Dissertação de

Mestrado

Ambigüidades de Escala no Cálculo Perturbativo em Teoria Quântica de Campos

Marcus Vinicius Snovarski Fonseca

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas-CBPF

Rio de Janeiro, Agosto de 2007

Dedicatória

Em memória de minha mãe Madalena Snovarski.

Agradecimentos

Agradeço aos Profs. Orimar Antônio Battistel e José A. Helayël-Neto por toda a sua dedicação, companheirismo, estímulo, paciência e pelos ensinamentos.

Agradeço ao Prof. Alexander W. Smith pelos conselhos em momentos difíceis e pela infra-estrutura que me cedeu por quase um ano.

Agradeço a minha noiva e companheira Greice Lopes Maia que se transformou, ao longo desses três anos e meio que estamos juntos, em uma das maiores motivações na busca do meu sucesso e realização profissional. Agradeço também pelo amor, carinho e incentivo. Te amo!

Agradeço a todos os familiares que torceram por mim ao longo desta caminhada. Em especial ao meu pai e amigo Luiz Fonseca que sem querer me forneceu a motivação inicial para a minha dedicação à Física. A minha mãe Madalena Snovarski, grande apoiadora durante minha graduação, por toda a proteção e luz que me manda lá de cima. Também agradeço aos meus irmãos Luis Gustavo e Marcelo Fonseca (a justiça será feita) pelo companheirismo.

Agradeço à Capes pelo financiamento do meu mestrado, sem o qual dificilmente o teria completado, e ao CBPF pela oportunidade oferecida e por todo o apoio.

Não poderia deixar de agradecer as minhas amigas Andressa Contreira e Ana Beatriz pela amizade e carinho e pelo auxílio nos quatro meses finais da elaboração deste trabalho.

Resumo

Nas soluções perturbativas de Teorias Quânticas de Campos estão presentes integrais de Feynman divergentes que contaminam as amplitudes físicas perturbativas com indefinições matemáticas. Como as amplitudes devem nos fornecer informações sobre a dinâmica de um determinado sistema de particulas interagentes torna-se necessário um adequado tratamento para o problema das divergências a fim de que predições da teoria possam ser apreciadas. Isto é, os resultados obtidos para as amplitudes não podem tornar-se dependentes das arbitrariedades envolvidas na construção destas a partir das regras de Feynman bem como daquelas possivelmente associadas ao própio processo de cálculo. Como tal, quando reescrevemos uma amplitude divergente como uma soma de termos com diferentes graus de divergência, a cada separação promovida pode estar envolvida uma arbitrariedade parametrizável com a introdução de um parâmetro indefinido. Este parâmetro, que possui dimensão de massa, é denominado de parâmetro de escala e a correspondente dependência de ambiguidade de escala. Por outro lado, para que possamos construir predições a partir de uma teoria, é necessário que as amplitudes independam de parâmetros arbitrários. Logo, torna-se crucial o desenvolvimento de técnicas consistentes e gerais para o tratamento das divergências. Este é precisamente o contexto do presente trabalho. Como em teorias fundamentais a lagrangiana é um invariante de escala, o objetivo desta investigação reside na construção de um tratamento consistente para as amplitudes físicas de modo que os resultados finais destas possam exibir também independância de escala. Após serem calculadas todas as amplitudes relevantes, observa-se que todos os termos potencialmente violadores de simetria apresentam ambigüidade

de escala, exceto os termos anômalos. Além disso, observa-se que é possível eliminar consistentemente todos os termos potencialmente ambíguos de escala e dependentes de combinações não-físicas dos momentos externos desde que um conjunto de condições seja satisfeito.

Abstract

In the perturbative solutions of Quantum Field Theories are presented divergent Feynman's Integrals that contaminate the perturbative physical amplitudes with mathematical indefinitions. As the amplitudes must provide us information about the dynamics of one determined interacting particles system so that predictions of the theory can be appreciated, one adequate treatment for the divergences becomes necessary. That is, the final results for the amplitudes cannot depend on the involved arbitraries in their constructions from the Feynman's Rules as well as of those associated to the proper process of calculation. In this context, when we rewrite a divergent amplitude as an addition of terms with different degrees of divergence, to each promoted separation it can be involved a parametrized arbitrary with the introduction of an indefinite parameter. This parameter, that possesses mass dimension, is called scale parameter and the corresponding dependence scale ambiguity. Soon, the development of consistent techniques for the treatment of this type of ambiguity will become crucial. This is necessarily the context of the present work. As in basic theories the lagrangian is a scale invariant, the objective of this inquiry is the construction of a consistent treatment for the amplitudes in such a way that their final results can also show scale independence. After the calculations of all the relevant amplitudes we observe that all the potentially violating terms of symmetry present scale ambiguity, except the anomalous terms. Moreover, it is observed that it is possible to eliminate consistently all the potentially scale ambiguous terms and dependent of non-physical combinations of the external momenta since a set of conditions is satisfied.

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução Geral

Por volta de 1880, era possível acreditar que a Física tinha alcançado um grau de desenvolvimento tão alto que parecia não apenas difícil, mas até mesmo desnecessário superá-lo, tal a evolução que significou o progresso alcançado. Os trabalhos de Maxwell sobre eletrodinâmica, unificando a ótica, a eletricidade e o magnetismo, propostos em 1873, pareciam completar um conjunto de idéias adquiridas desde o surgimento da Mecânica Newtoniana no século XVII. Ambos reunidos pareciam ser capazes de explicar praticamente todos os fenômenos físicos observados até então. Sobraria aos físicos, assim, tarefas secundárias tais como determinar com maior precisão o valor das constantes físicas fundamentais e encontrar aplicações para tanto conhecimento acumulado.

Fora isso, restavam ainda para ser estudados dois aspectos aparentemente sem grande importância:

i) Algumas incompatibilidades entre o Eletromagnetismo de Maxwell e a Mecânica Newtoniana

e

ii) Alguns poucos fenômenos não satisfatoriamente equacionados.

Entretanto, parecia ser necessário apenas a construção de interpretações mais adequadas para tais teorias, o que era visto como uma questão de tempo. Porém, na busca destas respostas, muitas revoluções conceituais estavam por vir.

As incompatibilidades, acima referidas, residiam no fato de não existir uma transformação entre referenciais inerciais que deixassem invariante tanto o Eletromagnetismo (EL) quanto a Mecânica Clássica (MC). A MC permanecia invariante frente às transformações de Galileu e o EL, por sua vez, assim o fazia frente às transformações de Lorentz.

Para a remoção desta incompatibilidade existiam dois caminhos possíveis a serem seguidos: preservar-se a MC, abandonando-se o promissor EL, ou manter-se este último formalismo preservado, abandonando-se aquele correspondente à MC, a qual tinha a seu favor três séculos de predições solidamente confirmadas pelos experimentos.

Além disto contava ainda o fato de as transformações de Galileu possuírem forte apelo intuitivo ao passo que para as transformações de Lorentz ainda não se havia dado uma interpretação física adequada.

A controvérsia acima relatada perdurou até o aparecimento da Teoria da Relatividade Especial (RE) no trabalho de Einstein [1]. Nele as transformações de Lorentz são adequadamente interpretadas como alterações do espaço e do tempo em função da existência de velocidade relativa entre dois referenciais inerciais. A interpretação permitiu assumir-se o EL como sendo a teoria possuindo as corretas propriedades de invariância e, com isso, foi necessário reconhecer que a MC Newtoniana possuía limitações. Feitas as modificações necessárias, para que uma mecânica invariante frente às transformações de Lorentz emergisse, a MC de Newton passou a ser vista com sendo um caso especial de uma teoria mais geral, a Mecânica Relativística.

De modo parcialmente concomitante com a discussão a respeito da controvérsia envolvendo a invariância das leis físicas frente à troca de referenciais inerciais, os fenômenos não satisfatoriamente explicados, item ii) acima apontado, também tiveram sua compreensão evoluída. Entre estes figuravam a radiação de cavidade, os espectros de raias e o efeito fotoelétrico. Após as importantes contribuições de Planck, Bohr, de Broglie e Einstein entre outros, na tentativa de explicar tais fenômenos surge pouco a pouco outra revolução conceitual, a Física Quântica, que culmina na proposta da equação de onda de Schrödinger em 1926 permitindo a construção da Mecânica Quântica (MQ).

Após os avanços acima mencionados o quadro conceitual da Física mudou apreciavelmente proporcionando o surgimento da Física Contemporânea, tendo como pilares a Teoria da Relatividade e a Física Quântica. Entretanto as questões relacionadas à invariância das leis físicas frente à mudança de sistema de referência, que envolveram o EL e a Mecânica Newtoniana, aliadas aos novos aspectos conceituais recém surgidos, colocavam estas duas teorias em um certo desacordo. De um lado MQ não incorporava os postulados da RE e de outro a RE não estava de acordo com conceitos básicos da MQ. A saber, a equação de Schrödinger aplica-se somente a partículas que se movem com baixas velocidades se comparadas com a velocidade da luz (partículas não relativísticas) e não é uma equação invariante frente à transformações de Lorentz, do mesmo modo que a RE é uma teoria determinística, diferentemente da MQ que é probabilística.

Com o intuito de resolver esta nova controvérsia, o caminho escolhido foi inicialmente o de buscar construir, seguindo a bem sucedida prescrição de Schrödinger, equações de onda relativísticas, o que proporcionou o surgimento de uma nova teoria, a Mecânica Quântica Relativística.

Neste contexto foi proposta a equação de onda de Klein-Gordon. Embora a equação de Schrödinger pudesse ser obtida a partir da equação de Klein-Gordon, através de uma aproximação não relativística, o que seria desejável, a equação proposta não se mostrou satisfatória na descrição de fenômenos como, por exemplo, o espectro de energia do átomo de hidrogênio. Além disso, haviam problemas na definição da densidade de probabilidade, a qual desempenha papel crucial na interpretação da MQ de Schrödinger. Verificou-se não ser possível definir tal quantidade de modo a ser positiva definida, como necessário para permitir uma construção análoga ao caso não relativístico. Esta dificuldade está relacionada ao fato de a equação de Klein-Gordon ser uma equação diferencial de segunda ordem no espaço e no tempo.

Para contornar estes problemas Dirac propôs uma equação de onda relativística de primeira ordem no tempo e, por motivo de covariância, de primeira ordem também nas derivadas espaciais. Ficou demonstrado que esta equação de onda, denominada de equação de Dirac, fornece uma descrição adequada, e altamente precisa, para a dinâmica das partículas de spin 1/2. Após o sucesso da equação de Dirac as mesmas idéias foram estendidas para a construção de equações de onda relativísticas para partículas com outros spins e a equação de Klein-Gordon passou a ser vista como adequada para descrever apenas as partículas de spin nulo. Este progresso permitiu a compreensão da dinâmica relativística e quântica das partículas livres. O próximo passo seria, naturalmente, considerar a descrição, neste contexto, de partículas interagentes.

A visão clássica mais frutífera a respeito disto, concebia as interações entre partículas como sendo intermediadas por campos. Como tal, na teoria clássica da gravitação, para a descrição da interação entre portadores de massa, este papel é desempenhado pelo campo gravitacional, ao passo que para a descrição da interação entre dois portadores de cargas elétricas, na teoria eletromagnética de Maxwell, este papel cabe aos campos elétrico e magnético (o campo eletromagnético). Seria natural então a adoção do conceito de campo mediador também para as interações entre partículas relativísticas. A inserção deste conceito no contexto das idéias da Física Quântica exigiria, evidentemente, adequações. Isto foi percebido de modo brilhante por Dirac em 1927 [2]. Num esforço para explicar a absorção e emissão de fótons em transições energéticas que ocorrem entre níveis (discretos) em sistemas nucleares, Dirac notou que seria necessário que o campo eletromagnético sofresse algum tipo de quantização.

Esta quantização foi realizada com a utilização de métodos análogos àqueles aplicados na quantização do oscilador harmônico. O resultado deste processo foi o aparecimento dos fótons, os quanta de energia do campo eletromagnético desempenhando papel análogo, como era de se esperar, aos fônons do oscilador harmônico quantizado.

Com a quantização do campo eletromagnético surge então a Eletrodinâmica Quântica (EDQ). As previsões provenientes desta teoria apresentaram uma fantástica concordância com os dados experimentais [3] associados a fenômenos pertinentes às interações eletromagnéticas. Este sucesso gerou de imediato a idéia de quantizar os campos das demais interações de acordo com o formalismo construído na EDQ, o que causa o surgimento da Teoria Quântica de Campos (TQC), o formalismo teórico destinado a descrever as partículas elementares e suas interações [4].

Pode-se dizer que as idéias utilizadas para a concepção da TQC tem suas raízes naquelas brotadas na construção da MQ. Ao passo que na MQ são quantizadas as grandezas físicas associadas à dinâmica das partículas (primeira quantização), na TQC os próprios campos associados às partículas são quantizados (segunda quantização). Deste modo, no contexto da TQC tanto os constituintes fundamentais da matéria (quarks e léptons) quanto os mediadores das interações entre estes (bósons intermediários) são considerados como excitações de um campo fundamental.

Para a caracterização de uma TQC constrói-se um funcional dos campos, associados às partículas as quais terão a dinâmica descrita, e de suas derivadas espaço-temporais, a lagrangiana da teoria. A estrutura dos termos do funcional é determinada pelas propriedades de invariância requeridas, ou seja pelas simetrias as quais se deseja implementar na construção da teoria. Estas simetrias podem representar as hipóteses que se deseja testar ou podem representar o conhecimento experimental prévio que se tem a respeito da fenomenologia das partículas interagentes que se deseja incorporar à construção da teoria.

Construída a teoria, aplica-se então o princípio variacional sobre a lagrangiana e então quantiza-se os campos. Com isto é obtido um conjunto de equações diferenciais, uma para cada campo presente no funcional. De posse das equações diferenciais bastaria então solucioná-las para se ter uma descrição completa da dinâmica das partículas, vista como conseqüência das simetrias implementadas.

Precisamente no momento da busca por soluções das equações de movimento obtidas surge o principal problema deste tipo de formalismo. Devido á presença dos termos de interação as equações de movimento obtidas formam um conjunto de equações diferenciais acopladas e não-lineares, sendo que para tais equações raramente consegue-se soluções exatas. A saída passa a ser a utilização de métodos perturbativos para a solução destas equações. Neste contexto para cada processo físico pertinente à TQC considerada constrói-se a amplitude associada ao processo, numa ordem perturbativa escolhida, no espaço dos momentos, com o uso adequado das regras de Feynman. O problema, entretanto, é que as contribuições perturbativas para as amplitudes físicas não envolvem somente estruturas matemáticas definidas e finitas, ou seja, surgem integrais de Feynman divergentes.

O aparecimento destas divergências é um problema intrínseco ao modo como é construído o formalismo, pois os termos de interação na lagrangiana são produtos locais dos campos que representam as partículas associadas à teoria. Tais campos são distribuições. Logo os termos de interação são produtos de distribuições tomadas em um mesmo ponto e este produto não pode ser matematicamente bem definido como o é o produto análogo envolvendo funções. Apesar disto, ao invés de simplesmente abandonar este formalismo, deve-se buscar adequadas interpretações para as soluções perturbativas a fim de que as implicações físicas possam ser estabelecidas, no mesmo sentido que se buscou interpretar as soluções gerais da equação de Schrödinger com vistas a evitar as implicações das singularidades essenciais para a função de onda. Procedimentos análogos, a rigor, estão presentes em soluções de problemas na gravitação e eletromagnetismo clássicos.

Logo para que possam ser apreciadas as predições de uma TQC é necessário, como um primeiro passo, que se tenha a disposição um método consistente para manipular as estruturas divergentes intrínsecas ao cálculo perturbativo.

Surge com isso uma nova etapa no estudo de uma TQC: a regularização. Este problema ocupou e ainda ocupa uma parte significativa dos esforços dispendidos para o estabelecimento do poder preditivo das TQCs. Ao longo do tempo vários procedimentos e técnicas de regularização foram propostas.

Em geral, estes métodos se baseiam em efetuar mudanças nas amplitudes ao nível do integrando das integrais de Feynman problemáticas de modo a torná-las finitas e, assim, manipuláveis. Estas mudanças deveriam ser, em princípio, removíveis. Ou seja, num passo posterior devia ser possível tomar algum limite, sobre a modificação introduzida, de modo que a amplitude original seria reobitida.

Porém, devido às indeterminações matemáticas contidas nas amplitudes, esta operação, em geral, não é bem controlada de modo que as amplitudes podem emergir deste processo de regularização dependente ou contaminada por parâmetros associados aos procedimentos intermediários de regularização. Isto invariavelmente implica em ambigüidades.

As implicações destas observações são óbvias: os resultados para as amplitudes calculadas que se tornam dependentes do método específico de regularização escolhido e destroem o poder de predição da teoria pois são intrinsecamente ambíguos. As amplitudes assim obtidas passam a depender de parâmetros (arbitrários) estranhos àqueles utilizados na construção da teoria para os quais o significado físico é bem estabelecido.

Assim, para que um método de regularização, ou filosofia equivalente, seja considerado razoável é necessário que todos os procedimentos adotados não comprometam as amplitudes com escolhas específicas adotadas em passos intermediários, de modo que a técnica utilizada nos forneça ao final do processo, amplitudes físicas que permitam uma interpretação adequada que as torne livres de ambigüidades. Estas ambigüidades por outro lado, estão invariavelmente associadas a violações de relações de simetria, essenciais para que se possa associar as predições da teoria com o seu conteúdo fundamental.

Atualmente, o método de regularização mais popular é a Regularização Dimensional (RD) [5]. Onde a RD pode ser aplicada, é possível evitar consistentemente ambigüidades e violações de simetria. Porém este método não é de caráter geral pois possui limitações de aplicabilidade intrínsecas ao seu principal ingrediente: a continuação analítica na dimensão espaço-temporal [6].

No contexto da RD considera-se inicialmente a extensão 2ω-dimensional da teoria (ω contínuo e complexo). Posteriormente, depois que todos as manipulações envolvendo as integrais de Feynman, que seriam divergentes numa dimensão espaço temporal específica, são efetuadas, expande-se a teoria ao redor da dimensão pretendida. Entretanto, algumas quantidades matemáticas não podem ser generalizadas para 2ω dimensões. O exemplo mais notável da não generalidade deste método ocorre (em todas as dimensões pares) no tratamento de pseudo-amplitudes. Tendo em vistas que em tais amplitudes se fazem presente a matriz de Dirac γ_{2w+1}, torna-se necessário a criação de regras específicas para cada dimensão já que tal quantidade matemática não existe fora de dimensões espaço-temporais pares, [7].

Problemas semelhantes ocorrem em situações onde as simetrias as quais se deseja implementar na construção de uma teoria têm sua realização explicitamente dependente da dimensão espaço-temporal, como são os casos da simetria quiral, da supersimetria e da simetria conforme [8].

Além da RD existem muitos outros presentes à literatura deste problema. De modo geral estes métodos, que operam numa dimensão espaço-temporal previamente escolhida, baseiam-se na modificação das amplitudes provenientes das regras de Feynman pela introdução de uma distribuição regularizadora. Existem, invariavelmente associados à utilização de tais métodos uma larga sorte de problemas tais como, ambigüidades associadas às escolhas para os rótulos dos momentos das linhas internas dos diagramas contendo loops, violações de relações de simetria, violações de unitariedade e causalidade, entre outros.

Devido a este quadro e ao caráter crucial das manipulações e cálculos envolvendo as divergências do cálculo perturbativo em TQC, permanece a necessidade do desenvolvimento de adequadas técnicas para este fim.

Com esta motivação foi recentemente proposta e desenvolvida uma nova estratégia para manipulações e cálculos envolvendo amplitudes divergentes do cálculo perturbativo com o intuito de satisfazer as exigências necessárias à consistência por construção [9].

No contexto desta filosofia a presença de uma distribuição regularizadora é assumida apenas de modo implícito, para dar suporte aos passos necessários para separar a parte divergente da parte finita de uma integral de Feynman. Apenas propriedades muito gerais são admitidas nestas operações. A parte divergente obtida é escrita em termos de um número pequeno de objetos básicos (irredutíveis) e de outros objetos que são essencialmente diferenças entre integrais puramente divergentes com o mesmo grau de divergência porém com estrutura tensorial diferente. Os valores destes últimos objetos são na verdade propriedades destas integrais a serem fixadas pelo próprio cálculo perturbativo através da análise da consistência dos resultados com a independência destes em relação às escolhas para os rótulos dos momentos das linhas internas dos loops e com a manutenção de relações de simetrias. Os valores para os citados objetos funcionarão como restrições para regularizações que têm a pretensão de ser consistentes. Quanto aos objetos básicos divergentes estes são mantidos sem modificações. Eles serão absorvidos completamente no processo de renormalização, quando for o caso, e a verificação das relações de simetria são efetuadas considerando-se apenas propriedades gerais destes. Deste modo, no contexto da referida estratégia integrais divergentes não são realmente calculadas fazendo com que o uso de um método de regularização específico, como no contexto usual, possa ser totalmente evitado. Ainda, a referida estratégia permite uma descrição limpa e livre de ambigüidades das anomalias em 2D [10] e em 4D [11] assim como aquelas em dimensões (pares) maiores dentro de tratamento universal [12].

No presente trabalho iremos utilizar o método acima mencionado na caracterização e estudo do papel desempenhado pelas denominadas ambigüidades de escala [13].

A ambigüidade de escala é uma questão que surge naturalmente quando escrevemos uma amplitude divergente como uma soma de estruturas com diferentes graus de divergência. Dependendo do grau de divergência envolvido, tal tipo de operação envolve arbitrariedades, tal que a cada separação promovida pode estar envolvida uma arbitrariedade, esta parametrizável com a introdução de um parâmetro arbitrário. Este parâmetro, que possui dimensão de massa, é denominado de parâmetro de escala e a possível dependência dos resultados com esse parâmetro arbitrário é a mencionada ambigüidade de escala.

Mostraremos que a independência de escala é uma propriedade essencial para ser preservada nas manipulações e cálculos envolvendo amplitudes contendo divergências, tendo um papel crucial na interpretação consistente das amplitudes perturbativas.

Através deste estudo iremos caracterizar quais exigências precisam ser impostas nos cálculos perturbativos para evitar a presença de termos, nas amplitudes físicas, que impliquem em ambigüidades de escala. Com isso poderemos estabelecer condições que um método de regularização explícito deva satisfazer para que seja consistente.

Os aspectos relacionados à preservação das propriedades de escala em cálculos perturbativos estão presentes em quaisquer destes cálculos, porém são de especial relevância no tratamento de teorias e modelos onde estão presentes uma variedade de campos aos quais estão associadas massas diferentes.

A investigação das conseqüências físicas de uma teoria destas em diferentes regimes de energias, onde é necessário um cuidadoso tratamento das amplitudes, pode ser implementado de um modo muito transparente com a utilização do ponto de vista conceitual da independência de escala.

Através de nossa investigação, nós poderemos estabelecer uma limpa e definitiva conclusão: todos os termos potencialmente violadores de simetria são quantidades ambíguas, exceto aqueles associadas ao fenômeno das anomalias.

Para realizarmos este estudo iremos, no capítulo 2, considerar o modelo de diferentes férmions livres de spin 1/2 possuindo massas m_i. A lagrangiana para este modelo será a mais geral possível, onde estarão presentes densidades fermiônicas escalares, pseudo-escalares, vetoriais e axiais. Após isto, nós identificaremos as funções de Green que estariam presentes nas amplitudes físicas perturbativas ao nível 1-loop associadas aos processos pertinentes ao modelo, que surgiriam quando utilizássemos as regras de Feynman. Usando a álgebra e as propriedades das matrizes de Dirac iremos colocar estas amplitudes como combinações de integrais de Feynman e por fim determinaremos as relações entre funções de Green relevantes.

No capítulo 3 iremos estabelecer uma sistematização para a parte finita da solução das integrais de Feynman. Nessa sistematização definiremos um pequeno conjunto de funções, em termos das quais, poderemos escrever a parte finita das integrais que aparecerão na análise das amplitudes do capítulo 2, bem como estabeleceremos relações entre estas funções a fim de que seja possível a verificação de relações entre funções de Green e de identidades de Ward.

De mão desta sistematização passaremos, no capítulo 4, à solução explícita das integrais de Feynman. Neste capítulo abordaremos os problemas existentes nos métodos usuais de regularização e iremos detalhar o método com o qual trataremos as integrais divergentes. Também definiremos o conjunto de objetos divergentes básicos em termos dos quais toda a parte divergente de qualquer amplitude física perturbativa ao nível 1-loop pode ser escrita. Abordaremos a ambigüidade de escala e mostraremos como ela pode ser usada para o estudo da consistência de um método de regularização explícito.

Com a solução das integrais de Feynman poderemos, no capítulo 5, substituir estes resultados nas amplitudes físicas de nosso interesse. Com isso obteremos o resultado explícito das amplitudes físicas perturbativas em termos das funções estudadas no capítulo 3 e dos objetos divergentes definidos no capítulo 4 e estaremos aptos a verificar explicitamente as relações entre funções de Green estabelecidas, o que realizaremos no capítulo 6.

No capítulo 7 nos deteremos na investigação das Identidades de Ward e na análise das ambigüidades presentes na solução final das amplitudes. Através desta análise encontraremos um conjunto de imposições a serem feitas sobre os objetos divergentes básicos quando avaliados por um método de regularização explícito. Estas imposições formam o que denominamos de *Relações de Consistência* e nos fornecerão o modo com o qual iremos eliminar todos os termos que são potencialmente ambíguos nas amplitudes físicas perturbativas. Nestes passos iremos observar importantes conclusões acerca da ambigüidade de escala.

Finalmente no capítulo 8 iremos ressaltar as conclusões obtidas nos capítulos 4, 5, 6 e 7 bem como realizar nossos comentários finais e estabelecer perspectivas futuras em torno do assunto apresentado neste trabalho.

Capítulo 2

Modelo, Amplitudes e Relações entre Funções de Green

2.1 Introdução

Para construirmos uma TQC devemos inicialmente especificar as partículas interagentes presentes no modelo, as quais terão a sua dinâmica de interações descrita pela TQC formulada. A estas partículas são associados campos e com estes campos construímos um funcional, que é função dos campos e de suas derivadas espaços-temporais, ao qual denominamos de lagrangiana. A lagrangiana é composta por duas partes: a parte livre e a parte de interação. Esquematicamente escrevemos:

$$\mathcal{L}\left(\phi_i, \partial_\mu \phi_i\right) = \mathcal{L}_i^F\left(\phi_i, \partial_\mu \phi_i\right) + \mathcal{L}^I\left(\phi_i, \partial_\mu \phi_i\right), \tag{2.1}$$

onde ϕ_i são os campos associados às partículas.

A parte livre da lagrangiana (2.1), $\mathcal{L}_i^F\left(\phi_i, \partial_\mu \phi_i\right)$, nos fornecerá as equações de onda relativísticas para as partículas, que no caso de partículas de spin 1/2, irão obedecer à equação de Dirac. Já a parte de interação, $\mathcal{L}^I\left(\phi_i, \partial_\mu \phi_i\right)$, é escrita como combinações dos campos determinadas pelo grupo total de simetrias que consideramos relevantes para a teoria formulada. Ou seja, construímos os termos de interação de tal forma que estes sejam invariantes (escalares) do grupo de simetria assumido.

Especificada a lagrangiana definimos a ação, por:

$$S = \int d^4x \mathcal{L}\left(\phi_i, \partial_\mu \phi_i\right). \tag{2.2}$$

Com esta definição é possível encontrar as equações de movimento impondo a extremização da ação, ou seja:

$$\delta S = 0, \tag{2.3}$$

o que nos leva às equações de Euler-Lagrange:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\delta \pounds}{\delta\left(\partial_\mu \phi_i\right)} \right) - \frac{\delta \pounds}{\delta \phi_i} \right\} = 0. \tag{2.4}$$

As equações de Euler-Lagrange irão gerar um número de equações diferenciais igual ao número de campos presentes na teoria. Após a quantização dos campos iremos obter equações diferenciais que, devido aos termos de interação, se apresentam acopladas e, freqüentemente, não-lineares. Se pudéssemos determinar soluções exatas para estas equações teríamos uma descrição completa da fenomenologia envolvendo as partículas pertinentes à teoria. Tais soluções exatas são raramente obtidas, como no caso de algumas teorias formuladas em dimensão espaço-temporal D=2. Nesta categoria de modelos temos, por exemplo, o modelo de Gross-Neveu [14]. Na quase totalidade dos casos de interesse somos obrigados a fazer uso de métodos perturbativos.

