



CBPF

Centro Brasileiro
de Pesquisas Físicas

Coordenação de Formação Científica

Dissertação de Mestrado


**Estudo de crescimento de
perturbações da matéria utilizando o
HI-CLASS**

Cristiane Fontana


“ESTUDO DE CRESCIMENTO DE PERTURBAÇÕES DA MATÉRIA
UTILIZANDO O HI-CLASS”

CRISTIANE FONTANA


Dissertação de Mestrado em Física apresentada no
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do
Ministério da Ciência Tecnologia e Inovação.
Fazendo parte da banca examinadora os seguintes
professores:

Documento assinado digitalmente
 **FELIPE TOVAR FALCIANO**
Data: 09/05/2024 09:51:19-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>


Felipe Tovar Falciano – Orientador/CBPF

Documento assinado digitalmente
 **BRUNO AZEVEDO LEMOS MORAES**
Data: 08/05/2024 12:55:16-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Bruno Azevedo Lemos Moraes – Coorientador/ UFRJ

Documento assinado digitalmente
 **SERGIO EDUARDO DE CARVALHO EYER JORAS**
Data: 03/05/2024 16:04:52-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Sergio Eduardo de Carvalho Eyer Joras – UERJ

Documento assinado digitalmente
 **MARCELA CAMPISTA BORGES DE CARVALHO**
Data: 05/05/2024 13:58:22-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Marcela Campista Borges de Carvalho - UFRJ

Rio de Janeiro, 05 de abril de 2024.

Resumo

A descoberta da recente era de expansão acelerada do Universo levou modelos de gravitação modificada a obter uma grande popularidade nos últimos 20 anos. Descobriu-se que modelos como $f(R)$ e Camaleão são casos particulares da chamada teoria de Horndeski, que permite a utilização de parametrizações fenomenológicas. Nesse contexto, surgiu o código de Boltzmann HI-CLASS, uma ferramenta robusta, flexível e precisa que calcula, entre outras coisas, as funções de transferência e o espectro de potência da matéria. O objetivo principal dos grandes projetos observacionais cosmológicos na próxima década é vincular modelos de energia escura e medir com alta precisão as propriedades fundamentais do modelo cosmológico padrão. No contexto de testes de gravitação modificada, as observações da taxa de crescimento de estruturas no Universo são ferramentas poderosas. Nestas teorias alternativas, as perturbações lineares de matéria possuem uma taxa de crescimento diferenciada com relação ao modelo Λ CDM, e em alguns casos podem incluir uma dependência de escala. Medidas observacionais da taxa de crescimento são realizadas principalmente com o método de distorções no espaço de desvio para o vermelho (RSD). Medir com precisão estes efeitos é um dos grandes objetivos de levantamentos cosmológicos da próxima década, tais como DESI e Euclid. Este trabalho destaca o uso do HI-CLASS para analisar a equação que descreve a taxa de crescimento de estruturas no Universo, permitindo uma nova abordagem para explorar a gravidade modificada, através de possíveis novas parametrizações. A implementação no código HI-CLASS visa facilitar futuras pesquisas em cosmologia, especialmente na utilização de observações cosmológicas de levantamentos como DESI e Euclid para testar teorias de gravitação alternativas. O trabalho conclui com a perspectiva de aplicar essas metodologias para analisar dados de formação de estrutura em observáveis de RSD, com o objetivo de restringir parâmetros de modelos de gravidade modificada.

Palavras-chave: Cosmologia, HI-CLASS, Estrutura em Larga Escala, perturbações de matéria.

Abstract

The discovery of the recent era of accelerated expansion of the Universe has led modified gravity models to gain significant popularity over the last 20 years. It was found that models such as $f(R)$ and Chameleon are particular cases of the so-called Horndeski theory, which allows the use of phenomenological parameterizations. In this context, the Boltzmann HI-CLASS code emerged, a robust, flexible, and accurate tool that calculates, among other things, the transfer functions and the power spectrum of matter. The main goal of large cosmological observational projects in the next decade is to link dark energy models and measure with high precision the fundamental properties of the standard cosmological model. In the context of modified gravity tests, observations of the growth rate of structures in the Universe are powerful tools. In these alternative theories, linear matter perturbations have a differentiated growth rate relative to the Λ CDM model, and in some cases, may include a scale dependence. Observational measurements of the growth rate are mainly carried out with the method of redshift-space distortions (RSD). Precisely measuring these effects is one of the great goals of cosmological surveys in the next decade, such as DESI and Euclid. This work highlights the use of HI-CLASS to analyze the equation that describes the growth rate of structures in the Universe, allowing a new approach to explore modified gravity, through possible new parameterizations. The implementation in the HI-CLASS code aims to facilitate future research in cosmology, especially in the use of cosmological observations from surveys like DESI and Euclid to test alternative gravitation theories. The work concludes with the perspective of applying these methodologies to analyze structure formation and redshift-space distortion data, with the goal of constraining parameters of modified gravity models.

Keywords: Cosmology, HI-CLASS, Large Scale Structure, matter perturbations.

Sumário

Resumo	3	
Abstract	5	
1	INTRODUÇÃO	15
1.1	Momentos importantes da Cosmologia teórica e observacional . . .	15
1.2	O Modelo Cosmológico Padrão	23
1.3	Breve história e vantagens de se estudar teorias de gravitação modificada	29
1.4	Objetivos do trabalho	31
2	O MODELO ΛCDM	35
2.1	Dedução das equações de campo na cosmologia	35
2.2	Evolução do fundo cosmológico	38
3	PERTURBAÇÕES EM ΛCDM	43
3.1	Evolução da função de distribuição num Universo em expansão . . .	43
3.2	Equação geodésica num espaço-tempo perturbado	46
3.3	Equação de Boltzmann com perturbações	48
3.3.1	Conjunto de equações	57
3.4	Equações de Einstein para perturbações escalares	59
3.5	O calibre síncrono	62
4	EVOLUÇÃO DAS PERTURBAÇÕES ESCALARES	65
4.1	Função de correlação e espectro de potência da matéria	65
4.2	Surgimento de perturbações na era inflacionária	69
4.3	Condições iniciais para a evolução de perturbações	71
4.4	Crescimento de estruturas no regime linear	73
4.5	Efeitos no espaço de <i>redshift</i> : BAO, RSD	79
5	HORNDESKI	87
5.1	Encapsulando desvios na gravitação	87
5.2	Equações de Poisson generalizadas	88
5.3	Perturbações da matéria em gravitação modificada	92
6	IMPLEMENTAÇÃO DA SOLUÇÃO PARA δ_m NO HI-CLASS . . .	97
6.1	CLASS e HI-CLASS	97

6.2	Implementação das modificações no HI-CLASS	103
6.2.1	G_{eff}	103
6.2.2	δ_m	110
6.2.3	Taxa de Crescimento f	121
6.3	Resultados obtidos com a implementação	122
6.3.1	G_{eff}	122
6.3.2	δ_m	130
6.3.3	Plot de f e D no HI-CLASS	138
7	CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS FUTURAS	141
	Cálculo do escalar de Ricci na Relatividade Geral	143
	Dedução das equações de campo a partir da ação de Einstein-Hilbert	147
	Mais sobre problemas com ΛCDM	148
	REFERÊNCIAS	149

Lista de Figuras

- Figura 1 – Resumo da história do Universo. Não temos conhecimento concreto sobre o que aconteceu antes de um certo tempo no passado, sendo em princípio impossível conseguir evidências experimentais dessa época. Convencionalmente, a seta do tempo começa no início da inflação, evitando considerar uma possível singularidade inicial. A figura relaciona o tempo, em segundos, com a descrição do Universo naquele momento. 24
- Figura 2 – Uma fatia da distribuição de galáxias em função do *redshift* obtida pelo 2dF. Cada ponto corresponde à posição de uma galáxia. Fonte: página do 2dF na internet. Disponível em <<http://www.2dfgrs.net>>. 25
- Figura 3 – Espectro de potência da matéria obtido com dados do BOSS (*data release 9*, CMASS) O pequeno gráfico no centro mostra as oscilações acústicas de bárions, obtidas ao dividir o espectro por um *best fit* do espectro sem oscilações. Fonte: (Anderson et al., 2012). 25
- Figura 4 – Gráfico de caixa com restrições de 68% de nível de confiança da constante de Hubble H_0 por meio de medições diretas e indiretas realizadas por diferentes missões e grupos astronômicos ao longo dos anos. A faixa vertical ciano corresponde ao valor de H_0 da Equipe SHOES, e a faixa vertical rosa claro corresponde ao valor de H_0 conforme relatado pela Equipe Planck 2018 dentro de um cenário Λ CDM. Fonte: Di Valentino et al. (2021). 27
- Figura 5 – O valor de S8 com as restrições de 68% de nível de confiança derivadas por medições recentes. Fonte: Perivolaropoulos e Skara (2022). 28
- Figura 6 – Ilustração da evolução dos parâmetros de densidade para Λ CDM. Foram escolhidos $\Omega_{m0} = 0.3 - \Omega_{r0}$, $\Omega_{\Lambda0} = 0.7$, $\Omega_{r0} = 10^{-4}$. Também são mostrados a equação de estado efetiva $w_{eff} = p_{tot}/\rho_{tot}$ e o parâmetro de desaceleração $q(t)$ 42
- Figura 7 – Interação entre as diferentes componentes do Universo. Todas as componentes afetam a métrica do fundo cosmológico. As perturbações das componentes (exceto energia escura) afetam a métrica e vice-versa. Adaptado de Dodelson e Schmidt (2021). 50
- Figura 8 – Representação de uma colisão 1D observada no espaço de fase da partícula de tipo 1. As colisões ocorrem localmente e removem partículas de f_1 (em azul escuro) em proporção ao produto $f_1 f_2$, colocando-as em f_3 e f_4 . A reação inversa, proporcional a $f_3 f_4$, adiciona partículas a f_1 . Adaptado de Dodelson e Schmidt (2021). 51

Figura 9 – Se o espalhamento Compton é eficiente, os fótons viajam muito pouco até sofrerem outra colisão. Os pontos representam observadores e os círculos representam as superfícies de último espalhamento. A temperatura nessas superfícies é praticamente uniforme, mas diferente entre si, de forma que o monopolo varia no espaço. Podemos entender a quantidade μ definida no texto observando que na figura $\Theta(k, \mu = 1)$ descreve fótons viajando na direção em que a temperatura está mudando, e $\Theta(k, \mu = 0)$ são fótons viajando na direção perpendicular ao gradiente de temperatura. Adaptado de [Dodelson e Schmidt \(2021\)](#). 54

Figura 10 – Variação do tamanho do raio de Hubble comóvel desde o começo da inflação até atualmente. Todas as escalas que temos hoje dentro do horizonte já estiveram em contato causal no início da inflação. A expansão do espaço fez com que essas escalas saíssem do horizonte de Hubble, e após o final da inflação e o Universo se expandir desaceleradamente, essas escalas puderam “alcançar” o horizonte novamente. Fonte: [Baumann \(2009\)](#). 69

Figura 11 – Potencial do tipo “slow-roll” ([Linde, 1982](#)), ([Albrecht; Steinhardt, 1982](#)) capaz de causar a era inflacionária e as perturbações do fundo. Fonte: [Baumann \(2009\)](#). 70

Figura 12 – Na época da inflação, $\eta = \frac{-1}{aH}$, enquanto que na era da radiação, $\eta = \frac{1}{aH}$. Uma perturbação de determinado tamanho comóvel sai do horizonte na época da inflação, reentrando no horizonte numa época posterior. Fonte: [Baumann \(2009\)](#). 71

Figura 13 – Potenciais inicialmente são constantes fora do horizonte. Modos que entram na era da radiação com acoplamento forte entre bárions e fótons oscilam amortecidamente. Modos que entram bem dentro da época da matéria permanecem constantes, tendo decaído levemente fora do horizonte durante a época da igualdade. Fonte: [Ma e Bertschinger \(1995\)](#). 75

Figura 14 – Modos que entram durante a era de radiação crescem apenas logaritmicamente. Modos que entram na era da matéria crescem proporcionalmente ao fator de escala. Eventualmente todos os modos dentro do horizonte vão crescer proporcionalmente com o fator de escala, até chegar a era de expansão acelerada. Fonte: [Dodelson e Schmidt \(2021\)](#). 76

Figura 15 – No calibre newtoniano os modos não crescem fora do horizonte, enquanto no calibre síncrono $\delta_c \propto a^2$. O modo $k = 1 \text{ Mpc}^{-1}$ entra primeiro no horizonte, fazendo bárions (ponto-barra) e fótons (barra longa) oscilarem, assim como os neutrinos (pontilhado). Bem dentro da era da matéria, após o desacoplamento, bárions tendem a seguir a matéria escura (linha contínua). O modo $k = 0.01 \text{ Mpc}^{-1}$, que entra mais tarde no horizonte, tem como característica as perturbações de matéria escura e bariônica imediatamente crescendo proporcionalmente ao fator de escala. Fonte: Ma e Bertschinger (1995)	77
Figura 17 – Espectro de potência da matéria para Λ CDM com diferentes valores de Ω_m . Fonte: Dodelson e Schmidt (2021)	78
Figura 16 – Comportamento do fator de crescimento $D(a)$ para diferentes valores de Ω_Λ . Fonte: Dodelson e Schmidt (2021)	78
Figura 18 – Aproximação $f = [\Omega_m(a)]^{0.55}$ em comparação a $f(a) = \frac{d \ln D}{d \ln a}$. A linha horizontal preta foi usada apenas como referência visual.	79
Figura 19 – Efeito da distorção causada pela velocidade peculiar de uma distribuição de matéria sofrendo atração mútua. No primeiro painel, a posição de cada galáxia (ponto) foi calculada como se todo o <i>redshift</i> fosse cosmológico. No segundo painel, as posições foram corrigidas ao levar em conta as velocidades peculiares. Nos painéis inferiores, foram separadas apenas as galáxias que sofreram RSD, onde se observa visualmente os chamados <i>fingers of god</i> (FOG). Fonte: Tegmark et al. (2004)	81
Figura 20 – Monopolo e o quadrupolo do espectro de potência tridimensional obtido pelo BOSS. Fonte: (Gil-Marín et al., 2016).	83
Figura 21 – Valores de $f\sigma_8$ obtidos em diferentes <i>surveys</i> . Fonte: (Aghanim et al., 2020).	83
Figura 22 – Oscilações acústicas de bárions vistas no espectro de potência da matéria. Fonte: (Beutler et al., 2017).	85
Figura 23 – Parâmetros correspondentes a várias classes de modelos determinados através de suas correspondentes ações. Fonte: (Bellini; Sawicki, 2014)	93
Figura 24 – Ordem de execução dos módulos no HI-CLASS. As quantidades do fundo são calculadas primeiro. O módulo de perturbações usa os resultados já calculados do fundo e da termodinâmica. Em <i>spectra</i> esses dados se transformarão no espectro de potência da matéria.	101
Figura 25 – Visualização 3D para $G_{eff}(k, a)$. Abaixo, $G_{eff}(a)$ para alguns valores de k e $G_{eff}(k)$ para alguns valores de z . A parametrização usada foi <i>propto_omega</i> com $\alpha_K = 1$, $\alpha_M = \alpha_T = 0$, $\alpha_B = 0.625$. Podemos observar que é um comportamento crescente tanto com relação a k quanto a a . $G_{eff}(k)$ tem um comportamento do tipo “tangente hiperbólica”.	123

- Figura 26 – Visualização 3D para $G_{eff}(k, a)$. Abaixo, $G_{eff}(a)$ para alguns valores de k e $G_{eff}(k)$ para alguns valores de z . A parametrização usada foi propto_omega com $\alpha_K = 1$, $\alpha_M = \alpha_T = 0$, $\alpha_B = 2.5$. Podemos observar que é um comportamento crescente tanto com relação a k quanto a a . $G_{eff}(k)$ tem um comportamento do tipo “tangente hiperbólica”. 124
- Figura 27 – Visualização 3D para $G_{eff}(k, a)$. Abaixo, $G_{eff}(a)$ para alguns valores de k e $G_{eff}(k)$ para alguns valores de z . A parametrização usada foi propto_omega com $\alpha_K = 1$, $\alpha_B = \alpha_T = 0$, $\alpha_M = 2$. Aqui também $G_{eff}(k)$ tem um comportamento do tipo “tangente hiperbólica”. 125
- Figura 28 – Visualização 3D para $G_{eff}(k, a)$. Abaixo, $G_{eff}(a)$ para alguns valores de k e $G_{eff}(k)$ para alguns valores de z . A parametrização usada foi propto_omega com $\alpha_K = 1$, $\alpha_B = \alpha_T = 0$, $\alpha_M = 4$. Aqui também $G_{eff}(k)$ tem um comportamento do tipo “tangente hiperbólica”. 126
- Figura 29 – Visualização 3D para $G_{eff}(k, a)$. Abaixo, $G_{eff}(a)$ para alguns valores de k e $G_{eff}(k)$ para alguns valores de z . A parametrização usada foi propto_omega com $\alpha_K = 1$, $\alpha_B = \alpha_M = 0$, $\alpha_T = -0.25$. Desvios da Relatividade Geral em valores de a baixos parecem se dever apenas a erro numérico. 127
- Figura 30 – Visualização 3D para $G_{eff}(k, a)$. Abaixo, $G_{eff}(a)$ para alguns valores de k e $G_{eff}(k)$ para alguns valores de z . A parametrização usada foi propto_scale com $\alpha_K = 1$, $\alpha_M = \alpha_T = 0$, $\alpha_B = 0.001$. Desvios da Relatividade Geral parecem se dever apenas a erro numérico. 128
- Figura 31 – Visualização 3D para $G_{eff}(k, a)$. Abaixo, $G_{eff}(a)$ para alguns valores de k e $G_{eff}(k)$ para alguns valores de z . A parametrização usada foi propto_scale com $\alpha_K = 1$, $\alpha_B = \alpha_T = 0$, $\alpha_M = 2$. Nesse caso, $G_{eff}(a)$ se desvia da unidade bem cedo. 129
- Figura 32 – Visualização 3D para $G_{eff}(k, a)$. Abaixo, $G_{eff}(a)$ para alguns valores de k e $G_{eff}(k)$ para alguns valores de z . A parametrização usada foi propto_scale com $\alpha_K = 1$, $\alpha_B = \alpha_M = 0$, $\alpha_T = -0.5$. Desvios da Relatividade Geral em valores baixos de a parecem se dever apenas a erro numérico. 130
- Figura 33 – Espectro de potência da matéria para diferentes *redshifts*. As linhas tracejadas verticais mostram o limite da validade da teoria de perturbação linear, para cada *redshift*. Fonte: [Dodelson e Schmidt \(2021\)](#). 131
- Figura 34 – Variação de aH em função do fator de escala. Imagem da direita é similar à [Dodelson e Schmidt \(2021\)](#) pg 160. 131

- Figura 35 – Resultados para `propto_omega` com $\alpha_K = 1$, $\alpha_M = \alpha_T = \alpha_B = 0$, em $z=0$. As barras azuis no primeiro gráfico delimitam aproximadamente a faixa de k em que a aproximação pode funcionar. No eixo vertical, tem-se o módulo da função de transferência $|T_m| = \delta_m/R(k, \eta = 0)$. No primeiro gráfico à direita, temos $G_{eff}(k)$. Os três últimos gráficos são as estimativas de erro. 132
- Figura 36 – Resultados para `propto_omega` com $\alpha_K = 1$, $\alpha_M = \alpha_T = \alpha_B = 0$, em $z=0.7$. As barras azuis no primeiro gráfico delimitam aproximadamente a faixa de k em que a aproximação pode funcionar. No eixo vertical, tem-se o módulo da função de transferência $|T_m| = \delta_m/R(k, \eta = 0)$. Os três outros gráficos são as estimativas de erro. 133
- Figura 37 – Parametrização `propto_omega` com $\alpha_K = 1$, $\alpha_M = \alpha_T = 0$, $\alpha_B = 2.5$, em $z=0$. As barras azuis no primeiro gráfico delimitam aproximadamente a faixa de k em que a aproximação pode funcionar. No eixo vertical, tem-se o módulo da função de transferência $|T_m| = \delta_m/R(k, \eta = 0)$. Os três outros gráficos são as estimativas de erro. 134
- Figura 38 – Parametrização `propto_omega` com $\alpha_K = 1$, $\alpha_M = \alpha_T = 0$, $\alpha_B = 2.5$, em $z=0.7$. As barras azuis no primeiro gráfico delimitam aproximadamente a faixa de k em que a aproximação pode funcionar. No eixo vertical, tem-se o módulo da função de transferência $|T_m| = \delta_m/R(k, \eta = 0)$. Os três outros gráficos são as estimativas de erro. 135
- Figura 39 – Parametrização `propto_omega` com $\alpha_K = 1$, $\alpha_B = \alpha_T = 0$, $\alpha_M = 2$, em $z=0$. As barras azuis no primeiro gráfico delimitam aproximadamente a faixa de k em que a aproximação pode funcionar. No eixo vertical, tem-se o módulo da função de transferência $|T_m| = \delta_m/R(k, \eta = 0)$. Os três outros gráficos são as estimativas de erro. 136
- Figura 40 – Parametrização `propto_omega` com $\alpha_K = 1$, $\alpha_B = \alpha_T = 0$, $\alpha_M = 2$, em $z=0.7$. As barras azuis no primeiro gráfico delimitam aproximadamente a faixa de k em que a aproximação pode funcionar. No eixo vertical, tem-se o módulo da função de transferência $|T_m| = \delta_m/R(k, \eta = 0)$. Os três outros gráficos são as estimativas de erro. 137
- Figura 41 – Parametrização `propto_scale` com $\alpha_K = 1$, $\alpha_B = \alpha_T = 0$, $\alpha_M = 2$, em $z=0$. As barras azuis no primeiro gráfico delimitam aproximadamente a faixa de k em que a aproximação pode funcionar. No eixo vertical, tem-se o módulo da função de transferência $|T_m| = \delta_m/R(k, \eta = 0)$. Os três outros gráficos são as estimativas de erro. 137
- Figura 42 – Comparação da evolução das perturbações para diferentes parametrizações, em $z=0$ 138

Figura 43 – Gráfico com a tabela de valores para D/a implementada previamente no HI-CLASS. Linhas horizontais foram adicionadas para melhor compreensão.	139
Figura 44 – Gráfico de $f(k, a)$ com diferentes valores de k . Para números de onda $k \leq 10^{-2}$, há um desvio no comportamento em baixo a (linhas pontilhadas verde, vermelha e azul). Para outros valores de k , as linhas são todas iguais à linha verde contínua.	140
Figura 45 – Comparação entre f do HI-CLASS e $f = \Omega_m^{0.55}$	140
Figura 46 – Gráfico para Ω_m , nesse caso sempre menor que 1.	140
Figura 47 – Tabela de resumo das condições de validade da aproximação utilizada nessa dissertação. A equação para δ_m deve começar a ser calculada bem dentro da era da matéria e bem dentro do horizonte.	142

1 Introdução

1.1 Momentos importantes da Cosmologia teórica e observacional

A cosmologia física existente atualmente é uma ciência empírica, que se baseia no que se mede nos detectores e telescópios. Isto significa que, embora existam trabalhos altamente teóricos nesta área, os três grandes ramos da cosmologia hoje: teórico, computacional e experimental, estão interligados e se complementam. Além disso, o cenário cosmológico padrão, isto é, o cenário aceito pela comunidade científica, está baseado em evidências observacionais. Antes de comentarmos sobre o estado atual do nosso conhecimento científico nesta área, é do nosso interesse expor brevemente marcos importantes na história da cosmologia. Nosso foco estará em como surgiu a teoria e a observação das perturbações de matéria. Como não somos e nem temos pretensão de ser historiadores da ciência ou filósofos, inevitavelmente acabaremos por deixar de fora pessoas e situações importantes. A maioria dos pontos aqui citados estão nos livros “The Cosmic Century”, de Malcolm S. Longair ([Longair, 2006](#)) e “Cosmology’s century” de P.J.E. Peebles ([Peebles, 2020](#)). Para o leitor interessado em descrições mais acuradas e completas, recomendamos fortemente fontes como historiadores da ciência e da física, e, em particular, da cosmologia.

Aspectos teóricos

Houve uma época em que a noção geral de “universo” foi ditada por mitos associados aos fenômenos naturais e pelas convicções religiosas dos povos que possuíam uma cosmogonia ([Koyré, 1957](#)). A origem, a forma e a dinâmica desse Universo imaginado estão fortemente ligadas ao tamanho do arcabouço de conhecimento científico e prático que os povos tinham sobre o funcionamento e tamanho do mundo ([Koyré, 1982](#)).

A primeira vez que, do ponto de vista lógico, houve a formulação do que podemos chamar de uma física completa surgiu com a obra de Aristóteles em IV a.C. ¹ Para ele, se um objeto cai em direção ao chão é porque esse é seu lugar natural, e só é propulso a se mover do seu lugar natural enquanto durar o “impulso” que lhe foi dado. Dentro dessa ideia, havia uma outra que impactou muito a cosmologia: para ele, tudo que estivesse abaixo da esfera lunar era composto dos quatro elementos, água, fogo, terra, ar; e tudo acima, que parecia eternamente imutável e portanto estranho a quem era acostumado com

¹ Como curiosidade: na visão de [Fabris \(2020\)](#), haveria uma espécie de protótipo de teoria gravitacional dentro da teoria das quatro causas fundamentais. Lembramos que a causa material seria representada pelo corpo em si que está em movimento, a causa formal corresponderia à forma que o corpo assume durante o movimento, a causa final envolveria o propósito ou objetivo do movimento, e a causa eficiente seria a força ou agente responsável por gerar o movimento. Essas quatro causas interagem para explicar a natureza e a dinâmica dos fenômenos em movimento.

eterna mudança, era feito de um material ao qual não temos acesso, uma quintessência ([Aristóteles, sec. IV A.C. apud Hardie; Gaye, 2015](#)).

[Longair \(2006\)](#) comenta que a astronomia também foi objeto de interesse da filosofia entre os séculos XVII e XVIII. Uma série de filósofos, dentre estes Kant e Descartes, se dedicaram a elaborar cosmologias e ainda trabalhos de astronomia.

Em um certo momento no arcabouço da filosofia natural, os céus passaram por um processo de desmistificação. A universalidade da gravitação, a compreensão da natureza material dos corpos celestes e a revelação de satélites naturais em outros planetas, possibilitada pela invenção do telescópio, foram mudanças de paradigma fundamentais para o desenvolvimento da cosmologia moderna, pois permitiram a formulação de leis físicas e a suposição de que o Universo segue essas leis de maneira consistente em todo espaço e tempo ([Kuhn, 1975](#)). Embora as contribuições mais significativas para o avanço científico, que culminaram no processo de desmistificação de fenômenos naturais, sejam frequentemente atribuídas a Sir Isaac Newton, ele próprio mantinha uma crença pessoal robusta na necessidade de uma entidade divina para explicar a coesão e complexidade do Universo. Esta convicção parece ter sido influenciada, em parte, por suas investigações matemáticas relativas à estabilidade do Sistema Solar.

Segundo [Longair \(2006\)](#), entre 1692 e 1693, Isaac Newton e Richard Bentley trocaram cartas a respeito da estabilidade de um universo uniformemente preenchido com estrelas sob a lei da gravidade de Newton ([Harrison, 1987](#)). A matéria tenderia a se aglomerar, de forma que a distribuição de estrelas só permaneceria estática se fosse infinita em todas as direções, e distribuída de forma que a força resultante seja zero. Mesmo assim, o sistema é dinamicamente instável, já que qualquer perturbação mínima em uma estrela comprometeria a estabilidade do sistema como um todo. Apesar disso, ainda era aceita a concepção de que o Universo era eterno, infinito e imutável.

Ainda segundo [Longair \(2006\)](#), em 1916, apenas um ano após a publicação da teoria da Relatividade Geral, a questão da instabilidade da gravitação foi considerada ao menos por Willem de Sitter e Paul Ehrenfest, que trocaram cartas sobre o problema das condições de contorno no infinito ([North, 1965](#)). Quando o próprio Albert Einstein aplicou a teoria da Relatividade Geral para criar um modelo cosmológico, percebeu que o modelo estático, consistente com as observações rudimentares da época, não era compatível com as equações, que eram dinâmicas. A solução encontrada por ele foi a introdução da famosa Constante Cosmológica (Λ), que desencadeia um efeito de gravidade “repulsiva”. No entanto, este universo ainda seria extremamente instável, dado que qualquer desvio da situação de equilíbrio resultaria em um universo dinâmico.

A possibilidade teórica de um universo em expansão surgiu alguns anos depois, através dos trabalhos do cosmólogo russo Alexander Friedmann (ver [Hufbauer \(1995\)](#)), mas foi o trabalho de Edwin Hubble que de fato colocou em xeque o modelo estático, com

a descoberta observacional da expansão cosmológica (Hubble, 1929). Surgiram então a ideia de “Universo estacionário”, defendida por Fred Hoyle, e a ideia de Georges Lemaitre do “Big Bang” (termo pejorativo criado por Hoyle). Na hipótese do Universo estacionário, foi sugerido que pela ação de algum mecanismo a matéria seria criada à medida em que o Universo se expande, de modo a manter uma densidade constante ao longo de toda a sua evolução. O descarte deste modelo estacionário se deu posteriormente devido à sua inconciliação com certas evidências experimentais.

Curiosamente, segundo Longair (2006), a introdução da constante cosmológica para manter o Universo estático levou alguns físicos a pensar na idade do Universo. Sem constante cosmológica, num universo fechado, esse universo dinâmico teria uma “idade” menor que H_0^{-1} . Essa quantidade havia sido medida por Hubble, que superestimou seu valor, criando um conflito com diversas outras fontes, como a determinação da idade da Terra. Arthur S. Eddington e Georges Lemaitre reconheceram imediatamente que esse problema poderia ser eliminado se a constante cosmológica fosse positiva.

Segundo Peebles (2020), Lemaitre foi longe na pesquisa de um universo em expansão, avaliando a evolução de pequenas perturbações, e descobriu que o contraste da densidade de massa aumenta, com relação ao tempo t , como $\delta(x, t) \propto t^{2/3}$. Evgeny Lifshitz encontrou esse resultado sem assumir simetria esférica, e William B. Bonnor encontrou esse resultado no limite newtoniano. Estes são resultados que reconhecemos como válidos hoje no modelo cosmológico padrão. Em 1946, Lifshitz introduziu a análise das perturbações na solução de Friedmann-Lemaitre para as equações de campo de Einstein, empregando teoria de perturbações lineares. Ele mostrou o efeito que ocorre na era da radiação, onde o crescimento de perturbações em escalas menores que o comprimento de Hubble é significativamente atenuado, devido à oscilação do fluido composto por matéria e radiação acopladas. Ainda de acordo com Peebles (2020), George Gamow notou que, na época em que a densidade de matéria de tornou maior que a densidade de radiação, a instabilidade gravitacional descrita no princípio de Jeans faria com que as perturbações de matéria passassem a crescer. Havia uma suposição implícita feita por Gamow de que poderia haver velocidade relativa entre matéria e radiação. Posteriormente, Guyot e Zel’dovich em 1970, seguidos por Mészáros em 1974, revisitaram essa ideia, fornecendo dessa vez derivações formais (Meszaros, 1974).

Peebles (2020) ainda comenta que o modelo de universo preenchido por um fluido perfeito usado desde Einstein foi eventualmente substituído por aproximações numéricas da equação de Boltzmann ((Peebles, 1967); (Field, 1971); (Chibisov, 1972)). Segundo ele, o artigo de Peebles e Yu (1970) introduziu parte do método atualmente utilizado para obter a solução numérica da equação de Boltzmann para a interação de radiação com a matéria bariônica. Importante ressaltar que inicialmente todas as computações eram feitas apenas com matéria bariônica. Outros elementos foram sendo incorporados a essa análise juntamente com o desenvolvimento da astrofísica observacional. O artigo

mais famoso sobre perturbações de ordem linear usando a relatividade geral e neutrinos é “Cosmological Perturbation theory in the synchronous and conformal newtonian gauge” (Ma; Bertschinger, 1995).

Para Michael Longair, é particularmente interessante a simbiose que se desenvolveu desde o começo da cosmologia moderna, entre o desenvolvimento em física e o desenvolvimento em cosmologia e astrofísica. A astronomia incorporou novas ferramentas da física, como a física de partículas e a relatividade geral, mas também de áreas como a química, física do estado sólido, física de plasma, supercondutividade e biologia (Longair, 2006).

Aspectos observacionais

A astrofísica tem a vantagem de fornecer informações científicas em escalas que não podem ser atingidas em experimentos terrestres. Uma aparente desvantagem é que nesse laboratório astrofísico há escalas que podemos apenas olhar sem nunca tocar, nem refazer certos experimentos. Certas informações nos chegam através da luz emitida em eventos que ocorreram no passado. Quanto mais distante, mais longe no tempo ocorreram. A astrofísica entretanto transformou essas aparentes desvantagens em trunfo, através do uso de métodos estatísticos e da observação sistemática do céu. Há uma grande utilidade em literalmente “ver o passado”, e usando catálogos de *surveys* (levantamentos) podemos encontrar diversos eventos similares entre si, como as supernovas, o que nos ajuda a reconstituir uma linha do tempo.

Segundo Longair (2006), a revolução da astrofísica no séc. XX pode ser ligada ao desenvolvimento de três técnicas: a invenção da espectroscopia astronômica, as primeiras medidas das paralaxes trigonométricas de estrelas próximas e a invenção da fotografia. Esses avanços incentivaram o desenvolvimento de novos e melhores designs de telescópios. Outros avanços vieram da astronomia não-eletromagnética (raios cósmicos, neutrinos, ondas gravitacionais, astropartículas) e da revolução dos semicondutores e da computação (avanço na observação, coleta de dados e capacidade de análise e interpretação). Houve ainda o impacto do crescimento da comunidade astronômica, que no começo do século XX era muito reduzida, o que impedia seriamente qualquer grande empreendimento.

Ainda segundo Longair (2006), houve também um pesado investimento em pesquisa básica, e portanto também em astronomia, após a segunda guerra mundial. A necessidade de desenvolvimento de defesa estratégica, de encontrar fontes naturais de ruído de rádio que pudesse interferir com as transmissões e localização com radar incentivaram o desenvolvimento de astronomia em novas bandas, como raio-x e raio-gama, e eventualmente, seus estudos em telescópios acima da atmosfera terrestre.

Em todas as novas faixas de frequência estudadas pela astrofísica, os grandes levantamentos do céu foram uma das prioridades da comunidade acadêmica. O desenvolvimento

da astrofísica extragalática expandiu significativamente o tamanho do Universo conhecido, permitindo-nos reconhecer estruturas cada vez maiores, como galáxias, aglomerados de galáxias e, mais recentemente, filamentos e a homogeneidade em larga escala. Especulações sobre a geometria, a composição e a história do Universo passaram a ser estudadas quantitativamente. Porém, previamente a qualquer grande *survey* do céu, houve uma longa e tortuosa caminhada da pequena comunidade astronômica precursora das revoluções astrofísicas do séc. XX. A importância e o hábito de realizar grandes *surveys* do céu foram aparecendo aos poucos, como será visto adiante.

Observações importantes para a astrofísica e a cosmologia

No final do século passado, o satélite Hipparcos mediu com grande precisão a paralaxe de milhares de estrelas (Feast; Catchpole, 1997). A primeira medida de paralaxe estelar, no entanto, data do séc. XIX. Além da distância, é importante obter a distribuição angular dessas estrelas. Conforme descrito em Longair (2006), William Herschel era uma dessas pessoas que estavam determinadas em encontrar a forma da distribuição de estrelas no Universo. Para isso, ele contou o número de estrelas em diferentes direções, fazendo a suposição de que todas tinham a mesma luminosidade intrínseca, uma terrível aproximação. Além disso, extinção por poeira interestelar ainda não era considerada ou bem modelada. Embora o resultado desse empreendimento tenha frustrado Herschel, seus trabalhos na catalogação sistemática de nebulosas levou à publicação do General Catalogue of Nebulae, em 1864, com 5079 objetos. Um incremento significativo aos 108 objetos do catálogo Messier. Em 1888, John Dreyer publicou o New General Catalogue of Nebulae and Clusters of Stars, o famoso catálogo NGC.

Ainda segundo Longair (2006), logo após, a velocidade radial das estrelas, que já vinha sendo objeto de interesse da comunidade, recebeu atenção do diretor do Lick Observatory, William Campbell. O catálogo com 2771 velocidades radiais para estrelas com magnitude <5.51 foi completado em 1928. Enquanto isso, uma nova ferramenta surgia nas mãos de Henrietta Leavitt, cuja tarefa de encontrar estrelas variáveis nas Núvens de Magalhães a levou a catalogar 25 variáveis Cefeidas, dentre as 1777 estrelas variáveis que ela descobriu (Leavitt; Pickering, 1912). Variáveis cefeidas possuem um distinto comportamento temporal na sua curva de luz, onde o brilho rapidamente cresce e então decai lentamente até um mínimo. Ela percebeu também que quanto maior o período de decaimento do brilho, mais luminosa é a estrela. Isto é de grande utilidade, já que se soubermos a distância e o brilho de um tipo de variável Cefeida, podemos estimar a distância de outras do mesmo tipo. Em 1918, Harlow Shapley tentou determinar a estrutura da Galáxia utilizando variáveis Cefeidas, que ele localizou por meio de seus estudos de aglomerados globulares. Ele mostrou que o Sistema Solar está localizado em uma das extremidades do seu mapa de aglomerados globulares (Shapley, 1918).

O uso das variáveis Cefeidas também foi importante na conclusão de que as nebulosas espirais eram objetos extragalácticos, quando Hubble mediu a distância de variáveis cefeidas em M33 e M31 em 1925 (Hubble, 1925). Essas distâncias eram muito maiores do que a estimativa de Shapley para o tamanho da nossa galáxia. Baseando-se nesses resultados, Hubble voltou-se a analisar questões cosmológicas, como a homogeneidade da distribuição de galáxias e a massa típica das galáxias. Através da contagem do número de galáxias mais brilhantes que uma determinada magnitude aparente, ele encontrou uma distribuição próxima da homogeneidade. Usando a massa típica das galáxias ele também pode estimar a densidade média do Universo, e encontrou $\rho = 1.5 \times 10^{-28} \text{ kg m}^{-3}$ (Hubble, 1926). Em 1929, ele reuniu dados sobre as distâncias de galáxias para as quais as velocidades haviam sido medidas, publicando seu famoso artigo com a figura de onde se extraiu a lei de Hubble (Hubble, 1929). O objetivo do artigo, no entanto, não era derivar a relação cosmológica de velocidade-distância, mas sim determinar a velocidade do Sistema Solar em relação às nebulosas extragalácticas.

Em 1928, George Ellery Hale, “pai” do Observatório de Monte Wilson e grande influenciador de diversos projetos, iniciou mais um: a construção do telescópio Palomar de 200 polegadas, que fica no Monte Palomar no sul da Califórnia (Mount Wilson Institute, 2013). O telescópio Palomar, equipado com placas fotográficas de 14 polegadas, completou um levantamento fotográfico do céu desde o polo norte celeste até uma declinação de -20 graus (depois estendido a -34 graus), usando bandas de luz azul e vermelha (ver (MAPS, 2008)). A construção do telescópio incorporou uma série de avanços na engenharia de telescópios, instrumentos e espelhos, e este foi o maior e mais importante telescópio do mundo até os anos 1980, quando foi superado por telescópios de 4 metros (Sandage, 1961).

Segundo Longair (2006), até o final dos anos 1930, os problemas centrais da cosmologia clássica já haviam sido claramente identificados. Isso constituía o propósito dos extensos programas de observação a serem conduzidos pelos novos telescópios: 1) A constante de Hubble. 2) O parâmetro de desaceleração. 3) A curvatura do espaço. 4) A densidade média de matéria no Universo. 5) A idade do Universo. 6) A constante cosmológica. O progresso na determinação desses parâmetros ocorreu em um ritmo consideravelmente mais lento do que previsto pelos especialistas na década de 1930. Sobre a determinação do valor da constante de Hubble, vamos resumir nos próximos 3 parágrafos uma discussão feita em “The Cosmic Century” (Longair, 2006).

Em 1944, Walter Baade comunicou uma descoberta importante: estrelas de diferentes classes espectrais formavam distintas populações (I e II) dentro de galáxias espirais. Ele identificou uma diferença na magnitude absoluta das variáveis Cefeidas pertencentes às duas populações (Baade, 1944), que repercutia significativamente na escala de distância cosmológica. Em 1952, Baade anunciou que o valor da constante de Hubble, H_0 , tinha sido superestimado porque a distância à Nebulosa de Andrômeda, M31, utilizada por Hubble,

estava cerca de duas vezes menor do que o correto (Baade, 1979), devido à diferença nas relações período-luminosidade das variáveis Cefeidas das Populações I e II. A constante de Hubble foi ajustada para 250 km/s/Mpc.

No ano de 1956, Humason, Mayall e Sandage demonstraram que era necessário calibrar a relação entre *redshift* (desvio para o vermelho) e distância observada, medindo a distância do aglomerado de Virgem através de técnicas independentes do *redshift* (Humason; Mayall; Sandage, 1956). A constante de Hubble foi novamente ajustada, desta vez para 180 km/s/Mpc. Por causa de regiões de hidrogênio ionizado e aglomerados de estrelas, a estimativa de Sandage foi reduzida para 75 km/s/Mpc (Sandage, 1958). Entre a década de 1970 até a década de 1990, houve uma grande controvérsia em relação ao valor da constante de Hubble. Sandage e Tammann encontraram valores da constante de Hubble em torno de 50 km/s/Mpc, enquanto Vaucouleurs, Aaronson, Mould e seus colaboradores encontraram valores em torno de 80 km/s/Mpc (Aaronson; Mould, 1983) (Vaucouleurs, 1982).

Durante a década de 1990, estimulado pela capacidade do Telescópio Espacial Hubble (HST), surgiu um programa com a missão de estimar o valor da constante de Hubble com uma precisão de 10%. Este programa foi elevado ao status de um Projeto Chave do HST, com uma parcela garantida de tempo de observação. A equipe utilizou não apenas os dados do HST, mas também todas as outras técnicas de medição de distância, para garantir a consistência interna das estimativas de distância, como os dados do satélite Hipparcos. O resultado final publicado em 2001 foi de 72 ± 8 km/s/Mpc (Freedman et al., 2001). Recentemente, houve a publicação do SHOES (73.04 ± 1.04) (Riess et al., 2022), Planck (67.66 ± 0.42) (Aghanim et al., 2020), dentre outros. As medidas atuais da constante de Hubble mostram que há uma possível discordância desse valor entre diferentes experimentos, como será discutido na próxima seção.

Em escalas maiores do que aquelas dos aglomerados de galáxias, a distribuição de galáxias apresenta uma aparência filamentar e “celular” (Seldner et al., 1977)(Gott; Melott; Dickinson, 1986). O mapeamento da distribuição de galáxias na vizinhança local avançou durante os anos 1980, culminando na criação do mapa do Universo local elaborado por Margaret Geller e John Huchra. Esse mapa foi criado a partir de um levantamento de *redshift* de mais de 14.000 galáxias (Geller; Huchra, 1989). Os vazios e filamentos de galáxias estão continuamente interligados em todo o Universo local, estas são as maiores estruturas conhecidas no Universo.

Mais recentemente, os primeiros mapas de *redshift* produzidos pelo Sloan Digital Sky Survey (SDSS) mostraram a distribuição em grande escala de galáxias até uma profundidade semelhante, porém com cerca de 200.000 galáxias plotadas em suas primeiras imagens (Stoughton et al., 2002). Análises estatísticas desses mapas demonstraram que essa estrutura “celular” está presente em toda a distribuição de galáxias na época atual.

Embora a distribuição de galáxias seja altamente não uniforme, o mesmo grau de não uniformidade está presente em toda a distribuição de galáxias, o que é consistente com a isotropia e homogeneidade gerais do Universo em escalas suficientemente grandes. Uma segunda e mais forte evidência da isotropia vem das observações da radiação cósmica de fundo em micro-ondas (CMB). [Fabbri et al. \(1980\)](#) e [Boughn, Cheng e Wilkinson \(1981\)](#) anunciaram evidências da detecção de anisotropia em $dT/T \sim 1 \times 10^{-4}$ em grandes escalas angulares.

Para medir os *redshifts* de galáxias e quasares individualmente, foram criados espectrógrafos multi-objeto, como o 2dF, que capturou espectros de quase 250.000 objetos, incluindo 25.000 quasares ([Colless et al., 2003](#)). O *survey* 2dF ofereceu um panorama detalhado da distribuição galáctica, focando em duas áreas em forma de “fatias de pizza”, abrangendo cerca de 60 graus de largura e alguns graus de espessura, alcançando distâncias de até 2 bilhões de anos-luz. Este estudo se alinha a outros levantamentos importantes como JPAS, Las Campanas Redshift Survey ([Shectman et al., 1996](#)), 6df Galaxy Survey ([Jones et al., 2010](#)) e GAMA Survey ([Baldry et al., 2010](#)), cada um fornecendo dados valiosos sobre a estrutura do cosmos.

Além disso há o já mencionado SDSS, que foi realizado por um telescópio dedicado de 2,5 metros com um campo de visão de 3 graus no Novo México. Ao contrário de levantamentos anteriores do céu na faixa óptica, este levantamento utilizou detectores CCD digitais para mapear cerca de um quarto de todo o céu. As primeiras fases do SDSS (SDSS I e II), de 1998 a 2008, mapearam 11.663 deg², aplicando fotometria de cinco bandas a 357 milhões de objetos. O levantamento espectrográfico abrangeu 9.380 deg², analisando 930.000 galáxias ($0 < z < 0.7$), 120.000 quasares ($2.3 < z < 3$) e 460.000 estrelas ([Abazajian et al., 2009](#)). Durante a terceira fase, a SDSS-III, o Baryon Oscillation Spectroscopic Survey (BOSS, 2008-2014) continuou o mapeamento de galáxias ($z < 0.7$) e quasares ($2.15 < z < 3.5$) ([Alam et al., 2015](#)). Na quarta fase, SDSS-IV, seguiu-se com o Extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey (eBOSS, 2014-2020), analisando espectros de mais de 1.4 milhões de objetos, entre galáxias e quasares ([Ahumada et al., 2020](#)).

Uma última descoberta de extrema importância foi a da recente expansão acelerada do Universo, através da análise do *redshift* de supernovas. Dois programas competitivos trabalhavam nisso: o Supernova Cosmology Project ([paulpreuss, 2009](#)) e o High-Z Supernova Search ([Brian Schmidt, 2001](#)). Inicialmente, [Perlmutter et al. \(1997\)](#) reportaram que as primeiras medidas concordavam com o modelo de Einstein–de Sitter, mas logo depois a previsão mudou. Primeiramente, evidenciou-se que a densidade de massa era inferior à prevista no modelo Einstein-de Sitter, conforme demonstrado em [Perlmutter et al. \(1998\)](#) e [Garnavich et al. \(1998\)](#). Posteriormente, [Riess et al. \(1998\)](#) e [Perlmutter et al. \(1999\)](#) apresentaram provas convincentes da recente fase de expansão acelerada. Confirmações

experimentais independentes também vêm de Oscilações Acústicas Bariônicas (BAO) (Eisenstein et al., 2005), radiação cósmica de fundo (CMB) (Komatsu et al., 2009) e estrutura em grande escala (Tegmark et al., 2006).

1.2 O Modelo Cosmológico Padrão

O modelo cosmológico padrão, também chamado Λ CDM, é o modelo mais aceito e utilizado, pois é (até certo ponto) compatível com observações experimentais: a expansão do Universo (Hubble, 1929), a abundância de elementos químicos, a radiação cósmica de fundo (Tanabashi et al., 2018a), dentre outras evidências (Saadeh et al., 2016). Muito de seu desenvolvimento remonta das soluções de Friedmann para um universo em expansão (Friedmann, 1999) (Friedman, 1999), e das concepções de Lemaitre e Gamow (Gamow, 1952). Seguiremos Dodelson e Schmidt (2021) para descrever o panorama geral.

A descrição do modelo começa na época da inflação, quando o Universo está permeado por um fluido inflacionário, que causa uma era de expansão acelerada. Ao final da inflação esse fluido decai em uma sopa quente de matéria e radiação. Como consequência da inflação, quaisquer fósseis remanescentes do Universo primordial são diluídos e o resultado é uma distribuição de partículas homogênea e isotrópica. As flutuações quânticas do campo de inflação se tornaram perturbações clássicas pelo efeito da expansão, criando pequenas perturbações no fundo cosmológico, perturbações essas que vão evoluir conforme o Universo passa pelas próximas eras.

Esse estado denso e quente passa por uma era de expansão desacelerada, dominada pela densidade de radiação, onde a queda da temperatura causada pela expansão permite o desacoplamento dos neutrinos e a criação dos primeiros elementos químicos. A seguir vem uma era da matéria, também de expansão desacelerada, onde ocorre a recombinação, tornando o Universo transparente à radiação, fazendo com que a partir dessa época fosse possível para os fótons viajarem grandes distâncias. Os fótons que detectamos na chamada radiação cósmica de fundo são oriundos dessa época e viajaram até nós desde então. Na era da matéria, o balanço entre expansão do espaço e potencial gravitacional permitiu que as perturbações formassem estruturas, como galáxias, aglomerados de galáxias, filamentos e *voids* (vazios).

A matéria bariônica compõe, atualmente, apenas 5% da composição total da densidade de energia presente no Universo. Há uma componente que possui massa e interage apenas gravitacionalmente que chamamos de matéria escura, que compõe cerca de 25% dessa densidade de energia (Abbott et al., 2018)(Planck Collaboration et al., 2020). Recentemente, detectamos que em cerca de $z = 1$ teve início uma era de expansão acelerada, que no Modelo Cosmológico Padrão, é interpretada como sendo causada por uma componente desconhecida com pressão negativa. Esse fluido que se comporta aproximadamente como

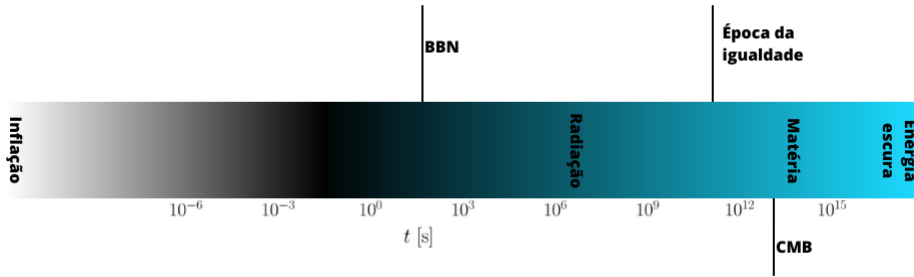


Figura 1 – Resumo da história do Universo. Não temos conhecimento concreto sobre o que aconteceu antes de um certo tempo no passado, sendo em princípio impossível conseguir evidências experimentais dessa época. Convencionalmente, a seta do tempo começa no início da inflação, evitando considerar uma possível singularidade inicial. A figura relaciona o tempo, em segundos, com a descrição do Universo naquele momento.

uma constante cosmológica é convencionalmente chamado energia escura e compõe 70% da densidade de energia do Universo (Planck Collaboration et al., 2020).

A figura 1 mostra os principais marcos da evolução cosmológica do fundo no modelo Λ CDM. No entanto, seu “sucesso” vem com um preço: 1) a adição de duas novas componentes desconhecidas 2) problemas de coincidência cósmica 3) transição entre era inflacionária e era da radiação (ex. reaquecimento) 4) tensões em algumas medidas, que não parecem estar diminuindo.

A distribuição de galáxias no nosso Universo não é randômica. A figura 2 ilustra bem a estrutura de larga escala na distribuição de galáxias. Projetos futuros proverão ainda mais e melhores dados, como o Dark Energy Survey Instrument (DESI) (DESI Collaboration et al., 2016), o satélite Euclid (Laureijs et al., 2011), e o Legacy Survey of Space and Time (LSST) (Ivezic et al., 2019). O que esses *surveys* nos mostraram é que o Universo tem uma “estrutura em grande escala”. Enquanto que formação de galáxias e sistemas planetários são representações de grandes perturbações e de um crescimento não-linear (<10 Mpc), em escalas maiores as perturbações são pequenas o suficiente para a utilização de teoria perturbativa linear em torno da solução de Universo homogêneo.

