra:

$$G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = (-i)^{n-1} \frac{\delta^n W[j]}{\delta j(x_1) \dots \delta j(x_n)} \Big|_{j=0} = \frac{(-i)^n}{Z[j]} \frac{\delta^n Z[j]}{\delta j(x_1) \dots \delta j(x_n)} \Big|_{j=0} \quad (.0.4)$$

As funções de Green conexas são aquelas cujos diagramas de Feynman correspondentes são grafos conexos. Para um funcional de ação, sem perda de generalidade, de apenas um campo $S[\phi]$, temos $W[j] = S[\phi] + \int j\phi dx$.

Agora vamos introduzir a nova variável de campo ϕ_c , definida por:

$$\begin{aligned} \phi_c(x) &= \frac{\delta W[j]}{\delta j(x)} = \frac{-i}{Z[j]} \frac{\delta Z[j]}{\delta j(x)} = \\ &= \frac{\int \mathcal{D}\phi e^{iW[j]} \phi(x)}{\int \mathcal{D}\phi e^{iW[j]}} = \frac{\langle 0 | \hat{\phi}(x) | 0 \rangle}{\langle 0 | 0 \rangle} \Big|_j \end{aligned} \quad (.0.5)$$

Logo $\phi_c(x)$ revela-se como valor médio do campo ϕ na presença de uma fonte externa j , e portanto $\phi_c(x)$ é denominado mean field ou campo clássico. Podemos também estabelecer a correspondência entre ϕ_c e a derivada funcional:

$$\phi_c(x) \leftrightarrow -i \frac{\delta}{\delta j(x)} \quad (.0.6)$$

No caso de campo livre, temos $W[j] = W_0[j]$ com:

$$\begin{aligned} W_0[j] &= \frac{-1}{2} \int dx dy j(x) \Delta_F(x-y) j(y) \\ \Rightarrow \phi_{c,0}(x) &= \frac{\delta W[j]}{\delta j(x)} = - \int dy \Delta_F(x-y) j(y) \end{aligned} \quad (.0.7)$$

Que é a solução do campo clássico onde Δ_F é o propagador de Feynman.

Podemos inverter a relação entre ϕ_c e j de forma a tornar o primeiro como funcional independente através de uma Transformada de Legendre:

$$\Gamma[\phi_c] = W[j] - \int j(x) \phi_c(x) dx \quad (.0.8)$$

No caso livre, temos

$$\Gamma_0[\phi_c] = \frac{-1}{2} \int dx dx' j(x) \Delta_F(x-x') j(x') \quad (.0.9)$$

No caso de ϕ_c sendo campo escalar, $j(x)$ é a fonte da equação de Klein-Gordon $(\square + m^2)\phi_c(x) = j(x)$. Podemos usá-la para substituir $j(x)$ na equação anterior:

$$\begin{aligned} \Gamma_0[\phi_c] &= \frac{-1}{2} \int dx dx' j(x) \Delta_F(x-x') j(x') = \frac{-1}{2} \int dx dx' \phi_c(x) (\overleftarrow{\square} + m^2) \Delta_F(x-x') (\square' + m^2) \phi_c(x') \\ &= \frac{-1}{2} \int dx dx' \phi_c(x) \underbrace{(\square + m^2) \Delta_F(x-x') (\square' + m^2)}_{-\delta(x-x')} \phi_c(x') = \frac{1}{2} \int dx \phi_c(x) (\square + m^2) \phi_c(x) = \\ &= \frac{1}{2} \int dx (\partial_\mu \phi_c(x) \partial^\mu \phi_c(x) - m^2 \phi_c^2(x)) = S_0[\phi_c] \end{aligned} \quad (.0.10)$$

Onde da primeira à segunda linha e da segunda à terceira linha usamos integrações por partes. Em geral, $\Gamma[\phi_c]$ não coincide com a ação clássica para campos interagentes devido à correções quânticas de loop, que irão tornar o funcional resultante em não local, diferentemente da ação clássica $S[\phi_c]$. Além disso, a correspondência estabelecida entre $\phi_c(x)$ e a derivada funcional pela corrente nos permite reescrever o Funcional do vácuo como

$$Z[j] = \mathcal{N} \exp\left(i \int d^4x \mathcal{L}_{int}\left(-i \frac{\delta}{\delta j(x)}\right)\right) Z_0[j] \rightarrow Z[\phi_c] = \mathcal{N} \exp\left(i \int d^4x \mathcal{L}_{int}(\phi_c(x))\right) e^{iS_0[\phi_c]} \quad (.0.11)$$

O funcional $\Gamma[\phi_c]$ é denominado **ação efetiva**. Dessa forma, à tree-level, podemos considerar $\Gamma[\phi_c] = S[\phi_c]$, e veremos que isso será útil para obtenção das regras de Feynman para os vértices.

Como definimos $\Gamma[\phi_c]$ como funcional de ϕ_c , não há dependência funcional explícita entre o primeiro e j , de forma que $\delta\Gamma/\delta J = 0$. Além disso, temos, usando a Regra da Cadeia Funcional:

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Gamma[\phi_c]}{\delta\phi_c(x)} &= \frac{\delta W[j]}{\delta\phi_c(x)} - \int dy \left[\frac{\delta j(y)}{\delta\phi_c(x)} \phi_c(y) - j(y) \underbrace{\frac{\delta\phi_c(y)}{\delta\phi_c(x)}}_{\delta(x-y)} \right] = \\ &= \int dy \left[\underbrace{\frac{\delta W[j]}{\delta j(y)}}_{\phi_c(y)} \frac{\delta j(y)}{\delta\phi_c(x)} - \frac{\delta j(y)}{\delta\phi_c(x)} \phi_c(y) \right] - j(y) = -j(y) \end{aligned} \quad (.0.12)$$

Portanto temos $\frac{\delta\Gamma[\phi_c]}{\delta\phi_c(x)} = -j(x)$. Podemos então obter $\Gamma[\phi_c]$ via expansão em Série de Volterra (o análogo funcional da Série de Taylor) do campo $\phi_c(x)$ como:

$$\Gamma[\phi_c] = \sum_n \int dx_1 \dots \int dx_n \frac{1}{n!} \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \phi_c(x_1) \dots \phi_c(x_n) \quad (.0.13)$$

Logo, cada Kernel integral $\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ satisfaz:

$$\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \left. \frac{\delta^n \Gamma[\phi_c]}{\delta\phi_c(x_1) \dots \delta\phi_c(x_n)} \right|_{\phi_c=0} \quad (.0.14)$$

Estes Kerneis são chamados *Funções de Vértice*. Vamos agora derivar as Regras de Feynman para funções de vértice à tree-level. Após a transformação de Legendre, temos:

$$\exp\left(i \int dy \mathcal{L}_{int}\left(-i \frac{\delta}{\delta j(y)}\right)\right) \mapsto \exp\left(i \int dy \mathcal{L}_{int}(\phi_c(y))\right) \quad (.0.15)$$

Para uma função de vértice de n-pontos à tree-level resultante de uma única interação entre campos (com $n > 2$), a exponencial de interação é reduzida ao seu primeiro termo na expansão de Taylor:

$$\text{tree-level: } \exp\left(i \int dy \mathcal{L}_{int}(\phi_c(y))\right) \mapsto i \int dy \mathcal{L}_{int}(\phi_c(y)) = iS_{int}[\phi_c] \quad (.0.16)$$

o único termo que irá sobreviver depois de tomarmos os campos ϕ_c nulos após a derivada funcional será o resultado da derivada funcional sobre a ação de interação $\mathcal{L}_{int}(\phi_c(y))$. Dessa forma, para $n > 2$, as **Regras de Feynman das Funções de Vértice de interação à tree-level de uma Teoria de Campos qualquer são dadas por**

$$\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta^n \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(x_1) \dots \delta \phi_c(x_n)} \Bigg|_{\phi_c=0} = i \frac{\delta^n S_{int}[\phi_c]}{\delta \phi_c(x_1) \dots \delta \phi_c(x_n)} \Bigg|_{\phi_c=0} \quad (.0.17)$$

Geralmente é mais útil calcularmos a Função de Vértice no Espaço de Momenta, que da Transformada de Fourier, temos:

$$\Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = i \int dx dx_1 \dots dx_n e^{i[p_1 x_1 + \dots + p_n x_n]} \frac{\delta \mathcal{L}_{int}}{\delta \phi_c(p_1) \dots \delta \phi_c(p_n)} \quad (.0.18)$$

Onde aqui consideramos todos os momenta entrando no vértice. Se incluirmos um momenta q saindo do vértice, temos

$$\Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_n, q) = i \int dx dx_1 \dots dx_n dy e^{i[p_1 x_1 + \dots + p_n x_n - qy]} \frac{\delta \mathcal{L}_{int}}{\delta \phi_c(p_1) \dots \delta \phi_c(p_n) \delta \phi_c(q)} \quad (.0.19)$$

Isto é, para momenta saindo do vértice, sua contribuição à exponencial no integrando possui o sinal trocado, o que irá reproduzir a delta de conservação de momenta. Exatamente a mesma dedução pode ser feita para campos spinoriais, vetoriais e tensoriais sem perda de generalidade, apenas ao trocarmos os campos ϕ_c pelas demais representações do Grupo de Lorentz.

É possível mostrar que a função de vértice de n-pontos é o operador inverso da função de Green de n-pontos. No caso de 2 pontos, temos, por exemplo:

$$\begin{aligned} \delta^4(x_1 - x_2) &= \frac{\delta \phi_c(x_1)}{\delta \phi_c(x_2)} = \int dx \frac{\delta \phi_c(x_1)}{\delta j(x)} \frac{\delta j(x)}{\delta \phi_c(x_2)} = \\ &= - \int dx \frac{\delta^2 W[j]}{\delta j(x_1) \delta j(x_2)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_c(x) \delta \phi_c(x_2)} \end{aligned} \quad (.0.20)$$

Onde usamos os resultados anteriores $j(x) = -\frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_c(x)}$ e $\phi_c(x) = \frac{\delta W}{\delta j(x)}$. Tomando este resultado em $j = \phi_c = 0$, temos:

$$\begin{aligned} \delta^4(x_1 - x_2)|_{j=0} &= - \int dx \frac{\delta^2 W[j]}{\delta j(x_1) \delta j(x_2)} \Bigg|_{j=0} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_c(x) \delta \phi_c(x_2)} \Bigg|_{j=0} = \\ &= - \int dx i G_c^{(2)}(x_1, x) \Gamma^{(2)}(x, x_2) = \delta^4(x_1 - x_2) \end{aligned} \quad (.0.21)$$