Não iremos considerar o desenvolvimento dos passos que ligam a situação acima exposta às amplitudes físicas perturbativas. Admitiremos, no entanto, que é possível construir uma adequada interpretação das séries perturbativas em termos das conhecidas regras de Feynman. Com o uso dos diagramas de Feynman poderemos, então, construir todos os termos da série perturbativa e assim obter as amplitudes físicas que ligam os estados iniciais aos estados finais de um determinado processo, na ordem perturbativa desejada.

Neste capítulo definiremos o modelo a partir do qual extrairemos um conjunto de amplitudes adequadas para a investigação que pretendemos desenvolver. Este conjunto será composto por funções de Green puramente fermiônicas de um, dois e três pontos.

Assumiremos férmions massivos de modo a termos apenas divergências ultravioletas presentes nas amplitudes.

Ainda neste capítulo, estabeleceremos que as funções de Green escolhidas podem ser escritas como combinação de um pequeno conjunto de integrais de Feynman, algumas de caráter divergente. Além disto, a partir da representação das amplitudes ao nível um loop, estabeleceremos relações entre tais quantidades a partir de identidades envolvendo as formas não integradas destas. Estas relações desempenharão o papel de vínculos que devem ser obedecidos pelas expressões manipuladas e integradas das amplitudes. Ou seja, avaliaremos a consistência de um conjunto de operações matemáticas efetuadas nas integrais de Feynman envolvidas, através da verificação das tais relações entre funções de Green após estas terem sido calculadas no contexto da prescrição que adotaremos para lidar com este tipo de problema.

2.2 Modelo

No presente trabalho consideraremos um modelo contendo diferentes espécies de férmions, massivos, livres e de spin 1/2. Para a lagrangiana deste modelo assumiremos a forma mais geral possível, contendo densidades fermiônicas escalar, pseudo-escalar, vetorial e axial. Tais densidades são precisamente aquelas que se acoplam à bósons escalares, pseudo-escalares, vetoriais e axiais, de acordo com a simetria de Lorentz, em teorias fundamentais.

Deste modo aos férmions iremos associar campos fermiônicos massivos, que obedecem a equação de Dirac, e com os quais podemos construir correntes $j_i\,(x)$ definidas por:

$$j_i(x) = \overline{\psi}(x)\Gamma_i\psi(x), \tag{2.5}$$

onde Γ_i são operadores matriciais, $\Gamma_i \equiv (1, \gamma_5, \gamma_\mu, \gamma_\mu\gamma_5)$, caracterizando as densidades fermiônicas:

- Escalar

$$S(x) = \overline{\psi}(x)\psi(x). \tag{2.6}$$

- Pseudo-escalar

$$P(x) = \overline{\psi}(x)\gamma_5\psi(x). \tag{2.7}$$

- Vetorial

$$V_\mu(x) = \overline{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x). \tag{2.8}$$

- Axial

$$A_\mu(x) = \overline{\psi}(x)\gamma_\mu\gamma_5\psi(x). \tag{2.9}$$

Estas são as correntes que, na forma explícita da lagrangiana de uma teoria fundamental, apareceriam acopladas aos respectivos campos bosônicos de modo que cada termo seja invariante de Lorentz.

Como mencionado na introdução deste capítulo, o próximo passo, após a construção da lagrangiana do modelo, é a determinação das equações de movimento com a utilização das equações de Euler-Lagrange e a posterior quantização dos campos. Após estes procedimentos obteremos um número de equações diferenciais igual ao número de campos presentes na teoria. A adoção de métodos perturbativos para solucionar estas equações se torna um dos melhores caminhos. Neste contexto, percebeu-se que após a quantização dos campos e a expansão perturbativa, um certo conjunto de elementos pode ser identificado, sendo que, com tal conjunto os termos da série perturbativa poderiam ser construídos diretamente. Este conjunto é formado pelos propagadores, os vértices e os fatores de simetria, aos quais estão associados estruturas matemáticas. A combinação destes elementos, a fim de se construir a expressão matemática da série perturbativa para um determinado processo físico, é ditada pelas regras de Feynman. Com isso poderemos identificar as amplitudes físicas perturbativas correspondentes a quaisquer processos físicos, na ordem perturbativa escolhida, sem a necessidade da construção da expansão perturbativa [4].

A etapa seguinte seria determinar estas amplitudes físicas perturbativas a fim de investigar as conseqüências fenomenológicas das simetrias implementadas na construção da lagrangiana. Para isso, no presente caso, é necessário calcularmos funções de Green de $n-$ pontos

$$T^{ij...k} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr\left\{\Gamma_i \frac{1}{(\not k + \not k_1) - m_1} \Gamma_j \frac{1}{(\not k + \not k_2) - m_2} ... \Gamma_l \frac{1}{(\not k + \not k_n) - m_n}\right\}. \quad (2.10)$$

A contagem de potências do momento de integração, momento do loop k, revela que as funções de Green acima definidas podem conter divergências ultravioletas (para grandes valores de momento). Notemos no entanto, que esta contagem revela que as funções de quatro pontos apresentam um grau de divergência superficial logarítmico. Já as funções cinco ou mais pontos são finitas. Devido a isso, para os propósitos deste trabalho, o cálculo das funções com quatro ou mais pontos não serão considerados, pois para estas não haverá o surgimento de ambigüidades nas suas soluções. Assim nos ocuparemos daqui por diante somente com as funções de um, dois e três pontos definidas por

$$T^{i} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr\left\{\Gamma_i \frac{1}{(\not k + \not k_1) - m_1}\right\}, \quad (2.11)$$

$$T^{ij} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr\left\{\Gamma_i \frac{1}{(\not k + \not k_1) - m_1} \Gamma_j \frac{1}{(\not k + \not k_2) - m_2}\right\}, \quad (2.12)$$

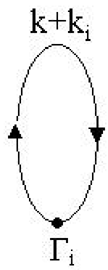


Figura 2.1: Representação diagramática para para a função de 1 ponto

e:

$$T^{ijk} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr\left\{\Gamma_i \frac{1}{(\not k + \not k_3) - m_3} \Gamma_j \frac{1}{(\not k + \not k_1) - m_1} \Gamma_k \frac{1}{(\not k + \not k_2) - m_2}\right\}, \quad (2.13)$$

onde $\Gamma_i = (1; \gamma_5; \gamma_\mu; \gamma_\mu\gamma_5; \sigma_{\mu\nu}) = (S; P; V; A; T)$ e k_1, k_2, k_3 são rotulações arbitrárias para o momento das linhas internas dos diagramas de Feynman. Estas funções de Green estão associadas respectivamente aos seguintes diagramas:

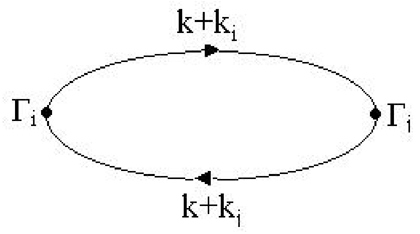


Figura 2.2: Representação diagramática para para a função de 2 pontos

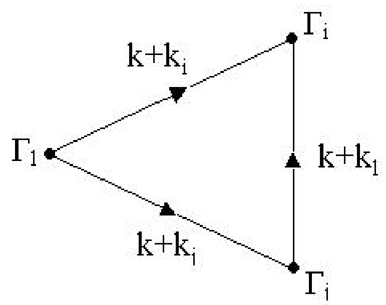


Figura 2.3: Representação diagramática para para a função de 3 pontos

Notemos que as diferenças entre os momentos (arbitrários) $(k_i - k_j)$ corresponde a quantidades físicas, um momento externo ao loop. Por sua vez combinações do tipo $(k_i + k_j)$ são quantidades indefinidas. Assim, a presença de combinações do tipo soma de momentos internos nas formas finais das amplitudes implicará em ambigüidades.

A adoção desta rotulação arbitrária para os momentos internos é importante para que as nossas análises das amplitudes físicas perturbativas sejam as mais gerais possíveis.

Por fim nos restringimos neste trabalho apenas às funções de Green construídas com um número par de matrizes γ_5.

2.3 Funções de Green

Uma vez que a contagem de potências do momento de integração revela a possibilidade de divergências, devemos adotar alguma prescrição a fim de que seja possível extrair a fenomenologia pertinente à TQC formulada, a qual estão associados resultados finitos. Iniciamos a construção desta prescrição mostrando que todas as funções de Green definidas acima podem ser escritas como uma combinação de um pequeno número de integrais de Feynman. Algumas destas integrais serão divergentes, aspecto que nos ocuparemos nos próximos capítulos.

Nosso objetivo nesta seção é mostrar os procedimentos necessários para que as funções de Green de $n-$pontos possam ser escritas como uma combinação de integrais de Feynman. Realizaremos isto de modo explícito para as amplitudes de um ponto, dois e três pontos. A generalização para funções de $n-$pontos segue o mesmo raciocínio.

2.3.1 Funções de Green de um ponto

Consideremos primeiramente as funções de Green de um ponto. Segundo (2.11), estas funções são definidas por

$$T^i = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr\left\{\Gamma_i \frac{1}{(\not{k}+\not{k}_1)-m_1}\right\}. \tag{2.14}$$

A expressão acima pode ser colocada numa forma mais conveniente, com a utilização da identidade

$$\frac{1}{(\not{k}+\not{k}_i)-m_i}\frac{(\not{k}+\not{k}_i)+m_i}{(\not{k}+\not{k}_i)+m_i} = \frac{(\not{k}+\not{k}_i)+m_i}{\left[(k+k_i)^2-m_i^2\right]}. \tag{2.15}$$

Assim, ficaremos com

$$T^i = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr\left\{\Gamma_i \frac{(k+k_1)^\alpha \gamma_\alpha + m_1}{\left[(k+k_1)^2-m_1^2\right]}\right\}. \tag{2.16}$$

Agora, utilizando as propriedades do traço poderemos reescrever a expressão acima na forma

$$T^i = Tr\left[\Gamma_i\gamma_\alpha\right]\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{(k+k_1)^\alpha}{\left[(k+k_1)^2-m_1^2\right]} + m_1 Tr\left[\Gamma_i\right]\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{\left[(k+k_1)^2-m_1^2\right]}. \tag{2.17}$$

Observamos que com os procedimentos acima mostrados qualquer função de Green de um ponto poderá ser escrita em termos das integrais de Feynman com um propagador definidas por

$$\left[(I_1);(I_1)_\mu\right] = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{[1;k_\mu]}{\left[(k+k_1)^2-m_1^2\right]}, \tag{2.18}$$

sendo necessário para isso apenas escolhermos $\Gamma_i = (I,\ \gamma_5,\ \gamma_\mu,\ \gamma_\mu\gamma_5)$ para obtermos respectivamente as amplitudes T^S, T^P, T^V_μ e T^A_μ.

As duas integrais, em termos das quais as funções serão escritas, são divergentes. Através da contagem das potências de k vemos que estas divergências são de grau cúbico ou quadrático. A solução destas integrais será considerada nos próximos capítulos.

2.3.2 Funções de Green de dois pontos

Passamos agora para a análise das funções de Green de dois pontos. Igualmente como mostrado acima queremos escrevê-las como uma combinação de integrais de Feynman. As funções de dois pontos, segundo (2.12), são definidas por

$$T^{ij} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr\left\{\Gamma_i \frac{1}{(\not{k}+\not{k}_1) - m_1}\Gamma_j \frac{1}{(\not{k}+\not{k}_2) - m_2}\right\}. \tag{2.19}$$

Utilizando a identidade (2.15) para cada um dos propagadores, teremos

$$T^{ij} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr\left\{\Gamma_i \frac{(k+k_1)^\alpha \gamma_\alpha + m_1}{\left[(k+k_1)^2 - m_1^2\right]}\Gamma_j \frac{(k+k_2)^\beta \gamma_\beta + m_2}{\left[(k+k_2)^2 - m_2^2\right]}\right\}. \tag{2.20}$$

Operando com o traço sobre as matrizes e usando as suas propriedades ficaremos com

$$\begin{aligned} T^{ij} &= Tr\left[\Gamma_i\gamma_\alpha\Gamma_j\gamma_\beta\right]\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{(k+k_1)^\alpha (k+k_2)^\beta}{D_{12}} \\ &+ m_2 Tr\left[\Gamma_i\gamma_\alpha\Gamma_j\right]\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{(k+k_1)^\alpha}{D_{12}} \\ &+ m_1 Tr\left[\Gamma_i\Gamma_j\gamma_\beta\right]\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{(k+k_2)^\beta}{D_{12}} \\ &+ m_1 m_2 Tr\left[\Gamma_i\Gamma_j\right]\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{D_{12}}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Onde adotamos a seguinte notação

$$D_{i..l} = \left[(k+k_i)^2 - m_i^2\right] \ldots \left[(k+k_l)^2 - m_l^2\right]. \tag{2.22}$$

Com estes procedimentos se torna possível escrever as amplitudes de dois pontos em termos de integrais contendo dois propagadores

$$\left[(I_2)\,;(I_2)_\mu\,;(I_2)_{\mu\nu}\right] = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{[1;k_\mu;k_{\mu\nu}]}{D_{12}}. \tag{2.23}$$

2.3.3 Funções de Green de três pontos

Finalmente passamos para a análise das funções de Green de três pontos. Estas funções são definidas, segundo (2.13), por

$$T^{ijl}=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}Tr\left\{\Gamma_i\frac{1}{(\not{k}+\not{k}_3)-m_3}\Gamma_j\frac{1}{(\not{k}+\not{k}_1)-m_1}\Gamma_l\frac{1}{(\not{k}+\not{k}_2)-m_2}\right\}. \tag{2.24}$$

Utilizando a identidade (2.15) em cada um dos propagadores e com as propriedades do traço de Dirac poderemos colocar a expressão acima na forma

$$\begin{aligned}
T^{ijl} \;=\; & +Tr\left[\Gamma_i\gamma_\alpha\Gamma_j\gamma_\beta\Gamma_l\gamma_\beta\right]\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{(k+k_1)^\alpha(k+k_2)^\beta(k+k_3)^\beta}{D_{123}}\\
&+m_1Tr\left[\Gamma_i\Gamma_j\gamma_\beta\Gamma_l\gamma_\beta\right]\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{(k+k_2)^\beta(k+k_3)^\beta}{D_{123}}\\
&+m_2Tr\left[\Gamma_i\gamma_\alpha\Gamma_j\Gamma_l\gamma_\beta\right]\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{(k+k_1)^\alpha(k+k_3)^\beta}{D_{123}}\\
&+m_3Tr\left[\Gamma_i\gamma_\alpha\Gamma_j\gamma_\beta\Gamma_l\right]\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{(k+k_1)^\alpha(k+k_2)^\beta}{D_{123}}\\
&+m_1m_2Tr\left[\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_l\gamma_\beta\right]\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{(k+k_3)^\beta}{D_{123}}\\
&+m_1m_3Tr\left[\Gamma_i\Gamma_j\gamma_\beta\Gamma_l\right]\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{(k+k_2)^\beta}{D_{123}}\\
&+m_2m_3Tr\left[\Gamma_i\gamma_\alpha\Gamma_j\Gamma_l\right]\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{(k+k_1)^\alpha}{D_{123}}\\
&+m_1m_2m_3Tr\left[\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_l\right]\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{D_{123}}.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Na forma acima podemos constatar que foi possível colocar as amplitudes de três pontos em termos de um novo conjunto de integrais de Feynman, aquelas possuindo três propagadores. Estas integrais são definidas por

$$\left[(I_3);(I_3)_\mu;(I_3)_{\mu\nu};(I_3)_{\mu\nu\lambda}\right]=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{[1;k_\mu;k_{\mu\nu};k_{\mu\nu\lambda}]}{D_{123}}. \tag{2.26}$$

As integrais presentes nos três conjuntos definidos nesta e nas seções precedentes serão as com que nos ocuparemos no capítulo 4.

2.4 Relações entre funções de Green

Na seção anterior mostramos os mecanismos que possibilitam que as funções de Green sejam escritas em termos de um conjunto de integrais de Feynman. As integrais de Feynman que formam este conjunto podem ser desde cubicamente divergentes até integrais finitas. O aparecimento de integrais de Feynman finitas não gera maiores problemas, uma vez que as mesmas podem ser solucionadas através dos métodos usuais de integração. Porém o tratamento das integrais de Feynman divergentes requer um pouco mais de cuidado. Para dar algum significado físico às amplitudes que envolvem divergências faz-se necessária uma adequada interpretação destas estruturas matemáticas indefinidas.

A fim de testarmos se os resultados finais das funções de Green, obtidos após a adoção de um método para o tratamento das divergências, são consistentes podemos consultar dois conjuntos de relações que estas funções devem satisfazer independente da técnica utilizada. Estas são as relações entre funções de Green e as relações de simetria ou Identidades de Ward.

As relações entre funções de Green são identidades estabelecidas ao nível do integrando e que após as operações de traço e integração no momento do loop geram relações entre as funções com diferentes números de pontos, e consequentemente, com diferentes graus de divergência. Relações entre as funções de Green com diferentes graus de divergência são ideais para testarmos a consistência do método que usamos na solução das amplitudes, uma vez que estas relações devem ser igualmente válidas após calcularmos as integrais divergentes, ou seja, os resultados finais destas funções devem também satisfazer estas relações independentemente de escolhas arbitrárias, tais como as rotulações dos momentos internos e escolha do parâmetro de escala comum às partes divergente e finita. Se os resultados finais das amplitudes não satisfizerem estas relações sem que sejam feitas escolhas específicas para as arbitrariedades presentes, isto irá implicar diretamente que o método utilizado no tratamento das divergências não se mostra consistente.

O outro conjunto de relações é fornecido pelas simetrias que consideramos na construção da lagrangiana e por relações vindas de teoremas baseados em argumentos bastantes gerais. Estas simetrias deverão estar contidas, de algum modo, nos resultados finais das amplitudes físicas perturbativas. No nosso caso exigimos apenas que a lagrangiana seja invariante de Lorentz e que os campos $\psi(x)$ e $\bar{\psi}(x)$ satisfaçam à equação de Dirac. Podemos também utilizar as implicações do teorema de Furry [15] para as funções de Green com um número ímpar de pontos.

Passamos então para a identificação das relações entre funções de Green. Para isto é necessário apenas a álgebra das matrizes de Dirac e operações algébricas, como mostraremos adiante. Inicialmente, consideramos a seguinte expressão:

$$(k_1 - k_2)^\mu \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m_1} \hat{I} \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m_2} \right\}. \tag{2.27}$$

Fazendo a contração do momento externo e usando a seguinte identidade:

$$(\not{k}_i - \not{k}_l) = (\not{k} + \not{k}_i - m_i) - (\not{k} + \not{k}_l - m_l) + m_i - m_l. \tag{2.28}$$

Obteremos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m_2} - \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m_1} \\ &+ (m_1 - m_2) \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m_2} \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m_1}. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Tomando o traço e integrando a expressão acima no momento k ficamos com

$$\begin{aligned} &\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m_2} \right\} - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m_1} \right\} \\ &+ (m_1 - m_2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left\{ \hat{I} \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m_2} \hat{I} \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m_1} \right\}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Notamos que segundo (2.11) e (2.12) poderemos identificar os termos na expressão acima com duas funções de um ponto escalares e uma função de dois pontos escalar-escalar. Ou seja, identificamos os termos acima com

$$T^S(m_2; k_2) - T^S(m_1; k_1) + (m_1 - m_2) T^{SS}. \tag{2.31}$$

Deste modo teremos a seguinte relação entre funções de Green:

$$(k_1 - k_2)^\mu T_\mu^{VS} = T^S(m_2, k_2) - T^S(m_1, k_1) + (m_1 - m_2) T^{SS}. \tag{2.32}$$

Esta relação implica o seguinte: após calcularmos explicitamente a função T_μ^{VS} e contrairmos com o momento externo $(k_1 - k_2)^\mu$ deveremos obter exatamente a diferença entre as formas explícitas das funções de um ponto escalares $T^S(k_1; m_1)$ e $T^S(k_2; m_2)$ mais a forma explícita da função de dois pontos T^{SS} multiplicada pela diferença entre as massas dos férmions $(m_1 - m_2)$. Esta relação como dissemos, deve se confirmar após os cálculos das funções envolvidas sem que sejam feitas quaisquer escolhas em torno das arbitrariedades presentes na solução final das funções de Green, qualquer que seja o método utilizado para tal.

De modo completamente análogo pode-se partir das expressões

$$(k_1 - k_2)^\mu \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m_1} \gamma_\nu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m_2} \right\}, \tag{2.33}$$

$$(k_1 - k_2)^\nu \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m_1} \gamma_\nu \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m_2} \right\}, \tag{2.34}$$

e obter-se as seguintes relações:

$$(k_1 - k_2)^\mu T_{\mu\nu}^{VV} = T_\nu^V(m_2; k_2) - T_\nu^V(m_1; k_1) + (m_1 - m_2) T_\nu^{VS} \tag{2.35}$$

e

$$(k_1 - k_2)^\nu T_{\mu\nu}^{VV} = T_\mu^V(k_2; m_2) - T_\mu^V(k_1; m_1) + (m_1 - m_2) T_\mu^{VS}. \tag{2.36}$$

Para os casos onde a matriz γ_5 está presente usamos uma relação análoga a (2.28), que é dada por:

$$(\not{k}_i - \not{k}_l) \gamma_5 = -\gamma_5 (\not{k} + \not{k}_i - m_i) - (\not{k} + \not{k}_l - m_l) \gamma_5 - (m_i + m_l) \gamma_5. \tag{2.37}$$

Utilizando esta identidade podemos partir de:

$$(k_1 - k_2)^\mu \left\{ \gamma_\mu \gamma_5 \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_1) - m_1} \gamma_5 \frac{1}{(\not{k} + \not{k}_2) - m_2} \right\}, \tag{2.38}$$

e obter a seguinte relação entre funções de Green:

$$(k_1 - k_2)^\mu T_\mu^{AP} = -T^S(m_2, k_2) - T^S(m_1, k_1) - (m_1 + m_2) T^{PP}. \tag{2.39}$$

De modo análogo podemos estabelecer as relações

$$(k_1 - k_2)^\nu T_{\mu\nu}^{AA} = T_\mu^V(m_2, k_2) - T_\mu^V(m_1, k_1) + (m_1 + m_2) T_\mu^{AP} \tag{2.40}$$

e

$$(k_1 - k_2)^\mu T_{\mu\nu}^{AA} = -T_\nu^V(m_1, k_1) + T_\nu^V(m_2, k_2) + (m_1 + m_2) T_\nu^{AP}. \tag{2.41}$$

Para as funções de Green com três pontos seguimos o mesmo raciocínio. Partimos, por exemplo, da expressão:

$$(k_3 - k_2)^\lambda \left\{ \gamma_\lambda \frac{1}{(\not k + \not k_3) - m_3} \hat{I} \frac{1}{(\not k + \not k_1) - m_1} \hat{I} \frac{1}{(\not k + \not k_2) - m_2} \right\}, \tag{2.42}$$

que, após a contração e o uso da propriedade (2.28), toma a forma:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(\not k + \not k_1) - m_1} \hat{I} \frac{1}{(\not k + \not k_2) - m_2} - \frac{1}{(\not k + \not k_1) - m_1} \hat{I} \frac{1}{(\not k + \not k_3) - m_3} \\ &+ (m_3 - m_2) \frac{1}{(\not k + \not k_1) - m_1} \hat{I} \frac{1}{(\not k + \not k_2) - m_2} \hat{I} \frac{1}{(\not k + \not k_3) - m_3}. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Tomando o traço e integrando no momento k poderemos identificar a seguinte relação:

$$\begin{aligned} (k_3 - k_2)^\lambda T_\lambda^{VSS} &= T^{SS}(m_1, k_1; m_2, k_2) - T^{SS}(m_1, k_1; m_3, k_3) \\ &\quad + (m_3 - m_2) T^{SSS}. \end{aligned} \tag{2.44}$$

De modo completamente análogo podemos encontrar as relações

$$\begin{aligned} (k_3 - k_2)^\lambda T_\lambda^{VPP} &= T^{PP}(m_1, k_1; m_3, k_3) - T^{PP}(m_1, k_1; m_2, k_2) \\ &\quad + (m_2 - m_3) T^{SPP}, \end{aligned} \tag{2.45}$$

$$\begin{aligned} (k_3 - k_1)^\mu T_\mu^{PAS} &= T^{SS}(m_1, k_1; m_2, k_2) + T^{PP}(m_2, k_2; m_3, k_3) \\ &\quad + (m_3 + m_1) T^{PPS} \end{aligned} \tag{2.46}$$

e

$$
\begin{aligned}
(k_1-k_2)^\nu T_\nu^{PSA} &= T^{PP}(m_2,k_2;m_3,k_3)+T^{SS}(m_1,k_1;m_3,k_3) \\
&+(m_1+m_2)\,T^{PSP}. \qquad (2.47)
\end{aligned}
$$

Para determinarmos uma relação envolvendo amplitudes que possuem dois índices de Lorentz seguimos o mesmo procedimento. Partimos, por exemplo, da expressão

$$
(k_3-k_2)^\lambda\left\{\hat{I}\frac{1}{(\not{k}+\not{k}_3)-m_3}\gamma_\mu\frac{1}{(\not{k}+\not{k}_1)-m_1}\gamma_\nu\frac{1}{(\not{k}+\not{k}_2)-m_2}\right\}. \qquad (2.48)
$$

Utilizando a identidade (2.28), tomando o traço e integrando obtemos

$$
\begin{aligned}
(k_3-k_1)^\mu T_{\mu\nu}^{SVV} &= T_v^{SV}(m_1,k_1;m_2,k_2)-T_v^{SV}(m_3,k_3;m_2,k_2) \\
&+(m_3-m_1)\,T_\nu^{SSV}. \qquad (2.49)
\end{aligned}
$$

De modo análogo podemos ainda determinar:

$$
\begin{aligned}
(k_1-k_2)^\nu T_{\mu\nu}^{SVV} &= T_\mu^{SV}(m_2,k_2;m_3,k_3)-T_\mu^{SV}(m_1,k_1;m_3,k_3) \\
&+(m_1-m_2)\,T_\mu^{SVS}. \qquad (2.50)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(k_3-k_1)^\mu T_{\mu\nu}^{SAA} &= T_v^{PA}(m_1,k_1;m_2,k_2)-T_v^{SV}(m_2,k_2;m_3,k_3) \\
&+(m_3+m_1)\,T_\nu^{SPA} \qquad (2.51)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
(k_1-k_2)^v T_{\mu\nu}^{SAA} &= T_\mu^{SV}(m_2,k_2;m_3,k_3)+T_\mu^{PA}(m_1,k_1;m_3,k_3) \\
&+(m_2+m_1)\,T_\mu^{SAP}. \qquad (2.52)
\end{aligned}
$$

Para a função $T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}$, com três índices de Lorentz, podemos construir as seguintes relações:

$$
\begin{aligned}
(k_3-k_2)^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{VVV} &= T_{\mu\nu}^{VV}(k_1;k_2)-T_{\mu\nu}^{VV}(k_1;k_3) \\
&+(m_3-m_2)\,T_{\mu\nu}^{SVV}, \qquad (2.53)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(k_1-k_2)^{\nu}\,T^{VVV}_{\lambda\mu\nu} &= T^{VV}_{\lambda\mu}\,(k_3;k_2)-T^{VV}_{\lambda\mu}\,(k_3;k_1) \\
&\quad +(m_1-m_2)\,T^{VVS}_{\lambda\mu}
\end{aligned}
\tag{2.54}
$$

e

$$
\begin{aligned}
(k_3-k_1)^{\mu}\,T^{VVV}_{\lambda\mu\nu} &= T^{VV}_{\lambda\nu}\,(k_1;k_2)-T^{VV}_{\lambda\nu}\,(k_3;k_2) \\
&\quad +(m_3-m_1)\,T^{VSV}_{\lambda\nu},
\end{aligned}
\tag{2.55}
$$

Já para a função $T^{VAA}_{\lambda\mu\nu}$ temos as relações

$$
\begin{aligned}
(k_1-k_2)^{\nu}\,T^{VAA}_{\lambda\mu\nu} &= T^{VV}_{\lambda\mu}\,(m_2,k_2;m_3,k_3)-T^{AA}_{\lambda\mu}\,(m_1,k_1;m_3,k_3) \\
&\quad +(m_1+m_2)\,T^{VAP}_{\lambda\mu},
\end{aligned}
\tag{2.56}
$$

$$
\begin{aligned}
(k_3-k_1)^{\mu}\,T^{VAA}_{\lambda\mu\nu} &= T^{AA}_{\lambda v}\,(m_1,k_1;m_2,k_2)-T^{VV}_{\lambda v}\,(m_2,k_2;m_3,k_3) \\
&\quad +(m_3+m_1)\,T^{VPA}_{\lambda\nu}
\end{aligned}
\tag{2.57}
$$

e

$$
\begin{aligned}
(k_3-k_2)^{\lambda}\,T^{VAA}_{\lambda\mu\nu} &= T^{AA}_{\mu\nu}\,(m_1,k_1;m_2,k_2)-T^{AA}_{\mu\nu}\,(m_1,k_1;m_3,k_3) \\
&\quad +(m_3-m_2)\,T^{SAA}_{\mu\nu}.
\end{aligned}
\tag{2.58}
$$

Como já dissemos, todas as relações entre funções de Green deverão ser satisfeitas pelas formas calculadas destas funções, que é um dos assuntos do capítulo 6. Para verificarmos isto é necessário que determinemos o resultado das integrais de Feynman em termos das quais escrevemos as funções de Green, o que realizaremos nos capítulos 4 e 5.