Para quantificar informações sobre essa distribuição de matéria, a estatística mais importante é a função correlação de dois pontos, equivalente no espaço de Fourier ao espectro de potência. É extremamente útil trabalhar no espaço de Fourier porque nos permite, em primeira ordem, separar pequenas de largas escalas. Podemos caracterizar as inhomogeneidades na distribuição de galáxias no *survey* em termos das flutuações fracionais de densidade $\delta_g(\mathbf{x})$, também chamadas sobredensidades, onde $\delta_g(\mathbf{x}) = \frac{n_g(\mathbf{x}) - \bar{n}_g(\mathbf{x})}{\bar{n}_g(\mathbf{x})}$, onde $n_g(\mathbf{x})$ é a densidade das galáxias em função da posição e $\bar{n}_g(\mathbf{x})$ é a média de todo *survey*. No espaço de Fourier, definimos o espectro de potência das galáxias $P_g(k)$, como o da

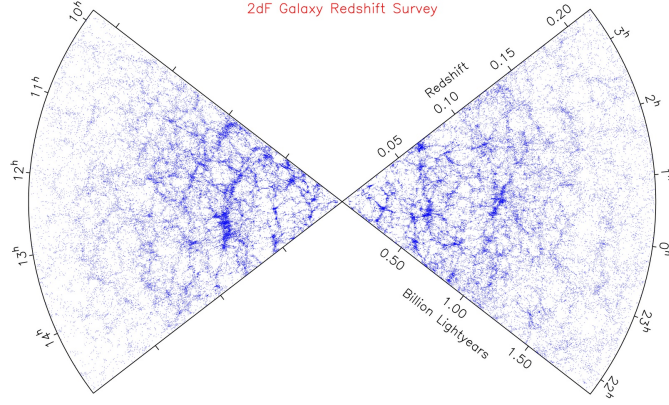


Figura 2 – Uma fatia da distribuição de galáxias em função do *redshift* obtida pelo 2dF. Cada ponto corresponde à posição de uma galáxia. Fonte: página do 2dF na internet. Disponível em <<http://www.2dfgrs.net>>.

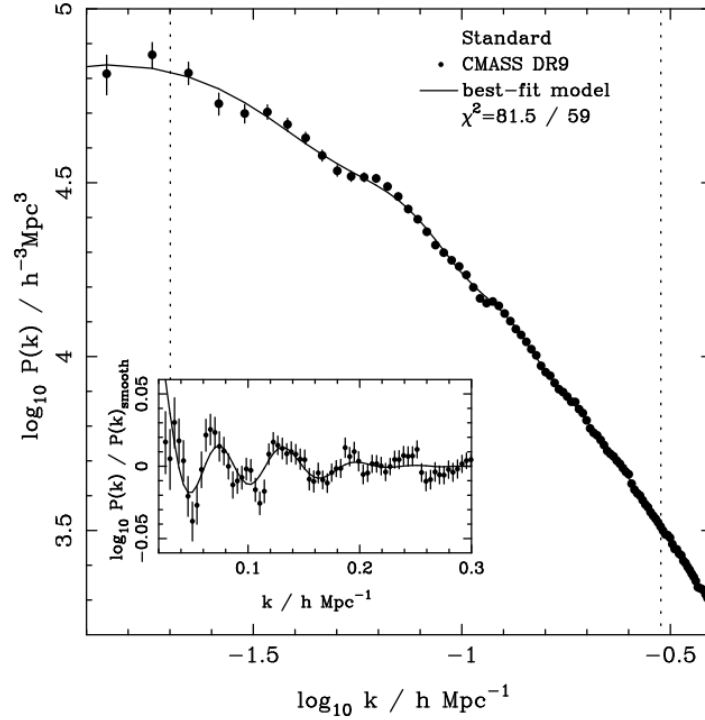


Figura 3 – Espectro de potência da matéria obtido com dados do BOSS (*data release 9*, CMASS) O pequeno gráfico no centro mostra as oscilações acústicas de bárions, obtidas ao dividir o espectro por um *best fit* do espectro sem oscilações. Fonte: (Anderson et al., 2012).

figura 3, através da média no ensemble $\langle \tilde{\delta}_g(\mathbf{k}) \tilde{\delta}_g^*(\mathbf{k}') \rangle = (2\pi)^3 \delta_D^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') P_g(k)$.

Como os fótons gerados na superfície de último espalhamento que chegam até nós viajaram livremente até aqui, as perturbações que encontramos na CMB são resquícios de como estava o Universo na época da criação desses fótons. Dados do Cobe revelaram que as flutuações fracionais de temperatura nos dados obtidos eram da ordem de 10^{-4} (Bennett et al., 1996). Também fazemos a estatística da CMB por função de correlação

de dois pontos, e usamos uma expansão em esféricos harmônicos, mais apropriada a uma distribuição que medimos em 2D.

Dois problemas são apontados com frequência na literatura ao considerar cenários alternativos ao Λ CDM: o problema de ajuste fino e o de coincidência cósmica. Além disso, com dados cada vez mais precisos sobre a estrutura em grande escala do Universo, surgem inconsistências como a Tensão de Hubble (figura 4). Esta discrepância envolve diferenças nas estimativas da constante de Hubble (H_0) quando comparadas às medidas da Radiação Cósmica de Fundo com as de supernovas recentes, apresentando um desafio intrigante para a cosmologia atual. O mesmo problema de tensão aparece na quantidade S8 (figura 5), que está relacionada à aglomeração de matéria.

Esses problemas sugerem que o modelo cosmológico padrão seja apenas um ajuste empírico aos dados, faltando nele uma robusta motivação fundamental (Sotiriou; Faraoni, 2010). Fica assim evidente a necessidade de explicar a presença de energia escura e também delimitar a que tipo de fenômeno está associado.

É curioso recordar as palavras de Peebles sobre o Modelo Cosmológico Padrão, quando ele conta que ficou intrigado com a rápida aceitação do modelo CDM pelos seus pares cientistas:

“Quando introduzi o modelo CDM em Peebles (1982), eu o considerava um exemplo do que poderia ter acontecido, provavelmente um entre muitos a serem explorados. Eu não imaginava que ele poderia se desenvolver tão prontamente em uma imagem convincente do Universo primitivo. Mas eu poderia ter esperado que a própria simplicidade do modelo CDM atraísse interesse. Isso foi auxiliado por uma interpretação comum do conceito de inflação, que teria seções de espaço plano e condições iniciais adiabáticas, gaussianas e invariantes de escala, assumidas no modelo CDM. Mas fiquei surpreso com a seriedade com que o modelo foi levado, e isso me deixou inquieto, porque eu não via razão para estar confiante de que a natureza compartilhasse nossas ideias de simplicidade. Não demorei muito para idealizar esse modelo e calcular a anisotropia da Radiação Cósmica de Fundo (RCF), e eu podia ver como configurar outros modelos, talvez não tão simples, que também poderiam se ajustar bem às restrições observacionais (que naquela época não eram tão rigorosas). Continuei a inventar tais modelos até o final dos anos 1990, quando as medições de anisotropia da RCF começaram a revelar o pico de anisotropia previsto no modelo CDM. Isso contribuiu significativamente para me convencer de que a natureza pode ter seguido nosso caminho mais simples, à parte da curiosa presença da constante cosmológica de Einstein, Λ , e da hipotética matéria escura não-bariônica. Os muitos testes desde então continuam a concordar com

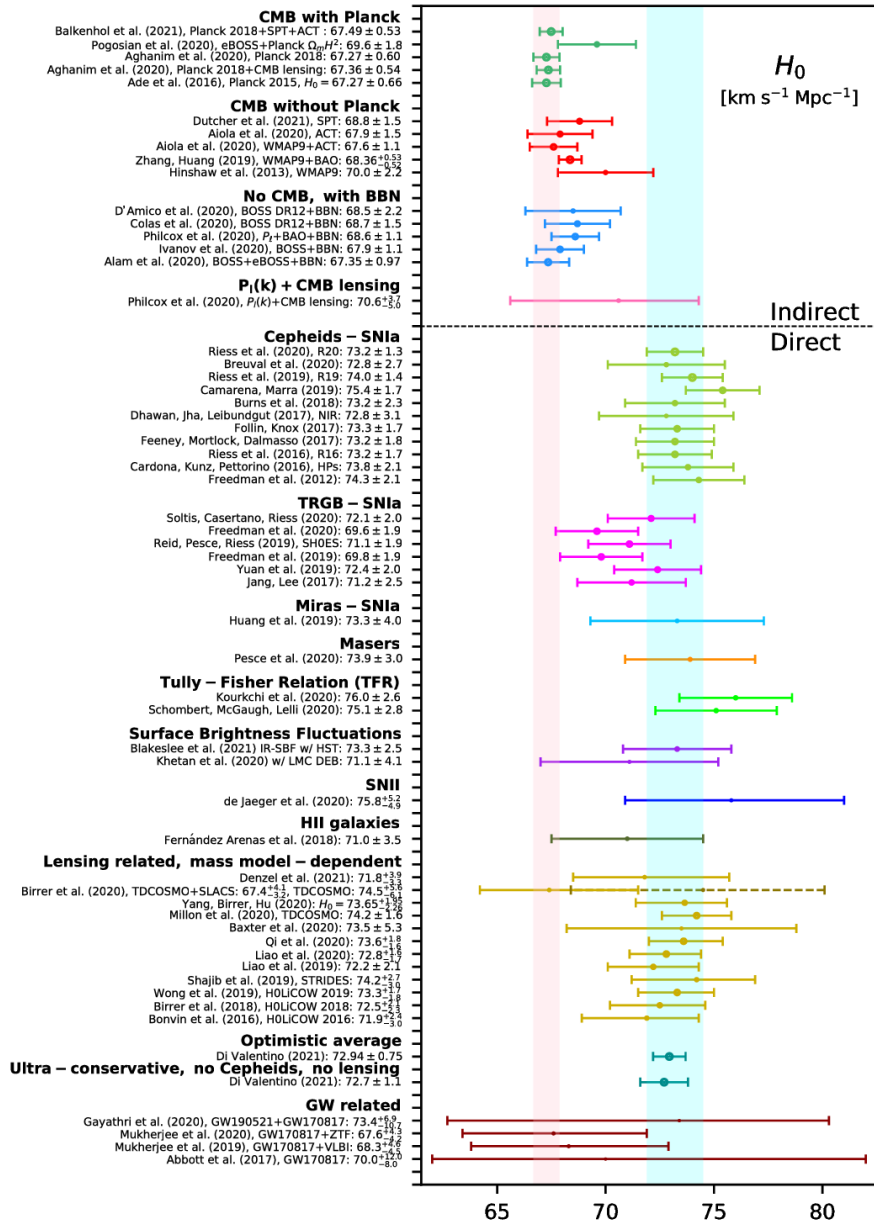


Figura 4 – Gráfico de caixa com restrições de 68% de nível de confiança da constante de Hubble H_0 por meio de medições diretas e indiretas realizadas por diferentes missões e grupos astronômicos ao longo dos anos. A faixa vertical ciano corresponde ao valor de H_0 da Equipe SHOES, e a faixa vertical rosa claro corresponde ao valor de H_0 conforme relatado pela Equipe Planck 2018 dentro de um cenário Λ CDM. Fonte: Di Valentino et al. (2021).

o modelo CDM com a adição de Λ . É um avanço notável, embora, no momento em que escrevo, as naturezas de Λ e CDM permaneçam desconhecidas.” (Peebles, 2020)

Ainda segundo Peebles, é notável que a teoria tenha tamanho sucesso em prever as

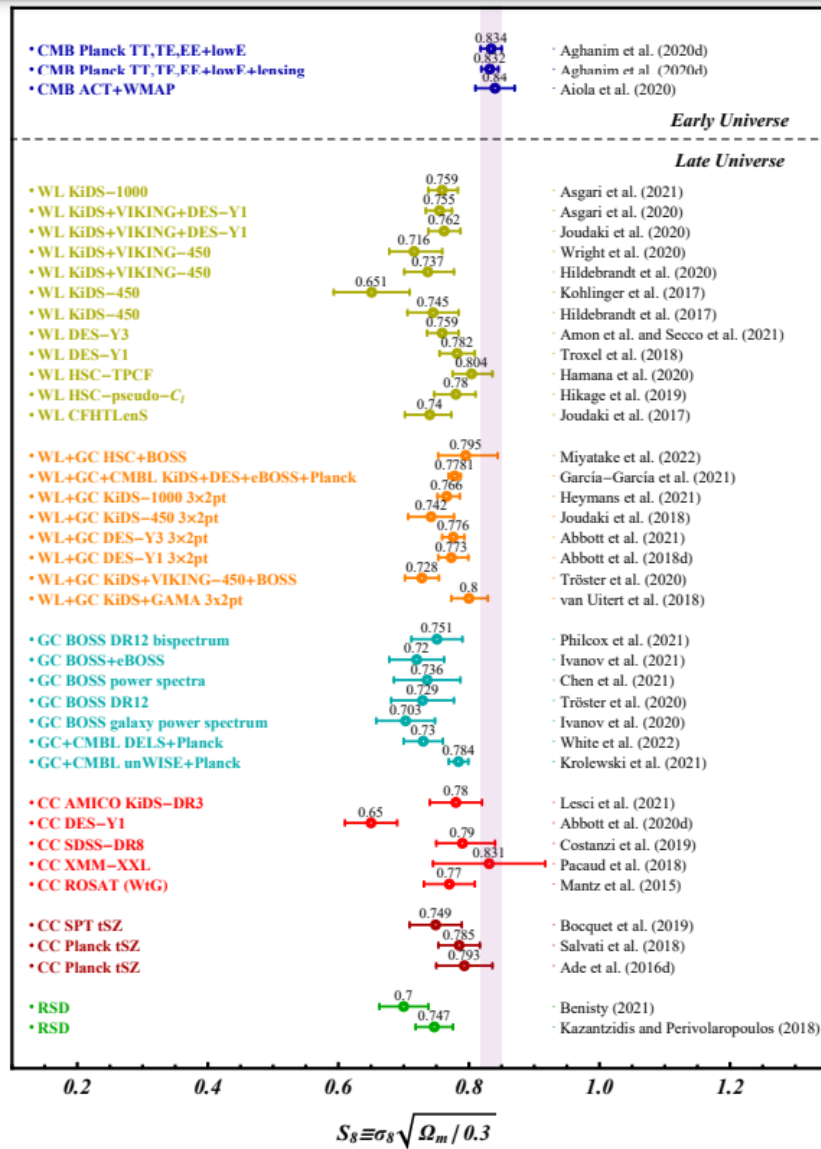


Figura 5 – O valor de S_8 com as restrições de 68% de nível de confiança derivadas por medições recentes. Fonte: [Perivolaropoulos e Skara \(2022\)](#).

formas detalhadas tanto do espectro da CMB quanto do espectro de potência da matéria. Essa consistência que vem de fenômenos observados em vários diferentes estágios da evolução do Universo e que foram obtidos e analisados de forma muito diferente é muito surpreendente.

“O que quer que tenha acontecido - e nós assumimos que algo aconteceu - deixou vestígios que se assemelham muito aos previstos pelo Λ CDM. E os vestígios são abundantes e suficientemente cruzados para que a opinião da comunidade, incluindo a minha, seja que essa teoria quase certamente é uma aproximação útil, embora incompleta, do que realmente aconteceu.” ([Peebles, 2020](#))

Como o modelo Λ CDM consegue se adequar tão bem aos dados, ao usarmos medidas de fenômenos tão diferentes, mas ao mesmo tempo nos frustra ao haver as tensões de Hubble e S8, especula-se que novas teorias devam ser parecidas em termos gerais com o modelo cosmológico padrão, mas deve se encaixar com as tensões e resolver os problemas inerentes a esse modelo.

Por este motivo, foram propostos na literatura cenários alternativos para a energia escura. Segundo [Amendola e Tsujikawa \(2010\)](#), os possíveis causadores desta aceleração atualmente citados na literatura podem ser separados em duas classes distintas: uma nova componente desconhecida do Universo, denominada de forma genérica como quintessência ou energia escura, vem a se juntar aos quatro componentes tradicionais (matéria bariônica, matéria escura, fótons e neutrinos), ou uma modificação da teoria de Gravitação vigente, a Relatividade Geral. Cada uma dessas explicações tem seus problemas, mas algumas se propõem promissoras para explicar, separadamente, a era inflacionária ou a era de expansão acelerada atual ([Amendola; Tsujikawa, 2010](#)). Tem se mostrado difícil que uma única teoria explique essas duas fases aceleradas.

1.3 Breve história e vantagens de se estudar teorias de gravitação modificada

Quanto à física necessária para descrever a dinâmica e evolução do Universo, diferentes teorias foram utilizadas e testadas nos últimos séculos. Uma vez que Newton aplicou as leis da gravitação aos corpos fora da Terra, uma descrição newtoniana dos céus passou a vigorar como adequada no meio científico. Mas o Universo não se resume à escalas de tempo e espaço tipicamente humanas. Descobrimos que existem galáxias, estrelas super-massivas e partículas viajando em velocidade comparável à da luz, e foi necessária uma reinterpretação drástica sobre diversos eventos e elementos fundamentais da física. Nós não conseguimos adaptar a teoria newtoniana para cobrir esses novos casos, como uma adição de um apêndice. Foi necessária toda uma nova concepção de Universo envolvendo campos, novas geometrias e o abandono de um tempo absoluto, com a teoria newtoniana sendo resgatada como caso limite ([Einstein; Infeld, 2008](#)).

Uma lição que parece ser possível tirar de revoluções científicas como a gravitação newtoniana, a mecânica quântica e a relatividade geral é que uma descrição mais abrangente dos eventos físicos nem sempre é facilmente deduzida a partir da física do dia-a-dia ou de ideias já existentes. O cosmos como um todo é um grande laboratório no qual podemos testar predições das teorias já existentes da física e encontrar possíveis contradições.

No entanto, a história da física e da cosmologia parece justificar certos caminhos seguidos pela cosmologia moderna. Os tipos de soluções propostos para resolver os problemas e suplantam o modelo cosmológico padrão são velhas conhecidas. Como Aristóteles,

propomos novos campos ou fluidos que permeiam os céus, ou como Einstein, propomos novas teorias de gravitação.

As primeiras tentativas de modificar a gravitação surgiram logo após a publicação da teoria da relatividade geral². Esses esforços iniciais foram impulsionados por uma curiosidade intelectual sobre os fundamentos da gravidade, na tentativa de compreender e aprimorar o entendimento da gravitação (Weyl, 1919) (Eddington, 1923). Além disso, segundo Sotiriou e Faraoni (2010), nos anos 1960 muitos cientistas buscaram resolver questões relacionadas à renormalização, um processo essencial na reconciliação da gravitação com a física quântica (Stelle, 1977). Essas primeiras incursões abriram caminho para o desenvolvimento de teorias e modelos que buscavam estender ou modificar a compreensão atual da gravidade.

Sobre comprovações experimentais da validade em escalas cosmológicas da Relatividade Geral, Peebles comenta que a maioria da comunidade científica aceitou implicitamente a teoria de Einstein. Poucos apontaram que isso era uma enorme extrapolação a partir dos poucos e escassos testes da relatividade geral que tínhamos na década de 1960.

Modelos que pretendem modificar o lado esquerdo das equações de Einstein tem como exemplos a gravidade $f(R)$ (ver Amendola et al. (2007) para um *review* de viabilidade cosmológica no *background* dessas teorias); teorias escalar-tensoriais (da qual Brans-Dicke é um caso particular (Brans; Dicke, 1961)) e modelos de brana (Sahni; Shtanov, 2003). Esses modelos devem satisfazer propriedades locais da gravidade e proporcionar condições para a existência das eras da matéria e expansão acelerada.

O estudo de modelos como $f(R)$ alcançou uma grande popularidade nos últimos 20 anos. Segundo Sotiriou e Faraoni (2010), esses modelos são gerais o suficiente pra encapsular propriedades de gravitação de alta ordem mas ao mesmo tempo são simples o suficiente para serem tratadas e analisadas. Por isso, muitas vezes teorias como $f(R)$ são conhecidas como *toy models*, servindo para aumentar a nossa compreensão sobre os comportamentos envolvendo gravitação modificada, sem contudo talvez ser a descrição mais adequada que procuramos. Muitos autores consideram que, se chegarmos à conclusão de que a teoria de Einstein está errada, a próxima teoria da gravidade poderá ser completamente diferente das coisas que estudamos hoje. Porém, até chegarmos lá, uma boa tentativa é estudar as facetas possíveis que essas modificações podem ter.

Das teorias de gravitação modificada, a Teoria de Horndeski, da qual teorias $f(R)$ são um famoso caso particular, encerra a forma mais geral de escrever uma teoria escalar-tensorial que contenha equações de movimento de segunda ordem, ou seja, sem esbarrar em problemas intrínsecos de estabilidade. Ela é uma teoria efetiva no sentido de que várias teorias de mais alta ordem podem ser traduzidas em teorias escalar-tensoriais efetivas,

² Lembramos que o próprio Einstein pôs a necessidade de algo como uma constante cosmológica para manter a ideia vigente na época de um Universo estático.

encapsuladas dentro da lagrangiana de Horndeski (Kobayashi, 2019).

Uma proposta viável de teoria de gravitação deve incorporar os sucessos do modelo cosmológico padrão, sendo igualmente desejável que essa teoria possa ser distinguível de forma mensurável, em vez de ser apenas uma nova formulação (ver Clifton et al. (2012) para um *review* de teorias de gravitação modificada na cosmologia, e Ferreira (2019) para medições da gravidade). Do ponto de vista do fundo, é sempre possível transformar uma modificação no lado esquerdo das equações de Einstein, e portanto uma modificação na gravitação, em uma modificação na composição do Universo, ao reescrever essa modificação em termos de um fluido efetivo e incluí-lo adequadamente no tensor energia momento, de forma a conservar a energia. Isso já não é mais verdade quando lidamos com outras implicações, como crescimento de estruturas.

Ao contrário das perturbações na CMB, que permaneceram como um fóssil daquela época, as perturbações na matéria estão sujeitas a uma competição entre dois efeitos: a expansão do fundo cosmológico, que causa uma diluição nas densidades, e a instabilidade gravitacional, onde a tendência é a de aglomeração. O estudo da previsão teórica da estrutura em grande escala para diferentes modelos de gravitação é, portanto, uma das maneiras pelas quais podemos obter parâmetros que os diferenciem, e futuramente com o avanço da qualidade dos dados observacionais, pode servir para descartar ou consagrar uma teoria (Gannouji; Moraes; Polarski, 2009) (Tsujikawa et al., 2009).

Na teoria de Horndeski, a presença de termos extras na ação da gravitação pode modificar o acoplamento gravitacional, levando a mudanças na taxa de crescimento das perturbações de densidade da matéria δ_m e dos potenciais gravitacionais. O impacto da gravitação modificada nas sobredensidades de matéria δ_m no regime quase estático, bem dentro da era da matéria e dentro do horizonte é codificado dentro de uma única equação por uma constante de Newton efetiva, agora $G_{eff}(k, a)$ (Motta et al., 2013)(Amendola et al., 2020).

Existem códigos de Boltzmann que calculam o espectro da CMB e o espectro de potências da matéria, como o CAMB (Howlett et al., 2012) e o CLASS (Blas; Lesgourgues; Tram, 2011b). Uma versão deste último é o Horndeski in the Cosmic Linear Anisotropy Solving System (HI-CLASS), que implementa também gravitação modificada. Possui vantagens como usabilidade, flexibilidade, acurácia e velocidade, além de uma vasta documentação.

1.4 Objetivos do trabalho

A disponibilidade de dados melhorados e em maior quantidade que teremos ainda nesta década nos leva a procurar obter nas teorias de gravitação modificada a capacidade de distinção com relação ao modelo cosmológico padrão, através das suas assinaturas em

observáveis. Podemos utilizar para esta análise observáveis de RSD, para restringir parâmetros livres das teorias de gravitação. Para fazer essa análise usando o formalismo de Horndeski, a teoria de gravitação modificada escolhida deve ser “traduzida” em termos de parametrizações muito pouco intuitivas. Queremos explorar outras modelagens paramétricas com diferentes níveis de complexidade para G_{eff} , e testar o poder vinculante esperado para diferentes experimentos.

Utilizando o fato de que o HI-CLASS propõe-se como fácil de modificar, vamos utilizá-lo para desenvolver algumas ferramentas dentro do próprio código. Aproveitando que ele possui integrador com passo de integração adaptável, testes de viabilidade cosmológica dos modelos e esquemas de aproximação, vamos ainda utilizar o cálculo do fundo cosmológico e toda a estrutura do programa para

i) Encontrar quais as formas que G_{eff} pode assumir com as parametrizações já implementadas no HI-CLASS.

ii) Implementar a equação para a sobredensidade de matéria, como esquema de aproximação. Dessa forma, é possível inserir diretamente a relação entre G_{eff} e δ_m . Fazer essa implementação no HI-CLASS permite que tenhamos segurança das modificações, pois podemos apenas copiar a estrutura pré-existente. Também permite que verifiquemos se esta aproximação está funcionando adequadamente e o nível de precisão obtido no caso da parametrização em função das α s, pois podemos comparar com as soluções já calculadas pelo código.

iii) Obter a função de crescimento e o espectro de potência da matéria.

A idéia é poder usar dados de RSD para vincular os parâmetros livres do modelo de G_{eff} estudado. Esta dissertação também tem um objetivo didático de apresentar um resumo dos tópicos necessários para compreender a implementação descrita no capítulo 6.

O trabalho está organizado da forma descrita a seguir. No capítulo 2, relembramos as soluções para o fundo cosmológico do modelo Λ CDM. Mostraremos a dedução das equações de campo, a evolução dos parâmetros de densidade das componentes do Universo e a taxa de expansão nas diferentes eras. No capítulo 3, explicamos como se usa teoria de perturbação para explicar a CMB e a estrutura de larga escala. Perturba-se a solução do fundo homogêneo e isotrópico, de forma que é possível obter uma equação para a evolução das perturbações. Isto é tratado no capítulo 4, onde brevemente discutimos o surgimento do espectro primordial através da inflação e as condições iniciais para a evolução das perturbações. Comentamos também brevemente sobre a estatística utilizada no tratamento dessas perturbações e mostramos as soluções para o crescimento de estruturas no regime linear. Destacamos o comportamento das sobredensidades de matéria bariônica e de matéria escura.

O capítulo 5 é dedicado a introduzir a teoria de Horndeski, que encapsula todas as

possíveis lagrangianas de uma teoria escalar-tensorial, que possui um único escalar, que geram equações de segunda ordem de movimento para o escalar e para a métrica. Essa teoria está implementada no código de Boltzmann que pretendemos utilizar como objeto de trabalho, o HI-CLASS. O funcionamento, as vantagens e a estrutura do HI-CLASS são comentados na seção 6.1. Na seção 6.2, estão descritas minhas modificações nesse código: a obtenção do valor efetivo da constante de Newton (agora uma função $G_{eff}(k, a)$); e a implementação de uma nova equação para a evolução das perturbações de matéria, que é encontrada bem dentro do horizonte e dentro da era da matéria. Comento sobre a validade dessa aproximação e os resultados obtidos com a implementação e, no capítulo 7, concluo com perspectivas futuras desse trabalho. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

2 O modelo Λ CDM

Nesse capítulo será introduzido o formalismo matemático da Relatividade Geral e sua aplicação na criação de um modelo cosmológico. Um aspecto fundamental do modelo cosmológico padrão é a existência do princípio cosmológico, corroborado pelas observações, que conjectura que o Universo é essencialmente o mesmo em qualquer lugar. O Universo é então descrito como homogêneo e isotrópico, sem curvatura e composto de matéria, radiação e uma constante cosmológica. Pelas propriedades do princípio cosmológico, trataremos essas componentes do fundo inicialmente como fluidos perfeitos, e no capítulo 3 introduziremos com mais detalhe a mecânica estatística adequada e toda a hierarquia de Boltzmann. Resolvendo as equações de campo, obtemos a evolução do fundo cosmológico com relação ao tempo.

2.1 Dedução das equações de campo na cosmologia

As equações de Einstein, que expressam a ligação entre a geometria do espaço-tempo (do lado esquerdo) e seu conteúdo material (do lado direito) são escritas em linguagem tensorial:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (2.1)$$

O tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ e o escalar de Ricci R são contrações do tensor de curvatura de Riemann, $G_{\mu\nu}$ é a métrica e $k = 8\pi G$, sendo G a constante de Newton. O tensor de energia-momento $T_{\mu\nu}$ é a generalização da densidade de energia-matéria levando em conta corrente de matéria-energia, pressão e stress anisotrópico.

A ação S da Relatividade Geral e dos demais componentes do Universo, que gera a equação tensorial (2.1), é dada por

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} R + S_{m,r}, \quad (2.2)$$

onde g é o determinante do tensor métrico e $S_{m,r}$ é a ação dos outros componentes (matéria, radiação, etc.)¹.

Em cosmologia, é conveniente expressar a expansão valendo-se de sua propriedade isotrópica, ou seja, sabendo que a expansão é a mesma em todas as direções. As posições são dadas em termos de coordenadas comóveis, pela relação

$$\vec{r} = a(t)\vec{x},$$

¹ $c=1$.

onde \vec{x} é a posição relativa entre duas galáxias, a menos de velocidades peculiares, que permanece fixa, e $a(t)$ é um parâmetro dependente do tempo que determina a variação das distâncias ao longo da passagem do tempo. Normalmente, escolhemos \vec{x} como sendo a posição relativa média entre as galáxias hoje ($t = t_0$), e, assim, $a(t = t_0) = 1$. Assim, podemos expressar a métrica como

$$ds^2 = -dt^2 + a^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right). \quad (2.3)$$

Partiremos da ação de Einstein-Hilbert, eq. (2.2), fazendo sua variação com respeito à métrica, e concluímos que:

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.4)$$

sendo $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ o tensor de Einstein. Para uma introdução à teoria da Relatividade Geral, ver [Schutz \(2009\)](#).

O cálculo completo de $R_{\mu\nu}$ e R se encontra no apêndice A. [Weinberg \(1972\)](#) argumenta que é possível prever a forma dos termos $R_{\mu\nu}$ e R . Devido à forma simétrica da métrica e a natureza desses termos, vemos que i) os termos do tensor de Ricci, por serem contrações e derivadas da métrica, devem ser proporcionais à segunda derivada da métrica e/ou termos quadráticos envolvendo primeiras derivadas; ii) R , por ser escalar, deve ser o mesmo em qualquer sistema de coordenada, então os termos serão normalizados por $a(t)$, logo serão proporcionais a $\frac{\ddot{a}}{a}$ e $\frac{\dot{a}^2}{a}$.

Chegamos então a

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad (2.5)$$

$$R_{ij} = \delta_{ij}[2\dot{a}^2 + a\ddot{a}], \quad (2.6)$$

$$R = 6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right]. \quad (2.7)$$

Antes de introduzir o lado direito da equação tensorial, é necessária uma discussão sobre fluidos em relatividade. Quando uma coleção de partículas é tão numerosa que a dinâmica das partículas individuais não pode ser seguida, aproximamos essa coleção por um *continuum*. A descrição do coletivo é feita em termos de quantidades médias: número de partículas por unidade de volume, densidade de energia, densidade de momento, pressão, temperatura, etc. Essa média é feita em um número de partículas grande o suficiente para que o comportamento de partículas individuais não seja relevante, mas pequeno o suficiente para que as propriedades de cada elemento do *continuum* sejam relativamente homogêneas. Matematicamente podemos atribuir a cada ponto um valor de densidade, temperatura, etc. Então um *continuum* é definido por vários campos, que possuem valores

definidos em cada ponto do espaço e do tempo. Um fluido é um tipo especial de *continuum*, onde as forças de cisalhamento presentes são pequenas, i.e., o *continuum* “flui”. Um fluido perfeito é definido completamente por suas densidade de energia de repouso e pressão.

O número de partículas por unidade de volume, no sistema de coordenadas momentaneamente comóvel (MCRF, da sigla em inglês para Momentarily Comoving Reference Frame) das partículas, é encontrado apenas contando as partículas e dividindo pelo volume. No caso de um sistema de coordenadas diferente, o número de partículas é o mesmo mas o volume sofrerá alterações devido à contração de Lorentz. Ainda no MCRF, a energia de cada partícula é apenas m , logo energia por unidade de volume é $\rho = mn$. O tensor energia momento $T^{\alpha\beta}$ é o fluxo da componente α do quadrimomento p^α através de uma superfície x^β constante. T^{00} é o fluxo da componente 0 do momento i.e. energia através de uma superfície $t = \text{constante}$. Isto é a densidade de energia. Logo, a densidade numérica volumétrica pode ser interpretada como um fluxo do tipo tempo. T^{0i} é o fluxo de energia através de uma superfície x^i constante. T^{i0} é o fluxo do i momento através de $t = \text{constante}$, i.e., densidade de momento. T^{ij} é o fluxo do i momento através da superfície j . Um fluido perfeito em relatividade é definido como um fluido que não possui viscosidade ($T^{ij} = 0$ para $i \neq j$) e condução de calor (entropia S constante no tempo) no MCRF.

O fundo cosmológico homogêneo e isotrópico pode ser descrito como composto de fluidos perfeitos, de forma que

$$T^\mu_{\nu} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}.$$

A conservação de energia é garantida por $T^{\mu\nu}_{;\nu}$, de onde deriva-se a equação da continuidade (2.16), também chamada equação dos fluidos.

Agora que sabemos todos os componentes dessa equação tensorial, vamos analisar esse conjunto de equações. Duas equações traduzem todas as informações que podemos obter para a dinâmica de fundo: uma vinda da componente G^0_0 , e outra que é $G^i_i - G^0_0$:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \quad (2.8)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p), \quad (2.9)$$

onde k/a^2 é um termo que leva em consideração uma possível curvatura das hipersuperfícies espaciais. A primeira equação é conhecida como equação de Friedmann, e relaciona a taxa de expansão com a densidade de energia total. A segunda é a equação da aceleração. Se $\frac{\ddot{a}}{a} > 0$, a expansão é acelerada, sendo verdade se $p < -\rho/3$.

2.2 Evolução do fundo cosmológico

Uma estrela emite luz em todo o espectro de frequências, mas antes de chegar em um observador terrestre, linhas de absorção surgem devido aos elementos presentes na atmosfera mais fria das estrelas. Essas linhas de absorção são como digitais dos elementos químicos que as causaram. Quando Vesto Slipher observou a emissão vinda da galáxia M31, viu que essas linhas estavam deslocadas na direção azul do espectro visível (Slipher, 1979). Em 1925, ele havia medido o deslocamento de linhas espectrais de aproximadamente 40 galáxias.

Em 1929, Edwin Hubble fez um estudo relacionando esse desvio com a distância em que se encontravam as galáxias. Algumas galáxias possuíam um desvio para o azul, que chamamos *blueshift*, outras muitas possuíam um desvio para o vermelho, *redshift*. Embora existam esses dois tipos, o deslocamento das linhas espectrais normalmente é chamado de *redshift* (z), de forma que, para um comprimento de onda emitido λ_{em} e um comprimento de onda observado λ_{ob} ,

$$z = \frac{\lambda_{ob} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}}. \quad (2.10)$$

Hubble interpretou o *blueshift* como sendo o efeito *doppler* causado pela velocidade com que uma galáxia se aproxima de nós, e um *redshift* como sendo causado por um afastamento. Acontece que galáxias individuais podem estar se movendo, aleatoriamente ou por ação gravitacional, de forma que duas galáxias podem estar se afastando ou se aproximando uma da outra. Mas curiosamente, após uma certa distância com relação à nossa galáxia, todas as galáxias pareciam se afastar, e quanto mais distante uma galáxia se encontrava, maior era esse desvio. Havia uma relação do tipo $z = H_0 r$, onde H_0 é a constante de Hubble. Como as velocidades v eram baixas, ele usou o efeito *doppler* clássico $z = v/c$, e obteve que

$$v = H_0 r. \quad (2.11)$$

A história da descoberta do *redshift* cosmológico pode ser encontrada em Ryden (1970). Hoje sabemos que essa relação surge pelo fato de todas as galáxias estarem se afastando umas das outras, e isso é causado pela expansão do próprio espaço. Quando uma galáxia se move com relação ao fundo homogêneo em que as coordenadas comóveis são definidas, dizemos que ela possui velocidade peculiar. Para velocidades baixas e galáxias não muito distantes podemos inferir que a velocidade de afastamento que percebemos em uma galáxia é

$$\vec{v} = \dot{r} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{|\dot{a}\vec{x} + a\dot{\vec{x}}|}{|a\vec{x}|} \vec{r}. \quad (2.12)$$

O termo que possui \dot{a} na soma dentro do módulo corresponde à expansão do espaço, e o termo que possui $\dot{\vec{x}}$ corresponde à velocidade peculiar. Quando não há velocidade peculiar, recupera-se

$$v = \frac{\dot{a}}{a} \vec{r} = H(t) \vec{r}(t). \quad (2.13)$$

Percebemos que o parâmetro de Hubble (H) tem unidades $(\text{tempo})^{-1}$, e que é apenas uma constante no espaço mas não no tempo. O termo “constante de Hubble” hoje designa o valor atual do parâmetro de Hubble, H_0 . A definição acima torna a equação (2.8)

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2}. \quad (2.14)$$

Também podemos expressar a expansão em termos do *redshift* z . Uma derivação completa é feita em [Lambourne \(2010\)](#). O comprimento de onda da luz é esticado pela expansão, de forma que $\lambda \propto a$, e dependerá do fator de escala nos momentos de emissão e recebimento dessa luz. Assim,

$$1 + z = \frac{a(t_{ob})}{a(t_{em})} = \frac{1}{a}. \quad (2.15)$$

O primeiro trabalho sobre um universo relativístico preenchido por um fluido perfeito em que a interpretação da expansão é o não-cruzamento das linhas geodésicas foi feito por [Weyl \(1930\)](#). Ele percebeu que haveria uma classe privilegiada de observadores: os que se movem sem velocidades peculiares verão o Universo como homogêneo e isotrópico. O princípio de Weyl pode ser escrito como:

No espaço-tempo cósmico existe um conjunto de observadores fundamentais privilegiados cujas linhas de mundo formam um feixe suave de geodésicas do tipo tempo. Essas geodésicas nunca se encontram e nenhum evento, exceto talvez em uma singularidade inicial no passado ou uma singularidade final no futuro.

Em outras palavras, [Lambourne \(2010\)](#) diz que o Universo é estruturado e evolui de forma suficientemente ordenada de forma que o tempo próprio medido por cada observador fundamental pode ser correlacionado com o de cada outro observador fundamental, de forma que o valor de um único e significativo tempo cósmico pode ser associado a cada evento. Os eventos caracterizados por um valor particular de tempo cósmico formam um espaço tridimensional, uma hipersuperfície com propriedades homogêneas e isotrópicas. Embora o sistema de coordenadas tenha uma origem particular, qualquer ponto pode ser

escolhido como a origem, e a escolha de orientação dos eixos é arbitrária. Uma discussão sobre a validade do tempo cósmico e sua identificação com o tempo próprio dos observadores fundamentais também pode ser encontrada em [Weinberg \(1972\)](#).

Podemos passar agora a compreender a dinâmica de expansão em termos dos seus componentes. A evolução das densidades no tempo é dada pela equação dos fluidos

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad (2.16)$$

A variação temporal da densidade de energia depende da diluição do fluido pela expansão. É fácil ver a atuação da expansão quando não há pressão, já que nesse caso $\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}$.

A dinâmica de expansão é dominada por diferentes componentes ao longo do tempo, por isso vamos ver qual a influência de cada um. Um universo que contenha apenas matéria não relativística, fria portanto, não tem associado a si pressão. Formalmente, a pressão pode ser desprezada quando sua energia cinética é muito menor que a energia de repouso ($k_B T \ll m_o c^2$). Logo, a eq. de fluidos se torna:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0 \quad \implies \quad \frac{1}{a^3} \frac{d}{dt}(\rho a^3) = 0 \quad \implies \quad \frac{d}{dt}(\rho a^3) = 0,$$

de onde obtemos que a densidade de energia de matéria evolui proporcionalmente ao inverso do volume de expansão

$$\rho_m \propto \frac{1}{a^3} = \frac{\rho_{0m}}{a^3}. \quad (2.17)$$

Usando essa informação para resolver a equação de Friedmann, obtemos a taxa de expansão $a(t)$

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3} \implies \rho_m = \frac{\rho_{0m} t_0^2}{t^2}. \quad (2.18)$$

Para um universo que contenha somente radiação, a equação de estado é $p = \omega\rho = \frac{1}{3}\rho_r$ ([Liddle; Lyth, 2000](#)). Nesse caso a equação dos fluidos e a equação de Friedmann nos levam a

$$\dot{\rho} + 4\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0 \implies \rho_r = \frac{\rho_{0r}}{a^4}, \quad (2.19)$$

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2} \implies \rho_r = \frac{\rho_{0r} t_0^2}{t^2}. \quad (2.20)$$

Em um universo dominado pela constante cosmológica, a densidade $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}$ é constante e

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\Lambda}{3} \implies a \propto e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t}. \quad (2.21)$$

O fato da densidade ser constante nos permite interpretá-la, via equação dos fluidos, como tendo uma pressão negativa:

$$\dot{\rho}_\Lambda + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho_\Lambda + p_\Lambda/c^2) = 0 \longrightarrow p_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2. \quad (2.22)$$

No modelo cosmológico padrão, o Universo contém três compotentes: matéria, radiação e energia escura. No entanto, não mais de duas componentes por vez são importantes para a expansão. Em um universo contendo matéria e radiação, a evolução de $\rho = \rho_m + \rho_r$ com relação ao tempo vai depender de quem está dominando a expansão. É interessante perceber que a densidade de radiação decresce mais rápido do que a de matéria. Na época em que a densidade de radiação era consideravelmente maior do que qualquer outra componente, é ela que vai dominar a equação de Friedmann, resultando em

$$a(t) \propto t^{1/2} \implies \rho_r \propto \frac{1}{t^2}, \quad \rho_m \propto \frac{1}{t^{3/2}}. \quad (2.23)$$

Igualmente, houve uma época em que a densidade de matéria é que passou a dominar a expansão, levando a

$$a \propto t^{2/3} \implies \rho_m \propto \frac{1}{t^2}, \quad \rho_r \propto \frac{1}{t^{8/3}}. \quad (2.24)$$

Entre esses dois momentos houve um momento em que a densidade de energia de matéria e de radiação foram parecidas. E, antes da energia escura passar a dominar a densidade de energia, houve uma época em que ρ_m e ρ_Λ tinham valores parecidos. Em [Ryden \(1970\)](#), mostra-se que existe uma solução analítica para a equação de Friedmann no caso de duas componentes, cuja solução para componente única ρ_i é recuperada nos limites adequados .

É conveniente daqui pra frente fazer uma análise em termos do parâmetro de densidade $\Omega_i(t) = \frac{\rho_i(t)}{\rho_{tot}(t)}$, que mostra a densidade de energia fracional de uma componente, de forma que $\sum_i \Omega_i = 1$. Observações mostraram que o Universo possui densidade de energia muito próxima, senão igual, à densidade de energia que garante que o Universo seja plano. Para que não haja um termo de curvatura, pela equação de Friedmann, o Universo deve possuir uma densidade crítica

$$\rho_{cr} = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (2.25)$$

Dessa forma, podemos escrever as densidades fracionais como

$$\Omega_i(t) = \frac{\rho_i(t)}{\rho_{cr}(t)}. \quad (2.26)$$

Também é definido o parâmetro de desaceleração (Sandage, 1961), que ilustra a desaceleração da expansão ao longo das eras:

$$q(t) \equiv -\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} \frac{1}{H^2} \equiv -\frac{a(t)\ddot{a}(t)}{\dot{a}^2(t)}. \quad (2.27)$$

O comportamento das quantidades definidas anteriormente é mostrado na figura 6.

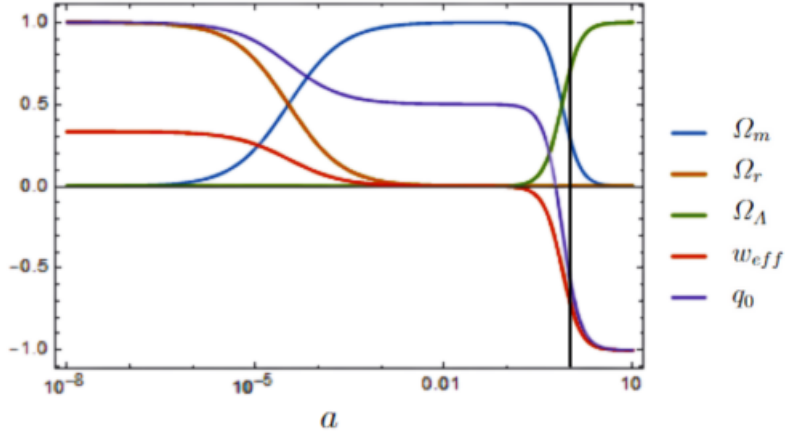


Figura 6 – Ilustração da evolução dos parâmetros de densidade para Λ CDM. Foram escolhidos $\Omega_{m0} = 0.3 - \Omega_{r0}$, $\Omega_{\Lambda0} = 0.7$, $\Omega_{r0} = 10^{-4}$. Também são mostrados a equação de estado efetiva $w_{eff} = p_{tot}/\rho_{tot}$ e o parâmetro de desaceleração $q(t)$.

A equação de Friedmann também pode ser escrita em termo das densidades fracionais:

$$\frac{H^2(t)}{H_0^2} = \frac{\rho(t)}{\rho_{cr}} = \sum_s \Omega_s [a(t)]^{-3(1+w_s)}. \quad (2.28)$$

3 Perturbações em Λ CDM

As teorias empregadas em descrever o modelo cosmológico padrão são a teoria da Relatividade Geral, a física de altas energias e a mecânica estatística. A mecânica estatística nos descreve o comportamento das componentes através da evolução da função distribuição via equação de Boltzmann. A Relatividade Geral, por sua vez, descreve a natureza da gravitação, i.e., a relação entre o espaço tempo e a composição do tensor energia-momento. As perturbações com relação ao fundo cosmológico se traduzem em perturbações na métrica e nas densidades e velocidades das componentes do Universo. Em escalas suficientemente grandes, podemos usar um tratamento de teoria de perturbação linear para descrever a evolução dessas perturbações.

3.1 Evolução da função de distribuição num Universo em expansão

No capítulo anterior, nos dedicamos à tarefa de descrever o comportamento de *background* dos componentes do Universo. Apresentamos sem derivação uma equação de fluidos que pode ser deduzida a partir da primeira lei da termodinâmica. A partir de agora vamos nos valer da mecânica estatística para deduzir esses comportamentos, coisa que será especialmente útil no tratamento das perturbações.

A física estatística nos garante que no limite de muitas partículas, a função distribuição contínua $f_s(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ descreve de forma adequada o estado coletivo de partículas do tipo s . Essa função também pode ser interpretada como uma densidade de probabilidade no espaço de fase. Com esse tratamento poderemos derivar todas as propriedades macroscópicas em que estamos interessados, especialmente densidade e pressão.

O tensor energia-momento está relacionado com a função distribuição por

$$T^\alpha_\beta(\mathbf{x}, t) = \frac{g}{\sqrt{-\det[g_{\alpha\beta}]}} \int \frac{dP_1 dP_2 dP_3}{(2\pi)^3} \frac{P^\alpha P_\beta}{P^0} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t), \quad (3.1)$$

onde g contabiliza os estados das partículas, e P_α é a componente α do 4-momento. Podemos obter a evolução de $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ através da equação de transporte de Boltzmann. Vamos partir do caso clássico para obter a ideia geral:

i) Excluindo em princípio interações partícula-partícula, as interações de longo alcance podem ser descritas por um campo $\mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ de forma que temos para a posição \mathbf{x} e o momento \mathbf{p} :

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{p}}{m}, \quad (3.2)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = m\mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t). \quad (3.3)$$

ii) Se não houve interação, a derivada total de f na equação de Boltzmann é nula:

$$\frac{df(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{p}} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} \right) f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = 0. \quad (3.4)$$

Quando o número de partículas se conserva podemos entender que a taxa de variação temporal de f num determinado elemento de volume do espaço de fase depende de quantas partículas estão entrando e saindo desse volume.

iii) Se houver interação partícula-partícula (ou criação e aniquilação), ela é introduzida através de um termo de colisão

$$\frac{df}{dt} = C[f], \quad (3.5)$$

cuja natureza discutiremos no próximo capítulo.

Sabendo as condições iniciais, obtemos $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ resolvendo essa equação diferencial:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)}{\partial t} = -\frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) - m\mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t). \quad (3.6)$$

Vamos ver como podemos reescrever a equação de Boltzmann num espaço-tempo em expansão. Já definimos a métrica na equação (2.3). Relembramos da relatividade geral que $P^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$, $P^2 = g_{\mu\nu} P^\mu P^\nu = -m^2$, $p^2 = g_{ij} P^i P^j$, tornando $E^2 = (P^0)^2 = p^2 + m^2$. Vamos utilizar estas relações para reescrever algumas quantidades em termos de \mathbf{p} e E .

Também podemos separar \mathbf{p} em termos da sua magnitude p e seu vetor unitário $\hat{p}^i = \hat{p}_i$. Como \mathbf{p} é o tradicional momento tridimensional, o vetor unitário deve obedecer $\delta_{ij} \hat{p}^i \hat{p}^j = 1$, e lembrando a definição para p^2 acima, encontramos a seguinte relação:

$$p^2 = g_{ij} \hat{p}^i \hat{p}^j C^2 = a^2 \delta_{ij} \hat{p}^i \hat{p}^j C^2 = a^2 C^2 \longrightarrow P^i = \frac{p}{a} \hat{p}^i. \quad (3.7)$$

Agora, antes de mais nada já podemos reescrever a equação de Boltzmann em termos de p e \hat{p}^i :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \hat{p}^i} \frac{d\hat{p}^i}{dt}. \quad (3.8)$$

Podemos deixar de fora o último termo dessa equação, já que em ordem zero nosso Universo isotrópico em expansão muda apenas a magnitude do momento, e não a direção, tornando o último termo um termo de ordem 2.

Agora vamos substituir de fato $\frac{dx^i}{dt}$ e $\frac{dp}{dt}$ pelas quantidades que conhecemos:

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dt} = \frac{P^i}{P^0} = \frac{p}{E} \frac{\hat{p}^i}{a}. \quad (3.9)$$

Relembrando a equação geodésica na relatividade geral temos

$$\begin{aligned} \frac{dP^0}{d\lambda} &= -\Gamma^0_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta, \\ P^0 \frac{dP^0}{dt} &= -\Gamma^0_{ij} P^i P^j = \frac{1}{2} \frac{dE^2}{dt}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

o que nos leva a

$$p \frac{dp}{dt} = -Hp^2 \rightarrow \frac{dp}{dt} = -Hp. \quad (3.11)$$

Substituindo (3.9) e (3.11) na equação de Boltzmann, temos

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p}{E} \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial f}{\partial x^i} - Hp \frac{\partial f}{\partial p} = C[f]. \quad (3.12)$$

É útil separar dois regimes. O limite não relativístico ($p \ll m$, $E \simeq m$) nos permite usar a equação como

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial f}{\partial x^i} - Hp \frac{\partial f}{\partial p} = C[f]. \quad (3.13)$$

O limite relativístico ($p \gg m$, $E \simeq p$) admite

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial f}{\partial x^i} - Hp \frac{\partial f}{\partial p} = C[f]. \quad (3.14)$$

Ao considerar um universo homogêneo ($\frac{\partial f}{\partial x^i} = 0$) e integrar em \mathbf{p} :

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\partial f}{\partial t} - H \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p \frac{\partial f}{\partial p} &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} C[f] \\ \frac{dn(t)}{dt} + 3Hn(t) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} C[f], \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde $n(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ é a densidade numérica de partículas. É interessante notar que, na ausência de colisões, temos

$$\frac{dn}{n} = -3 \frac{da}{a} \implies n \propto a^{-3}, \quad (3.16)$$

ou seja, o Universo se expande e dilui a concentração de partículas.

3.2 Equação geodésica num espaço-tempo perturbado

Vamos calcular as equações geodésicas em um espaço-tempo com uma métrica levemente perturbada do tipo:

$$g_{00}(\mathbf{x}, t) = -1 - 2\Psi(\mathbf{x}, t), \quad (3.17)$$

$$g_{0i}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (3.18)$$

$$g_{ij}(\mathbf{x}, t) = a^2(t)\delta_{ij}[1 + 2\Phi(\mathbf{x}, t)]. \quad (3.19)$$

O potencial Ψ é a generalização do potencial newtoniano, e Φ é a perturbação da curvatura espacial. A posteriori, chegamos à conclusão de que as perturbações descritas por Ψ e Φ são da ordem de 10^{-4} , o que justifica um tratamento de perturbações em ordem linear.