Portanto temos $\Gamma^{(2)}(x_1, x_2) = (i G_c^{(2)}(x_1, x_2))^{-1}$. Logo, para um campo livre, $\Gamma_0^{(2)}$ assume a forma simples no espaço de momenta:

$$\Gamma_0^{(2)}(p) = p^2 - m_0^2 \quad (.0.22)$$

Analogamente podemos obter a relação entre a função de vértice de 3-pontos com a função de 3-pontos introduzindo uma derivação funcional a mais:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta j(x_3)}(\delta(x_1 - x_2)) &= 0 = -\frac{\delta}{\delta j(x_3)} \int dx \frac{\delta^2 W[j]}{\delta j(x_1) \delta j(x_2)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_c(x) \delta \phi_c(x_2)} = \\
&= - \int dx \frac{\delta^3 W[j]}{\delta j(x_1) \delta j(x_2) \delta j(x_3)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_c(x) \delta \phi_c(x_2)} + \\
&+ \int dx'_1 \int dx'_3 \frac{\delta^2 W[j]}{\delta j(x_1) \delta j(x'_1)} \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \phi_c(x'_1) \delta \phi_c(x'_3) \delta \phi_c(x'_2)} \frac{\delta \phi_c(x'_3)}{\delta j(x_3)}
\end{aligned} \tag{.0.23}$$

Multiplicando a equação anterior por $\frac{\delta^2 W}{\delta j(x'_2) \delta j(x_2)}$ e identificando $\frac{\delta \phi_c(x'_3)}{\delta j(x_3)} = \frac{\delta}{\delta j(x_3)} \left(\frac{\delta W}{\delta j(x'_3)} \right)$, e finalmente, integrando sobre x'_2 temos:

$$\begin{aligned}
&\int dx \frac{\delta^3 W}{\delta j(x_3) \delta j(x_1) \delta j(x)} \underbrace{\int dx'_2 \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_c(x) \delta \phi_c(x'_2)} \frac{\delta^2 W}{\delta j(x'_2) \delta j(x_2)}}_{-\delta(x-x_2)} = \\
&\underbrace{\frac{\delta^3 W}{\delta j(x_1) \delta j(x_2) \delta j(x_3)}}_{\delta \phi_c(x'_1) \delta \phi_c(x'_2) \delta \phi_c(x'_3)} \tag{.0.24} \\
&= \int dx'_1 \int dx'_2 \int dx'_3 \frac{\delta^2 W}{\delta j(x'_1) \delta j(x_1)} \frac{\delta^2 W}{\delta j(x'_2) \delta j(x_2)} \frac{\delta^2 W}{\delta j(x'_3) \delta j(x_3)} \times \\
&\frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \phi_c(x'_1) \delta \phi_c(x'_2) \delta \phi_c(x'_3)}
\end{aligned}$$

Isto é, para $j = \phi_c = 0$ (vácuo), temos

$$\begin{aligned}
G_c^{(3)}(x_1, x_2, x_3) &= \\
&= \int dx'_1 \int dx'_2 \int dx'_3 (iG(x_1, x'_1))(iG(x_2, x'_2))(iG(x_3, x'_3)) \Gamma^{(3)}(x'_1, x'_2, x'_3)
\end{aligned} \tag{.0.25}$$

De forma que $\Gamma^{(3)}$ é precisamente o conjunto de todos os processos virtuais possíveis para quaisquer pontos intermediários x'_1, x'_2 e x'_3 do processo virtual subjacente. Diagramaticamente, a equação anterior equivale à:

$$G_c^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = \begin{array}{c} x_{(3)} \\ | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \\ \Gamma^{(3)} \\ | \quad \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad \quad \quad | \\ x_1 \quad \quad \quad x_2 \end{array} \tag{.0.26}$$

Podemos inverter essa equação para isolar $\Gamma(x'_1, x'_2, x'_3)$ através do operador inverso de $G(x, x')$:

$$\begin{aligned}
\Gamma(x_1, x_2, x_3) &= \\
&= (-i)^3 \int dx'_1 \int dx'_2 \int dx'_3 G^{-1}(x_1, x'_1) G^{-1}(x_2, x'_2) G^{-1}(x_3, x'_3) G_c(x'_1, x'_2, x'_3) \\
&= (-i)^3 \int dx'_1 \int dx'_2 \int dx'_3 \Gamma(x_1, x'_1) \Gamma(x_2, x'_2) \Gamma(x_3, x'_3) G_c(x'_1, x'_2, x'_3)
\end{aligned} \tag{.0.27}$$

Para funções de n-pontos com $n > 3$, há uma diferença qualitativa: contribuições correspondentes à concatenações de 2 ou mais diagramas de menor ordem, de forma que estes diagramas possam apresentar mais de um vértice. Para demonstrar isso, vamos diferenciar mais uma vez com respeito à corrente externa $j(x)$:

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta^2}{\delta j(x_4)\delta j(x_3)}(\delta(x_1 - x_2)) = 0 = \\
& = \int dx \frac{\delta^4 W}{\delta j(x_4)\delta j(x_3)\delta j(x_1)\delta j(x)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_c(x)\delta \phi_c(x'_2)} + \\
& \int dx'_1 \int dx'_2 \frac{\delta^3 W}{\delta j(x_3)\delta j(x_1)\delta j(x'_1)} \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \phi_c(x'_1)\delta \phi_c(x'_2)\delta \phi_c(x'_4)} \frac{\delta \phi_c(x'_4)}{\delta j(x_4)} + \\
& \int dx'_1 \int dx'_3 \left[\frac{\delta^3 W}{\delta j(x_1)\delta j(x'_1)\delta j(x_4)} \frac{\delta^2 W}{\delta j(x_3)\delta j(x'_3)} + \right. \\
& \left. \frac{\delta^2 W}{\delta j(x_1)\delta j(x'_1)} \frac{\delta^3 W}{\delta j(x_3)\delta j(x'_3)\delta j(x_4)} \right] \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \phi_c(x'_1)\delta \phi_c(x'_3)\delta \phi_c(x'_2)} + \\
& \int dx'_1 \int dx'_2 \int dx'_3 \frac{\delta^2 W}{\delta j(x_1)\delta j(x'_1)} \frac{\delta^2 W}{\delta j(x'_3)\delta j(x_3)} \times \\
& \frac{\delta^4 \Gamma}{\delta \phi_c(x'_4)\delta \phi_c(x'_1)\delta \phi_c(x'_3)\delta \phi_c(x'_2)} \frac{\delta \phi_c(x'_4)}{\delta \phi_c(x_4)}
\end{aligned} \tag{.0.28}$$

Usando $\delta(x - x_2) = - \int dx'_2 \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_c(x)\delta \phi_c(x'_2)} \frac{\delta^2 W}{\delta j(x'_2)\delta j(x_2)}$, podemos multiplicar a equação anterior por $\frac{\delta^2 W}{\delta j(x_2)\delta j(x'_2)}$ e integrar sobre dx'_2 para isolar a função de Green de 4-pontos:

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta^4 W}{\delta j(x_1)\delta j(x_2)\delta j(x_3)\delta j(x_4)} = \\
& = \int dx'_1 \int dx'_2 \int dx'_4 \left[\frac{\delta^3 W}{\delta j(x_3)\delta j(x_1)\delta j(x'_1)} \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \phi_c(x'_1)\delta \phi_c(x'_2)\delta \phi_c(x'_4)} \times \right. \\
& \left. \frac{\delta^2 W}{\delta j(x'_4)\delta j(x_4)} \frac{\delta^2 W}{\delta j(x'_2)\delta j(x_2)} \right] + \int dx'_1 \int dx'_2 \int dx'_3 \left[\frac{\delta^3 W}{\delta j(x_1)\delta j(x'_1)\delta j(x_4)} \times \right. \\
& \left. \frac{\delta^2 W}{\delta j(x_3)\delta j(x'_3)} + \frac{\delta^2 W}{\delta j(x_1)\delta j(x'_1)} \frac{\delta^3 W}{\delta j(x_3)\delta j(x'_3)\delta j(x_4)} \right] \frac{\delta^2 W}{\delta j(x_2)\delta j(x'_2)} \times \\
& \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \phi_c(x'_1)\delta \phi_c(x'_3)\delta \phi_c(x'_2)} + \int dx'_1 \int dx'_2 \int dx'_3 \int dx'_4 \frac{\delta^2 W}{\delta j(x_1)\delta j(x'_1)} \frac{\delta^2 W}{\delta j(x_2)\delta j(x'_2)} \\
& \times \frac{\delta^2 W}{\delta j(x_3)\delta j(x'_3)} \frac{\delta^2 W}{\delta j(x_4)\delta j(x'_4)} \underbrace{\frac{\delta^4 \Gamma}{\delta \phi_c(x'_1)\delta \phi_c(x'_2)\delta \phi_c(x'_3)\delta \phi_c(x'_4)}}_{\equiv \Gamma^{(4)}(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)}
\end{aligned} \tag{.0.29}$$

Podemos identificar a equação anterior como uma soma de diagramas de Feynman. Denotando $G_c^{(n)}$ como uma Função de Green conexa de n-pontos e $\Gamma^{(n)}$ como uma função de vértice de n-pontos, temos diagramaticamente:

$$\begin{aligned}
G_c^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = & \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} \\
& \text{Diagram 5}
\end{aligned}
\tag{.0.30}$$

Portanto nota-se que para $n > 3$, as funções de n-pontos tornam-se somas de diagramas de Feynman. O objeto $\Gamma^{(4)}$ é denominado **Função de vértice de 4 pontos irreduzível à uma partícula** (1PI). Um diagrama de Feynman é dito 1PI se todas as suas linhas internas possuem algum momentum de loop. Essa irreduzibilidade significa que o diagrama em questão não é uma concatenação de diagramas com interações de vértice de ordens inferiores (como os demais diagramas, que apresentam $\Gamma^{(3)}$). Em geral, uma função de Green conexa $G_c^{(n)}$ pode ser construída a partir de funções de vértice irreduzíveis $\Gamma^{(m)}$ com a contribuição em todas as ordens $3 \leq m \leq n$. Algumas teorias não irão apresentar funções de vértice 1PI como a teoria ϕ^4 , que não apresenta vértices $\Gamma^{(3)}$. Neste caso, a única contribuição à G_c^4 seria a de $\Gamma^{(4)}$. A aplicação iterativa da derivada funcional reproduz as Regras de Feynman para quaisquer funções de n-pontos: cada diagrama que irá contribuir consiste no produto de suas funções de vértice com as pernas correspondentes à funções de 2 pontos, sejam internas ou externas.