As relações acima identificadas podem ser obtidas com a utilização dos métodos da álgebra de correntes [17]. Os ingredientes principais são as quadridivergências da correntes vetorial e axial

$$
\partial_{\nu}V^{\nu}(x) = (m_i-m_j)\,S\,(x)\,, \tag{2.59}
$$

$$
\partial_{\lambda}A^{\lambda}(x) = (m_k+m_l)\,P\,(x)\,, \tag{2.60}
$$

trivialmente verificadas usando-se a equação de Dirac. Voltaremos a este ponto no capítulo 7.

Capítulo 3

Sistematização para a parte finita das Integrais de Feynman

3.1 Introdução

No contexto de TQC, as amplitudes físicas obtidas através de soluções perturbativas, construídas com a utilização das regras de Feynman correspondentes, são a nossa fonte de informações para a descrição de um determinado processo físico. Estas amplitudes podem sempre ser escritas como combinações de um certo conjunto de integrais de Feynman, como mostrado no capítulo anterior. Deste modo, para que possamos apreciar as implicações fenomenológicas do modelo definido naquele capítulo, será necessário primeiro solucionar as integrais de Feynman, em termos das quais as amplitudes foram escritas, para, num passo posterior, obtermos as expressões correspondentes a tais amplitudes. As integrais de Feynman recém mencionadas, por sua vez, dividem-se em dois tipos distintos. Uma parte do conjunto é formado por integrais finitas e outra por integrais divergentes. O cálculo daquelas que são finitas pode ser feito diretamente ao passo que para o tratamento daquelas divergentes será necessário a adoção de uma estratégia adequada para o manuseio das indefinições matemáticas envolvidas, o que será considerado no capítulo seguinte. Lá mostraremos que, através da utilização de um procedimento muito geral, será possível escrever as integrais divergentes como uma soma de outras envolvendo diferentes graus de divergência e finitas. A parte divergente desta reorganização será escrita como combinação de somente cinco formas padronizadas de estruturas divergentes. Quanto à parte finita de tal reorganização perceberemos que será possível adotar uma sistematização para as expressões obtidas em termos de dois conjuntos de funções. Em termos destes dois conjuntos de funções também será possível expressar os resultados para as integrais de Feynman finitas. Posteriormente, ao verificarmos as relações entre funções de Green e relações de simetria (Identidades de Ward) perceberemos que as operações serão consideravelmente simplificadas se fizermos uso de certas propriedades específicas que relacionam os membros destes dois conjuntos de funções assim como as que relacionam os membros de cada conjunto entre si. Além disto, perceberemos que ao sistematizarmos a parte finita das amplitudes em termos dos referidos conjuntos de funções, simplificaremos a análise de aspectos gerais da TQC em solução perturbativa como, por exemplo, a unitariedade, uma vez que isto poderá ser efetuado em termos de propriedades das funções definidas para a sistematização dos resultados, de modo simples.

O presente capítulo é subsidiário aos seguintes de tal forma que o leitor não terá prejudicada a compreensão dos aspectos principais do trabalho se adiar a leitura do mesmo.

3.2 Funções básicas para funções de Green de dois pontos

Consideremos inicialmente, para a construção da sistematização pretendida, a definição do conjunto de funções que surgem naturalmente na solução de integrais que aparecem em amplitudes associadas a funções de dois pontos, que são as amplitudes contendo dois propagadores fermiônicos internos. Isto ocorre, no procedimento que adotaremos, após a adoção de uma distribuição regularizadora de modo implícito seguido da utilização de identidades ao nível do integrando de modo a obteremos um conjunto de integrais finitas além daquelas esperadas estruturas divergentes. Para escrevermos a parte finita destas integrais em uma forma simples é conveniente definirmos as funções $Z_k\left(m_1^2; m_2^2, q^2; \lambda^2\right)$. Estas são definidas por

$$Z_k\left(m_1^2; m_2^2, q^2; \lambda^2\right) = \int_0^1 dz\,[z]^k \ln\left[\frac{Q\left(q^2, z\right)}{-\lambda^2}\right], \tag{3.1}$$

onde

$$Q\left(q^2, z\right) = q^2\left(1-z\right)z + \left(m_1^2 - m_2^2\right)z - m_1^2. \tag{3.2}$$

Na definição acima q é o momento carregado pelas linhas externas ao loop, m_1 e m_2 são as massas carregadas pelos propagadores e λ é um parâmetro arbitrário com dimensão de massa que realiza o papel de escala para as quantidades envolvidas no polinômio $Q\left(q^2, z\right)$. Por fim, z é um parâmetro de Feynman utilizado na parametrização da forma inicial da integral no momento do loop.

3.2.1 Solução da função $Z_0\left(m_1^2; m_2^2, q^2; \lambda^2\right)$

Podemos colocar as funções $Z_k\left(m_1^2; m_2^2, q^2; \lambda^2\right)$, apresentadas acima na representação integral, em uma forma explícita procedendo a integração no parâmetro de Feynman z. A fim de ilustrar este procedimento, tomamos a função Z de mais baixa ordem, a função $Z_0\left(m_1^2; m_2^2, q^2; \lambda^2\right)$. Notamos então que o polinômio quadrático $Q\left(q^2, z\right)$ pode ser escrito em termos de suas raízes como

$$Q\left(q^2, z\right) = -q^2\left(z-\alpha\right)\left(z-\beta\right). \tag{3.3}$$

As raízes α e β satisfazem então as relações

$$\alpha + \beta = \frac{\left(q^2 + m_1^2 - m_2^2\right)}{q^2}, \tag{3.4}$$

$$\alpha - \beta = \frac{\left[\left(q^2 + m_1^2 - m_2^2\right)^2 - 4q^2 m_1^2\right]^{1/2}}{q^2}, \tag{3.5}$$

e

$$\alpha\beta = \frac{m_1^2}{q^2}. \tag{3.6}$$

Após a integração escrevemos a função $Z_0\left(m_1^2; m_2^2, q^2; \lambda^2\right)$ na forma

$$\begin{aligned} Z_0\left(m_1^2; m_2^2, q^2; \lambda^2\right) &= \ln\left[\frac{m_2^2}{\lambda^2}\right] \\ &\quad -\alpha\ln\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right) - \beta\ln\left(\frac{\beta-1}{\beta}\right) - 2. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Com auxílio da identidade

$$\begin{aligned} \alpha\ln\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right) + \beta\ln\left(\frac{\beta-1}{\beta}\right) &= \frac{\alpha+\beta}{2}\ln\left[\frac{\alpha-1}{\alpha}\frac{\beta-1}{\beta}\right] \\ &\quad + \frac{\alpha-\beta}{2}\ln\left[\frac{\alpha-1}{\alpha}\frac{\beta}{\beta-1}\right], \end{aligned} \tag{3.8}$$

e com o uso das relações (3.4), (3.5) e (3.6) obteremos

$$\begin{aligned} Z_0\left(m_1^2; m_2^2, q^2; \lambda^2\right) &= -2 - \ln\left[\frac{\lambda^2}{m_2^2}\right] - \frac{(q^2 + m_1^2 - m_2^2)}{2q^2}\ln\left[\frac{m_2^2}{m_1^2}\right] \\ &\quad - \frac{h\left(m_1^2; m_2^2, q^2\right)}{2q^2}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Onde definimos a função $h\left(m_1^2; m_2^2, q^2\right)$ em termos da qual escrevemos os três ramos de $Z_0\left(m_1^2; m_2^2, q^2; \lambda^2\right)$. Teremos então:

- i) $q^2 < (m_1 - m_2)^2$:

$$\begin{aligned} h\left(m_1^2; m_2^2, q^2\right) &= 2\left[(m_1+m_2)^2 - q^2\right]^{1/2}\left[(m_1-m_2)^2 - q^2\right]^{1/2} \times \\ &\quad \times \ln\left[\frac{\left[(m_1+m_2)^2 - q^2\right]^{1/2} + \left[(m_1-m_2)^2 - q^2\right]^{1/2}}{\left[(m_1+m_2)^2 - q^2\right]^{1/2} - \left[(m_1-m_2)^2 - q^2\right]^{1/2}}\right]. \end{aligned} \tag{3.10}$$

- ii) $(m_1 - m_2)^2 < q^2 < (m_1 + m_2)^2$:

$$\begin{aligned} h\left(m_1^2; m_2^2, q^2\right) &= -4\left[(m_1+m_2)^2 - q^2\right]^{1/2}\left[q^2 - (m_1-m_2)^2\right]^{1/2} \times \\ &\quad \times \arctan\left\{\frac{\left[q^2 - (m_1-m_2)^2\right]^{1/2}}{\left[(m_1+m_2)^2 - q^2\right]^{1/2}}\right\}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

- iii) $q^2 > (m_1 + m_2)^2$:

$$\begin{aligned} h\left(m_1^2; m_2^2, q^2\right) &= -2\left[q^2 - (m_1+m_2)^2\right]^{1/2}\left[q^2 - (m_1-m_2)^2\right]^{1/2} \times \\ &\quad \times \ln\left[\frac{\left[q^2 - (m_1+m_2)^2\right]^{1/2} + \left[q^2 - (m_1-m_2)^2\right]^{1/2}}{\left[q^2 - (m_1-m_2)^2\right]^{1/2} - \left[q^2 - (m_1+m_2)^2\right]^{1/2}}\right] \\ &\quad -2\pi i\left[q^2 - (m_1+m_2)^2\right]^{1/2}\left[q^2 - (m_1-m_2)^2\right]^{1/2}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

3.2.2 Soluções para as funções $Z_1\left(m_1^2;m_2^2,q^2;\lambda^2\right)$ e $Z_2\left(m_1^2;m_2^2,q^2;\lambda^2\right)$

Para os propósitos do presente trabalho além da função $Z_0\left(m_1^2;m_2^2,q^2;\lambda^2\right)$ necessitaremos conhecer as funções $Z_1\left(m_1^2;m_2^2,q^2;\lambda^2\right)$ e $Z_2\left(m_1^2;m_2^2,q^2;\lambda^2\right)$ pois ao calcularmos funções de Green de dois pontos irão surgir integrais de Feynman com dois propagadores com grau de divergência quadrático. Estas funções, obtidas da definição adotada acima tomando os valores respectivos para k, podem ser explicitadas com a utilização do mesmo procedimento adotado na explicitação de $Z_0\left(m_1^2;m_2^2,q^2;\lambda^2\right)$. É possível, entretanto, obter tais formas explícitas construindo relações entre estas e a função $Z_0\left(m_1^2;m_2^2,q^2;\lambda^2\right)$. Estas relações, além de facilitarem a determinação das soluções de $Z_1\left(m_1^2;m_2^2,q^2;\lambda^2\right)$ e $Z_2\left(m_1^2;m_2^2,q^2;\lambda^2\right)$, serão muito úteis na verificação explícita das relações entre funções de Green e das Identidades de Ward envolvendo funções de dois e três pontos, o que consideraremos em capítulos posteriores. Tecnicamente as operações envolvidas são apenas integrações por partes e algum rearranjo conveniente.

Começamos buscando uma relação entre $Z_1\left(m_1^2;m_2^2,q^2;\lambda^2\right)$ e $Z_0\left(m_1^2;m_2^2,q^2;\lambda^2\right)$. Partimos da definição de $Z_1\left(m_1^2;m_2^2,q^2;\lambda^2\right)$:

$$Z_1\left(m_1^2;m_2^2,q^2;\lambda^2\right)=\int_0^1 dz\,[z]\ln\left[\frac{Q\left(q^2,z\right)}{-\lambda^2}\right], \tag{3.13}$$

que pode ser escrita como

$$\begin{aligned}Z_1\left(m_1^2;m_2^2,q^2;\lambda^2\right) &= -\frac{1}{2q^2}\int_0^1 dz\left[-2q^2z+q^2+\left(m_1^2-m_2^2\right)\right]\ln\left[\frac{Q\left(q^2,z\right)}{-\lambda^2}\right]\\ &\quad+\frac{1}{2q^2}\int_0^1\left[q^2+\left(m_1^2-m_2^2\right)\right]\ln\left[\frac{Q\left(q^2,z\right)}{-\lambda^2}\right].\end{aligned} \tag{3.14}$$

Identificando, na primeira integral, a derivada da função $Q\left(q^2,z\right)$, podemos escrever a expressão acima na forma

$$\begin{aligned}Z_1\left(m_1^2;m_2^2,q^2;\lambda^2\right) &= -\frac{1}{2q^2}\int_0^1 dz\frac{\partial}{\partial z}\left\{Q\left(q^2,z\right)\ln\left[Q\left(q^2,z\right)\right]\right\}\\ &\quad+\frac{1}{2q^2}\int_0^1 dz\frac{\partial Q\left(q^2,z\right)}{\partial z}+\frac{1}{2q^2}\ln\left[-\lambda^2\right]\int_0^1 dz\frac{\partial Q\left(q^2,z\right)}{\partial z}\\ &\quad+\frac{\left[q^2+\left(m_1^2-m_2^2\right)\right]}{2q^2}\int_0^1\ln\left[\frac{Q\left(q^2,z\right)}{-\lambda^2}\right],\end{aligned} \tag{3.15}$$

ou ainda

$$Z_1\left(m_1^2;m_2^2,q^2;\lambda^2\right) = \frac{1}{2q^2}\left\{m_1^2-m_2^2-m_1^2\ln\left[\frac{m_1^2}{\lambda^2}\right]+m_2^2\ln\left[\frac{m_2^2}{\lambda^2}\right]\right\} + \frac{\left[q^2+(m_1^2-m_2^2)\right]}{2q^2}\int_0^1 \ln\left[\frac{Q\left(q^2,z\right)}{-\lambda^2}\right]. \tag{3.16}$$

Podemos então identificar a função $Z_0\left(m_1^2;m_2^2,q^2;\lambda^2\right)$ definida em (3.1). Deste modo teremos para a relação pretendida

$$Z_1\left(m_1^2;m_2^2,q^2;\lambda^2\right) = \frac{1}{2q^2}\left\{m_1^2-m_2^2+m_1^2\ln\left[\frac{\lambda^2}{m_1^2}\right]-m_2^2\ln\left[\frac{\lambda^2}{m_2^2}\right]\right\} + \frac{\left[q^2+(m_1^2-m_2^2)\right]}{2q^2}Z_0\left(m_1^2;m_2^2,q^2;\lambda^2\right), \tag{3.17}$$

à qual nos referiremos como relação de redução de $Z_1\left(m_1^2;m_2^2,q^2;\lambda^2\right)$ para $Z_0\left(m_1^2;m_2^2,q^2;\lambda^2\right)$.

De modo análogo podemos obter uma relação entre a função $Z_2\left(m_1^2;m_2^2,q^2;\lambda^2\right)$ e as funções $Z_1\left(m_1^2;m_2^2,q^2;\lambda^2\right)$ e $Z_0\left(m_1^2;m_2^2,q^2;\lambda^2\right)$. Para este caso teremos

$$\frac{3}{2}Z_2\left(m_1^2;m_2^2,q^2;\lambda^2\right) = \frac{m_2^2}{2q^2}\ln\left(\frac{m_2^2}{\lambda_1^2}\right) + Z_1\left(m_1^2;m_2^2,q^2;\lambda^2\right)+\frac{(m_1^2-m_2^2)}{q^2}Z_1\left(m_1^2;m_2^2,q^2;\lambda^2\right) - \frac{m_1^2}{2q^2}Z_0\left(m_1^2;m_2^2,q^2;\lambda^2\right)-\frac{1}{12}+\frac{(m_1^2-m_2^2)}{4q^2}, \tag{3.18}$$

à qual iremos nos referir como relação de redução de $Z_2\left(m_1^2;m_2^2,q^2;\lambda^2\right)$ para $Z_1\left(m_1^2;m_2^2,q^2;\lambda^2\right)$ e $Z_0\left(m_1^2;m_2^2,q^2;\lambda^2\right)$.

Através das relações de redução das funções $Z's$ podemos observar que toda a parte finita das integrais de Feynman com dois propagadores poderão ser escritas em termos de somente uma função, a função $Z_0\left(m_1^2;m_2^2,q^2;\lambda^2\right)$. Assim, para obtermos as formas explícitas das outras funções basta utilizarmos as relações de redução e a forma explícita obtida para a função $Z_0\left(m_1^2;m_2^2,q^2;\lambda^2\right)$ determinada na seção anterior. Com isso encontraremos para a função $Z_1\left(m_1^2;m_2^2,q^2;\lambda^2\right)$

$$Z_1\left(m_1^2;m_2^2,q^2;\lambda^2\right) = \frac{1}{2q^2}\left\{m_1^2-m_2^2+m_1^2\ln\left[\frac{\lambda^2}{m_1^2}\right]-m_2^2\ln\left[\frac{\lambda^2}{m_2^2}\right]\right\} - \frac{\left[q^2+(m_1^2-m_2^2)\right]}{2q^2}\left\{\ln\left[\frac{\lambda^2}{m_2^2}\right]+2+\frac{(q^2+m_1^2-m_2^2)}{2q^2}\ln\left[\frac{m_2^2}{m_1^2}\right]\right\} - \frac{\left[q^2+(m_1^2-m_2^2)\right]}{4q^4}h\left(m_1^2;m_2^2,q^2\right). \tag{3.19}$$

Por sua vez para a função $Z_2\left(m_1^2;m_2^2,q^2;\lambda^2\right)$ teremos

$$\begin{aligned}
Z_2\left(m_1^2;m_2^2,q^2;\lambda^2\right) &= \frac{\left[q^2+\left(m_1^2-m_2^2\right)\right]}{3\left(q^2\right)^2}\left\{m_1^2-m_2^2+m_1^2\ln\left[\frac{\lambda^2}{m_1^2}\right]-m_2^2\ln\left[\frac{\lambda^2}{m_2^2}\right]\right\} \\
&-\frac{1}{3}\left[\left(\frac{q^2+\left(m_1^2-m_2^2\right)}{q^2}\right)^2-\frac{m_1^2}{q^2}\right]\times\left\{\ln\left[\frac{\lambda^2}{m_2^2}\right]+2\right. \\
&\left.+\frac{\left(q^2+m_1^2-m_2^2\right)}{2q^2}\ln\left[\frac{m_2^2}{m_1^2}\right]+\frac{h\left(m_1^2;m_2^2,q^2\right)}{2q^2}\right\} \\
&-\frac{1}{18}+\frac{\left(m_1^2-m_2^2\right)}{6q^2}+\frac{m_2^2}{3q^2}\ln\left(\frac{m_2^2}{\lambda^2}\right). \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

3.3 Funções básicas para a parte finita de funções de Green de três pontos

Quando considerarmos o cálculo de funções de Green de três pontos tornar-se-á necessário o cálculo de integrais de Feynman com três propagadores. Nessa ocasião perceberemos o surgimento natural de um novo conjunto de funções nas expressões obtidas, tanto para as partes finitas das integrais de Feynman divergentes quanto para aquelas integrais de Feynman finitas. A fim de sistematizar as operações necessárias é interessante e conveniente definirmos os conjuntos de funções

$$\xi_{nm}\left(m_1^2;m_2^2,q^2;m_3^2,p^2\right)=\int_0^1 dz\int_0^{1-z}dy\frac{z^n y^m}{Q\left(z,y,p^2,q^2\right)}, \qquad (3.21)$$

e

$$\eta_{nm}\left(m_1^2;m_2^2,q^2;m_3^2,p^2;\lambda^2\right)=\int_0^1 dz\int_0^{1-z}dy\left[z^n y^m\right]\ln\left[\frac{Q\left(z,y,p^2,q^2\right)}{-\lambda^2}\right], \qquad (3.22)$$

onde

$$\begin{aligned}
Q\left(z,y,p^2,q^2\right) &= p^2 z(1-z)+q^2 y(1-y)+2(p.q)zy \\
&+\left(m_1^2-m_3^2\right)z+\left(m_1^2-m_2^2\right)y-m_1^2. \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

Nas expressões acima p e q são os momentos carregados pelas linhas externas ao loop ao passo que os parâmetros m_i são as massas carregadas pelos propagadores internos. Os dois conjuntos acima podem ser relacionados entre si mas é conveniente mantermos os dois conjuntos para uma maior compactação dos resultados. Quando conveniente consideraremos tais relações de conversão.

Diferentemente das funções consideradas na seção anterior, formas explícitas destes dois conjuntos não podem ser obtidas pois na integração do segundo parâmetro de Feynman encontraremos funções transcendentais. Sendo assim, é conveniente manter a representação integral nas operações que necessitaremos ao longo das nossas investigações. Entre estas operações estarão propriedades especiais ou relações de redução extremamente úteis na verificação de relações de simetria. Consideremos então o estabelecimento de tais propriedades.

Antes de começarmos, notemos que ξ_{nm} e η_{nm} terão sempre os mesmos argumentos $(m_1^2; m_2^2, q^2; m_3^2, p^2)$ e $(m_1^2; m_2^2, q^2; m_3^2, p^2; \lambda^2)$ respectivamente. Assim adotaremos no que se segue uma notação onde os argumentos de tais funções são omitidas.

3.3.1 Propriedades úteis das Funções ξ_{nm}

Consideramos inicialmente a função ξ_{01} que, segundo (3.21), é definida por

$$\xi_{01} = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{y}{Q\left(z, y, p^2, q^2\right)}. \tag{3.24}$$

Esta função pode ser reduzida para a função ξ_{00} mais funções do tipo Z_k. Podemos obter tal relação se notarmos que a expressão acima pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned} \xi_{01} &= -\frac{1}{2q^2} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{\left(-2q^2 y + q^2 + 2\left(p.q\right) z + \left(m_1^2 - m_2^2\right)\right)}{Q\left(z, y, p^2, q^2\right)} \\ &\quad + \frac{1}{2q^2} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{\left[q^2 + 2\left(p.q\right) z + \left(m_1^2 - m_2^2\right)\right]}{Q\left(z, y, p^2, q^2\right)}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Identificando, na primeira integral, a derivada do polinômio $Q\left(z, y, p^2, q^2\right)$ em relação ao parâmetro de Feynman y, podemos colocar a expressão acima na forma

$$\begin{aligned} \xi_{01} &= -\frac{1}{2q^2} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{\partial}{\partial y} \ln\left[Q\left(z, y, p^2, q^2\right)\right] \\ &\quad + \frac{\left[q^2 + \left(m_1^2 - m_2^2\right)\right]}{2q^2} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{1}{Q\left(z, y, p^2, q^2\right)} \\ &\quad + \frac{\left(p.q\right)}{q^2} \left(-\frac{1}{2p^2}\right) \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{\left(-2p^2 z\right)}{Q\left(z, y, p^2, q^2\right)}. \end{aligned} \tag{3.26}$$

A relação acima não possui nenhuma utilidade para nossos propósitos pois relaciona ξ_{01} com ξ_{10} (além de outras funções). Para produzirmos uma relação útil efetuamos operações semelhantes às efetivadas acima para eliminar ξ_{10}. Teremos então

$$\begin{aligned}
\xi_{01} &= -\frac{1}{2q^2}\int_0^1 dz\int_0^{1-z} dy\frac{\partial}{\partial y}\ln\left[Q\left(z,y,p^2,q^2\right)\right] \\
&+\frac{\left[q^2+m_1^2-m_2^2\right]}{2q^2}\int_0^1 dz\int_0^{1-z} dy\frac{1}{Q\left(z,y,p^2,q^2\right)} \\
&+\frac{p.q}{q^2}\left(-\frac{1}{2p^2}\right)\int_0^1 dz\int_0^{1-z} dy\frac{\left[-2p^2z+p^2+2p.qy+m_1^2-m_3^2\right]}{Q\left(z,y,p^2,q^2\right)} \\
&-\frac{p.q}{q^2}\left(-\frac{1}{2p^2}\right)\int_0^1 dz\int_0^{1-z} dy\frac{\left[p^2+2p.qy+m_1^2-m_3^2\right]}{Q\left(z,y,p^2,q^2\right)}.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Identificando agora na terceira integral a derivada do polinômio $Q\left(z,y,p^2,q^2\right)$ em relação ao parâmetro de Feynman z ficamos com

$$\begin{aligned}
\xi_{01} &= -\frac{1}{2q^2}\int_0^1 dz\int_0^{1-z} dy\frac{\partial}{\partial y}\ln\left[Q\left(z,y,p^2,q^2\right)\right] \\
&+\frac{\left[q^2+m_1^2-m_2^2\right]}{2q^2}\int_0^1 dz\int_0^{1-z} dy\frac{1}{Q\left(z,y,p^2,q^2\right)} \\
&-\frac{(p.q)}{2p^2q^2}\int_0^1 dz\int_0^{1-z} dy\frac{\partial}{\partial z}\ln\left[Q\left(z,y,p^2,q^2\right)\right] \\
&+\frac{(p.q)\left[p^2+m_1^2-m_3^2\right]}{2p^2q^2}\int_0^1 dz\int_0^{1-z} dy\frac{1}{Q\left(z,y,p^2,q^2\right)} \\
&+\frac{(p.q)^2}{p^2q^2}\int_0^1 dz\int_0^{1-z} dy\frac{y}{Q\left(z,y,p^2,q^2\right)}.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Reorganizando e identificando as funções ξ_{01} e ξ_{00} ficaremos com

$$\begin{aligned}
\frac{p^2q^2-(p.q)^2}{p^2q^2}\xi_{01} &= -\frac{1}{2q^2}\int_0^1 dz\left\{\ln\left[Q\left(z,1-z,p^2,q^2\right)\right]-\ln\left[Q\left(z,0,p^2,q^2\right)\right]\right\} \\
&+\left\{\frac{\left[q^2+m_1^2-m_2^2\right]}{2q^2}+\frac{(p.q)\left[p^2+m_1^2-m_3^2\right]}{2p^2q^2}\right\}\xi_{00} \\
&-\frac{(p.q)}{2p^2q^2}\int_0^1 dz\int_0^{1-z} dy\frac{\partial}{\partial z}\ln\left[Q\left(z,y,p^2,q^2\right)\right].
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Agora, notando que

$$\begin{aligned}
Q\left(z,1-z,p^2,q^2\right) &= \left[p^2+q^2+2\left(p.q\right)\right]z\left(1-z\right) \\
&\quad+\left(m_2^2-m_3^2\right)z-m_2^2 \\
&= Q\left(m_2^2;m_3^2,(p+q)^2;\lambda^2\right),
\end{aligned} \tag{3.30}$$

$$
\begin{aligned}
Q\left(z,0,p^2,q^2\right) &= p^2 z\left[1-z\right]+\left(m_1^2-m_3^2\right)z-m_1^2 \\
&= Q\left(m_1^2;m_3^2,p^2;\lambda^2\right),
\end{aligned} \tag{3.31}
$$

será possível identificar na expressão (3.29) a função $Z_0\left(m_2^2;m_3^2,\left(p+q\right)^2;\lambda^2\right)$ e também a função $Z_0\left(m_1^2;m_3^2,p^2;\lambda^2\right)$ de modo a obtermos

$$
\begin{aligned}
\frac{p^2q^2-\left(p.q\right)^2}{p^2q^2}\xi_{01} &= -\frac{1}{2q^2}\left[Z_0\left(m_2^2;m_3^2,\left(p+q\right)^2;\lambda^2\right)-Z_0\left(m_1^2;m_3^2,p^2;\lambda^2\right)\right] \\
&+\left\{\frac{\left[q^2+m_1^2-m_2^2\right]}{2q^2}+\frac{\left(p.q\right)\left[p^2+m_1^2-m_3^2\right]}{2p^2q^2}\right\}\xi_{00} \\
&-\frac{\left(p.q\right)}{2p^2q^2}\int_0^1 dz\int_0^{1-z}dy\frac{\partial}{\partial z}\ln\left[Q\left(z,y,p^2,q^2\right)\right].
\end{aligned} \tag{3.32}
$$