A partir da métrica perturbada, calculamos as componentes dos símbolos de Christoffel até a primeira ordem:

$$\Gamma^0_{00} = \dot{\Psi}, \quad (3.20)$$

$$\Gamma^0_{0i} = \Gamma^0_{i0} = \Psi_{,i}, \quad (3.21)$$

$$\Gamma^0_{ij} = \delta_{ij}a^2[H + 2H(\Phi - \Psi) + \dot{\Phi}], \quad (3.22)$$

$$\Gamma^i_{00} = \frac{1}{a^2}\Psi_{,i}, \quad (3.23)$$

$$\Gamma^i_{j0} = \Gamma^i_{0j} = \delta_{ij}(H + \dot{\Phi}), \quad (3.24)$$

$$\Gamma^i_{jk} = [\delta_{ij}\partial_k + \delta_{ik}\partial_j - \delta_{jk}\partial_i]\Phi. \quad (3.25)$$

O mesmo procedimento que fizemos para obter a equação de Boltzmann no caso homogêneo terá de ser feito novamente, agora no espaço-tempo perturbado. A equação geodésica também levará em conta essas perturbações. Para uma partícula de massa m

$$g_{\mu\nu}P^\mu P^\nu = -(1 + 2\Psi)(P^0)^2 + p^2 = -m^2. \quad (3.26)$$

Lembrando que $p^2 = g_{ij}P^i P^j$ e $E = \sqrt{p^2 + m^2}$, encontramos para o 4-momento:

$$P^\mu = \left[E(1 - \Psi), p^i \frac{1 - \Phi}{a} \right], \quad (3.27)$$

onde agora definimos os componentes do 3-momento em termos de seu módulo e um vetor

direcional

$$p^i = p\hat{p}^i, \quad (3.28)$$

$$\hat{p}^i = \hat{p}_i, \quad (3.29)$$

$$\delta_{ij}\hat{p}^i\hat{p}^j = 1. \quad (3.30)$$

Vamos calcular as quantidades $\frac{dx^i}{dt}$, $\frac{dp}{dt}$ e $\frac{dp^i}{dt}$ para construir corretamente as componentes da equação de Boltzmann perturbada. Em primeira ordem,

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dt} = \frac{P^i}{P^0} = \frac{p\hat{p}^i}{aE}(1 - \Phi + \Psi). \quad (3.31)$$

É preciso calcular $\frac{dp^i}{dt}$ para obter as dependências em \hat{p}^i e p . Usando as componentes espaciais do 4-momento,

$$\frac{dp^i}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda}[(1 + \Phi)aP^i] = P^i \frac{d}{d\lambda}[(1 + \Phi)a] + (1 + \Phi)a \frac{dP^i}{d\lambda}, \quad (3.32)$$

onde

$$\frac{d}{d\lambda}[(1 + \Phi)a] = P^0 a[H + \dot{\Phi}] + aP^k \Phi_{,k} \quad (3.33)$$

e, pela equação geodésica,

$$\frac{dP^i}{d\lambda} = -\Gamma^i_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta = -\Gamma^i_{00} P^0 P^0 - 2\Gamma^i_{0j} P^0 P^j - \Gamma^i_{jk} P^j P^k. \quad (3.34)$$

Substituindo na equação (3.34) as componentes do 4-momento e os símbolos de Christoffel:

$$\frac{dP^i}{d\lambda} = -E \left[\frac{E}{a^2} \Psi_{,i} + 2(H + \dot{\Phi}) \frac{p^i}{a} (1 - \Psi - \Phi) + \frac{2p^i}{a^2 E} p^k \Phi_{,k} - \frac{p^2}{a^2 E} \Phi_{,i} \right]. \quad (3.35)$$

Inserindo (3.33) e (3.35) em (3.32), obtemos:

$$\frac{dp^i}{d\lambda} = E(1 - \Psi) \left[(H + \dot{\Phi}) p^i + p^k \Phi_{,k} \frac{p^i}{aE} \right] \quad (3.36)$$

$$- E \left[\frac{E}{a} \Psi_{,i} + 2(H + \dot{\Phi}) p^i (1 - \Psi) + \frac{2p^i}{aE} p^k \Phi_{,k} - \frac{p^2}{aE} \Phi_{,i} \right]. \quad (3.37)$$

Usando que $\frac{dp^i}{d\lambda} = P^0 \frac{dp^i}{dt}$:

$$\frac{dp^i}{dt} = -(H + \dot{\Phi}) p^i - \frac{E}{a} \Psi_{,i} - \frac{2p^i}{aE} p^k \Phi_{,k} + \frac{p^2}{aE} \Phi_{,i}. \quad (3.38)$$

E finalmente:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} \sqrt{\delta_{ij} p^i p^j} = \delta_{ij} \frac{p^i}{p} \frac{dp^j}{dt} = -(H + \dot{\Phi})p - \frac{E}{a} \hat{p}^i \Psi_{,i}. \quad (3.39)$$

Podemos ver que a variação na amplitude do momento é dependente, como vemos no primeiro termo, da taxa de expansão local, e, no segundo termo, da interação com um poço de potencial gravitacional. Para a direção do momento:

$$\frac{d\hat{p}^i}{dt} = \frac{1}{p} \frac{dp^i}{dt} - \frac{p^i}{p^2} \frac{dp}{dt} = \frac{E}{ap} (\delta^{ik} - \hat{p}^i \hat{p}^k) \left(\frac{p^2}{E^2} \Phi - \Psi \right)_{,k}. \quad (3.40)$$

Nesse caso, os gradientes espaciais dos potenciais influenciam na variação na direção do momento, o que é algo esperado, dado que esses potenciais representam fontes de curvatura, alterando a equação geodésica, e portanto, influenciando no desvio que tanto a luz quanto partículas massivas sofrem.

3.3 Equação de Boltzmann com perturbações

Usando os cálculos da seção anterior, podemos escrever a equação de Boltzmann perturbada em primeira ordem. Vamos fazer uma diferenciação entre partículas massivas e radiação, obtendo duas formas gerais para a equação de Boltzmann sem termos de colisão num espaço-tempo perturbado em expansão.

Radiação

Para o caso de radiação, ou seja, partículas ultra-relativísticas ($E = p$):

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\hat{p}^i}{a} (1 - \Phi + \Psi) - \frac{\partial f}{\partial p} \left\{ [H + \dot{\Phi}]p + \frac{p^i}{a} \Psi_{,i} \right\} + \frac{\partial f}{\partial \hat{p}^i} \frac{1}{a} [(\Phi - \Psi)_{,i} - \hat{p}^i \hat{p}^k (\Phi - \Psi)_{,k}]. \quad (3.41)$$

Essa equação pode ser simplificada, lembrando-se que a função de distribuição em ordem zero não depende de \mathbf{x} ou $\hat{\mathbf{p}}$, e assumindo que as perturbações na função de distribuição são de mesma ordem que as perturbações Ψ, Φ . Em particular, eliminamos todos os termos proporcionais a $\frac{\partial f}{\partial \hat{p}}$, pois estão multiplicados por outros termos de primeira ordem:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\hat{p}^i}{a} - p \frac{\partial f}{\partial p} \left\{ H + \dot{\Phi} + \frac{p^i}{a} \Psi_{,i} \right\}. \quad (3.42)$$

Partículas massivas

Para o caso de partículas massivas:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\hat{p}^i p}{a E} (1 - \Phi + \Psi) - p \frac{\partial f}{\partial p} \left\{ H + \dot{\Phi} + \frac{E p^i}{ap} \Psi_{,i} \right\} \quad (3.43)$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial \hat{p}^i} \frac{E}{ap} \left\{ \left(\frac{p^2}{E^2} \Phi - \Psi \right)_{,i} - \hat{p}^i \hat{p}^k \left(\frac{p^2}{E^2} \Phi - \Psi \right)_{,k} \right\}. \quad (3.44)$$

Eliminando os termos de ordem 2 e acima, temos:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\hat{p}^i p}{a E} - p \frac{\partial f}{\partial p} \left\{ H + \dot{\Phi} + \frac{E p^i}{ap} \Psi_{,i} \right\}. \quad (3.45)$$

Em seguida, podemos calcular o tensor energia-momento. Usando a equação (3.27) com a definição do 4-momento e a definição de T^μ_ν na equação (3.1),

$$T^0_0(\mathbf{x}, t) = -g \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E(p) f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t); \quad (3.46)$$

$$T^0_i(\mathbf{x}, t) = ga(1 + \Phi - \Psi) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p_i f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t); \quad (3.47)$$

$$T^i_j(\mathbf{x}, t) = g \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{p^i p_j}{E(p)} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t). \quad (3.48)$$

Para entender a evolução da função de distribuição, vamos considerar primeiro as interações que ocorrem ao longo das épocas. Assumimos que, ao final da inflação, temos perturbações clássicas na densidade de partículas. Numa concepção mais realista, a energia escura tem perturbações de densidade (se não for uma constante cosmológica), mas pode-se mostrar que as perturbações são muito pequenas e podem ser desconsideradas em primeira ordem. A métrica é afetada por todas as componentes do Universo, e a gravidade, por sua vez, afeta todas as partículas e suas perturbações.

Fótons sofrem espalhamento Compton pelos elétrons livres. No estágio em que tudo está ionizado, há o acoplamento forte da força Coulombiana entre elétrons e prótons, de forma que podemos tratar ambos como uma única partícula convenientemente chamada “bárion”. A razão disso é que a densidade de energia dessa quantidade é dominada pelos prótons e neutrons do hidrogênio, hélio e outros resíduos de núcleos mais pesados. A figura 7 traz um resumo ilustrado das relações entre todas essas componentes.

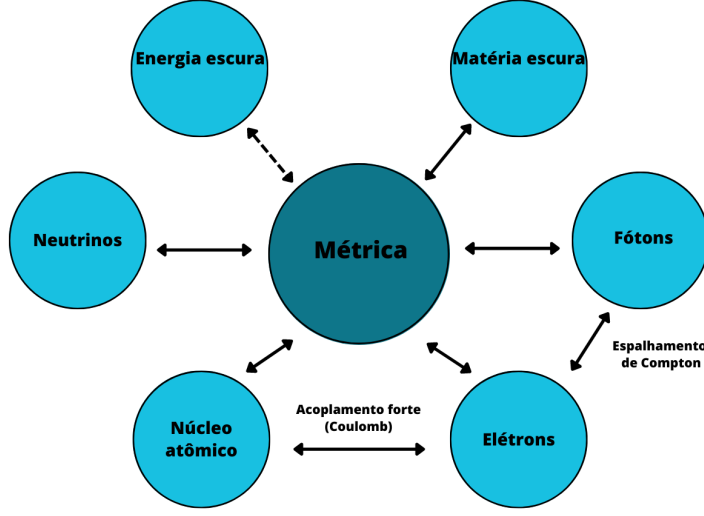


Figura 7 – Interação entre as diferentes componentes do Universo. Todas as componentes afetam a métrica do fundo cosmológico. As perturbações das componentes (exceto energia escura) afetam a métrica e vice-versa. Adaptado de [Dodelson e Schmidt \(2021\)](#).

A partir daqui começamos a diferenciar nossa estratégia para resolver a equação de Boltzmann para cada componente. Sabendo que fótons seguem a estatística de Bose-Einstein, vamos perturbar $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ em torno da ordem zero e escrever

$$f(\mathbf{x}, p, \hat{\mathbf{p}}, t) = \frac{1}{e^{\frac{p}{T(t)[1+\Theta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{p}}, t)]^{-1}}}}, \quad (3.49)$$

onde Θ é a temperatura fracional $\delta T/T$. Assim, Θ corresponde ao desvio na homogeneidade e isotropia da distribuição de fótons. A magnitude do momento se mantém praticamente inalterada então a perturbação não depende de p .

Em primeira ordem, temos

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = f^0(p, t) - p \frac{\partial f^0(p, t)}{\partial p} \Theta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{p}}, t), \quad (3.50)$$

onde,

$$f^0 = \frac{1}{e^{\frac{p}{T}-1}}. \quad (3.51)$$

Aplicando a função de distribuição de ordem zero na equação de Boltzmann chegamos à conclusão já conhecida de que a temperatura dos fótons depende do inverso do fator de escala, esfriando conforme ocorre a expansão.

Substituindo a função de distribuição perturbada na equação de Boltzmann, chegamos a

$$\frac{df}{dt} = -p \frac{\partial f^0}{\partial p} \left[\dot{\Theta} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \Theta}{\partial x^i} + \dot{\Psi} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \right], \quad (3.52)$$

onde os dois primeiros termos descrevem o comportamento ao longo das geodésicas no Universo homogêneo e os outros dois são devido às perturbações gravitacionais.

Para o neutrino, o tratamento correto é utilizar a equação para partículas massivas e a função de distribuição perturbada

$$f_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{e^{\frac{p}{T_\nu(t)[1+\mathcal{N}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{p}}, t)]+1}} = f_\nu^{(0)}(p) - \mathcal{N}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{p}}, t) p \frac{df_\nu^{(0)}(p)}{dp}. \quad (3.53)$$

Termos de colisão

Colisão é um termo guarda-chuva para espalhamento, criação e aniquilação e decaimento. Em geral, temos uma interação entre partículas 1 e 2 e dessa interação saem partículas 3 e 4. A forma como interpretamos uma colisão aqui é sempre a de criação e/ou aniquilação de partículas, já que quando ocorre colisão as partículas somem de onde estão no espaço de fase e surgem novas partículas em outros pontos, como ilustrado na figura 8.

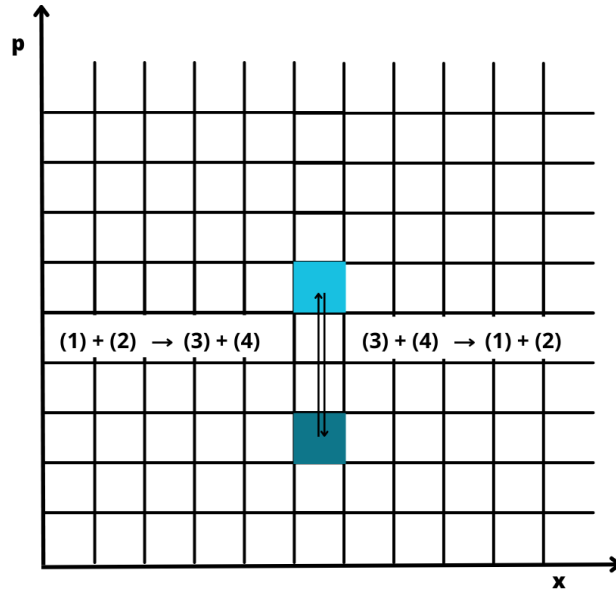


Figura 8 – Representação de uma colisão 1D observada no espaço de fase da partícula de tipo 1. As colisões ocorrem localmente e removem partículas de f_1 (em azul escuro) em proporção ao produto $f_1 f_2$, colocando-as em f_3 e f_4 . A reação inversa, proporcional a $f_3 f_4$, adiciona partículas a f_1 . Adaptado de [Dodelson e Schmidt \(2021\)](#).

Estamos interessados no espalhamento Compton a baixas energias, i.e., espalhamento Thomson, que ocorre na colisão de um fóton com um elétron. Em termos clássicos, a onda eletromagnética excita o elétron, que por ser uma partícula carregada, sofre uma

aceleração, e emite energia na mesma frequência que a onda incidente. Representamos o processo como:

$$e^-(\mathbf{q}) + \gamma(\mathbf{p}) \longleftrightarrow e^-(\mathbf{q}') + \gamma(\mathbf{p}'). \quad (3.54)$$

Nesse processo, as conservações de momento e energia são dadas por:

$$\mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{p}' + \mathbf{q}', \quad (3.55)$$

$$E(\mathbf{p}) + E_e(\mathbf{q}) = E(\mathbf{p}') + E_e(\mathbf{q}'). \quad (3.56)$$

No regime de interesse, a energia dos fótons é $E(p) = p \sim T$, enquanto que para os elétrons não-relativísticos temos $E_e(q) - m_e = q^2/(2m_e) \sim T$.

Cada espécie terá sua função de distribuição, em alguns casos modulada por um fator de multiplicidade g_s . Esse tipo de interação acontece localmente, no espaço e no tempo. Para cada $f_s(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$, precisamos subtrair as partículas do tipo s que foram retiradas do momento \mathbf{p} pela reação e adicionar as partículas jogadas no momento \mathbf{p} pela reação inversa.

O cálculo detalhado do termo de colisão vem da teoria quântica de campos, cuja interpretação vamos discutir um pouco. O termo de colisão para a variação em $f(\mathbf{p})$ é escrito como

$$\begin{aligned} C[f(\mathbf{p})] &= \frac{1}{2E(p)} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_e(q)} \int \frac{d^3q'}{(2\pi)^3 2E_e(q')} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E_e(p')} \sum_{3spins} |\mathcal{M}|^2 \\ &\times (2\pi)^4 \delta_D^{(3)}[\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{p}' - \mathbf{q}'] \delta_D^{(1)}[E(p) + E_e(q) - E(p') - E_e(q')] \\ &\times (f(\mathbf{p}')f_e(\mathbf{q}') - f(\mathbf{p})f_e(\mathbf{q})). \end{aligned} \quad (3.57)$$

A delta de Dirac garante a conservação de energia. O termo $|\mathcal{M}|^2$ é uma amplitude quadrada do espalhamento, e está ligado à probabilidade da colisão acontecer. Para o espalhamento Thomson, temos

$$\frac{1}{2} \sum_{4spins} |\mathcal{M}|^2 = 24\pi\sigma_T m_e^2 (1 + [\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{p}}']^2), \quad (3.58)$$

onde σ_T é a seção de choque de Thomson. Classicamente, uma seção de choque é a área transversal em que uma colisão pode ocorrer. Numa colisão entre duas esferas rígidas de raio r e R , a seção de choque é $\pi(r + R)^2$. No caso do do espalhamento Thomson, σ_T vai depender do raio clássico do elétron e da polarização da luz incidente. A amplitude também depende do ângulo de incidência, como evidenciado pelo termo $\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{p}}'$.

Fazendo uma média na polarização do fóton com momento \mathbf{p} e uma média angular temos

$$\sum_{3\text{ spins}} |\mathcal{M}|^2 = 32\pi\sigma_T m_e^2. \quad (3.59)$$

Considerando o espalhamento Compton não relativístico chegamos a

$$C[f(\mathbf{p})] = -p \frac{\partial f^0}{\partial p} n_e \sigma_T [\Theta_0 - \Theta(\hat{\mathbf{p}}) + \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{u}_b], \quad (3.60)$$

onde \mathbf{u}_b é a velocidade de grupo ¹ dos elétrons, n_e é a densidade numérica volumétrica de elétrons, e Θ_0 é o monopolo, definido como

$$\Theta_0(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{1}{4\pi} \int d\Omega' \Theta(\hat{\mathbf{p}}', \mathbf{x}, t). \quad (3.61)$$

O monopolo depende da posição e do tempo: num determinado instante e posição do espaço, é a média angular da perturbação fracional do fluxo de fótons naquele ponto. Quando o espalhamento Compton é eficiente, o caminho médio de um fóton é pequeno, mantendo a temperatura de uma pequena região bastante homogênea, e o fluxo vindo de qualquer direção é igual a $\Theta_0(\mathbf{x}, t)$, como visto na figura 9.

A direção da propagação dos fótons no espaço de Fourier pode ser dada pela quantidade $\mu = \frac{\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{p}}}{k}$, cosseno do ângulo entre o vetor número de onda e a direção do momento. Admitimos que as velocidades são longitudinais, i.e., $\mathbf{u}_b(\mathbf{k}, \eta) = \frac{\mathbf{k}}{k} u_b(\mathbf{k}, \eta)$. Pela velocidade ser irrotacional, no espaço do Fourier, $\mathbf{u}_b \cdot \hat{\mathbf{p}} = u_b \mu$.

¹ A velocidade de fluido é em geral diferente da velocidade das partículas individuais.

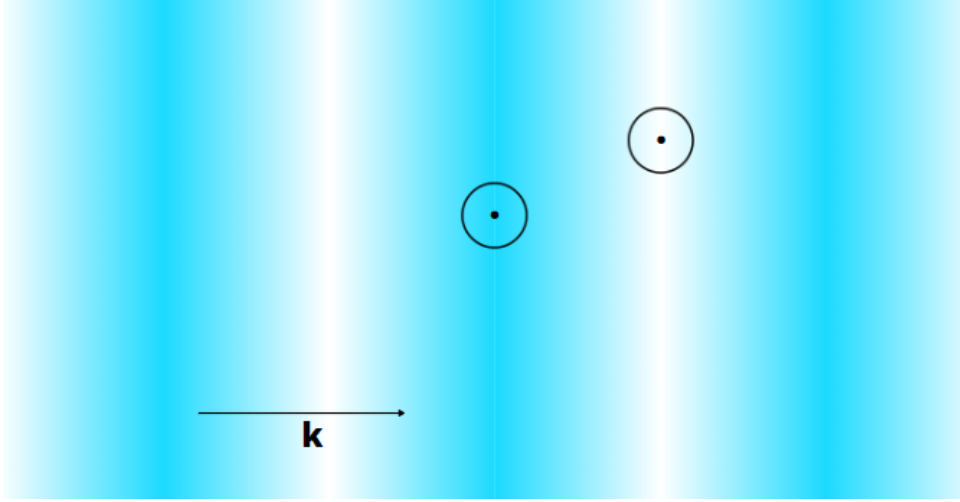


Figura 9 – Se o espalhamento Compton é eficiente, os fótons viajam muito pouco até sofrerem outra colisão. Os pontos representam observadores e os círculos representam as superfícies de último espalhamento. A temperatura nessas superfícies é praticamente uniforme, mas diferente entre si, de forma que o monopolo varia no espaço. Podemos entender a quantidade μ definida no texto observando que na figura $\Theta(k, \mu = 1)$ descreve fótons viajando na direção em que a temperatura está mudando, e $\Theta(k, \mu = 0)$ são fótons viajando na direção perpendicular ao gradiente de temperatura. Adaptado de [Dodelson e Schmidt \(2021\)](#).

Quando há velocidade de grupo de elétrons, isso gera um momento de dipolo na distribuição. Se a distribuição então pode ser caracterizada apenas por um monopolo e um dipolo, podemos tratá-la como um fluido efetivo. Essa situação é válida até a recombinação, onde o espalhamento Compton deixa de ser efetivo, e momentos de multipolo mais altos devem ser considerados.

Sobredensidades e velocidades de fluido da matéria escura e dos bárions

A derivação de equações para a matéria escura difere, em parte, dos métodos anteriores. Aqui também partiremos da equação de Boltzmann, mas como não sabemos a priori qual é a forma da função de distribuição de ordem zero, nosso ponto de partida será calcular os momentos da equação de Boltzmann para um f_c ainda desconhecido. Pela natureza da matéria escura, ela não possuirá termos de colisão, visto que só interage gravitacionalmente. Além disso, pode ser tratada como uma partícula massiva não-relativística, o que nos permite excluir termos proporcionais a $(p/m)^2$ e de ordem mais alta.

O processo de calcular momentos da distribuição gera uma hierarquia de equações: a equação para o momento ℓ depende do momento $\ell + 1$. Integrando sobre $dp/(2\pi)$ e obtendo o momento de ordem zero, temos uma relação entre a densidade numérica n e a velocidade do fluido u , onde

$$n_c = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f_c, \quad (3.62)$$

$$u_c^i = \frac{1}{n_c} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f_c \frac{p\hat{p}^i}{E(p)}. \quad (3.63)$$

O primeiro momento estabelece a relação entre a velocidade e a dispersão de velocidades, que também aparecerá no segundo momento, e assim por diante.

Partimos da equação para partículas massivas não-relativísticas. O momento de ordem zero fica então:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f_c + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial x^i} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f_c \frac{p\hat{p}^i}{E(p)} - (H + \dot{\Phi}) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p \frac{\partial f_c}{\partial p} \\ - \frac{1}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\partial f_c}{\partial p} E(p) \hat{p}^i = 0. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Relembrando a definição de densidade numérica (3.62) e velocidade (3.63), vemos que a equação de momento zero é a equação de continuidade:

$$\frac{\partial n_c}{\partial t} + \frac{1}{a} \frac{\partial (n_c u_c^i)}{\partial x^i} + 3(H + \dot{\Phi}) n_c = 0, \quad (3.65)$$

onde o último termo vem da diluição causada pela expansão do espaço.

Podemos incluir as perturbações na matéria escrevendo

$$n_c(\mathbf{x}, t) = \bar{n}_c(t) [1 + \delta_c(\mathbf{x}, t)], \quad (3.66)$$

onde $\bar{n}_c(t)$ é a densidade média (homogênea) de partículas e $\delta_c(\mathbf{x}, t) = \delta\rho_c/\rho_c$ descreve as sobredensidades. Retendo os termos de ordem zero em (3.65):

$$\frac{\partial \bar{n}_c}{\partial t} + 3H\bar{n}_c = 0, \quad (3.67)$$

de onde obtemos que $\bar{n}_c \propto a^{-3}$, como dito no capítulo 2. Para os termos de primeira ordem, temos

$$\frac{\partial \delta_c}{\partial t} + \frac{1}{a} \frac{\partial u_c^i}{\partial x^i} + 3\dot{\Phi} = 0. \quad (3.68)$$

Vamos extrair também o primeiro momento da equação de Boltzmann, para obter uma segunda equação ligando δ_c e \mathbf{u}_c :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} f_c \frac{p \hat{p}^j}{E} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial x^i} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} f_c \frac{p^2 \hat{p}^i \hat{p}^j}{E^2} - (H + \dot{\Phi}) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\partial f_c}{\partial p} \frac{p^2 \hat{p}^j}{E} \\ - \frac{1}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\partial f_c}{\partial p} p \hat{p}^i \hat{p}^j = 0. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Após algumas integrações por partes e desprezando o termo proporcional a $(p/E)^2$, chegamos ao primeiro momento da equação de Boltzmann. O significado prático de eliminar o termo citado acima é admitir o segundo momento como nulo, de forma que não há contribuição da dispersão de velocidades. Aplicando novamente a equação para n_c e a solução para \bar{n}_c e mantendo apenas os termos de primeira ordem, chegamos a:

$$\frac{\partial u_c^j}{\partial t} + H u_c^j + \frac{1}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^j} = 0. \quad (3.70)$$

Os bárions também são partículas não-relativísticas e com pequeno caminho médio, logo podemos tratá-los como fluidos como no caso da matéria escura, com a diferença de que temos de levar em conta os termos de colisão pela interação com os fótons. Ao obter o momento de ordem zero, chegamos exatamente à mesma forma da equação para a matéria escura no lado esquerdo. No lado direito, se quisermos saber qual a forma da equação apenas durante e após a recombinação, podemos zerar o momento de ordem zero do termo de colisão, que representaria um termo de fonte na equação da continuidade. As colisões nessa época preservam o número de prótons e elétrons.

Para encontrar o momento de primeira ordem, tiramos separadamente os momentos para os elétrons e prótons e somamos. Os termos multiplicados pela massa do próton dominarão, de forma que

$$m_p \frac{\partial (n_b u_b^j)}{\partial t} + 4H m_p n_b u_b^j + \frac{m_p n_b}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^j} = F^j(\mathbf{x}, t). \quad (3.71)$$

onde $F^j(\mathbf{x}, t)$ é o primeiro momento do termo de colisão para os fótons. Essa força representa a conservação de momento nas colisões fóton-elétron. Assumindo que a força esteja na direção do vetor de onda \mathbf{k} no espaço de Fourier e contando ambos os estados de spin do elétron, multiplicamos o termo de colisão por $-2p\mu$:

$$\hat{k}_i F^j(\mathbf{x}, t) = n_e \sigma_T \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (-2p\mu) \left(-p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} \right) (\Theta_0 - \Theta(\mu) + \mu u_b). \quad (3.72)$$

Agora, como μ tem dentro de si um cosseno, podemos transformar a integral em $d\Omega$ numa integral em $d\mu d\phi$ e escrever

$$\hat{k}_i F^j(\mathbf{x}, t) = 2n_e \sigma_T \int_0^\infty \frac{dp}{(2\pi)^3} 2(2\pi) p^4 \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{2} \mu (\Theta_0 - \Theta(\mu) + \mu u_b), \quad (3.73)$$

onde podemos reconhecer a integração em p como $-2\rho_\gamma$, e vamos definir o dipolo como

$$\Theta_1(k, \eta) = i \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{2} \mu \Theta(\mu, k, \eta), \quad (3.74)$$

a profundidade ótica como

$$\tau(\eta) = \int_0^{\eta_0} d\eta' n_e \sigma_T a, \quad (3.75)$$

e o tempo conforme η de forma que $d\eta = \frac{dt}{a}$.

Fazendo a integração, que depende dos polinômios de Legendre, trocando a variável temporal para o tempo conforme η e passando ao espaço de Fourier, temos

$$u'_b + \frac{a'}{a} u_b + ik\Psi = \tau' \frac{4\rho_\gamma}{3\rho_b} (3i\Theta_1 + u_b). \quad (3.76)$$

3.3.1 Conjunto de equações

Essa abordagem estatística e perturbativa nos levou ao conjunto de equações abaixo. Nossa aproximação tratou as inomogeneidades como teoria de perturbação de primeira ordem, em virtude das perturbações nas grandes escalas serem suficientemente pequenas. Enquanto as perturbações na radiação cósmica de fundo são como uma foto das perturbações na época da criação da CMB, quando eram menores, perturbações na matéria eventualmente cresceram e se tornam não lineares, como no colapso e formação de galáxias. Essas escalas não lineares são abordadas pelos cosmólogos e astrofísicos com as ferramentas adequadas, que fogem do escopo dessa dissertação.

Fótons:

$$\Theta' + ik\mu\Theta = -\Phi' - ik\Psi - \tau' \left[\Theta_0 - \Theta + \mu u_b - \frac{1}{2} \mathcal{P}_2(\mu) \Pi \right], \quad (3.77)$$

$$\Pi = \Theta_2 + \Theta_{P,2} + \Theta_{P,0}. \quad (3.78)$$

Os termos extras aparecem aqui para incluir o que deixamos fora anteriormente, como a dependência angular do espalhamento e o fato de que a temperatura também está acoplada ao campo de polarização Θ_p , que é alimentado pelo quadrupolo Θ_2 . Quando os fótons não mais são bem aproximados como um fluido devido à diminuição da eficiência do espalhamento de Compton, temos que calcular os outros multipolos. A estratégia a partir daqui é parecida com a idéia de tirar momentos da equação de Boltzmann, mas na expansão em multipolos a tática é multiplicar a equação por $\mathcal{P}_\ell(\mu)$ e integrar em μ . Assim como o momento ℓ tinha conexão com o momento $\ell + 1$, aqui surge a relação

$$\Theta'_l + \frac{k}{(-i)^{l+1}} \int_1^1 \frac{d\mu}{2} \mu \mathcal{P}_l(\mu) \Theta(\mu) = \tau' \Theta_l \quad \text{para } (l > 2), \quad (3.79)$$

$$\Theta_l(k, \eta) = \frac{1}{(-i)^l} \int_1^1 \frac{d\mu}{2} \mathcal{P}_l(\mu) \Theta(\mu, k\eta). \quad (3.80)$$

Matéria escura:

$$\delta'_c + iku_c = -3\Phi'. \quad (3.81)$$

Recordando os passos anteriores, lembramos que essa equação vem do momento zero da equação de Boltzmann, que nos levou a uma generalização da equação da continuidade. Após subtrair os termos referentes ao Universo homogêneo, ficamos com a equação da continuidade para as perturbações. A variação com relação ao tempo conforme da sobredensidade $\delta_c(k, \eta)$ depende do gradiente da velocidade $u_c(k, \eta)$ e do efeito local que $\Phi'(k, \eta)$ causa (recorde que $H + \dot{\Phi}$ é a taxa local de expansão). A variação de velocidade é afetada pela expansão de Hubble, que vai “diluir” o espaço, e também é afetada pelo gradiente do potencial Ψ .

$$u'_c + \frac{a'}{a} u_c = -ik\Psi. \quad (3.82)$$

Bárions:

$$\delta'_b + iku_b = -3\Phi'. \quad (3.83)$$

$$u'_b + \frac{a'}{a} u_b = -ik\Psi + \tau' \frac{4\rho_\gamma(\eta)}{3\rho_b(\eta)} (u_b + 3i\Theta_1). \quad (3.84)$$

A equação para variação do momento depende da taxa de colisão $n_e\sigma_T$ e do momento médio transferido em uma colisão, da ordem de $\rho_\gamma\Theta_1$. Essa densidade de força está sendo atenuada pela densidade de energia dos bárions $\rho_b = m_p\bar{n}_n$. Os fótons interagem com os elétrons ², e os elétrons estão fortemente ligados ao núcleo. Essa ligação torna a tarefa de mover elétrons muito mais difícil.

Neutrinos:

Para épocas após o desacoplamento dos neutrinos, podemos dizer que eles interagem apenas gravitacionalmente, e partimos da equação de Boltzmann para partículas massivas e sem termo de colisão.

² e com os prótons, mas a variação de momento é inexpressiva.

$$\mathcal{N}' + ik\mu \frac{p}{E_{nu}} \mathcal{N} - Hp \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial p} = -\Phi' - ik\mu \frac{E_\nu}{p} \Psi. \quad (3.85)$$

Essa equação depende de fatores de p/E_ν , que são iguais à unidade quando os neutrinos ainda são relativísticos. No entanto, após deixarem de ser relativísticos, neutrinos em diferentes partes da distribuição se movem de forma diferente, e agora nossa equação permite a derivação em p (terceiro termo) que ignoramos para os fótons. Além disso, precisamos de tantas funções distribuição quanto o número existente de estados massivos do neutrino. Interessante notar que até a recombinação, podemos ignorar a dependência com p e chegamos na mesma forma da equação para os fótons, tirando o termo de colisão.

3.4 Equações de Einstein para perturbações escalares

Para avaliar como as perturbações na distribuição de partículas afetam o campo gravitacional, vamos também expandir linearmente as equações de campo em torno da solução de ordem zero, até termos de primeira ordem. A forma mais geral para uma métrica levemente perturbada é

$$g_{00}(t, \mathbf{x}) = -1 + h_{00}(t, \mathbf{x}), \quad (3.86)$$

$$g_{0i}(t, \mathbf{x}) = a(t)h_{0i}(t, \mathbf{x}) = a(t)h_{i0}(t, \mathbf{x}), \quad (3.87)$$

$$g_{ij}(t, \mathbf{x}) = a^2(t)[\delta_{ij} + h_{ij}(t, \mathbf{x})]. \quad (3.88)$$

A perturbação na coordenada temporal é invariante ao sofrer uma rotação espacial, e pode ser escrita em termos de uma função escalar A .

$$h_{00} = -2A. \quad (3.89)$$

Podemos decompor o tri-vetor em partes longitudinais e transversas usando uma função escalar B e um vetor B_i . No espaço de Fourier:

$$h_{0i}(t, \mathbf{k}) = -ik_i B(t, \mathbf{k}) - B_i(t, \mathbf{k}) \text{ com } k^i B_i = 0. \quad (3.90)$$

Por último, todas as formas de criar um 3-tensor podem estar presentes:

$$h_{ij} = 2D\delta_{ij} + 2k_i k_j E + ik_i V_j + ik_j V_i + h_{ij}^{TT}. \quad (3.91)$$

Dos dez graus de liberdade presentes nas equações de campo, 4 estão nas funções escalares A, B, D, E , quatro estão nos vetores B_i, V_i , e duas nas perturbações tensoriais

h_{ij}^{TT} . Para resolver as equações, devemos escolher um particular sistema de coordenadas, ou calibre. Interessante notar, porém, que é sempre possível fazer uma mudança de coordenadas de forma a eliminar dois graus de liberdade nas perturbações escalares e dois graus de liberdade nas perturbações vetoriais. As perturbações tensoriais são invariantes de calibre em ordem linear.

Quando em ordem linear, podemos decompor as perturbações escalares, vetoriais e tensoriais (na verdade estamos nos referindo a quantidades espaciais: 3-escalares, 3-vetores e 3-tensores) no espaço de Fourier e evoluir cada tipo separadamente, com a garantia de que modos de um tipo não afetam outros modos (Lifshitz, 2017).

O uso da Relatividade Geral, necessário para tratar perturbações muito grandes enquanto elas ainda não adentraram o horizonte, ocasionou uma discussão sobre liberdade de calibre, que rendeu muitas discussões e equívocos desde então (Press; Vishniac, 1980). As primeiras discussões sobre perturbações feitas por Lifshitz (1946), e depois Lifshitz e Khalatnikov (1963), foram construídas usando o “calibre síncrono”. A liberdade de redefinir as hipersuperfícies de tempo constante e de redefinir as coordenadas espaciais levava a alguns problemas intrínsecos como singularidades de coordenadas e modos de perturbação que surgiam apenas pelo uso do calibre, e que não eram perturbações reais. Diversos autores apontaram esse problema advindo da escolha de calibre, como Hawking (1966), Olson (1976), Harrison (1967) e Sakai (1969). Como forma de resolver esse problema, Bardeen (1980) e, mais tarde Kodama e Sasaki (1984), formularam uma abordagem completa em teoria de perturbações usando apenas invariantes de calibre. Outro calibre famoso na literatura é o “calibre Newtoniano conforme”, que difere das conhecidas variáveis de Bardeen por apenas um sinal (Mukhanov; Feldman; Brandenberger, 1992).

Vamos calcular as perturbações para a seguinte métrica:

$$g_{00}(\mathbf{x}, t) = -1 - 2\Psi(\mathbf{x}, t), \quad (3.92)$$

$$g_{0i}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (3.93)$$

$$g_{ij}(\mathbf{x}, t) = a^2(t)\delta_{ij}[1 + 2\Phi(\mathbf{x}, t)]. \quad (3.94)$$

Os símbolos de Christoffel até primeira ordem já foram calculados anteriormente. Logo nos resta obter o tensor de Ricci e o escalar R :

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{k^2}{a^2}\Psi - 3\Phi_{,00} + 3H(\Psi_{,0} - 2\Phi_{,0}), \quad (3.95)$$

$$R_{ij} = \delta_{ij} \left[(2a^2H^2 + a\ddot{a})(1 + 2\Phi - 2\Psi) + a^2H(6\Phi_{,0} - \Psi_{,0}) + a^2\Phi_{,00} + k^2\Phi \right] + k_ik_j(\Phi + \Psi), \quad (3.96)$$

o que implica

$$\begin{aligned}
R = & (-1 + 2\Psi) \left[-3\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{k^2}{a^2}\Psi - 3\Phi_{,00} + 3H(\Psi_{,0} - 2\Phi_{,0}) \right] \\
& + \frac{1 - 2\Phi}{a^2} \left[(6a^2H^2 + 3a\ddot{a})(1 + 2\Phi - 2\Psi) + 3a^2H(6\Phi_{,0} - \Psi_{,0}) \right. \\
& \left. + 3a^2\Phi_{,00} + 3k^2\Phi + k^2(\Phi + \Psi) \right]. \tag{3.97}
\end{aligned}$$

Os termos de primeira ordem em R são:

$$\delta R = -12\Psi \left(H^2 + \frac{\ddot{a}}{a} \right) + \frac{2k^2}{a^2}\Psi + 6\Phi_{,00} - 6H(\Psi_{,0} - 4\Phi_{,0}) + \frac{4k^2\Phi}{a^2}. \tag{3.98}$$

Com isso, podemos calcular $G^\mu{}_\nu$. Começamos por

$$G^0{}_0 = (-1 + 2\Psi)R_{00} - \frac{R}{2}, \tag{3.99}$$

onde

$$\delta G^0{}_0 = -6H\Phi_{,0} + 6H^2\Psi - \frac{2k^2\Phi}{a^2}. \tag{3.100}$$

Relembrando a definição do tensor energia-momento e o cálculo da função de distribuição até primeira ordem, vamos calcular a contribuição de cada componente. Para bárions e matéria escura,

$$T^0{}_m |_{m} = -\rho_m(1 + \delta_m), \tag{3.101}$$

com $\rho_m\delta_m = \rho_c\delta_c + \rho_b\delta_b$ e $\rho_mu_m = \rho_cu_c + \rho_bu_b$.

Para fótons e neutrinos (não massivos),

$$T^0{}_r |_{r} = -\rho_r(1 + 4\Theta_{r,0}), \tag{3.102}$$

com $\rho_r\Theta_{r,0} = \rho_\gamma\Theta_0 + \rho_\nu\mathcal{N}_0$ e $\rho_r\Theta_{r,1} = \rho_\gamma\Theta_1 + \rho_\nu\mathcal{N}_1$.

Assim, temos a equação de Poisson relativística para perturbações em um espaço em expansão:

$$k^2\Phi + \frac{3a'}{a} \left(\Phi' - \Psi \frac{a'}{a} \right) = 4\pi G a^2 (\rho_m\delta_m + 4\rho_r\Theta_{r,0}). \tag{3.103}$$

Podemos obter uma segunda equação para Ψ e Φ usando a parte espacial longitudinal e sem traço do tensor de Einstein, obtida ao contrair G_j^i com $\hat{k}^i\hat{k}^j - \delta_j^i/3$. Igualando à parte longitudinal e sem traço do tensor energia-momento:

$$\frac{2}{3a^2}k^2(\Phi + \Psi) = \sum_s g_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{p^2\mu^2 - p^2/3}{E_s(p)} f_s(\mathbf{p}). \quad (3.104)$$

A integração mantém termos diferentes de zero apenas para as perturbações dos fótons e neutrinos, levando ao aparecimento do quadrupolo:

$$k^2(\Phi + \Psi) = -32\pi G a^2 \rho_r \Theta_{r,2}. \quad (3.105)$$

Uma relação algébrica potencialmente útil, originária da componente espaço-temporal da equação de Einstein é:

$$k^2\Phi = 4\pi G a^2 \left[\rho_m \delta_m + 4\rho_r \Theta_{r,0} + \frac{3aH}{k} (i\rho_m u_m + 4\rho_r \Theta_{r,1}) \right]. \quad (3.106)$$

Outras componentes dessa equação tensorial nos levam a equações de evolução de perturbações vetoriais, que se dissipam rapidamente sem uma fonte de novas perturbações, e equações de perturbações tensoriais, i.e., ondas gravitacionais.

3.5 O calibre síncrono

Nessa dissertação, pretendemos implementar nossas próprias equações no HI-CLASS, cujo código segue as definições e a notação de [Ma e Bertschinger \(1995\)](#), que discute o formalismo de perturbações no calibre Newtoniano conforme e no calibre síncrono. Dessa forma, é importante estar familiarizado com os dois calibres.

No calibre síncrono, o elemento ds^2 é escrito como

$$ds^2 = a^2(\tau)[-d\tau^2 + (\delta_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j], \quad (3.107)$$

onde $d\tau = dt/a(\tau)$ e a métrica perturbada pode ser decomposta em 4 termos: um traço $h = h_{ii}$; dois vetores, h_{ij}^{\parallel} e h_{ij}^{\perp} , cujas divergências são, respectivamente, longitudinal e transversa; e um termo transverso h_{ij}^T . As perturbações escalares surgem de h e h_{ij}^{\parallel} . No espaço de Fourier, com $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{k}}$, traduzimos as perturbações nos campos como

$$h_{ij}(\mathbf{x}, \tau) = \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} [\hat{\mathbf{k}}_i \hat{\mathbf{k}}_j h(\mathbf{k}, \tau) + \left(\hat{\mathbf{k}}_i \hat{\mathbf{k}}_j - \frac{\delta_{ij}}{3} \right) 6\eta(\mathbf{k}, \tau)]. \quad (3.108)$$

As equações para perturbações escalares nas equações de Einstein em primeira ordem no calibre síncrono são, em termos de $h(\mathbf{k}, \tau)$ e $\eta(\mathbf{k}, \tau)$,

$$k^2\eta - \frac{1}{2}\frac{\dot{a}}{a}\dot{h} = 4\pi Ga^2\delta T_0^0(Syn), \quad (3.109)$$

$$k^2\dot{\eta} = 4\pi Ga^2(\bar{\rho} + \bar{P})\theta(Syn), \quad (3.110)$$

$$\ddot{h} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{h} - 2kr\eta = -8\pi Ga^2\delta T_i^i(Syn), \quad (3.111)$$

$$\ddot{h} + 6\ddot{\eta} + 2\frac{\dot{a}}{a}(\dot{h} + 6\dot{\eta}) - 2k^2\eta = -24\pi Ga^2(\bar{\rho} + \bar{P})\sigma(Syn), \quad (3.112)$$

onde aqui o ponto significa derivada com relação ao tempo conforme η . Definimos as quantidades $(\bar{\rho} + \bar{P})\theta = ik^i\delta T_j^0$, onde para o caso de um fluido, $\theta = ik^j v_j$ é a divergência da velocidade do fluido, e $(\bar{\rho} + \bar{P})\sigma = -\left(\hat{\mathbf{k}}_i\hat{\mathbf{k}}_j - \frac{\delta_{ij}}{3}\right)\Sigma_j^i$, com $\Sigma_j^i = T_j^i - \delta_j^i T_k^k/3$.

O tensor energia momento até a primeira ordem é

$$T_0^0 = -(\bar{\rho} + \delta\rho), \quad (3.113)$$

$$T_i^0 = (\bar{\rho} + \bar{P})v_i, \quad (3.114)$$

$$T_j^i = (\bar{P} + \delta P)\delta_j^i + \Sigma_j^i, \quad \Sigma_i^i = 0. \quad (3.115)$$

Para esse calibre, temos o seguinte conjunto equações de perturbações de densidade de matéria

$$\dot{\delta}_c = -\frac{1}{2}\dot{h}, \quad (3.116)$$

$$\dot{\delta}_b = -\theta_b - \frac{1}{2}\dot{h}, \quad (3.117)$$

$$\dot{\theta}_b = -\frac{\dot{a}}{a}\theta_b + c_s^2 k^2 \delta_b + \frac{4\bar{\rho}_\gamma}{\bar{\rho}_b} an_e \sigma_T (\theta_\gamma - \theta_b). \quad (3.118)$$

Definimos a velocidade peculiar de grupo da matéria escura como sendo nula nesse calibre.

Relação com o Calibre Newtoniano conforme

O calibre Newtoniano conforme é construído para conter apenas as perturbações escalares, através dos potenciais Ψ e Φ . O elemento de linha que representa esse calibre em [Ma e Bertschinger \(1995\)](#) é

$$ds^2 = a^2(\tau)[-(1 + 2\Psi)d\tau^2 + (1 - 2\Phi)dx^i dx_i]. \quad (3.119)$$

As perturbações nas equações de Einstein são

$$k^2\Phi + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\dot{\Phi} + \frac{\dot{a}}{a}\Psi\right) = 4\pi Ga^2 T_0^0(Con), \quad (3.120)$$

$$k^2\left(\dot{\Phi} + \frac{\dot{a}}{a}\Psi\right) = 4\pi Ga^2(\bar{\rho} + \bar{P})\theta(Con), \quad (3.121)$$

$$\ddot{\Phi} + \frac{\dot{a}}{a}(\dot{\Psi} + 2\dot{\Phi}) + \left(2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)\Psi + \frac{k^2}{3}(\Phi - \Psi) = \frac{4\pi Ga^2}{3}\delta T_i^i(Con), \quad (3.122)$$

$$k^2(\Phi - \Psi) = 12\pi Ga^2(\bar{\rho} + \bar{P})\sigma(Con). \quad (3.123)$$

Para esse calibre, temos o seguinte conjunto de equações de perturbações de densidade de matéria

$$\dot{\delta}_c = -\theta_c + 3\dot{\Phi}, \quad (3.124)$$

$$\dot{\theta}_c = -\frac{\dot{a}}{a}\theta_c + k^2\Psi, \quad (3.125)$$

$$\dot{\delta}_b = -\theta_b + 3\dot{\Phi}, \quad (3.126)$$

$$\dot{\theta}_b = -\frac{\dot{a}}{a}\theta_b + c_s^2 k^2 \delta_b + \frac{4\bar{\rho}_\gamma}{\bar{\rho}_b} a n_e \sigma_T (\theta_\gamma - \theta_b) + k^2\Psi. \quad (3.127)$$

Os dois calibres estão relacionados por

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{k}, \tau) &= \frac{1}{2k^2} \left[\ddot{h}(\mathbf{k}, \tau) + 6\ddot{\eta}(\mathbf{k}, \tau) + \frac{\dot{a}}{a}\dot{h}(\mathbf{k}, \tau) + 6\frac{\dot{a}}{a}\dot{\eta}(\mathbf{k}, \tau) \right], \\ \Phi(\mathbf{k}, \tau) &= \eta(\mathbf{k}, \tau) - \frac{1}{2k^2} \frac{\dot{a}}{a} [\dot{h}(\mathbf{k}, \tau) + 6\dot{\eta}(\mathbf{k}, \tau)]. \end{aligned} \quad (3.128)$$

4 Evolução das perturbações escalares

4.1 Função de correlação e espectro de potência da matéria

Um ponto importante a ser tratado é o elo entre a predição teórica e a informação experimental. A maneira que temos de obter alguma informação útil sobre a distribuição de fontes astrofísicas que permeiam o Universo é através da descrição estatística. A informação mais simples que podemos obter de um volume V com N pontos é a densidade média de pontos $\rho_0 = \frac{N}{V}$. Para discernir entre as várias configurações possíveis com mesmo ρ_0 , partimos em busca de caracterizar o espaço com outras medidas estatísticas.

Selecionando do volume V um elemento de volume dV_b com número médio de partículas $\rho_0 dV_b$, e um elemento de volume dV_a com número médio de partículas $\rho_0 dV_a$, separado de dV_b por uma distância $r_{ab} > 0$ podemos calcular o número médio de pares de partículas

$$\langle n_a n_b \rangle = \tilde{N}_{ab} = \rho_0^2 dV_a dV_b [1 + \xi(r_{ab})], \quad (4.1)$$

onde $\xi(r_{ab})$ é a função de correlação de dois pontos a e b .

Podemos fazer uma média no ensemble, ou seja, gerar a distribuição muitas vezes e obter a média de pares existentes sempre nos mesmos elementos de volume. Como só temos acesso a um universo, no entanto, outra forma de fazer essa média é tomar as médias usando diferentes locais de uma mesma realização, tão distantes que podem ser considerados decorrelacionados. Nem sempre essas duas formas coincidirão seus resultados. A diferença no valor da função de correlação por esses dois métodos é altamente afetada pelo nível de inomogeneidade da distribuição, e depende muito da qualidade do levantamento de distribuição de matéria (Martinez; Saar, 2001).

No caso de uma distribuição randômica, $\xi(r_{ab}) = 0$, ou seja, $\tilde{N}_{ab} = \rho_0^2 dV_a dV_b$. Espera-se nesse caso que o número médio de pares seja o produto do número médio de partículas, pois não se espera correlação.

O contraste de densidade local no volume dV_b é $\delta(r_b) = n_b / (\rho_0 dV_b) - 1$. Se houver uma correlação na forma como as partículas estão distribuídas, então ξ pode ser identificado como uma média espacial do produto dos contrastes de densidade:

$$\xi(r_{ab}) = \frac{\tilde{N}_{ab}}{\rho_0^2 dV_a dV_b} - 1 = \langle \delta(r_a) \delta(r_b) \rangle. \quad (4.2)$$

Se tomarmos a média usando diferentes amostragens do nosso Universo, podemos

escrever

$$\xi(\mathbf{r}) = \frac{1}{V} \int \delta(\mathbf{y})\delta(\mathbf{y} + \mathbf{r})dV_y. \quad (4.3)$$

Se o sistema é estatisticamente homogêneo, $\xi(\mathbf{r})$ depende apenas da separação $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a$ e não de onde escolhermos \mathbf{r}_a e \mathbf{r}_b . Além disso, se não temos motivo para pensar que existe uma correlação direcional, podemos pensar apenas em quantas partículas vizinhas a uma distância $r = |\mathbf{r}|$ de outra partícula temos em média.

Para fins de simplificação, então, escolhemos uma única partícula no volume dV_a , de modo que $\rho_0 dV_a = 1$, o que faz com que o número de pares seja:

$$\tilde{N}_b = \rho_0 dV_b [1 + \xi(\mathbf{r}_b)], \quad (4.4)$$

tornando

$$\xi(\mathbf{r}) = \frac{\tilde{N}(r)}{\rho_0 dV} - 1 = \frac{\langle \rho_c \rangle}{\rho_0} - 1, \quad (4.5)$$

onde $\langle \rho_c \rangle dV$ é o número médio de partículas a uma distância r de uma partícula qualquer. Perceba que se $\xi(\mathbf{r})$ é maior do que zero, a densidade média de partículas que ficam a uma distância r umas das outras é maior do que a densidade média no volume total.

Na realidade, na aplicação em dados reais desta análise estatística, por problemas de contorno e seleção dos objetos de catálogos reais, é mais fácil simular um catálogo artificial aleatório com as mesmas bordas e mesmo critério de seleção e comparar os dois, de forma que, por exemplo

$$\xi = \frac{DD}{DR} - 1, \quad (4.6)$$

onde DD é o número de galáxias que um observador de uma galáxia real encontra a uma distância r dele, e DR a contagem no catálogo randômico. Uma descrição didática sobre esses estimadores, embora agora antiga, se encontra no livro “Statistics of the galaxy distribution” ([Martinez; Saar, 2001](#)).