.0.3 Derivações dos vértices de Lee-Wick

Vamos obter alguns padrões úteis usando um caso simples porém bastante completo em termos de procedimentos para a derivação da função de vértice. Veremos que considerar vértices onde todos os momenta fluem para dentro ou para fora torna mais simples a derivação da função

de vértice correspondente, considerando todos os momenta entrando no vértice, temos:

$$\begin{aligned}
 & -ig\phi^\dagger A_\mu^a T_a \partial^\mu \phi + ig(\partial_\mu \phi^\dagger) A_a^\mu T^a \phi \Rightarrow \begin{array}{c} \mu, a \\ \text{wavy line} \\ \swarrow \quad \searrow \\ p \quad \quad q \\ \swarrow \quad \searrow \\ j \quad \quad i \end{array} = \\
 & = i \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 d^4y_1 e^{-i(p \cdot x_1 + r \cdot x_2 + q \cdot y_1)} \\
 & \times \frac{\delta^3}{\delta \phi_j(x_1) \delta A_\mu^a(x_2) \delta \phi_i^\dagger(y_1)} [-ig\phi_l^\dagger(x) A_\nu^b(x) (T_b)_{lm} \partial^\nu \phi_m(x) + ig(\partial_\nu \phi_l^\dagger(x)) A_b^\nu(x) (T^b)_{lm} \phi_m(x)] = \\
 & = i \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 d^4y_1 e^{-i(p \cdot x_1 + r \cdot x_2 + q \cdot y_1)} [-ig\delta_l^i \delta^4(x - y_1) \delta_a^b \delta_\nu^\mu \delta^4(x - x_2) (T_b)_{lm} \partial^\nu \delta_m^j \delta^4(x - x_1) \\
 & + ig(\partial_\nu \delta_l^i \delta^4(x - y_1)) \delta_{ba} \eta^{\mu\nu} \delta^4(x - x_2) (T_b)_{lm} \delta_m^j \delta^4(x - x_1)] = \\
 & = i \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 d^4y_1 e^{-i(p \cdot x_1 + r \cdot x_2 + q \cdot y_1)} [-ig\delta^4(x - y_1) \delta^4(x - x_2) (T_a)_{ij} \partial^\mu \delta^4(x - x_1) \\
 & + ig(\partial^\mu \delta^4(x - y_1)) \delta^4(x - x_2) (T_a)_{ij} \delta^4(x - x_1)] = \\
 & = i \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 d^4y_1 e^{-i(p \cdot x_1 + r \cdot x_2 + q \cdot y_1)} [-ig\delta^4(x - y_1) \delta^4(x - x_2) (T_a)_{ij} \partial^\mu \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} e^{-ip' \cdot (x - x_1)} \\
 & + ig \left(\partial^\mu \int \frac{d^4q'}{(2\pi)^4} e^{-iq' \cdot (x - y_1)} \right) \delta^4(x - x_2) (T_a)_{ij} \delta^4(x - x_1)] \\
 & = i \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 d^4y_1 e^{-i(p \cdot x_1 + r \cdot x_2 + q \cdot y_1)} [-ig\delta^4(x - y_1) (T_a)_{ij} \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} (-ip'^\mu) e^{-ip' \cdot (x - x_1)} \\
 & + ig \left(\int \frac{d^4q'}{(2\pi)^4} (iq'^\mu) e^{-iq' \cdot (x - y_1)} \right) (T_a)_{ij} \delta^4(x - x_1)] \\
 & \tag{.0.31}
 \end{aligned}$$

Usando

$$\begin{aligned}
 & \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 d^4y_1 e^{-i(p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + q_1 \cdot y_1)} \int \frac{d^4p'_1}{(2\pi)^4} (-ip'_1{}^\mu) e^{-ip'_1 \cdot (x - x_1)} \delta^4(x - x_2) \delta^4(x - y_1) = \\
 & \int d^4x e^{-i(p_2 + q_1) \cdot x} \int \frac{d^4p'_1}{(2\pi)^4} (-ip'_1{}^\mu) \underbrace{\int d^4x_1 e^{-i(p'_1 - p_1) \cdot x_1}}_{(2\pi)^4 \delta^4(p'_1 - p_1)} e^{-ip'_1 \cdot x} = \\
 & (-ip_1^\mu) \int d^4x e^{-i(p_1 + p_2 + q_1) \cdot x} = (-ip_1^\mu) (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 + q_1) \\
 & \tag{.0.32}
 \end{aligned}$$

Temos:

$$\begin{array}{c} \mu, a \\ \text{wavy line} \\ \swarrow \quad \searrow \\ p \quad \quad q \\ \swarrow \quad \searrow \\ j \quad \quad i \end{array} = (2\pi)^4 \delta(p + r + q) (-ig) (T_a)_{ij} (p^\mu - q^\mu) \tag{.0.33}$$

Assim, a derivação da Função de vértice naturalmente produz uma delta de conservação de momenta. Essa delta, por definição, **não** é incluída na Regra de Feynman correspondente à

Função de vértice, esta última é o coeficiente que acompanha a delta de conservação do diagrama. Identificamos então um padrão útil que surge da presença da derivada parcial na lagrangiana na obtenção de uma função de vértice: podemos mapear uma derivada $\partial^\mu \mapsto -ip_a^\mu$, onde a indexa a perna do diagrama cujo momentum p_a^μ flui para dentro do vértice.

O vértice de 1 vetor LW com 2 campos de matéria escalar é idêntico ao caso anterior, porém com o sinal trocado, visto que a lagrangiana é a mesma porém de sinal trocado.

O próximo vértice é o de 2 vetores ordinários de calibre com o campo de matéria escalar, como ele não envolve derivadas, podemos derivar já de cara os campos escalares (que não aparecem repetidos), e vamos notar a Regra de Leibniz da derivada funcional influenciando a função de vértice para produtos de campos repetidos:

$$\begin{aligned}
 g^2 \phi^\dagger A_\mu^a T_a A_\nu^b T_b \phi &\Rightarrow \begin{array}{c} \mu, a \qquad \qquad \nu, b \\ \text{---} j \text{---} \text{---} i \text{---} \end{array} = ig^2 \frac{\delta^2}{\delta A_\mu^a(x_1) \delta A_\nu^b(x_1)} (A_\rho^c(x) T_c A_d^\rho(x) T^d) = \\
 &= ig^2 \left(\frac{\delta A_\rho^c(x)}{\delta A_\nu^b(x_2)} A_d^\rho(x) + A_\rho^c(x) \frac{\delta A_d^\rho(x)}{\delta A_\nu^b(x_2)} \right) (T_c T_d)_{ij} = \\
 &= ig^2 \left(\delta_\rho^\nu \delta_b^c \delta^4(x-x_2) \frac{\delta A_d^\rho(x)}{\delta A_\mu^a(x_1)} + \frac{\delta A_\rho^c(x)}{\delta A_\mu^a(x_1)} \eta^{\rho\nu} \delta_{bd} \delta^4(x-x_2) \right) (T_c T_d)_{ij} = \\
 &= \delta^4(x-x_2) \delta^4(x-x_1) ig^2 (\delta_\rho^\nu \delta_b^c \eta^{\mu\rho} \delta_{ad} + \delta_\rho^\mu \delta_a^c \eta^{\rho\nu} \delta_{bd}) (T_c T_d)_{ij} \\
 &= \delta^4(x-x_2) \delta^4(x-x_1) ig^2 \eta^{\mu\nu} \{T_a, T_b\}_{ij}
 \end{aligned} \tag{.0.34}$$

Onde as deltas de Dirac não são incorporadas à definição da Função de vértice, elas surgem devido aos propagadores conectados entre si no vértice. Assim a Regra de Feynman correspondente é:

$$g^2 \phi^\dagger A_\mu^a T_a A_\nu^b T_b \phi \Rightarrow \begin{array}{c} \mu, a \qquad \qquad \nu, b \\ \text{---} j \text{---} \text{---} i \text{---} \end{array} = ig^2 \eta^{\mu\nu} \{T_a, T_b\}_{ij} \tag{.0.35}$$

Os demais vértices entre campo escalar e os campos vetoriais podem ser obtidos de maneira análoga. Inclusive, todos os vértices de qualquer teoria quântica de campos podem ser obtidos de maneira análoga, observando-se sempre a presença de derivadas, a convenção de fluxo de momentum usada e a Regra de Leibniz da derivada funcional.

.0.4 Fator de Simetria para Diagramas de Feynman

O fator de simetria de um diagrama de Feynman consiste nos seguintes passos [Hooft e Veltman 1974]:

1. desenhe os elementos (propagadores e vértices) de um diagrama separadamente
2. conte de quantas combinações possíveis os propagadores podem se conectar aos vértices ou se os vértices podem conectar entre si (no caso de loops) de maneira a gerar a topologia do diagrama em questão

3. divida pelo produto dos fatores de permutação de cada vértice (por exemplo, um vértice de 3 bósons vetoriais idênticos tem fator de permutação 3!, um de 4 bósons idênticos possui fator de permutação 4!, um de dois bósons idênticos com um outro bóson possui fator de permutação 2)
4. divida o resultado pelo número de permutações de posicionamento de vértice que resultem no mesmo diagrama
5. se constar loops fermiônicos no diagrama, multiplique o diagrama por -1 para cada loop fermiônico

Apêndice B

.0.5 Parametrização de Feynman

A Parametrização de Feynman é uma técnica usada para tornar o fator comum de uma integral de loop (o produto dos propagadores) em uma função esfericamente simétrica em d dimensões dada por:

$$\frac{1}{a^n b^m} = \frac{\Gamma(n+m)}{\Gamma(n)\Gamma(m)} \int_0^1 dx \frac{x^{n-1}(1-x)^{m-1}}{[ax + b(1-x)]^{n+m}} \quad (.0.36)$$

.0.6 Regularização dimensional e dimensão canônica de massa

A regularização dimensional consiste na substituição da medida de integração num hipervolume d -dimensional:

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \mapsto \mu^\epsilon \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \quad (.0.37)$$

Onde μ é um parâmetro de massa que mantém a ação resultante da teoria como adimensional, uma vez que o parâmetro de acoplamento de uma teoria ganha dimensão de massa em dimensões diferentes de 4. No procedimento, o parâmetro μ eventualmente é lidado de forma a não influenciar observáveis físicos. Numa Teoria Quântica de Campos em d dimensões, o funcional gerador de interação é dado por

$$Z[j] = \frac{1}{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi] + i \int d^d x j(x)\phi(x)} ; S[\phi] = \int d^d x \mathcal{L} \quad (.0.38)$$

A ação contribui como uma fase ao gerador funcional e portanto precisa ser adimensional: $[S] = M^0$. Como $[\int d^d x] = M^{-d}$, temos $[\mathcal{L}] = M^d$.

Podemos obter a dimensão dos campos em d dimensões a partir de seus termos de energia cinética, considerando $[\partial_\mu] = [\partial^\mu] = M$. Portanto

$$\begin{aligned}
[\text{férmions}] : [\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi] &= [\bar{\psi}\partial_\mu\psi] = M^d \\
\Rightarrow [\bar{\psi}\psi] &= M^{d-1} \Rightarrow [\bar{\psi}] = [\psi] = M^{\frac{d-1}{2}} \\
[\text{bósons}] : [\partial_\mu A_\nu\partial^\mu A^\nu] &= M^d \Rightarrow [A_\nu A^\nu] = M^{d-2} \\
\Rightarrow [A_\nu] &= [A^\nu] = M^{\frac{d-2}{2}} \\
[g\bar{\psi}\psi A_\mu] &= [g]M^{d-1}M^{\frac{d-2}{2}} = M^d \Rightarrow [g] = M^{-\frac{(d-4)}{2}} \equiv M^{\frac{\varepsilon}{2}}
\end{aligned} \tag{.0.39}$$

Assim definimos $[g\mu^\varepsilon] = M^0 \quad \forall d$. O parâmetro de massa aparecerá em todas as contribuições de vértice.