Porém o integrando da última integral não é uma diferencial total, logo a sua solução requer um pouco mais de esforço algébrico, porém nenhum aspecto novo ou relevante surge durante este procedimento, motivo pelo qual apenas apresentamos a solução da integral:

$$
\int_0^1 dz\int_0^{1-z}dy\frac{\partial}{\partial z}\ln\left[Q\left(z,y,p^2,q^2\right)\right]=-Z_0\left(m_1^2;m_2^2,q^2;\lambda^2\right)+Z_0\left(m_2^2;m_3^2,\left(p+q\right)^2;\lambda^2\right). \tag{3.33}
$$

Substituindo este resultado na equação (3.32) obtemos, finalmente

$$
\begin{aligned}
\xi_{01} = \left\{\frac{p^2q^2}{p^2q^2-\left(p.q\right)^2}\right\}&\left\{\frac{1}{2q^2}Z_0\left(m_1^2;m_3^2,p^2;\lambda^2\right)\right. \\
&+\frac{p.q}{2p^2q^2}Z_0\left(m_1^2;m_2^2,q^2;\lambda^2\right) \\
&-\left(\frac{1}{2q^2}+\frac{p.q}{2q^2p^2}\right)Z_0\left(m_2^2;m_3^2,\left(p+q\right)^2;\lambda^2\right) \\
&\left.+\left[\frac{\left(q^2+m_1^2-m_2^2\right)}{2q^2}+\frac{p.q\left(p^2+m_1^2-m_3^2\right)}{2p^2q^2}\right]\xi_{00}\right\}.
\end{aligned} \tag{3.34}
$$

Seguindo o mesmo procedimento descrito acima poderemos encontrar uma expressão semelhante para a função ξ_{10}, ou seja, podemos reduzi-la para ξ_{00}. A expressão correspondente fica

$$
\begin{aligned}
\xi_{10} \; = \; & \left\{ \frac{q^2 p^2}{q^2 p^2 - (p.q)^2} \right\} \left\{ \frac{1}{2p^2} Z_0 \left(m_1^2; m_2^2, q^2; \lambda^2 \right) \right. \\
& + \frac{(p.q)}{2q^2 p^2} Z_0 \left(m_1^2; m_3^2, p^2; \lambda^2 \right) \\
& - \left[\frac{1}{2p^2} + \frac{(p.q)}{2q^2 p^2} \right] Z_0 \left(m_2^2; m_3^2, (p+q)^2; \lambda^2 \right) \\
& \left. + \left[\frac{(p^2 + m_1^2 - m_3^2)}{2p^2} + \frac{(p.q)\left(q^2 + m_1^2 - m_2^2\right)}{2q^2 p^2} \right] \xi_{00} \right\}. \qquad (3.35)
\end{aligned}
$$

Os resultados (3.34) e (3.35) obtidos acima representam as reduções das funções ξ_{01} e ξ_{10} em termos da função ξ_{00}. Aparecem ainda nestas reduções as funções Z_0, já estudada em seções anteriores. Estes são casos particulares de propriedades gerais das funções ξ_{nm}. Todas as funções correspondentes a um certo valor de $n+m$ podem, com o auxílio das operações detalhadas acima, ser reduzidas à funções $\xi' s$ correspondentes a $n+m$ decrescido de uma unidade, mais funções do tipo Z_k. Deste modo todas as funções $\xi' s$ podem ser reduzidas à apenas ξ_{00} e funções Z_0 já que todas as funções Z_k podem ser reduzidas à funções Z_0. As propriedades de redução envolvendo valores positivos de n, m e k serão suficientes para nossos propósitos no presente trabalho. Entretanto é possível construir relações envolvendo valores negativos destes índices. Como exemplo, a função ξ_{00} na situação cinemática $p^2 = q^2 = 0$ torna-se

$$
\frac{Z_{-1}\left(m_i; m_j, S \right)}{S},
$$

onde $S = -2\,(p.q)$.

A estrutura obtida para as reduções das funções ξ_{nm} mostra claramente que estas funções possuem partes imaginárias com limiares correspondentes às condições cinemáticas

$$
\begin{aligned}
q^2 &= (m_1 + m_2)^2, \\
p^2 &= (m_1 + m_3)^2,
\end{aligned}
$$

e

$$
(p+q)^2 = (m_2 + m_3)^2 .
$$

Tais propriedades são exigidas pela unitariedade, pois as amplitudes devem desenvolver uma parte imaginária nas situações cinemáticas onde ambas as partículas internas conectadas a um vértice estejam na camada de massa.

Outro aspecto importante a ser observado é que as funções ξ_{mn} e ξ_{nm} estão relacionadas. De fato, observando as relações (3.34) e (3.35) identificamos que existe uma simetria entre as duas funções, que é a troca simultânea $p \leftrightarrow q$ e $m_3 \leftrightarrow m_2$.

Retornando às expressões (3.34) e (3.35) para as reduções das funções ξ_{01} e ξ_{10} podemos estabelecer importantes propriedades para estas funções, de extrema utilidade na verificação de relações entre funções de Green, que são as relações

$$\begin{aligned} q^2\xi_{01} - (p.q)\,\xi_{10} &= \frac{1}{2}\left\{-Z_0\left(m_2^2; m_3^2, (p+q)^2; \lambda^2\right) + Z_0\left(m_1^2; m_3^2, p^2; \lambda^2\right)\right. \\ &\quad \left. + \left[q^2 + m_1^2 - m_2^2\right]\xi_{00}\right\}, \end{aligned} \tag{3.36}$$

e

$$\begin{aligned} p^2\xi_{10} - (p.q)\,\xi_{01} &= \frac{1}{2}\left\{-Z_0\left(m_2^2; m_3^2, (p+q)^2; \lambda^2\right) + Z_0\left(m_1^2; m_2^2, q^2; \lambda^2\right)\right. \\ &\quad \left. + \left[p^2 + m_1^2 - m_3^2\right]\xi_{00}\right\}. \end{aligned} \tag{3.37}$$

De modo totalmente análogo podemos obter relações de redução para quaisquer funções ξ_{nm} e posteriormente combiná-las em relações semelhantes às duas imediatamente acima. Nos limitaremos a escrever apenas aquelas que faremos uso no decorrer do presente trabalho. São elas

$$\begin{aligned} \left[p^2\xi_{20} - p.q\xi_{11}\right] &= \frac{1}{2}\left\{-Z_1\left(m_2^2; m_3^2, (p+q)^2; \lambda^2\right) + \eta_{00}\right. \\ &\quad \left. + \left(p^2 + m_1^2 - m_3^2\right)\xi_{10}\right\}, \end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned} \left[q^2\xi_{02} - p.q\xi_{11}\right] &= \frac{1}{2}\left\{Z_1\left(m_2^2; m_3^2, (p+q)^2; \lambda^2\right)\right. \\ &\quad -Z_0\left(m_2^2; m_3^2, (p+q)^2; \lambda^2\right) \\ &\quad \left. + \left(q^2 + m_1^2 - m_2^2\right)\xi_{01} + \eta_{00}\right\}, \end{aligned} \tag{3.39}$$

$$\left[q^2\xi_{11} - p.q\xi_{20}\right] = \frac{1}{2}\left\{-Z_1\left(m_2^2; m_3^2, (p+q)^2; \lambda^2\right) \right.$$
$$+Z_1\left(m_1^2; m_3^2, p^2; \lambda^2\right)$$
$$\left. + \left(q^2 + m_1^2 - m_2^2\right)\xi_{10}\right\}, \tag{3.40}$$

$$\left[p^2\xi_{30} - p.q\xi_{21}\right] = \frac{1}{2}\left\{-Z_2\left(m_2^2; m_3^2, (p+q)^2; \lambda^2\right) + 2\eta_{10} \right.$$
$$\left. + \left(p^2 + m_1^2 - m_3^2\right)\xi_{20}\right\}, \tag{3.41}$$

$$\left[p^2\xi_{12} - p.q\xi_{03}\right] = \frac{1}{2}\left\{-Z_0\left(m_2^2; m_3^2, (p+q)^2; \lambda^2\right) \right.$$
$$+2Z_1\left(m_2^2; m_3^2, (p+q)^2; \lambda^2\right) - Z_2\left(m_2^2; m_3^2, (p+q)^2; \lambda^2\right)$$
$$\left. +Z_2\left(m_1^2; m_2^2, q^2; \lambda^2\right) + \left(p^2 + m_1^2 - m_3^2\right)\xi_{02}\right\}, \tag{3.42}$$

$$\left[p^2\xi_{21} - p.q\xi_{12}\right] = \frac{1}{2}\left\{Z_2\left(m_2^2; m_3^2, (p+q)^2; \lambda^2\right) \right.$$
$$-Z_1\left(m_2^2; m_3^2, (p+q)^2; \lambda^2\right)$$
$$\left. +\eta_{01} + \left(p^2 + m_1^2 - m_3^2\right)\xi_{11}\right\}, \tag{3.43}$$

$$\left[q^2\xi_{21} - p.q\xi_{30}\right] = \frac{1}{2}\left\{-Z_2\left(m_2^2; m_3^2, (p+q)^2; \lambda^2\right) \right.$$
$$+Z_2\left(m_2^2; m_3^2, (p+q)^2; \lambda^2\right)$$
$$\left. + \left(q^2 + m_1^2 - m_2^2\right)\xi_{20}\right\}, \tag{3.44}$$

$$\left[q^2\xi_{03} - p.q\xi_{12}\right] = \frac{1}{2}\left\{-Z_0\left(m_2^2; m_3^2, (p+q)^2; \lambda^2\right) \right.$$
$$+2Z_1\left(m_2^2; m_3^2, (p+q)^2; \lambda^2\right)$$
$$-Z_2\left(m_2^2; m_3^2, (p+q)^2; \lambda^2\right)$$
$$\left. +2\eta_{01} + \left(q^2 + m_1^2 - m_2^2\right)\xi_{02}\right\}, \tag{3.45}$$

$$\left[q^2\xi_{12} - p.q\xi_{21}\right] = \frac{1}{2}\left\{Z_2\left(m_2^2; m_3^2, (p+q)^2; \lambda^2\right) \right.$$
$$-Z_1\left(m_2^2; m_3^2, (p+q)^2; \lambda^2\right)$$
$$\left. +\eta_{10} + \left(q^2 + m_1^2 - m_2^2\right)\xi_{11}\right\}. \tag{3.46}$$

Nas relações acima, mais precisamente naquelas entre as funções $\xi's$ para $m+n \geq 2$, aparecem naturalmente as funções η_{mn} definidas em (3.22). Estas funções podem ser reduzidas a combinações de funções $\xi's$ e $Z's$. Inicialmente consideremos este tipo de relação para a função η_{00}, definida por

$$\eta_{00} = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \ln\left[\frac{Q\left(z, y, p^2, q^2\right)}{-\lambda^2}\right]. \tag{3.47}$$

Após algumas manipulações algébricas poderemos escrever a expressão acima na forma

$$\begin{aligned}\eta_{00} \;=\; & \frac{1}{2} Z_0\left(m_2^2; m_3^2, (p+q)^2; \lambda^2\right) \\ & -\frac{1}{2} - m_1^2 \xi_{00} \\ & +\frac{1}{2}\left[p^2 + \left(m_1^2 - m_3^2\right)\right] \xi_{10} + \frac{1}{2}\left(q^2 + m_1^2 - m_2^2\right) \xi_{01},\end{aligned} \tag{3.48}$$

a qual nos referiremos como redução de η_{00} para as funções $Z's$ e $\xi's$. De modo semelhante para as funções η_{01} e η_{10}, teremos

$$\begin{aligned}\eta_{01} \;=\; & -Z_2\left(m_2^2; m_3^2, (p+q)^2; \lambda^2\right) + Z_1\left(m_2^2; m_3^2, (p+q)^2; \lambda^2\right) \\ & +2\left[p^2 \xi_{21} - p.q \xi_{12}\right] \\ & -\left(p^2 + m_1^2 - m_3^2\right) \xi_{11},\end{aligned} \tag{3.49}$$

e

$$\begin{aligned}\eta_{10} \;=\; & -Z_2\left(m_2^2; m_3^2, (p+q)^2; \lambda^2\right) + Z_1\left(m_2^2; m_3^2, (p+q)^2; \lambda^2\right) \\ & +2\left[q^2 \xi_{12} - p.q \xi_{21}\right] \\ & -\left(q^2 + m_1^2 - m_2^2\right) \xi_{11}.\end{aligned} \tag{3.50}$$

Com isso podemos estabelecer propriedades bastante úteis na verificação de relações entre funções de Green de três pontos com três índices vetoriais de Lorentz, que são as relações

$$
\begin{aligned}
\left[q^2\eta_{01}-(p.q)\,\eta_{10}\right] \;=\;& \frac{1}{2}\left\{2p^2 Z_2\left(m_1^2;m_3^2,p^2;\lambda^2\right)\right.\\
&-\left[p^2+m_1^2-m_3^2\right] Z_1\left(m_1^2;m_3^2,p^2;\lambda^2\right)\\
&-2\,(p+q)^2\, Z_2\left(m_2^2;m_3^2,(p+q)^2\,;\lambda^2\right)\\
&+\left[(p+q)^2-m_2^2-m_3^2\right] Z_1\left(m_2^2;m_3^2,(p+q)^2\,;\lambda^2\right)\\
&\left.+\left[q^2+m_1^2-m_2^2\right]\eta_{00}\right\}, \qquad (3.51)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\left[p^2\eta_{10}-(p.q)\,\eta_{01}\right] \;=\;& \frac{1}{2}\left\{2q^2 Z_2\left(m_1^2;m_2^2,q^2;\lambda^2\right)\right.\\
&-\left[q^2+m_1^2-m_2^2\right] Z_1\left(m_1^2;m_2^2,q^2;\lambda^2\right)\\
&-2\,(p+q)^2\, Z_2\left(m_2^2;m_3^2,(p+q)^2\,;\lambda^2\right)\\
&+\left[(p+q)^2-m_2^2-m_3^2\right] Z_1\left(m_2^2;m_3^2,(p+q)^2\,;\lambda^2\right)\\
&\left.+\left[p^2+m_1^2-m_3^2\right]\eta_{00}\right\}. \qquad (3.52)
\end{aligned}
$$

Com isso completamos o conjunto mínimo de ingredientes necessários para nossos futuros propósitos de cálculo de amplitudes e verificação de relações de simetria.

Capítulo 4

Solução para as Integrais de Feynman

4.1 Introdução

No capítulo 2 selecionamos um conjunto de amplitudes, potencialmente divergentes no regime ultravioleta, em termos das quais estabelecemos nossa pretendida investigação. Mostramos que estas amplitudes, assim como quaisquer outras no contexto do cálculo perturbativo, podem ser escritas como combinações de um certo conjunto de integrais de Feynman. Para mostrar isso foi necessário somente a utilização de algumas manipulações algébricas muito gerais. Através da contagem de potências do momento de integração, observamos que estas integrais podiam apresentar divergências ultravioletas com grau variando desde cúbico até logarítmico. Além disto percebemos que algumas das integrais que aparecem nas combinações que geram todas as amplitudes são finitas.

No capítulo 3 apresentamos uma sistematização geral para uma organização eficiente das operações e dos resultados envolvidos nos cálculos propriamente ditos das integrais de Feynman identificadas no capítulo no capítulo 2. A fim de dar prosseguimento à nossa investigação o próximo passo deve ser a solução destas integrais. Este é o ponto crucial da nossa discussão pois será na solução das integrais de Feynman que encontraremos a possibilidade de ambigüidades em cujo contexto figurará o problema da ambigüidade de escala.

Como as integrais de Feynman que devemos solucionar podem possuir divergências, a adoção de uma estratégia consistente para a manipulação destas estruturas matematicamente indefinidas torna-se necessária. A escolha de um tal método de regularização ou filosofia equivalente, a ser utilizada nos passos intermediários, é completamente arbitrária e espera-se que os resultados finais sejam independentes dos aspectos particulares envolvidos nesta escolha.

Nosso objetivo neste capítulo será o de obter soluções para as integrais de Feynman que nos permitam a construção da forma integrada das funções de Green, de onde seriam retiradas as implicações fenomenológicas da teoria ou modelo associado a tais amplitudes. Para alcançar nosso objetivo adotaremos uma estratégia alternativa aos métodos usuais de regularização proposta e desenvolvida por O. A. Battistel [9]. No contexto desta estratégia não fazemos uso de uma forma específica de distribuição regularizadora e sim de propriedades de uma tal distribuição. Com este raciocínio, nos utilizamos do próprio cálculo perturbativo e de seus teoremas gerais para estabelecer as propriedades que uma regularização deve satisfazer a fim de produzir resultados consistentes para as amplitudes perturbativas a despeito de apresentarem indefinições matemáticas associadas às divergências típicas do cálculo perturbativo.

No decorrer dos cálculos faremos uso da sistematização adotada para a parte finita das integrais de Feynman introduzida no capítulo anterior assim como definiremos um pequeno conjunto de estruturas em termos das quais a parte divergente de qualquer amplitude considerada na presente investigação poderá ser escrita.

Iniciaremos considerando questões relacionadas à regularização de integrais de Feynman divergentes. Após estabelecermos a estratégia adotada para tal na presente investigação, mostraremos como surge naturalmente o problema da ambigüidade de escala quando procedemos a separação das partes finita e divergente das integrais consideradas. O material apresentado neste capítulo é baseado na referência [13].

4.2 Regularizações

Quando nos deparamos com integrais de Feynman divergentes no contexto de cálculos perturbativos em TQC, somos forçados a adotar alguma estratégia que nos permita extrair o conteúdo físico das amplitudes consideradas a despeito da presença de tais indefinições matemáticas. Tradicionalmente isto é efetuado com a adoção de um método ou técnica de regularização.

De uma forma geral os métodos de regularização tradicionais se baseiam em mudanças efetuadas ao nível do integrando de modo a tornar as integrais finitas. Isto é materializado pela introdução de uma distribuição regularizadora no integrando capaz de modificar o comportamento incômodo do integrando no regime ultravioleta do momento de integração e converter a integral em uma quantidade definida.

O método mais popular de regularização, entretanto, é a RD. Neste esquema a modificação efetuada ocorre, na prática, na dimensão de integração das integrais de Feynman. A idéia fundamental é admitir que as amplitudes são funções analíticas da variável ω, contínua e complexa, sendo 2ω a dimensão espaço-temporal. Neste contexto, teorias ou modelos são concebidos em dimensão 2ω onde todos os cálculos intermediário são efetuados. Posteriormente, as implicações para uma dimensão espaço-temporal específica são obtidas expandindo-se o resultado obtido ao redor do valor desejado de 2ω seguido da tomada de um limite para o valor de 2ω desejado.

Podemos representar tais procedimentos conforme o esquema abaixo.

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f(k) \rightarrow \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f(k) \left\{ \lim_{\Lambda_i^2 \to \infty} G_{\Lambda_i}\left(k, \Lambda_i^2\right) \right\} = \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f(k) \,, \tag{4.1}$$

para regularizações formuladas em 4D, e

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f(k) \rightarrow \int \lim_{\omega \to 2} \left\{ \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} f(k, 2\omega) \right\} = \int_\omega \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} f(k) \,, \tag{4.2}$$

para o caso da RD.

As primeiras integrais nas expressões (4.1) e (4.2) representam as amplitudes *originais*, ou seja, as amplitudes como surgem a partir da utilização das regras de Feynman. As últimas integrais do esquema acima, por sua vez, representam as amplitudes em sua versão regularizada. A amplitude física divergente foi modificada pela presença da distribuição regularizadora $G\left(k,\Lambda_i^2\right)$, que é caracterizada pelos parâmetros $\Lambda_i' s$, ou pela mudança da dimensão espaço-temporal no caso da RD. Uma vez que as integrais se tornaram finitas podemos calculá-las seguindo os métodos usuais de integração. Esperamos que após a integração ser realizada, a *verdadeira* amplitude possa ser reobtida com a tomada do limite onde a distribuição regularizadora tende para a unidade ou $\omega \rightarrow 2$. O passo crítico envolvido nestes processos é a troca dos limites

$$\lim_{\Lambda_i^2 \rightarrow \infty} G_{\Lambda_i}\left(k,\Lambda_i^2\right) = 1 \tag{4.3}$$

e:

$$\lim_{\omega \rightarrow 2} f\left(k, 2\omega\right) = f\left(k\right), \tag{4.4}$$

chamados de *limites de conexão*, com a operação de integração no momento do loop indicada nos esquemas acima. Sabe-se que estas trocas são operações *válidas sem restrições para os casos em que o integrando original é finito*, não sendo o caso de interesse do cálculo perturbativo em TQC's. O queremos dizer é que nem sempre o limite de conexão pode ser trocado com a operação de integração. Isto implica que as regularizações usuais não são operações matemáticas totalmente confiáveis e, consequentemente, as amplitudes podem emergir do processo de regularização dependentes de quantidades arbitrárias que podem diferir de método para método.

Devido aos problemas acima citados adotaremos para o tratamento das divergências um método alternativo [9] aos usuais métodos de regularização, como já mencionamos. No contexto de tal estratégia, é possível uma adequada reorganização das integrais de Feynman divergentes, para os propósitos do cálculo perturbativo em TQC, sem fazer o uso de uma distribuição regularizadora específica em passos intermediários. Deste modo pode-se preservar todas as escolhas até o resultado final o que é feito adotando-se as escolhas mais gerais possíveis para a rotulação dos momentos internos do loop, mantendo-se arbitrária a escolha para a escala comum às partes finita e divergente e não comprometendo os resultados com uma forma específica de regularização.

A seguir vamos considerar os principais aspectos da estratégia que adotaremos, restrita ao caso de massas iguais para em seguida discutir o caso envolvendo massas diferentes.

4.3 Estratégia para manipulações e cálculos envolvendo amplitudes divergentes

Nas operações intermediárias da reorganização promovida, fazemos uso de uma distribuição regularizadora genérica de modo implícito sobre a qual faremos somente duas exigências que não diminuem a sua generalidade, já que são exigências universais para quaisquer regularizações. A primeira exigência é ditada pela preservação da invariância de Lorentz. Exigiremos que a distribuição $G_{\Lambda_i}\left(k, \Lambda_i^2\right)$ seja par no momento de integração k

$$G_{\Lambda_i}\left(k, \Lambda_i^2\right) = G_{\Lambda_i}\left(k^2, \Lambda_i^2\right). \tag{4.5}$$

A segunda exigência é que a distribuição regularizadora possua o limite (4.3) bem definido. Isto garante que as partes finitas das integrais não serão modificadas.

Assumindo a presença da distribuição regularizadora torna-se possível manipular o integrando com a utilização de identidades convenientes que permitam escrevermos uma integral de Feynman divergente com uma soma de termos separados de acordo com o grau decrescente de divergência até que termos finitos sejam obtidos.

A idéia principal do método é poder evitar o passo crítico envolvido no processo de regularização: a troca do *limite de conexão* com a operação de integração. Isto implica ser possível completar o cálculo das partes finitas, aquelas que contém as implicações fenomenológicas, sem completar o cálculo das integrais divergentes obtidas na reorganização promovida.

Para podermos alcançar estes objetivos usamos uma relação puramente algébrica, com a qual poderemos separar a parte divergente da parte finita de uma amplitude perturbativa, sendo que a parte divergente poderá ser posta em termos de cinco estruturas divergentes básicas que não apresentam dependência com o momento arbitrário interno dos loops, ficando esta dependência somente nos termos finitos.

A reorganização pretendida pode ser alcançada com a utilização da identidade

$$\frac{1}{\left[(k+k_i)^2-m^2\right]}=\sum_{j=0}^{N}\frac{(-1)^j\,(k_i^2+2k_i.k)^j}{(k^2-m^2)^{j+1}}+\frac{(-1)^{N+1}\,(k_i^2+2k_i.k)^{N+1}}{(k^2-m^2)^{N+1}\left[(k+k_i)^2-m^2\right]}, \tag{4.6}$$

onde k_i é (em princípio) um rótulo arbitrário adotado para um momento de uma linha interna de um loop. Na expressão acima o valor de N é escolhido tal que o último termo da expansão acima esteja associado a uma integral finita. Qualquer valor de N maior que este é igualmente aceitável mas apenas gerará esforço algébrico desnecessário.

Após a utilização desta identidade, tantas vezes quanto conveniente, as integrais divergentes não mais dependerão dos momentos internos. Nós então utilizamos as duas propriedades que assumimos para a distribuição regularizadora. Nos termos finitos, onde residem as dependências com a rotulação dos momentos internos, aplicamos o limite de conexão a fim de remover a regularização. Já com os termos divergentes apenas utilizamos o caráter par da distribuição regularizadora para eliminar aqueles que possuem potências ímpares do momento de integração k. As estruturas divergentes remanescentes são reorganizadas em termos de combinações dos seguintes objetos:

$$\begin{aligned}\square_{\alpha\beta\mu\nu}\left(m^2\right) &= \int_\Lambda\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{24k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2-m^2)^4}-g_{\alpha\beta}\int_\Lambda\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{4k_\mu k_\nu}{(k^2-m^2)^3}\\ &\quad -g_{\alpha\nu}\int_\Lambda\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{4k_\beta k_\mu}{(k^2-m^2)^3}-g_{\alpha\mu}\int_\Lambda\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{4k_\beta k_\nu}{(k^2-m^2)^3},\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\Delta_{\mu\nu}\left(m^2\right)=\int_\Lambda\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{4k_\mu k_\nu}{(k^2-m^2)^3}-\int_\Lambda\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{g_{\mu\nu}}{(k^2-m^2)^2}, \tag{4.8}$$

$$\nabla_{\mu\nu}\left(m^2\right)=\int_\Lambda\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{2k_\mu k_\nu}{(k^2-m^2)^2}-\int_\Lambda\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{g_{\mu\nu}}{(k^2-m^2)}, \tag{4.9}$$

mais os objetos básicos irredutíveis

$$I_{\log}\left(m^2\right)=\int_\Lambda\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{(k^2-m^2)^2}, \tag{4.10}$$

$$I_{quad}\left(m^2\right)=\int_\Lambda\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{(k^2-m^2)}. \tag{4.11}$$

Toda a parte divergente das amplitudes perturbativas ao nível 1-loop, em teorias fundamentais, pode ser escrita em termos destas estruturas. No caso de considerarmos ordens perturbativas mais altas, outras estruturas surgirão.

As vantagens deste método frente aos usuais são evidentes. Primeiro convém lembrar que este método é bastante geral, não possuindo limitações de aplicabilidade, sendo aplicado do mesmo modo em qualquer dimensão estudada, assim como nas amplitudes onde se fazem presentes densidades pseudo-escalares e axiais. Outro ponto importante reside no fato de que não foram realizadas mudanças nos termos divergentes o que torna possível fazer um mapeamento dos resultados naqueles correspondentes a uma regularização específica, inclusive naqueles obtidos com a RD, onde ela se aplica.

Nosso próximo passo na descrição do método utilizado seria especificar o modo como trataríamos os objetos divergentes acima citados, pois até o momento não fizemos mais do que separá-los da parte finita. A estes objetos divergentes associamos valores definidos, sendo que estes valores são os mesmos em quaisquer amplitudes físicas nas quais estes objetos apareçam e independentemente da teoria estudada. Estes valores são atribuídos baseados em relações bem gerais, chamadas de relações de consistência, que surgem quando impomos que um conjunto de relações de simetria deva ser satisfeito pelas amplitudes físicas bem como para eliminar as ambigüidades nelas presentes.