Chamamos uma determinada distribuição ou campo randômico de Gaussiano quando a função de correlação de dois pontos descreve completamente as propriedades estatísticas do campo. Podemos generalizar o conceito de função de correlação pensando em uma função de correlação de n pontos. Por exemplo, para 3 pontos, temos:

$$\langle n_a n_b n_c \rangle = \rho_0^3 dV_a dV_b dV_c (1 + \xi_{ab} + \xi_{bc} + \xi_{ac} + \zeta_{abc}), \quad (4.7)$$

$$\zeta(r_a, r_b, r_c) = \langle \delta(r_a)\delta(r_b)\delta(r_c) \rangle = \frac{\langle n_a n_b n_c \rangle}{\rho_0^3 dV_a dV_b dV_c} - \xi_{ab} - \xi_{bc} - \xi_{ac} - 1. \quad (4.8)$$

Um campo Gaussiano teria $\zeta_{abc} = 0$, bem como todas as funções correlação de ímpar para $n > 2$ pontos da distribuição.

No espaço de Fourier, chamamos uma função quadrática de uma variável perturbativa de “espectro de potência”. Se a função for uma composição de duas variáveis chamamos de espectro de correlação cruzada. Usamos o espaço de Fourier porque, no regime linear, os modos ortonormais em que as perturbações são decompostas evoluem independentemente.

Para um campo de densidade $\delta(x)$, sua transformada de Fourier é

$$\delta_k = \frac{1}{V} \int \delta(x) e^{-ik \cdot x} dV. \quad (4.9)$$

O espectro de potência é definido como

$$P(k) = V |\delta_k|^2 = V \delta_k \delta_k^*. \quad (4.10)$$

Podemos reconhecer o espectro de potência como a versão no espaço de Fourier da função de correlação definida na equação 3.9:

$$P(k) = \frac{1}{V} \int \delta(x)\delta(y) e^{-ik \cdot (x-y)} dV_x dV_y = \int \xi(r) e^{-ik \cdot r} dV. \quad (4.11)$$

Assumindo homogeneidade, ou seja, $\mathbf{r}_{ab} = \mathbf{r}$, e isotropia através de $\xi(\mathbf{r}) = \xi(r)$, o espectro de potência depende apenas de $k = |\mathbf{k}|$:

$$P(k) = \int \xi(r) r^2 dr \int_0^\pi e^{-ikr \cos \theta} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi \int \xi(r) \frac{\sin kr}{kr} r^2 dr. \quad (4.12)$$

Se fizermos médias no ensemble, mantemos os volumes fixos e podemos aplicar a média apenas nas δ :

$$\begin{aligned} V \langle \delta_k \delta_{k'}^* \rangle &= \frac{1}{V} \int \langle \delta(x)\delta(y) \rangle e^{-ik \cdot x + ik' \cdot y} dV_x dV_y \\ &= \frac{1}{V} \int \langle \delta(y)\delta(y+r) \rangle e^{-i(k-k') \cdot y - ik \cdot r} dV_r dV_y \\ &= \frac{1}{V} \int \xi(r) e^{-i(k-k') \cdot y - ik \cdot r} dV_r dV_y \\ &= \frac{1}{V} \int e^{-i(k-k') \cdot y} dV_y \int \xi(r) e^{-ik \cdot r} dV_r \\ &= \frac{(2\pi)^3}{V} P(k) \delta_D(k - k'). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Note que num mapeamento finito, a equação 4.12 implica $P(0) = 0$, que é um comportamento esperado. O espectro tende a zero em largas escalas. Na equação 4.13, a delta de Dirac surge do fato de que assumimos homogeneidade na distribuição, o que vai se refletir em descorrelação de diferentes comprimentos de onda.

Para conseguir informações sobre campos contínuos como o potencial gravitacional ou o contraste de densidade de matéria escura, nosso único acesso é via uma distribuição discreta que será nosso traçador: a distribuição de galáxias. Cabe aqui introduzir o conceito de função janela. Uma função janela tem a propriedade de selecionar objetos numa certa faixa de valores ao redor de um ponto. Vamos usar essa propriedade para construir um campo de densidades dependente de escala. Uma discussão mais elaborada se encontra nas notas de formação de estruturas do professor [David Tong \(2019\)](#).

Para cada ponto \mathbf{x} do espaço, podemos definir a sobredensidade em uma esfera de raio R em torno de \mathbf{x} como

$$\delta(\mathbf{x}, R) = \int d^3x' W(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(\mathbf{x}'), \quad (4.14)$$

onde a função janela “top hat” $W(\mathbf{x})$ é $1/V$ quando $0 < x < R$ e zero quando $x > R$. No espaço de Fourier,

$$\delta(\mathbf{k}, R) = \tilde{W}(\mathbf{k}, R) \delta(\mathbf{k}), \quad (4.15)$$

$$\tilde{W}(\mathbf{k}, R) = \frac{3}{(kR)^3} (\sin kR - kR \cos kR). \quad (4.16)$$

Se assumirmos que a distribuição de galáxias segue uma distribuição de Poisson, o espectro de potência da matéria vai possuir um termo de ruído independente de escala $P_n = 1/\bar{n}$ que vem da distribuição poissonica. Esse termo de ruído é o espectro de potência de uma distribuição com nenhuma correlação, ou seja, a localização das galáxias é randômica. Esse tipo de “ruído branco” é esperado para valores baixos de k , ou seja, para largas escalas, onde as densidades tendem a ser mais homogêneas.

A variância da distribuição $\sigma_R^2 = \langle \delta^2(\mathbf{k}, R) \rangle$ no espaço de Fourier é

$$\sigma_R^2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dk k^2 \tilde{W}^2(kR) P(k). \quad (4.17)$$

Experimentalmente, o que se mede é o desvio padrão σ_R na faixa de $R \sim 8h^{-1}$ Mpc. Essa faixa de tamanho é particularmente povoada por aglomerados de galáxias, e valores altos de σ_8 implicam em mais flutuações, podendo indicar possíveis diferenças na previsão de formação de estruturas nessa escala.

4.2 Surgimento de perturbações na era inflacionária

A questão mais evidente para a necessidade da inflação surgiu da CMB ser isotrópica, sugerindo a termalização de regiões que não possuem, e não possuíram no momento da recombinação, conexão causal (Guth, 1981), (Sato, 1981). O segundo problema é que na taxa calculada de expansão, deveríamos detectar vários fósseis remanescentes do Universo primordial, incluindo monopolos magnéticos, que são subprodutos necessários na quebra de simetria em várias teorias de unificação. Um outro problema vem do fato de que o Universo deve ser forçado a ter condições iniciais muito específicas para manter o Universo plano.

Uma maneira de quantificar o problema da causalidade é definindo o horizonte comóvel

$$\eta(a) = \int_0^a d \ln a' \frac{1}{a'H'}. \quad (4.18)$$

O raio de Hubble comóvel $1/aH$ é a distância aproximada que a luz consegue viajar no tempo em que o fator de escala aumenta por um fator de e . Se o Universo é dominado por matéria ou radiação, o raio de Hubble comóvel está sempre aumentando. Se houvesse uma época em que $(aH)^{-1}$ decrescesse, o que corresponde a uma expansão acelerada, regiões que não estavam em contato causal na época da recombinação poderiam ter estado no passado.

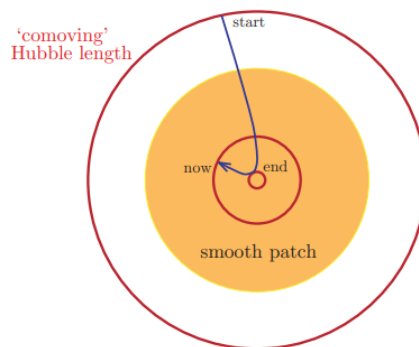


Figura 10 – Variação do tamanho do raio de Hubble comóvel desde o começo da inflação até atualmente. Todas as escalas que temos hoje dentro do horizonte já estiveram em contato causal no início da inflação. A expansão do espaço fez com que essas escalas saíssem do horizonte de Hubble, e após o final da inflação e o Universo se expandir desaceleradamente, essas escalas puderam “alcançar” o horizonte novamente. Fonte: Baumann (2009).

A figura 10 evidencia o cenário inflacionário necessário. Em algum momento no início da inflação, todas as escalas de interesse hoje estavam bem dentro do horizonte, no momento em que o raio de Hubble comóvel era consideravelmente grande. Lugares

distantes que hoje estão entrando em contato causal já estiveram em contato no passado. Para que o raio comóvel de Hubble no início da inflação fosse maior do que ele é hoje, a inflação deve ter aumentado o fator de escala por um fator $\geq e^{62}$.

Ao final da inflação, o Universo é bem homogêneo. A substância que desencadeou a inflação e que permeia todo o espaço vai então decair em partículas ordinárias e termalizar (Kazanas, 1980), (Tanabashi et al., 2018b). Por que este fluido inflacionário está distribuído de uma forma próxima da homogeneidade, a temperatura assim o será também. A forma das perturbações surge do fato da inflação ser causada por um campo escalar com potencial tipo *slow-roll*, do tipo da figura 11. Fazendo um tratamento de quantização do campo escalar, transformamos o campo em uma série de osciladores harmônicos. No espaço de Minkowski, os operadores de criação e aniquilação terão evolução temporal proporcional a combinações de valores positivos e negativos de uma mesma frequência, fazendo com que o valor esperado do vácuo seja o mesmo em qualquer lugar, e não há criação real de partículas (ver Dodelson e Schmidt (2021), capítulo 7 para uma explicação mais completa).

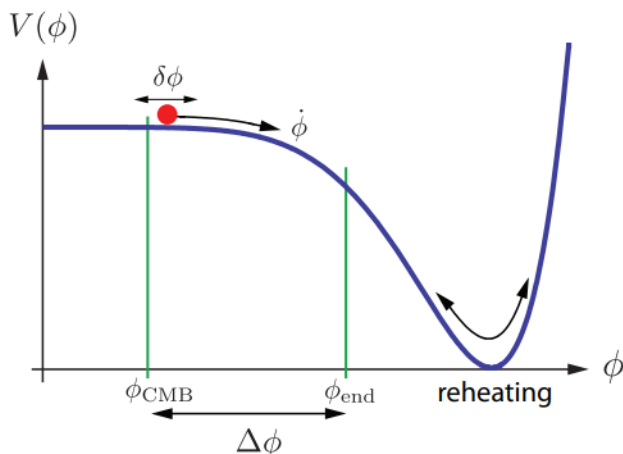


Figura 11 – Potencial do tipo “slow-roll” (Linde, 1982), (Albrecht; Steinhardt, 1982) capaz de causar a era inflacionária e as perturbações do fundo. Fonte: Baumann (2009).

Durante as épocas de radiação e matéria, modos de perturbação de número de onda comóvel k evoluem de $\frac{1}{k} \gg \frac{1}{aH}$ para $\frac{1}{k} < \frac{1}{aH}$. Assim, um modo adentra o horizonte quando se torna uma perturbação observável para um observador vivendo no Universo, passando de $k \ll aH$ para $k \gtrsim aH$. Por causa do comportamento evidenciado na figura 10, o comportamento oposto deve acontecer na inflação. Um modo deve sair do horizonte ao passar de $k \gg aH$ para $k \ll aH$. A evolução de um modo k genérico é vista na figura 12. O horizonte comóvel pode ser usado como uma escala de tempo. Podemos redefinir por conveniência o horizonte comóvel em termos de t , para que $\eta = 0$ no final da inflação:

$$\eta(t) = \int_{t_e}^t \frac{dt'}{a(t')}. \quad (4.19)$$

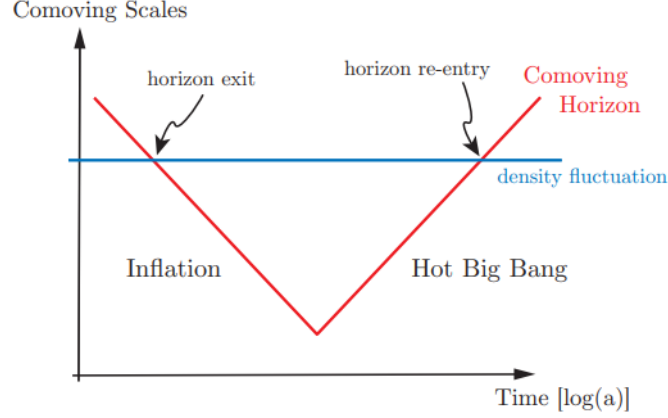


Figura 12 – Na época da inflação, $\eta = \frac{-1}{aH}$, enquanto que na era da radiação, $\eta = \frac{1}{aH}$. Uma perturbação de determinado tamanho comóvel sai do horizonte na época da inflação, reentrando no horizonte numa época posterior. Fonte: [Baumann \(2009\)](#).

Esse tratamento nos permite obter as condições iniciais para a evolução das perturbações. A inflação causada por um único campo escalar com potencial do tipo slow-roll gera perturbações Gaussianas, adiabáticas e quase invariantes de escala, com índice espectral levemente menor do que 1 ([Starobinsky, 1982](#)).

4.3 Condições iniciais para a evolução de perturbações

As condições iniciais para a estrutura são gaussianas, adiabáticas e quase invariantes de escala. Durante a inflação, o Universo é composto apenas de um campo escalar uniforme com uma métrica uniforme de fundo. O campo flutua quanticamente, com a médias das flutuações igual a zero, i.e. existem regiões onde o campo é levemente maior do que a média e regiões onde o campo é levemente menor. A média do quadrado das flutuações não é zero, e veremos que ela vai variar ao longo do tempo.

Restrições impostas pela CMB mostram que as flutuações são muito próximas de ser gaussianas, como é esperado de uma perturbação que surgiu em um campo quântico livre. Outra previsão é de que uma inflação gerada por um único campo gera perturbações adiabáticas, i.e., embora diferentes lugares tenham diferentes densidades, e cada componente tenha uma densidade diferente, a densidade fracional $\delta\rho/\rho$ de cada componente é a mesma naquele ponto do espaço tempo. Essa previsão também foi confirmada pela CMB. O fato de que o espectro de potência é quase invariante de escala também é previsto

teoricamente. Um espectro em que $k^3 P_\Psi(k)$ é constante é chamado invariante de escala. Como a inflação é gerada por um campo lentamente descendo um poço de potencial, as perturbações de mais larga escala (que saíram do horizonte antes) tem uma amplitude levemente maior do que as perturbações em escalas menores.

Para calcular as flutuações, quantizamos o campo tornando-o uma soma de osciladores harmônicos para cada modo k . Num espaço de Minkowski, a evolução temporal dos operadores criação e aniquilação é uma combinação de frequências positivas e negativas, tornando o valor esperado do vácuo constante e nenhuma partícula real é produzida. Um espaço em expansão força o estado de vácuo a evoluir, criando ondas gravitacionais e perturbações no campo escalar. Há também as perturbações vetoriais, mas estas, sem uma fonte que as alimenta, decaem rapidamente.

Uma vez tendo quantizado o campo escalar, computa-se o espectro de perturbações geradas no campo pela inflação, e usando o fato de que fora do horizonte uma combinação linear de $\delta\phi$ e Ψ é conservada, podemos traduzir o espectro de $\delta\phi$ no espectro de Ψ . Uma análise da equação de conservação do tensor energia momento produz $P_{\delta\phi} = H^2/(2k^3)$. Para encontrar o espectro de Ψ , primeiro vamos definir a perturbação da curvatura

$$R(\mathbf{k}, \eta) = \frac{ik_i \delta T_0^i(\mathbf{k}, \eta) a^2 H(\eta)}{k^2} (\rho + P)(\eta) - \Psi(\mathbf{k}, \eta). \quad (4.20)$$

Bardeen argumentou que num calibre comóvel, $R = \Phi_H$, que está relacionado com a curvatura espacial, de forma que embora o espaço de fundo seja euclideo, as perturbações induzem uma curvatura que varia no espaço. Durante a inflação, R oscila até congelar quando sai do horizonte. Durante a inflação, apenas o primeiro termo é relevante, se reduzindo a $R = -\frac{aH\delta\phi}{\dot{\phi}}$. Após o reaquecimento, R continua constante fora do horizonte, se tornando $R = -\frac{3}{2}\Psi$. Isso implica que essas duas quantidades devem se igualar no limite entre os dois regimes:

$$\Psi(\text{após a inflação}) = \frac{2}{3} \frac{aH\delta\phi}{\dot{\phi}} (\text{no horizonte}), \quad (4.21)$$

$$P_\Psi(k)(\text{após a inflação}) = \frac{2}{9k^3} \left(\frac{aH^2}{\dot{\phi}} \right)^2 (\text{no horizonte}). \quad (4.22)$$

Usualmente parametrizamos o espectro de potência inicial P_R usando a seguinte expressão:

$$P_R(k) = 2\pi^2 A_s k^{-3} \left(\frac{k}{k_p} \right)^{n_s-1}, \quad (4.23)$$

onde A_s é a variância das perturbações de curvatura num intervalo logaritmico centrado em k_p , e n_s é o índice espectral.

Ma e Bertschinger calculam as condições iniciais que são utilizadas no HI-CLASS para resolver as equações diferenciais. A integração começa quando os modos k estão fora do horizonte, onde o comportamento das perturbações de densidade é dependente do calibre. Vamos calcular tudo na era de radiação, onde a densidade de energia do Universo é dominada pelos termos ρ_γ e ρ_ν . Como já foi discutido anteriormente, nessa época, $\dot{a}/a = \tau$ e todos os momentos maiores do que 2 da equação de Boltzmann podem ser descartados devido ao forte espalhamento de Thomson durante a época de acoplamento forte. Para valores pequenos de $k\tau$, encontramos soluções para a perturbação h , de onde sai que

$$h = A + B(k\tau)^{-2} + C(k\tau)^2 + D(k\tau). \quad (4.24)$$

Os modos proporcionais a A e B são não físicos e puramente dependentes do fato do calibre síncrono não fechar completamente todos os graus de liberdade, e podem ser eliminados através de uma transformação de coordenada. Os dois outros são modos crescentes, sendo que o termo proporcional a C acaba por dominar eventualmente. Usando esse modo dominante obtemos, para o calibre síncrono:

$$\delta_\gamma = -\frac{2}{3}C(k\tau)^2, \quad (4.25)$$

$$\delta_c = \delta_b = \frac{3}{4}\delta_\nu = \frac{3}{4}\delta_\gamma, \quad (4.26)$$

$$\theta_c = 0, \quad (4.27)$$

$$\theta_b = \theta_\gamma = -\frac{1}{18}C(k^4\tau^3), \quad (4.28)$$

$$\theta_\nu = \frac{23 + 4R_\nu}{15 + 4R_\nu}\theta_\gamma, \quad (4.29)$$

$$R_\nu = \frac{\bar{\rho}_\nu}{\bar{\rho}_\gamma + \bar{\rho}_\nu}, \quad (4.30)$$

$$\sigma_\nu = \frac{4C(k\tau)^2}{45 + 12R_\nu}, \quad (4.31)$$

$$h = C(k\tau)^2, \quad (4.32)$$

$$\eta = 2C - \frac{5 + 4R_\nu}{90 + 24R_\nu}C(k\tau)^2. \quad (4.33)$$

No calibre newtoniano conforme, o modo proporcional a D no calibre síncrono é aqui um modo que decai, e o modo crescente proporcional a C aqui é constante:

$$\delta_\gamma = -\frac{40C}{15 + 4R_\nu} = -2\Psi, \quad (4.34)$$

$$\delta_c = \delta_b = \frac{3}{4}\delta_\nu = \frac{3}{4}\delta_\gamma, \quad (4.35)$$

$$\theta_b = \theta_\gamma = \theta_\nu = \theta_c = \frac{1}{2}(k\tau)^2\Psi, \quad (4.36)$$

$$\sigma_\nu = \frac{1}{15}(k\tau)^2\Psi, \quad (4.37)$$

$$\Psi = \frac{20C}{15 + 4R_\nu}, \quad (4.38)$$

$$\Phi = \left(1 + \frac{2}{5}R_\nu\right)\Psi. \quad (4.39)$$

4.4 Crescimento de estruturas no regime linear

Nas condições de Relatividade Geral e perturbações lineares de primeira ordem, podemos resolver as equações para cada modo de Fourier individualmente. Com o espectro de

potência primordial e o resultado de cada modo obtemos quantidades importantes como o espectro de potência da matéria $P(k)$ e o fator de crescimento $f(a)$ (equação 4.50).

No calibre newtoniano conforme, inicialmente, quando todos os modos estão fora do horizonte, os potenciais são constantes. As perturbações vão entrando no horizonte ao longo do tempo, sofrendo algumas mudanças na transição entre dominação da radiação ($a \ll a_{eq}$) e dominação da matéria ($a \gg a_{eq}$). Eventualmente todos os modos evoluem identicamente, permanecendo constantes durante a dominação da matéria e decaindo na era da constante cosmológica.

O potencial Φ pode ser escrito como uma multiplicação da contribuição de 3 épocas diferentes

$$\Phi(\mathbf{k}, a) = \frac{3}{5}R(\mathbf{k})T(k)\frac{D_+(a)}{a}, \quad (4.40)$$

onde $R(k)$ é a perturbação de curvatura (4.20). A função de transferência $T(k)$ descreve a evolução das perturbações durante as épocas de cruzamento do horizonte e transição radiação-matéria. Quando o Universo passa pela igualdade, o potencial decai um pouco, então é convencional normalizar esse valor para que em largas escalas $T(k)$ seja igual à unidade, colocando a diferença de 9/10 no fator multiplicativo. O fator de crescimento $D_+(a)$ descreve o crescimento independente de escala. Na era da matéria o potencial Φ é constante e $D_+(a) = a$, mas $D_+(a)$ é chamado fator de crescimento porque $\delta_c \propto D_+(a)$ nessa época, causando crescimento nas perturbações de densidade: regiões mais densas ficam mais densas e regiões menos densas ficam ainda menos densas.

Largas escalas vão entrar mais tarde, logo vão passar pela transição em a_{eq} fora do horizonte e então cruzar o horizonte bem dentro da era da matéria. Nesse caso o potencial é

$$\Phi(\mathbf{k}, y) = \frac{1}{10y^3}(16\sqrt{1+y} + 9y^3 + 2y^2 - 8y - 16)\Phi(\mathbf{k}, 0), \quad (4.41)$$

com $y = a/a_{eq} = \rho_m/\rho_r$. Para valores pequenos de y , o potencial é constante. Na era da matéria, com y grande, $\Phi = 9/10\Phi(0)$. Assim fora do horizonte, $\Phi = \frac{2}{3}R$ na era da radiação e $\Phi = \frac{3}{5}R$ na era da matéria, como já comentado. Até os potenciais de modos de larga escala ainda estão decaindo em $a = 10^{-2}$, bem depois de a_{eq} . Após isso, o potencial continua constante mas agora com outro valor. Esse efeito é ilustrado na figura 13.

[Dodelson e Schmidt \(2021\)](#) fazem uma análise aproximada do que acontece com δ_c em alguns regimes importantes. Existem 3 momentos importantes para os modos:

- Regime de super-horizonte: $k\eta \ll 1$.
- Entrada no horizonte: $k\eta > 1$.
- Sub-horizonte: $k\eta \gg 1$.

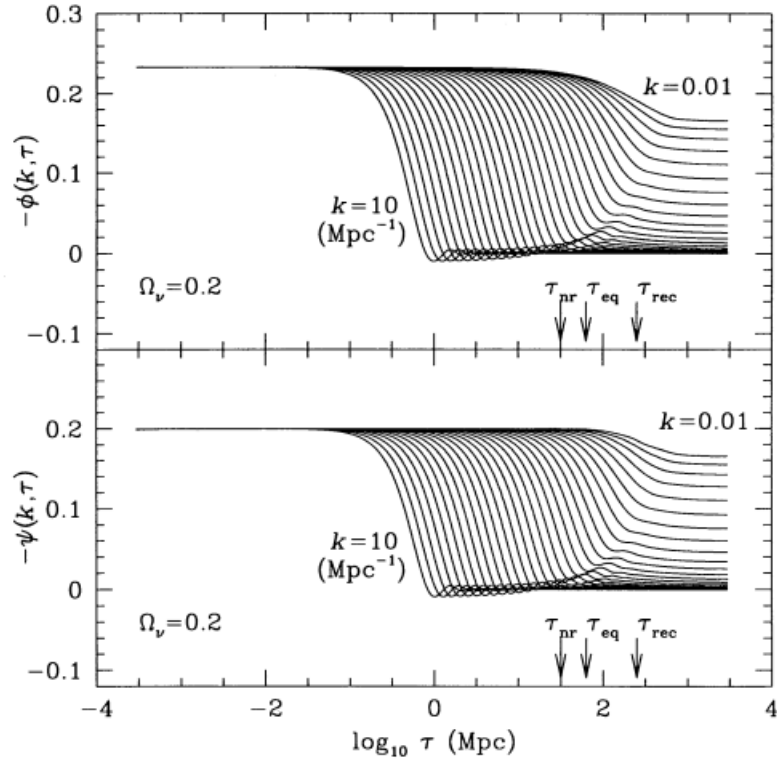


Figura 13 – Potenciais inicialmente são constantes fora do horizonte. Modos que entram na era da radiação com acoplamento forte entre bárions e fótons oscilam amortecidamente. Modos que entram bem dentro da época da matéria permanecem constantes, tendo decaído levemente fora do horizonte durante a época da igualdade. Fonte: [Ma e Bertschinger \(1995\)](#).

Quando na época da radiação e depois até bárions e fótons desacoplarem, momentos maiores do que o monopolo e o dipolo da radiação podem ser ignorados. Há uma disputa de dominação nessa época entre efeitos opostos. De um lado, a atração da força gravitacional. De outro, a expansão do espaço e a pressão existente nos bárions e fótons. Nesse momento se torna importante o conceito de instabilidade de Jeans, que vem da tentativa de balancear a pressão e os termos gravitacionais na equação de Euler. Considere uma região sobredensa de raio R . Na ausência de pressão, a região vai colapsar dentro de um tempo τ . Quando há pressão envolvida, a pressão demora um tempo $t = R/c_s$ para contrabalançar a gravidade. Se R pequeno, $t < \tau$, criam-se o que chamamos oscilações acústicas. Para R muito grande, não dá tempo da pressão contrabalançar a gravitação e ocorre o colapso. No caso newtoniano de um espaço em expansão

$$\ddot{\delta}(k, t) + 2H\dot{\delta}(k, t) + c_s^2(k^2/a^2 - k_J^2)\delta(k, t) = 0. \quad (4.42)$$

Comprimentos de onda $k/a \gg k_J$ terão um oscilador harmônico amortecido, com um termo de fricção $\propto H$. Quando $k/a < k_J$, temos instabilidade de Jeans ([David Tong, 2019](#)).

Agora, analisamos modos cruzando o horizonte durante a época de radiação e depois passando pela época de igualdade. Inicialmente o potencial é dominado pela radiação, e

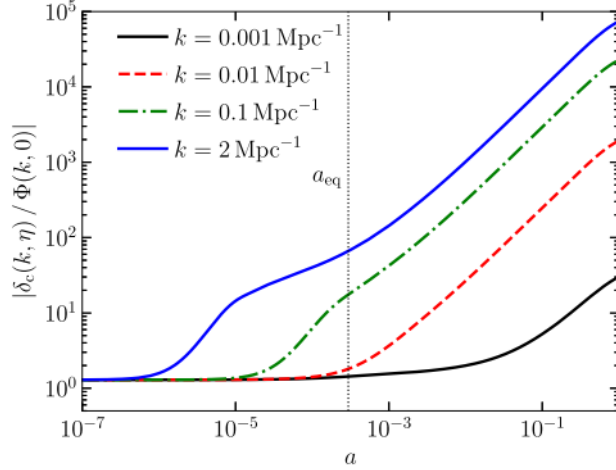


Figura 14 – Modos que entram durante a era de radiação crescem apenas logaritmicamente. Modos que entram na era da matéria crescem proporcionalmente ao fator de escala. Eventualmente todos os modos dentro do horizonte vão crescer proporcionalmente com o fator de escala, até chegar a era de expansão acelerada. Fonte: [Dodelson e Schmidt \(2021\)](#).

a gravitação afeta a matéria escura apenas como uma fonte externa que influencia sua dinâmica. Nesse caso, assim que um modo entra o horizonte, o potencial começa uma oscilação amortecida, assim como as perturbações nos fluidos de bárions e fótons. Essa oscilação acústica é causada pela presença de pressão que não deixa as sobredensidades crescerem, fazendo o potencial num universo em expansão decair. A amplitude de oscilação cai com η^{-2} , e é ainda maior na presença de neutrinos. A partir desse potencial, prevê-se um crescimento logarítmico das sobredensidades de matéria escura na era de radiação, já que esta não possui o efeito desagrupante da pressão.

Quando $\rho_c \delta_c$ passa a ser maior do que $\rho_r \Theta_r$ é a matéria escura quem vai dominar o comportamento do potencial, e essas duas quantidades vão evoluir conjuntamente. Quando o Universo é dominado pela matéria, o potencial já não depende da radiação. Em um universo dominado pela matéria, os efeitos gravitacionais e de expansão se balanceiam e o potencial permanece constante enquanto cruza o horizonte. Bem dentro da era da matéria e negligenciando os bárions, obtém-se a equação de Mészáros ([Meszaros, 1974](#))

$$\frac{d^2 \delta_c}{dy^2} + \frac{2 + 3y}{2y(y + 1)} \frac{d\delta_c}{dy} - \frac{3}{2y(y + 1)} \delta_c = 0. \quad (4.43)$$

É dessa equação que se obtém que $\delta_c \propto D_+(a)$, quando $a \gg a_{eq}$ e $a \leq 0.1$. Após a_{eq} , os bárions contribuem para o potencial, mas se aglomeram menos por estarem presos aos fótons até a recombinação. Eventualmente eles rapidamente cairão nos poços de potencial e seguirão a evolução da matéria escura. Quando isso acontece podemos tratá-los como um único fluido δ_m .

Podemos escrever

$$[a\delta'_m]' = ak^2\Phi, \quad (4.44)$$

$$k^2\Phi = 4\pi Ga^2\rho_m\delta_m. \quad (4.45)$$

Assim,

$$[a\delta'_m]' = \frac{3}{2}\Omega_m H_0^2 \delta_m \quad (4.46)$$

ou

$$\delta_m'' + \frac{a'}{a}\delta'_m = \frac{3}{2a}\Omega_m H_0^2 \delta_m. \quad (4.47)$$

Essa equação é independente de k , logo nesse regime, para qualquer k , δ_m obedece essa mesma equação, cuja solução $D_+(a)$ é a na era da matéria mas seu comportamento na era de expansão acelerada vai depender do valor da constante cosmológica. As figuras 14 e 15 ilustram a evolução de diferentes modos k , que entram no horizonte portanto em momentos diferentes. A figura 16 mostra a dependência do fator de crescimento para diferentes valores de Ω_Λ .

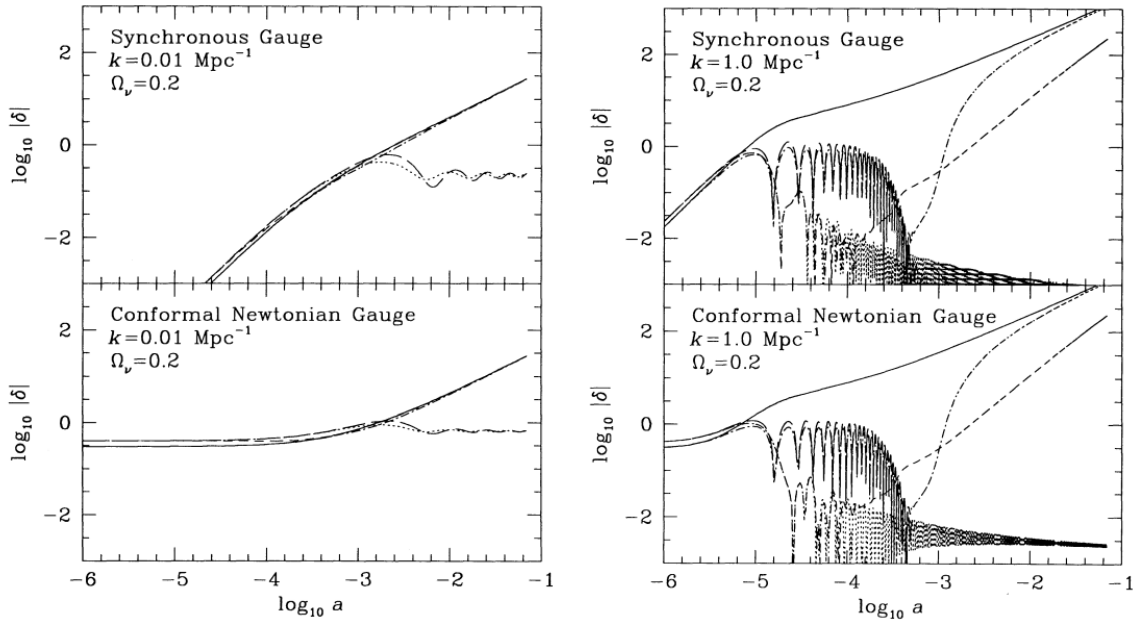


Figura 15 – No calibre newtoniano os modos não crescem fora do horizonte, enquanto no calibre síncrono $\delta_c \propto a^2$. O modo $k = 1 \text{ Mpc}^{-1}$ entra primeiro no horizonte, fazendo bárions (ponto-barras) e fótons (barras longas) oscilarem, assim como os neutrinos (pontilhado). Bem dentro da era da matéria, após o desacoplamento, bárions tendem a seguir a matéria escura (linha contínua). O modo $k = 0.01 \text{ Mpc}^{-1}$, que entra mais tarde no horizonte, tem como característica as perturbações de matéria escura e bariônica imediatamente crescendo proporcionalmente ao fator de escala. Fonte: [Ma e Bertschinger \(1995\)](#).

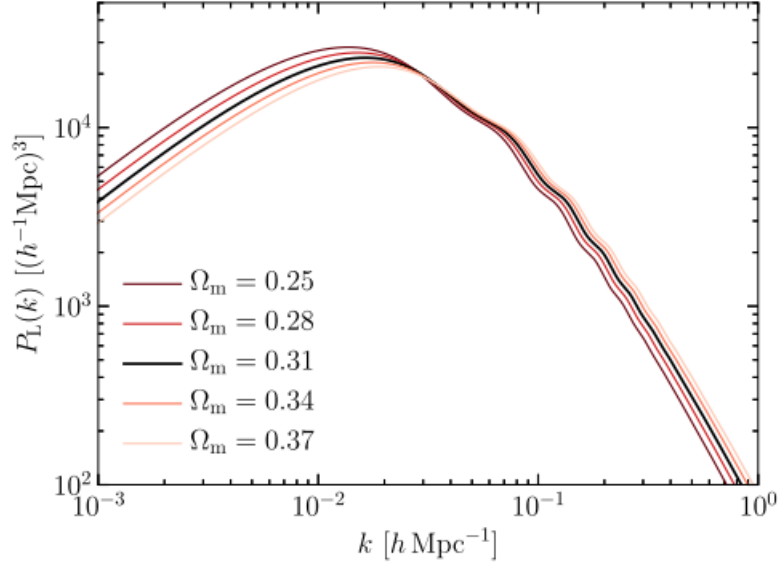


Figura 17 – Espectro de potência da matéria para Λ CDM com diferentes valores de Ω_m .
 Fonte: [Dodelson e Schmidt \(2021\)](#).

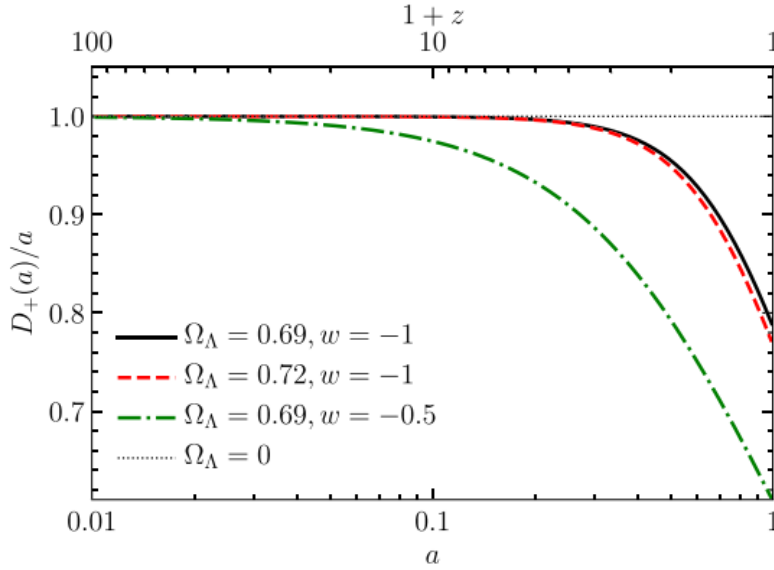


Figura 16 – Comportamento do fator de crescimento $D(a)$ para diferentes valores de Ω_Λ .
 Fonte: [Dodelson e Schmidt \(2021\)](#).

Vamos entender o comportamento da função de transferência $T(k)$:

$$\delta_m(k, t_0) = T(k)\delta_m(k, t_i) \quad (4.48)$$

Na era da radiação $a \sim t^{1/2}$ e $H \sim 1/a^2$ então um modo entra o horizonte em $k \sim (aH)_{enter} \sim 1/a_{enter}$. Na era da radiação, a matéria escura cresce apenas logaritmicamente.

Se considerarmos que δ_c é aproximadamente constante nesse tempo, o crescimento desses modos é suprimido nessa época por $1/k^2$. Na era da matéria, as sobredensidades crescem com a , e em larga escala $T(k) \approx 1$. Assim, como

$$P(k, t_0) = T^2(k)P(k, t_i), \quad (4.49)$$

se o espectro primordial é $P \sim k^n$, temos $P(k) \sim k^n$ para $k < k_{eq}$ e $P(k) \sim k^{n-4}$ para $k > k_{eq}$. Na realidade, vimos que o espectro primordial é quase invariante de escala. A figura 17 mostra o espectro de potência da matéria teórico para $z=0$.

O fator de crescimento, ilustrado na figura 18, é definido por

$$f(a) = \frac{d \ln D}{d \ln a}. \quad (4.50)$$

No cenário do modelo Λ CDM, ele pode ser aproximado pela expressão $f = [\Omega_m(a)]^{0.55}$. Quando incluímos neutrinos e/ou energia escura, $T(k) = T(k, a)$ e f também dependerá de k . Quanto mais rápida for a expansão acelerada, menor será o fator de crescimento. Em gravitação modificada, onde a força gravitacional normalmente é alterada, tem-se a possibilidade de haver um fator de crescimento maior do que o previsto por Λ CDM.

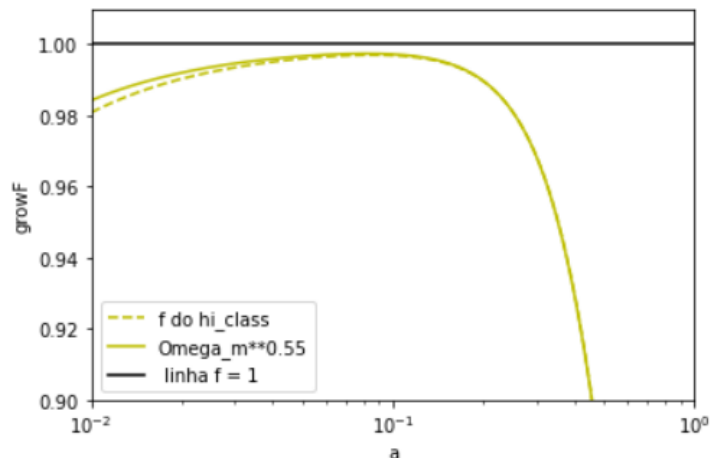


Figura 18 – Aproximação $f = [\Omega_m(a)]^{0.55}$ em comparação a $f(a) = \frac{d \ln D}{d \ln a}$. A linha horizontal preta foi usada apenas como referência visual.

4.5 Efeitos no espaço de *redshift*: BAO, RSD

O impacto de parâmetros como a constante de Hubble, a quantidade de matéria, a equação de estado da energia escura e a massa dos neutrinos pode ser vista no espectro linear de potência da matéria. Este, por sua vez, deve ser inferido experimentalmente. O campo de densidade da matéria só pode ser medido indiretamente, já que não vemos a matéria escura e nem mesmo uma parte da matéria ordinária. Uma forma de inferir essa distribuição de

matéria é usar as galáxias como traçadores dessa distribuição, obtendo suas distâncias e posições angulares via mapeamentos de *redshift* como os citados na introdução. Assume-se um possível enviesamento causado por processos astrofísicos, que é linear em larga escala, de forma que $\delta_{galáxias}(\mathbf{x}, \eta) = b_1(\eta)\delta_m(\mathbf{x}, \eta)$.

Uma segunda coisa a se considerar é o fato de que mesmo com mapeamentos de *redshift* precisos, devemos levar em consideração que a composição de velocidades de uma galáxia consiste de seu afastamento pela expansão e sua velocidade peculiar. Em escalas muito pequenas, a velocidade peculiar muitas vezes é tratada como aleatória e incluída nos erros estatísticos. Em escalas grandes, é possível notar que as velocidades peculiares são relacionadas ao efeito dos potenciais que agem sobre essas distribuições de matéria. O efeito da velocidade peculiar no *redshift* é:

$$1 + z = \frac{1 + u_{\parallel}}{a_{em}}. \quad (4.51)$$

Da equação 3.81 e da solução $\delta_m(\mathbf{k}, \eta) \propto D_+(a)T(k)$, temos

$$\mathbf{u}_m(\mathbf{k}, \eta) = \frac{i\mathbf{k}}{k^2} \frac{D'_+}{D_+} \delta_m(\mathbf{k}, \eta) = aHf \frac{i\mathbf{k}}{k^2} \delta_m(\mathbf{k}, \eta). \quad (4.52)$$

Essa modificação do *redshift* causada pela velocidade peculiar é chamada “redshift space distortion”. Esse efeito faz com que a diferença na posição da galáxia calculada via *redshift* cosmológico seja

$$\Delta\mathbf{x}_{RSD} = \frac{u_{\parallel}}{aH} \hat{\mathbf{n}}. \quad (4.53)$$

A figura 19 ilustra o efeito da distorção causada pela velocidade peculiar.

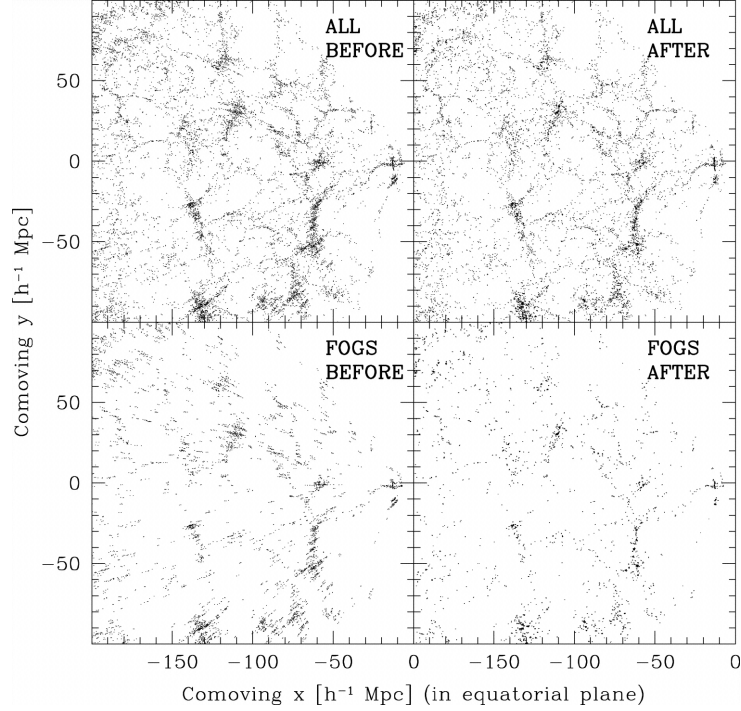


Figura 19 – Efeito da distorção causada pela velocidade peculiar de uma distribuição de matéria sofrendo atração mútua. No primeiro painel, a posição de cada galáxia (ponto) foi calculada como se todo o *redshift* fosse cosmológico. No segundo painel, as posições foram corrigidas ao levar em conta as velocidades peculiares. Nos painéis inferiores, foram separadas apenas as galáxias que sofreram RSD, onde se observa visualmente os chamados *fingers of god* (FOG). Fonte: Tegmark et al. (2004).

Outra fonte óbvia de erro é a possibilidade de errarmos de alguma forma a cosmologia, o que causaria mais um erro $\delta\chi(z)$ na posição. A verdadeira posição de uma galáxia, levando em conta RSD e correções de cosmologia seria então

$$\mathbf{x}_{obs} = \mathbf{x} + \left(\frac{1 + u_{\parallel}}{a_{em}} + \delta\chi(z) \right) \hat{\mathbf{n}}. \quad (4.54)$$

Para transformar as sobredensidades medidas em sobredensidades na posição real, Kaiser (1987) observou que, ao construir os campos de densidade em ambos espaços, o número de galáxias se mantém fixo:

$$n_{g,obs}(\mathbf{x}_{obs})d^3x_{obs} = n_g(\mathbf{x})d^3x. \quad (4.55)$$

Como as posições angulares permanecem as mesmas, dado que a distorção do *redshift* se dá apenas na linha de visada, o jacobiano dessa transformação de coordenadas é simplesmente

$$J = \left| \frac{dx}{dx_{obs}} \right| \frac{x^2}{x_{obs}^2} = \left(1 + \frac{u_{\parallel}}{aHx} + \frac{\delta\chi}{x} \right)^{-2} \left| 1 + \frac{1}{aH} \frac{\partial u_{\parallel}}{\partial x} + \frac{d\delta\chi}{dx} \right|^{-1}. \quad (4.56)$$

Podemos simplificá-lo ainda mais ao olhar para galáxias em uma faixa fina de *redshift*, centradas em \bar{z} , de forma que a distância radial é $\bar{\chi} = \chi(\bar{z})$. Termos como $\delta\chi$, $\delta H(z) = H_{fid}(z) - H(z)$ e H são avaliados em \bar{z} . O termo $\frac{u_{\parallel}}{aHx}$ pode ser descartado se considerarmos que as velocidades peculiares são tipicamente baixas e a distância $\bar{\chi}$ tem um valor muito maior, tornando esse termo pequeno. [Dodelson e Schmidt \(2021\)](#) chega então ao seguinte jacobiano:

$$J \simeq \bar{J} \left(1 + \frac{1}{aH} \frac{\partial u_{\parallel}}{\partial x} \right); \quad \bar{J} = 1 - 2 \frac{\delta\chi(\bar{z})}{\bar{\chi}} + H^{-1}(\bar{z}) \delta H(\bar{z}). \quad (4.57)$$

As sobredensidades medidas e reais se relacionam, portanto, por

$$1 + \delta_{g,obs}(\mathbf{x}_{obs}) = \bar{J} \left[1 + \delta_g(\mathbf{x}[\mathbf{x}_{obs}]) - \frac{1}{aH} \frac{\partial u_{\parallel}(\mathbf{x}[\mathbf{x}_{obs}])}{\partial x} \right]. \quad (4.58)$$

Para analisar o efeito apenas de RSD, ignoramos as quantidades $\delta\chi$ e δH , que foram introduzidas no caso de termos escolhido a cosmologia errada. Levando em conta o possível enviesamento entre δ_m e δ_g , e observando que a diferença entre \mathbf{x} e \mathbf{x}_{obs} é de ordem perturbativa:

$$\delta_{g,RSD}(\mathbf{x}) = b_1 \delta_m(\mathbf{x}) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left[\frac{\mathbf{u}_m(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{x}}}{aH} \right]. \quad (4.59)$$

Podemos usar a aproximação do observador distante, que consiste em aproximar $\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}_m = \hat{\mathbf{e}}_z \cdot \mathbf{u}_m$, para galáxias suficientemente próximas nesse plano de fundo (x^1, x^2). Ao transformar essa equação para o espaço de Fourier, usamos a equação 4.52 que relaciona as velocidades peculiares com a taxa de crescimento de estruturas no regime linear, obtendo

$$\delta_{g,RSD}(\mathbf{k}) = b_1 \delta_m(\mathbf{k}) + f \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \delta_m(\mathbf{k}') (\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{e}}_z) \int d^3 x e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}} \quad (4.60)$$

$$= [b_1 + f \mu_k^2] \delta_m(\mathbf{k}). \quad (4.61)$$

Alguns comentários sobre a expressão acima. O cosseno do ângulo entre a linha de visada $\hat{\mathbf{e}}_z$ e o vetor de onda $\hat{\mathbf{k}}$ foi definido como μ_k . A aparente distorção no campo de sobredensidades é, como se espera, apenas na direção paralela ao observador. O termo $f \mu_k^2$ torna as sobredensidades no espaço de *redshift* maiores do que no espaço real. O efeito das velocidades se traduz numa maior sobredensidade de uma distribuição que está colapsando e conseqüentemente também numa maior subdensidade em outros locais.

A correção em $P_{g,RSD}$ também vai incluir o termo P_n citado na seção 4.1, dado que vai haver um possível ruído branco na distribuição de galáxias. O espectro de potência se torna então

$$P_{g,RSD}(k, \mu_k, \bar{z}) = P_L(k, \bar{z})[b_1 + f\mu_k^2]^2 + P_n \quad (4.62)$$

É possível separar o efeito de f e o efeito de b_1 fazendo uma decomposição em multipolos com respeito a μ_k , onde então se pode variar k e μ_k . A figura 20 mostra o monopolo e o quadrupolo do espectro de potência tridimensional obtido pelo BOSS.

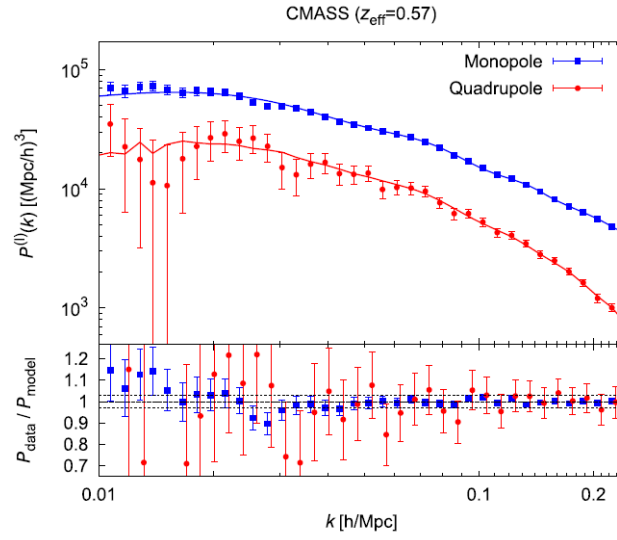


Figura 20 – Monopolo e o quadrupolo do espectro de potência tridimensional obtido pelo BOSS. Fonte: (Gil-Marín et al., 2016).

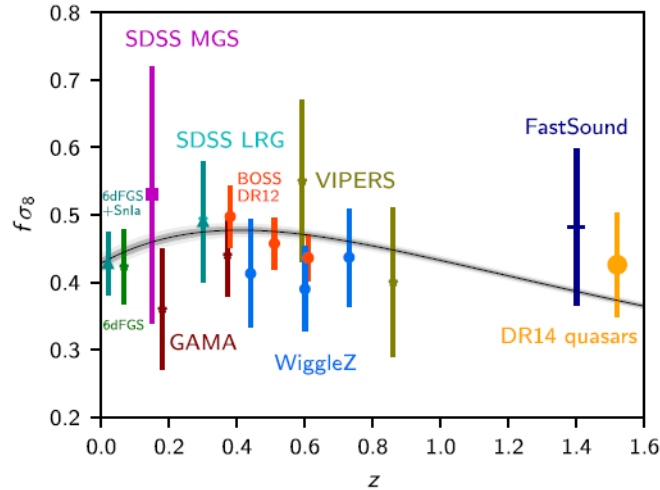


Figura 21 – Valores de $f\sigma_8$ obtidos em diferentes *surveys*. Fonte: (Aghanim et al., 2020).

A amplitude do espectro de potências pode não ser diretamente mensurável, mas conseguimos medir duas quantidades auxiliares $b_1\sigma_8$ e $f\sigma_8$, ilustrada na figura 21.