Como usaremos a parametrização de Feynman para calcular a integral de loop, usaremos coordenadas hiperesféricas d dimensionais. O Jacobiano resultante é

$$d^d p = p^{d-1} \left(\prod_{j=1}^{d-1} (\sin \phi_j)^{d-1-j} d\phi_j \right) dp \tag{.0.40}$$

Onde em parêntese é o elemento de hipersuperfície de ângulo sólido. Podemos usar a relação

$$\int_0^\pi (\sin \theta)^n d\theta = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} \tag{.0.41}$$

Onde apenas um dos ângulos é azimutal ($\in [0, 2\pi]$) enquanto todos os demais são polares ($\in (0, \pi)$). Dessa forma o ângulo hipersólido total é $\Omega = (2\pi) \frac{(\sqrt{\pi})^{d-3}}{\Gamma(\frac{d-1}{2})}$

Portanto, a função Gamma absorve a dependência da integral pela dimensão contínua. Além disso, a Gamma também admite extensão analítica. A regularização dimensional consiste então em absorver as divergências na função gamma e tomar o limite da extensão analítica resultante para $d = 4$. Isso se dá pela seguinte expansão em série de Laurent da função Gamma:

$$\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\varepsilon) \tag{.0.42}$$

.0.7 Grau Superficial de Divergência

O grau superficial de divergência D é definido como a potência de momenta total de loops envolvidos num diagrama de Feynman. Nas regras de Feynman, todo momenta de loop é integrado sobre $d^4 k$ por estar atrelado apenas à partículas virtuais. Toda integração sobre $d^4 k$ contribui com uma quarta potência de momenta devido à dimensão da medida de integração. Os propagadores no loop naturalmente irão contribuir com uma potência negativa no momenta de loop, por exemplo:

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{(k-p)^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \sim \int d^4 k \frac{1}{k^2} \frac{1}{k^2} \Rightarrow D = 0 \tag{.0.43}$$

O grau superficial de divergência é a soma das potências de momenta de loop no diagrama em questão. A contagem do grau superficial de divergência considera apenas o limite ultravioleta dos propagadores de loop, isso se deve ao fato que o domínio de integração de momenta é infinito e partículas virtuais podem assumir qualquer valor de momenta, logo, a equivalência de contagem das potências no limite ultravioleta simbolizada por \sim na equação anterior portanto é justificada para a finalidade usada. A convergência da integral requer que a dependência do resultado com a potência de momenta total seja negativa, em outras palavras, requer que $D < 0$. Para $D = 0$, temos por exemplo:

$$\int \frac{d^4 k}{k^4} \propto \int \frac{dk}{k} = \ln k \Big|_0^\infty \quad (.0.44)$$

Neste caso dizemos que a integral de loop diverge logaritmicamente. No primeiro caso apresentado, cada propagador de campo escalar contribui com k^{-2} , por possuir $D = -2$ potências de momenta. Analogamente, propagadores fermiônicos contribuem com k^{-1} potências de momenta, ou equivalentemente $D = -1$ ao grau superficial de divergência. Os vértices também contribuem ao grau superficial de divergência, a presença de derivadas nas lagrangianas de interação correspondentes irão contribuir, cada uma, com uma potência de momenta ao loop.

Portanto é possível calcular o grau superficial de divergência de um diagrama de Feynman à partir de sua topologia e da lagrangiana dos campos envolvidos. Seja:

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_0(x) + \sum_i g_i \mathcal{L}_i(x) \quad (.0.45)$$

Onde $\mathcal{L}_0(x)$ é a lagrangiana livre dos campos e $\mathcal{L}_i(x)$ é um termo de interação da lagrangiana com constante de acoplamento g_i . Topologicamente, em qualquer teoria, todo propagador interno conecta-se a dois vértices de interação, logo se um diagrama possui $V = \sum_i n_i$ vértices, b_e (b_i) linhas bosônicas externas (internas), f_e (f_i) linhas fermiônicas externas (internas), temos:

$$2b_i + b_e = \sum_i n_i b_i, \quad 2f_i + f_e = \sum_i n_i f_i \quad (.0.46)$$

Além disso, outra relação topológica conhecida e útil é:

$$L = f_i + f_e - (V - 1) \quad (.0.47)$$

Onde L é o número de momenta de loops independentes e $V - 1$ é o número de funções delta de conservação de momenta do diagrama em questão.

Podemos tratar vetores e escalares equivalentemente por apresentarem o mesmo comportamento assintótico de momenta em seus propagadores. Considerando também que existem $\sum_i n_i \partial_i$ derivadas de vértice no diagrama, o grau superficial de divergência do diagrama é obtido como [Pascual e Tarrach 1984]:

$$D = 4(f_i + b_i) - 4(V - 1) - (f_i + 2b_i) + \sum_i n_i \partial_i \quad (.0.48)$$

O primeiro termo corresponde à quantidade de momenta de loop integrados, o segundo termo resulta da conservação de momenta no diagrama, onde apenas um vértice irá conter a conservação de momenta total do diagrama (isso pode ser visualizado ao pensarmos na função de vértice 1PI do diagrama, vide apêndice A). o terceiro termo conta as contribuições de potência dos propagadores internos, enquanto que o último conta a contribuição de potências das derivadas presentes nos vértices de interação. A quantidade de linhas internas f_i , b_i e derivadas de interação ∂_i relacionam-se com a constante de acoplamento g_i da interação correspondente partindo de (vide seção anterior):

$$[g_i] = M^{4-d_i}, \quad d_i = \frac{3}{2}f_i + b_i + \partial_i \quad (.0.49)$$

Podemos usar isso para obter o grau superficial de divergência de maneira independente do número de linhas internas, como:

$$D = - \sum_i n_i(4 - d_i) - \left(\frac{3}{2}f_e + b_e - 4\right) \quad (.0.50)$$

Logo o grau superficial de divergência independe do número de linhas internas do diagrama através da natureza de suas constantes de acoplamento, justificando assim o "superficial" no nome.

.0.8 Matrizes Gamma em d dimensões

$$\begin{aligned} \eta_\mu^\mu &= d \\ \gamma_\mu, \gamma_\nu &= 2\eta_{\mu\nu}I_d \\ \gamma_\mu\gamma^\mu &= dI_d \end{aligned} \quad (.0.51)$$

Apêndice C - Fórmulas úteis

.0.9 Integrais de 1 Loop

Vamos usar as seguintes fórmulas para calcular integrais de 1 loop [[Donoghue, Golowich e Holstein 2014](#)]:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{[(p-q)^2 - m_1^2 + i\epsilon][p^2 - m_2^2 + i\epsilon]} &= \\ = (-1)^{n_1+n_2} \frac{i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(n_1+n_2-d/2)}{\Gamma(n_1)\Gamma(n_2)} \int_0^1 dx \frac{x^{n_1-1}(1-x)^{n_2-1}}{\mathcal{D}^{n_1+n_2-d/2}} \end{aligned} \quad (.0.52)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{p^\mu}{[(p-q)^2 - m_1^2 + i\epsilon][p^2 - m_2^2 + i\epsilon]} &= \\ = (-1)^{n_1+n_2} q^\mu \frac{i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(n_1+n_2-d/2)}{\Gamma(n_1)\Gamma(n_2)} \int_0^1 dx \frac{x^{n_1}(1-x)^{n_2-1}}{\mathcal{D}^{n_1+n_2-d/2}} \end{aligned} \quad (.0.53)$$

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{p^\mu p^\nu}{[(p-q)^2 - m_1^2 + i\epsilon][p^2 - m_2^2 + i\epsilon]} = \frac{i}{(4\pi)^{d/2}} \\
& \times \frac{(-1)^{n_1+n_2}}{\Gamma(n_1)\Gamma(n_2)} \left[q^\mu q^\nu \Gamma(n_1+n_2-d/2) \int_0^1 dx \frac{x^{n_1+1}(1-x)^{n_2-1}}{\mathcal{D}^{n_1+n_2-d/2}} \right. \\
& \left. - \frac{\eta^{\mu\nu}}{2} \Gamma(n_1+n_2-1-d/2) \int_0^1 dx \frac{x^{n_1-1}(1-x)^{n_2-1}}{\mathcal{D}^{n_1+n_2-d/2}} \right] \quad (.0.54)
\end{aligned}$$

Onde $\mathcal{D} = m_1^2 x + m_2^2(1-x) - q^2 x(1-x) - i\epsilon$.

Alternativamente, as seguintes integrais podem ser usadas no espaço após a parametrização de Feynman [[Schwartz 2013](#)]:

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l^2 - \Delta)^n} = \frac{(-1)^n i \Gamma(n - \frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{n - \frac{d}{2}} \quad (.0.55)$$

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^2}{(l^2 - \Delta)^n} = \frac{(-1)^{n-1} i d \Gamma(n - \frac{d}{2} - 1)}{(4\pi)^{d/2} 2 \Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{n - \frac{d}{2} - 1} \quad (.0.56)$$

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^\mu l^\nu}{(l^2 - \Delta)^n} = \frac{(-1)^{n-1} i \eta^{\mu\nu} \Gamma(n - \frac{d}{2} - 1)}{(4\pi)^{d/2} 2 \Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{n - \frac{d}{2} - 1} \quad (.0.57)$$

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{(l^2)^2}{(l^2 - \Delta)^n} = \frac{(-1)^n i d(d+2) \Gamma(n - \frac{d}{2} - 1)}{(4\pi)^{d/2} 4 \Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{n - \frac{d}{2} - 2} \quad (.0.58)$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^\mu l^\nu l^\rho l^\sigma}{(l^2 - \Delta)^n} &= \frac{(-1)^n i \Gamma(n - \frac{d}{2} - 2)}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{n - \frac{d}{2} - 2} \\
&\times \frac{1}{4} (\eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} + \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho}) \quad (.0.59)
\end{aligned}$$

.0.10 Mais fórmulas úteis

As fórmulas usadas para a seção sobre o potencial de Cornell encontram-se em [[Smailagic e Spallucci 2020](#)] e são apresentadas aqui:

Parametrização de Schwinger:

$$\frac{1}{\vec{k}^2} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty ds s^{\alpha-1} e^{-s\vec{k}^2} \quad (.0.60)$$

Integral Gaussiana n dimensional:

$$\int d^n x e^{-\frac{1}{2}xAx} e^{B \cdot x} = e^{\frac{1}{4}BA^{-1}B} \left(\frac{\pi}{\det(A)} \right)^{n/2} \quad (.0.61)$$

Onde A e B são, e geral, matrizes.