Se seguirmos a filosofia acima descrita, não se fará necessário o cálculo explícito de alguma integral divergente, logo podemos concluir que o uso de uma regularização, como no contexto usual, pode ser completamente descartada.

Porém, podemos estar interessados em aplicar a filosofia acima descrita em uma teoria na qual estejam presentes diferentes férmions. Isto irá implicar que as integrais de Feynman apresentarão propagadores com massas diferentes, cada um destes relacionado a um dos férmions presentes na teoria estudada. Com isto pode surgir a seguinte dúvida: qual massa contida na teoria deve ser usada na construção dos objetos divergentes básicos apresentados acima? Ao buscarmos a resposta para esta pergunta encontraremos um novo aspecto do cálculo perturbativo, a ambigüidade de escala.

4.4 Ambigüidade de Escala

O primeiro passo para a construção de uma TQC é a definição dos campos participantes. Em seguida a especificação do grupo total de simetrias que consideramos relevantes para a dinâmica de interação de tais campos. Com isso podemos construir a lagrangiana da teoria exigindo que esta seja invariante frente à transformações efetuadas pelos geradores do grupo de simetrias adotado. É então esperado, que o resultado final obtido para uma amplitude física, associada a um processo pertinente a TQC considerada, também carregue estas simetrias. Em teorias fundamentais (renormalizáveis) a lagrangiana é ainda invariante de escala. Por isso devemos esperar que as soluções obtidas para as amplitudes físicas, mesmo que perturbativas, preservem todas as simetrias fundamentais da teoria e simultaneamente a invariância de escala.

As sentenças imediatamente acima seriam absolutamente óbvias se não fosse a presença das divergências nas soluções perturbativas. Neste contexto, para apreciarmos as amplitudes é necessário antes definir uma estratégia consistente para as manipulações e cálculos necessários. Porém uma estratégia consistente é justamente aquela que preserva as simetrias fundamentais presentes na lagrangiana da teoria. Isto torna o problema autoconsistente. A construção da estratégia que adotamos para manusear este problema leva em consideração esta autoconsistência pois em passos intermediários não nos comprometemos com aspectos específicos de uma regularização. As arbitrariedades são preservadas até a expressão final onde então é possível identificar as propriedades relevantes das integrais de Feynman divergentes que devem ser preservadas a fim de que as amplitudes perturbativas preservem as simetrias fundamentais assumidas na construção da teoria. Estas propriedades podem ser vistas como exigências que devem ser impostas sobre uma eventual regularização para que esta possa ser consistente. A seguir discutiremos como incluir entre as arbitrariedades preservadas nas operações intermediárias também a escolha da escala comum às partes finita e divergente nas operações de separação das partes finita e divergente. Este aspecto se mostrará de importância crucial para a consistência dos cálculos perturbativos.

Para entendermos como esta importante propriedade se manifesta nas amplitudes, primeiro lembramos que, independentemente do método de regularização utilizado, a expressão final de uma amplitude perturbativa é escrita como uma soma de termos com diferentes graus de divergência e termos finitos. Para que a amplitude seja escrita nessa forma é aplicado algum tipo de expansão ou limite. Isto implica que os resultados não são únicos. Em particular, a parte finita é definida a menos de uma constante.

Por outro, lado nós sabemos das equações do grupo de renormalização que o comportamento da teoria para altas energias está intimamente ligado ao de baixa (pequenos e grandes valores de momentos). Isto significa que existem propriedades que vinculam as partes finitas e divergentes das amplitudes físicas de modo único. Do ponto de vista matemático este argumento implica que, em cada separação realizada em uma amplitude divergente, escrevendo-a como uma soma de dois termos possuindo diferentes graus de divergência, deve permanecer, de algum modo, uma certa memória para ambos os termos que deve mantê-los vinculados. Uma vez que esta separação divide dois regimes extremos de energia, esta memória deve estar relacionada com as propriedades de escala das amplitudes físicas perturbativas. Consequentemente, a invariância de escala deve estabelecer o modo consistente de separação de termos em uma amplitude física perturbativa. A invariância de escala deve ser uma propriedade da amplitude toda que é materializada pela contribuição de ambas as partes, finitas e divergentes, obrigando que elas estejam relacionadas de um modo bem definido. Precisamente por estas razões, as condições de consistência a serem impostas nas técnicas de regularização são as mais gerais. Vamos agora investigar estes aspectos do cálculo perturbativo que é precisamente a proposta deste trabalho.

Nós começamos nossa discussão notando que em qualquer amplitude perturbativa, após serem calculados os traços das matrizes de Dirac e após algumas reorganizações algébricas, é possível escrevê-la em uma forma onde as partes fintas e divergentes aparecem separadas. Nesta separação estamos interessados em fazer com que a parte divergente da amplitude não apresente dependência com a rotulação arbitrária dos momentos internos dos loops. Notando que nas amplitudes perturbativas existem propagadores e que estes carregam dependência com os momentos internos, uma identidade relevante para o nosso propósito pode ser:

$$\frac{1}{\left[(k+k_i)^2-m_i^2\right]}=\frac{1}{(k^2-\lambda_1^2)}-\frac{(k_i^2+2k_i.k+\lambda_1^2-m_i^2)}{(k^2-\lambda_1^2)\left[(k+k_i)^2-m_i^2\right]}. \tag{4.12}$$

O parâmetro λ_1^2 introduzido na separação feita é arbitrário e realiza uma ligação entre os dois termos, como citado anteriormente, ou seja, é o parâmetro de escala. A identidade acima escrita nada mais é que uma generalização de (4.6) para $N=1$. Logo teremos o primeiro termo do lado direito possuindo uma contagem de potências (potências no numerador menos potências do denominador) de k igual a contagem no propagador do lado esquerdo, mas o segundo termo do lado direito possuindo uma contagem menor em uma unidade. Porém pode ser que o segundo termo ainda esteja em uma integral divergente. Isso não gera maiores problemas, pois podemos utilizar uma identidade análoga à (4.12), e escrever

$$\begin{aligned}\frac{1}{\left[(k+k_i)^2-m_i^2\right]} &= \frac{1}{(k^2-\lambda_1^2)}-\frac{(k_i^2+2k_i.k+\lambda_1^2-m_i^2)}{(k^2-\lambda_1^2)(k^2-\lambda_2^2)}\\ &+\frac{(k_i^2+2k_i.k+\lambda_1^2-m_i^2)(k_i^2+2k_i.k+\lambda_2^2-m_i^2)}{(k^2-\lambda_1^2)(k^2-\lambda_2^2)\left[(k+k_i)^2-m_i^2\right]},\end{aligned} \tag{4.13}$$

que é a generalização de (4.6) para $N=2$. Agora o último termo possui uma contagem de potências de k que é menor em duas unidades que a contagem no propagador inicial e também existem dois parâmetros de escala, λ_1^2 e λ_2^2. Mas, se mesmo assim, o último termo permanecer em uma integral divergente podemos aplicar mais vezes este modo de separação, aumentando a contagem de potências no denominador e introduzindo mais parâmetros de escala.

Seguindo esta estratégia, serão introduzidos na amplitude física, um número de parâmetros arbitrários igual ao número de vezes que utilizamos a estratégia para separar a parte finita da parte divergente. Obviamente que quando a integração no momento k do loop é realizada é esperado que todas as dependências artificiais em $\lambda's$ sejam automaticamente removidas. É trivial verificar esta afirmação para as integrais finitas, mas isto não é necessariamente verdade para os casos onde estão presentes integrais divergentes. Para que possamos analisar as integrais divergentes é necessária a adoção de algum método de manipulação das divergências, e como vimos, eles, na sua maioria, modificam as integrais originais. Se o resultado final de uma integral divergente, após a adoção de um método de regularização, ainda apresentar alguma dependência no parâmetro arbitrário de escala então esta arbitrariedade torna-se uma ambigüidade e, consequentemente, a invariância de escala foi quebrada em passos intermediários dos cálculos. Isto implica que os resultados obtidos não servem para a descrição de uma fenomenologia desconhecida, uma vez que os mesmos dependem de parâmetros que são escolhas de quem manipula as integrais, ou seja, são arbitrários.

Neste caso a estratégia usada para a manipulação das estruturas divergentes não seria consistente. Precisamente por esta razão a imposição da manutenção da invariância de escala como uma exigência para a consistência da manipulação das integrais de Feynman divergentes pode ser o mais poderoso guia para a consistência de tais tipos de manipulações e cálculos. A importância destes aspectos são particularmente cruciais para as teorias onde campos possuindo diferentes massas estão envolvidos.

Tendo em mente estas importantes observações, vamos agora realizar um passo adicional em nossa investigação. Até este ponto não foi considerada a questão relativa ao número de parâmetros relevantes $\lambda's$. De fato, o número de parâmetros arbitrários é, em princípio, igual ao número de separações feitas. Porém, identidades podem ser usadas para converter a dependência nos parâmetros de escala dos objetos divergentes para a dependência de somente um destes parâmetros. Como um exemplo consideramos a identidade

$$\frac{1}{(k^2-\lambda_1^2)^2} = \frac{1}{(k^2-\lambda_2^2)^2} + \frac{(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}{(k^2-\lambda_1^2)^2(k^2-\lambda_2^2)} + \frac{(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}{(k^2-\lambda_1^2)(k^2-\lambda_2^2)^2}. \qquad (4.14)$$

Após a introdução do sinal de integração, a suposição da presença da distribuição regularizadora em ambos os lados e a integração dos termos finitos, o resultado pode ser posto na seguinte forma:

$$I_{\log}(\lambda_1^2) = I_{\log}(\lambda_2^2) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right)\ln\left(\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}\right). \tag{4.15}$$

De modo similar nós temos

$$\frac{1}{(k^2-\lambda_1^2)} = \frac{1}{(k^2-\lambda_2^2)} + \frac{(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}{(k^2-\lambda_2^2)^2} + \frac{(\lambda_1^2-\lambda_2^2)^2}{(k^2-\lambda_2^2)^2(k^2-\lambda_1^2)}, \tag{4.16}$$

que integrando de ambos os lados, no contexto da estratégia adotada, nos leva ao resultado

$$\begin{aligned} I_{quad}(\lambda_1^2) &= I_{quad}(\lambda_2^2) + \left(\lambda_1^2-\lambda_2^2\right) I_{\log}(\lambda_2^2) \\ &+ \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right)\left\{\lambda_1^2-\lambda_2^2+\lambda_1^2\ln\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{4.17}$$

As relações acima são exemplos de propriedades que podem ser usadas nos objetos divergentes básicos a fim de converter um destes objetos divergentes, que depende de um dado parâmetro de escala, em outro que dependa de um parâmetro mais conveniente. Por esse motivo denominamos as relações (4.15) e (4.17) de *propriedades de escala dos objetos divergentes básicos*. Assim podemos concluir que mesmo sendo inserido um número arbitrário de parâmetros de escala, um para cada separação efetuada, é suficiente considerar apenas um parâmetro arbitrário para incluir as arbitrariedades associadas à escolha da escala comum no cálculo das amplitudes físicas perturbativas, já que podemos converter outros parâmetros neste escolhido usando para isso relações do tipo (4.15) e (4.17). Este parâmetro comum será identificado por λ^2. Um estudo detalhado do problema associado ao número de parâmetros arbitrário será apresentado em [16].

Com a discussão acima podemos generalizar a expressão (4.6), adotando a forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left[(k+k_i)^2-m_i\right]} &= \sum_{j=0}^{N}\frac{(-1)^j\left(k_i^2+2k_i.k+\lambda^2-m_i^2\right)^j}{(k^2-\lambda^2)^{j+1}} \\ &+\frac{(-1)^{N+1}\left(k_i^2+2k_i.k+\lambda^2-m_i^2\right)^{N+1}}{(k^2-\lambda^2)^{N+1}\left[(k+k_i)^2-m_i\right]}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Com isso os objetos básicos divergentes divergentes (4.7) - (4.11), ficarão escritos em termos do parâmetro de escala arbitrário λ^2. Teremos então

$$\begin{aligned} \Box_{\alpha\beta\mu\nu}\left(\lambda^2\right) &= \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{24k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2-\lambda^2)^4} - g_{\alpha\beta}\int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{4k_\mu k_\nu}{(k^2-\lambda^2)^3} \\ &-g_{\alpha\nu}\int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{4k_\beta k_\mu}{(k^2-\lambda^2)^3} - g_{\alpha\mu}\int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{4k_\beta k_\nu}{(k^2-\lambda^2)^3}, \end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\Delta_{\mu\nu}\left(\lambda^2\right) = \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\mu k_\nu}{\left(k^2-\lambda^2\right)^3} - \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{\left(k^2-\lambda^2\right)^2}, \tag{4.20}$$

$$\nabla_{\mu\nu}\left(\lambda^2\right) = \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2k_\mu k_\nu}{\left(k^2-\lambda^2\right)^2} - \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu}}{\left(k^2-\lambda^2\right)}, \tag{4.21}$$

$$I_{\log}\left(\lambda^2\right) = \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left(k^2-\lambda^2\right)^2} \tag{4.22}$$

e

$$I_{quad}\left(\lambda^2\right) = \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left(k^2-\lambda^2\right)}. \tag{4.23}$$

Após os comentários anteriores, vamos colocar os argumentos em termos práticos: a cada separação realizada em uma integral divergente, escrevendo-a como uma soma de termos com diferentes graus de divergência, pode ser introduzido um parâmetro arbitrário com dimensão de massa. Após o método de separação ser utilizado o número de vezes suficiente, o parâmetro de escala estará presente tanto nos termos finitos como nos termos divergentes. Uma vez que a integral original manipulada não apresenta dependência com nenhum parâmetro arbitrário, deve-se exigir que o resultado final da integral também não apresente tal tipo de dependência. Isto significa exigir que o resultado final de qualquer integral de Feynman I, satisfaça

$$\frac{\partial I}{\partial \lambda^2} = 0. \tag{4.24}$$

Que deve implicar em propriedades gerais a serem satisfeitas por um método de regularização para que este possa ser consistente.

4.5 Solução das Integrais de Feynman

Estamos agora aptos a solucionar as integrais de Feynman que apareceram no capítulo 2, e juntamente com a solução das integrais poderemos realizar uma análise em torno da ambigüidade de escala.

Na solução das funções de um ponto surgiram as integrais

$$\left[I_1; (I_1)_\mu\right] = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(1; k_\mu)}{D_1}, \tag{4.25}$$

onde lembramos a definição utilizada na compactação da notação do capítulo (3)

$$D_{ij...l} = \left[(k+k_i)^2 - m_i^2\right] ... \left[(k+k_l)^2 - m_l^2\right].$$

Já na análise das funções de dois pontos encontramos as integrais

$$\left[I_2; (I_2)_\mu; (I_2)_{\mu\nu}\right] = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(1; k_\mu; k_\mu k_\nu)}{D_{12}}, \tag{4.26}$$

Nestas integrais escolhemos os momentos internos tal que a combinação $q = k_1 - k_2$ corresponda ao momento externo (físico), ao passo que a combinação $Q = k_1 + k_2$ é ambígua (sem significado físico).

Para o cálculo das funções de três pontos encontramos as integrais

$$\left[I_3; (I_3)_\mu; (I_3)_{\mu\nu}; (I_3)_{\mu\nu\lambda}\right] = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(1; k_\mu; k_\mu k_\nu; k_\mu k_\nu k_\lambda)}{D_{123}}. \tag{4.27}$$

Nestas integrais as diferenças entre os momentos internos (arbitrários) correspondem aos momentos externos dos vértices tal que $p = (k_3 - k_1)$, $q = (k_1 - k_2)$ e $p + q = (k_3 - k_2)$. As combinações correspondentes às somas dos momentos internos serão, portanto, quantidades indefinidas ou ambíguas.

As integrais acima apresentam grau de divergência variando desde o cúbico, para o caso da integral $(I_1)_\mu$, até integrais finitas, como é o caso das integrais (I_3) e $(I_3)_\mu$. Quanto maior o grau de divergência maior a relevância da independência de escala para a consistência dos cálculos perturbativos. Por outro lado, para as integrais finitas a discussão em torno da possibilidade de ambigüidade de escala se torna completamente irrelevante pois, mesmo que as integrais venham a ser separadas por alguma identidade que permita a introdução de um parâmetro arbitrário esta dependência será naturalmente removida quando forem completadas as operações de integração.

Por conveniência, iniciaremos por solucionar a integral (I_2) definida em (4.26). O caráter logaritmicamente divergente nos leva a utilizar a identidade (4.18) tomando $N = 0$ nas expressões para ambos os propagadores. Com isso obteremos

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2-\lambda^2)^2} \\
&- \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_2^2+2k_2.k+\lambda^2-m_2^2)}{(k^2-\lambda^2)^2\left[(k+k_2)^2-m_2^2\right]} \\
&- \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2+2k_1.k+\lambda^2-m_1^2)}{(k^2-\lambda^2)^2\left[(k+k_1)^2-m_1^2\right]} \\
&+ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2+2k_1.k+\lambda^2-m_1^2)(k_2^2+2k_2.k+\lambda^2-m_2^2)}{(k^2-\lambda^2)^2\left[(k+k_1)^2-m_1^2\right]\left[(k+k_2)^2-m_2^2\right]}.
\end{aligned} \tag{4.28}
$$

Nas integrais finitas o subscrito Λ foi omitido pois, seguindo a prescrição que adotamos, tomamos o limite de conexão sobre a distribuição regularizadora. Isto não foi feito na integral divergente onde o subscrito Λ permanece na integral representando a presença implícita da regularização. As integrais finitas podem ser solucionadas usando métodos usuais de integração, mostrados nos apêndices B e C. Assim procedendo obteremos

$$
I_2 = I_{\log}\left(\lambda^2\right) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) Z_0\left(m_1^2; m_2^2, q^2; \lambda^2\right). \tag{4.29}
$$

onde utilizamos a definição (3.1) para as funções Z_k. A expressão acima reflete claramente a ligação entre as partes finita e divergente (comportamento para altas e baixas energias) de acordo com a discussão da seção anterior. A parte finita foi escrita em termos da função

$$
Z_k\left(m_1^2; m_2^2, q^2; \lambda^2\right) = \int_0^1 z^k dz \ln\left[\frac{q^2 z(1-z) + (m_1^2-m_2^2)z - m_1^2}{(-\lambda^2)}\right], \tag{4.30}
$$

onde torna-se claro que o parâmetro λ^2 realmente desempenha o papel de escala para todas quantidades físicas presentes nas partes finitas bem como para a parte divergente da integral. Para verificarmos a independência do resultado obtido com o parâmetro arbitrário λ^2 deveríamos, em princípio, providenciar a solução explícita da integral divergente. Para isto teríamos que assumir uma forma explícita de distribuição regularizadora. Ao invés disto utilizamos a independência do resultado com o parâmetro de escala para deduzir um vínculo a ser satisfeito por uma eventual regularização consistente. Impondo a independência com a escala na expressão (4.29), temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(I_2\right)}{\partial\lambda^2} &= \frac{\partial I_{\log}\left(\lambda^2\right)}{\partial\lambda^2} \\ &\quad -\left(\frac{i}{\left(4\pi\right)^2}\right)\frac{\partial}{\partial\lambda^2}\int_0^1 dz\ln\left[\frac{q^2 z\left(1-z\right)+\left(m_1^2-m_2^2\right)z-m_1^2}{\left(-\lambda^2\right)}\right], \end{aligned} \tag{4.31}$$

ou seja,

$$\frac{\partial I_{\log}\left(\lambda^2\right)}{\partial\lambda^2}=\left(\frac{i}{\left(4\pi\right)^2}\right)\left(-\frac{1}{\lambda^2}\right). \tag{4.32}$$

O resultado acima representa a primeira conseqüência importante associada às propriedades de escala como instrumento para avaliarmos a consistência de um determinado método de regularização. Para obtermos o resultado acima somente diferenciamos a parte finita. A relação obtida implica que se nós realmente calcularmos o objeto divergente, adotando alguma distribuição regularizadora explícita, o resultado então obtido deve obedecer à equação (4.32). Isto significa esquematicamente que

$$\int_\Lambda \frac{d^4k}{\left(2\pi\right)^4}\frac{1}{\left(k^2-\lambda^2\right)^2}\rightarrow\int\frac{d^4k}{\left(2\pi\right)^4}\frac{1}{\left(k^2-\lambda^2\right)^2}G_{\Lambda_i}\left(k,\Lambda_i^2\right)=f\left(\lambda^2,\Lambda_i^2\right) \tag{4.33}$$

e

$$\frac{\partial f\left(\lambda^2,\Lambda_i^2\right)}{\partial\lambda^2}=\left(\frac{i}{\left(4\pi\right)^2}\right)\left(-\frac{1}{\lambda^2}\right). \tag{4.34}$$

Se a regularização adotada não cumprir esta exigência ela pode levar a violações das propriedades de escala das amplitudes físicas, e, como veremos futuramente, concomitantemente à violações de relações de simetria. A condição acima deve ser vista como uma condição necessária para que uma regularização tenha a chance de ser consistente.

Seguindo uma seqüência conveniente para nossos propósitos, consideremos agora o tratamento da integral I_1 definida em (4.25). A contagem das potências de k no numerador e no denominador revela que esta integral apresenta um grau de divergência quadrático. Utilizando a identidade (4.18) para $N=2$ na expressão do propagador teremos inicialmente

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2-\lambda^2)} \\
&- \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2+2k_1.k+\lambda^2-m_1^2)}{(k^2-\lambda^2)^2} \\
&+ \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2+2k_1.k+\lambda^2-m_1^2)^2}{(k^2-\lambda^2)^3} \\
&- \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2+2k_1.k+\lambda^2-m_1^2)^3}{(k^2-\lambda^2)^3 \left[(k+k_1)^2-m_1^2\right]}. \qquad (4.35)
\end{aligned}
$$

Reorganizando esta expressão, retirando termos ímpares, devido ao caráter par da distribuição regularizadora implícita, e o subscrito Λ nas integrais finitas, podemos escreve-la na forma

$$
\begin{aligned}
(I_1) &= \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2-\lambda^2)} - \left(\lambda^2-m_1^2\right) \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2-\lambda^2)^2} \\
&- k_1^\alpha k_1^\beta \left[\int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g_{\alpha\beta}}{(k^2-\lambda^2)^2} - \int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4k_\alpha k_\beta}{(k^2-\lambda^2)^3}\right] \\
&+ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2+\lambda^2-m_1^2)^2}{(k^2-\lambda^2)^3} \\
&- \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k_1^2+2k_1.k+\lambda^2-m_1^2)^3}{(k^2-\lambda^2)^3 \left[(k+k_1)^2-m_1^2\right]}. \qquad (4.36)
\end{aligned}
$$

Nós então integramos os dois últimos termos, usando os métodos usuais de integração, e identificamos as estruturas divergentes (4.20), (4.22) e (4.23) para obtermos

$$
\begin{aligned}
(I_1) &= I_{quad}\left(\lambda^2\right) - \left(\lambda^2-m_1^2\right) I_{\log}\left(\lambda^2\right) + k_1^\alpha k_1^\beta \Delta_{\alpha\beta}\left(\lambda^2\right) \\
&+ \left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right] \left\{ m_1^2 - \lambda^2 + m_1^2 \ln\left[\frac{\lambda^2}{m_1^2}\right] \right\}. \qquad (4.37)
\end{aligned}
$$

Destacamos aqui que, como prometido, as integrais divergentes novamente não foram modificadas, sendo possível um mapeamento do resultado acima para a integral I_1, assim como em quaisquer integrais consideradas, naqueles obtidos com a utilização de algum método de regularização usual. O procedimento necessário para tal, é a avaliação dos objetos divergentes à luz do método com o qual se deseja construir o mapeamento.

Um aspecto interessante do resultado acima é a expressão correspondente a $k_1 = 0$. O lado esquerdo fica

$$(I_1)_{k_1=0} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - m_1^2]} = I_{quad}\left(m_1^2\right). \tag{4.38}$$

Por sua vez para o lado direito teremos

$$\begin{aligned} I_{quad}\left(m_1^2\right) &= I_{quad}\left(\lambda^2\right) - \left(\lambda^2 - m_1^2\right) I_{\log}\left(\lambda^2\right) \\ &+ \left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right] \left\{ m_1^2 - \lambda^2 + m_1^2 \ln\left[\frac{\lambda^2}{m_1^2}\right]\right\}. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Esta expressão nada mais é do que uma relação de conversão de escala, equação (4.17), como deveria ser. Esta relação nos fornece a oportunidade adequada para investigar as conseqüências da imposição da independência do resultado em relação ao parâmetro arbitrário de escala. Novamente ressaltamos que, a rigor esta verificação necessitaria da avaliação explícita das integrais divergentes envolvidas. Nós entretanto, podemos utilizar tal exigência para obter mais um vínculo a ser imposto sobre as regularizações com vistas à consistência. Para tal, derivamos ambos os lados da expressão imediatamente acima em relação ao parâmetro arbitrário λ^2:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{quad}\left(m_1^2\right)}{\partial \lambda^2} &= \frac{\partial I_{quad}\left(\lambda^2\right)}{\partial \lambda^2} - \frac{\partial}{\partial \lambda^2}\left\{\left(\lambda^2 - m_1^2\right) I_{\log}\left(\lambda^2\right)\right\} \\ &+ \left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right] \frac{\partial}{\partial \lambda^2} \left\{ m_1^2 - \lambda^2 + m_1^2 \ln\left[\frac{\lambda^2}{m_1^2}\right]\right\} \end{aligned} \tag{4.40}$$

e obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{quad}\left(\lambda^2\right)}{\partial \lambda^2} &= I_{\log}\left(\lambda^2\right) + \left(\lambda^2 - m_1^2\right) \frac{\partial I_{\log}\left(\lambda^2\right)}{\partial \lambda^2} \\ &+ \left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right] \left(\lambda^2 - m_1^2\right) \frac{1}{\lambda^2}. \end{aligned} \tag{4.41}$$

Usando a condição (4.32) obteremos

$$\frac{\partial I_{quad}\left(\lambda^2\right)}{\partial \lambda^2} = I_{\log}\left(\lambda^2\right). \tag{4.42}$$

Notamos novamente que não foram diferenciadas integrais divergentes para se obter a expressão acima, mas somente os termos finitos. O resultado estabelece implicações sobre as regularizações, que podemos representar esquematicamente como

$$\int_\Lambda \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left(k^2 - \lambda^2\right)^2} \to \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left(k^2 - \lambda^2\right)^2} G_{\Lambda_i}\left(k, \Lambda_i^2\right) = g\left(\lambda^2, \Lambda_i^2\right) \tag{4.43}$$

e

$$\frac{\partial g\left(\lambda^{2},\Lambda_{i}^{2}\right)}{\partial\lambda^{2}}=f\left(\lambda^{2},\Lambda_{i}^{2}\right), \tag{4.44}$$

onde $f\left(\lambda^{2},\Lambda_{i}^{2}\right)$ deve ser a mesma função que aparece em (4.33) - (4.34). Esta relação representa, como dissemos, uma condição adicional àquela (4.34) que deve ser imposta a uma eventual regularização com vistas à consistência.

Uma última observação nesta seção é interessante. No contexto do procedimento que adotamos, as técnicas de regularização não têm implicações diretas na determinação das amplitudes perturbativas. Estes métodos seriam somente necessários se quiséssemos obter formas explícitas para os objetos divergentes, que nada mais seriam do que parametrizações destes objetos em termos do conjunto de parâmetros Λ_{i}^{2} característicos de alguma distribuição regularizadora. Tais parametrizações, porém, podem ser fortemente restringidas pela exigência da independência de escala, pois estas, como vimos, devem satisfazer as condições (4.32) e (4.42). A satisfação destas condições nos conduzem a formas gerais para tais parametrizações consistentes que são

$$I_{\log}\left(\lambda^{2},\Lambda^{2}\right)=\left[\frac{i}{(4\pi)^{2}}\right]\left\{\ln\left(\frac{\Lambda^{2}}{\lambda^{2}}\right)+\beta_{0}\right\}, \tag{4.45}$$

$$I_{quad}\left(\lambda^{2},\Lambda^{2}\right)=\left[\frac{i}{(4\pi)^{2}}\right]\left\{-\Lambda^{2}+\lambda^{2}-\lambda^{2}\ln\left(\frac{\lambda^{2}}{\Lambda^{2}}\right)+\beta_{0}\lambda^{2}+\delta_{0}\right\}. \tag{4.46}$$

Deste modo a liberdade disponível para os métodos de regularização reside apenas nas constantes β_0 e δ_0 (ambas independentes de Λ^2 e λ^2). Dito de outro modo, se uma regularização não produzir as formas gerais acima para os objetos básicos divergentes, ela deve ser descartada pois levará à violação das propriedades de escala das amplitudes e, é claro, à violações de relações de simetria.