Para analisar o efeito de ter escolhido a cosmologia errada, devemos levar em conta que a relação do *redshift* com a distância é diferente em diferentes cosmologias, logo $\delta\chi$ de fato varia com z . Isso faz com que galáxias a baixo *redshift* experienciem um deslocamento da sua real posição que pode ser maior (ou menor) do que o deslocamento que galáxias a um *redshift* mais alto sofrem. Usando o sistema de coordenadas $\mathbf{x}_{obs} = 0$,

$$(x^1, x^2) = \chi(z)[\theta^1, \theta^2] = \left[1 - \frac{\delta\chi(z)}{\chi_{fid}(z)}\right] (x_{obs}^1, x_{obs}^2), \quad (4.63)$$

enquanto que a coordenada radial é

$$x^3(z) = \chi(z) - \chi(\bar{z}) \simeq \frac{z - \bar{z}}{H(\bar{z})} = \left[1 + \frac{\delta H(\bar{z})}{H_{fid}(\bar{z})}\right] x_{obs}^3. \quad (4.64)$$

Dessa forma a verdadeira posição em termos da posição observada pode ser escrita como

$$\mathbf{x}(\mathbf{x}_{obs}) = \left([1 - \alpha_{\perp}]x_{obs}^1, [1 - \alpha_{\parallel}]x_{obs}^2, [1 - \alpha_{\parallel}]x_{obs}^3\right), \quad (4.65)$$

com

$$\alpha_{\perp} = \frac{\delta\chi(z)}{\chi_{fid}(z)}, \quad (4.66)$$

$$\alpha_{\parallel} = \frac{\delta H(\bar{z})}{H_{fid}(\bar{z})}. \quad (4.67)$$

É interessante notar que $\chi(\bar{z}) = \chi_{fid}(\bar{z})[1 + \alpha_{\perp}]$ e $H(\bar{z}) = H_{fid}(\bar{z})[1 + \alpha_{\parallel}]$, então conseguir medir essas quatidades em separado nos dá uma grande vantagem. Felizmente, conseguimos perceber os efeitos de α_{\perp} e α_{\parallel} pelo que fazem com o espectro de potência. No espaço de Fourier,

$$\delta_{g,obs}(\mathbf{k}_{obs}) = \bar{J} \int d^3x_{obs} e^{-i\mathbf{k}_{obs}\cdot\mathbf{x}_{obs}} \delta_{g,RSD}(\mathbf{x}[\mathbf{x}_{obs}]). \quad (4.68)$$

Nós podemos agora inverter e trocar \mathbf{x}_{obs} por \mathbf{x} , tornando a equação acima

$$\delta_{g,obs}(\mathbf{k}_{obs}) = \left(1 + \mathcal{O}(\delta^3)\right) \delta_{g,RSD}(\mathbf{k}[\mathbf{k}_{obs}]), \quad (4.69)$$

com

$$\mathbf{k}[\mathbf{k}_{obs}] = \left([1 + \alpha_{\perp}]k_{obs}^1, [1 + \alpha_{\parallel}]k_{obs}^2, [1 + \alpha_{\parallel}]k_{obs}^3\right). \quad (4.70)$$

fazendo com que

$$P_{g,obs}(\mathbf{k}_{obs}, \bar{z}) = P_L(k, \bar{z}) [b_1 + f\mu_k^2]_{\mathbf{k}=[1+\alpha_{\perp}]k_{obs}^1, [1+\alpha_{\parallel}]k_{obs}^2, [1+\alpha_{\parallel}]k_{obs}^3} + P_n. \quad (4.71)$$

Esse efeito de distorcer o espectro de potência causado pela cosmologia errada é chamado de efeito Alcock–Paczynski. Apesar de criar uma anisotropia aparente, a análise dos fenômenos acima permite obter a forma do espectro de potência com um novo vínculo: as oscilações acústicas de bárions. As oscilações do fluido fóton-bárion na época pré-recombinação deixaram uma marca nas sobredensidades de matéria bariônica, da forma de $\cos kr_s$, onde r_s é o horizonte sonoro na época da recombinação. Esse padrão foi repassado também à matéria escura, por atração gravitacional, embora com menor amplitude. Como r_s é muito bem definida via CMB e BBN, esse padrão oscilatório que na escala comóvel verdadeira aparece em $k = \pi r_s$ aparecerá no espectro de potência observado numa outra escala k_{obs} .

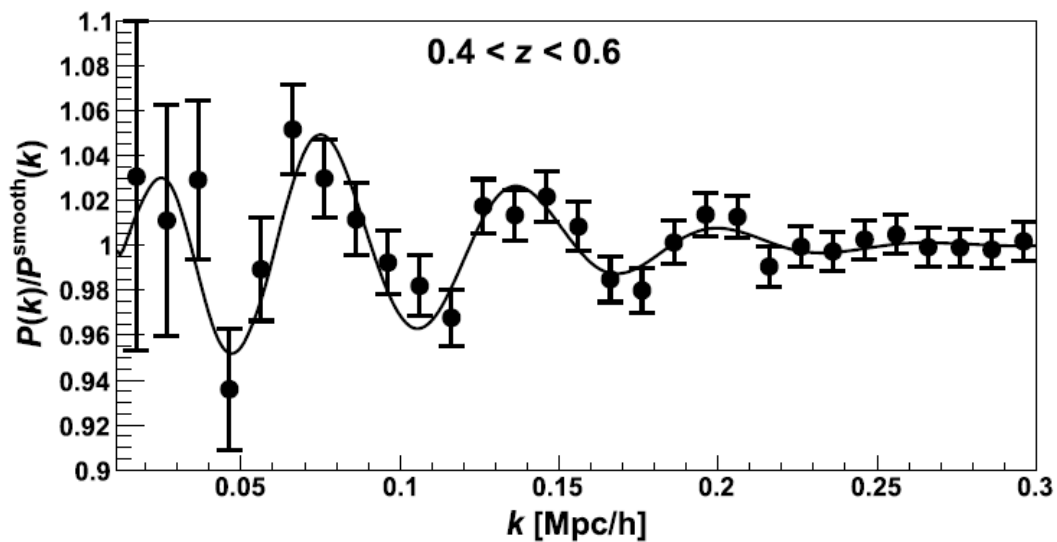


Figura 22 – Oscilações acústicas de bárions vistas no espectro de potência da matéria. Fonte: (Beutler et al., 2017).

5 Horndeski

Seja para testar o modelo padrão da cosmologia ou encontrar uma nova física, é necessário propor novas teorias ou parametrizar os desvios de forma relevante. Ambas alternativas caem dentro do conceito de gravitação modificada. A gravitação de Einstein possui uma posição singular graças ao teorema de Lovelock: é a única teoria com difeomorfismo invariante local de um campo tensorial 4D com equações de movimento de segunda ordem (Lovelock, 2003) (Lovelock, 1972). Logo, modificar a gravitação normalmente significa adicionar graus de liberdade.

Horndeski é a teoria escalar-tensorial que possui a lagrangiana mais geral contendo um único escalar que dá equações de segunda ordem de movimento para o escalar e para a métrica no referencial de Jordan (Horndeski, 1974)(Deffayet et al., 2011). Apesar da simplicidade com relação a gravitação de mais alta ordem, é geral o suficiente pra encapsular várias propriedades de gravitação de mais alta ordem, como fantasmas (“ghosts”), instabilidades, variação na velocidade de propagação das ondas gravitacionais, equação de Poisson generalizada, correções de Yukawa e presença de pressão anisotrópica. Teorias de gravitação de mais alta ordem em geral sofrem da famosa instabilidade de Ostrogradsky¹ (Ostrogradsky, 1850).

5.1 Encapsulando desvios na gravitação

A Lagrangiana de Horndeski é escrita como a soma de quatro termos que codificam a dinâmica do campo escalar ϕ , de forma que a ação é:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \sum_{i=2}^5 L_i + S_m, \quad (5.1)$$

onde S_m é a ação da matéria e as lagrangianas L_i são escritas definindo o termo cinético canônico $X = -g_{\mu\nu} \phi^{,\mu} \phi^{,\nu} / 2$, duas funções cinéticas não canônicas $K(\phi, X)$ e $G_3(\phi, X)$, e

¹ Woodard (2007 apud Kobayashi, 2019) faz uma explicação de onde surge a instabilidade e quais as possíveis maneiras de evitá-la. Ele mostra que em lagrangianas que tem $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\phi}^2} \neq 0$ ou derivadas de ordem mais alta, a não-degenerescência gera termos lineares na hamiltoniana do sistema, sem limite inferior e superior, fazendo com que o sistema não seja estável. Quanto mais termos de alta ordem, pior a instabilidade, levando a efeitos como o decaimento do vácuo e a obrigatoriedade da existência de energias de partícula negativa e positiva. Há três maneiras de evitar a instabilidade. Pode-se violar a ideia de não-degenerescência fazendo integração parcial e descartando termos de superfície, como se faz com Galileons. Pode-se também usar a invariância de gauge: usar a simetria para eliminar uma variável, gerando uma equação de restrição. No entanto não é garantido funcionar, já que o número de restrições para uma determinada simetria é fixo, enquanto que o número de direções de instabilidade cresce com a existência de ordens maiores de derivadas, o que limita a capacidade desse método. Pode-se ainda usar métodos perturbativos, assumindo que a gravitação usual é correta e termos de mais alta ordem são perturbações. Esse método funciona apenas quando as perturbações convergem.

duas funções de acoplamento $G_4(\phi, X)$ e $G_5(\phi, X)$, onde

$$L_2 = K(\phi, X), \quad (5.2)$$

$$L_3 = -G_3(\phi, X)\square\phi, \quad (5.3)$$

$$L_4 = G_4(\phi, X)R + G_{4,X}[(\square\phi)^2 - (\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^2], \quad (5.4)$$

$$L_5 = G_5(\phi, X)G_{\mu\nu}\nabla^\mu\nabla^\nu\psi - \frac{G_{5,X}}{6}[(\square\phi)^3 - 3(\square\phi)(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^2 + 2(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^3]. \quad (5.5)$$

As lagrangianas L_4, L_5 acoplam o campo ϕ ao escalar de Ricci e ao tensor de Einstein, fazendo com que G_4 e G_5 sejam as funções de acoplamento modificadoras da gravidade. Assumimos a validade do Princípio da Equivalência Fraco² e portanto todas as formas de matéria externas ao sistema escalar-tensorial são acopladas minimamente e universalmente.

Modelos de energia escura com um grau de liberdade escalar que estão inclusos dentro dessa classe geral de lagrangianas incluem quintessência (Ratra; Peebles, 1988) (Wetterich, 1988), Brans-Dicke (Brans; Dicke, 1961), k -essence (Armendariz-Picon; Mukhanov; Steinhardt, 2001)(Armendáriz-Picón; Damour; Mukhanov, 1999), galileons covariantes (Deffayet et al., 2011), gravidade de Dirac-Born-Infeld (de Rham; Tolley, 2010), camaleões (Khoury; Weltman, 2004), teorias $f(R)$ (Motohashi; Starobinsky; Yokoyama, 2009), teorias $f(G)$ (Carroll et al., 2005), dentre outros. Alguns limites úteis são discutidos em Amendola et al. (2020):

Se $G_4 = 1/2$ e $G_5 = 0$ ou constante, recuperamos a lagrangiana de Einstein-Hilbert com um campo escalar com termos cinéticos não canônicos. Obtemos o caso canônico quando $K = X - V(\phi)$ e $G_3 = 0$ ou constante. Λ CDM é um caso limite quando $K = -2\Lambda$.

Se $G_4 = G_4(\phi)$ e G_5 é constante, temos Brans-Dicke com setor cinético não canônico, sendo que para recuperar Brans-Dicke original é suficiente impor $K = w_{BD}(\phi)X$, $G_3 = 0$ e $G_4 = \phi/2$.

Sem o setor cinético ($K_{,X} = G_3 = 0$), a lagrangiana se reduz à de um modelo $f(R)$ do tipo $L_R = (R + f(R))/2$.

Se as funções $G_i(\phi, X)$ forem apenas função de X a lagrangiana é invariante em $\phi = \phi + \text{constante}$, podendo ser conectada com Galileon covariante.

5.2 Equações de Poisson generalizadas

Como mencionado no capítulo 3, a gravidade de Einstein possui uma métrica quadridimensional representada por uma matriz simétrica, gerando 10 graus de liberdade. Destes,

² ver Weinberg (1972) para uma explicação

4 são escalares, 4 são vetoriais e 2 são tensoriais. Sem matéria, não há grau de liberdade escalar propagante. Apenas os graus de liberdade tensoriais propagam, e estão associados aos modos de polarização $+$, \times das ondas gravitacionais (ver [Dodelson e Schmidt \(2021\)](#)). Os outros graus de liberdade obedecem equações de restrição determinadas pela matéria. Os potenciais Φ , Ψ são ligados à distribuição de matéria via equações de Poisson, que não envolvem derivadas temporais (equações 5.8 – 5.9).

Expandindo linearmente a métrica de fundo, inserindo na ação de Horndeski e desenvolvendo até segunda ordem, obtém-se na ausência de matéria:

$$S = \int d^3x dt \left\{ Q_S [\dot{\psi}^2 - \frac{c_S^2}{a^2} (\partial_i \psi)^2] + \sum_{\alpha=1}^2 Q_T [\dot{h}_\alpha^2 - \frac{c_T^2}{a^2} (\partial_i h_\alpha)^2] \right\}, \quad (5.6)$$

sendo ψ o modo de perturbação escalar e c_S sua velocidade de propagação, h_α os modos tensoriais e c_T suas velocidades de propagação. Agora, há um modo de propagação escalar mesmo na ausência de matéria ([Amendola et al., 2020](#)).

É usual trabalhar com o que chamamos de aproximação quase-estática. Isso significa que estamos calculando o comportamento de modos bem dentro do horizonte e dentro do comprimento de Jeans do escalar ($c_S k \gg aH$). Os termos contendo k dominarão os termos com derivadas temporais, convertendo a usual equação de Klein-Gordon numa equação de restrição ([Bellini; Sawicki, 2014](#)). No regime quase-estático e no calibre longitudinal

$$ds^2 = -(1 + 2\Psi)dt^2 + a^2(1 + 2\Psi)\delta_{ij}dx^i dx^j, \quad (5.7)$$

surgem duas equações generalizadas de Poisson que vão depender de funções Y e η , sendo que essas são parametrizações do desvio com relação à gravitação usual:

$$k^2 \Phi = \frac{1}{2} Y(k, z) \eta(k, z) \rho_m(z) \delta_m(k, z), \quad (5.8)$$

$$k^2 \Psi = -\frac{1}{2} Y(k, z) \rho_m(z) \delta_m(k, z), \quad (5.9)$$

onde $\eta = -\frac{\Phi}{\Psi}$ é o estresse anisotrópico ou slip gravitacional. Na RG, quando não existem componentes não-diagonais espaciais no tensor energia-momento, $\eta = 1$. Para um fluido de partículas não relativísticas perturbado, esses termos são nulos em primeira ordem. Neutrinos podem fazer esse valor desviar da unidade, no entanto eles são irrelevantes para δ_m bem dentro da era da matéria, então qualquer valor de $\eta \neq 1$ significa uma modificação na gravitação (ou alguma forma de matéria escura quente). Em [Amendola et al. \(2020\)](#), é mostrado que podemos escrever Y e η no regime quase-estático em termos de funções h_i :

$$Y = h_1 \left(\frac{1 + k^2 h_5}{1 + k^2 h_3} \right), \quad (5.10)$$

$$\eta = h_2 \left(\frac{1 + k^2 h_4}{1 + k^2 h_5} \right), \quad (5.11)$$

Por sua vez, em escala linear,

$$h_1 = \frac{\alpha_T + 1}{M_*^2}, \quad (5.12)$$

$$h_2 = \frac{1}{\alpha_T + 1}, \quad (5.13)$$

$$h_3 = \frac{1}{2H^2\mu^2} ((2 - \alpha_B)\alpha_1 + 2\alpha_2), \quad (5.14)$$

$$h_4 = \frac{1}{H^2\mu^2} (\alpha_1 + \alpha_2), \quad (5.15)$$

$$h_5 = \frac{1}{H^2\mu^2} \left(\frac{\alpha_M + 1}{\alpha_T + 1} \alpha_1 + \alpha_2 \right), \quad (5.16)$$

com

$$\mu^2 \equiv -3(2\xi^2 + \xi' + \xi(3 + \alpha_M))\alpha_B - 3\xi\alpha_2 \quad (5.17)$$

e

$$\alpha_1 \equiv \alpha_B + (\alpha_B - 2)\alpha_T + 2\alpha_M, \quad (5.18)$$

$$\alpha_2 \equiv \alpha_B\xi + \alpha'_B - 2\xi - 3(1 + w_m)\tilde{\Omega}_m. \quad (5.19)$$

Nas equações acima, $\xi = H'H$, $\tilde{\Omega}_m = \rho_m/(3M_*^2H^2)$, e $w_m = \sum_i w_i \Omega_i/\Omega_m$ onde aqui “matéria” significa todos os componentes menos o campo escalar. A relação entre h_i e α_i (equações 5.20 - 5.24) é geral e não depende da aproximação quase estática, sendo apenas sua relação com as equações de Poisson resultado do regime escolhido. Perceba que Y, η não dependem de α_K , ou seja, esse parâmetro não é um observável no regime quase estático.

Nota-se que h_3, h_4 e h_5 são proporcionais a μ^{-2} , onde μ é a escala de massa. Se ϕ é responsável pela aceleração atual ou em uma evolução em que o campo não está fortemente oscilando, μ corresponde à massa m . Alguns limites de comportamento em Y são mencionados: se o campo é responsável pela aceleração atual, m é pequeno, e em escalas bem dentro do horizonte, $Y = h_1 h_5/h_3$. Em largas escalas, podemos detectar a dependência em k , e quando $k \ll m$, $Y = h_1$. As funções h_i surgem nas correções de Yukawa do potencial gravitacional no limite de uma galáxia ou estrela, e curiosamente o valor $h_1 G_N$ age como uma renormalização da constante de Newton, sendo muitas vezes chamado de G efetivo. Esse valor de G medido via vínculos locais pode não ser o valor global, no entanto, devido a mecanismos de *screening* (blindagem). No restante do trabalho, o que nós chamaremos de G_{eff} será o próprio Y , devido ao seu papel na equação de Poisson.

As funções α_i dependem *apenas do tempo* e são definidas em termos das funções livres da $G_i(\phi, X)$ da ação de Horndeski como:

$$M_\star^2 \equiv 2G_4 - 4XG_{4X} - \frac{2H\phi'XG_{5X}}{a} + 2XG_{5\phi}, \quad (5.20)$$

$$\alpha_M \equiv \frac{d \ln M_\star^2}{d \ln a}, \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} H^2 M_\star^2 \alpha_K &\equiv 2X(G_{2X} + 2XG_{2XX} - 2G_{3\phi} - 2XG_{3\phi X}) \\ &+ \frac{12H\phi'X}{a}(G_{3X} + XG_{3XX} - 3G_{4\phi X} - 2XG_{4\phi XX}) \\ &+ 12H^2X(G_{4X} - G_{5\phi} + 8XG_{4XX} - 5XG_{5\phi X} - 4X^2G_{4XXX} - 2X^2G_{5\phi XX}) \\ &+ \frac{4H^3\phi'X}{a}(3G_{5X} + 7XG_{5XX} + 2X^2G_{5XXX}), \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} HM_\star^2 \alpha_B &\equiv \frac{2\phi'}{a}(XG_{3X} - G_{4\phi} - 2XG_{4\phi X}) + 8HX(g_{4X} + 2XG_{4XX} - G_{5\phi} - XG_{5\phi X}) \\ &+ \frac{2H^2\phi'X}{a}(3g_{5X} + 2XG_{5XX}), \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$M_\star^2 \alpha_T \equiv 4XG_{4X} - 4XG_{5\phi} - \frac{2XG_{5X}}{a^2}(\phi'' - 2aH\phi'). \quad (5.24)$$

Cada uma dessas parametrizações está ligada a uma funcionalidade, como observado em [Bellini e Sawicki \(2014\)](#). O desvio de velocidade das ondas gravitacionais é dado por $c_T^2 = 1 + \alpha_T$. A função α_K está conectada com o setor cinético do campo. Aumentar essa função significa uma velocidade do som menor para o campo escalar. Com um horizonte de som menor do que o horizonte cosmológico, o campo escalar pode adquirir uma configuração quase-estática. A função α_B está conectada a uma nova mistura dos termos cinéticos do escalar da métrica. Essa modificação no acoplamento da matéria com a curvatura pode ser entendida como uma quinta força entre partículas massivas. O termo M_\star é a massa de Planck reduzida efetiva e depende do tempo, e a função α_M codifica a sua evolução. O parâmetro M_\star^2 é a “força cosmológica da gravidade”, o quadrado da razão entre a massa de Plank cosmológica e a local. Mecanismos de *screening* podem fazer com que a massa de Planck medida em testes locais com experimentos tipo Cavendish não corresponda ao seu valor cosmológico, tirando o vínculo $M_\star^2 = 1$ e tornando essa quantidade um parâmetro livre, contanto que a massa de Planck durante a recombinação seja próxima do seu valor local. A estrutura de larga escala é sensível apenas à taxa de variação $\alpha_M = \frac{d \ln M_\star^2}{d \ln a}$. No referencial de Jordan, sua evolução temporal causa pressão anisotrópica. No modelo cosmológico padrão, $\alpha_i = 0$. Essas funções não se anulam se for gravidade convencional mas a expansão de fundo não segue Λ CDM, ou se for uma gravidade modificada que imite Λ CDM.

Alguns critérios de estabilidade advindos da equação 5.6 são requeridos para que a teoria seja viável ([De Felice; Tsujikawa, 2012](#)). Do ponto de vista clássico, é necessário que Q_S tenha o mesmo sinal que c_S , e que Q_T tenha o mesmo sinal que c_T . Assim, as equações de movimento são equações de onda bem comportadas com velocidade c_S^2, c_T^2 ,

cuja amplitude decresce devido à expansão do Universo. Caso essa condição não seja obtida ($c_S^2, c_T^2 < 0$), as amplitudes cresceriam exponencialmente. Do ponto de vista quântico, é necessário que $Q_S, Q_T > 0$, para que tenham o mesmo sinal da energia cinética das partículas de matéria, sem o qual o hamiltoniano não teria limite inferior para energia e as partículas sempre poderiam decair em estados cada vez menores de energia, gerando o que chamamos de “ghosts”. De forma relacionada, o termo cinético separado do grau de liberdade adicional \mathbf{D} também deve ser positivo e maior do que zero. Esse critério $\mathbf{D} > 0$ existe pois quando $\alpha_B \neq 0$, $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ é uma singularidade de pressão. Essas quantidades dependem das funções α 's da seguinte forma:

$$Q_S = \frac{M_*^2(2\alpha_K + 3\alpha_B^2)}{(2 - \alpha_B)^2}, \quad (5.25)$$

$$c_S^2 = \frac{(2 - \alpha_B)\alpha_1 + 2\alpha_2}{2\alpha_K + 3\alpha_B^2}, \quad (5.26)$$

$$Q_T = \frac{M_*^2}{8}, \quad (5.27)$$

$$c_T^2 = 1 + \alpha_T, \quad (5.28)$$

$$\mathbf{D} = \alpha_K + \frac{3}{2}\alpha_B^2. \quad (5.29)$$

Para [de Felice, Kobayashi e Tsujikawa \(2011\)](#), há essencialmente dois tipos de classes de modelos de energia escura. No primeiro tipo a massa M se torna grande cedo na evolução cosmológica, como no caso de teorias $f(R)$ e Brans-Dicke. Isso induz oscilação em $\delta\phi$, mas contanto que esse modo oscilatório seja suprimido pelo modo induzido pela matéria, as soluções numéricas integradas no regime quase estático são válidas com grande acurácia ([Tsujikawa, 2008](#)) ([Tsujikawa; Uddin; Tavakol, 2008](#)) ([Motohashi; Starobinsky; Yokoyama, 2009](#)) ([Appleby; Battye, 2008](#)) ([de La Cruz-Dombriz; Dobado; Maroto, 2008](#)). A segunda classe são os modelos em que o campo não tem um potencial massivo, como Galileons. Nesse caso as soluções numéricas também são válidas com grande acurácia. Obviamente é necessário ter cuidado com a aproximação quase estática em modelos onde $c_S \ll 1$.

5.3 Perturbações da matéria em gravitação modificada

O mesmo procedimento utilizado para deduzir a equação de segunda ordem para δ_m na RG (equação 4.47) pode ser usado aqui. Quando o campo escalar acoplado está presente, a perturbação nesse campo é da mesma ordem dos potenciais gravitacionais ($d\phi \sim \Psi \sim \Phi$) ([Amendola et al., 2020](#)). Outra forma é expandir a ação em segunda ordem em termos de uma perturbação linear na métrica e nos campos. O resultado é uma soma de termos, quadráticos nos campos de perturbação, cada termo multiplicado por uma

função dependente do tempo que depende apenas do fundo. Todas as possibilidades de se modificar as equações de Einstein para as perturbações então ficam em termos de 4 funções dependentes do tempo que podemos escolher arbitrariamente. Esse procedimento é semelhante à abordagem da teoria de campos efetiva para esse assunto, com a vantagem de que relacionamos diretamente essas funções livres, que no nosso caso serão as funções α 's, a interpretações físicas via Horndeski. Outro benefício é separar claramente as propriedades da expansão do fundo das propriedades das perturbações. Há uma correspondência entre a abordagem das α 's e formulações de teorias de campos efetivos (EFT) mostrada na figura 23.

Model Class		α_K	α_B	α_M	α_T
Λ CDM		0	0	0	0
cuscuton ($w_X \neq -1$)	[71]	0	0	0	0
quintessence	[1, 2]	$(1 - \Omega_m)(1 + w_X)$	0	0	0
k-essence/perfect fluid	[45, 46]	$\frac{(1 - \Omega_m)(1 + w_X)}{c_s^2}$	0	0	0
kinetic gravity braiding	[47–49]	$m^2(n_m + \kappa_\phi)/H^2 M_{\text{Pl}}^2$	$m\kappa/H M_{\text{Pl}}^2$	0	0
galileon cosmology	[57]	$-3/2\alpha_M^3 H^2 r_c^2 e^{2\phi/M}$	$\alpha_K/6 - \alpha_M$	$-2\dot{\phi}/HM$	0
BDK	[26]	$\dot{\phi}^2 K_{,\phi\phi} e^{-\kappa}/H^2 M^2$	$-\alpha_M$	$\dot{\kappa}/H$	0
metric $f(R)$	[3, 72]	0	$-\alpha_M$	$B\dot{H}/H^2$	0
MSG/Palatini $f(R)$	[73, 74]	$-3/2\alpha_M^2$	$-\alpha_M$	$2\dot{\phi}/H$	0
f (Gauss-Bonnet)	[52, 75, 76]	0	$\frac{-2H\dot{\xi}}{M^2 + H\dot{\xi}}$	$\frac{\dot{H}\dot{\xi} + H\ddot{\xi}}{H(M^2 + H\dot{\xi})}$	$\frac{\ddot{\xi} - H\dot{\xi}}{M^2 + H\dot{\xi}}$

Figura 23 – Parâmetros correspondentes a várias classes de modelos determinados através de suas correspondentes ações. Fonte: (Bellini; Sawicki, 2014)

A generalidade da lagrangiana, i.e., a possibilidade de escolher arbitrariamente funções G_i e condições iniciais para o escalar permite que possamos fazer uma série de escolhas de fundo e de parametrização com a garantia de que existe uma lagrangiana que corresponde às nossas escolhas (Bellini; Sawicki, 2014). Podemos tratar o fundo cosmológico como sendo dado pela métrica de FLRW e encapsular a contribuição da gravitação dentro do tensor energia momento na forma de um fluido de energia escura. O fundo então segue

$$H^2 = \sum_i \rho_i, \quad (5.30)$$

e fazemos uma escolha de definição que nos permite escrever

$$\rho'_{DE} = -3aH(\rho_{DE} + p_{DE}) \quad (5.31)$$

$$w_{DE} = \frac{p_{DE}}{\rho_{DE}} \quad (5.32)$$

Devido à generalidade da lagrangiana, supomos que qualquer parametrização dessas quantidades (é suficiente especificar um valor inicial e uma “história” para ρ'_{DE}) corresponderá a uma lagrangiana possível.

As quatro funções α_i e a evolução do $H(t)$ além do valor inicial de Ω_{m0} são completamente independentes, além de ser o conjunto mínimo de parâmetros capazes de descrever todos os modelos que queremos descrever.

A equação de segunda ordem para δ_m é idêntica à da Relatividade Geral, exceto pela presença de um termo G_{eff} , desde que seja dentro do horizonte mas não em escala muito pequena, e bem detro da era da matéria. [Amendola e Tsujikawa \(2010\)](#) comenta que isso é válido para uma ampla gama de modelos. [de Felice, Kobayashi e Tsujikawa \(2011\)](#) deduzem essa equação partindo de uma métrica perturbada e levando em consideração condições de estabilidade, encontrando

$$\frac{k^2}{a^2}\Psi \simeq -4\pi G_{eff}\delta_m, \quad (5.33)$$

$$\ddot{\delta}_m + 2H\dot{\delta}_m - 4\pi G_{eff}\rho_m\delta_m \simeq 0. \quad (5.34)$$

A dependência temporal de Y , η (equações 5.10 - 5.11, visto em termos das funções h_{1-5}) é essencialmente arbitrária, no sentido de que sempre é possível reescrever uma lagrangiana de Horndeski que ajuste completamente os dados em épocas diferentes. Por isso, medir qual a exata dependência temporal experimentalmente pode ser impraticável. O que se faz é escolher parametrizações e checar esses coeficientes com relação aos dados. Já a dependência em k é muito mais robusta: a lagrangiana contém no máximo termos de ordem k^2 , tornando o vínculo com a experimentação mais sólido.

Um caso simples conhecido na literatura é o das teorias $f(R)$, em que substitui-se na ação o escalar de Ricci R por uma função $f(R)$. Nesse caso, obtemos:

$$Y = \frac{1}{1 + f_{,R}} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{k^2}{m_R^2 + k^2} \right), \quad (5.35)$$

onde $m_R^2 = (3f_{,RR})^{-1}$. Para k grande $Y = 4/3$ independentemente do modelo $f(R)$ ([Amendola et al., 2020](#)).

Lembramos o limite $k \rightarrow \infty$, e com $\alpha_T = 0$:

$$Y = \frac{h_1 h_5}{h_3} = \frac{1}{M_*^2} \left[1 + \frac{(2\alpha_M + \alpha_B)^2}{2\alpha_2 + (2\alpha_M + \alpha_B)(2 - \alpha_B)} \right]. \quad (5.36)$$

Impondo estabilidade ($c_s^2 > 0$), $Y \geq 1/M_\star^2$, fazendo com que perturbações de matéria cresçam mais rápido do que com gravidade convencional com mesmo M_\star e mesmo fundo.

Se $\alpha_T = \alpha_1 = 0$, experimentos de gravidade local não detectariam as correções de Yukawa e $\eta \rightarrow 1$ mesmo com gravitação modificada. A massa de Planck ainda varia com o tempo, porém. Num fundo Λ CDM, assumindo $\alpha_B < 0$ constante ou variando lentamente, e $\alpha_M > 0$, Y decrescerá com o tempo, significando um maior crescimento das perturbações para um mesmo Ω_m . Se apenas o setor cinético do campo é modificado, embora exista uma correção de Yukawa, $\eta = 1$.

Medir $\alpha_i(z)$ é complicado mesmo com muitos dados (Motta et al., 2013), então normalmente se usa uma parametrização a ser comparada com as previsões de formação de estrutura. Uma parametrização comum na literatura proposta inicialmente por Bellini e Sawicki (2014) é

$$\alpha_i = (1 - \Omega_m)\hat{\alpha}_i \quad , \quad \hat{\alpha}_i = \text{const} \quad (5.37)$$

Esse tipo de parametrização assume que, pelas α 's surgirem do mesmo campo escalar que a energia escura do fundo, essas funções possam ser proporcionais em tamanho ($\hat{\alpha}_i = 1$). Valores $\hat{\alpha}_i \gg 1$ podem indicar que a pressão e densidade de energia possuem algum tipo de cancelamento que desaparece ao tomar derivadas de ordem maior, indicando um possível ajuste fino (“fine tuning”). Valores $\hat{\alpha}_i \ll 1$ implicam a possibilidade de que a aceleração seja derivada principalmente de uma constante cosmológica, sendo pequena a contribuição de um campo escalar, ou ao menos que a evidência de um campo escalar forte via estrutura de larga escala é fraca. No limite $\alpha_i \rightarrow 0$ e $2\dot{H} + \rho_m \rightarrow 0$ as equações se reduzem a Λ CDM, e a equação de movimento para o escalar é identicamente nula. Nesse caso, para pequenos desvios desse limite, o crescimento de perturbações será muito parecido com o modelo cosmológico padrão. Caso $\alpha_i \rightarrow 0$, mas o fundo não segue Λ CDM, a equação de movimento para o escalar se torna uma equação de vínculo. Esse limite é a maneira correta de modelar as perturbações no contexto de w CDM. Porém um fundo que se parece exatamente Λ CDM não necessariamente terá um crescimento de perturbações igual ao modelo cosmológico padrão, devido à liberdade de escolher as parametrizações para as α 's.

Também é conveniente definir a função de crescimento $G(k, z)$ e o fator de crescimento $f(k, z)$ para modelos de gravitação modificada, já que a separação da dependência de δ_m com relação a k e a já não se dá mais como na relatividade geral:

$$G(k, z) = \frac{\delta_m(k, z)}{\delta_m(k, 0)}, \quad f(k, z) = \frac{\delta'_m(k, z)}{\delta_m(k, z)}. \quad (5.38)$$

6 Implementação da solução para δ_m no HI-CLASS

6.1 CLASS e HI-CLASS

Dentre os programas escritos para resolver as equações acopladas de fundo e as perturbações, um que merece destaque é o “Cosmic Linear Anisotropy Solving System” (CLASS). Construído para simular as classes em C++ mas com a estrutura muito mais paralelizável do C, o CLASS resolve as equações de evolução das perturbações de primeira ordem e também, se requisitado, fornece uma estimativa das perturbações não lineares nas estruturas de larga escala com o modelo Λ CDM. Existe também a extensão do CLASS que implementa a dinâmica de gravitação modificada no contexto do formalismo de Horndeski o qual é denominado “Horndeski in the Cosmic Linear Anisotropy Solving System” (HI-CLASS)(Zumalacárregui et al., 2017). O CLASS e o HI-CLASS são códigos para resolver as equações acopladas de Boltzmann e da gravitação e são extremamente robustos, rápidos e precisos. Eles possuem passo de integração adaptável e testes de viabilidade cosmológica já implementados (como os das equações 5.25 – 5.29), além de esquemas de aproximação como acoplamento forte fóton-bárion, comportamento para fluidos ultra-relativísticos e o fluir da radiação (“radiation streaming”) levando em conta o processo de reionização (Blas; Lesgourgues; Tram, 2011b). A notação utilizada pelas equações de fundo segue o famoso artigo de Ma e Bertschinger (1995) e as condições iniciais, como no artigo, são dadas bem dentro da era da radiação. Para as funções do CLASS, pode-se escolher usar os calibres síncrono ou newtoniano já implementados, mas para o HI-CLASS, a gravitação de Horndeski está implementada apenas no calibre síncrono.

Para fazer o download do CLASS e obter mais informações, está disponível o site https://lesgourg.github.io/class_public/class.html. O download da versão do CLASS com gravitação modificada (HI-CLASS) encontra-se em www.hiclass-code.net ou ainda em https://github.com/miguelzuma/hi_class_public. Segundo os autores, a proposta para a criação desse código de Boltzmann, descrita em Lesgourgues (2011), é que o código preencha 3 requisitos:

- Usabilidade - O código compila e executa em praticamente qualquer plataforma, além de ser extremamente simples de ditar inputs para a execução. Para começar a usar, basta clonar o GitHub do CLASS ou HI-CLASS e dentro da pasta executar o comando `make` ou `make class`. Há duas maneiras de interagir com o programa: via `python`, `ipython`

notebooks ou interação com Monte Python, através do python wrapper, ou diretamente no terminal. O HI-CLASS aceita até dois arquivos de input: um arquivo .ini com dados como H_0 , T_{CMB} , as parametrizações de Horndeski, e quais dados o usuário quer que o código calcule, como o espectro de potência da matéria, a CMB, e as quantidades de fundo; e um arquivo .pre, para ajustar a precisão do que for possível ser ajustado. Esses parâmetros também podem ser passados em um único arquivo desde que não sejam passados duas vezes, ou o código retornará erro. Os arquivos *explanatory.ini* e *hi_class.ini* trazem a lista de possíveis parâmetros a serem dados. Há também exemplos prontos de arquivos .pre, disponíveis no diretório.

Se um determinado parâmetro necessário para os cálculos não for passado no arquivo de “input”, o código usará o valor padrão definido em *source/input*. Dessa forma, se o usuário está contente com as escolhas padrão, ele pode criar um arquivo .ini que contenha apenas as linhas relevantes de *exploratory.ini*. Alguns parâmetros têm mais de uma forma de serem fornecido, como por exemplo, o valor da constante de Hubble pode ser escolhida de maneira equivalente por $h = 0.7$ ou $H_0 = 70$. A sintaxe para esses valores toma a seguinte forma:

```
parâmetro1 = valor1
Comentários sobre esse parâmetro ou valor não são lidos
parâmetro2 = valor2 # mais comentários
# parâmetro_comentado = valor_comentado
```

- Flexibilidade - No CLASS, não só é possível como muito mais fácil generalizar o código para implementar efeitos de física nova ou calcular observáveis diferentes, em comparação com outros códigos de Boltzmann como CMBFAST (Seljak; Zaldarriaga, 1996), CAMB (Lewis; Challinor; Lasenby, 2000) e CMBEASY (Doran, 2005). Também é fácil conectar-se a códigos que extraem parâmetros como CosmoMC (Kilbinger et al., 2011) e MULTINEST (Feroz; Hobson; Bridges, 2009). A estrutura separada em módulos permite ao usuário encontrar exatamente aonde uma determinada tarefa está sendo executada. Relações que dependem da cosmologia adotada estão separadas e identificadas ao longo do código, e não há repetição desnecessária de equações. Passos que levam em conta essas relações dependentes da cosmologia ou dependentes de aproximações são executados automaticamente. O código utiliza alocação dinâmica dos índices, mantendo-os em forma simbólica, permitindo que modificações não estraguem o código original. Para o fundo, um método de Runge-Kutta adaptativo infere automaticamente o tamanho do passo baseado na taxa de variação das equações de fundo. Os resultados são tabulados e guardados, depois interpolados para serem utilizados em outros módulos. O integrador padrão para perturbações é o método “quase-adaptativo” ndf15 (Blas; Lesgourgues; Tram, 2011a), embora o Runge-Kutta adaptativo também possa ser usado.

Adicionar novas espécies é um processo simples de duplicar as referências feitas às espécies já implementadas e adaptar os nomes e equações. Já existem fótons (*g*), bárions (*b*), matéria escura fria (*cdm*), neutrinos não massivos e outras espécies ultrarelativísticas (*ur*), neutrinos massivos e outras formas de matéria escura não fria (*ncdm*), fluidos reais com equação de estado linear e velocidade do som constantes (*fl*) e constante cosmológica (*lambda*). Assim como para uma espécie nova, cada espécie possui uma flag que vai avisar o código sobre a decisão de usar, por exemplo, neutrinos massivos ou não, e todas as partes que envolvem apenas neutrinos massivos ficam dentro de uma mesma estrutura, por exemplo no caso de matéria escura não fria ficaria dentro da condição “`if (has_ncdm == _TRUE_) { . . . }`”. Isso permite que, se uma espécie não estiver presente, o código ignore-a completamente, nunca lhe atribuindo índices e também nunca os necessitando.

A mesma coisa ocorre com a implementação de novos esquemas de aproximação. Os esquemas de aproximação já definidos são a aproximação de acoplamento forte (*tca*), aproximação de fluido ultrarelativístico (*ufa*), aproximação de transmissão de radiação (*rsa*) e aproximação de fluido de matéria escura não fria (*ncdmfa*). As flags de on e off vão indicar quais pedaços do código vão ser executados para aquela aproximação, e as “flags” de método selecionam quais dentre as diferentes equações implementadas serão utilizadas. As “flags” de método são dadas no “input”, e as condições para ligar (*on*) ou desligar (*off*) são definidas por condições dadas em `subroutine-approximations()`. Antes de realizar as integrações de perturbação para um determinado número de onda *k*, o código verifica quantas aproximações serão ligadas e desligadas, e os tempos em que acontecem os “switches on/off”. A cada novo tempo *t_i* o sistema de equações diferenciais e condições iniciais é redefinido.

A mesma ideia é seguida ao adicionar novas “source functions”. Uma “source function” é qualquer equação dependente do tempo e do comprimento de onda que será resolvida usando o fundo, termodinâmica e perturbações, e será guardada no módulo *perturbations* para ser usada nos módulos seguintes, como o módulo *transfer* e o módulo *spectra*. Para calcular o espectro de potência da matéria, a “source function” utilizada é a perturbação de matéria $\delta_m(k, \tau)$, enquanto que para as *density transfers*, as “source functions” são as sobredensidades de cada espécie $\delta_i(k, \eta)$. Sempre, cada “source function” possui um índice e uma “flag”.

- Precisão e velocidade - É muito simples modificar a precisão dos cálculos pois todos os parâmetros de precisão estão unidos num único arquivo *.pre*, além de que dentro do diretório *source* temos um único arquivo com todos os valores padrão para condições iniciais e parâmetros de precisão. Também é possível pular a execução de muitos módulos se o usuário tem necessidade apenas de quantidades termodinâmicas e de fundo, o que melhora ainda mais o tempo de desempenho.

Organização

A pasta principal do HI-CLASS é dividida em diretórios, dos quais é relevante mencionar os seguintes:

- *tools*: rotinas numéricas, como integradores, derivadores, manipuladores de “array”, etc.
- *root*: onde você encontrará o *makefile* do HI-CLASS e alguns exemplos de arquivos de “input”.
- *include*: os “headers” com extensão *.h* que o código usa para se comunicar com todos os blocos.
- *source*: contém os módulos onde ficam definidas as equações físicas que queremos resolver.

Cada módulo está num arquivo *source/module_i.c*, e está ligado a uma estrutura e a um arquivo em *include/module_i.h*. Dentro de cada módulo, antes da função de `module_i_init(...)` ser executada, `structure_i` possui os parâmetros relevantes do módulo, que foram passados no “input”. Depois que a função `module_i_init(...)` é executada, `structure_i` possui todas as informações que os outros módulos precisam. Dados calculados apenas internamente no módulo que não forem salvos em `structure_i` não são mais acessíveis. Quando o código não precisa mais das informações salvas em `structure_i`, a função `module_i_free(...)` é chamada. A figura 24 ilustra a ordem em que são calculadas as quantidades fornecidas pelo código. Sendo mais preciso, a ordem de execução das funções nesses módulos e seus respectivos argumentos é:

```
module_1_init(precision, structure_1)
module_2_init(precision, structure_1, structure_2)
...
module_11_init(precision, structure_1, structure_2, ..., structure_11)
module_11_free(structure_11)
...
module_1_free(structure_1)
```

No arquivo *source/module_i.c*, após a definição das funções descritas acima, outras funções são definidas. Existem funções que são usadas apenas internamente pelo módulo e funções que podem ser chamadas por outros módulos, como a função `background_at_tau(tau, ...)`, que é usada para acessar as tabelas de interpolação calculadas em *background.c*.

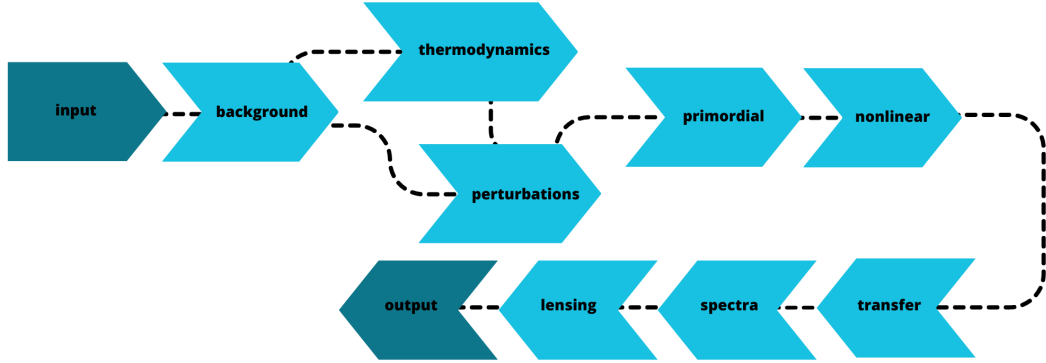


Figura 24 – Ordem de execução dos módulos no HI-CLASS. As quantidades do fundo são calculadas primeiro. O módulo de perturbações usa os resultados já calculados do fundo e da termodinâmica. Em *spectra* esses dados se transformarão no espectro de potência da matéria.

Existem duas formas de usar o HI-CLASS com gravitação modificada. A primeira forma é especificando uma ação dentro da classe de Horndeski, e então calculando as predições para o fundo e as perturbações, dada uma certa condição inicial para o campo escalar. A segunda é usar parametrizações. Nesse caso, o fundo cosmológico é FLRW e diferentes evoluções do fundo cosmológico causadas pela gravitação modificada se darão exclusivamente pela escolha da história de $\rho_{DE}(\tau)$, com a condição de que o fundo não sofra de instabilidades. É possível escolher entre a parametrização *lcdm*, onde a energia escura se comporta como constante cosmológica, e a parametrização *wowa*, uma equação de estado variável para a energia escura, respeitando a relação $\sum_i \Omega_{i,0} = 1$. O usuário também deve especificar parametrizações e valores iniciais para as α , condições essas que vão determinar a evolução das perturbações. Algumas parametrizações já implementadas são: *propto_omega*, em que as funções α são proporcionais à densidade fracional de energia escura; *propto_scale*, em que as funções α são proporcionais ao fator de escala; *planck_linear* e *planck_exponencial*, que são os modelos de k -essência conformamente acoplados à gravidade estudadas pelo Planck. As parametrizações *propto_omega* tem $\alpha_i \rightarrow 0$ no passado, significando que estamos assumindo que a gravitação, e, em especial, as perturbações, não são modificadas em momentos em que a energia escura não contribui significativamente para o total da densidade de energia do Universo.

Aqui cabe uma breve descrição de alguns módulos que compõem esse diretório, pois serão importantes para a próxima seção.

- *input.c* possui duas funções: `input_init_from_arguments()` inicialmente irá definir todos os parâmetros de “input” e precisão como os valores padrão, e então lerá

os “inputs” dados nos arquivos *.ini* e *.pre* e reescreverá os parâmetros que foram especificados pelo usuário. No final, existirá uma estrutura chamada `file_content`. A segunda função, `input_init()` é a função a ser chamada quando o código está conectado com outro. Nesse caso os parâmetros serão lidos diretamente de uma estrutura `file_content` apresentada pelo outro código. Nesse módulo você encontrará numa lista todos os valores que o HI-CLASS assume como padrão. Importante notar que ainda não é possível escolher valores $\Omega_k \neq 0$.

- *background.c* resolve as equações de fundo e guarda valores que serão úteis aos outros modos. Possui as funções `background_at_tau()`, que retorna quantidades do fundo interpoladas em algum tempo conforme τ , e `background_tau_of_z()`, que converte um valor de *redshift* em um valor de tempo conforme.
- *thermodynamics.c* computa toda a termodinâmica usando o RECFAST, além de guardar informações como época da reionização e recombinação. Assim como no módulo de *background*, esse módulo possui a função `thermodynamics_at_z()`, que pode ser chamada por outros módulos.
- *perturbations.c* resolve as perturbações para a métrica e o campo escalar, no calibre síncrono, para cada diferente valor de k dentro do “range” escolhido. Então usa as equações de Euler e continuidade ou a hierarquia de Boltzmann para calcular as perturbações de matéria, e guarda as fontes $S(k, \tau)$. Acessa as quantidades termodinâmicas e de fundo usando uma interpolação dos dados já calculados nos módulos *background.c* e *thermodynamics.c*.
- *primordial.c* computa o espectro de potência primordial e guarda essa informação na estrutura `primordial`. É possível inserir diferentes modelos de espectro de potência primordial aqui.
- *spectra.c* é quem vai calcular e armazenar o espectro de potência da matéria, usando o espectro primordial e as funções de transferência.
- *output.c* é quem vai escrever os arquivos que serão gerados quando usamos o terminal. Por padrão, ele gera alguns arquivos *.dat* como *hi_class_background.dat*, com as quantidades de fundo em função do *redshift*, *hi_class_pk.dat* com o espectro de potência da matéria em função de k , e *hi_class_perturbations.dat* com as perturbações em função de τ ou a .

Outro ponto forte do CLASS tanto para o usuário passivo quanto para o usuário que pretende modificar o código é que existem diversos mecanismos já implementados do código para detectar erros e informar o mais precisamente possível o usuário de qual erro está acontecendo. Para começar, o usuário será imediatamente avisado de inconsistências

que ele tenha passado no arquivo *.ini* ou *.pre*. Ao modificar o código, tanto na compilação quanto na execução, módulos que tenham sido corrompidos vão relatar uma mensagem de erro específica, com o objetivo de na maior parte das vezes reconhecer o erro imediatamente.

6.2 Implementação das modificações no HI-CLASS

Queremos tornar o HI-CLASS uma ferramenta para investigar novas parametrizações para G_{eff} na equação para δ_m . Por isso, inicialmente devemos implementar a equação (5.34), e observar se a evolução é consistente com o que o HI-CLASS obtém sem usar a aproximação. Isso nos garante que a equação foi implementada corretamente.

Nesta seção descrevemos detalhadamente o passo a passo para implementar essas modificações que servem como guia para quaisquer outras modificações que sejam do interesse de pesquisas futuras de qualquer outro pesquisador ou pesquisadora.

Para implementar nossa modificação, primeiro precisamos da expressão para G_{eff} .