Função Gamma:

$$\Gamma(\alpha) \equiv \int_0^\infty dt t^{\alpha-1} e^{-t} \quad (.0.62)$$

Função Gamma incompleta superior:

$$\Gamma(\alpha; z) \equiv \int_z^{\infty} dt t^{\alpha-1} e^{-t}, \quad (\text{Re}(\alpha) > 0) \quad (.0.63)$$

Função Gamma incompleta inferior:

$$\gamma(\alpha; z) \equiv \int_0^z dt t^{\alpha-1} e^{-t} \quad (.0.64)$$

Logo, naturalmente temos:

$$\gamma(\alpha; z) + \Gamma(\alpha; z) = \Gamma(\alpha) \quad (.0.65)$$

O comportamento para $\gamma(\alpha; z)$ para z pequeno é:

$$\gamma(\alpha; z) \sim \frac{1}{\alpha} z^{\alpha} \quad (.0.66)$$

Propriedades da Função Gamma:

$$\alpha \Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha + 1) \quad (.0.67)$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \quad (.0.68)$$

As seguintes fórmulas encontram-se em [Donoghue, Golowich e Holstein 2014]:

$$\Gamma\left(-n + \frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{2}{\epsilon} + \psi(n+1) + \mathcal{O}(\epsilon) \right], \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (.0.69)$$

$$\frac{d\Gamma(\alpha)}{d\alpha} = \Gamma(\alpha)\psi(\alpha), \quad \psi(\alpha+1) = \psi(\alpha) + 1/\alpha \quad (.0.70)$$

$$\psi(1) = -\gamma = -\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right) \simeq -0,5772 \quad (.0.71)$$

Apêndice D - Teoria de Grupos

.0.11 Teoria de Grupos

Um Grupo é um par (G, \cdot) que consiste num conjunto G e um produto binário fechado no conjunto. Por abuso de linguagem usaremos a notação $g \cdot h = gh \forall g, h \in G$. O produto satisfaz as propriedades:

1. Associatividade: $\forall g, h, k \in G, ghk = (gh)k = g(hk)$
2. $\exists e \in G | \forall g \in G, eg = ge = g$
3. $\forall g \in G, \exists g^{-1} \in G | gg^{-1} = g^{-1}g = e$

Uma das utilidades de um grupo é o estudo de simetrias agindo em espaços vetoriais. Podemos associar transformações de simetria num espaço aos elementos de um grupo, isso vem do fato das propriedades (2) e (3) garantirem que todas essas transformações são invertíveis e que sempre poderemos compor uma transformação que leve o espaço ao seu estado original.

De maneira geral, todo grupo finito (que possui um número finito de elementos em G) pode ser univocamente especificado a partir de uma tabela de multiplicação de seus elementos. Grupos com tabelas multiplicativas simétricas implicam $\forall g, h \in G, gh = hg$ e são denominados **abelianos**. Caso contrário são denominados **não abelianos**. Além disso, existem grupos infinitos contínuos, cujas transformações agem sobre espaços a partir de parâmetros contínuos. Estes grupos são chamados **Grupos de Lie**, exemplos são rotações $SO(p,q)$, o grupo $U(1)$ e o grupo $SU(3)$ que veremos adiante.

Embora não dê para codificar um grupo de Lie em sua tabela multiplicativa pela infinidade de elementos contidos, podemos obter um análogo através de sua linearização em torno da Identidade. Esta última é dita uma **Álgebra de Lie**. Um identificador único equivalente de tabela multiplicativa para álgebras de Lie são as relações de comutação entre seus elementos, que portanto as definem univocamente.

.0.12 Grupo $SU(3)$

O grupo $SU(3)$ é o grupo especial (S) unitário (U). Unitário implica que $\forall g \in SU(3), g^\dagger g = gg^\dagger = Id$. Especial implica que $\det g = 1 \Rightarrow \det g^{-1} = \det g^\dagger = (\det g)^{-1} = 1$ e que todas as suas representações são continuamente conexas à identidade. Assim um elemento arbitrário de $SU(3)$ agindo em sua representação fundamental (de dimensão 3) pode ser escrito da forma:

$$\text{vínculo: } (g^\dagger g)_{ij} = (Id)_{ij} \Rightarrow (g^\dagger)_k^i g_j^k = (g^*)_i^k g_j^k = \delta^i_j \quad (.0.72)$$

$$Id = g^\dagger g = \begin{bmatrix} g_1^k * g_1^k & g_1^k * g_2^k & g_1^k * g_3^k \\ g_2^k * g_1^k & g_2^k * g_2^k & g_2^k * g_3^k \\ g_3^k * g_1^k & g_3^k * g_2^k & g_3^k * g_3^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (.0.73)$$

Uma matriz complexa 3×3 possui em geral 18 parâmetros reais. Entretanto ao restringirmos essa parametrização ao grupo $SU(3)$, haverá 1 vínculo associado ao determinante da matriz e 9 vínculos associados à simetria $g^\dagger g = Id$, dentre os quais 3 parâmetros reais são oriundos da parte imaginária de g , que é assimétrica, e 6 da parte real simétrica de g . Portanto temos $6 + 3 + 1 = 10$ vínculos atuando sobre uma matriz que em geral tem 18 parâmetros reais. Portanto temos $18 - 10 = 8$ parâmetros reais independentes que descrevem um elemento genérico de $SU(3)$.

.0.13 Álgebra $\mathfrak{su}(3)$

Sejam θ^a , ($a = 1, \dots, 8$), temos a parametrização de um elemento genérico de $SU(3)$ na representação fundamental como:

$$\forall g \in G, g = g(\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^8) \quad (.0.74)$$

Um elemento da álgebra de Lie de $SU(3)$ simbolizada como $\mathfrak{su}(3)$ é definido como:

$$I_a = \left. \frac{\partial g(\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^8)}{\partial \theta^a} \right|_{(\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^8) = (0, 0, \dots, 0)} \quad (.0.75)$$

Onde, por questão de simplicidade algébrica, definimos $g(0, 0, \dots, 0) = Id$, isto é, a álgebra é uma linearização do grupo em torno da identidade. No grupo $SO(n)$ por exemplo, os parâmetros θ^a são ângulos de rotação. A definição do slide anterior para o gerador I_a possui a forma de um coeficiente de série de Taylor. Seja $X \in \mathfrak{su}(3)$, como a álgebra é uma linearização do grupo, podemos formar um espaço vetorial com ela, isto é $X = \theta^a I_a$: os geradores comportam-se como vetores de base. Um elemento infinitesimal em torno do grupo então é da forma, para $\epsilon \rightarrow 0$:

$$Id + \epsilon X \in SU(3) \quad (.0.76)$$

Podemos iterar potências desse elemento para nos deslocarmos ao longo do grupo, isto é:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(Id + \frac{1}{k} X \right)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!} = e^X \in SU(3) \quad (.0.77)$$

Entretanto

$$g = e^X \Rightarrow g^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(X^\dagger)^n}{n!} = e^{X^\dagger} \underbrace{=}_{g^\dagger = g^{-1}} e^{-X} \Rightarrow X^\dagger = -X \quad (.0.78)$$

Isto é, a princípio, o elemento do grupo é antihermitiano. Mas pelos princípios da mecânica quântica, os observáveis físicos possuem autovalor real e agem num espaço vetorial de corpo complexo e produto sesqui-linear. Portanto queremos uma álgebra hermitiana. É possível remediar isso redefinindo:

$$g = e^X \rightarrow g' = e^{iX} \Rightarrow g'^{-1} = e^{-iX} \quad (.0.79)$$

A partir de diante usaremos a definição $g = e^{iX}$. Note que a exponenciação da álgebra torna uma combinação linear da álgebra em um produto do grupo:

$$e^{i(aX_1 + bX_2)} = e^{i(aX_1 + bX_2)^\dagger} = e^{i(aX_1^\dagger + bX_2^\dagger)} \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \quad (.0.80)$$

Vamos agora descobrir os elementos da álgebra, pois a partir deles, podemos, via exponenciação, obter os elementos do grupo: Sejam λ_i autovalores do grupo, temos

$$\det g = \prod_i \lambda_i = e^{\ln(\prod_i \lambda_i)} = e^{\sum_i \ln \lambda_i} = e^{Tr \ln g} \quad (.0.81)$$

Onde assumimos que g seja sempre diagonalizável por transformações unitárias, de forma a assegurar $\sum_i \ln \lambda_i = \text{Tr} \ln g$. Agora $\det e^{iX} = e^{i\text{Tr}(X)} = 1 \Rightarrow \text{Tr}(X) = 0$. Assim, em conjunto com $X = X^\dagger$, obtemos

$$X \in \mathfrak{su}(3) = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma - i\lambda & \delta - i\sigma \\ \gamma + i\lambda & \beta & \xi - i\omega \\ \delta + i\sigma & \xi + i\omega & \alpha - \beta \end{bmatrix} \quad (.0.82)$$

Conforme previsto, há 8 parâmetros reais.

Reescr.:

$$\begin{aligned} X \in \mathfrak{su}(3) &= \begin{bmatrix} \alpha & \gamma - i\lambda & \delta - i\sigma \\ \gamma + i\lambda & \beta & \xi - i\omega \\ \delta + i\sigma & \xi + i\omega & -\alpha - \beta \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \\ &\beta \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \\ &\delta \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \sigma \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix} + \xi \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \\ &\omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix} = \alpha I_\alpha + \beta I_\beta + \gamma T_\gamma + \lambda I_\lambda + \delta I_\delta + \sigma I_\sigma + \xi I_\xi + \omega I_\omega \end{aligned} \quad (.0.83)$$

As letras gregas nas entradas de X correspondem, cada uma, a um dos parâmetros θ^a , enquanto que as matrizes restantes portanto são uma álgebra de $\text{SU}(3)$. Uma mudança de base nessas matrizes corresponde à uma nova base da álgebra de $\text{SU}(3)$, a mais notável dentre as bases possíveis é o conjunto das Matrizes de Gell-Mann $I_a = \lambda_a$ ($a = 1, 2, \dots, 8$):

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \lambda_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \lambda_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \lambda_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \lambda_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix} & \lambda_6 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \lambda_7 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix} & \lambda_8 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (.0.84)$$

Nota-se que as matrizes de Gell-Mann comportam-se como matrizes de Pauli agindo sobre subespaços bidimensionais da representação fundamental. Em especial, As matrizes

λ_i , ($i = 1, 2, 3$) formam uma representação de $SU(2) \subset SU(3)$. As matrizes de Gell-Mann satisfazem as relações:

$$\begin{aligned} [\lambda_a, \lambda_b] &= 2if_{abc}\lambda_c \\ \{\lambda_a, \lambda_b\} &= \frac{4}{3}\delta_{ab} + 2d_{abc}\lambda_c \\ \text{Tr}(\lambda_a\lambda_b) &= \frac{1}{2}\text{Tr}(\{\lambda_a, \lambda_b\}) = \frac{1}{2}\text{Tr}\left(\frac{4}{3}\delta_{ab}\right) + d_{abc}\text{Tr}(\lambda_c) = \\ &= \frac{1}{2}\text{Tr}\left(\frac{4}{3}\delta_{ab}\right) = 2\delta_{ab} \end{aligned} \quad (.0.85)$$

Onde f_{abc} são números reais sob indexação totalmente antissimétrica conhecidos como constantes de estrutura da álgebra e d_{abc} são números reais sob indexação totalmente simétrica.