As integrais $(I_1)_\mu$, $(I_2)_\mu$ e $(I_2)_{\mu\nu}$ são resolvidas do mesmo modo como solucionamos as integrais I_1 e I_2. Ou seja, utilizamos a propriedade (4.18) adequadamente e em seguida, após eliminarmos os termos ímpares, solucionamos as integrais finitas. Por fim escrevemos a parte divergente em termos das cincos estruturas divergentes básicas (4.19) - (4.23). Com isso encontraremos as seguintes expressões

$$
\begin{aligned}
(I_1)_\mu \;=\; & -k_{1\mu}\left\{I_{quad}\left(\lambda^2\right)-\left(\lambda^2-m_1^2\right)I_{\log}\left(\lambda^2\right)-\left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right)\left[\lambda^2-m_1^2+m_1^2\ln\left(\frac{m_1^2}{\lambda^2}\right)\right]\right\} \\
& -k_1^\alpha\left[\nabla_{\alpha\mu}\left(\lambda^2\right)\right]-\frac{1}{3}k_1^\alpha k_1^\beta k_1^\nu\left[\Box_{\alpha\beta\mu\nu}\left(\lambda^2\right)\right] \\
& -\frac{2}{3}k_1^2 k_1^\nu\left[\Delta_{\mu\nu}\left(\lambda^2\right)\right]-\frac{1}{3}k_{1\mu}k_1^\beta k_1^\nu\left[\Delta_{\nu\beta}\left(\lambda^2\right)\right] \\
& +\left(k_1^2+\lambda^2-m_1^2\right)k_1^\alpha\left[\Delta_{\mu\alpha}\left(\lambda^2\right)\right],
\end{aligned}
\tag{4.47}
$$

$$
\begin{aligned}
(I_2)_\mu \;=\; & -\frac{1}{2}Q^\alpha\left[\Delta_{\mu\alpha}\left(\lambda^2\right)\right]-\frac{1}{2}Q_\mu I_{\log}\left(\lambda^2\right) \\
& -\left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right]\left\{q_\mu\left[Z_1\left(m_1^2;m_2^2;q^2;\lambda^2\right)-\frac{Z_0\left(m_1^2;m_2^2;q^2;\lambda^2\right)}{2}\right]\right. \\
& \left.-Q_\mu\frac{Z_0\left(m_1^2;m_2^2;q^2;\lambda^2\right)}{2}\right\}
\end{aligned}
\tag{4.48}
$$

e

$$
\begin{aligned}
(I_2)_{\mu\nu} \;=\; & \frac{1}{2}\nabla_{\mu\nu}\left(\lambda^2\right) \\
& +\frac{g_{\mu\nu}}{4}\left\{I_{quad}\left(\lambda^2\right)-\left(\lambda^2-m_2^2\right)I_{\log}\left(\lambda^2\right)-\left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right)\left[\lambda^2-m_1^2-m_1^2\ln\left(\frac{\lambda^2}{m_2^2}\right)\right]\right\} \\
& +\frac{g_{\mu\nu}}{4}\left\{I_{quad}\left(\lambda^2\right)-\left(\lambda^2-m_1^2\right)I_{\log}\left(\lambda^2\right)-\left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right)\left[\lambda^2-m_2^2-m_2^2\ln\left(\frac{\lambda^2}{m_2^2}\right)\right]\right\} \\
& -\frac{g_{\mu\nu}}{4}\left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right)\left[m_1^2-m_2^2+m_1^2\ln\left(\frac{\lambda^2}{m_2^2}\right)-m_2^2\ln\left(\frac{\lambda^2}{m_2^2}\right)\right] \\
& +\frac{Q_\nu Q_\mu}{4}I_{\log}\left(\lambda^2\right)+\frac{\left[q_\nu q_\mu-g_{\mu\nu}q^2\right]}{12}I_{\log}\left(\lambda^2\right) \\
& -\frac{1}{4}\left[\left(\frac{Q^2+q^2}{4}+\lambda^2-m_2^2\right)+\left(\frac{Q^2+q^2}{4}+\lambda^2-m_1^2\right)\right]\Delta_{\mu\nu}\left(\lambda^2\right) \\
& +\frac{1}{24}\left[3Q^\alpha Q^\beta-Q^\alpha q^\beta+q^\alpha Q^\beta+q^\alpha q^\beta\right]\left\{\left[\Box_{\alpha\beta\mu\nu}\left(\lambda^2\right)+g_{\alpha\beta}\Delta_{\mu\nu}\left(\lambda^2\right)\right]\right. \\
& \left.+g_{\alpha\nu}\Delta_{\beta\mu}\left(\lambda^2\right)+g_{\alpha\mu}\Delta_{\beta\nu}\left(\lambda^2\right)\right\} \\
& +\left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right]\left\{\frac{q_\mu q_\nu}{4}\left[2Z_1\left(q^2;m_1^2;m_2^2;\lambda^2\right)-Z_0\left(q^2;m_1^2;m_2^2;\lambda^2\right)\right]\right. \\
& -\left(\frac{q_\mu q_\nu-g_{\mu\nu}q^2}{2}\right)\left[2Z_2\left(m_1^2;m_2^2;q^2;\lambda^2\right)-Z_1\left(m_1^2;m_2^2;q^2;\lambda^2\right)\right] \\
& +\left(\frac{q_\mu Q_\nu+q_\nu Q_\mu}{4}\right)\left[2Z_1\left(m_1^2;m_2^2;q^2;\lambda^2\right)-Z_0\left(m_1^2;m_2^2;q^2;\lambda^2\right)\right] \\
& \left.-\frac{Q_\mu Q_\nu}{4}Z_0\left(m_1^2;m_2^2;q^2;\lambda^2\right)-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left(m_1^2-m_2^2\right)Z_1\left(m_1^2;m_2^2;q^2;\lambda^2\right)\right\}
\end{aligned}
\tag{4.49}
$$

Para completar o conjunto de integrais de Feynman que necessitamos solucionar, restanos ainda considerar as integrais de Feynman que contém três propagadores. Neste caso, duas das integrais são finitas e podem ser resolvidas diretamente sem qualquer manipulação. Os resultados podem ser escritos em termos das funções $\xi's$ e $\eta's$ definidas no capítulo anterior. Primeiramente, para a integral I_3 teremos

$$I_3 = \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \xi_{00}. \tag{4.50}$$

Por sua vez para a integral $(I_3)_\mu$

$$(I_3)_\mu = (I_3)_\mu^{SH} + k_{1\mu} I_3, \tag{4.51}$$

onde definimos

$$(I_3)_\mu^{SH} = \left[\frac{i}{(4\pi)^2} \right] \{ q_\mu \xi_{01} - p_\mu \xi_{10} \}. \tag{4.52}$$

Agora consideramos o desenvolvimento da integral logaritmicamente divergente $(I_3)_{\mu\nu}$. Seguindo a estratégia que adotamos primeiro reescrevemos a integral como

$$\begin{aligned} (I_3)_{\mu\nu} &= \frac{1}{4}\Delta_{\mu\nu} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} I_{\log}\left(\lambda^2\right) \\ &- \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu \left(k_3^2 + 2k_3.k + \lambda^2 - m_3^2\right)}{\left(k^2-\lambda^2\right)^3 D_3} \\ &- \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu \left(k_2^2 + 2k_2.k + \lambda^2 - m_2^2\right)}{\left(k^2-\lambda^2\right)^2 D_{23}} \\ &- \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu \left(k_1^2 + 2k_1.k + \lambda^2 - m_1^2\right)}{\left(k^2-\lambda^2\right) D_{123}}. \end{aligned} \tag{4.53}$$

Solucionando as integrais finitas e usando a sistematização do capítulo 3 obteremos

$$\begin{aligned} (I_3)_{\mu\nu} &= \frac{1}{4}\Delta_{\mu\nu}\left(\lambda^2\right) + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} I_{\log}\left(\lambda^2\right) + (I_3)_{\mu\nu}^{SH} \\ &-k_{1\nu} (I_3)_\mu^{SH} - k_{1\mu} (I_3)_\nu^{SH} + k_{1\mu} k_{1\nu} I_3, \end{aligned} \tag{4.54}$$

onde definimos

$$\begin{aligned} (I_3)_{\mu\nu}^{SH} &= \left(\frac{i}{(4\pi)^2} \right) \Big\{ -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \eta_{00} \\ &\qquad + q_\mu q_\nu \xi_{02} + p_\mu p_\nu \xi_{20} \\ &\qquad - \left(q_\mu p_\nu + p_\mu q_\nu\right) \xi_{11} \Big\}. \end{aligned} \tag{4.55}$$

De modo análogo encontramos

$$
\begin{aligned}
(I_3)_{\mu\nu\lambda} = & -\frac{1}{12}\left(k_1^\alpha + k_3^\alpha + k_2^\alpha\right)\square_{\lambda\alpha\mu\nu}\left(\lambda^2\right) \\
& -\frac{1}{12}\left(k_1 + k_2 + k_3\right)_\lambda \Delta_{\mu\nu}\left(\lambda^2\right) \\
& -\frac{1}{12}\left(k_1 + k_2 + k_3\right)_\mu \Delta_{\lambda\nu}\left(\lambda^2\right) \\
& -\frac{1}{12}\left(k_1 + k_2 + k_3\right)_\nu \Delta_{\lambda\mu}\left(\lambda^2\right) \\
& -\frac{1}{12}\left(k_1 + k_2 + k_3\right)_\lambda g_{\mu\nu} I_{\log}\left(\lambda^2\right) \\
& -\frac{1}{12}\left(k_1 + k_2 + k_3\right)_\mu g_{\lambda\nu} I_{\log}\left(\lambda^2\right) \\
& -\frac{1}{12}\left(k_1 + k_2 + k_3\right)_\nu g_{\lambda\mu} I_{\log}\left(\lambda^2\right) \\
& + (I_3)^{SH}_{\mu\nu\lambda} \\
& - k_{1\nu}(I_3)^{SH}_{\mu\lambda} - k_{1\mu}(I_3)^{SH}_{\nu\lambda} - k_{1\lambda}(I_3)^{SH}_{\mu\nu} \\
& + k_{1\nu}k_{1\lambda}(I_3)^{SH}_{\mu} + k_{1\mu}k_{1\nu}(I_3)^{SH}_{\lambda} + k_{1\mu}k_{1\lambda}(I_3)^{SH}_{v} \\
& - k_{1\mu}k_{1\nu}k_{1\lambda}(I_3)^{SH}, \qquad (4.56)
\end{aligned}
$$

onde introduzimos a definição

$$
\begin{aligned}
(I_3)^{SH}_{\mu\nu\lambda} = & \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right)\Big\{ q_\mu q_\nu q_\lambda \xi_{03} - p_\mu p_\nu p_\lambda \xi_{30} \\
& - \left[p_\mu q_\nu q_\lambda + p_\nu q_\mu q_\lambda + p_\lambda q_\mu q_\nu\right]\xi_{12} \\
& + \left[q_\mu p_\nu p_\lambda + q_\nu p_\mu p_\lambda + q_\lambda p_\mu p_\nu\right]\xi_{21} \\
& - \frac{1}{2}\left[q_\mu g_{\nu\lambda} + q_\nu g_{\mu\lambda} + q_\lambda g_{\mu\nu}\right]\eta_{01} \\
& + \frac{1}{2}\left[p_\mu g_{\nu\lambda} + p_\nu g_{\mu\lambda} + p_\lambda g_{\mu\nu}\right]\eta_{10}\Big\}. \qquad (4.57)
\end{aligned}
$$

Com estes resultados poderemos explicitar a solução para as funções de um, dois e três pontos estabelecidas no capítulo 2 que é o que faremos no próximo capítulo.

Capítulo 5

Forma explícita das Funções de Green

5.1 Introdução

Uma vez que escrevemos as funções de Green de um, dois e três pontos em termos de um pequeno conjunto de integrais de Feynman, solucionamos as integrais deste conjunto bem como abordamos toda a classe de problemas existentes na solução das mesmas, estamos agora aptos a determinar a forma final destas funções de Green. As formas finais destas funções serão escritas em termos de um pequeno número de estruturas. A parte finita será escrita em termos das funções $Z's$, $\xi's$ e $\eta's$, que por sua vez podem ser reduzidas para as funções Z_0 e ξ_{00}. Já a parte divergente aparecerá em termos dos cinco objetos divergentes básicos (4.19) - (4.23). Tanto a sistematização da parte finita como a organização da parte divergente das integrais de Feynman serão fundamentais para que a investigação das possíveis ambigüidades bem como a identificação de termos potencialmente violadores de simetria seja a mais clara possível.

O objetivo deste capítulo está em, finalmente, determinar as soluções da amplitudes físicas de interesse. A verificação das relações entre funções de Green bem como das relações de simetria e das ambigüidades será realizada nos próximos capítulos.

5.2 Funções de Green de um ponto

Afim de determinarmos a solução explícita da função de um ponto escalar tomamos $\Gamma_i = \hat{I}$ na expressão (2.17) e obtemos

$$T^S(m_1, k_1) = 4m_1(I_1).$$

Substituindo a integral de Feynman (I_1) pelo resultado dado pela expressão (4.37) encontraremos

$$\begin{aligned} T^S(m_1, k_1) &= 4m_1 \Big\{ I_{quad}(\lambda^2) - (\lambda^2 - m_1^2) I_{\log}(\lambda^2) \\ &\quad + \left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right] \left[m_1^2 - \lambda^2 + m_1^2 \ln\left(\frac{\lambda^2}{m_1^2}\right)\right] \Big\} \\ &\quad + 4m_1 \left[k_1^\alpha k_1^\beta \Delta_{\alpha\beta}(\lambda^2)\right]. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Já para a função de um ponto vetorial fazemos $\Gamma_i = \gamma_\mu$ em (2.17) e teremos

$$T_\mu^V(m_1, k_1) = 4(I_1)_\mu + 4k_{1\mu}(I_1). \tag{5.2}$$

Substituindo o resultado das integrais $(I_1)_\mu$ e (I_1) dados pelas expressões (4.47) e (4.37) obtemos

$$\begin{aligned} T_\mu^V(m_1, k_1) &= 4\Big\{ -\frac{1}{3} k_1^\alpha k_1^\beta k_1^\nu \Box_{\alpha\beta\mu\nu}(\lambda^2) - k_1^\alpha \nabla_{\alpha\mu}(\lambda^2) + \frac{1}{3} k_1^2 k_1^\nu \Delta_{\mu\nu}(\lambda^2) \\ &\quad + \frac{2}{3} k_{1\mu} k_1^\beta k_1^\nu \Delta_{\nu\beta}(\lambda^2) + (\lambda^2 - m_1^2) k_1^\alpha \Delta_{\mu\alpha}(\lambda^2) \Big\}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Já para as amplitudes de um ponto T^P e T_μ^A subsituimos respectivamente $\Gamma_i = \gamma_5$ e $\Gamma_i = \gamma_\mu\gamma_5$ na expressão (2.17). Ao susbtituirmos os resultados dos traços envolvidos vemos que estas amplitudes são identicamente nulas.

Notemos que nas duas amplitudes de um ponto não nulas estão presentes termos cujos coeficientes são ambíguos com relação a rotulação do momento interno do loop. Voltaremos a este ponto nos próximos capítulos.

5.3 Funções de Green de dois pontos

Vamos agora determinar a solução explícita das funções de Green de dois pontos. Iniciamos com a função T^{SS} para a qual devemos fazer $\Gamma_i = \Gamma_j = \hat{I}$ na expressão (2.21). Após substituirmos o valor dos traços, a função T^{SS} toma a forma

$$\begin{aligned} T^{SS}\left(m_1, k_1; m_2, k_2\right) &= 2I_1\left(m_1, k_1\right) + 2I_1\left(m_2, k_2\right) \\ &\quad +2\left[\left(m_1+m_2\right)^2 - q^2\right] I_2\left(m_1, k_1; m_2, k_2\right). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Substituindo os resultados (4.37) e (4.29) encontraremos

$$\begin{aligned} T^{SS} &= \left(q^\alpha q^\beta + Q^\alpha Q^\beta\right)\Delta_{\alpha\beta}\left(\lambda^2\right) \\ &\quad +2\left\{I_{quad}\left(\lambda^2\right) - \left(\lambda^2 - m_1^2\right) I_{\log}\left(\lambda^2\right) + \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right)\left[m_1^2 - \lambda^2 + m_1^2 \ln\left(\frac{\lambda^2}{m_1^2}\right)\right]\right\} \\ &\quad +2\left\{I_{quad}\left(\lambda^2\right) - \left(\lambda^2 - m_2^2\right) I_{\log}\left(\lambda^2\right) + \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right)\left[m_2^2 - \lambda^2 + m_2^2 \ln\left(\frac{\lambda^2}{m_2^2}\right)\right]\right\} \\ &\quad +2\left[\left(m_1+m_2\right)^2 - q^2\right]\left\{I_{\log}\left(\lambda^2\right) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) Z_0\left(m_1^2; m_2^2, q^2; \lambda^2\right)\right\}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Na expressão acima omitimos o argumento da função de dois pontos por simplicidade, o que faremos também naquelas consideradas a seguir. Também, para simplificar a notação, omitiremos a partir deste ponto os argumentos das funções Z_k enquanto estivermos considerando apenas funções de dois pontos. Lembramos ainda que nas funções de dois pontos definimos $q = k_1 - k_2$ e $Q = k_1 + k_2$.

Por sua vez, para a função T^{PP} fazemos $\Gamma_i = \Gamma_j = \gamma_5$ em (2.21) e após a substituição do valor dos traços encontraremos

$$\begin{aligned} T^{PP} &= -2I_1\left(m_2, k_2\right) - 2I_1\left(m_1, k_1\right) \\ &\quad -2\left[\left(m_1-m_2\right)^2 - q^2\right] I_2. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Em seguida, substituindo os resultados para as integrais envolvidas, teremos

$$
\begin{aligned}
T^{PP} &= -\left(q^{\alpha}q^{\beta}+Q^{\alpha}Q^{\beta}\right)\Delta_{\alpha\beta}\left(\lambda^{2}\right) \\
&-2\left\{I_{quad}\left(\lambda^{2}\right)-\left(\lambda^{2}-m_{1}^{2}\right)I_{\log}\left(\lambda^{2}\right)+\left[\frac{i}{(4\pi)^{2}}\right]\left[m_{1}^{2}-\lambda^{2}+m_{1}^{2}\ln\left(\frac{\lambda^{2}}{m_{1}^{2}}\right)\right]\right\} \\
&-2\left\{I_{quad}\left(\lambda^{2}\right)-\left(\lambda^{2}-m_{2}^{2}\right)I_{\log}\left(\lambda^{2}\right)+\left[\frac{i}{(4\pi)^{2}}\right]\left[m_{2}^{2}-\lambda^{2}+m_{2}^{2}\ln\left(\frac{\lambda^{2}}{m_{2}^{2}}\right)\right]\right\} \\
&-2\left[(m_{1}-m_{2})^{2}-q^{2}\right]\left\{I_{\log}\left(\lambda^{2}\right)-\left[\frac{i}{(4\pi)^{2}}\right]Z_{0}\right\}. \qquad (5.7)
\end{aligned}
$$

Prosseguindo, consideramos agora as funções com um índice vetorial de Lorentz. Principiamos pela a função T_{μ}^{AP}, para qual, após fazermos $\Gamma_{i}=\gamma_{\mu}\gamma_{5}$ e $\Gamma_{j}=\gamma_{5}$, encontramos

$$
\begin{aligned}
T_{\mu}^{AP} &= 4\left(m_{1}-m_{2}\right)\left(I_{2}\right)_{\mu} \\
&-4\left(m_{2}k_{1\mu}-m_{1}k_{2\mu}\right)I_{2}, \qquad (5.8)
\end{aligned}
$$

logo

$$
\begin{aligned}
T_{\mu}^{AP} &= -2\left(m_{1}-m_{2}\right)\left(\frac{i}{(4\pi)^{2}}\right)q_{\mu}\left[2Z_{1}-Z_{0}\right] \\
&-2\left(m_{1}-m_{2}\right)Q^{\alpha}\Delta_{\alpha\mu}\left(\lambda^{2}\right) \\
&-2\left(m_{2}+m_{1}\right)q_{\mu}\left\{I_{\log}\left(\lambda^{2}\right)-\left(\frac{i}{(4\pi)^{2}}\right)Z_{0}\right\}. \qquad (5.9)
\end{aligned}
$$

Para a função T_{μ}^{VS} encontramos primeiro a expressão

$$
\begin{aligned}
T_{\mu}^{VS} &= 4\left(m_{2}+m_{1}\right)\left(I_{2}\right)_{\mu} \\
&+4\left(m_{2}k_{1\mu}+m_{1}k_{2\mu}\right)\left(I_{2}\right)_{\mu} \qquad (5.10)
\end{aligned}
$$

e assim

$$
\begin{aligned}
T_{\mu}^{VS} &= -2\left(m_{2}+m_{1}\right)\left(\frac{i}{(4\pi)^{2}}\right)q_{\mu}\left[2Z_{1}-Z_{0}\right] \\
&-2\left(m_{2}+m_{1}\right)Q^{\alpha}\Delta_{\alpha\mu}\left(\lambda^{2}\right) \\
&+2\left(m_{2}-m_{1}\right)q_{\mu}\left\{I_{\log}\left(\lambda^{2}\right)-\left(\frac{i}{(4\pi)^{2}}\right)Z_{0}\right\}. \qquad (5.11)
\end{aligned}
$$

Por fim passamos a considerar aquelas com dois índices vetoriais de Lorentz. Nestes casos a decomposição tensorial destas funções permite a identificação de subestrutruras proporcionais ao tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Estas subestruturas nada mais são do que funções de Green de dois pontos escalares.

A função $T_{\mu\nu}^{VV}$ pode ser colocada na forma

$$T_{\mu\nu}^{VV} = T_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} T^{PP}. \tag{5.12}$$

Onde o tensor $T_{\mu\nu}$ é definido como

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= 8 \left(I_2\right)_{\mu\nu} \\ &+4 \left(k_2 + k_1\right)_{\nu} \left(I_2\right)_{\mu} + 4 \left(k_1 + k_2\right)_{\mu} \left(I_2\right)_{\nu} \\ &+4 \left(k_{1\mu} k_{2\nu} + k_{1\nu} k_{2\mu}\right) I_2. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Substituindo os resultados das integrais envolvidas, previamente tratadas, podemos colocar o tensor $T_{\mu\nu}$ na forma

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \frac{4}{3} \left[g_{\mu\nu} q^2 - q_{\nu} q_{\mu}\right] I_{\log}\left(\lambda^2\right) \\ &-4 \left[q_{\mu} q_{\nu} - g_{\mu\nu} q^2\right] \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) \left[2Z_2 - Z_1\right] \\ &-2 g_{\mu\nu} \left(m_1 - m_2\right)^2 \left\{ I_{\log}\left(\lambda^2\right) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) Z_0 \right\} \\ &-2 g_{\mu\nu} \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) \left\{ m_1^2 - m_2^2 + m_1^2 \ln\left(\frac{\lambda^2}{m_2^2}\right) - m_2^2 \ln\left(\frac{\lambda^2}{m_2^2}\right) + q^2 Z_0 \right\} \\ &+4 q_{\mu} q_{\nu} \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) Z_1 \\ &-4 g_{\mu\nu} \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) \left(m_1^2 - m_2^2\right) Z_1 \\ &-g_{\mu\nu} T^{PP} + A_{\mu\nu}\left(\lambda^2\right), \end{aligned} \tag{5.14}$$

onde definimos a quantidade puramente divergente

$$\begin{aligned} A_{\mu\nu}\left(\lambda^2\right) &= 4 \nabla_{\mu\nu}\left(\lambda^2\right) \\ &+\frac{1}{3} \left[3 Q^{\alpha} Q^{\beta} + q^{\alpha} q^{\beta}\right] \Big\{ \Box_{\alpha\beta\mu\nu}\left(\lambda^2\right) + g_{\alpha\beta} \Delta_{\mu\nu}\left(\lambda^2\right) \\ &\qquad + \; g_{\alpha\nu} \Delta_{\beta\mu}\left(\lambda^2\right) + g_{\alpha\mu} \Delta_{\beta\nu}\left(\lambda^2\right) \Big\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{3}\left[q^{\alpha}Q^{\beta}-Q^{\alpha}q^{\beta}\right]\Big\{\square_{\alpha\beta\mu\nu}\left(\lambda^{2}\right)+g_{\alpha\beta}\Delta_{\mu\nu}\left(\lambda^{2}\right)\\
&\qquad\qquad+\ g_{\alpha\nu}\Delta_{\beta\mu}\left(\lambda^{2}\right)+g_{\alpha\mu}\Delta_{\beta\nu}\left(\lambda^{2}\right)\Big\}\\
&-\left(Q^{\alpha}Q^{\beta}+q^{\alpha}q^{\beta}\right)g_{\mu\nu}\Delta_{\alpha\beta}\left(\lambda^{2}\right)\\
&-2\left[\left(\lambda^{2}-m_{2}^{2}\right)+\left(\lambda^{2}-m_{1}^{2}\right)\right]\Delta_{\mu\nu}\left(\lambda^{2}\right)\\
&-Q^{\alpha}Q^{\beta}g_{\alpha\beta}\Delta_{\mu\nu}\left(\lambda^{2}\right)-q^{\alpha}q^{\beta}g_{\alpha\beta}\Delta_{\mu\nu}\left(\lambda^{2}\right)\\
&-2Q_{\mu}Q^{\alpha}\Delta_{\alpha v}\left(\lambda^{2}\right)-2Q_{\nu}Q^{\alpha}\Delta_{\alpha\mu}\left(\lambda^{2}\right). \qquad (5.15)
\end{aligned}
$$

Deste modo a função de Green bi-vetorial tem como solução

$$
\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{VV} &= \frac{4}{3}\left[g_{\mu\nu}q^{2}-q_{\nu}q_{\mu}\right]I_{\log}\left(\lambda^{2}\right)\\
&-4\left[q_{\mu}q_{\nu}-g_{\mu\nu}q^{2}\right]\left(\frac{i}{(4\pi)^{2}}\right)\left[2Z_{2}-Z_{1}\right]\\
&+4q_{\mu}q_{\nu}\left(\frac{i}{(4\pi)^{2}}\right)Z_{1}\\
&-2g_{\mu\nu}\left(\frac{i}{(4\pi)^{2}}\right)\left\{m_{1}^{2}-m_{2}^{2}+m_{1}^{2}\ln\left(\frac{\lambda^{2}}{m_{2}^{2}}\right)-m_{2}^{2}\ln\left(\frac{\lambda^{2}}{m_{2}^{2}}\right)+q^{2}Z_{0}\right\}\\
&-2g_{\mu\nu}\left(m_{1}-m_{2}\right)^{2}\left\{I_{\log}\left(\lambda^{2}\right)-\left(\frac{i}{(4\pi)^{2}}\right)Z_{0}\right\}\\
&-4g_{\mu\nu}\left(\frac{i}{(4\pi)^{2}}\right)\left(m_{1}^{2}-m_{2}^{2}\right)Z_{1}\\
&+A_{\mu\nu}\left(\lambda^{2}\right). \qquad (5.16)
\end{aligned}
$$

A mesma estratégia pode ser utilizada para a determinação da função $T_{\mu\nu}^{AA}$. Inicialmente identificamos a reorganização

$$
T_{\mu\nu}^{AA}=T_{\mu\nu}-g_{\mu\nu}T^{SS}. \qquad (5.17)
$$

Então ficaremos com

$$
\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{AA} &= \frac{4}{3}\left[g_{\mu\nu}q^{2}-q_{\nu}q_{\mu}\right]I_{\log}\left(\lambda^{2}\right)\\
&-4\left[q_{\mu}q_{\nu}-g_{\mu\nu}q^{2}\right]\left(\frac{i}{(4\pi)^{2}}\right)\left[2Z_{2}-Z_{1}\right]\\
&+4q_{\mu}q_{\nu}\left(\frac{i}{(4\pi)^{2}}\right)Z_{1}\\
&-2g_{\mu\nu}\left(\frac{i}{(4\pi)^{2}}\right)\left\{m_{1}^{2}-m_{2}^{2}+m_{1}^{2}\ln\left(\frac{\lambda^{2}}{m_{2}^{2}}\right)-m_{2}^{2}\ln\left(\frac{\lambda^{2}}{m_{2}^{2}}\right)+q^{2}Z_{0}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-2g_{\mu\nu}\left(m_1+m_2\right)^2\left\{I_{\log}\left(\lambda^2\right)-\left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right)Z_0\right\} \\
&-4g_{\mu\nu}\left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right)\left(m_1^2-m_2^2\right)Z_1 \\
&+A_{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{5.18}
$$

É interessante chamar a atenção que em todas as funções de Green de dois pontos acima os objetos $\Box_{\alpha\beta\mu\nu}\left(\lambda^2\right)$ e $\Delta_{\mu\nu}\left(\lambda^2\right)$ aparecem multiplicados por combinações ambíguas das rotulações arbitrárias dos momentos internos e que na parte finita das funções estas combinações não se fazem presentes. Retornaremos a este ponto em breve.