6.2.1 G_{eff}

Para implementar essa modificação, escrevemos em *perturbations.c* um índice para essa variável, e pedimos que o código calcule o valor de G_{eff} ao mesmo tempo em que calcula as fontes. Depois pedimos que esse resultado esteja disponível no “output” do vetor `perturbations`, como $G_{eff}(a)$, dado k , e no “output” do vetor `spectra` como $G_{eff}(k)$, dado a . Os passos para a implementação são descritos abaixo:

Em *perturbations.c*, a primeira função que necessitamos modificar é a função que define os índices que o código irá utilizar, `perturb_indices_of_perturbs()`. Dentro dela, inicialmente definimos a “flag” “`has_source_Geff_smg`” como `false`, por uma questão de consistência. Estamos interessados em perturbações escalares, então vamos definir a quantidade `Geff_smg` dentro da parte reservada a escalares. Quando a flag “`has_smg`” estiver marcada como `true`, vamos escolher que “`has_source_Geff_smg`” seja marcado como `true`. Vamos também definir um índice chamado “`index_tp_Geff_smg`”. Esse índice será nossa identificação dentro da estrutura `perturbations`, sem que precisemos saber qual o número desse índice. O escrito “`ppt->has_source_Geff_smg`” indica que esse índice só será criado se a condição `has_source_smg` for verdadeira.

```
int perturb_indices_of_perturbs(
    struct precision * ppr,
    struct background * pba,
    struct thermo * pth,
    struct perturbs * ppt
```

```

        ) {...
ppt->has_source_Geff_smg = _FALSE_;

if (_scalars_) {
    if (ppt->has_density_transfers == _TRUE_) {...
        if (pba->has_smg == _TRUE_){...
            ppt->has_source_Geff_smg = _TRUE_; /* GEFF MOD */
        }
    }
    class_define_index(ppt->index_tp_Geff_smg, ppt->has_source_Geff_smg,
        index_type,1); /* GEFF MOD */
}
}
}

```

A segunda função a ser modificada é a função que prepara o “output” de *perturbations.c*. Aqui escolhemos o nome da coluna correspondente à nova quantidade que queremos obter. Só é necessário fazer essa modificação se quisermos que essa quantidade apareça no arquivo *.dat* gerado ao final da computação. A quantidade “Geff_smg” será computada como Geff_smg(*a*) para cada *k* escolhido pelo usuário. Geralmente fica em um arquivo salvo na pasta *output* ou *root*, como definida pelo usuário.

```

int perturb_prepare_output(struct background * pba,
                          struct perturbs * ppt){

    if (ppt->k_output_values_num > 0) {
        if (ppt->has_scalars == _TRUE_){
            /* GEFF MOD */
            class_store_columntitle(ppt->scalar_titles, "Geff_smg", pba->has_smg);
        }
    }
}

```

Agora precisamos salvar Geff_smg(*k*) para um determinado *a*. Isso pode ser feito ao escrevermos essa quantidade como uma fonte, logo a próxima função a ser modificada é *perturb_sources()*, onde é possível acessar as quantidades salvas na estrutura do *background*, que são necessárias para calcular Geff_smg:

```

int perturb_sources(
    double tau,
    double * y,

```

```

        double * dy,
        int index_tau,
        void * parameters_and_workspace,
        ErrorMsg error_message
    ) {
if (_scalars_) {
    if (ppt->has_source_phi_smg == _TRUE_) {
        _set_source_(ppt->index_tp_phi_smg) = pvecmetric[ppw->index_mt_vx_smg];

        /*GEEFF MOD */
        /*usando as alphas do background*/
        double bra = ppw->pvecback[pba->index_bg_braiding_smg];
        double run = ppw->pvecback[pba->index_bg_mpl_running_smg];
        double kin = ppw->pvecback[pba->index_bg_kineticity_smg];
        double ten = ppw->pvecback[pba->index_bg_tensor_excess_smg];
        /*definindo densidades e outras quantidades necessárias*/
        double a = ppw->pvecback[pba->index_bg_a];
        double rho_m = ppw->pvecback[pba->index_bg_rho_tot_wo_smg];
        /*m aqui significa bárions, CDM, neutrinos, radiação */
        double H = ppw->pvecback[pba->index_bg_H];
        double H_prime = ppw->pvecback[pba->index_bg_H_prime];
        double H_prime_prime = ppw->pvecback[pba->index_bg_H_prime_prime];
        double Omega_m = rho_m / (H*H);
        double qsi = H_prime / (a*H*H);
        double qsi_p = H_prime_prime / (a*a*H*H) - H_prime/(a*H) -
        -pow(H_prime,2)/(a*a*H*H);
        double bra_p = ppw->pvecback[pba->index_bg_braiding_prime_smg];
        double rho_g = ppw->pvecback[pba->index_bg_rho_g];
        double rho_ur = ppw->pvecback[pba->index_bg_rho_ur];
        double Omega_g = rho_g / (H*H);
        double Omega_ur = rho_ur / (H*H);
        double w_matter = (Omega_g/3. + Omega_ur/3.) / Omega_m;
        /* para o caso dos neutrinos */
        double rho_ncdm_bg = 0.;
        double p_ncdm_bg = 0.;
        double w_ncdm_bg = 0.;
        double Omega_ncdm_bg = 0.;
        int n_ncdm;
        if (pba->has_ncdm == _TRUE_) {

```

```

    for(n_ncdm=0; n_ncdm<pba->N_ncdm; n_ncdm++){
        rho_ncdm_bg += ppw->pvecback[pba->index_bg_rho_ncdm1+n_ncdm];
        p_ncdm_bg += ppw->pvecback[pba->index_bg_p_ncdm1+n_ncdm];
        w_ncdm_bg += p_ncdm_bg/rho_ncdm_bg;
        Omega_ncdm_bg += rho_ncdm_bg / (H*H);

        w_matter += (w_ncdm_bg*Omega_ncdm_bg) / Omega_m;
    }
}
/*-----*/
double M2 = ppw->pvecback[pba->index_bg_M2_smg];
double Omega_mtildo = rho_m/(H*H*M2);
double alpha1 = bra + (bra - 2.)*ten + 2.*run;
double alpha2 = bra*qsi + bra_p/(a*H) -2.*qsi
-3.*(1. + w_matter)*Omega_mtildo;
double mu2 = -3.*(2.*qsi*qsi + qsi_p + qsi*(3. + run))*bra
- 3.*qsi*alpha2;
double h1 = (ten + 1.)/ M2;
double h3 = (alpha1*(2. - bra) +2.*alpha2)/(2*H*H*mu2);
double h5 = (alpha1*(run + 1.)/(ten + 1.) + alpha2)/(H*H*mu2);
double Geff_smg = h1*(1. + pow(k,2)*h5) / (1. + pow(k,2)*h3);

_set_source_(ppt->index_tp_Geff_smg) = Geff_smg;
}
}
}

```

Ao final acessamos essa fonte pela identificação “Geff_smg”. A seguir, é necessário definir Geff_smg novamente para que o código calcule Geff_smg(a) e salve no arquivo de “output”. Isso é necessário pois não é possível acessar G_{eff} como *source* aqui.

```

int perturb_print_variables(double tau,
                           double * y,
                           double * dy,
                           void * parameters_and_workspace,
                           ErrorMsg error_message
                           ) {

struct perturb_parameters_and_workspace * pppaw;
/** Summary: */

```

```

    /** - define local variables */
    double Geff1=0.; /* GEFf MOD */

if (_scalars_) {
    if (pba->has_smg == _TRUE_){

/* GEFf MOD */
        /*usando as alphas do background*/
        double bra = ppw->pvecback[pba->index_bg_braiding_smg];
        [...]
        double h5 = (alpha1*(run + 1.)/(ten + 1.) + alpha2)/(H*H*mu2);
        Geff1 = h1*(1. + pow(k,2)*h5) / (1. + pow(k,2)*h3);
        }
        [...]
        /* GEFf MOD */
        class_store_double(dataptr, Geff1, pba->has_smg, storeidx);
    }
}

```

Em *perturbations.h* é necessário definir as “flags” que serão usadas por outros módulos, para que os módulos se comuniquem:

```

short has_source_Geff_smg; /* GEFf MOD */
int index_tp_Geff_smg; /* GEFf MOD */

```

Em *spectra.c*, vamos adicionar um índice para a fonte `Geff`_{tr}_smg:

```

int spectra_indices(
    struct background * pba,
    struct perturbs * ppt,
    struct transfers * ptr,
    struct primordial * ppm,
    struct spectra * psp
){

    class_define_index(psp->index_tr_Geff_smg,ppt->has_source_Geff_smg,
index_tr,1);
    /* GEFf MOD*/
}

```

Na função abaixo as quantidades de fundo para cada tempo são acessadas para cada k , e essa função calcula as funções de transferência e quaisquer outras funções que tenham a mesma estrutura.

```

int spectra_matter_transfers(
    struct background * pba,
    struct perturbs * ppt,
    struct spectra * psp
) {
class_call(background_at_tau(pba,
    ppt->tau_sampling[index_tau-psz->ln_tau_size+ppt->tau_size],
    /* for this last argument we could have passed
    exp(psz->ln_tau[index_tau]) but we would then loose
    precision in the exp(log(x)) operation) */
    pba->long_info,
    pba->inter_normal,
    &last_index_back,
    pvecback_sp_long),
    pba->error_message,
    psz->error_message);

for (index_k=0; index_k<psz->ln_k_size; index_k++) {
    for (index_ic = 0; index_ic < psz->ic_size[index_md]; index_ic++) {

        delta_rho_tot=0.;
        rho_tot=0.;
        rho_plus_p_theta_tot=0.;
        rho_plus_p_tot=0.;

        /*GEFF MOD*/

        if (ppt->has_source_Geff_smg == _TRUE_) {

psz->matter_transfer[((index_tau*psz->ln_k_size + index_k) * psz->ic_size[index_md] +
index_ic) * psz->tr_size + psz->index_tr_Geff_smg] = ppt->sources[index_md]
    [index_ic * ppt->tp_size[index_md] + ppt->index_tp_Geff_smg]
    [(index_tau-psz->ln_tau_size+ppt->tau_size) * ppt->k_size[index_md] + index_k];
        }
    }
}

```

```

}
}

```

Salvamos o título da coluna em que será salva a fonte em *spectra.c*:

```

int spectra_output_tk_titles(struct background *pba,
                             struct perturbs *ppt,
                             enum file_format output_format,
                             char titles[_MAXTITLESTRINGLENGTH_])
{
    if (output_format == class_format) {
        if (ppt->has_density_transfers == _TRUE_) {
            class_store_columntitle(titles, "Geff_smg",
                                   ppt->has_source_Geff_smg); /*Geff MOD*/
        }
    }
}

```

Agora colocamos a tabela de dados no “output”:

```

int spectra_output_tk_data(
    struct background * pba,
    struct perturbs * ppt,
    struct spectra * psp,
    enum file_format output_format,
    double z,
    int number_of_titles,
    double *data
) {
    if (output_format == class_format) {
        if (ppt->has_density_transfers == _TRUE_) {
            class_store_double(dataptr, tk[psp->index_tr_Geff_smg],
                              ppt->has_source_Geff_smg, storeidx); /*Geff MOD*/
        }
    }
}

```

Para saber se a implementação foi feita corretamente, nós também pedimos o “output” de algumas funções como H'' e α'_B , e reescrevemos a expressão para G_{eff} em um código em python, e comparamos os resultados.

6.2.2 δ_m

Queremos obter a solução da equação (5.34), que descreve perturbações em gravitação modificada. Essa é uma equação de segunda ordem para δ_m . Essa equação é válida bem dentro da era da matéria, portanto é nessa época que o HI-CLASS deve começar a calcular. Uma maneira de obter isso é criando uma estrutura de aproximações como as já inseridas no código. Como queremos resolver uma equação diferencial de ordem 2, escrevemos a equação na forma de um sistema de equações acopladas de primeira ordem. Esse sistema de equações será resolvido dentro do vetor derivada, e a resposta $\delta_m(k, a)$ está sendo salva no vetor de saída em *perturbations.c* e *spectra.c*. Para verificar se está funcionando corretamente, comparamos o resultado da nossa equação com a solução completa do HI-CLASS.

Uma aproximação funciona da maneira descrita a seguir. Damos as condições em que a aproximação liga/desliga; escolhemos $a = 0.05$ mas essa quantidade pode ser mudada no arquivo *.ini* definindo um novo valor para o parâmetro de precisão `a_init_deep_mat`. A equação da aproximação deve começar a ser resolvida com as condições iniciais que o próprio HI-CLASS estava calculando para δ_m até aqui. Definimos isso em *perturbations.c*, onde o código recebe as novas condições iniciais após as aproximações serem ligadas/desligadas.

Todas as modificações que devemos fazer no código são descritas como segue:

Dentro de `input_read_parameters()` escrevemos um comando para que o HI-CLASS leia o valor de início da aproximação como um comando `parâmetro1 = valor1`:

```
class_read_double("a_init_deep_mat", ppr->a_init_deep_mat);  
/* GEFF MOD - aproximação */
```

Em princípio, poderia-se escolher qualquer valor de a suficientemente dentro da era da matéria e antes da energia escura começar a afetar as perturbações. Pela nossa aproximação de potencial constante, já sabemos que devemos obedecer $a > 10^{-2}$. Em testes numéricos, percebemos que valores ideais para o início ficam perto de $a = 0.05$ ($z = 19$). Definimos como padrão para o início da aproximação $z = 19$ (poderemos mudar esse valor exato nos parâmetros de input):

```
input_default_params()  
ppr->a_init_deep_mat=0.05; /* GEFF MOD - aproximação */
```

Também modificamos *commom.h* para incluir o parâmetro de precisão dentro da estrutura *perturbations*:


```

struct precision{
    double a_init_deep_mat; /* DELTA MOD - aproximação */
}

```

Agora já temos um parâmetro de precisão `a_init_deep_mat`, que usaremos para ditar quando nossa aproximação começa.

Na função `input_read_parameters()`, na leitura do input “output”, vamos criar uma sigla para ativar/desativar o cálculo de δ_m :

```

if ((strstr(string1, "dGt") != NULL) || (strstr(string1, "DGt") != NULL)
|| (strstr(string1, "DGT") != NULL)){
    ppt->has_delta_Geff_test = _TRUE_;
    ppt->has_perturbations = _TRUE_;
}

```

Logo, quando pedimos “dGt” no arquivo `.ini`, será trocado a “flag” `has_delta_Geff_test` para “true”. Essa “flag” deve ser escrita como padrão “alse” em `input_default_parameters()`. A aproximação será escrita usando um condicional que escrevemos como

`if (ppt->has_delta_Geff_test == _TRUE_){}`, logo quaisquer cálculos e resultados só serão computados se o usuário explicitamente pedir por “dGt” no arquivo `.ini`.

Em `perturb_indices_of_perturbs()` escrevemos inicialmente

```

ppt->has_source_delta_m_smg = _FALSE_; /* GEFF MOD */
ppt->has_source_theta_m_smg = _FALSE_; /* GEFF MOD */

```

Depois, se for pedido “dGt”, trocamos as “flags” para “true”:

```

int perturb_indices_of_perturbs(
    struct precision * ppr,
    struct background * pba,
    struct thermo * pth,
    struct perturbs * ppt
) {
    if (_scalars_) {
        if (ppt->has_delta_Geff_test == _TRUE_){
            ppt->has_source_delta_m_smg = _TRUE_;
            ppt->has_source_theta_m_smg = _TRUE_;
        }
    }
}

```

Definimos os índices para δ_m e θ_m que usaremos nas equações:

```
int perturb_indices_of_perturbs(
    struct precision * ppr,
    struct background * pba,
    struct thermo * pth,
    struct perturbs * ppt
) {

    [...]

    if (_scalars_) {
        class_define_index(ppt->index_tp_delta_m_smg, ppt->has_source_delta_m_smg,
            index_type, 1); /* GEF MOD */
        class_define_index(ppt->index_tp_theta_m_smg, ppt->has_source_theta_m_smg,
            index_type, 1); /* GEF MOD */
    }
}
```

Depois, criamos um índice para a aproximação, e o definimos inicialmente como desligado.

```
int perturb_workspace_init(
    struct precision * ppr,
    struct background * pba,
    struct thermo * pth,
    struct perturbs * ppt,
    int index_md,
    struct perturb_workspace * ppw
) {

    if (_scalars_) {
        /* GEF MOD */
        if (ppt->has_delta_Geff_test == _TRUE_){
            class_define_index(ppw->index_ap_deepmat, ppt->has_delta_Geff_test, index_ap, 1);
            [...]
        }
        if ( ppt->has_delta_Geff_test == _TRUE_ ) {
            ppw->approx[ppw->index_ap_deepmat] = (int)deepmat_off;
        }
    }
}
```

Em `perturb_prepare_output()`, nomeamos as colunas em que estarão os resultados de δ_m e θ_m

```
if (ppt->has_delta_Geff_test == _TRUE_) {
    class_store_columntitle(ppt->scalar_titles, "delta_m_smg",
ppt->has_source_delta_m_smg);
    class_store_columntitle(ppt->scalar_titles, "theta_m_smg",
ppt->has_source_theta_m_smg);
}
```

Em `perturb_find_approximation_switches()`, por uma questão de coerência com as outras aproximações, vamos definir que o usuário terá acesso à informação de quando um modo passa a ser calculado pela aproximação.

```
if ((interval_approx[index_switch-1][ppw->index_ap_deepmat]==(int)deepmat_off) &&
(interval_approx[index_switch][ppw->index_ap_deepmat]==(int)deepmat_on))
fprintf(stdout, "Mode k=%e: will switch matter overdensity evolution on at
tau=%e\n", k, interval_limit[index_switch]);
```

Agora vamos definir novos índices, para as variáveis usadas na equação da aproximação:

```
int perturb_vector_init(
    struct precision * ppr,
    struct background * pba,
    struct thermo * pth,
    struct perturbs * ppt,
    int index_md,
    int index_ic,
    double k,
    double tau,
    struct perturb_workspace * ppw,
    /* ppw->pv unallocated if pa_old = NULL,
    allocated and filled otherwise */
    int * pa_old
) {
    if (_scalars_) {
        if (ppw->approx[ppw->index_ap_deepmat] == (int)deepmat_on){
            class_define_index(ppv->index_pt_delta_m_smg,
```

```

    ppt->has_delta_Geff_test == _TRUE_,index_pt,1);
    class_define_index(ppv->index_pt_theta_m_smg,
    ppt->has_delta_Geff_test == _TRUE_,index_pt,1);
}
}
}

```

Aqui devemos dizer quem são δ_m e θ_m para a aproximação. Quando a aproximação passa de desligada para ligada, as condições iniciais são dadas pelos valores dessas variáveis calculadas sem a aproximação. Por exemplo, o primeiro valor de δ_m é simplesmente $\frac{\rho_c \delta_c + \rho_b \delta_b}{\rho_c + \rho_b}$, que são quantidades calculadas pelo HI-CLASS. Após isso, os novos valores para δ_m saem da solução da equação de segunda ordem implementada adiante.

```

int perturb_vector_init(
    struct precision * ppr,
    struct background * pba,
    struct thermo * pth,
    struct perturbs * ppt,
    int index_md,
    int index_ic,
    double k,
    double tau,
    struct perturb_workspace * ppw,
    /*ppw->pv unallocated if pa_old = NULL,
    allocated and filled otherwise */
    int * pa_old
) {
    if (_scalars_) {
        /* GEFF MOD */
        if ((pa_old[ppw->index_ap_deepmat] == (int)deepmat_off) &&
            (ppw->approx[ppw->index_ap_deepmat] == (int)deepmat_on)){
            double rho_cdm_plus_b = ppw->pvecback[pba->index_bg_rho_cdm] +
            ppw->pvecback[pba->index_bg_rho_b];
            double delta_c_prime = -ppw->pvecmetric[ppw->index_mt_h_prime]/2.;
            double delta_b_prime = - ppw->pv->y[ppw->pv->index_pt_theta_b]
            -ppw->pvecmetric[ppw->index_mt_h_prime]/2.;
            double delta_cdm_plus_b = (ppw->pvecback[pba->index_bg_rho_cdm]
            *ppw->pv->y[ppw->pv->index_pt_delta_cdm]
            +ppw->pvecback[pba->index_bg_rho_b]

```

```

*ppw->pv->y[ppw->pv->index_pt_delta_b])/rho_cdm_plus_b;
double theta_cdm_plus_b = (ppw->pvecback[pba->index_bg_rho_cdm]
*delta_c_prime + ppw->pvecback[pba->index_bg_rho_b] *delta_b_prime)
*ppw->pvecback[pba->index_bg_H]
*ppw->pvecback[pba->index_bg_a]/rho_cdm_plus_b;

    ppv->y[ppv->index_pt_delta_m_smg] = delta_cdm_plus_b;
    ppv->y[ppv->index_pt_theta_m_smg] = theta_cdm_plus_b;
    [...]
}
else if (ppw->approx[ppw->index_ap_deepmat] == (int)deepmat_on) {
    ppv->y[ppv->index_pt_delta_m_smg] =
        ppw->pv->y[ppw->pv->index_pt_delta_m_smg];
    ppv->y[ppv->index_pt_theta_m_smg] =
        ppw->pv->y[ppw->pv->index_pt_theta_m_smg];
}
}
}

```

Aqui é que fica definido que a aproximação começa de acordo com o parâmetro de precisão estipulado:

```

int perturb_approximations(
    struct precision * ppr,
    struct background * pba,
    struct thermo * pth,
    struct perturbs * ppt,
    int index_md,
    double k,
    double tau,
    struct perturb_workspace * ppw,
    double * tau_scheme_qs_smg
) {
if (_scalars_) {
    if (ppt->has_delta_Geff_test == _TRUE_) {
    if (ppw->pvecback[pba->index_bg_a] > ppr->a_init_deep_mat) {
        ppw->approx[ppw->index_ap_deepmat] = (int)deepmat_on;
    }
    else {
        ppw->approx[ppw->index_ap_deepmat] = (int)deepmat_off;
    }
}
}
}

```

```

    }
}
}
}

```

Em seguida, vamos salvar a source como sendo inicialmente δ_m normalmente calculado pelo HI-CLASS quando a aproximação está desligada, depois δ_m calculado pela aproximação.

```

int perturb_sources(
    double tau,
    double * y,
    double * dy,
    int index_tau,
    void * parameters_and_workspace,
    ErrorMsg error_message
) {
if (_scalars) {
/* GEFF MOD */
if (ppt->has_source_delta_m_smg == _TRUE_){
    double rho_cdm_plus_b1 = ppw->pvecback[pba->index_bg_rho_cdm]
+ ppw->pvecback[pba->index_bg_rho_b];
    double delta_cdm_plus_b1 = (ppw->pvecback[pba->index_bg_rho_cdm]
*ppw->pv->y[ppw->pv->index_pt_delta_cdm] +
ppw->pvecback[pba->index_bg_rho_b]
* ppw->pv->y[ppw->pv->index_pt_delta_b])/rho_cdm_plus_b1;
if (ppw->approx[ppw->index_ap_deepmat] == (int)deepmat_on){
    delta_cdm_plus_b1 = y[ppw->pv->index_pt_delta_m_smg];
}
_set_source_(ppt->index_tp_delta_m_smg) = delta_cdm_plus_b1;
}

if (ppt->has_source_theta_m_smg == _TRUE_){
    double rho_cdm_plus_b2 = ppw->pvecback[pba->index_bg_rho_cdm] +
ppw->pvecback[pba->index_bg_rho_b];
    double delta_c_prime2 = -ppw->pvecmetric[ppw->index_mt_h_prime]/2.;
    double delta_b_prime2 = - ppw->pv->y[ppw->pv->index_pt_theta_b]
-ppw->pvecmetric[ppw->index_mt_h_prime]/2.;
    double theta_cdm_plus_b2 = (ppw->pvecback[pba->index_bg_rho_cdm]
*delta_c_prime2 + ppw->pvecback[pba->index_bg_rho_b]

```

```

    *delta_b_prime2)*ppw->pvecback[pba->index_bg_H]
    *ppw->pvecback[pba->index_bg_a]/rho_cdm_plus_b2;
    if (ppw->approx[ppw->index_ap_deepmat] == (int)deepmat_on){
        theta_cdm_plus_b2 = y[ppw->pv->index_pt_theta_m_smg];
    }
    _set_source_(ppt->index_tp_theta_m_smg) = theta_cdm_plus_b2;
}
}
}

```

Da mesma forma vamos pedir para esses valores saírem nas colunas que já criamos no “output” de *perturbations*:

```

int perturb_print_variables(double tau,
                           double * y,
                           double * dy,
                           void * parameters_and_workspace,
                           ErrorMessage error_message
                           ) {
double delta1=0., theta1=0.; /* GEFF MOD */
[...]
    /* GEFF MOD */
    double rho_cdm_plus_b2 = ppw->pvecback[pba->index_bg_rho_cdm] +
    ppw->pvecback[pba->index_bg_rho_b];
    double delta_c_prime2 = -ppw->pvecmetric[ppw->index_mt_h_prime]/2.;
    double delta_b_prime2 = - ppw->pv->y[ppw->pv->index_pt_theta_b]
    -ppw->pvecmetric[ppw->index_mt_h_prime]/2.;
    double delta_cdm_plus_b2 = (ppw->pvecback[pba->index_bg_rho_cdm]
    *ppw->pv->y[ppw->pv->index_pt_delta_cdm]
    + ppw->pvecback[pba->index_bg_rho_b]
    * ppw->pv->y[ppw->pv->index_pt_delta_b])/rho_cdm_plus_b2;
    double theta_cdm_plus_b2 = (ppw->pvecback[pba->index_bg_rho_cdm]
    *delta_c_prime2 + ppw->pvecback[pba->index_bg_rho_b]
    *delta_b_prime2)/rho_cdm_plus_b2;

    delta1 = delta_cdm_plus_b2;
    theta1= theta_cdm_plus_b2;
    if (ppw->approx[ppw->index_ap_deepmat] == (int)deepmat_on) {
        delta1 = y[ppw->pv->index_pt_delta_m_smg];
        theta1 = y[ppw->pv->index_pt_theta_m_smg];
    }
}

```

```

    }

    class_store_double(dataptr, delta1, pba->has_delta_Geff_test, storeidx);
    class_store_double(dataptr, theta1, pba->has_delta_Geff_test, storeidx);
}

```

Finalmente, dentro do vetor derivada, vamos escrever qual o sistema de equações que deve ser resolvido quando a aproximação for ligada. Vamos reescrever novamente a forma do G_{eff} aqui como variável local, pois não é possível acessá-lo pela definição anterior:

```

int perturb_derivs(double tau,
                  double * y,
                  double * dy,
                  void * parameters_and_workspace,
                  ErrorMsg error_message
                  ) {

    if (_scalars_) {
        /* GEFF MOD */
        if (ppt->has_delta_Geff_test == _TRUE_){
            if (ppw->approx[ppw->index_ap_deepmat] == (int)deepmat_on) {
                double bra = ppw->pvecback[pba->index_bg_braiding_smg];
                double run = ppw->pvecback[pba->index_bg_mpl_running_smg];
                [...]
                double h1 = (ten+1.) / M2;
                double h3 = (alpha1*(2. - bra) + 2.*alpha2) / (2.*H*H*mu2);
                double h5 = (alpha1*((run+1.) / (ten+1.)) + alpha2) / (H*H*mu2);
                double Geff_2 = h1*(1. + pow(k,2)*h5) / (1. + pow(k,2)*h3);

                dy[pv->index_pt_delta_m_smg] = y[pv->index_pt_theta_m_smg] ;
                dy[pv->index_pt_theta_m_smg] = - a_prime_over_a *
                y[pv->index_pt_theta_m_smg] + 1.5 * Geff_2* a*a
                *(ppw->pvecback[pba->index_bg_rho_cdm] + ppw->pvecback[pba->index_bg_rho_b])
                *y[pv->index_pt_delta_m_smg] ;
            }
        }
    }
}

```

Em *perturbations.h* é necessário definir vários elementos que serão usados, como as “flags” da aproximação e os índices utilizados em cada estrutura:


```

enum deepmat_flags {deepmat_off,deepmat_on}; /* GEFF MOD */

struct perturbs
{
    short has_delta_Geff_test;          /* GEFF MOD */

struct perturbs
{
    short has_source_delta_m_smg; /* GEFF MOD */
    short has_source_theta_m_smg; /* GEFF MOD */

struct perturbs
{
    int index_tp_delta_m_smg; /* GEFF MOD */
    int index_tp_theta_m_smg; /* GEFF MOD */

struct perturb_vector
{
    int index_pt_delta_m_smg; /* GEFF MOD */
    int index_pt_theta_m_smg; /* GEFF MOD */

struct perturb_workspace
{
    int index_ap_deepmat; /* GEFF MOD*/
}

```

Em *spectra.h* definimos os índices utilizados nesse módulo:

```

struct spectra {
    int index_tr_delta_m_smg; /* GEFF MOD */
    int index_tr_theta_m_smg; /* GEFF MOD */
}

```

Em *spectra.c* começamos por adicionar esses índices ao módulo:

```

int spectra_indices(){
    class_define_index(psp->index_tr_delta_m_smg,
ppt->has_source_delta_m_smg,index_tr,1); /* GEFF MOD */
    class_define_index(psp->index_tr_theta_m_smg,
ppt->has_source_delta_m_smg,index_tr,1); /* GEFF MOD */
}

```

Aqui definimos como $\delta_m(k)$ e $\theta_m(k)$ vão sair no “output” do módulo *spectra*:

```

int spectra_matter_transfers(
    struct background * pba,
    struct perturbs * ppt,
    struct spectra * psp
) {
    if (ppt->has_delta_Geff_test == _TRUE_){
        if (ppt->has_source_delta_m_smg == _TRUE_) {
            psp->matter_transfer[((index_tau*psp->ln_k_size + index_k)
            *psp->ic_size[index_md] + index_ic) * psp->tr_size
            + psp->index_tr_delta_m_smg] = ppt->sources[index_md]
            [index_ic * ppt->tp_size[index_md] + ppt->index_tp_delta_m_smg]
            [(index_tau-psp->ln_tau_size+ppt->tau_size)
            *ppt->k_size[index_md] + index_k];
        }

        if (ppt->has_source_theta_m_smg == _TRUE_) {
            psp->matter_transfer[((index_tau*psp->ln_k_size + index_k)
            *psp->ic_size[index_md] + index_ic) * psp->tr_size
            + psp->index_tr_theta_m_smg] = ppt->sources[index_md]
            [index_ic * ppt->tp_size[index_md] + ppt->index_tp_theta_m_smg]
            [(index_tau-psp->ln_tau_size+ppt->tau_size)
            *ppt->k_size[index_md] + index_k];
        }
    }
}

```

Definimos o título das colunas em que esses dados serão salvos:

```

int spectra_output_tk_titles(struct background *pba,
    struct perturbs *ppt,
    enum file_format output_format,
    char titles[_MAXTITLESTRINGLENGTH_]
){
    /* GEFF MOD */
    if (ppt->has_delta_Geff_test == _TRUE_){
        class_store_columntitle(titles,"delta_m_smg",
            ppt->has_source_delta_m_smg);
        class_store_columntitle(titles,"theta_m_smg",
            ppt->has_source_theta_m_smg);
    }
}

```

```

}
}

```

E por fim salvamos os dados nas respectivas colunas:

```

int spectra_output_tk_data(
    struct background * pba,
    struct perturbs * ppt,
    struct spectra * psp,
    enum file_format output_format,
    double z,
    int number_of_titles,
    double *data
) {
    /* GEFF MOD */
    if (ppt->has_delta_Geff_test == _TRUE_){
        class_store_double(dataptr,tk[psp->index_tr_delta_m_smg],
            ppt->has_source_delta_m_smg,storeidx);
        class_store_double(dataptr,tk[psp->index_tr_theta_m_smg],
            ppt->has_source_theta_m_smg,storeidx);
    }
}

```

6.2.3 Taxa de Crescimento f

Para obter a taxa de crescimento $f(k, z) = \frac{\delta'_m(k, z)}{\delta_m(k, z)}$, adicionamos as seguintes linhas de código:

Em `perturb_prepare_output`, escrevemos

```

class_store_columntitle(ppt->scalar_titles,"growF1",
    ppt->has_source_delta_m_smg);
class_store_columntitle(ppt->scalar_titles,"growF2",
    ppt->has_source_delta_m_smg);

```

Depois, em `perturb_print_variables`, juntamente da definição de `delta_m_smg`, escrevemos

```

double growF1=0., growF2=0.; /* GEFF MOD */
[...]
/* Forma aproximada para f encontrada na literatura */

```

```

growF1 = pow(rho_cdm_plus_b3/pow(ppw->pvecback[pba->index_bg_H],2),0.55);
/* f em termos da aproximação */
growF2 = theta1/(delta1*ppw->pvecback[pba->index_bg_H]*
ppw->pvecback[pba->index_bg_a]);
[...]
class_store_double(dataptr, growF1, ppt->has_delta_Geff_test, storeidx);
class_store_double(dataptr, growF2, ppt->has_delta_Geff_test, storeidx);

```

6.3 Resultados obtidos com a implementação

Apresentamos aqui os resultados em forma de gráfico de todas as partes da implementação. Vamos comentar sobre algumas formas que G_{eff} assume, de forma que é possível ter uma idéia de como propôr novas parametrizações que não sejam em função das α s. Lembramos que estamos trabalhando com unidades $8\pi G/3 = 1$, de forma que $G_{eff} = G$ quando $G_{eff} = 1$. Em seguida, mostramos os gráficos para δ_m e para o fator de crescimento f , comparando-os com seus valores esperados.

6.3.1 G_{eff}

O HI-CLASS oferece algumas parametrizações diferentes já implementadas para as α s. Cada tipo de parametrização corresponde a lagrangianas diferentes. Abaixo, verificamos seus diferentes impactos na forma do G_{eff} .

Começamos por observar o comportamento de G_{eff} na parametrização propto_omega. Modificações no valor de α_K não afetam essa função, como já previsto para o regime quase-estático, então vamos manter $\alpha_K = 1$. Uma análise de valores iniciais possíveis para as α s, que passam nos testes de consistência já implementados, foi feita no artigo do HI-CLASS (Zumalacárregui et al., 2017). Nas figuras 25 e 26, mantivemos $\alpha_M = \alpha_T = 0$ e observamos o comportamento de G_{eff} ao definir diferentes valores iniciais para α_B . Podemos observar que é um comportamento crescente tanto com relação a k quanto a a . Embora os gráficos para diferentes valores iniciais de α_B sejam bastante similares, a diferença aqui entre os dois casos é o valor de G_{eff} proporcionalmente maior para valores maiores de α_B . Em todos os casos, $G_{eff}(k)$ tem um comportamento do tipo “tangente hiperbólica”.

Nas figuras 27 e 28, temos $\alpha_B = \alpha_T = 0$, e usamos diferentes valores iniciais para α_M . Nesse caso, temos um comportamento diferente com relação a a do que nos gráficos anteriores. Há uma oscilação, onde o valor de G_{eff} por vezes é menor que a unidade, e às vezes é maior que 1. Além disso, aqui o valor inicial também impacta nos valores que G_{eff} consegue atingir, principalmente perto de $a = 1$. Com relação a k , observamos que

para uma certa faixa de valores de k , G_{eff} fica abaixo de 1, e na outra faixa, fica acima. $G_{eff}(k)$ nesse caso também tem um comportamento do tipo “tangente hiperbólica”.

Na figura 29 analisamos o impacto de α_T . Vemos que não há grandes modificações no comportamento de G_{eff} com relação à Relatividade Geral, indicando baixa contribuição de α_T . Existe uma clara indicação de erro numérico na parte esquerda do gráfico para $G_{eff}(a)$. Outros valores de α_T apresentam comportamento similar.

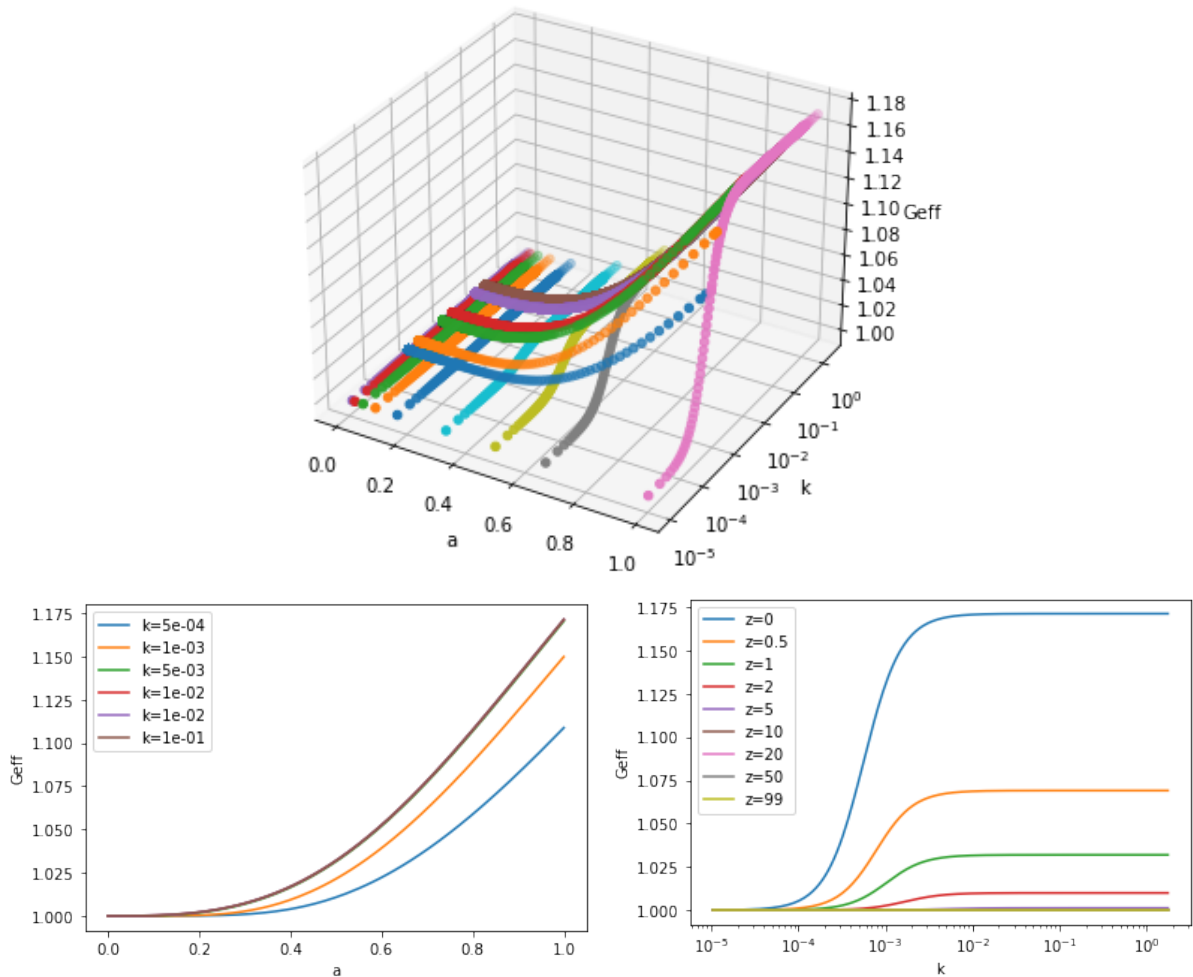


Figura 25 – Visualização 3D para $G_{eff}(k, a)$. Abaixo, $G_{eff}(a)$ para alguns valores de k e $G_{eff}(k)$ para alguns valores de z . A parametrização usada foi propto_omega com $\alpha_K = 1$, $\alpha_M = \alpha_T = 0$, $\alpha_B = 0.625$. Podemos observar que é um comportamento crescente tanto com relação a k quanto a a . $G_{eff}(k)$ tem um comportamento do tipo “tangente hiperbólica”.

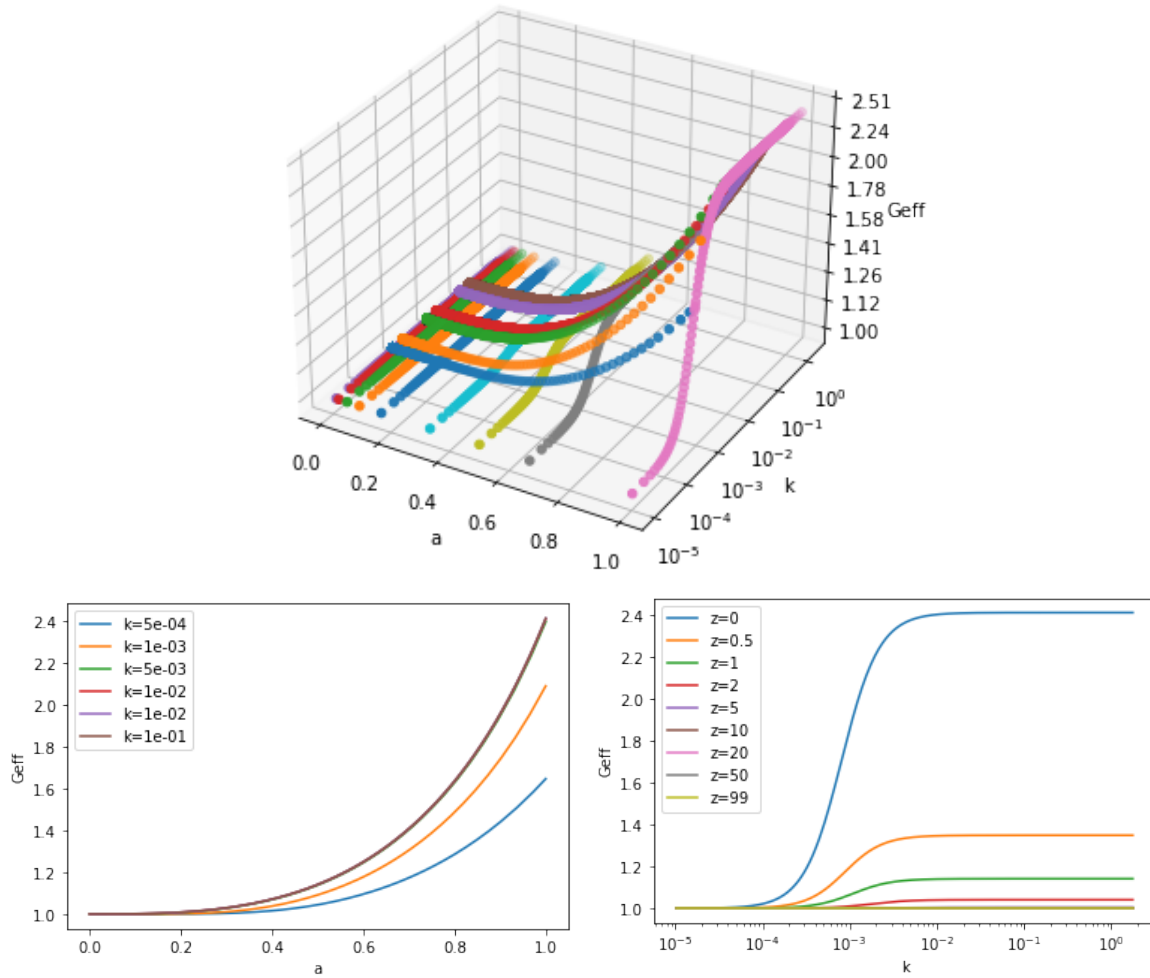


Figura 26 – Visualização 3D para $G_{eff}(k, a)$. Abaixo, $G_{eff}(a)$ para alguns valores de k e $G_{eff}(k)$ para alguns valores de z . A parametrização usada foi propto_omega com $\alpha_K = 1$, $\alpha_M = \alpha_T = 0$, $\alpha_B = 2.5$. Podemos observar que é um comportamento crescente tanto com relação a k quanto a a . $G_{eff}(k)$ tem um comportamento do tipo “tangente hiperbólica”.

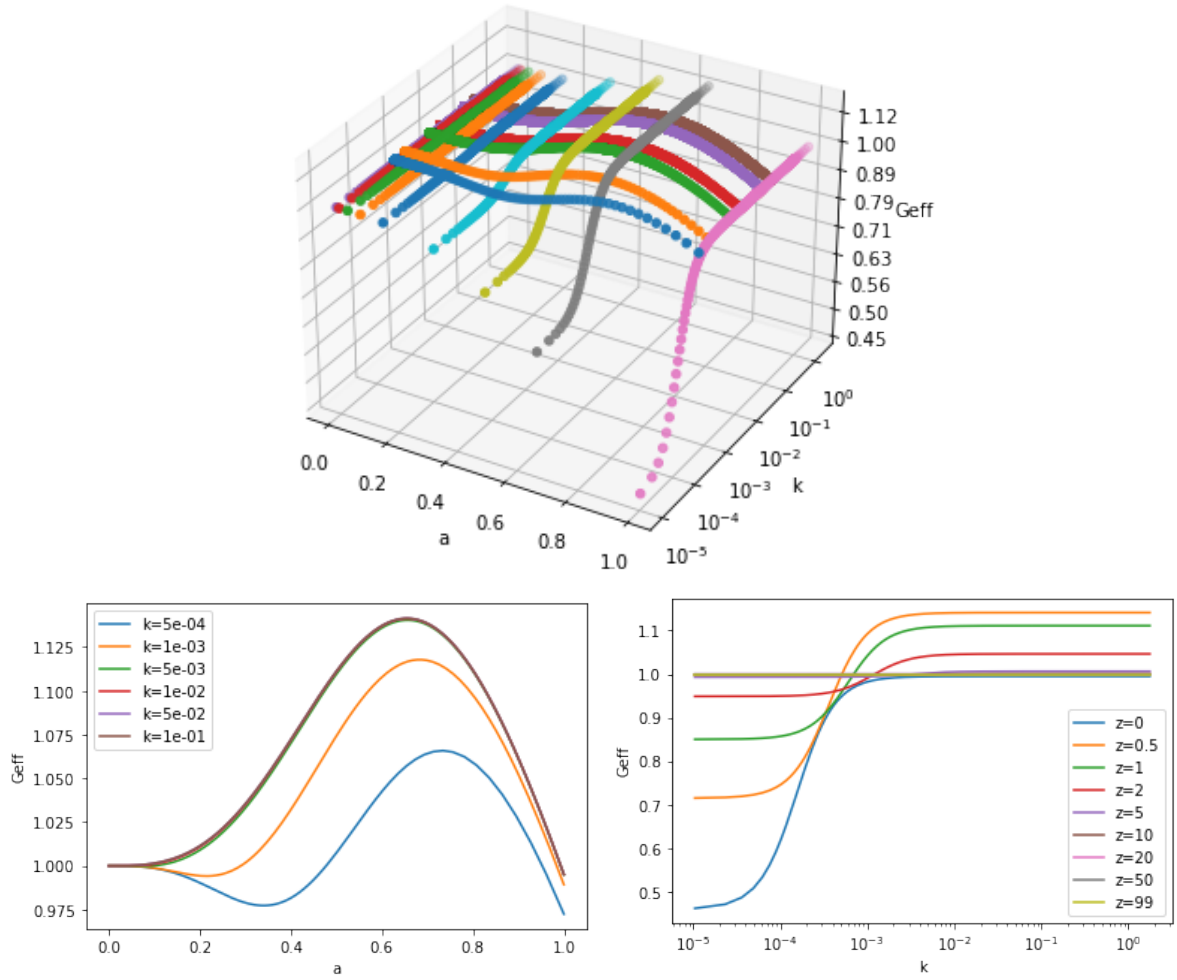


Figura 27 – Visualização 3D para $G_{eff}(k, a)$. Abaixo, $G_{eff}(a)$ para alguns valores de k e $G_{eff}(k)$ para alguns valores de z . A parametrização usada foi propto_omega com $\alpha_K = 1$, $\alpha_B = \alpha_T = 0$, $\alpha_M = 2$. Aqui também $G_{eff}(k)$ tem um comportamento do tipo “tangente hiperbólica”.

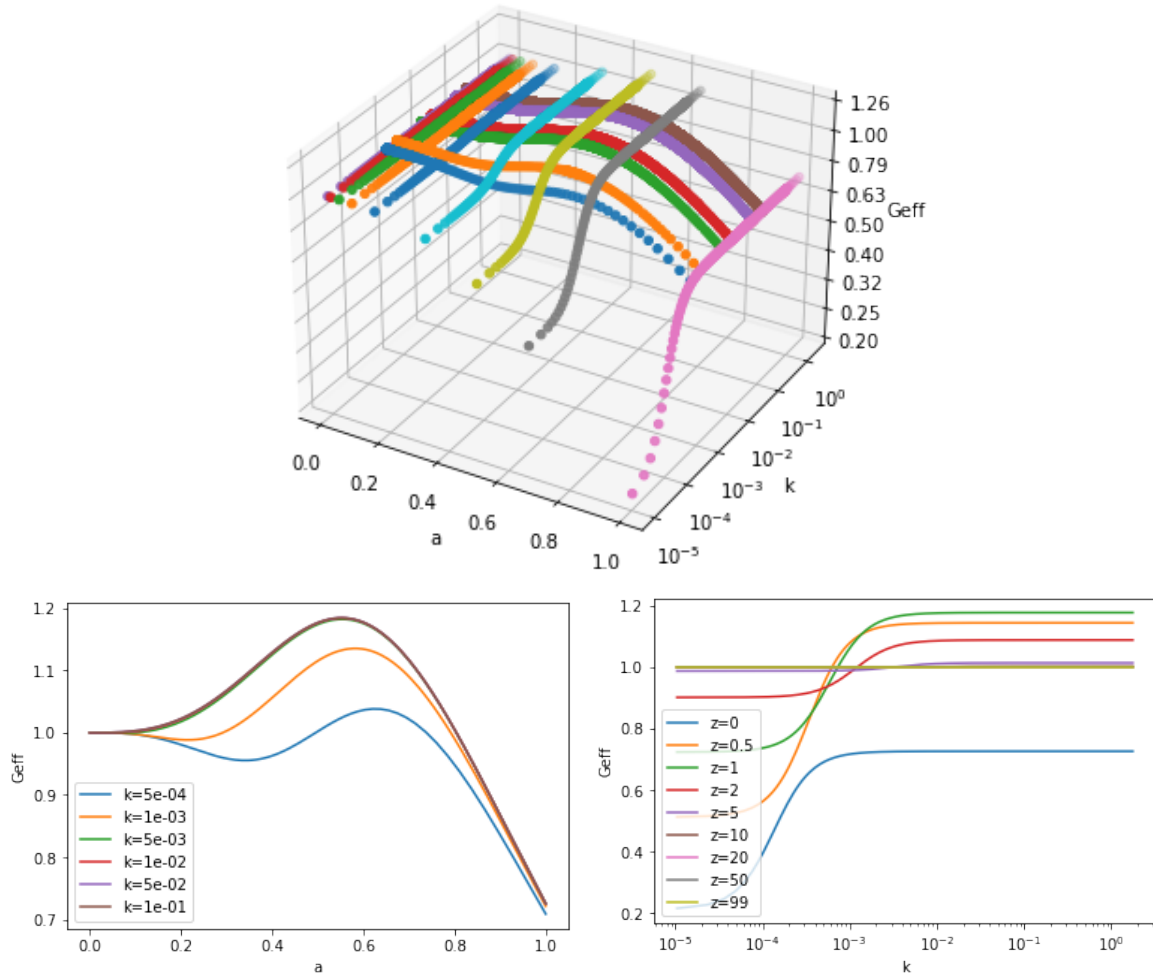


Figura 28 – Visualização 3D para $G_{eff}(k, a)$. Abaixo, $G_{eff}(a)$ para alguns valores de k e $G_{eff}(k)$ para alguns valores de z . A parametrização usada foi propto_omega com $\alpha_K = 1$, $\alpha_B = \alpha_T = 0$, $\alpha_M = 4$. Aqui também $G_{eff}(k)$ tem um comportamento do tipo “tangente hiperbólica”.

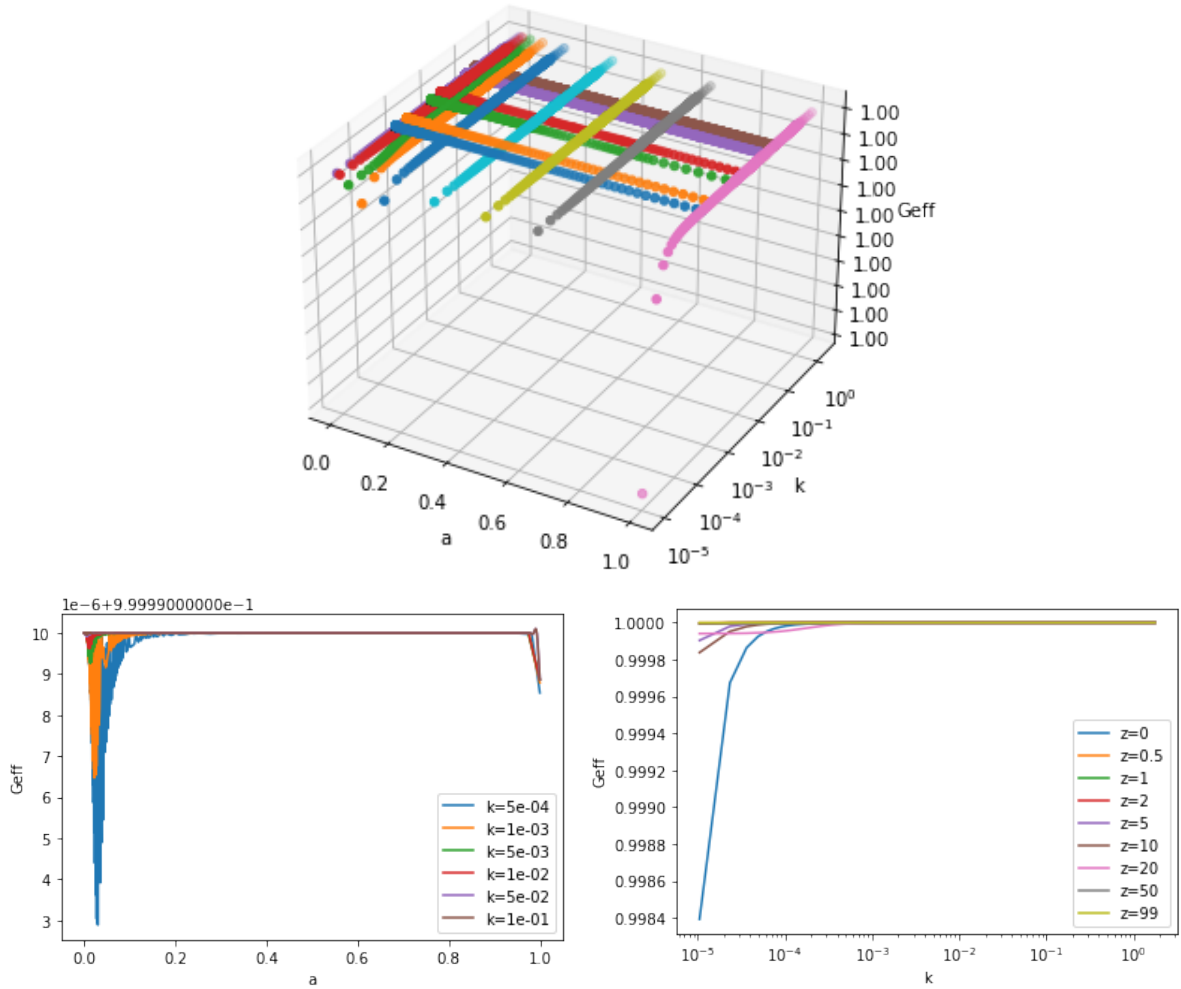


Figura 29 – Visualização 3D para $G_{eff}(k, a)$. Abaixo, $G_{eff}(a)$ para alguns valores de k e $G_{eff}(k)$ para alguns valores de z . A parametrização usada foi propto_omega com $\alpha_K = 1$, $\alpha_B = \alpha_M = 0$, $\alpha_T = -0.25$. Desvios da Relatividade Geral em valores de a baixos parecem se dever apenas a erro numérico.

Agora veremos o caso da parametrização propto_scale. Ao escolher $\alpha_M = \alpha_T = 0$ e escolher valores para α_B , observa-se que apenas valores iniciais muito pequenos passam pelos testes de viabilidade 5.25 – 5.29 (aproximadamente $\alpha_B < 0.001$). Além disso, como observamos da figura 30, comportamento que se repete para valores iniciais diferentes de α_B , G_{eff} não se desvia da unidade a não ser em momentos em que aparecem possíveis erros numéricos, o que será investigado futuramente.

A figura 31 mostra a evolução para $\alpha_B = \alpha_T = 0$, com $\alpha_M = 2$. Valores diferentes de α_M resultam em comportamentos parecidos, como nos casos anteriores. Novamente, a variação em α_T não parece afetar muito G_{eff} , como visto na figura 32, onde desvios para a baixo parecem novamente se tratar de erro numérico.