As constantes de estrutura da álgebra **identificam univocamente a álgebra**. Isso se dá pois o mapa exponencial de quaisquer elementos da álgebra depende apenas no comutador entre eles. Com efeito, seja um caminho no grupo parametrizado por t finito, a conjugação de um elemento da álgebra λ_k com um elemento do grupo $g = e^{t\lambda_p}$ resulta num deslocamento infinitesimal sobre o grupo em torno de g :

$$\begin{aligned} e^{t\lambda_p}\lambda_k e^{-t\lambda_p} &\in SU(3) \\ \frac{d}{dt}\left(e^{t\lambda_p}\lambda_k e^{-t\lambda_p}\right)\Big|_{t=0} &= \\ = e^{t\lambda_p}\lambda_p\lambda_k e^{-t\lambda_p} + e^{t\lambda_p}\lambda_k(-\lambda_p)e^{-t\lambda_p}\Big|_{t=0} &= [\lambda_p, \lambda_k] \in \mathfrak{su}(3) \end{aligned} \quad (.0.86)$$

Em $\mathfrak{su}(3)$, $[\lambda_p, \lambda_k] = 2if_{pkc}\lambda_c$. f_{pkc} são as constantes de estrutura.

Analogamente $\frac{d^2}{dt^2}\left(e^{t\lambda_p}\lambda_k e^{-t\lambda_p}\right)\Big|_{t=0} = [\lambda_p, [\lambda_p, \lambda_k]]$. Iterativamente, temos:

$$\begin{aligned} e^{t\lambda_p}\lambda_k e^{-t\lambda_p} &= e^Z \\ \frac{d^n}{dt^n}\left(e^{t\lambda_p}\lambda_k e^{-t\lambda_p}\right)\Big|_{t=0} &= [\lambda_p, \cdot]^n \lambda_k = \frac{d^n}{dt^n} e^Z \Big|_{t=0} \end{aligned} \quad (.0.87)$$

Logo

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\lambda_p, \cdot]^n \lambda_k}{n!} \quad (.0.88)$$

Onde o caminho parametrizado no grupo por t dependente de quaisquer geradores λ_p, λ_k da álgebra, torna a dependência da parametrização do grupo através do mapa exponencial dependente das relações de comutação da álgebra.

Uma **representação**, por abuso de linguagem, é o termo usado para se referir tanto à realização matricial da ação de um grupo/álgebra quanto da realização matricial do espaço vetorial sobre o qual o grupo/álgebra age. Esse abuso não é grave uma vez que um contém a informação para identificar o outro e vice-versa.

Usamos o fato de que um grupo qualquer pode ser univocamente identificado pela tabela multiplicativa entre seus elementos, assim como grupos de Lie podem ser identificados através

de exponenciações de suas álgebras, sendo as álgebras identificadas unicamente através de suas relações de comutação.

Isso significa que um mesmo grupo/álgebra podem agir sobre espaços vetoriais de dimensões diferentes. Cada um desses espaços será uma representação diferente.

Vimos, por exemplo, que $SU(2) \subset SU(3)$, logo existe uma representação em 3 dimensões de $SU(2)$. De maneira geral, uma álgebra de Lie possui as representações fundamental, adjunta e as tensoriais, sendo que todas são formadas a partir de produtos tensoriais das fundamentais. O grupo $SU(3)$ possui duas representações fundamentais: a 3 e a 3^* onde

$$[A^*, B^*] = [B, A]^* \Rightarrow \left[\frac{\lambda_a^*}{2}, \frac{\lambda_b^*}{2} \right] = if_{abc} \frac{\lambda_c^*}{2} \in 3^* \quad (.0.89)$$

A representação 3^* é dita complexo conjugado da representação 3. Toda relação de comutação de coeficientes puramente imaginários ($\text{Re}(if_{abc} = 0)$) admite uma complexo conjugada. A representação fundamental é a **representação irreduzível** de menor dimensão de uma álgebra. Uma representação irreduzível por definição é o espaço vetorial transformado infinitesimalmente pela álgebra que não admite subespaços invariantes.

Conforme visto antes $\left. \frac{d}{dt} \left(e^{t\lambda_p} \lambda_k e^{-t\lambda_p} \right) \right|_{t=0} = [\lambda_p, \lambda_k] \in \mathfrak{su}(3)$. A partir desse objeto, extrairemos uma nova representação da álgebra. Seja:

$$\begin{aligned} R &= e^{i\epsilon^a \frac{\lambda_a}{2}} \simeq 1 + i\epsilon^a \frac{\lambda_a}{2} \text{ infinitesimal} (\in \mathfrak{su}(3)) \\ R \frac{\lambda_a}{2} R^{-1} &= \left(1 + i\epsilon^b \frac{\lambda_b}{2} \right) \frac{\lambda_a}{2} \left(1 - i\epsilon^c \frac{\lambda_c}{2} \right) = 1 - i\epsilon^b \left[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2} \right] \\ &= 1 - \underbrace{i\epsilon^b \left(if_{abc} \frac{\lambda_c}{2} \right)}_{\text{infinitesimal} (\in \mathfrak{su}(3))} = 1 + i\epsilon^b \left(-if_{abc} \frac{\lambda_c}{2} \right) = 1 + i\theta^c \frac{\lambda_c}{2} \end{aligned} \quad (.0.90)$$

Assim definimos uma nova representação da álgebra denominada **representação adjunta**.

Como queremos manter a indexação unicamente em a , redefinimos:

$$R \frac{\lambda_a}{2} R^{-1} \underset{\epsilon \rightarrow 0}{\equiv} 1 + i\epsilon^b (-if_{abc}) \frac{\lambda_c}{2} \equiv 1 + i\epsilon^b (d_b)_{ac}(R) \frac{\lambda_c}{2} \quad (.0.91)$$

O objeto contraído com o parâmetro ϵ define a álgebra. **Dessa forma o elemento da representação adjunta é identificado como** $(d_b)_{ac}(R) = -if_{abc}$.

$$(d_b)(R) = -if_{*b*} = [\lambda_b/2, *] \quad (.0.92)$$

Podemos entender essa representação como a ação linear do comutador sobre os geradores da representação fundamental. Assim, torna-se natural associarmos os quarks à representação 3, os antiquarks às representações 3^* e os glúons às representações adjuntas. Assim garante-se a ação

dos glúons sobre os quarks(antiquarks) seja efetivamente de mudar suas cores sem mudar sua natureza enquanto quark(antiquark).

Nota-se $(d_b)(R) = -if_{*b*} = [\lambda_b/2, *]$, a dimensão da representação adjunta é o número de geradores da álgebra (há 8 valores possíveis para b)

Todas as representações de $\mathfrak{su}(3)$ são obtidas através de produtos tensoriais formados entre as representações fundamentais através dos *Young Tableaux*. Essas representações são caracterizadas por um par de números (p, q) , onde:

$$R(p, q) = \left(\bigotimes_{i=1}^p 3 \right) \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^q 3^* \right) \quad (.0.93)$$

Os Tableaux produzem um algoritmo para a avaliação da dimensão $d(p, q)$ de cada uma dessas representações, assim como para a redução dessas representações em somas diretas de representações irredutíveis. De maneira geral, temos, para $\mathfrak{su}(3)$:

$$d(p, q) = (p + q + 2)(p + 1)(q + 2)/2 \quad (.0.94)$$

Analogamente temos $d(2, 0) = 6$, $d(0, 2) = 6^*$, $d(3, 0) = 10$, etc. A partir de diante, faremos o abuso de linguagem $R \equiv d(p, q)$ com $d(p, q) \neq d(q, p)$ se $p \neq q$ para nos referirmos à representação R .

Repara-se que na base das matrizes de Gell-Mann, existem duas diagonais, e que portanto vão comutar com todos os demais elementos da álgebra. Dessa forma qualquer base na álgebra $\mathfrak{su}(3)$ apresentará 2 elementos que comutarão com os demais, que formarão a **subálgebra de Cartan**. Chamamos o **rank da álgebra** a dimensão da subálgebra de Cartan. Do Teorema de Racah, isso significa que há 2 invariantes de Casimir da álgebra.

Um invariante de Casimir é um elemento da álgebra que é um múltiplo da identidade e é dependente de representação.

Cada representação também pode ser unicamente identificada pelos seus 2 invariantes de Casimir: o de segunda ordem $C_2(p, q)1_{d(p,q)}$ e $C_3(p, q)1_{d(p,q)}$ dados por:

$$\begin{aligned} C_2(R)1_R &\equiv \sum_{a=1}^8 I_a^2(R) = (3p + 3q + p^2 + pq + q^2)/3 \\ C_3(R)1_R &\equiv \sum_{a,b,c=1}^8 d_{abc}I_a(R)I_b(R)I_c(R) = \\ &= (p - q)(2p + q + 3)(2q + p + 3)/18 \end{aligned} \quad (.0.95)$$

Exemplos de invariantes de Casimir na física são massa e spin.

As seguintes relações são úteis no cálculo de correções radiativas devido aos traços de

loop tomados sobre as representações de gluon e quark(antiquark):

$$\begin{aligned}
f_{acd}f_{bcd} &= C_2(8)\delta_{ab} = 3\delta_{ab} \\
f_{abc}\lambda_b\lambda_c &= \frac{1}{2}f_{abc}[\lambda_b, \lambda_c] = if_{abc}f_{bcd}\lambda_d = iC_2(8)\lambda_a \\
\lambda^b\lambda^a\lambda^b &= \frac{1}{2}\left(\lambda^b[\lambda^a, \lambda^b] - [\lambda^a, \lambda^b]\lambda^b + \lambda^b\lambda^b\lambda^a + \lambda^a\lambda^b\lambda^b\right) = \\
&= 4C_2(3)\lambda^a + if_{abc}[\lambda^b, \lambda^c] = 4(C_2(3) - \frac{1}{2}C_2(8))\lambda^a
\end{aligned} \tag{.0.96}$$

Apêndice E - Causalidade

.1 O Problema de Ostrogradsky

Embora uma Teoria de Lee-Wick seja capaz de resolver o Problema da Hierarquia associado à massa do Higgs, uma pergunta natural que se pode fazer é: porque não é comum considerar teorias fundamentais de ordem superior a 2 em suas derivadas, será que existe um problema nessas teorias? A resposta é sim! A desconsideração de teorias de campo clássicas com derivadas de ordem superior deve-se ao Teorema de Ostrogradsky sobre instabilidades no hamiltoniano manifestas na ausência de lower bound. Logo, ao quantizarmos tais teorias, estas não possuem um vácuo estável e inevitavelmente irão apresentar fantasmas que possuem energia negativa, ou equivalentemente, estados de norma negativa. Como a definição de vácuo estável é fundamental e imprescindível às teorias Quânticas de Campos usuais, essa situação urge-nos a abandonar alguma das premissas básicas que postulamos ser satisfeitas pelas teorias quânticas de Campos, como causalidade, unitariedade ou invariância de Lorentz. Mais adiante veremos que há evidências matemáticas para flexibilizarmos o conceito de causalidade sem grandes problemas para adaptar a teoria de campos à presença destes fantasmas.