5.4 Funções de Green de três pontos

Após determinarmos a solução explícita das funções de um e dois pontos passamos a considerar as funções de Green de três pontos. Primeiramente registramos que a multiplicidade de objetos para este caso é bastante grande. Isto torna proibitivo considerar explicitamente todos os elementos. Devido a isto escolhemos um conjunto menor, porém significativo, para explicitar aquelas que serão mais úteis para nossos propósitos futuros.

Começamos por explicitar as funções escalares. Para a função T^{SSS} encontramos

$$
\begin{aligned}
T^{SSS} &= +2\left(m_1+m_3\right)I_2\left(m_1,k_1;m_3,k_3\right) \\
&\quad +2\left(m_1+m_2\right)I_2\left(m_1,k_1;m_2,k_2\right) \\
&\quad +2\left(m_3+m_2\right)I_2\left(m_2,k_2;m_3,k_3\right) \\
&\quad +2\left\{\left[\left(m_2+m_3\right)^2-\left(k_3-k_2\right)^2\right]m_1+\left[\left(m_1-m_2\right)^2-\left(k_1-k_2\right)^2\right]m_3\right. \\
&\qquad \left.+\left[\left(m_1+m_3\right)^2-\left(k_3-k_1\right)^2\right]m_2\right\}I_3,
\end{aligned} \tag{5.19}
$$

onde apenas fizemos $\Gamma_i=\Gamma_j=\Gamma_l=\hat{I}$ na expressão (2.25), calculamos os traços de Dirac envolvidos e reorganizamos a expressão correspondente com o auxílio da identidade

$$
(k+k_i)\cdot(k+k_l)=\frac{1}{2}\left[(k+k_i)^2-m_i^2\right]+\frac{1}{2}\left[(k+k_l)^2-m_l^2\right]-\frac{1}{2}\left[(k_i-k_l)^2-m_l^2-m_i^2\right]. \tag{5.20}
$$

Podemos então explicitar T^{SSS} substituindo as expressões para as integrais de Feynman em termos das quais a amplitude foi escrita e que foram devidamente tratadas no capítulo anterior. Teremos então

$$\begin{aligned} T^{SSS} &= +2\left(m_1+m_3\right)\left\{I_{\log}\left(\lambda^2\right)-\left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right]Z_0\left(1,3\right)\right\} \\ &\quad +2\left(m_1+m_2\right)\left\{I_{\log}\left(\lambda^2\right)-\left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right]Z_0\left(1,2\right)\right\} \\ &\quad +2\left(m_3+m_2\right)\left\{I_{\log}\left(\lambda^2\right)-\left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right]Z_0\left(2,3\right)\right\} \\ &\quad +2\left\{\left[\left(m_2+m_3\right)^2-\left(p+q\right)^2\right]m_1+\left[\left(m_1-m_2\right)^2-q^2\right]m_3 \right. \\ &\qquad \left. +\left[\left(m_1+m_3\right)^2-p^2\right]m_2\right\}\left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right]\xi_{00}. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Na expressão acima adotamos a seguinte notação:

$$Z_0\left(1,2\right)=Z_0\left(m_1^2;m_2^2,q^2;\lambda^2\right), \tag{5.22}$$

$$Z_0\left(1,3\right)=Z_0\left(m_1^2;m_3^2,p^2;\lambda^2\right), \tag{5.23}$$

$$Z_0\left(2,3\right)=Z_0\left(m_2^2;m_3^2,\left(p+q\right)^2;\lambda^2\right). \tag{5.24}$$

Com a utilização dos mesmos ingredientes obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} T^{SPP} &= +2\left(m_1-m_3\right)\left\{I_{\log}\left(\lambda^2\right)-\left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right]Z_0\left(1,3\right)\right\} \\ &\quad +2\left(m_1-m_2\right)\left\{I_{\log}\left(\lambda^2\right)-\left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right]Z_0\left(1,2\right)\right\} \\ &\quad -2\left(m_3+m_2\right)\left\{I_{\log}\left(\lambda^2\right)-\left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right]Z_0\left(2,3\right)\right\} \\ &\quad +2\left\{\left[\left(m_2+m_3\right)^2-\left(p+q\right)^2\right]m_1-\left[\left(m_1+m_2\right)^2-q^2\right]m_3 \right. \\ &\qquad \left. -\left[\left(m_1-m_3\right)^2-p^2\right]m_2\right\}\left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right]\xi_{00}. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Agora consideremos aquelas com um índice de Lorentz. Primeiramente a função de Green T_{λ}^{VSS}, que pode ser escrita como

$$
\begin{aligned}
\frac{T_\lambda^{VSS}}{2} &= +2\left(I_2\right)_\lambda\left(m_2,k_2;m_3,k_3\right) \\
&+\left(k_3+k_2\right)_\lambda\left(I_2\right)\left(m_2,k_2;m_3,k_3\right) \\
&+p_\lambda\left(I_2\right)\left(m_1,k_1;m_3,k_3\right) \\
&-q_\lambda\left(I_2\right)\left(m_1,k_1;m_2,k_2\right) \\
&+\left\{\left(m_2+m_1\right)^2+\left(m_1+m_3\right)^2-\left(m_2-m_3\right)^2-p^2\right. \\
&\qquad\left.-\,q^2+\left(p+q\right)^2\right\}\left(I_3\right)_\lambda^{SH} \\
&+\left\{\left[\left(m_2+m_1\right)^2-q^2\right]p_\lambda-\left[\left(m_1+m_3\right)^2-p^2\right]q_\lambda\right\}\left(I_3\right)^{SH}. \qquad (5.26)
\end{aligned}
$$

Substituindo os resultados para as integrais envolvidas teremos

$$
\begin{aligned}
T_\lambda^{VSS} &= -2\left(k_2+k_3\right)^\alpha\Delta_{\alpha\lambda}\left(\lambda^2\right) \\
&+2q_\lambda\left\{-I_{\log}\left(\lambda^2\right)+\left[\frac{i}{\left(4\pi\right)^2}\right]\left[Z_0\left(1,2\right)+2Z_1\left(2,3\right)-Z_0\left(2,3\right)\right.\right. \\
&\qquad-\left[q^2-\left(m_2+m_1\right)^2\right]\xi_{01}+\left[\left(p+q\right)^2-\left(m_2-m_3\right)^2\right]\xi_{01} \\
&\qquad\left.\left.+\left[p^2-\left(m_1+m_3\right)^2\right]\left(\xi_{00}-\xi_{01}\right)\right]\right\} \\
&+2p_\lambda\left\{I_{\log}\left(\lambda^2\right)+\left[\frac{i}{\left(4\pi\right)^2}\right]\left[-Z_0\left(1,3\right)+2Z_1\left(2,3\right)-Z_0\left(2,3\right)\right]\right. \\
&\qquad+\left[p^2-\left(m_1+m_3\right)^2\right]\xi_{10}-\left[\left(p+q\right)^2-\left(m_2-m_3\right)^2\right]\xi_{10} \\
&\qquad\left.-\left[q^2-\left(m_2+m_1\right)^2\right]\left(\xi_{00}-\xi_{10}\right)\right]\right\}. \qquad (5.27)
\end{aligned}
$$

Agora explicitamos a função T_λ^{VPP}, que em termos de integrais de Feynman fica

$$
\begin{aligned}
\frac{T_\lambda^{VPP}}{2} &= -2\left(I_2\right)_\lambda\left(m_2,k_2;m_3,k_3\right) \\
&-\left(k_3+k_2\right)_\lambda\left(I_2\right)\left(m_2,k_2;m_3,k_3\right) \\
&-p_\lambda\left(I_2\right)\left(m_1,k_1;m_3,k_3\right)+q_\lambda\left(I_2\right)\left(m_1,k_1;m_2,k_2\right) \\
&+\left\{\left(m_2-m_3\right)^2-\left(p+q\right)^2-\left(m_1-m_3\right)^2+p^2-\left(m_2-m_1\right)^2+q^2\right\}\left(I_3\right)_\lambda^{SH} \\
&+\left\{\left[\left(m_1-m_3\right)^2-p^2\right]q_\lambda-\left[\left(m_2-m_1\right)^2-q^2\right]p_\lambda\right\}\left(I_3\right)^{SH}. \qquad (5.28)
\end{aligned}
$$

Substituindo os resultados necessários encontramos

$$
\begin{aligned}
T_{\lambda}^{VPP} &= +2\left(k_2+k_3\right)^{\alpha}\Delta_{\alpha\lambda}\left(\lambda^2\right) \\
&\quad -2p_{\lambda}\left\{I_{\log}\left(\lambda^2\right)+\left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right)\left[-Z_0\left(1,3\right)+2Z_1\left(2,3\right)-Z_0\left(2,3\right)\right.\right. \\
&\qquad -\left[(p+q)^2-(m_2-m_3)^2\right]\xi_{10}+\left[p^2-(m_1-m_3)^2\right]\xi_{10} \\
&\qquad \left.\left. -\left[q^2-(m_2-m_1)^2\right]\left[\xi_{00}-\xi_{10}\right]\right]\right\} \\
&\quad +2q_{\lambda}\left\{I_{\log}\left(\lambda^2\right)+\left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right]\left[-Z_0\left(1,2\right)-2Z_1\left(2,3\right)+Z_0\left(2,3\right)\right.\right. \\
&\qquad -\left[(p+q)^2-(m_2-m_3)^2\right]\xi_{01}+\left[q^2-(m_2-m_1)^2\right]\xi_{01} \\
&\qquad \left.\left. -\left[p^2-(m_1-m_3)^2\right]\left[\xi_{00}-\xi_{01}\right]\right]\right\}.
\end{aligned}
\tag{5.29}
$$

Para uso futuro explicitamos também as funções

$$
\begin{aligned}
T_{\mu}^{PVP} &= 2\left(k_1+k_3\right)^{\alpha}\Delta_{\alpha\mu}\left(\lambda^2\right) \\
&\quad +2p_{\mu}\left\{-I_{\log}\left(\lambda^2\right)+\left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right)\left[Z_0\left(2,3\right)-2Z_1\left(1,3\right)+Z_0\left(1,3\right)\right.\right. \\
&\qquad +\left[p^2-(m_3-m_1)^2\right]\xi_{10}-\left[(p+q)^2-(m_3-m_2)^2\right]\xi_{10} \\
&\qquad \left.\left. +\left[q^2-(m_2-m_1)^2\right]\left(\xi_{00}-\xi_{10}\right)\right]\right\} \\
&\quad +2q_{\mu}\left\{-2I_{\log}\left(\lambda^2\right)+\left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right)\left[Z_0\left(2,3\right)+Z_0\left(1,2\right)\right.\right. \\
&\qquad +\left[(p+q)^2-(m_3-m_2)^2\right]\xi_{01}+\left[q^2-(m_2-m_1)^2\right]\xi_{01} \\
&\qquad \left.\left. +\left[p^2-(m_3-m_1)^2\right]\left(\xi_{00}-\xi_{01}\right)\right]\right\}
\end{aligned}
\tag{5.30}
$$

e

$$
\begin{aligned}
T_{\nu}^{PPV} &= 2\left(k_2+k_1\right)^{\alpha}\Delta_{\alpha\nu}\left(\lambda^2\right) \\
&\quad +2q_{\nu}\left\{I_{\log}\left(\lambda^2\right)+\left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right)\left[2Z_1\left(1,2\right)-Z_0\left(1,2\right)-Z_0\left(2,3\right)\right.\right. \\
&\qquad -\left[q^2-(m_1-m_2)^2\right]\xi_{01}+\left[(p+q)^2-(m_3-m_2)^2\right]\xi_{01} \\
&\qquad \left.\left. -\left[p^2-(m_1-m_3)^2\right]\left(\xi_{00}-\xi_{01}\right)\right]\right\} \\
&\quad +2p_{\nu}\left\{2I_{\log}\left(\lambda^2\right)+\left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right)\left[-Z_0\left(2,3\right)-Z_0\left(1,3\right)\right.\right. \\
&\qquad -\left[(p+q)^2-(m_3-m_2)^2\right]\xi_{01}-\left[p^2-(m_1-m_3)^2\right]\xi_{01} \\
&\qquad \left.\left. -\left[q^2-(m_1-m_2)^2\right]\left(\xi_{00}-\xi_{01}\right)\right]\right\}.
\end{aligned}
\tag{5.31}
$$

De modo completamente análogo podemos encontrar

$$
\begin{aligned}
T_{\mu}^{PAS} &= -2\left(k_1+k_3\right)^{\alpha}\Delta_{\alpha\mu}\left(\lambda^2\right) \\
&+2\left(p+q\right)_{\mu}\left\{I_{\log}\left(\lambda^2\right)-\left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right]Z_0\left(2,3\right)\right\} \\
&+2p_{\mu}\left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right]\{2Z_1\left(1,3\right)-Z_0\left(1,3\right) \\
&-\left[\left(m_3-m_2\right)^2-\left(p+q\right)^2\right]\xi_{10}+\left[\left(m_3+m_1\right)^2-p^2\right]\xi_{10} \\
&+\left[\left(m_2+m_1\right)^2-q^2\right]\left(\xi_{00}-\xi_{10}\right)\} \\
&+2q_{\mu}\left\{I_{\log}\left(\lambda_1^2\right)+\left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right][-Z_0\left(1,2\right)\right. \\
&+\left[\left(m_3-m_2\right)^2-\left(p+q\right)^2\right]\xi_{01}+\left[\left(m_2+m_1\right)^2-q^2\right]\xi_{01} \\
&\left.+\left[\left(m_3+m_1\right)^2-p^2\right]\left(\xi_{00}-\xi_{01}\right)]\right\}
\end{aligned}
\tag{5.32}
$$

e

$$
\begin{aligned}
T_{\nu}^{PSA} &= +2\left(k_1+k_2\right)^{\alpha}\Delta_{\alpha\nu}\left(\lambda^2\right) \\
&+2\left(p+q\right)_{\nu}\left\{I_{\log}\left(\lambda^2\right)-\left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right]Z_0\left(2,3\right)\right\} \\
&+2p_{\nu}\left\{I_{\log}\left(\lambda^2\right)+\left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right][-Z_0\left(1,3\right)\right. \\
&+\left[\left(m_3-m_2\right)^2-\left(p+q\right)^2\right]\xi_{10}+\left[\left(m_3+m_1\right)^2-p^2\right]\xi_{10} \\
&\left.+\left[\left(m_1+m_2\right)^2-q^2\right]\left(\xi_{00}-\xi_{10}\right)]\right\} \\
&+2q_{\nu}\left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right]\{[2Z_1\left(1,2\right)-Z_0\left(1,2\right)] \\
&+\left[\left(m_1+m_2\right)^2-q^2\right]\xi_{01}-\left[\left(m_3-m_2\right)^2-\left(p+q\right)^2\right]\xi_{01} \\
&+\left[\left(m_3+m_1\right)^2-p^2\right]\left(\xi_{00}-\xi_{01}\right)\}.
\end{aligned}
\tag{5.33}
$$

Agora consideramos funções com dois índices de Lorentz. Primeiramente para $T_{\mu\nu}^{SVV}$ encontramos a expressão

$$
\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{SVV} &= 4\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{D_{123}}\left\{m_2\left[\left(k+k_3\right)_{\mu}\left(k+k_1\right)_{\nu}+\left(k+k_3\right)_{\nu}\left(k+k_1\right)_{\mu}\right]\right. \\
&\qquad +m_1\left[\left(k+k_3\right)_{\mu}\left(k+k_2\right)_{\nu}-\left(k+k_3\right)_{\nu}\left(k+k_2\right)_{\mu}\right] \\
&\qquad \left.+m_3\left[\left(k+k_1\right)_{\mu}\left(k+k_2\right)_{\nu}+\left(k+k_1\right)_{\nu}\left(k+k_2\right)_{\mu}\right]\right\} \\
&+g_{\mu\nu}\left[T^{SPP}\right],
\end{aligned}
\tag{5.34}
$$

onde identificamos na estrutura da função que o termo proporcional ao tensor métrico é a amplitude T^{SPP}. Reorganizando em termos das integrais de Feynman obtemos

$$\frac{T^{SVV}_{\mu\nu}}{4} = 2\left(m_2+m_3\right)\left(I_3\right)_{\mu\nu}$$
$$+\left[m_2\left(k_1+k_3\right)_\nu + m_3\left(k_1+k_2\right)_\nu - m_1\left(k_3-k_2\right)_\nu\right]\left(I_3\right)_\mu$$
$$+\left[m_2\left(k_1+k_3\right)_\mu + m_3\left(k_1+k_2\right)_\mu - m_1\left(k_2-k_3\right)_\mu\right]\left(I_3\right)_\nu$$
$$+\left[m_2\left(k_{1\mu}k_{3\nu}+k_{1\nu}k_{3\mu}\right) + m_3\left(k_{1\mu}k_{2\nu}+k_{1\nu}k_{2\mu}\right) - m_1\left(k_{2\mu}k_{3\nu}-k_{2\nu}k_{3\mu}\right)\right]\left(I_3\right)$$
$$+g_{\mu\nu}\left[T^{SPP}\right].$$

Com a substituição das soluções obtidas para as integrais presentes e do resultado (5.25) encontramos

$$\begin{aligned}
T^{SVV}_{\mu\nu} &= 2\left(m_3+m_2\right)\Delta_{\mu\nu}\left(\lambda^2\right) \\
&+2g_{\mu\nu}\left(m_1-m_3\right)I_{\log}\left(\lambda^2\right)+2g_{\mu\nu}\left(m_1-m_2\right)I_{\log}\left(\lambda^2\right) \\
&+\left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right]\{ \\
&-4\left(m_3+m_2\right)g_{\mu\nu}\eta_{00} \\
&+4p_\mu p_\nu\left[2\left(m_3+m_2\right)\xi_{20}-2m_2\xi_{10}\right] \\
&+4q_\mu q_\nu\left[2\left(m_3+m_2\right)\xi_{02}-2m_3\xi_{01}\right] \\
&-4p_\mu q_\nu\left[2\left(m_3+m_2\right)\xi_{11}-\left(m_1+m_3\right)\xi_{10}-\left(m_1+m_2\right)\xi_{01}+m_1\xi_{00}\right] \\
&-4q_\mu p_\nu\left[2\left(m_3+m_2\right)\xi_{11}+\left(m_1-m_3\right)\xi_{10}+\left(m_1-m_2\right)\xi_{01}-m_1\xi_{00}\right] \\
&+2g_{\mu\nu}\left\{\left[\left(m_2-m_3\right)^2-\left(p+q\right)^2\right]m_1-\left[\left(m_1-m_2\right)^2-q^2\right]m_3+\right. \\
&\qquad\left.-\left[\left(m_1-m_3\right)^2-p^2\right]m_2\right\}\xi_{00} \\
&-2g_{\mu\nu}\left(m_1-m_3\right)Z_0\left(1,3\right) \\
&-2g_{\mu\nu}\left(m_1-m_2\right)Z_0\left(1,2\right) \\
&+2g_{\mu\nu}\left(m_3+m_2\right)Z_0\left(2,3\right)\}.
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Agora, também com dois índices de Lorentz consideramos a função $T^{SAA}_{\mu\nu}$ que, em termos das integrais de Feynman, toma a forma

$$
\begin{aligned}
\frac{T_{\mu\nu}^{SAA}}{4} &= 2\left(m_2+m_3\right)\left(I_3\right)_{\mu\nu} \\
&+\left[m_2\left(k_1+k_3\right)_\nu+m_3\left(k_1+k_2\right)_\nu-m_1\left(k_3-k_2\right)_\nu\right]\left(I_3\right)_\mu \\
&+\left[m_2\left(k_1+k_3\right)_\mu+m_3\left(k_1+k_2\right)_\mu-m_1\left(k_2-k_3\right)_\mu\right]\left(I_3\right)_\nu \\
&+\left[m_2\left(k_{1\mu}k_{3\nu}+k_{1\nu}k_{3\mu}\right)+m_3\left(k_{1\mu}k_{2\nu}+k_{1\nu}k_{2\mu}\right)-m_1\left(k_{2\mu}k_{3\nu}-k_{2\nu}k_{3\mu}\right)\right]\left(I_3\right) \\
&-g_{\mu\nu}\left[T^{SSS}\right]. \qquad (5.36)
\end{aligned}
$$

A forma explícita para a amplitude considerada pode ser escrita como

$$
\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{SAA} &= +2\left(m_3+m_2\right)\Delta_{\mu\nu}\left(\lambda^2\right) \\
&-2g_{\mu\nu}\left(m_1+m_2\right)I_{\log}\left(\lambda^2\right)-2g_{\mu\nu}\left(m_1+m_3\right)I_{\log}\left(\lambda^2\right) \\
&+\left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right]\{ \\
&-4g_{\mu\nu}\left(m_3+m_2\right)\eta_{00} \\
&+8p_\mu p_\nu\left[\left(m_3+m_2\right)\xi_{20}-m_2\xi_{10}\right] \\
&+8q_\mu q_\nu\left[\left(m_3+m_2\right)\xi_{02}-m_3\xi_{01}\right] \\
&-4q_\mu p_\nu\left[2\left(m_3+m_2\right)\xi_{11}-\left(m_3+m_1\right)\xi_{10}-\left(m_2+m_1\right)\xi_{01}+m_1\xi_{00}\right] \\
&-4p_\mu q_\nu\left[2\left(m_3+m_2\right)\xi_{11}+\left(m_1-m_3\right)\xi_{10}+\left(m_1-m_2\right)\xi_{01}-m_1\xi_{00}\right] \\
&-2g_{\mu\nu}\left\{\left[\left(m_2-m_3\right)^2-(p+q)^2\right]m_1+\left[\left(m_1+m_2\right)^2-q^2\right]m_3\right. \\
&\qquad\left.+\left[\left(m_1+m_3\right)^2-p^2\right]m_2\right\}\xi_{00} \\
&+2g_{\mu\nu}\left(m_1+m_3\right)Z_0(1,3) \\
&+2g_{\mu\nu}\left(m_1+m_2\right)Z_0(1,2) \\
&+2g_{\mu\nu}\left(m_3+m_2\right)Z_0(2,3)\}. \qquad (5.37)
\end{aligned}
$$

Com três índices de Lorentz consideremos a função VVV que, inicialmente, pode ser escrita como

$$
T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}=T_{\lambda\mu\nu}+g_{\mu\nu}\left[T_\lambda^{VPP}\right]+g_{\lambda\nu}\left[T_\mu^{PVP}\right]+g_{\lambda\mu}\left[T_\nu^{PPV}\right],
$$

onde identificamos as estruturas proporcionais aos tensores métricos como funções de três pontos com um índice vetorial e definimos o tensor

$$T_{\lambda\mu\nu} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{D_{123}} \Big\{ (k+k_3)_\lambda \Big[(k+k_1)_\mu (k+k_2)_\nu + (k+k_1)_\nu (k+k_2)_\mu \Big] + (k+k_1)_\lambda \Big[(k+k_3)_\mu (k+k_2)_\nu - (k+k_3)_\nu (k+k_2)_\mu \Big] + (k+k_2)_\lambda \Big[(k+k_3)_\mu (k+k_1)_\nu + (k+k_3)_\nu (k+k_1)_\mu \Big] \Big\} \quad (5.38)$$

Existem outras funções de três pontos com três índices de Lorentz que possuem estruturas semelhantes. Como tal, a função $T^{VAA}_{\lambda\mu\nu}$ pode ser escrita na forma

$$T^{VAA}_{\lambda\mu\nu} = T_{\lambda\mu\nu} - g_{\mu\nu} \left[T^{VSS}_\lambda \right] - g_{\lambda\nu} \left[T^{PAS}_\mu \right] + g_{\lambda\mu} \left[T^{PSA}_\nu \right].$$

Para completar o cálculo destas tais amplitudes basta calcular o tensor $T_{\lambda\mu\nu}$. Desenvolvendo teremos

$$\begin{aligned} T_{\lambda\mu\nu} = & -\frac{2}{3}(k_1+k_2)^\alpha \Big[\Box_{\lambda\alpha\mu\nu}(\lambda^2) + g_{\alpha\lambda}\Delta_{\mu\nu}(\lambda^2) + g_{\alpha\mu}\Delta_{\lambda\nu}(\lambda^2) \\ & + g_{\alpha\nu}\Delta_{\lambda\mu}(\lambda^2) - 3g_{\alpha\nu}\Delta_{\mu\lambda}(\lambda^2) \Big] \\ & -\frac{2}{3}(k_3+k_1)^\alpha \Big[\Box_{\lambda\alpha\mu\nu}(\lambda^2) + g_{\alpha\lambda}\Delta_{\mu\nu}(\lambda^2) + g_{\alpha\mu}\Delta_{\lambda\nu}(\lambda^2) \\ & + g_{\alpha\nu}\Delta_{\lambda\mu}(\lambda^2) - 3g_{\alpha\mu}\Delta_{\lambda\nu}(\lambda^2) \Big] \\ & -\frac{2}{3}(k_2+k_3)^\alpha \Big[\Box_{\lambda\alpha\mu\nu}(\lambda^2) + g_{\alpha\lambda}\Delta_{\mu\nu}(\lambda^2) + g_{\alpha\mu}\Delta_{\lambda\nu}(\lambda^2) \\ & + g_{\alpha\nu}\Delta_{\lambda\mu}(\lambda^2) - 3g_{\alpha\lambda}\Delta_{\mu\nu}(\lambda^2) \Big] \\ & +\frac{2}{3}\Big[(p-q)_\lambda g_{\mu\nu} + (2q+p)_\mu g_{\lambda\nu} - (2p+q)_\nu g_{\lambda\mu} \Big] I_{\log}(\lambda^2) \\ & + \left[\frac{i}{(4\pi)^2} \right] \{ \\ & + 16 q_\mu q_\nu q_\lambda \xi_{03} - 16 p_\mu p_\nu p_\lambda \xi_{30} \\ & - 16 (q_\mu q_\nu p_\lambda + q_\mu p_\nu q_\lambda + p_\mu q_\nu q_\lambda) \xi_{12} \\ & + 16 (q_\mu p_\nu p_\lambda + p_\mu q_\nu p_\lambda + p_\mu p_\nu q_\lambda) \xi_{21} \\ & - 8 (q_\nu g_{\mu\lambda} + q_\lambda g_{\mu\nu} + q_\mu g_{\nu\lambda}) \eta_{01} + 8 (p_\nu g_{\mu\lambda} + p_\lambda g_{\mu\nu} + p_\mu g_{\nu\lambda}) \eta_{10} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& - 8q_\nu \left[-\frac{1}{2} g_{\mu\lambda}\eta_{00} + q_\mu q_\lambda \xi_{02} + p_\mu p_\lambda \xi_{20} - \left(q_\mu p_\lambda + p_\mu q_\lambda \right) \xi_{11} \right] \\
& + 8p_\mu \left[-\frac{1}{2} g_{\lambda\nu}\eta_{00} + q_\lambda q_\nu \xi_{02} + p_\lambda p_\nu \xi_{20} - \left(q_\lambda p_\nu + p_\lambda q_\nu \right) \xi_{11} \right] \\
& + 8 \left(p - q \right)_\lambda \left[-\frac{1}{2} g_{\mu\nu}\eta_{00} + q_\mu q_\nu \xi_{02} + p_\mu p_\nu \xi_{20} - \left(q_\mu p_\nu + p_\mu q_\nu \right) \xi_{11} \right] \\
& - 4 \left(p_\lambda q_\nu + q_\lambda p_\nu \right) \left(q_\mu \xi_{01} - p_\mu \xi_{10} \right) \\
& - 4 \left(p_\lambda q_\mu + q_\lambda p_\mu \right) \left(q_\nu \xi_{01} - p_\nu \xi_{10} \right) \\
& +4 \left(p_\nu q_\mu - q_\nu p_\mu \right) \left(q_\lambda \xi_{01} - p_\lambda \xi_{10} \right) \Big\} .
\end{aligned} \tag{5.39}
$$