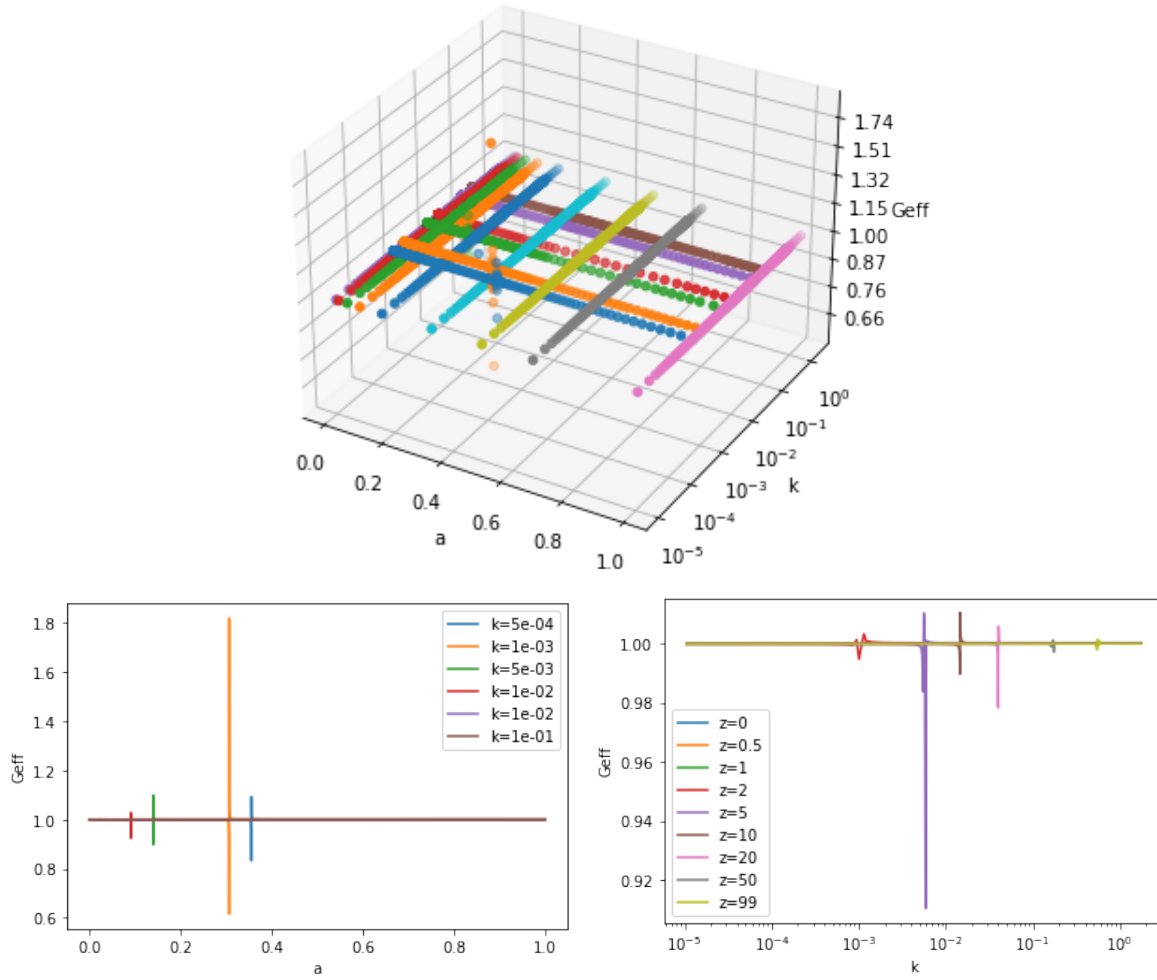


Figura 30 – Visualização 3D para $G_{eff}(k, a)$. Abaixo, $G_{eff}(a)$ para alguns valores de k e $G_{eff}(k)$ para alguns valores de z . A parametrização usada foi propto_scale com $\alpha_K = 1$, $\alpha_M = \alpha_T = 0$, $\alpha_B = 0.001$. Desvios da Relatividade Geral parecem se dever apenas a erro numérico.

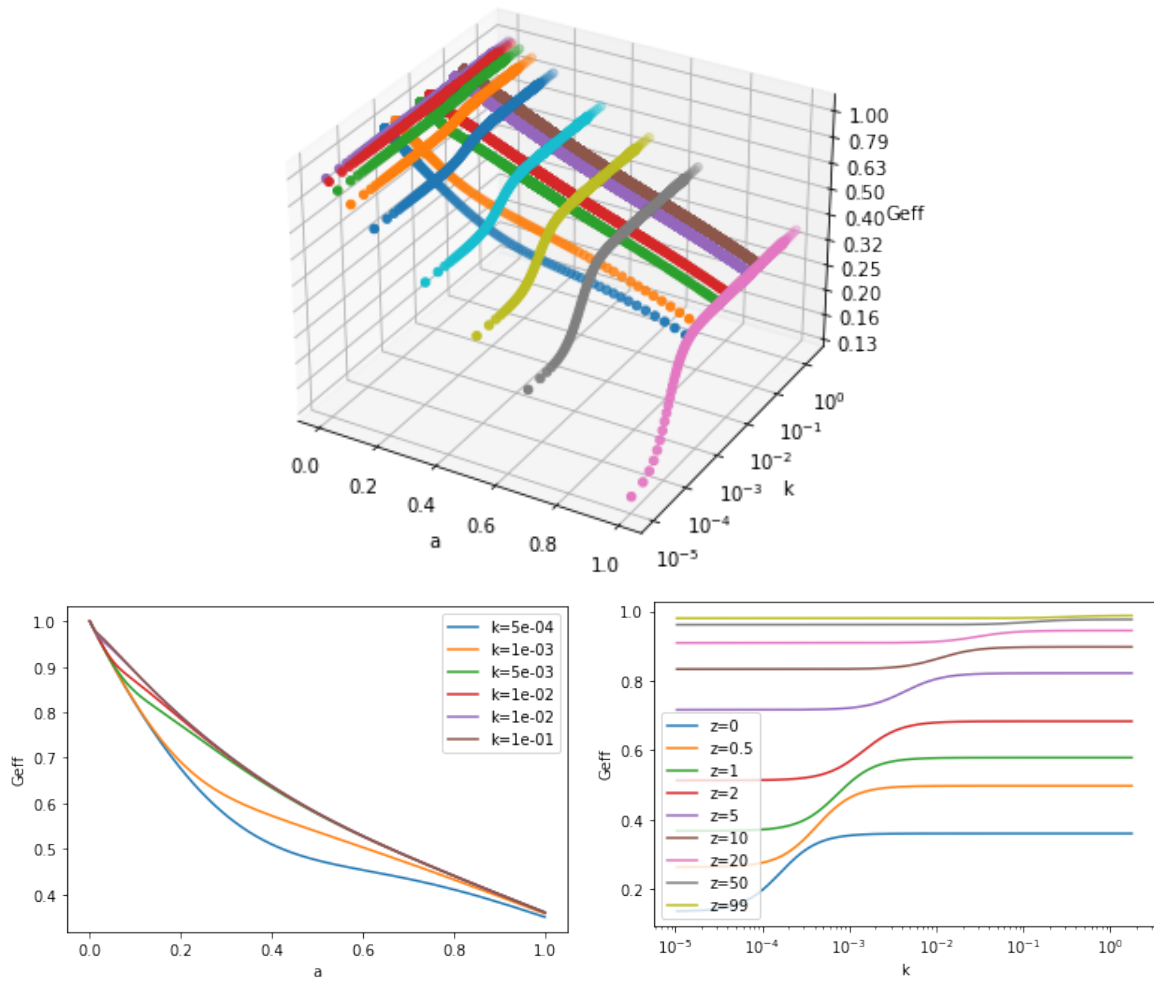


Figura 31 – Visualização 3D para $G_{eff}(k, a)$. Abaixo, $G_{eff}(a)$ para alguns valores de k e $G_{eff}(k)$ para alguns valores de z . A parametrização usada foi propto_scale com $\alpha_K = 1$, $\alpha_B = \alpha_T = 0$, $\alpha_M = 2$. Nesse caso, $G_{eff}(a)$ se desvia da unidade bem cedo.

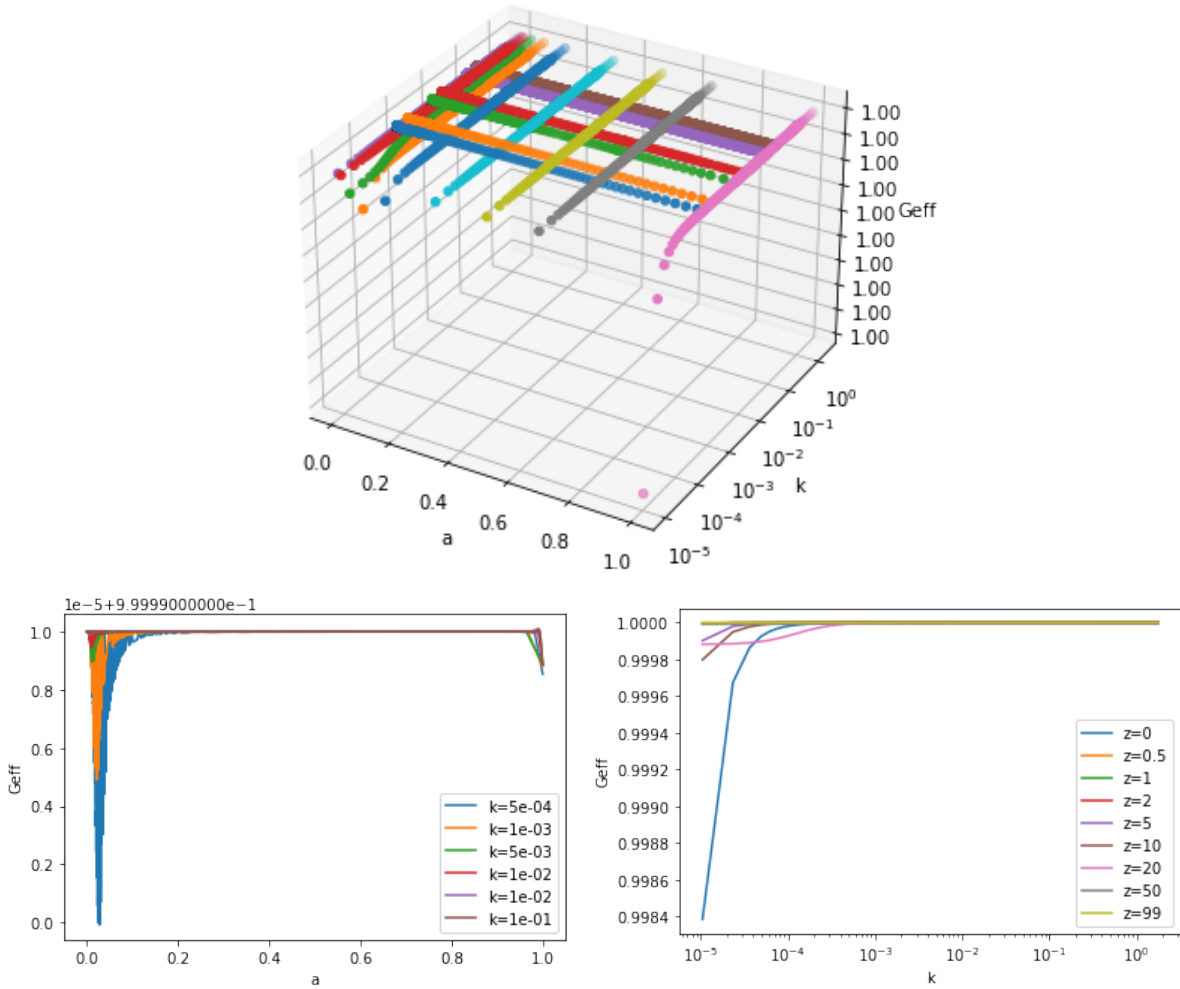


Figura 32 – Visualização 3D para $G_{eff}(k, a)$. Abaixo, $G_{eff}(a)$ para alguns valores de k e $G_{eff}(k)$ para alguns valores de z . A parametrização usada foi *propto_scale* com $\alpha_K = 1$, $\alpha_B = \alpha_M = 0$, $\alpha_T = -0.5$. Desvios da Relatividade Geral em valores baixos de a parecem se dever apenas a erro numérico.

6.3.2 δ_m

Veja que a aproximação que usamos para δ_m em $z = 0$ é válida na faixa aproximadamente $1 \times 10^{-2} < k < 2 \times 10^{-1}$. O limite $k > 10^{-2}$ vem do fato de que queremos escalas já bem dentro do horizonte, e o limite $k < 2 \times 10^{-1}$ existe pois efeitos não lineares começam a aparecer no espectro de potência (veja figura 33). Perceba que nos exemplos mostrados da parametrização *propto_omega* não é possível observar a dependência com k nessas escalas diretamente no gráfico do G_{eff} .

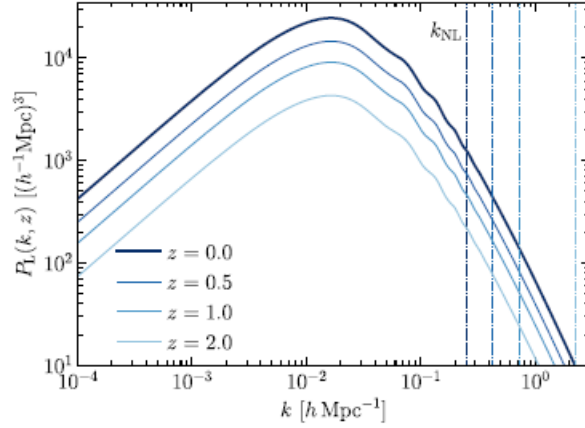


Figura 33 – Espectro de potência da matéria para diferentes *redshifts*. As linhas tracejadas verticais mostram o limite da validade da teoria de perturbação linear, para cada *redshift*. Fonte: [Dodelson e Schmidt \(2021\)](#).

Lembramos que nossa aproximação é deduzida para $k \gg aH$, cujo comportamento vemos na figura 34:

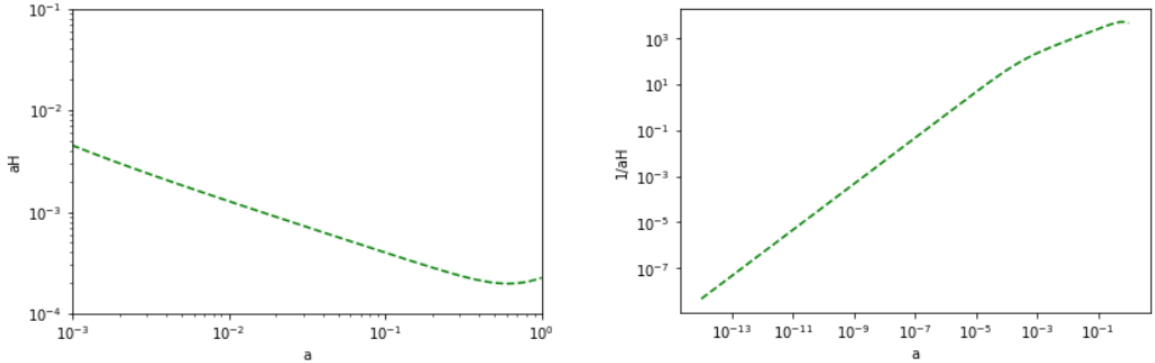


Figura 34 – Variação de aH em função do fator de escala. Imagem da direita é similar à [Dodelson e Schmidt \(2021\)](#) pg 160.

Podemos observar isso nas figuras 13, 14 e 15, onde vemos o comportamento do potencial, que atinge um patamar *aproximadamente* constante na era da matéria, e dos $\delta_c(k)$, que atingem crescimento proporcional a a (calibre newtoniano conforme). Alguns modos entram bem tarde no horizonte, como $k = 0.001/Mpc$, e o potencial só fica aproximadamente constante perto de $a = 1/10$. Também vale a pena lembrar que esses gráficos são para δ_c , e chamo aqui a atenção para [Ma e Bertschinger \(1995\)](#): k grande (> 0.1) entra antes no horizonte, δ_c imediatamente começa a crescer como $\ln(a)$ e depois como a , mas δ_b ($k > 0.025$) passa um tempo oscilando e só bem mais tarde é atraído a se comportar como δ_c ; então faz sentido esperar que o comportamento de $\delta_m = (\delta_c + \delta_b)/\rho_m$ seja afetado por esses comportamentos.

Inicialmente, calculamos o resultado para δ_m com parametrização propto_omega e $\alpha_K = 1$, $\alpha_M = \alpha_T = \alpha_B = 0$, que deve ser igual à previsão da Relatividade Geral. Vemos o resultado na figura 35, junto com a estimativa do erro de três formas diferentes. Também fiz essa comparação em $z = 0.7$, apenas para garantir que funcionaria em outros z (figura 36).

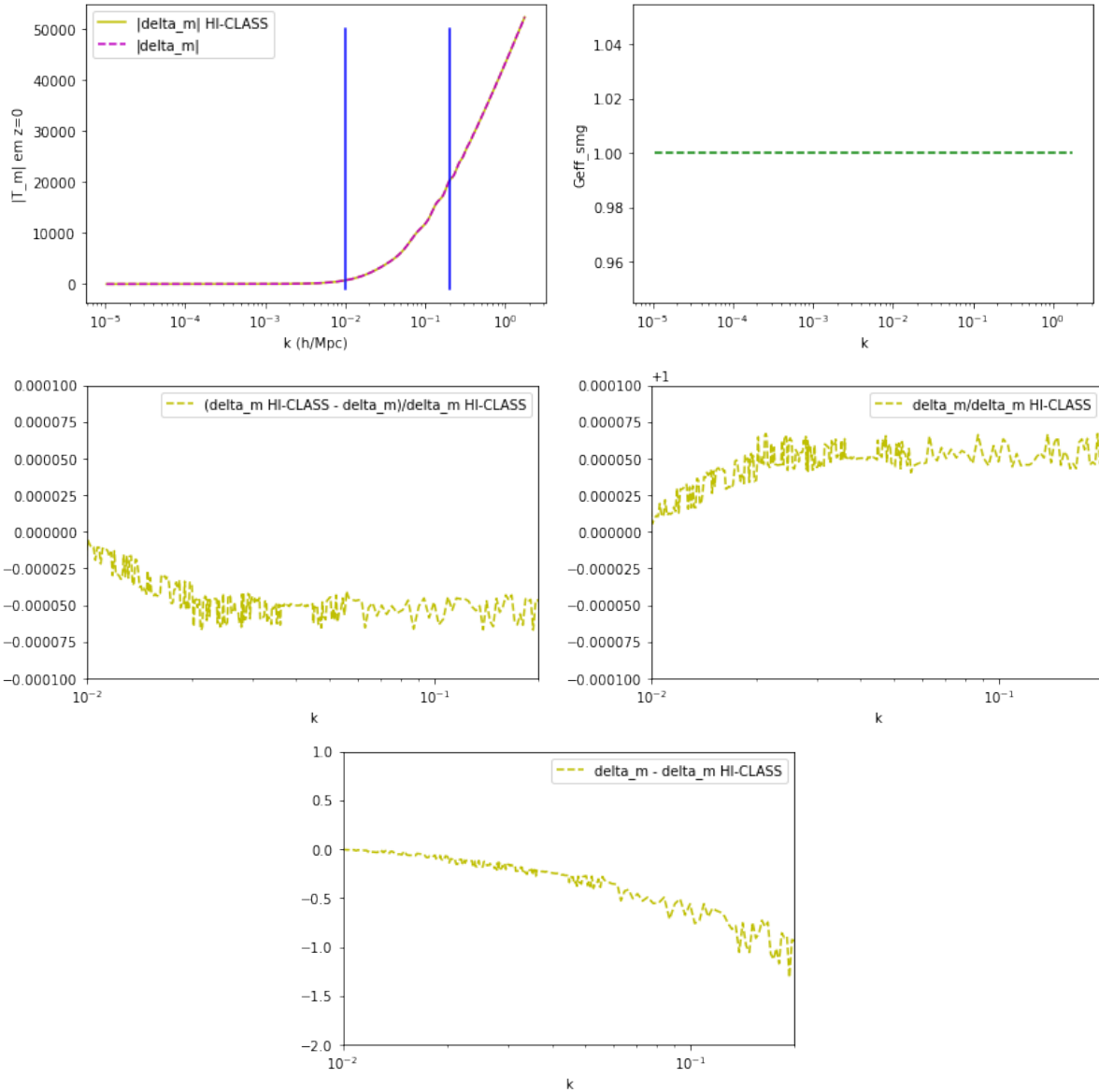


Figura 35 – Resultados para propto_omega com $\alpha_K = 1$, $\alpha_M = \alpha_T = \alpha_B = 0$, em $z=0$. As barras azuis no primeiro gráfico delimitam aproximadamente a faixa de k em que a aproximação pode funcionar. No eixo vetical, tem-se o módulo da função de transferência $|T_m| = \delta_m/R(k, \eta = 0)$. No primeiro gráfico à direita, temos $G_{eff}(k)$. Os três últimos gráficos são as estimativas de erro.

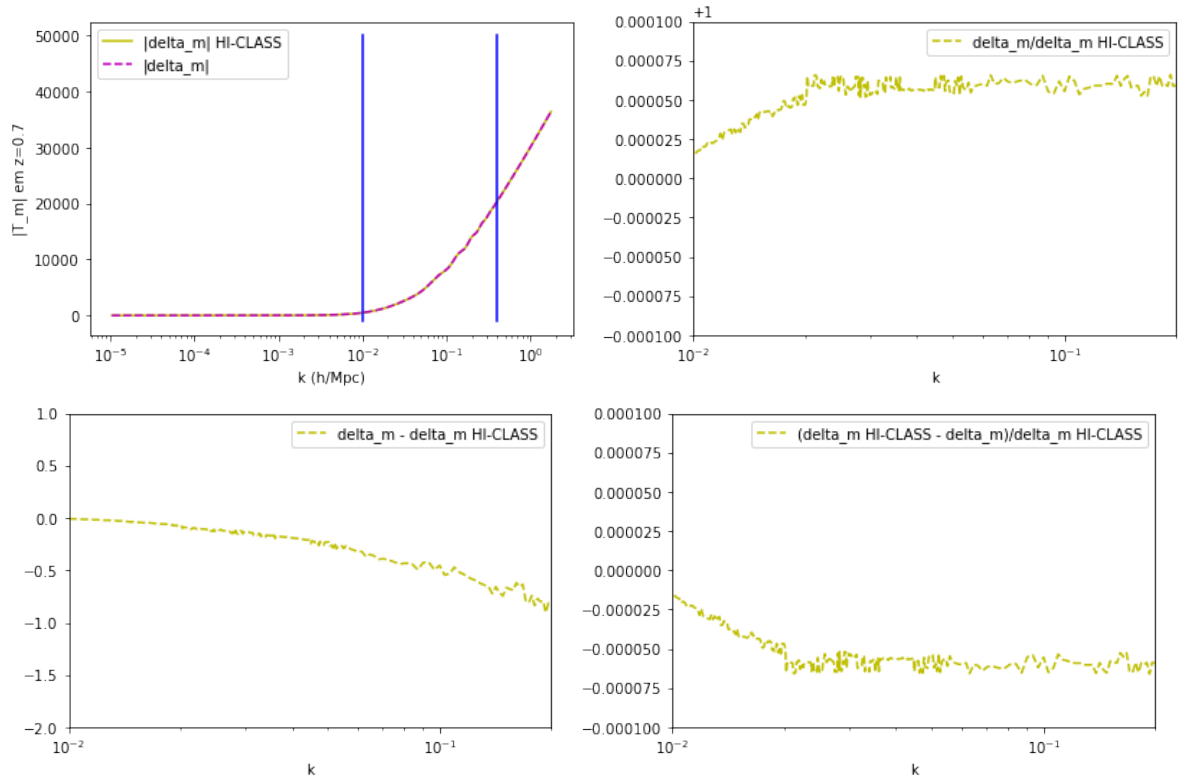


Figura 36 – Resultados para `propto_omega` com $\alpha_K = 1$, $\alpha_M = \alpha_T = \alpha_B = 0$, em $z=0.7$. As barras azuis no primeiro gráfico delimitam aproximadamente a faixa de k em que a aproximação pode funcionar. No eixo vertical, tem-se o módulo da função de transferência $|T_m| = \delta_m/R(k, \eta = 0)$. Os três outros gráficos são as estimativas de erro.

Em $z = 0.7$ devemos levar em consideração que a figura 33 fornece um novo limite para a validade da aproximação linear. Neste caso, estará mais próximo de $k = 4 \times 10^{-1}$.

Também verificamos a precisão da aproximação para o caso $\alpha_M = \alpha_T = 0$, $\alpha_B = 2.5$ em $z = 0$ e $z = 0.7$. O resultado está explicitado nas figuras 37 e 38. Para o caso $\alpha_B = \alpha_T = 0$, $\alpha_M = 2$, obtivemos as figuras 39 e 40. Também verificamos a parametrização `propto_scale` com $\alpha_B = \alpha_T = 0$, $\alpha_M = 2$ (figura 41).

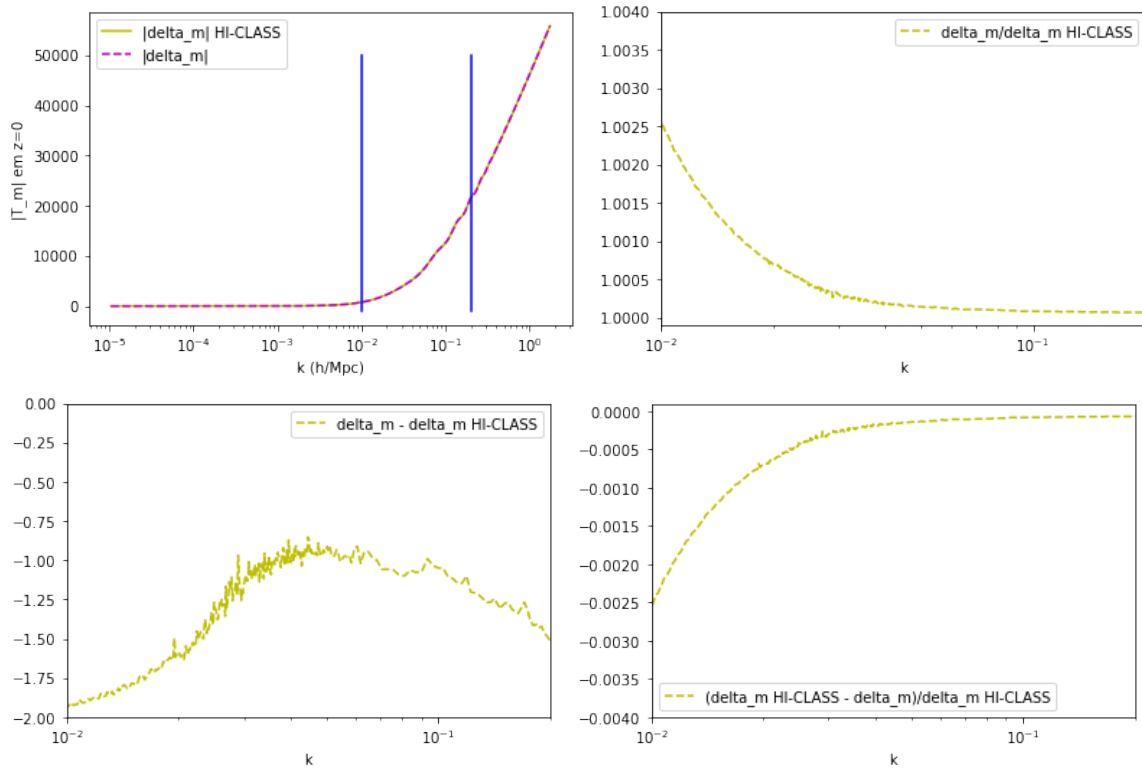


Figura 37 – Parametrização propto_omega com $\alpha_K = 1$, $\alpha_M = \alpha_T = 0$, $\alpha_B = 2.5$, em $z=0$. As barras azuis no primeiro gráfico delimitam aproximadamente a faixa de k em que a aproximação pode funcionar. No eixo vertical, tem-se o módulo da função de transferência $|T_m| = \delta_m/R(k, \eta = 0)$. Os três outros gráficos são as estimativas de erro.

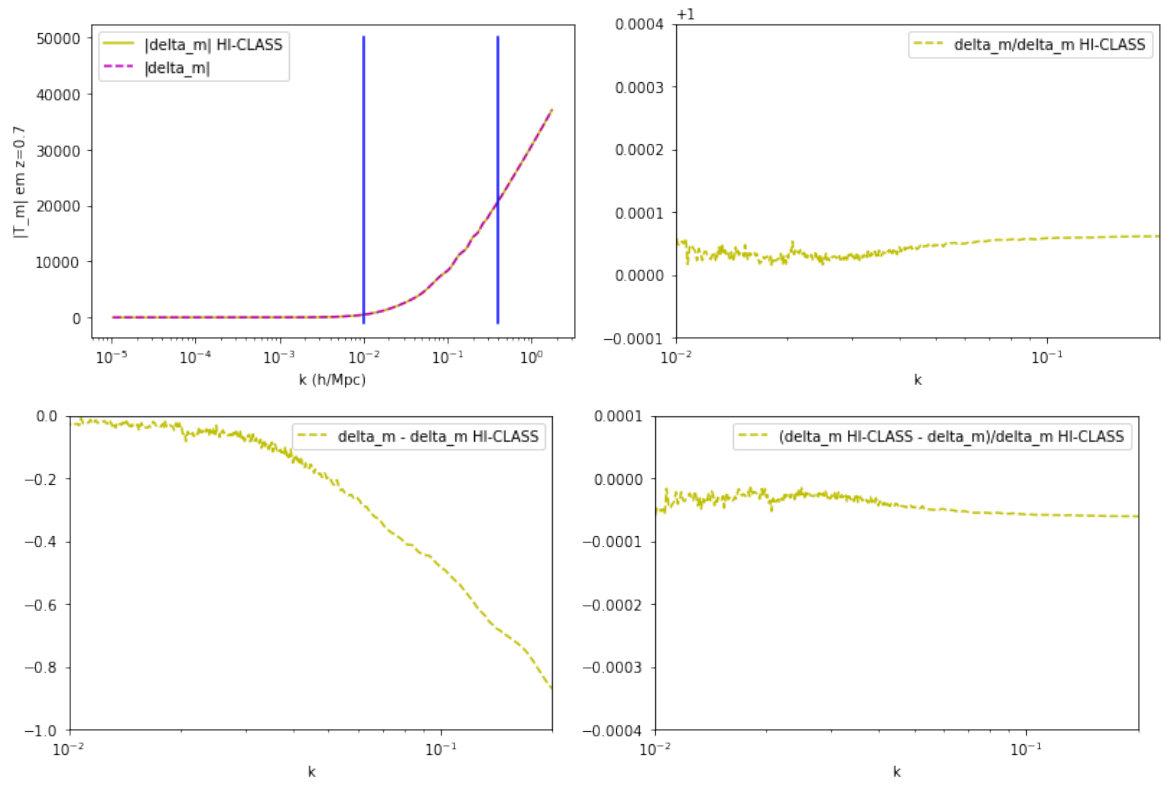


Figura 38 – Parametrização propto_omega com $\alpha_K = 1$, $\alpha_M = \alpha_T = 0$, $\alpha_B = 2.5$, em $z=0.7$. As barras azuis no primeiro gráfico delimitam aproximadamente a faixa de k em que a aproximação pode funcionar. No eixo vetical, tem-se o módulo da função de transferência $|T_m| = \delta_m / R(k, \eta = 0)$. Os três outros gráficos são as estimativas de erro.

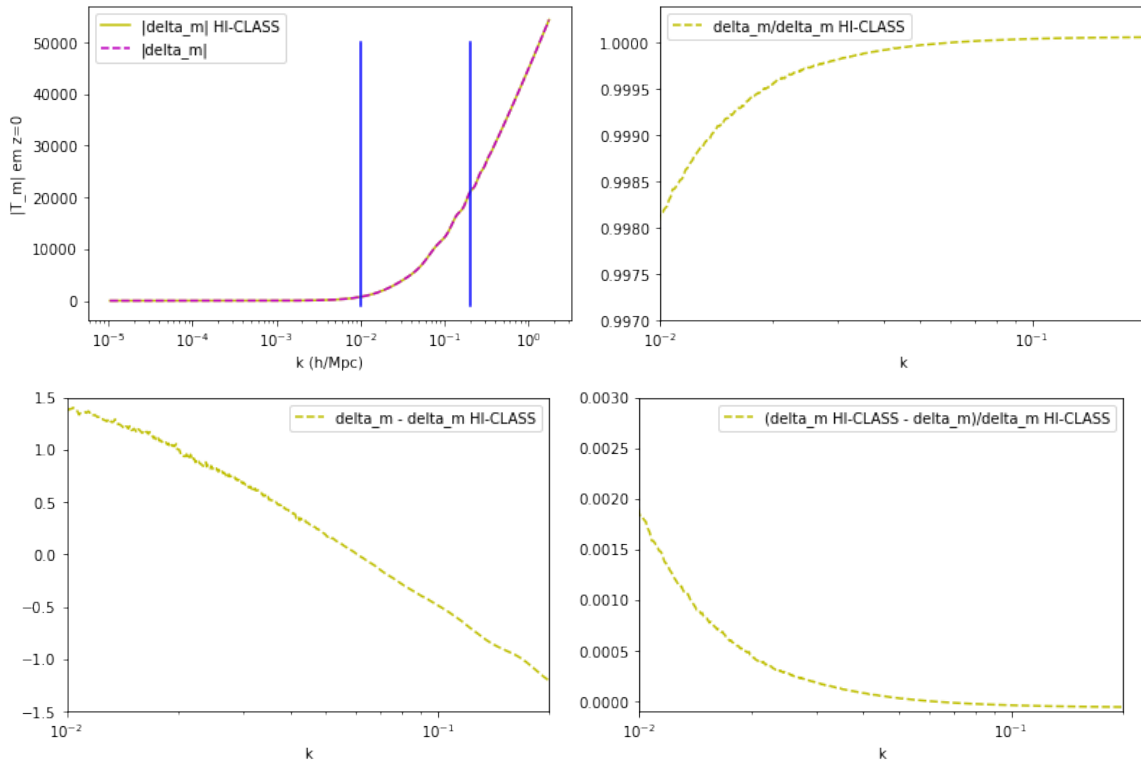


Figura 39 – Parametrização propto_omega com $\alpha_K = 1$, $\alpha_B = \alpha_T = 0$, $\alpha_M = 2$, em $z=0$. As barras azuis no primeiro gráfico delimitam aproximadamente a faixa de k em que a aproximação pode funcionar. No eixo vetical, tem-se o módulo da função de transferência $|T_m| = \delta_m/R(k, \eta = 0)$. Os três outros gráficos são as estimativas de erro.

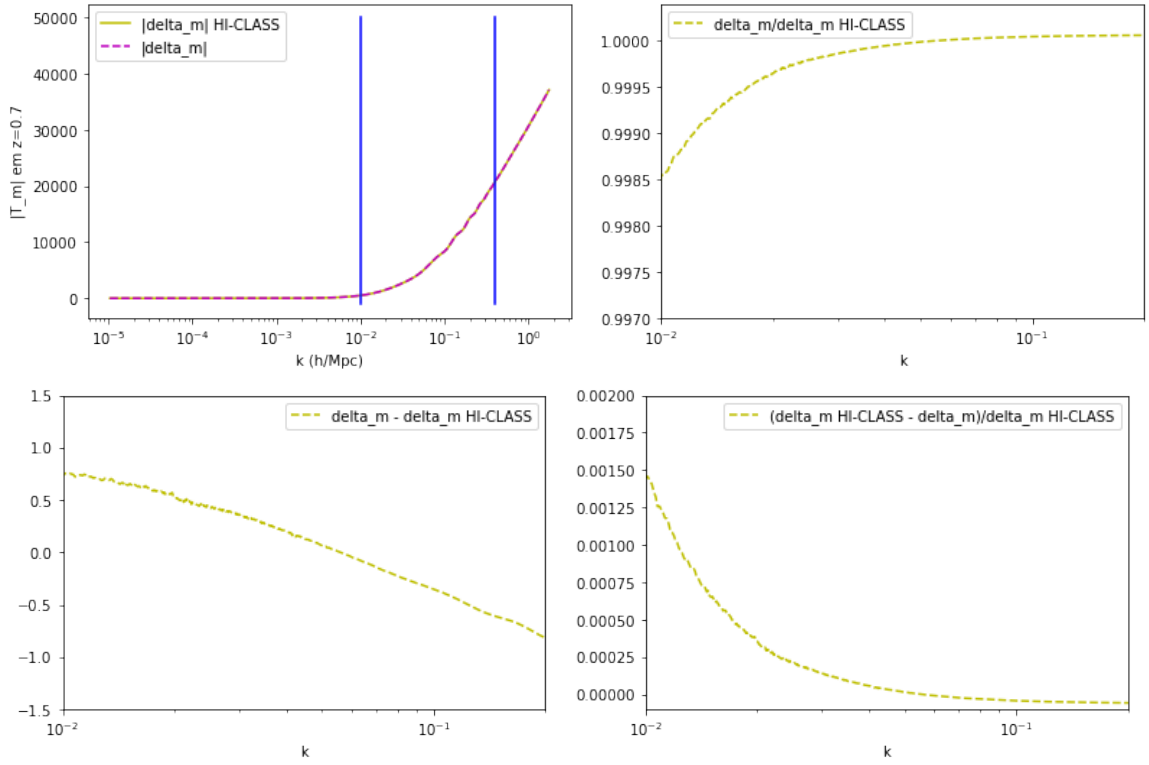


Figura 40 – Parametrização propto_omega com $\alpha_K = 1$, $\alpha_B = \alpha_T = 0$, $\alpha_M = 2$, em $z=0.7$. As barras azuis no primeiro gráfico delimitam aproximadamente a faixa de k em que a aproximação pode funcionar. No eixo vetical, tem-se o módulo da função de transferência $|T_m| = \delta_m/R(k, \eta = 0)$. Os três outros gráficos são as estimativas de erro.

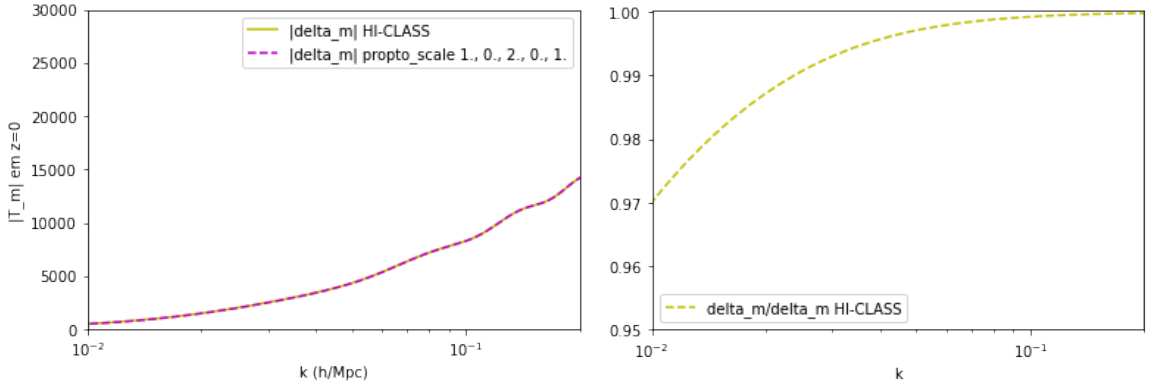


Figura 41 – Parametrização propto_scale com $\alpha_K = 1$, $\alpha_B = \alpha_T = 0$, $\alpha_M = 2$, em $z=0$. As barras azuis no primeiro gráfico delimitam aproximadamente a faixa de k em que a aproximação pode funcionar. No eixo vetical, tem-se o módulo da função de transferência $|T_m| = \delta_m/R(k, \eta = 0)$. Os três outros gráficos são as estimativas de erro.

Também plotamos a comparação da previsão para diferentes valores iniciais e parametrizações, como visto na figura 42.

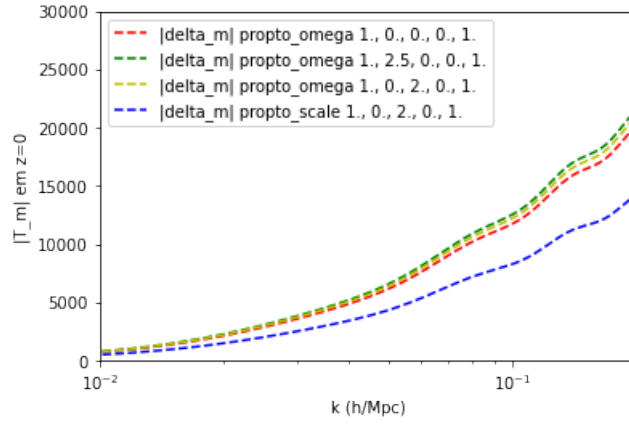


Figura 42 – Comparação da evolução das perturbações para diferentes parametrizações, em $z=0$.

6.3.3 Plot de f e D no HI-CLASS

Gostaríamos ainda de comparar nossos resultados para a implementação da equação da taxa de crescimento f . No entanto, existem dois detalhes a levar em consideração. Primeiramente, [Bellini e Sawicki \(2014\)](#) comentam na figura 23 que Λ CDM tem todos os α s iguais a zero e M_*^2 constante, mas isso não pode ser calculado no HI-CLASS em *lcdm* e *propto_omega* já que uma das condições de estabilidade (5.25–5.29) é $\mathbf{D} \equiv \alpha_k + 3/2 * \alpha_b^2 > 0$ para evitar “ghosts” e a singularidade de pressão quando $\alpha_B \neq 0$, então os resultados abaixo são discutidos com *parameters_smg* = $\alpha_k > 0., 0., 0., 0., 1.$. Qualquer valor de $\alpha_k > 0$. fornecerá *Geff_smg* = 1. De forma mais precisa, $\mathbf{D} = 0$ pode acontecer, desde que todos as funções α sejam nulas sempre, mas essa condição não está liberada no HI-CLASS.

Além disso, o HI-CLASS fornece uma “taxa de crescimento f ”, no entanto a forma como o código calcula a taxa de expansão f é através do resultado da Relatividade Geral, ou seja, do fator de crescimento D , onde $f = \frac{D'}{aHD}$. O cálculo de D é feito através da equação diferencial:

```

/** - solve second order growth equation
\fs$ [D''(\tau)=-aHD'(\tau)+3/2 a^2 \rho_M D(\tau) \fs$ */
rho_M = pvecback[pba->index_bg_rho_b];
if (pba->has_cdm)
    rho_M += pvecback[pba->index_bg_rho_cdm];
dy[pba->index_bi_D] = y[pba->index_bi_D_prime];
dy[pba->index_bi_D_prime] = -a*H*y[pba->index_bi_D_prime] +
1.5*a*a*rho_M*y[pba->index_bi_D];

```

O código utiliza as condições iniciais para D baseadas em [Ma e Bertschinger \(1995\)](#):

```

/** - set initial value of D and D' in RD.
    D will be renormalised later, but D' must be correct. */
pvecback_integration[pba->index_bi_D] = a;
pvecback_integration[pba->index_bi_D_prime] =
2*pvecback_integration[pba->index_bi_D]*pvecback[pba->index_bg_H];

```

Assim, os valores que encontramos no output do código são

```

/* -> compute growth functions (valid in dust universe) */

/* Normalise D(z=0)=1 and construct f = D_prime/(aHD) */
pvecback[pba->index_bg_D] = pData[i*pba->bi_size+pba->index_bi_D]/
pData[(pba->bt_size-1)*pba->bi_size+pba->index_bi_D];
pvecback[pba->index_bg_f] = pData[i*pba->bi_size+pba->index_bi_D_prime]/
(pData[i*pba->bi_size+pba->index_bi_D]*pvecback[pba->index_bg_a]*
pvecback[pba->index_bg_H]);

```

Usualmente escreve-se que $D = a$, mas a quantidade $\frac{D}{a}$ é normalizada pelo código por seu valor hoje e por isso está sempre acima de 1, como podemos notar pelo gráfico abaixo. Na era da matéria, essa quantidade é aproximadamente constante:

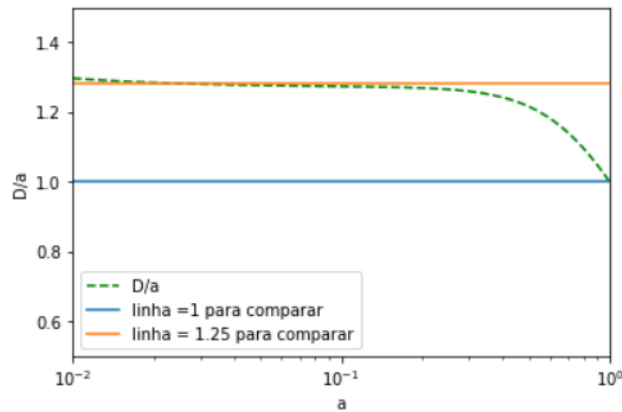


Figura 43 – Gráfico com a tabela de valores para D/a implementada previamente no HI-CLASS. Linhas horizontais foram adicionadas para melhor compreensão.

Quando calculamos f usando nossa modificação, onde $f = \frac{\delta'_m}{aH\delta_m}$, obtemos um comportamento onde é possível visualizar claramente os limites de validade da aproximação (a tempo suficiente na era da matéria e em escalas bem dentro do horizonte). Para os valores que consideramos previamente válidos para k , todos possuem o mesmo comportamento e são consistentes com o cálculo de f pelo HI-CLASS:

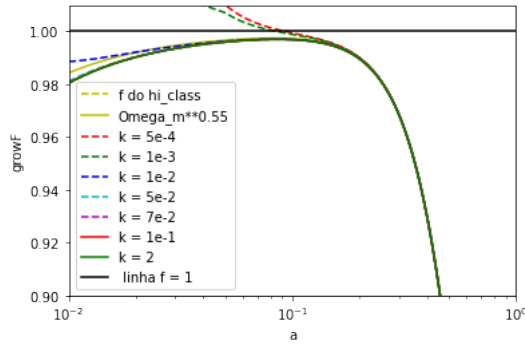


Figura 44 – Gráfico de $f(k, a)$ com diferentes valores de k . Para números de onda $k \leq 10^{-2}$, há um desvio no comportamento em baixo a (linhas pontilhadas verde, vermelha e azul). Para outros valores de k , as linhas são todas iguais à linha verde contínua.

Primeiramente, podemos notar que quanto menor for k , mais tardiamente, em termos de a , ele se encontra com as outras curvas. Plotando apenas uma comparação entre $\Omega_m^{0.55}$ e o f do HI-CLASS vemos que ele se comporta como f apenas aproximadamente, como visto claramente na figura 45:

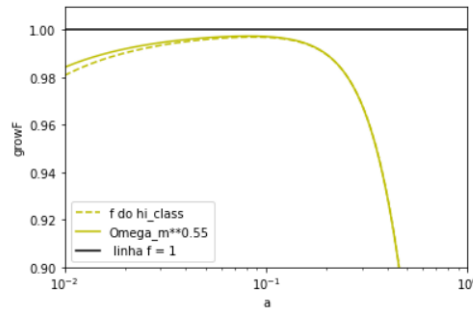


Figura 45 – Comparação entre f do HI-CLASS e $f = \Omega_m^{0.55}$.

Olhando bem de perto vemos que $\Omega_{cdm} + \Omega_b$ é um pouco menor do que 1, e como $f = \Omega_m^{0.55}$, esse valor será sempre menor do que Ω_m .

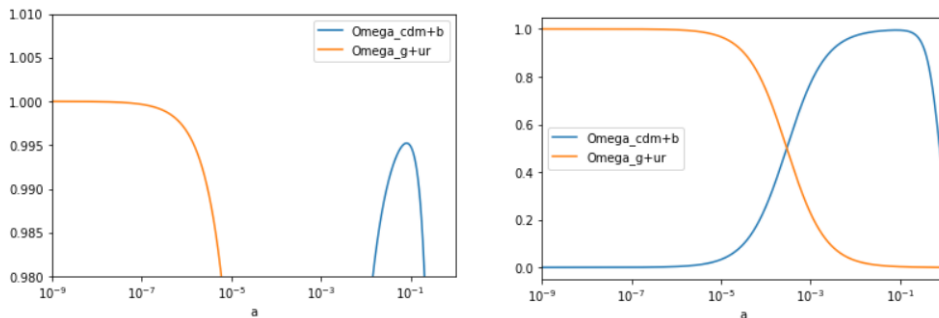


Figura 46 – Gráfico para Ω_m , nesse caso sempre menor que 1.

7 Conclusão e perspectivas futuras

A descoberta em 1998 da expansão acelerada do Universo, como documentado por [Perlmutter et al. \(1999\)](#) e [Riess et al. \(1998\)](#), marcou um ponto de virada na cosmologia. Este fenômeno indicou uma complexidade maior no funcionamento do Universo do que se entendia anteriormente.

Essa expansão surpreendente foi atribuída à energia escura, concebida como uma densidade de energia constante. Ainda é necessário conceber a existência de matéria escura, um componente que constitui a maior parte da matéria do Universo. Juntas, energia escura e matéria escura compõem cerca de 95% do conteúdo total do Universo.

Nos anos seguintes à descoberta da aceleração do Universo, várias teorias foram propostas para explicá-la. Modelos $f(R)$, conforme delineado por [De Felice e Tsujikawa \(2012\)](#), e modelos camaleão, por [Khoury e Weltman \(2004\)](#), são exemplos notáveis. Uma unificação desses modelos foi buscada, com [Deffayet et al. \(2010\)](#) destacando a importância dos modelos de Horndeski, e Bellini & Sawicki adaptando-os para aplicações fenomenológicas.

Observações sobre a taxa de crescimento de estruturas no Universo são cruciais para testar teorias alternativas de gravitação. Estas teorias, diferentes do modelo Λ CDM, apresentam uma taxa de crescimento amplificada e, em alguns casos, uma dependência de escala. Levantamentos cosmológicos, como DESI e Euclid, visam medir esses efeitos com alta precisão.

Nessa dissertação exploramos a possibilidade de utilizar o código de Boltzmann HI-CLASS como ferramenta de trabalho para explorar a aproximação

$$\ddot{\delta}_m + 2H\dot{\delta}_m - 4\pi G_{eff}\rho_m\delta_m = 0. \quad (7.1)$$

Vimos que é possível utilizar o HI-CLASS como ferramenta para resolver a equação para δ_m e qualquer outra equação que possa ser escrita dentro do código. A implementação da equação 7.1 permite que se explorem outras parametrizações para G_{eff} que não sejam em função das α s de Horndeski, fazendo uma ligação mais direta entre G_{eff} e modelos como $f(R)$ e Brans-Dicke.

Desta forma, depois de um estudo sobre a teoria de Horndeski como possível alternativa à Relatividade Geral para explicar os efeitos relacionados à energia escura, analisamos os detalhes do código HI-CLASS e descrevemos de uma maneira didática as implementações realizadas no código para auxiliar futuros pesquisadores que estejam iniciando nesta área de atuação. A tabela na figura 47 traz um resumo das condições de validade da aproximação, como as faixas de k e de a , valores ideais para começar a

Validade da aproximação	
$k (z = 0)$	$10^{-2} < k < 2 \times 10^{-1}$
$k (z = 0.7)$	$10^{-2} < k < 4 \times 10^{-1}$
$a_init_deep_mat$	$0,05 < a < a \rightarrow \Omega_{DE} \ll \Omega_m$
Erro MAX $\frac{\delta_m(HI-CLASS)-\delta_m}{\delta_m(HI-CLASS)}$ (1., 0., 0., 0.)	$< 0.000075 $
Erro MAX $\frac{\delta_m(HI-CLASS)-\delta_m}{\delta_m(HI-CLASS)}$ (1., 2.5, 0., 0.)	$< 0.0025 $
Erro MAX $\frac{\delta_m(HI-CLASS)-\delta_m}{\delta_m(HI-CLASS)}$ (1., 0., 2., 0.)	$< 0.0020 $

Figura 47 – Tabela de resumo das condições de validade da aproximação utilizada nessa dissertação. A equação para δ_m deve começar a ser calculada bem dentro da era da matéria e bem dentro do horizonte.

aproximação e uma estimativa do erro máximo com relação ao valor de δ_m calculado pelo HI-CLASS.

Seguindo as etapas deste projeto, o próximo passo seria implementar casos interessante de efeitos de gravitação modificada e usar dados de formação de estrutura e RSD para vincular os parâmetros livres da descrição fenomenológica de gravitação modificada. Esta análise será realizada em um outro momento oportuno.