Primeiramente vamos provar o Teorema de Ostrogradski sobre instabilidades no hamiltoniano seguindo a referência [Woodard 2015]. Vamos considerar uma Lagrangiana de ordem superior $L(x, \dot{x}, \ddot{x})$. A condição de não degenerescência desta lagrangiana é $\frac{\partial^2 L}{\partial \ddot{x}^2} \neq 0$. Essa condição determina a unicidade da equação de movimento $x(t)$ a partir de um conjunto de condições iniciais. A equação de Ostrogradski generaliza a equação de Euler-Lagrange para teorias de ordem superior e é dada por:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} = 0 \tag{.1.1}$$

A equação de movimento resultante é do tipo:

$$\ddot{x} = \mathcal{F}(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{x}) \Rightarrow x(t) = \Xi(t, x_0, \dot{x}_0, \ddot{x}_0) \tag{.1.2}$$

A existência de 4 condições iniciais pra fixar o movimento implica na existência de 4 coordenadas canônicas. A escolha de Ostrogradski para elas são

$$\begin{aligned} X_1 &= x \\ P_1 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} \\ X_2 &= \dot{x} \\ P_2 &= \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} \end{aligned} \quad (1.3)$$

A não degenerescência significa que o mapa entre a equação de movimento e as coordenadas generalizadas do lagrangiano é invertível e portanto possui solução única. Ainda sim, essa solução requer que determinemos uma aceleração $\ddot{x} = A$ enquanto as 4 equações anteriores forem satisfeitas. Nota-se também que

$$P_1 = \frac{\partial L}{\partial X_2} - \dot{P}_2 \quad (1.4)$$

De forma que o momentum P_1 pode ser descrito em termos das demais coordenadas, o que nos permite tomar $A = A(X_1, X_2, P_2)$

Vamos definir as coordenadas generalizadas do hamiltoniano como $x^{(1)} \equiv \dot{x}$ e $x^{(2)} \equiv \ddot{x} = A(X_1, X_2, P_2)$, assim o hamiltoniano é obtido através da transformada de Legendre sobre essas duas coordenadas:

$$H(X_1, X_2, P_1, P_2) = P_1 X_2 + P_2 A(X_1, X_2, P_2) - L(X_1, X_2, A(X_1, X_2, P_2)) \quad (1.5)$$

Agora veremos que a escolha de Ostrogradski reproduz as equações canônicas de Hamilton:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial P_1} &= X_2 \stackrel{(!)}{=} \dot{X}_1 \\ \frac{\partial H}{\partial P_2} &= \frac{\partial}{\partial P_2} (P_2 A(X_1, X_2, P_2)) - \frac{\partial L}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial P_2} = A(X_1, X_2, P_2) + P_2 \frac{\partial A}{\partial P_2} - \frac{\partial L}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial P_2} = \\ &\stackrel{(!)}{=} A(X_1, X_2, P_2) + P_2 \frac{\partial A}{\partial P_2} - \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} \frac{\partial A}{\partial P_2} = A(X_1, X_2, P_2) = \dot{X}_2 \\ \frac{\partial H}{\partial X_1} &= P_2 \frac{\partial A}{\partial X_1} - \frac{\partial L}{\partial X_1} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial A}}_{P_2} \frac{\partial A}{\partial X_1} = - \frac{\partial L}{\partial X_1} \stackrel{O.}{=} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} = -\dot{P}_1 \\ \frac{\partial H}{\partial X_2} &= P_1 + P_2 \frac{\partial A}{\partial X_2} - \frac{\partial L}{\partial X_2} - \frac{\partial L}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial X_2} \\ &\stackrel{(!)}{=} P_1 - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \stackrel{O.}{=} P_1 - (P_1 + \dot{P}_2) = -\dot{P}_2 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Onde (!) significa que usamos a definição: $A = \ddot{x}$ para $X_1 = x$, $X_2 = \dot{x}$, $\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} = P_2$. Nas passagens, O. simboliza o uso da equação de Ostrogradski. Dessa forma, as escolhas de coordenadas de Ostrogradski reproduzem as equações canônicas de Hamilton.

Um fato notável do hamiltoniano de Ostrogradsky é a linearidade em P_1 . É justamente essa linearidade que torna o hamiltoniano unbounded below, visto que na definição do hamiltoniano, diferentemente das demais coordenadas, o Lagrangiano não possui dependência explícita de P_1 ao fixarmos a coordenada $A(X_1, X_2, P_2)$, que por sua vez, fixa a equação de movimento através da condição de não degenerescência. Portanto, um sistema quântico descrito por este tipo de hamiltoniano não teria vácuo estável.

Podemos exemplificar isso com o oscilador harmonico dado por:

$$L = -\frac{\epsilon m}{2\omega^2} \ddot{x}^2 + \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{m\omega}{2} x^2 \quad (.1.7)$$

Onde ϵ é um parâmetro adimensional. Vamos obter a equação de Ostrogradski:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -m\omega^2 x, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x} \quad (.1.8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} = -\frac{\epsilon m}{\omega^2} \ddot{x} \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} = -\frac{\epsilon m}{\omega^2} \ddot{x} \quad (.1.9)$$

Assim a equação de Ostrogradski é:

$$0 = -m \left[\frac{\epsilon}{\omega^2} \ddot{x} + \ddot{x} + \omega^2 x \right] \quad (.1.10)$$

Podemos resolver facilmente a equação diferencial através de uma transformada de Fourier, que irá resultar numa equação algébrica dos autovalores do kernel:

$$x(t) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{-ikt} x(k) \Rightarrow \partial_t^{(n)} x(t) = \int \frac{dk}{2\pi} (-ik)^n e^{-ikt} x(k) \quad (.1.11)$$

Substituindo na equação de Ostrogradski, obtemos:

$$0 = \int \frac{dk}{2\pi} \left(\frac{\epsilon}{\omega^2} (-ik)^4 + (-ik)^2 + \omega^2 \right) e^{-ikt} x(k) \Rightarrow \frac{\epsilon}{\omega^2} k^4 - k^2 + \omega^2 = 0 \quad (.1.12)$$

Definindo $k^2 = y$, usamos a solução da equação quadrática resultante para obter

$$y = \omega^2 \left(\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\epsilon}}{2\epsilon} \right) \Rightarrow k_{\pm} = \pm \sqrt{y} = \pm \omega \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\epsilon}}{2\epsilon}} \quad (.1.13)$$

Isto é, há duas soluções possíveis para a equação quadrática nas frequências. A transformada de Fourier inversa dessa equação descreve um oscilador harmonico. Portanto, podemos expressar a solução da equação de movimento original como combinação linear de 2 osciladores harmônicos: um de frequência k_+ e outro de frequência k_- (nota-se que o segundo oscilador possui frequência negativa):

$$x(t) = C_+ \cos(k_+ t) + S_+ \sin(k_+ t) + C_- \sin(k_- t) + S_- \sin(k_- t) \quad (.1.14)$$

As constantes C_+ , S_+ , C_- e S_- podem ser obtidas através das condições iniciais:

$$\begin{aligned} x_0 &\equiv x(t=0) = C_+ + C_- \\ \dot{x}_0 &\equiv \dot{x}(t=0) = S_+ k_+ + S_- k_- \\ \ddot{x}_0 &\equiv \ddot{x}(t=0) = -(C_+ k_+^2 + C_- k_-^2) \\ \ddot{x}_0 &\equiv \ddot{x}(t=0) = -(S_+ k_+^3 + S_- k_-^3) \end{aligned} \quad (.1.15)$$

Matricialmente, temos

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ \ddot{x}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -k_+^2 & -k_-^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_+ \\ C_- \end{pmatrix} \quad (.1.16)$$

Podemos inverter a equação invertendo a transformação linear, que nos dará os valores C_+ e C_- em termos das condições iniciais:

$$C_+ = \frac{k_-^2 x_0 + \ddot{x}_0}{k_-^2 - k_+^2}, \quad \frac{k_+^2 x_0 + \ddot{x}_0}{k_-^2 - k_+^2} \quad (.1.17)$$

Analogamente, para S_- e S_+ , encontramos

$$S_+ = \frac{k_-^2 \dot{x}_0 + \ddot{x}_0}{k_+(k_-^2 - k_+^2)}, \quad S_- = \frac{k_+^2 \dot{x}_0 + \ddot{x}_0}{k_-(k_+^2 - k_-^2)} \quad (.1.18)$$

Os momenta de Ostrogradski portanto são

$$\begin{aligned} P_1 &= m\dot{x} - \frac{\epsilon m}{\omega^2} \ddot{x} \Leftrightarrow \ddot{x} = \frac{\omega^2 P_1 - m\omega^2 X_2}{\epsilon m} \\ P_2 &= -\frac{\epsilon m}{\omega^2} \ddot{x} \Leftrightarrow \ddot{x} = A = -\frac{\omega^2 P_2}{\epsilon m} \end{aligned} \quad (.1.19)$$

Novamente as coordenadas canônicas são $X_1 = x$ e $X_2 = \dot{x}$. O hamiltoniano na prescrição de Ostrogradski assume a forma:

$$\begin{aligned} H &= P_1 X_2 - \frac{\omega^2}{2\epsilon m} P_2^2 - \frac{m}{2} X_2^2 + \frac{m\omega^2}{2} X_1^2 = \\ &= \frac{\epsilon m}{\omega^2} \dot{x} \ddot{x} - \frac{\epsilon m}{2\omega^2} \ddot{x}^2 + \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{m\omega^2}{2} x^2 = \\ &= \frac{m}{2} \sqrt{1 - 4\epsilon k_+^2} (C_+^2 + S_+^2) - \frac{m}{2} \sqrt{1 - 4\epsilon k_-^2} (C_-^2 + S_-^2) \end{aligned} \quad (.1.20)$$

Nota-se que o hamiltoniano descrito em termos de C_+ , C_- , S_+ e S_- possui uma interpretação mais direta: o hamiltoniano possui modos (+) de energia positiva e modos (-) de energia negativa. Este hamiltoniano é unbounded e não possui estado fundamental bem definido classicamente.

Ainda sim, não necessariamente usaremos a prescrição do hamiltoniano de Ostrogradsky. A conclusão importante é simplesmente o fato de que teorias com lagrangianas de ordem superior apresentam instabilidades clássicas. Veremos agora um exemplo de como quantizar teorias com tais instabilidades.

.1.1 Oscilador de Pais-Uhlenbeck e Causalidade

A ação do oscilador em questão é dada por [Pais e Uhlenbeck 1950], [Pavšič 2016], [Salvio e Strumia 2016]:

$$S_{PU} = \int dt \left[-\frac{1}{2} q \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_1^2 \right) \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_2^2 \right) q - V(q) \right] \quad (.1.21)$$

Na ausência de potencial ($V = 0$), os osciladores estão desacoplados e temos:

$$\mathcal{L}_{PU,free} = -\frac{1}{2}q \left(\frac{d^4}{dt^4} + (\omega_1^2 + \omega_2^2) \frac{d^2}{dt^2} + (\omega_1\omega_2)^2 \right) q \quad (1.22)$$

Que nos leva a um propagador livre no espaço de frequências do tipo:

$$\frac{1}{\omega^4 - (\omega_1^2 + \omega_2^2)\omega^2 + (\omega_1\omega_2)^2} = \frac{1}{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)} \quad (1.23)$$

Como visto na primeira equação desta tese, é possível expressarmos um propagador de ordem quártica como uma soma de propagadores de ordem quadrática, onde um é ordinário e outro fantasma, portanto seja

$$\frac{1}{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)} = \alpha \left[\frac{1}{\omega^2 - \omega_1^2} - \frac{1}{\omega^2 - \omega_2^2} \right] \quad (1.24)$$

Onde

$$\left[\frac{1}{\omega^2 - \omega_1^2} - \frac{1}{\omega^2 - \omega_2^2} \right] = \frac{-\omega_1^2 + \omega_2^2}{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)} \Rightarrow \alpha = \frac{-1}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \quad (1.25)$$

Logo o propagador é desacoplado em:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)} &= \frac{-1}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \left[\frac{1}{\omega^2 - \omega_1^2} - \frac{1}{\omega^2 - \omega_2^2} \right] \\ &= \frac{1}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \left[\underbrace{\frac{1}{\omega^2 - \omega_2^2}}_{(2)} - \underbrace{\frac{1}{\omega^2 - \omega_1^2}}_{(1)} \right] \end{aligned} \quad (1.26)$$

Onde (1) e (2) são associados aos propagadores de novas coordenadas respectivamente denominadas q_1 e q_2 . Isso nos permite reescrever a ação como:

$$S_{PU} = \int dt \left[-\frac{1}{2}q_2 \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_2^2 \right) q_2 + \frac{1}{2}q_1 \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_1^2 \right) q_1 - V'(q_2 - q_1) \right] \quad (1.27)$$

Para que isso aconteça, identificamos:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^{1/2}} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_2^2 \right) q \\ q_2 &= \frac{1}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^{1/2}} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_1^2 \right) q \end{aligned} \quad (1.28)$$

O oscilador q_1 manifesta-se como fantasma e equivalentemente à instabilidade de Ostrogradski. O Funcional de vácuo em termos dos osciladores pode ser descrito como:

$$Z = \int \mathcal{D}q e^{iS[q]} = \int \mathcal{D}q_1 \mathcal{D}q_2 e^{iS[q_1, q_2]} \quad (1.29)$$

No caso não interagente ($V' = 0$), os osciladores se desacoplam e podemos fatorizar o funcional de vácuo como:

$$Z = \int \mathcal{D}q_1 e^{-iS[q_1]} \int \mathcal{D}q_2 e^{iS[q_2]} \quad (.1.30)$$

Com

$$S_i = -\frac{1}{2} \int dt q_i \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_i^2 \right) q_i, \quad i = 1, 2 \quad (.1.31)$$

É notável a diferença entre o sinal dos expoentes presentes nos integrandos do funcional da vácuo do caso desacoplado. Para tornar cada uma das integrais convergentes, precisamos adicionar um fator infinitesimal real ao expoente de $\pm \epsilon \int dt q^2$ cujo sinal depende do sinal do expoente. Essa adição equivale ao shift nas ações de $\omega_1^2 \mapsto \omega_1^2 + i\epsilon$ e $\omega_2^2 \mapsto \omega_2^2 - i\epsilon$.

$$Z \mapsto Z' = \int \mathcal{D}q_1 e^{-i(S[q_1] - i\epsilon \int dt q^2)} \int \mathcal{D}q_2 e^{i(S[q_2] + i\epsilon \int dt q^2)} \quad (.1.32)$$

Considerando os shifts nos pólos de massa, os propagadores das partículas 1 e 2 são, respectivamente, dados por:

$$\begin{aligned} iG_+ F(t-t') &= \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \frac{i}{\omega^2 - \omega_2^2 + i\epsilon} \\ iG_- F(t-t') &= \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \frac{-i}{\omega^2 - \omega_1^2 - i\epsilon} \end{aligned} \quad (.1.33)$$

Nota-se a diferença de sinal acompanhando os fatores de i do propagador do fantasma em sua representação de frequência. O shift diferente nos pólos indica que o fantasma segue uma causalidade diferente das partículas ordinárias. Isso deu origem ao conceito de seta de causalidade [Donoghue e Menezes 2020]. No capítulo 3, vimos que a causalidade diferente do fantasma se manifesta num tempo de decaimento negativo para os modos de Lee-Wick quando estes estiverem sob interação com as partículas ordinárias de maneira a restaurar a unitariedade da teoria contanto que a massa das partículas Lee-Wick seja suficientemente grande para que decaia em partículas ordinárias.

Referências

- ABU-AJAMIEH, F.; CHATTOPADHYAY, P. *Phenomenological Aspects of Lee-Wick QED*. 2024. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2406.16699>>. Citado na página 95.
- BULAVA, J. et al. String breaking by light and strange quarks in qcd. *Physics Letters B*, Elsevier BV, v. 793, p. 493–498, jun. 2019. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2019.05.018>>. Citado na página 91.
- BURDMAN, G. New solutions to the hierarchy problem. *Brazilian Journal of Physics*, FapUNIFESP (SciELO), v. 37, n. 2b, p. 506–513, jul. 2007. ISSN 0103-9733. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1590/S0103-97332007000400006>>. Citado na página 29.
- CABIBBO, N. Unitary symmetry and leptonic decays. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 10, p. 531–533, Jun 1963. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.10.531>>. Citado na página 51.
- CARONE, C. D. Axionlike lee-wick particles in light-shining-through-wall experiments. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 102, n. 11, dez. 2020. ISSN 2470-0029. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.102.115039>>. Citado 2 vezes nas páginas 88 e 90.
- CERN. *Join CERN in a historic week for particle physics*. 2022. Disponível em: <<https://home.web.cern.ch/news/news/cern/join-cern-historic-week-particle-physics>>. Citado na página 95.
- CHRISTENSON, J. H. et al. Evidence for the 2π Decay of the K_2^0 Meson. *Phys. Rev. Lett.*, v. 13, p. 138–140, 1964. Citado na página 52.
- COLEMAN, S. Acausality. In: ZICHICHI, A. (Ed.). *Subnuclear Phenomena*. Academic Press, 1970. p. 282–328. ISBN 978-0-12-780580-1. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780127805801500164>>. Citado 2 vezes nas páginas 95 e 96.
- CUTKOSKY, R. et al. A non-analytic s-matrix. *Nuclear Physics B*, v. 12, n. 2, p. 281–300, 1969. ISSN 0550-3213. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321369901692>>. Citado na página 96.
- DINE, M. *Naturalness Under Stress*. 2015. Citado na página 29.
- DONOGHUE, J. F.; GOLOWICH, E.; HOLSTEIN, B. R. *Dynamics of the standard model*. [S.l.]: CUP, 2014. v. 2. Citado 5 vezes nas páginas 31, 42, 43, 109 e 111.
- DONOGHUE, J. F.; MENEZES, G. Quantum causality and the arrows of time and thermodynamics. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, Elsevier BV, v. 115, p. 103812, nov. 2020. ISSN 0146-6410. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.pnnp.2020.103812>>. Citado 2 vezes nas páginas 96 e 123.
- DONOGHUE, J. F.; MENEZES, G. *On Quadratic Gravity*. 2021. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2112.01974>>. Citado na página 96.

DULANEY, T. R.; WISE, M. B. Flavor changing neutral currents in the lee-wick standard model. *Physics Letters B*, Elsevier BV, v. 658, n. 5, p. 230–235, jan. 2008. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2007.08.049>>. Citado na página 84.

GLASHOW, S. L.; ILIOPOULOS, J.; MAIANI, L. Weak interactions with lepton-hadron symmetry. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 2, p. 1285–1292, Oct 1970. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.2.1285>>. Citado na página 84.

GREINER, W.; REINHARDT, J. *Field quantization*. [S.l.: s.n.], 1996. Citado na página 97.

GRINSTEIN, B.; O'CONNELL, D.; WISE, M. B. The Lee-Wick standard model. *Phys. Rev. D*, v. 77, p. 025012, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 59.

GRINSTEIN, B.; O'CONNELL, D.; WISE, M. B. Massive vector scattering in lee-wick gauge theory. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 77, n. 6, mar. 2008. ISSN 1550-2368. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.77.065010>>. Citado na página 62.

HELAYËL-NETO, J. A. *Eletrofraca 2019-2*. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=E8MNJQGpWjk&list=PLJL6mcNTEfxWEMtp9feCcuJ7tOgceAJT>>. Citado na página 44.

HOOFT, G. 't. Naturalness, chiral symmetry, and spontaneous chiral symmetry breaking. *NATO Sci. Ser. B*, v. 59, p. 135–157, 1980. Citado na página 28.

HOOFT, G. 't; VELTMAN, M. J. G. DIAGRAMMAR. *NATO Sci. Ser. B*, v. 4, p. 177–322, 1974. Citado na página 105.

KOBAYASHI, M.; MASKAWA, T. CP-Violation in the Renormalizable Theory of Weak Interaction. *Progress of Theoretical Physics*, v. 49, n. 2, p. 652–657, 02 1973. ISSN 0033-068X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1143/PTP.49.652>>. Citado na página 52.

KOREN, S. *The Hierarchy Problem: From the Fundamentals to the Frontiers*. 2020. Citado na página 29.

KREIN, G. *Complex-mass Particles and their bound states*. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=Kyaf_71P4Xg>. Citado na página 91.

LEE, T. D.; WICK, G. C. Finite theory of quantum electrodynamics. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 2, p. 1033–1048, Sep 1970. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.2.1033>>. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 96.

PAIS, A.; UHLENBECK, G. E. On field theories with non-localized action. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 79, p. 145–165, Jul 1950. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.79.145>>. Citado na página 121.

PASCUAL, P.; TARRACH, R. *QCD: RENORMALIZATION FOR THE PRACTITIONER*. [S.l.: s.n.], 1984. v. 194. Citado 3 vezes nas páginas 36, 40 e 108.

PAVŠIĆ, M. Pais–uhlenbeck oscillator and negative energies. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, World Scientific Pub Co Pte Lt, v. 13, n. 09, p. 1630015, set. 2016. ISSN 1793-6977. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1142/S0219887816300154>>. Citado na página 121.

PECCEI, R. D.; QUINN, H. R. Constraints imposed by CP conservation in the presence of pseudoparticles. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 16, p. 1791–1797, Sep 1977. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.16.1791>>. Citado na página 88.

SALVIO, A.; STRUMIA, A. Quantum mechanics of 4-derivative theories. *The European Physical Journal C*, Springer Science and Business Media LLC, v. 76, n. 4, abr. 2016. ISSN 1434-6052. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-016-4079-8>>. Citado na página 121.

SCHWARTZ, M. D. *Quantum Field Theory and the Standard Model*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 21, 31, 59 e 110.

SMAILAGIC, A.; SPALLUCCI, E. *The Cornell potential in Lee-Wick inspired electrodynamics*. 2020. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2001.07530>>. Citado 3 vezes nas páginas 91, 93 e 110.

WOODARD, R. P. Ostrogradsky's theorem on Hamiltonian instability. *Scholarpedia*, v. 10, n. 8, p. 32243, 2015. Revision #186559. Citado na página 118.

WORKMAN, R. L. et al. Review of Particle Physics. *PTEP*, v. 2022, p. 083C01, 2022. Citado na página 83.