Apêndice

Apêndice A - Cálculo do escalar de Ricci na Relatividade Geral

Vamos calcular a expressão para o escalar de Ricci, partindo da métrica escolhida:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2).$$

Como $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, o tensor métrico é diagonal, para ser coerente com o princípio cosmológico, i.e., sem direção preferencial.

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}.$$

Para respeitar que $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = \mathbb{I}$, temos:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^2r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a^2r^2 \sin^2\theta} \end{pmatrix}.$$

Vamos agora calcular os símbolos de Christoffel. Inicialmente, teríamos 4 x 16 símbolos de Christoffel para calcular, mas podemos usar as simetrias do problema lembrando que $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\nu\mu}^\alpha$, assim nosso problema se reduz a 4 x 10 cálculos. Partindo então da relação com a métrica:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(g_{\mu\beta,\nu} + g_{\nu\beta,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}).$$

Agora uma outra coisa que simplificará a quantidade de operações é que $g^{\mu\nu} = 0$ se $\mu \neq \nu$.

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2}g^{0\beta}(g_{0\beta,0} + g_{0\beta,0} - g_{00,\beta}) \quad (2)$$

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(g_{00,0} + g_{00,0} - g_{00,0}) = \frac{-1}{2} \frac{d(-1)}{dt} = 0 \quad (3)$$

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(g_{00,1} + g_{10,0} - g_{01,0}) = \frac{-1}{2} \left(\frac{d(-1)}{dr} + 0 + 0 \right) = 0 \quad (4)$$

$$\Gamma_{02}^0 = \Gamma_{20}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(g_{00,2} + g_{20,0} - g_{02,0}) = \frac{-1}{2} \left(\frac{d(-1)}{d\theta} + 0 + 0 \right) = 0 \quad (5)$$

$$\Gamma_{03}^0 = \Gamma_{30}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(g_{00,3} + g_{30,0} - g_{03,0}) = \frac{-1}{2} \left(\frac{d(-1)}{d\phi} + 0 + 0 \right) = 0 \quad (6)$$

$$\Gamma_{11}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(g_{10,1} + g_{10,1} - g_{11,0}) = \frac{-1}{2} \left(0 + 0 + \frac{d(a^2)}{dt} \right) = a\dot{a} \quad (7)$$

$$\Gamma_{12}^0 = \Gamma_{21}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(g_{10,2} + g_{20,1} - g_{12,0}) = \frac{-1}{2} (0 + 0 + 0) = 0 \quad (8)$$

$$\Gamma_{13}^0 = \Gamma_{31}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(g_{10,3} + g_{30,1} - g_{13,0}) = \frac{-1}{2} (0 + 0 + 0) = 0 \quad (9)$$

$$\Gamma_{22}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(g_{20,2} + g_{20,2} - g_{22,0}) = \frac{-1}{2} \left(0 + 0 + \frac{d(a^2r^2)}{dt} \right) = a\dot{a}r^2 \quad (10)$$

$$\Gamma_{23}^0 = \Gamma_{32}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(g_{20,3} + g_{30,2} - g_{23,0}) = \frac{-1}{2} (0 + 0 + 0) = 0 \quad (11)$$

$$\Gamma_{33}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(g_{30,3} + g_{30,3} - g_{33,0}) = \frac{-1}{2} \left(0 + 0 + \frac{d(a^2r^2 \sin^2 \theta)}{dt} \right) = a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta \quad (12)$$

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2a^2}g^{11}(g_{01,0} + g_{01,0} - g_{00,1}) = \frac{-1}{2a^2} \left(0 + 0 + \frac{d(-1)}{dr} \right) = 0 \quad (13)$$

$$\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{10}^1 = \frac{1}{2a^2}g^{11}(g_{01,1} + g_{11,0} - g_{01,1}) = \frac{-1}{2a^2} \left(\frac{d(a^2)}{dt} + 0 + 0 \right) = \frac{\dot{a}}{a} \quad (14)$$

$$\Gamma_{02}^1 = \Gamma_{20}^1 = \frac{1}{2a^2}g^{11}(g_{01,2} + g_{21,0} - g_{02,1}) = \frac{-1}{2a^2} (0 + 0 + 0) = 0 \quad (15)$$

$$\Gamma_{03}^1 = \Gamma_{30}^1 = \frac{1}{2a^2}g^{11}(g_{01,3} + g_{31,0} - g_{03,1}) = \frac{-1}{2a^2} (0 + 0 + 0) = 0 \quad (16)$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2a^2}g^{11}(g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1}) = \frac{-1}{2a^2} \left(\frac{d(a^2)}{dr} \right) = 0 \quad (17)$$

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2a^2}g^{11}(g_{11,2} + g_{21,1} - g_{12,1}) = \frac{-1}{2a^2} \left(\frac{d(a^2)}{d\theta} + 0 + 0 \right) = 0 \quad (18)$$

$$\Gamma_{13}^1 = \Gamma_{31}^1 = \frac{1}{2a^2}g^{11}(g_{11,3} + g_{31,1} - g_{13,1}) = \frac{-1}{2a^2} \left(\frac{d(a^2)}{d\phi} + 0 + 0 \right) = 0 \quad (19)$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2a^2}g^{11}(g_{21,2} + g_{21,2} - g_{22,1}) = \frac{-1}{2a^2} \left(0 + 0 + \frac{d(a^2r^2)}{dr} \right) = -r \quad (20)$$

$$\Gamma_{23}^1 = \Gamma_{32}^1 = \frac{1}{2a^2}g^{11}(g_{21,3} + g_{31,2} - g_{23,1}) = \frac{-1}{2a^2} (0 + 0 + 0) = 0 \quad (21)$$

$$\Gamma_{33}^1 = \frac{1}{2a^2}g^{11}(g_{31,3} + g_{31,3} - g_{33,1}) = \frac{-1}{2a^2} \left(0 + 0 + \frac{d(a^2r^2 \sin^2 \theta)}{dr} \right) = -r \sin^2 \theta \quad (22)$$

$$\Gamma_{00}^2 = \frac{1}{2a^2r^2}g^{22}(g_{02,0} + g_{02,0} - g_{00,2}) = \frac{-1}{2a^2r^2} \left(0 + 0 + \frac{d(-1)}{d\theta} \right) = 0 \quad (23)$$

$$\Gamma_{01}^2 = \Gamma_{10}^2 = \frac{1}{2a^2r^2}g^{22}(g_{02,1} + g_{12,0} - g_{01,2}) = \frac{-1}{2a^2r^2}(0 + 0 + 0) = 0 \quad (24)$$

$$\Gamma_{02}^2 = \Gamma_{20}^2 = \frac{1}{2a^2r^2}g^{22}(g_{02,2} + g_{22,0} - g_{02,2}) = \frac{-1}{2a^2r^2}\left(0 + \frac{d(a^2r^2)}{dt} + 0\right) = \frac{\dot{a}}{a} \quad (25)$$

$$\Gamma_{03}^2 = \Gamma_{30}^2 = \frac{1}{2a^2r^2}g^{22}(g_{02,3} + g_{32,0} - g_{03,2}) = \frac{-1}{2a^2r^2}(0 + 0 + 0) = 0 \quad (26)$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2a^2r^2}g^{22}(g_{12,1} + g_{12,1} - g_{11,2}) = \frac{-1}{2a^2r^2}(0 + 0 + 0) = 0 \quad (27)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2a^2r^2}g^{22}(g_{12,2} + g_{22,1} - g_{12,2}) = \frac{-1}{2a^2r^2}\left(0 + \frac{d(a^2r^2)}{dr} + 0\right) = \frac{1}{r} \quad (28)$$

$$\Gamma_{13}^2 = \Gamma_{31}^2 = \frac{1}{2a^2r^2}g^{22}(g_{12,3} + g_{32,1} - g_{13,2}) = \frac{-1}{2a^2r^2}(0 + 0 + 0) = 0 \quad (29)$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2a^2r^2}g^{22}(g_{22,2} + g_{22,2} - g_{22,2}) = \frac{-1}{2a^2r^2}(0 + 0 + 0) = 0 \quad (30)$$

$$\Gamma_{23}^2 = \Gamma_{32}^2 = \frac{1}{2a^2r^2}g^{22}(g_{22,3} + g_{32,2} - g_{23,2}) = \frac{-1}{2a^2r^2}(0 + 0 + 0) = 0 \quad (31)$$

$$\Gamma_{33}^2 = \frac{1}{2a^2r^2}g^{22}(g_{32,3} + g_{32,3} - g_{33,2}) = \frac{-1}{2a^2r^2}\left(0 + 0 + \frac{d(a^2r^2 \sin^2 \theta)}{d\theta}\right) = -\sin \theta \cos \theta \quad (32)$$

$$\Gamma_{00}^3 = \frac{1}{2a^2r^2 \sin^2 \theta}g^{33}(g_{03,0} + g_{03,0} - g_{00,3}) = \frac{-1}{2a^2r^2 \sin^2 \theta}(0 + 0 + 0) = 0 \quad (33)$$

$$\Gamma_{01}^3 = \Gamma_{10}^3 = \frac{1}{2a^2r^2 \sin^2 \theta}g^{33}(g_{03,1} + g_{13,0} - g_{01,3}) = \frac{-1}{2a^2r^2 \sin^2 \theta}(0 + 0 + 0) = 0 \quad (34)$$

$$\Gamma_{02}^3 = \Gamma_{20}^3 = \frac{1}{2a^2r^2 \sin^2 \theta}g^{33}(g_{03,2} + g_{23,0} - g_{02,3}) = \frac{-1}{2a^2r^2 \sin^2 \theta}(0 + 0 + 0) = 0 \quad (35)$$

$$\Gamma_{03}^3 = \Gamma_{30}^3 = \frac{1}{2a^2r^2 \sin^2 \theta}g^{33}(g_{03,3} + g_{33,0} - g_{03,3}) = \frac{-1}{2a^2r^2 \sin^2 \theta}\left(0 + \frac{d(a^2r^2 \sin^2 \theta)}{dt} + 0\right) = \frac{\dot{a}}{a} \quad (36)$$

$$\Gamma_{11}^3 = \frac{1}{2a^2r^2 \sin^2 \theta}g^{33}(g_{13,1} + g_{13,1} - g_{11,3}) = \frac{-1}{2a^2r^2 \sin^2 \theta}(0 + 0 + 0) = 0 \quad (37)$$

$$\Gamma_{12}^3 = \Gamma_{21}^3 = \frac{1}{2a^2r^2 \sin^2 \theta}g^{33}(g_{13,2} + g_{23,1} - g_{12,3}) = \frac{-1}{2a^2r^2 \sin^2 \theta}(0 + 0 + 0) = 0 \quad (38)$$

$$\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{2a^2r^2 \sin^2 \theta}g^{33}(g_{13,3} + g_{33,1} - g_{13,3}) = \frac{1}{r} \quad (39)$$

$$\Gamma_{22}^3 = \frac{1}{2a^2r^2 \sin^2 \theta}g^{33}(g_{23,2} + g_{23,2} - g_{22,3}) = \frac{-1}{2a^2r^2 \sin^2 \theta}(0 + 0 + 0) = 0 \quad (40)$$

$$\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \frac{1}{2a^2r^2 \sin^2 \theta}g^{33}(g_{23,3} + g_{33,2} - g_{23,3}) = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad (41)$$

$$\Gamma_{33}^3 = \frac{1}{2a^2r^2 \sin^2 \theta}g^{33}(g_{33,3} + g_{33,3} - g_{33,3}) = \frac{-1}{2a^2r^2 \sin^2 \theta}(0 + 0 + 0) = 0 \quad (42)$$

O que sobrou então:

$$\Gamma_{11}^0 = a\dot{a} \quad (43)$$

$$\Gamma_{22}^0 = a\dot{a}r^2 \quad (44)$$

$$\Gamma_{33}^0 = a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta \quad (45)$$

$$\Gamma_{01}^1 = \frac{\dot{a}}{a} \quad (46)$$

$$\Gamma_{22}^1 = -r \quad (47)$$

$$\Gamma_{33}^1 = -r \sin^2 \theta \quad (48)$$

$$\Gamma_{02}^2 = \frac{\dot{a}}{a} \quad (49)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r} \quad (50)$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta \quad (51)$$

$$\Gamma_{03}^3 = \frac{\dot{a}}{a} \quad (52)$$

$$\Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r} \quad (53)$$

$$\Gamma_{23}^3 = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad (54)$$

Agora com isso podemos calcular $R_{\beta\alpha\nu}^\alpha = R_{\beta\nu}$ e R .

$$R_{\beta\alpha\nu}^\alpha = \Gamma_{\beta\nu,\alpha}^\alpha - \Gamma_{\beta\alpha,\nu}^\alpha + \Gamma_{\sigma\alpha}^\alpha \Gamma_{\beta\nu}^\sigma - \Gamma_{\sigma\nu}^\alpha \Gamma_{\beta\alpha}^\sigma.$$

As componentes não nulas são:

$$R_{101}^0 = \Gamma_{11,0}^0 - \Gamma_{10,1}^0 + \Gamma_{\sigma 0}^0 \Gamma_{11}^\sigma - \Gamma_{\sigma 1}^0 \Gamma_{10}^\sigma = a\ddot{a} \quad (55)$$

$$R_{202}^0 = \Gamma_{22,0}^0 - \Gamma_{20,2}^0 + \Gamma_{\sigma 0}^0 \Gamma_{22}^\sigma - \Gamma_{\sigma 2}^0 \Gamma_{20}^\sigma = a\ddot{a}r^2 \quad (56)$$

$$R_{303}^0 = \Gamma_{33,0}^0 - \Gamma_{30,3}^0 + \Gamma_{\sigma 0}^0 \Gamma_{33}^\sigma - \Gamma_{\sigma 3}^0 \Gamma_{30}^\sigma = a\ddot{a}r^2 \sin^2 \theta \quad (57)$$

$$R_{010}^1 = \Gamma_{00,1}^1 - \Gamma_{01,0}^1 + \Gamma_{\sigma 1}^1 \Gamma_{00}^\sigma - \Gamma_{\sigma 0}^1 \Gamma_{01}^\sigma = -\frac{\ddot{a}}{a} \quad (58)$$

$$R_{212}^1 = \Gamma_{22,1}^1 - \Gamma_{21,2}^1 + \Gamma_{\sigma 1}^1 \Gamma_{22}^\sigma - \Gamma_{\sigma 2}^1 \Gamma_{21}^\sigma = \dot{a}^2 r^2 \quad (59)$$

$$R_{313}^1 = \Gamma_{33,1}^1 - \Gamma_{31,3}^1 + \Gamma_{\sigma 1}^1 \Gamma_{33}^\sigma - \Gamma_{\sigma 3}^1 \Gamma_{31}^\sigma = \dot{a}^2 r^2 \sin^2 \theta \quad (60)$$

$$R_{020}^2 = \Gamma_{00,2}^2 - \Gamma_{02,0}^2 + \Gamma_{\sigma 2}^2 \Gamma_{00}^\sigma - \Gamma_{\sigma 0}^2 \Gamma_{02}^\sigma = -\frac{\ddot{a}}{a} \quad (61)$$

$$R_{121}^2 = \Gamma_{11,2}^2 - \Gamma_{12,1}^2 + \Gamma_{\sigma 2}^2 \Gamma_{11}^\sigma - \Gamma_{\sigma 1}^2 \Gamma_{12}^\sigma = \dot{a}^2 \quad (62)$$

$$R_{323}^2 = \Gamma_{33,2}^2 - \Gamma_{32,3}^2 + \Gamma_{\sigma 2}^2 \Gamma_{33}^\sigma - \Gamma_{\sigma 3}^2 \Gamma_{32}^\sigma = \dot{a}^2 r^2 \sin^2 \theta \quad (63)$$

$$R_{030}^3 = \Gamma_{00,3}^3 - \Gamma_{03,0}^3 + \Gamma_{\sigma 3}^3 \Gamma_{00}^\sigma - \Gamma_{\sigma 0}^3 \Gamma_{03}^\sigma = -\frac{\ddot{a}}{a} \quad (64)$$

$$R_{131}^3 = \Gamma_{11,3}^3 - \Gamma_{13,1}^3 + \Gamma_{\sigma 3}^3 \Gamma_{11}^\sigma - \Gamma_{\sigma 1}^3 \Gamma_{13}^\sigma = \dot{a}^2 \quad (65)$$

$$R_{232}^3 = \Gamma_{22,3}^3 - \Gamma_{23,2}^3 + \Gamma_{\sigma 3}^3 \Gamma_{22}^\sigma - \Gamma_{\sigma 2}^3 \Gamma_{23}^\sigma = \dot{a}^2 r^2 \quad (66)$$

$$R_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{3\ddot{a}}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\dot{a}^2 + a\ddot{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2(2\dot{a}^2 + a\ddot{a}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta (2\dot{a}^2 + a\ddot{a}) \end{pmatrix}.$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = 6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right].$$

Apêndice B - Dedução das equações de campo a partir da ação de Einstein-Hilbert

Partiremos da ação de Einstein-Hilbert, eq. (2.2), fazendo sua variação com respeito à métrica:

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \delta(\sqrt{-g}R) + \delta S_{m,r} \quad (67)$$

$$= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x [(\delta\sqrt{-g})R + \sqrt{-g}\delta R] + \delta S_{m,r}$$

$$= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x [(\delta\sqrt{-g})R + \sqrt{-g}(\delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu})] + \delta S_{m,r}$$

$$= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x [(\delta\sqrt{-g})R + \sqrt{-g}(\delta g^{\mu\nu})R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\delta R_{\mu\nu})] + \delta S_{m,r}. \quad (68)$$

Vamos usar adiante as identidades:

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{\sqrt{-g}}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}; \quad (69)$$

$$\delta R_{\mu\beta\nu}^{\alpha} = (\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\alpha})_{;\beta} - (\delta\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha})_{;\nu}; \quad (70)$$

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = -\frac{1}{2}g^{\sigma\alpha}[(\delta g_{\alpha\mu})_{;\nu} + (\delta g_{\alpha\nu})_{;\mu} - (\delta g_{\mu\nu})_{;\alpha}]. \quad (71)$$

Inicialmente, vamos dar atenção ao terceiro termo dentro da integral na eq. (68). Usando as identidades acima, podemos escrevê-lo como:

$$\begin{aligned} \int d^4x \sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\delta R_{\mu\nu}) &= \int d^4x \sqrt{-g}g^{\mu\nu}[(\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\alpha})_{;\alpha} - (\delta\Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha})_{;\nu}] \\ &= \int d^4x \sqrt{-g}(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} - g^{\mu\sigma}\delta\Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha})_{;\sigma} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Igualamos essa integral a zero pois a impomos como condição de contorno, usando o Teorema de Stokes, que mostra que a variação com relação à métrica vai a zero no infinito (Carrol, 2004).

Voltando aos outros termos da eq. (68), usando a primeira identidade:

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x [(\delta\sqrt{-g})R + \sqrt{-g}(\delta g^{\mu\nu})R_{\mu\nu}] + \delta S_{m,r} \quad (72)$$

$$= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \left[\left(-\frac{\sqrt{-g}}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \right) R + \sqrt{-g}(\delta g^{\mu\nu})R_{\mu\nu} \right] + \delta S_{m,r} \quad (73)$$

$$= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \left[-\frac{\sqrt{-g}}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} R + \sqrt{-g}(\delta g^{\mu\nu})R_{\mu\nu} \right] + \delta S_{m,r} \quad (74)$$

$$= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \left[-g_{\mu\nu} \frac{R}{2} + R_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} + \delta S_{m,r}. \quad (75)$$

$$(76)$$

Vamos definir também a ação dos outros componentes como:

$$\delta S_{m,r} = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad (77)$$

e, assim,

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} [-g_{\mu\nu} \frac{R}{2} + R_{\mu\nu} - \kappa T_{\mu\nu}] \delta g^{\mu\nu} \quad (78)$$

$$= 0. \quad (79)$$

Finalmente podemos concluir, da equação acima, que:

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (80)$$

Apêndice C - Mais sobre problemas com Λ CDM

Antes mesmo da descoberta da expansão acelerada, já havia a consideração vinda da teoria quântica de campos de que há uma energia de ponto zero, chamada energia do vácuo, que poderia desempenhar fator significativo na evolução cosmológica (Fabris, 2010). No entanto, o valor teórico (extrapolando a Física conhecida até a energia de Planck) está muitas ordens de grandeza além do estimado observacionalmente para Λ . Estimativas apuram que ρ_Λ difere em pelo menos 44 ordens de grandeza da densidade de energia de vácuo ρ_v , indicando que pode haver alguma outra contribuição significando que $\rho_v + EE = \rho_\Lambda$.

O que chamamos de coincidência cósmica é o fato de apesar de ρ_m e ρ_Λ serem quantidades independentes em Λ CDM, seus valores são de ordens comparáveis atualmente, e é apenas isso que nos permite detectar a expansão acelerada. Se ρ_Λ/ρ_m fosse 10 vezes menor, não detectaríamos a aceleração ainda. Já se essa razão fosse 10 vezes maior, a aceleração dominaria muito cedo e a distribuição de matéria no universo seria muito diferente, impedindo talvez a formação de galáxias. Considerando que essas quantidades só são comparáveis por um curto período de tempo cósmico, é necessário que estejamos em uma época privilegiada para poder detectar isso (Amendola; Tsujikawa, 2010).

Indo mais longe, Amendola e Tsujikawa (2010) argumentam que alguém poderia pensar que talvez sejamos privilegiados de sequer podermos existir. É como se as precisas condições iniciais necessárias para o surgimento desse Universo como ele é fossem ou uma grande sequência de extraordinárias coincidências, ou de uma criação praticamente divina, como diria Platão no mito do demiurgo (Zeyl; Sattler, 2019). Esses problemas sugerem que o modelo cosmológico padrão seja apenas um ajuste empírico aos dados, faltando nele uma robusta motivação fundamental (Sotiriou; Faraoni, 2010).

Referências

Aaronson, M.; Mould, J. A distance scale from the infrared magnitude/H I velocity-width relation. IV. The morphological type dependence and scatter in the relation; the distances to nearby groups. , v. 265, p. 1–17, fev. 1983. Citado na página 21.

Abazajian, K. et al. The seventh data release of the sloan digital sky survey. *Astrophysical Journal, Supplement Series*, IOP Publishing Ltd., v. 182, n. 2, p. 543–558, 2009. ISSN 0067-0049. Citado na página 22.

Abbott, T. et al. Dark energy survey year 1 results: Cosmological constraints from galaxy clustering and weak lensing. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 98, n. 4, aug 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.98.043526>>. Citado na página 23.

Aghanim, N. et al. Planck2018 results: Vi. cosmological parameters. *Astronomy amp; Astrophysics*, EDP Sciences, v. 641, p. A6, set. 2020. ISSN 1432-0746. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/201833910>>. Citado 3 vezes nas páginas 11, 21 e 83.

Ahumada, R. et al. The 16th Data Release of the Sloan Digital Sky Surveys: First Release from the APOGEE-2 Southern Survey and Full Release of eBOSS Spectra. , v. 249, n. 1, p. 3, jul. 2020. Citado na página 22.

Alam, S. et al. The eleventh and twelfth data releases of the sloan digital sky survey: Final data from sdss-iii. *Astrophysical Journal, Supplement Series*, IOP Publishing Ltd., v. 219, n. 1, jul. 2015. ISSN 0067-0049. Publisher Copyright: © 2015. The American Astronomical Society. All rights reserved. Citado na página 22.

Albrecht, A.; Steinhardt, P. J. Cosmology for grand unified theories with radiatively induced symmetry breaking. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 48, p. 1220–1223, Apr 1982. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.48.1220>>. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 70.

Amendola, L. et al. Measuring Gravity at Cosmological Scales. *Universe*, v. 6, n. 2, p. 20, jan. 2020. Citado 5 vezes nas páginas 31, 88, 89, 92 e 94.

Amendola, L. et al. Conditions for the cosmological viability of $f(R)$ dark energy models. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 75, p. 083504, Apr 2007. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.75.083504>>. Citado na página 30.

Amendola, L.; Tsujikawa, S. *Dark Energy: Theory and Observations*. New York: Cambridge University Press, 2010. 506 p. Citado 3 vezes nas páginas 29, 94 e 148.

Anderson, L. et al. The clustering of galaxies in the SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: baryon acoustic oscillations in the Data Release 9 spectroscopic galaxy sample. *MNRAS*, v. 427, n. 4, p. 3435–3467, dez. 2012. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 25.

Appleby, S. A.; Battye, R. A. Aspects of cosmological expansion in F(R) gravity models. *JCAP*, v. 2008, n. 5, p. 019, maio 2008. Citado na página 92.

Aristóteles. *Physics*. Grécia: [s.n.], sec. IV A.C. Citado na página 16.

Armendáriz-Picón, C.; Damour, T.; Mukhanov, V. k-Inflation. *Physics Letters B*, v. 458, n. 2-3, p. 209–218, jul. 1999. Citado na página 88.

Armendariz-Picon, C.; Mukhanov, V.; Steinhardt, P. J. Essentials of k-essence. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 63, n. 10, abr. 2001. ISSN 1089-4918. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.63.103510>>. Citado na página 88.

Baade, W. The Resolution of Messier 32, NGC 205, and the Central Region of the Andromeda Nebula. , v. 100, p. 137, set. 1944. Citado na página 20.

Baade, W. 110. a revision of the extra-galactic distance scale. In: _____. *A Source Book in Astronomy and Astrophysics, 1900–1975*. Cambridge, MA and London, England: Harvard University Press, 1979. p. 750–752. ISBN 9780674366688. Disponível em: <<https://doi.org/10.4159/harvard.9780674366688.c118>>. Citado na página 21.

Baldry, I. K. et al. Galaxy And Mass Assembly (GAMA): the input catalogue and star-galaxy separation. , v. 404, n. 1, p. 86–100, maio 2010. Citado na página 22.

Bardeen, J. M. Gauge-invariant cosmological perturbations. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 22, p. 1882–1905, Oct 1980. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.22.1882>>. Citado na página 60.

Baumann, D. TASI Lectures on Inflation. *arXiv e-prints*, p. arXiv:0907.5424, jul. 2009. Citado 4 vezes nas páginas 10, 69, 70 e 71.

Bellini, E.; Sawicki, I. Maximal freedom at minimum cost: linear large-scale structure in general modifications of gravity. *JCAP*, v. 2014, n. 7, p. 050, jul. 2014. Citado 6 vezes nas páginas 11, 89, 91, 93, 95 e 138.

Bennett, C. L. et al. Four-Year COBE DMR Cosmic Microwave Background Observations: Maps and Basic Results. , v. 464, p. L1, jun. 1996. Citado na página 25.

Beutler, F. et al. The clustering of galaxies in the completed SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: baryon acoustic oscillations in the Fourier space. , v. 464, n. 3, p. 3409–3430, jan. 2017. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 85.

Blas, D.; Lesgourgues, J.; Tram, T. The cosmic linear anisotropy solving system (class). part ii: Approximation schemes. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2011, n. 07, p. 034, jul 2011. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2011/07/034>>. Citado na página 98.

Blas, D.; Lesgourgues, J.; Tram, T. The Cosmic Linear Anisotropy Solving System (CLASS) II: Approximation schemes. *JCAP*, v. 07, p. 034, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 97.

Boughn, S. P.; Cheng, E. S.; Wilkinson, D. T. Dipole and quadrupole anisotropy of the 2.7 K radiation. , v. 243, p. L113–L117, fev. 1981. Citado na página 22.

- Brans, C.; Dicke, R. H. Mach's principle and a relativistic theory of gravitation. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 124, p. 925–935, Nov 1961. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.124.925>. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 88.
- Brian Schmidt. *The High-Z SN Search*. High-Z SN Search, 2001. Acesso em 20 abril 2024. Disponível em: <https://lweb.cfa.harvard.edu/supernova/home.html>. Citado na página 22.
- Capozziello, S.; Cardone, V. F.; Salzano, V. Cosmography of $f(R)$ gravity. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 78, p. 063504, Sep 2008. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.78.063504>. Nenhuma citação no texto.
- Carroll, S. *SPACETIME AND GEOMETRY: An introduction to general relativity*. London: Pearson, 2004. Citado na página 147.
- Carroll, S. M. et al. Cosmology of generalized modified gravity models. *Phys. Rev. D*, v. 71, n. 6, p. 063513, mar. 2005. Citado na página 88.
- Chibisov, G. V. Damping of Adiabatic Perturbations in an Expanding Universe. , v. 16, p. 56, ago. 1972. Citado na página 17.
- Clifton, T. et al. Modified gravity and cosmology. *Physics Reports*, Elsevier BV, v. 513, n. 1–3, p. 1–189, mar. 2012. ISSN 0370-1573. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2012.01.001>. Citado na página 31.
- Colless, M. et al. *VizieR Online Data Catalog: The 2dF Galaxy Redshift Survey 100k Data Release (2dFGRS Team, 2001)*. 2003. VizieR On-line Data Catalog: VII/226. Originally published in: 2dF Galaxy Redshift Survey Team (2001). Citado na página 22.
- David Tong. *Lectures on Cosmology: Structure formation*. DAMTP, University of Cambridge, 2019. Acesso em 19 jul. 2023. Disponível em: <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/cosmo/three.pdf>. Citado 2 vezes nas páginas 68 e 75.
- de Felice, A.; Kobayashi, T.; Tsujikawa, S. Effective gravitational couplings for cosmological perturbations in the most general scalar-tensor theories with second-order field equations. *Physics Letters B*, v. 706, n. 2, p. 123–133, dez. 2011. Citado 2 vezes nas páginas 92 e 94.
- De Felice, A.; Tsujikawa, S. Conditions for the cosmological viability of the most general scalar-tensor theories and their applications to extended Galileon dark energy models. *JCAP*, v. 2012, n. 2, p. 007, fev. 2012. Citado 2 vezes nas páginas 91 e 141.
- de La Cruz-Dombriz, A.; Dobado, A.; Maroto, A. L. Evolution of density perturbations in $f(R)$ theories of gravity. *Phys. Rev. D*, v. 77, n. 12, p. 123515, jun. 2008. Citado na página 92.
- de Rham, C.; Tolley, A. J. DBI and the Galileon reunited. *JCAP*, v. 2010, n. 5, p. 015, maio 2010. Citado na página 88.
- Deffayet, C. et al. From k-essence to generalized Galileons. *Phys. Rev. D*, v. 84, n. 6, p. 064039, set. 2011. Citado 2 vezes nas páginas 87 e 88.

Deffayet, C. et al. Imperfect dark energy from kinetic gravity braiding. *JCAP*, v. 2010, n. 10, p. 026, out. 2010. Citado na página 141.

DESI Collaboration et al. *The DESI Experiment Part I: Science, Targeting, and Survey Design*. 2016. Citado na página 24.

Di Valentino, E. et al. In the realm of the hubble tension—a review of solutions*. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 38, n. 15, p. 153001, jul 2021. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/1361-6382/ac086d>>. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 27.

Dodelson, S.; Schmidt, F. *Modern Cosmology*. Second edition. [S.l.]: Academic Press (Elsevier), 2021. 512 p. Citado 15 vezes nas páginas 9, 10, 11, 12, 23, 50, 51, 54, 70, 74, 76, 78, 82, 89 e 131.

Doran, M. CMBEASY: an object oriented code for the cosmic microwave background. *JCAP*, v. 2005, n. 10, p. 011, out. 2005. Citado na página 98.

Eddington, A. S. *The Mathematical Theory of Relativity*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1923. 448 p. Citado na página 30.

Einstein, A.; Infeld, L. *A Evolução da Física*. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2008. 248 p. Citado na página 29.

Eisenstein, D. J. et al. Detection of the Baryon Acoustic Peak in the Large-Scale Correlation Function of SDSS Luminous Red Galaxies. *APJ*, v. 633, n. 2, p. 560–574, nov. 2005. Citado na página 23.

Fabbri, R. et al. Measurement of the cosmic-background large-scale anisotropy in the millimetric region. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 44, p. 1563–1566, Jun 1980. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.44.1563>>. Citado na página 22.

Fabris, J. C. Introdução à cosmologia. In: BERGLIAFFA, M. N. N. P. neto; S. E. P. (Ed.). *Programa Mínimo de Cosmologia*. Rio de Janeiro: Jauá Editora, 2010. cap. 3, p. 381–414. Citado na página 148.

Fabris, J. C. Aristóteles e a gravitação. *Cadernos de Astronomia*, v. 1, n. 1, p. 6–16, jul. 2020. Disponível em: <<https://periodicos.ufes.br/astrofisica/article/view/30464>>. Citado na página 15.

Feast, M. W.; Catchpole, R. M. The Cepheid period-luminosity zero-point from HIPPARCOS trigonometrical parallaxes. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, v. 286, p. L1–L5, 1997. Citado na página 19.

Feroz, F.; Hobson, M. P.; Bridges, M. MULTINEST: an efficient and robust Bayesian inference tool for cosmology and particle physics. *MNRAS*, v. 398, n. 4, p. 1601–1614, out. 2009. Citado na página 98.

Ferreira, P. G. Cosmological tests of gravity. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, Annual Reviews, v. 57, n. 1, p. 335–374, ago. 2019. ISSN 1545-4282. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1146/annurev-astro-091918-104423>>. Citado na página 31.

Field, G. B. Instability and Waves Driven by Radiation in Interstellar Space and in Cosmological Models. , v. 165, p. 29, abr. 1971. Citado na página 17.

Freedman, W. L. et al. Final results from the hubble space telescope key project to measure the hubble constant. *The Astrophysical Journal*, American Astronomical Society, v. 553, n. 1, p. 47–72, maio 2001. ISSN 1538-4357. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1086/320638>>. Citado na página 21.

Friedman, A. On the Possibility of a World with Constant Negative Curvature of Space. *General Relativity and Gravitation*, v. 31, p. 31–2009, dez. 1999. Citado na página 23.

Friedmann, A. On the Curvature of Space. *General Relativity and Gravitation*, v. 31, p. 1991, dez. 1999. Citado na página 23.

Gamow, G. *The Creation of the Universe*. New York: Viking Press, 1952. 148 p. Citado na página 23.

Gannouji, R.; Moraes, B.; Polarski, D. The growth of matter perturbations in r models. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2009, n. 02, p. 034–034, fev. 2009. ISSN 1475-7516. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2009/02/034>>. Citado na página 31.

Garnavich, P. M. et al. Constraints on cosmological models from hubble space telescope observations of high- z supernovae. *The Astrophysical Journal*, American Astronomical Society, v. 493, n. 2, p. L53–L57, fev. 1998. ISSN 0004-637X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1086/311140>>. Citado na página 22.

Geller, M. J.; Huchra, J. P. Mapping the universe. *Science*, v. 246, n. 4932, p. 897–903, 1989. Disponível em: <<https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.246.4932.897>>. Citado na página 21.

Gil-Marín, H. et al. The clustering of galaxies in the sdss-iii baryon oscillation spectroscopic survey: R_{sd} measurement from the power spectrum and bispectrum of the dr12 boss galaxies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press (OUP), v. 465, n. 2, p. 1757–1788, out. 2016. ISSN 1365-2966. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1093/mnras/stw2679>>. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 83.

Gott, J. R. I.; Melott, A. L.; Dickinson, M. The Sponge-like Topology of Large-Scale Structure in the Universe. , v. 306, p. 341, jul. 1986. Citado na página 21.

Guth, A. H. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 23, p. 347–356, Jan 1981. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.23.347>>. Citado na página 69.

Hardie, R.; Gaye, R. *Physics, by Aristotle*. South Australia: The University of Adelaide Library, 2015. Citado na página 16.

Harrison, E. *Darkness at Night: A Riddle of the Universe*. Harvard University Press, 1987. (Emerson: Emergent Village Resources for Communities of Faith Series). ISBN 9780674192713. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=IRKYueWVftYC>>. Citado na página 16.

- Harrison, E. R. Normal modes of vibrations of the universe. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 39, p. 862–882, Oct 1967. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.39.862>>. Citado na página 60.
- Hawking, S. W. Perturbations of an Expanding Universe. *APJ*, v. 145, p. 544, ago. 1966. Citado na página 60.
- Horndeski, G. W. Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space. *Int. J. Theor. Phys.*, v. 10, p. 363–384, 1974. Citado na página 87.
- Howlett, C. et al. CMB power spectrum parameter degeneracies in the era of precision cosmology. , v. 2012, n. 4, p. 027, abr. 2012. Citado na página 31.
- Hubble, E. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Academy of Sciences, v. 15, n. 3, p. 168–173, 1929. ISSN 0027-8424. Disponível em: <<https://www.pnas.org/content/15/3/168>>. Citado 3 vezes nas páginas 17, 20 e 23.
- Hubble, E. P. Cepheids in spiral nebulae. *The Observatory*, v. 48, p. 139–142, maio 1925. Citado na página 20.
- Hubble, E. P. Extragalactic nebulae. , v. 64, p. 321–369, dez. 1926. Citado na página 20.
- Hufbauer, K. Alexander a. friedmann: The man who made the universe expand. *Slavic Review*, Cambridge University Press, v. 54, n. 1, p. 189–190, 1995. Citado na página 16.
- Humason, M. L.; Mayall, N. U.; Sandage, A. R. Redshifts and magnitudes of extragalactic nebulae. , v. 61, p. 97–162, jan. 1956. Citado na página 21.
- Ivezić Željko et al. Lsst: From science drivers to reference design and anticipated data products. *The Astrophysical Journal*, The American Astronomical Society, v. 873, n. 2, p. 111, mar 2019. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/ab042c>>. Citado na página 24.
- Jones, D. H. et al. *VizieR Online Data Catalog: 6dF galaxy survey final redshift release (Jones+, 2009)*. 2010. VizieR On-line Data Catalog: VII/259. Originally published in: 2009MNRAS.399..683J. Citado na página 22.
- Kaiser, N. Clustering in real space and in redshift space. *MNRAS*, v. 227, p. 1–21, jul. 1987. Citado na página 81.
- Kazanas, D. Dynamics of the universe and spontaneous symmetry breaking. *APJL*, v. 241, p. L59–L63, out. 1980. Citado na página 70.
- Khoury, J.; Weltman, A. Chameleon cosmology. *Phys. Rev. D*, v. 69, n. 4, p. 044026, fev. 2004. Citado 2 vezes nas páginas 88 e 141.
- Kilbinger, M. et al. CosmoPMC: Cosmology Population Monte Carlo. *arXiv e-prints*, p. arXiv:1101.0950, jan. 2011. Citado na página 98.
- Kobayashi, T. Horndeski theory and beyond: a review. *Reports on Progress in Physics*, v. 82, n. 8, p. 086901, ago. 2019. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 87.
- Kodama, H.; Sasaki, M. Cosmological Perturbation Theory. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, v. 78, p. 1, jan. 1984. Citado na página 60.

- Komatsu, E. et al. Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe Observations: Cosmological Interpretation. *APJs*, v. 180, n. 2, p. 330–376, fev. 2009. Citado na página 23.
- Koyré, A. *From de Closed World to the Infinite Universe*. Baltimore: The Johns Hopkins Press, 1957. 163 p. Citado na página 15.
- Koyré, A. *Estudos de História do Pensamento Científico*. Rio de Janeiro: Editora Forense-Universitária, 1982. 388 p. Citado na página 15.
- Kuhn, T. S. *The Copernican Revolution: Planetary Astronomy in the Development of Western Thought*. [S.l.]: Harvard Univ. Press, 1975. 320 p. Citado na página 16.
- Lambourne, R. J. A. *Relativity, gravitation and cosmology*. [S.l.: s.n.], 2010. Citado na página 39.
- Laureijs, R. et al. *Euclid Definition Study Report*. 2011. Citado na página 24.
- Leavitt, H. S.; Pickering, E. C. Periods of 25 Variable Stars in the Small Magellanic Cloud. *Harvard College Observatory Circular*, v. 173, p. 1–3, mar. 1912. Citado na página 19.
- Lesgourgues, J. The Cosmic Linear Anisotropy Solving System (CLASS) I: Overview. *arXiv e-prints*, p. arXiv:1104.2932, abr. 2011. Citado na página 97.
- Lewis, A.; Challinor, A.; Lasenby, A. Efficient Computation of Cosmic Microwave Background Anisotropies in Closed Friedmann-Robertson-Walker Models. *APJ*, v. 538, n. 2, p. 473–476, ago. 2000. Citado na página 98.
- Liddle, A.; Lyth, D. H. *Cosmological Inflation and Large Scale Structure*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 412 p. Citado na página 40.
- Lifshitz, E. Republication of: On the gravitational stability of the expanding universe. *General Relativity and Gravitation*, v. 49, n. 2, p. 18, fev. 2017. Citado na página 60.
- Lifshitz, E. M.; Khalatnikov, I. M. Investigations in relativistic cosmology†. *Advances in Physics*, v. 12, n. 46, p. 185–249, abr. 1963. Citado na página 60.
- Linde, A. D. A new inflationary universe scenario: A possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems. *Physics Letters B*, v. 108, n. 6, p. 389–393, fev. 1982. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 70.
- Longair, M. S. M. S. . *The cosmic century : a history of astrophysics and cosmology*. [S.l.: s.n.], 2006. Citado 6 vezes nas páginas 15, 16, 17, 18, 19 e 20.
- Lovelock, D. The four-dimensionality of space and the einstein tensor. *J. Math. Phys.*, v. 13, p. 874–876, 1972. Citado na página 87.
- Lovelock, D. The Einstein Tensor and Its Generalizations. *Journal of Mathematical Physics*, v. 12, n. 3, p. 498–501, 10 2003. ISSN 0022-2488. Disponível em: <https://doi.org/10.1063/1.1665613>. Citado na página 87.
- Ma, C.-P.; Bertschinger, E. Cosmological Perturbation Theory in the Synchronous and Conformal Newtonian Gauges. *APJ*, v. 455, p. 7, dez. 1995. Citado 10 vezes nas páginas 10, 11, 18, 62, 63, 75, 77, 97, 131 e 138.

- MAPS. *MAPS - Minnesota Automated Plate Scanner Catalog of the POSS I*. Minnesota Automated Plate Scanner, 2008. Acesso em 20 fev. 2024. Disponível em: <http://aps.umn.edu/>. Citado na página 20.
- Martinez, V. J.; Saar, E. *Statistics of the Galaxy Distribution*. Boca Raton: CRC Press, 2001. 456 p. Citado 2 vezes nas páginas 65 e 66.
- Meszaros, P. The behaviour of point masses in an expanding cosmological substratum. , v. 37, n. 2, p. 225–228, dez. 1974. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 76.
- Motohashi, H.; Starobinsky, A. A.; Yokoyama, J. Analytic Solution for Matter Density Perturbations in a Class of Viable Cosmological $f(R)$ Models. *International Journal of Modern Physics D*, v. 18, n. 11, p. 1731–1740, jan. 2009. Citado 2 vezes nas páginas 88 e 92.
- Motta, M. et al. Probing dark energy through scale dependence. *Phys. Rev. D*, v. 88, n. 12, p. 124035, dez. 2013. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 95.
- Mount Wilson Institute. *George Ellery Hale: Founder of mount wilson observatory*. Mount Wilson Institute, 2013. Acesso em 20 fev. 2024. Disponível em: <https://www.mtwilson.edu/george-ellery-hale>. Citado na página 20.
- Mukhanov, V. F.; Feldman, H. A.; Brandenberger, R. H. Theory of cosmological perturbations. *Phys. Rep.*, v. 215, n. 5-6, p. 203–333, jun. 1992. Citado na página 60.
- North, J. *The Measure of the Universe: A History of Modern Cosmology*. Clarendon Press, 1965. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=wFVAAAAAIAAJ>. Citado na página 16.
- Olson, D. W. Density perturbations in cosmological models. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 14, p. 327–331, Jul 1976. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.14.327>. Citado na página 60.
- Ostrogradsky, M. Mémoires sur les équations différentielles, relatives au problème des isopérimètres. *Mem. Acad. St. Petersbourg*, v. 6, n. 4, p. 385–517, 1850. Citado na página 87.
- paulpreuss. *The Evolving Search for the Nature of Dark Energy*. Lawrence Berkeley National Laboratory, 2009. Acesso em 20 abril 2024. Disponível em: <https://newscenter.lbl.gov/2009/10/27/evolving-dark-energy/>. Citado na página 22.
- Peebles, P. Primeval galaxies. *Proceedings of the Fourth Texas Symposium on Relativistic Astrophysics*, jan. (não publicado) 1967. Citado na página 17.
- Peebles, P. *Cosmology's Century: An Inside History of Our Modern Understanding of the Universe*. Princeton University Press, 2020. ISBN 9780691201665. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=HuDBDwAAQBAJ>. Citado 4 vezes nas páginas 15, 17, 27 e 28.
- Peebles, P. J. E.; Yu, J. T. Primeval Adiabatic Perturbation in an Expanding Universe. , v. 162, p. 815, dez. 1970. Citado na página 17.

- Perivolaropoulos, L.; Skara, F. Challenges for Λ CDM: An update. *New Astronomy Reviews*, v. 95, p. 101659, 2022. ISSN 1387-6473. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1387647322000185>>. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 28.
- Perlmutter, S. et al. Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 517, n. 2, p. 565–586, jun 1999. Disponível em: <<https://doi.org/10.1086%2F307221>>. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 141.
- PERLMUTTER, S. et al. Discovery of a supernova explosion at half the age of the universe. *Nature*, Springer Science and Business Media LLC, v. 391, n. 6662, p. 51–54, jan. 1998. ISSN 1476-4687. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/34124>>. Citado na página 22.
- Perlmutter, S. et al. Measurements of the Cosmological Parameters Ω and Λ from the First Seven Supernovae at $z \geq 0.35$. , v. 483, n. 2, p. 565–581, jul. 1997. Citado na página 22.
- Planck Collaboration et al. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. , v. 641, p. A6, set. 2020. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.
- Press, W. H.; Vishniac, E. T. Tenacious myths about cosmological perturbations larger than the horizon size. *APJ*, v. 239, p. 1–11, jul. 1980. Citado na página 60.
- Ratra, B.; Peebles, P. J. E. Cosmological consequences of a rolling homogeneous scalar field. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 37, p. 3406–3427, Jun 1988. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.37.3406>>. Citado na página 88.
- Riess, A. G. et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, IOP Publishing, v. 116, n. 3, p. 1009–1038, sep 1998. Disponível em: <<https://doi.org/10.1086%2F300499>>. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 141.
- Riess, A. G. et al. A comprehensive measurement of the local value of the hubble constant with 1 km s⁻¹ mpc⁻¹ uncertainty from the hubble space telescope and the sh0es team. *The Astrophysical Journal Letters*, American Astronomical Society, v. 934, n. 1, p. L7, jul. 2022. ISSN 2041-8213. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.3847/2041-8213/ac5c5b>>. Citado na página 21.
- Ryden, B. *Introduction to cosmology*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1970. ISBN 978-1-107-15483-4, 978-1-316-88984-8, 978-1-316-65108-7. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 41.
- Saadeh, D. et al. How isotropic is the universe? *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 117, n. 13, Sep 2016. ISSN 1079-7114. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.117.131302>>. Citado na página 23.
- Sahni, V.; Shtanov, Y. Braneworld models of dark energy. *JCAP*, v. 2003, n. 11, p. 014, nov. 2003. Citado na página 30.
- Sakai, K. Density Perturbation and Preferential Coordinate Systems in an Expanding Universe. *Progress of Theoretical Physics*, v. 41, n. 6, p. 1461–1469, 06 1969. ISSN 0033-068X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1143/PTP.41.1461>>. Citado na página 60.

- Sandage, A. Current Problems in the Extragalactic Distance Scale. , v. 127, p. 513, maio 1958. Citado na página 21.
- Sandage, A. The Ability of the 200-Inch Telescope to Discriminate Between Selected World Models. *Astrophys. J.*, v. 133, p. 355–392, 1961. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 42.
- Sato, K. First-order phase transition of a vacuum and the expansion of the Universe. *MNRAS*, v. 195, p. 467–479, maio 1981. Citado na página 69.
- Schutz, B. F. *A First Course in General Relativity; 2nd ed.* New York: Dover Publications, 2009. 406 p. Citado na página 36.
- Seldner, M. et al. New reduction of the Lick catalog of galaxies. , v. 82, p. 249–256, abr. 1977. Citado na página 21.
- Seljak, U.; Zaldarriaga, M. A Line-of-Sight Integration Approach to Cosmic Microwave Background Anisotropies. *APJ*, v. 469, p. 437, out. 1996. Citado na página 98.
- Shapley, H. Studies based on the colors and magnitudes in stellar clusters. VII. The distances, distribution in space, and dimensions of 69 globular clusters. , v. 48, p. 154–181, out. 1918. Citado na página 19.
- Shectman, S. A. et al. The Las Campanas Redshift Survey. , v. 470, p. 172, out. 1996. Citado na página 22.
- Slipher, V. M. 102. a spectrographic investigation of spiral nebulae. In: _____. *A Source Book in Astronomy and Astrophysics, 1900–1975.* Cambridge, MA and London, England: Harvard University Press, 1979. p. 704–707. ISBN 9780674366688. Disponível em: <https://doi.org/10.4159/harvard.9780674366688.c110>. Citado na página 38.
- Sotiriou, T. P.; Faraoni, V. $f(R)$ theories of gravity. *Rev. Mod. Phys.*, v. 82, n. 1, p. 451–497, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 26, 30 e 148.
- Starobinsky, A. A. Dynamics of Phase Transition in the New Inflationary Universe Scenario and Generation of Perturbations. *Phys. Lett. B*, v. 117, p. 175–178, 1982. Citado na página 71.
- Stelle, K. S. Renormalization of higher-derivative quantum gravity. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 16, p. 953–969, Aug 1977. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.16.953>. Citado na página 30.
- Stoughton, C. et al. Sloan Digital Sky Survey: Early Data Release. , v. 123, n. 1, p. 485–548, jan. 2002. Citado na página 21.
- Tanabashi, M. et al. Cosmic microwave background in review of particle physics. *Phys. Rev. D*, v. 98, p. 414–423, 2018. Citado na página 23.
- Tanabashi, M. et al. Inflation in review of particle physics. *Phys. Rev. D*, v. 98, p. 364–376, 2018. Citado na página 70.
- Tegmark, M. et al. The Three-Dimensional Power Spectrum of Galaxies from the Sloan Digital Sky Survey. *APJ*, v. 606, n. 2, p. 702–740, maio 2004. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 81.

Tegmark, M. et al. Cosmological constraints from the SDSS luminous red galaxies. *Phys. Rev. D*, v. 74, n. 12, p. 123507, dez. 2006. Citado na página 23.

Tsujikawa, S. Observational signatures of $f(r)$ dark energy models that satisfy cosmological and local gravity constraints. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 77, p. 023507, Jan 2008. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.77.023507>>. Citado na página 92.

Tsujikawa, S. et al. Dispersion of growth of matter perturbations in $f(r)$ gravity. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 80, p. 084044, Oct 2009. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.80.084044>>. Citado na página 31.

Tsujikawa, S.; Uddin, K.; Tavakol, R. Density perturbations in $f(r)$ gravity theories in metric and palatini formalisms. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 77, p. 043007, Feb 2008. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.77.043007>>. Citado na página 92.

Vaucouleurs, r. de. *The %₀ cosmic Distance Scale and the Hubble Constant*. Mount Stromlo and Siding Spring Observatories, Australian National University, 1982. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=zRSRzgEACAAJ>>. Citado na página 21.

Visser, M. Jerk, snap and the cosmological equation of state. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 21, n. 11, p. 2603–2615, apr 2004. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F0264-9381%2F21%2F11%2F006>>. Nenhuma citação no texto.

Weinberg, S. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. New York: John Wiley and Sons, 1972. ISBN 978-0-471-92567-5, 978-0-471-92567-5. Citado 3 vezes nas páginas 36, 40 e 88.

Wetterich, C. Cosmology and the fate of dilatation symmetry. *Nuclear Physics B*, v. 302, n. 4, p. 668–696, jun. 1988. Citado na página 88.

Weyl, H. A New Extension of Relativity Theory. *Annalen Phys.*, v. 59, p. 101–133, 1919. [Annalen Phys.364,101(1919)]. Citado na página 30.

Weyl, H. Lxxxvi. redshift and relativistic cosmology. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Taylor & Francis, v. 9, n. 60, p. 936–943, 1930. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/14786443008565065>>. Citado na página 39.

Wikipédia. *Alpher–Bethe–Gamow paper*. Wikipedia, a enciclopédia livre, 2019. Acesso em 06 out. 2019. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Alpher%E2%80%93Bethe%E2%80%93Gamow_paper>. Nenhuma citação no texto.

Woodard, R. Avoiding dark energy with $1/r$ modifications of gravity. *The Invisible Universe: Dark Matter and Dark Energy*, Springer Berlin Heidelberg, p. 403–433, 2007. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-71013-4_14>. Citado na página 87.

Zeyl, D.; Sattler, B. Plato's timaeus. In: ZALTA, E. N. (Ed.). *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Summer 2019. [S.l.]: Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2019. Citado na página 148.

Zumalacárregui, M. et al. hi_class: Horndeski in the Cosmic Linear Anisotropy Solving System. *JCAP*, v. 08, p. 019, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 97 e 122.