Com isso podemos explicitar o resultado para as amplitudes de três índices de Lorentz escolhidas. Para escrevermos o resultado adotaremos a decomposição

$$
T^{VVV}_{\lambda\mu\nu} = \left(T^{VVV}_{\lambda\mu\nu} \right)_{AMB} + \left(T^{VVV}_{\lambda\mu\nu} \right)_{NON} , \tag{5.40}
$$

onde denominamos $\left(T^{VVV}_{\lambda\mu\nu} \right)_{AMB}$ a parte que apresenta dependência com combinações ambíguas dos momentos internos e $\left(T^{VVV}_{\lambda\mu\nu} \right)_{NON}$ a parte que apresenta apenas combinações físicas de tais momentos, ou seja, combinações não ambíguas. Assim ficamos com

$$
\begin{aligned}
\left(T^{VVV}_{\lambda\mu\nu} \right)_{AMB} = & -\frac{2}{3} \left(k_1 + k_3 \right)^\alpha \Big[\Box_{\lambda\alpha\mu\nu} \left(\lambda^2 \right) + g_{\alpha\lambda} \Delta_{\mu\nu} \left(\lambda^2 \right) + g_{\alpha\mu} \Delta_{\lambda\nu} \left(\lambda^2 \right) + g_{\alpha\nu} \Delta_{\lambda\mu} \left(\lambda^2 \right) \\
& \quad - 3 g_{\alpha\mu} \Delta_{\lambda\nu} \left(\lambda^2 \right) - 3 g_{\lambda\nu} \Delta_{\alpha\mu} \left(\lambda^2 \right) \Big] \\
& -\frac{2}{3} \left(k_3 + k_2 \right)^\alpha \Big[\Box_{\lambda\alpha\mu\nu} \left(\lambda^2 \right) + g_{\alpha\lambda} \Delta_{\mu\nu} \left(\lambda^2 \right) + g_{\alpha\mu} \Delta_{\lambda\nu} \left(\lambda^2 \right) + g_{\alpha\nu} \Delta_{\lambda\mu} \left(\lambda^2 \right) \\
& \quad - 3 g_{\alpha\lambda} \Delta_{\mu\nu} \left(\lambda^2 \right) - 3 g_{\mu\nu} \Delta_{\alpha\lambda} \left(\lambda^2 \right) \Big] \\
& -\frac{2}{3} \left(k_1 + k_2 \right)^\alpha \Big[\Box_{\lambda\alpha\mu\nu} \left(\lambda^2 \right) + g_{\alpha\lambda} \Delta_{\mu\nu} \left(\lambda^2 \right) + g_{\alpha\mu} \Delta_{\lambda\nu} \left(\lambda^2 \right) + g_{\alpha\nu} \Delta_{\lambda\mu} \left(\lambda^2 \right) \\
& \quad - 3 g_{\alpha\nu} \Delta_{\lambda\mu} \left(\lambda^2 \right) - 3 g_{\lambda\mu} \Delta_{\alpha\nu} \left(\lambda^2 \right) \Big] ,
\end{aligned} \tag{5.41}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(T^{VVV}_{\lambda\mu\nu} \right)_{NON} = & -\frac{4}{3} \left[g_{\mu\nu} \left(p - q \right)_\lambda + g_{\lambda\nu} \left(p + 2q \right)_\mu - g_{\lambda\mu} \left(q + 2p \right)_\nu \right] I_{\log} \left(\lambda^2 \right) \\
& + \left[\frac{i}{\left(4\pi \right)^2} \right] \Big\{ \\
& \quad + 2 g_{\mu\nu} p_\lambda Z_0 \left(1,3 \right) - 2 g_{\lambda\mu} p_\nu Z_0 \left(1,3 \right) - 2 g_{\lambda\nu} p_\mu \left[2 Z_1 \left(1,3 \right) - Z_0 \left(1,3 \right) \right] \\
& \quad - 2 g_{\mu\nu} \left(p + q \right)_\lambda \left[2 Z_1 \left(2,3 \right) - Z_0 \left(2,3 \right) \right] + 2 g_{\lambda\nu} \left(p + q \right)_\mu Z_0 \left(2,3 \right) +
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-2g_{\lambda\mu}\left(p+q\right)_{\nu} Z_0\left(2,3\right) \\
&+2g_{\lambda\nu}q_{\mu}Z_0\left(1,2\right)-2g_{\mu\nu}q_{\lambda}Z_0\left(1,2\right)+2g_{\lambda\mu}q_{\nu}\left[2Z_1\left(1,2\right)-Z_0\left(1,2\right)\right] \\
&+16q_{\mu}q_{\nu}q_{\lambda}\xi_{03}-16p_{\mu}p_{\nu}p_{\lambda}\xi_{30} \\
&-16\left(q_{\mu}q_{\nu}p_{\lambda}+p_{\mu}q_{\nu}q_{\lambda}+q_{\mu}p_{\nu}q_{\lambda}\right)\xi_{12} \\
&+16\left(q_{\mu}p_{\nu}p_{\lambda}+p_{\mu}q_{\nu}p_{\lambda}+p_{\mu}p_{\nu}q_{\lambda}\right)\xi_{21} \\
&-8\left(q_{\nu}g_{\mu\lambda}+q_{\lambda}g_{\mu\nu}+q_{\mu}g_{\nu\lambda}\right)\eta_{01}+8\left(p_{\nu}g_{\mu\lambda}+p_{\lambda}g_{\mu\nu}+p_{\mu}g_{\nu\lambda}\right)\eta_{10} \\
&+8\left(p-q\right)_{\lambda}\left[-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\eta_{00}+q_{\mu}q_{\nu}\xi_{02}+p_{\mu}p_{\nu}\xi_{20}-\left(q_{\mu}p_{\nu}+p_{\mu}q_{\nu}\right)\xi_{11}\right] \\
&-8q_{\nu}\left[-\frac{1}{2}g_{\mu\lambda}\eta_{00}+q_{\mu}q_{\lambda}\xi_{02}+p_{\mu}p_{\lambda}\xi_{20}-\left(q_{\mu}p_{\lambda}+p_{\mu}q_{\lambda}\right)\xi_{11}\right] \\
&+8p_{\mu}\left[-\frac{1}{2}g_{\nu\lambda}\eta_{00}+q_{\nu}q_{\lambda}\xi_{02}+p_{\nu}p_{\lambda}\xi_{20}-\left(q_{\nu}p_{\lambda}+p_{\nu}q_{\lambda}\right)\xi_{11}\right] \\
&+4\left(p_{\mu}q_{\lambda}+q_{\mu}p_{\lambda}\right)\left(p_{\nu}\xi_{10}-q_{\nu}\xi_{01}\right) \\
&+4\left(p_{\nu}q_{\lambda}+q_{\nu}p_{\lambda}\right)\left(p_{\mu}\xi_{10}-q_{\mu}\xi_{01}\right) \\
&-4\left(p_{\nu}q_{\mu}-q_{\nu}p_{\mu}\right)\left(p_{\lambda}\xi_{10}-q_{\lambda}\xi_{01}\right) \\
&-2g_{\mu\nu}p_{\lambda}\left\{\left[p^2-\left(m_1-m_3\right)^2\right]\xi_{10}-\left[\left(p+q\right)^2-\left(m_2-m_3\right)^2\right]\xi_{10}\right. \\
&\qquad\qquad \left.-\left[q^2-\left(m_2-m_1\right)^2\right]\left[\xi_{00}-\xi_{10}\right]\right\} \\
&+2g_{\mu\nu}q_{\lambda}\left\{\left[q^2-\left(m_2-m_1\right)^2\right]\xi_{01}-\left[\left(p+q\right)^2-\left(m_2-m_3\right)^2\right]\xi_{01}\right. \\
&\qquad\qquad \left.-\left[p^2-\left(m_1-m_3\right)^2\right]\left[\xi_{00}-\xi_{01}\right]\right\} \\
&+2g_{\lambda\nu}p_{\mu}\left\{\left[p^2-\left(m_3-m_1\right)^2\right]\xi_{10}-\left[\left(p+q\right)^2-\left(m_3-m_2\right)^2\right]\xi_{10}\right. \\
&\qquad\qquad \left.+\left[q^2-\left(m_2-m_1\right)^2\right]\left(\xi_{00}-\xi_{10}\right)\right\} \\
&+2g_{\lambda\nu}q_{\mu}\left\{\left[\left(p+q\right)^2-\left(m_3-m_2\right)^2\right]\xi_{01}+\left[q^2-\left(m_2-m_1\right)^2\right]\xi_{01}\right. \\
&\qquad\qquad \left.+\left[p^2-\left(m_3-m_1\right)^2\right]\left(\xi_{00}-\xi_{01}\right)\right\} \\
&+2g_{\lambda\mu}q_{\nu}\left\{\left[\left(p+q\right)^2-\left(m_3-m_2\right)^2\right]\xi_{01}-\left[q^2-\left(m_1-m_2\right)^2\right]\xi_{01}\right. \\
&\qquad\qquad \left.-\left[p^2-\left(m_1-m_3\right)^2\right]\left(\xi_{00}-\xi_{01}\right)\right\} \\
&-2g_{\lambda\mu}p_{\nu}\left\{\left[\left(p+q\right)^2-\left(m_3-m_2\right)^2\right]\xi_{10}+\left[p^2-\left(m_1-m_3\right)^2\right]\xi_{10}\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left.+\left[q^2-\left(m_1-m_2\right)^2\right]\left(\xi_{00}-\xi_{10}\right)\right\}\right\}. \qquad (5.42)
\end{aligned}
$$

E por fim também escrevemos a amplitude $T_{\lambda\mu\nu}^{VAA}$ do mesmo modo como escrevemos a amplitude $T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}$, ou seja, escrevemos como a soma dos termos ambíguos $\left(T_{\lambda\mu\nu}^{VAA}\right)_{AMB}$ e os termos não ambíguos $\left(T_{\lambda\mu\nu}^{VAA}\right)_{NON}$, onde temos

$$\left(T_{\lambda\mu\nu}^{VAA}\right)_{AMB} = \left(T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}\right)_{AMB} \tag{5.43}$$

e

$$\begin{aligned}
\left(T_{\lambda\mu\nu}^{VAA}\right)_{NON} = & -\frac{4}{3}\left[g_{\nu\mu}(p-q)_\lambda + g_{\lambda\mu}(q+2p)_\nu - g_{\lambda\nu}(p+2q)_\mu\right] I_{\log}\left(\lambda^2\right) \\
& + \left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right]\{ \\
& +2g_{\lambda\mu}q_\nu\left[2Z_1(1,2) - Z_0(1,2)\right] + 2g_{\lambda\nu}q_\mu Z_0(1,2) - 2g_{\nu\mu}q_\lambda Z_0(1,2) \\
& -2g_{\lambda\nu}p_\mu\left[2Z_1(1,3) - Z_0(1,3)\right] - 2g_{\lambda\mu}p_\nu Z_0(1,3) + 2g_{\nu\mu}p_\lambda Z_0(1,3) \\
& -2g_{\nu\mu}(p+q)_\lambda\left[2Z_1(2,3) - Z_0(2,3)\right] \\
& +2g_{\lambda\nu}(p+q)_\mu Z_0(2,3) - 2g_{\lambda\mu}(p+q)_\nu Z_0(2,3) \\
& +16q_\mu q_\nu q_\lambda \xi_{03} - 16p_\mu p_\nu p_\lambda \xi_{30} \\
& -16\left(q_\mu q_\nu p_\lambda + q_\mu p_\nu q_\lambda + p_\mu q_\nu q_\lambda\right)\xi_{12} \\
& +16\left(q_\mu p_\nu p_\lambda + p_\mu q_\nu p_\lambda + p_\mu p_\nu q_\lambda\right)\xi_{21} \\
& -8\left(q_\nu g_{\mu\lambda} + q_\lambda g_{\mu\nu} + q_\mu g_{\nu\lambda}\right)\eta_{01} + 8\left(p_\nu g_{\mu\lambda} + p_\lambda g_{\mu\nu} + p_\mu g_{\nu\lambda}\right)\eta_{10} \\
& -8q_\nu\left[-\frac{1}{2}g_{\mu\lambda}\eta_{00} + q_\mu q_\lambda \xi_{02} + p_\mu p_\lambda \xi_{20} - \left(q_\mu p_\lambda + p_\mu q_\lambda\right)\xi_{11}\right] \\
& +8(p-q)_\lambda\left[-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\eta_{00} + q_\mu q_\nu \xi_{02} + p_\mu p_\nu \xi_{20} - \left(q_\mu p_\nu + p_\mu q_\nu\right)\xi_{11}\right] \\
& +8p_\mu\left[-\frac{1}{2}g_{\lambda\nu}\eta_{00} + q_\lambda q_\nu \xi_{02} + p_\lambda p_\nu \xi_{20} - \left(q_\lambda p_\nu + p_\lambda q_\nu\right)\xi_{11}\right] \\
& -4\left(p_\lambda q_\nu + q_\lambda p_\nu\right)\left(q_\mu \xi_{01} - p_\mu \xi_{10}\right) \\
& -4\left(p_\lambda q_\mu + q_\lambda p_\mu\right)\left(q_\nu \xi_{01} - p_\nu \xi_{10}\right) \\
& +4\left(p_\nu q_\mu - q_\nu p_\mu\right)\left(q_\lambda \xi_{01} - p_\lambda \xi_{10}\right) \\
& -2g_{\lambda\nu}p_\mu\left\{-\left[(m_3-m_2)^2 - (p+q)^2\right]\xi_{10} + \left[(m_3+m_1)^2 - p^2\right]\xi_{10}\right. \\
& \qquad \left. + \left[(m_2+m_1)^2 - q^2\right]\left(\xi_{00} - \xi_{10}\right)\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- 2g_{\lambda\nu}q_{\mu}\left\{+\left[(m_3-m_2)^2-(p+q)^2\right]\xi_{01}+\left[(m_2+m_1)^2-q^2\right]\xi_{01}\right.\\
&\qquad\left.+\left[(m_3+m_1)^2-p^2\right](\xi_{00}-\xi_{01})\right\}\\
&+ 2g_{\lambda\mu}p_{\nu}\left\{+\left[(m_3-m_2)^2-(p+q)^2\right]\xi_{10}+\left[(m_3+m_1)^2-p^2\right]\xi_{10}\right.\\
&\qquad\left.+\left[(m_1+m_2)^2-q^2\right](\xi_{00}-\xi_{10})\right\}\\
&+ 2g_{\lambda\mu}q_{\nu}\left\{-\left[(m_3-m_2)^2-(p+q)^2\right]\xi_{01}+\left[(m_1+m_2)^2-q^2\right]\xi_{01}\right.\\
&\qquad\left.+\left[(m_3+m_1)^2-p^2\right](\xi_{00}-\xi_{01})\right\}\\
&+ 2g_{\nu\mu}q_{\lambda}\left\{+\left[(m_2-m_3)^2-(p+q)^2\right]\xi_{01}-\left[(m_2+m_1)^2-q^2\right]\xi_{01}\right.\\
&\qquad\left.+\left[(m_1+m_3)^2-p^2\right](\xi_{00}-\xi_{01})\right\}\\
&+ 2g_{\nu\mu}p_{\lambda}\left\{-\left[(m_2-m_3)^2-(p+q)^2\right]\xi_{10}+\left[(m_1+m_3)^2-p^2\right]\xi_{10}\right.\\
&\qquad\left.-\left[(m_2+m_1)^2-q^2\right](\xi_{00}-\xi_{10})\right\}\Big\}\,. \qquad (5.44)
\end{aligned}
$$

Ao concluirmos os cálculos para as funções de três pontos, novamente chamamos a atenção para o fato de a parte finita das funções de Green serem totalmente não ambíguas ao passo que as combinações ambíguas dos momentos das linhas internas aparecem sempre multiplicadas pelos objetos divergentes básicos $\Box_{\lambda\alpha\mu\nu}(\lambda^2)$ e $\Delta_{\mu\nu}(\lambda^2)$. Voltaremos a considerar este aspecto em seguida.

Capítulo 6

Relações entre Funções de Green: verificação explícita

6.1 Introdução

No capítulo 2 estabelecemos um conjunto de identidades às quais denominamos relações entre funções de Green. Tais propriedades nada mais são do que identidades construídas ao nível do integrando, na representação perturbativa das amplitudes (no nosso caso ao nível 1-loop). Identidades como estas podem também ser estabelecidas com a utilização da álgebra de correntes num nível mais geral, isto é, sem especificar uma ordem perturbativa específica. Para nossos propósitos nos interessa a existência de tais identidades como uma maneira de testarmos os procedimentos até agora efetuados. Dito de outro modo, queremos saber se as operações matemáticas realizadas, envolvendo as integrais de Feynman, preservam ainda as referidas identidades. Não faria qualquer sentido prosseguir com as investigações pretendidas sem antes verificarmos a consistência dos passos já efetuados. É importante lembrar que as amplitudes calculadas, no contexto do método que adotamos, preservam ainda as arbitrariedades envolvidas neste tipo de cálculo. Não nos comprometemos, em passos intermediários, com escolhas específicas; para os momentos das linhas internas, para a regularização e/ou para a escala comum.

Ainda assim, ao verificarmos as identidades esperamos que todas elas tenham sido preservadas a despeito da presença de quantidades potencialmente ambíguas nas amplitudes. Posteriormente à verificação das relações entre funções de Green discutiremos relações de simetria e ambigüidades e então as propriedades que devem ser exigidas de manipulações e cálculos a fim de que as simetrias sejam preservadas e as ambigüidades eliminadas de modo consistente.

Nosso objetivo neste capítulo será então verificar se as relações entre funções de Green estabelecidas no capítulo 2 são satisfeitas quando utilizamos o resultado explícito obtido no capítulo anterior para as funções envolvidas nas identidades.

Para realizarmos o referido teste, primeiro efetuamos a contração do resultado explícito obtido para uma certa função de Green, que carrega um índice de Lorentz, com o respectivo momento externo associado ao vértice onde está localizado o índice vetorial ou axial. Em seguida promovemos uma reorganização do resultado após a contração a fim de identificar a combinação esperada de outras funções de Green, por comparação com as formas explícitas obtidas para esta últimas.

Nesta última etapa as relações e propriedades que estabelecemos para as funções $Z's$, $\xi's$ e $\eta's$, no capítulo 3, serão fundamentais.

6.2 Relações entre funções de Green para funções de dois pontos

A primeira relação que verificaremos é aquela envolvendo a função T_{μ}^{VS}. Contraindo a expressão (5.11) com o momento externo $(k_1-k_2)^{\mu}=q^{\mu}$, teremos inicialmente

$$\begin{aligned}
(k_1-k_2)^{\mu} T_{\mu}^{VS} \quad = \quad & -2\left(m_2+m_1\right)\left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right)\left[q^2\left(2Z_1-Z_0\right)\right] \\
& -2\left(m_2+m_1\right) Q^{\alpha} q^{\mu} \Delta_{\alpha\mu}\left(\lambda^2\right) \\
& +2\left(m_2-m_1\right) q^2\left\{I_{\log}\left(\lambda^2\right)-\left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) Z_0\right\}. \qquad (6.1)
\end{aligned}$$

Utilizando a expressão (3.17) do capítulo 3, que nos fornece a redução de Z_1 para Z_0,

$$
\begin{aligned}
Z_1\left(m_1^2;m_2^2,q^2;\lambda^2\right) &= \frac{1}{2q^2}\left\{m_1^2-m_2^2+m_1^2\ln\left[\frac{\lambda^2}{m_1^2}\right]-m_2^2\ln\left[\frac{\lambda^2}{m_2^2}\right]\right\} \\
&+\frac{\left[q^2+\left(m_1^2-m_2^2\right)\right]}{2q^2}Z_0\left(m_1^2;m_2^2,q^2;\lambda^2\right) \qquad (6.2)
\end{aligned}
$$

e, em seguida, a propriedade de escala para os objetos quadraticamente divergentes, expressão (4.39) do capítulo 4

$$
\begin{aligned}
I_{quad}\left(\lambda_1^2\right) &= I_{quad}\left(\lambda_2^2\right)-\left(\lambda_2^2-\lambda_1^2\right)I_{\log}\left(\lambda_2^2\right) \\
&+\left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right)\left\{\lambda_1^2-\lambda_2^2+\lambda_1^2\ln\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\right\} \qquad (6.3)
\end{aligned}
$$

ficaremos com

$$
(k_1-k_2)^\mu T_\mu^{VS}=T^S\left(m_2,k_2\right)-T^S\left(m_1,k_1\right)+\left(m_1-m_2\right)T^{SS}, \qquad (6.4)
$$

que é a propriedade esperada. Destacamos o caráter essencialmente algébrico da verificação, a despeito de envolver quantidades, em princípio, divergentes.

Agora consideramos a contração do momento externo com a função T_μ^{AP}, para a qual temos inicialmente

$$
\begin{aligned}
(k_1-k_2)^\mu T_\mu^{AP} &= -2\left(m_1-m_2\right)\left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right)q^2\left[2Z_1-Z_0\right] \\
&-2\left(m_1-m_2\right)Q^\alpha q^\mu\Delta_{\alpha\mu}\left(\lambda^2\right) \\
&-2\left(m_2+m_1\right)q^2\left\{I_{\log}\left(\lambda^2\right)-\left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right)Z_0\right\}. \qquad (6.5)
\end{aligned}
$$

A estrutura é muito semelhante ao caso anteriormente tratado. Os passos para a verificação da identidade pertinente são os mesmos utilizados naquela ocasião. Obteremos assim

$$
(k_1-k_2)^\mu T_\mu^{AP}=-T^S\left(m_2,k_2\right)-T^S\left(m_1,k_1\right)-\left(m_1+m_2\right)T^{PP}, \qquad (6.6)
$$

que é o resultado desejado.

Passamos agora para relações envolvendo a função $T_{\mu\nu}^{VV}$. Temos duas propriedades associadas a esta função, cada uma correspondendo à contração do momento externo com um dos índices de Lorentz. Contraindo o momento $(k_1-k_2)^\mu$ com o resultado obtido para a função $T_{\mu\nu}^{VV}$, dada por (5.16), obteremos inicialmente

$$\begin{aligned}
q^\mu T_{\mu\nu}^{VV} &= q^\mu A_{\mu\nu} \\
&-2q_\nu (m_1-m_2)^2 \left\{ I_{\log}\left(\lambda^2\right) - \left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right] Z_0 \right\} \\
&-2q_\nu \left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right] \left\{ m_1^2 - m_2^2 + m_1^2 \ln\left(\frac{\lambda^2}{m_2^2}\right) - m_2^2 \ln\left(\frac{\lambda^2}{m_2^2}\right) + q^2 Z_0 \right\} \\
&+4q^2 q_\nu \left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right] Z_1 \\
&-4q_\nu \left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right] \left(m_1^2 - m_2^2\right) Z_1. \qquad (6.7)
\end{aligned}$$

Notando que a contração

$$\begin{aligned}
q^\mu A_{\mu\nu} &= 4q^\mu \nabla_{\mu\nu}\left(\lambda^2\right) \\
&+\frac{1}{3} q^\mu \left[3Q^\alpha Q^\beta + q^\alpha Q^\beta - Q^\alpha q^\beta + q^\alpha q^\beta\right] \left\{\Box_{\alpha\beta\mu\nu}\left(\lambda^2\right) + g_{\alpha\beta}\Delta_{\mu\nu}\left(\lambda^2\right)\right\} \\
&+\frac{1}{3} q^\mu \left[3Q^\alpha Q^\beta + q^\alpha Q^\beta - Q^\alpha q^\beta + q^\alpha q^\beta\right] \left\{g_{\alpha\nu}\Delta_{\beta\mu}\left(\lambda^2\right) + g_{\alpha\mu}\Delta_{\beta\nu}\left(\lambda^2\right)\right\} \\
&-q^\mu \left(Q_\alpha Q_\beta + q_\alpha q_\beta\right) g_{\mu\nu}\Delta_{\alpha\beta}\left(\lambda^2\right) \\
&-2q^\mu \left[\left(\lambda^2 - m_2^2\right) + \left(\lambda^2 - m_1^2\right)\right] \Delta_{\mu\nu}\left(\lambda^2\right) \\
&-q^\mu Q^\alpha Q^\beta g_{\alpha\beta}\Delta_{\mu\nu}\left(\lambda^2\right) - q^\mu q^\alpha q^\beta g_{\alpha\beta}\Delta_{\mu\nu}\left(\lambda^2\right) \\
&-2q^\mu Q_\mu Q_\alpha \Delta_{\alpha v}\left(\lambda^2\right) - 2q^\mu Q_\nu Q_\alpha \Delta_{\alpha\mu}\left(\lambda^2\right) \qquad (6.8)
\end{aligned}$$

pode ser reorganizada na forma

$$\begin{aligned}
q^\mu A_{\mu\nu} &= -2q^\mu \left[\left(\lambda^2 - m_2^2\right) + \left(\lambda^2 - m_1^2\right)\right] \Delta_{\mu\nu}\left(\lambda^2\right) \\
&-4\left[-k_1^\mu \nabla_{\mu\nu}\left(\lambda^2\right) - \frac{1}{3} k_1^\mu k_1^\alpha k_1^\beta \Box_{\alpha\beta\mu\nu}\left(\lambda^2\right)\right. \\
&\left.+\frac{1}{3} k_1^\mu k_1^2 \Delta_{\mu\nu}\left(\lambda^2\right) + \frac{2}{3} k_{1\nu} k_1^\mu k_1^\beta \Delta_{\beta\mu}\left(\lambda^2\right)\right] \\
&+4\left[-k_2^\mu \nabla_{\mu\nu}\left(\lambda^2\right) - \frac{1}{3} k_2^\mu k_2^\alpha k_2^\beta \Box_{\alpha\beta\mu\nu}\left(\lambda^2\right)\right. \\
&\left.+\frac{1}{3} k_2^2 k_2^\mu \Delta_{\mu\nu}\left(\lambda^2\right) + \frac{2}{3} k_{2\nu} k_2^\mu k_2^\beta \Delta_{\beta\mu}\left(\lambda^2\right)\right] \qquad (6.9)
\end{aligned}$$

e utilizando na expressão da contração da função $T_{\mu\nu}^{VV}$ a relação de redução da função Z_1

para a função Z_0 encontraremos

$$\begin{aligned}
q^{\mu}T_{\mu\nu}^{VV} &= -4\left[-k_1^{\mu}\nabla_{\mu\nu}\left(\lambda^2\right)-\frac{1}{3}k_1^{\mu}k_1^{\alpha}k_1^{\beta}\Box_{\alpha\beta\mu\nu}\left(\lambda^2\right)+\frac{1}{3}k_1^{\mu}k_1^{2}\Delta_{\mu\nu}\left(\lambda^2\right)+\frac{2}{3}k_{1\nu}k_1^{\mu}k_1^{\beta}\Delta_{\beta\mu}\left(\lambda^2\right)\right.\\
&\left.+k_1^{\mu}\left(\lambda^2-m_1^2\right)\Delta_{\mu\nu}\left(\lambda^2\right)\right]\\
&+4\left[-k_2^{\mu}\nabla_{\mu\nu}\left(\lambda^2\right)-\frac{1}{3}k_2^{\mu}k_2^{\alpha}k_2^{\beta}\Box_{\alpha\beta\mu\nu}\left(\lambda^2\right)+\frac{1}{3}k_2^{2}k_2^{\mu}\Delta_{\mu\nu}\left(\lambda^2\right)+\frac{2}{3}k_{2\nu}k_2^{\mu}k_2^{\beta}\Delta_{\beta\mu}\left(\lambda^2\right)\right.\\
&\left.+k_2^{\mu}\left(\lambda^2-m_2^2\right)\Delta_{\mu\nu}\left(\lambda^2\right)\right]\\
&+\left(m_1-m_2\right)\left\{+2q_{\nu}\left(m_2-m_1\right)\left\{I_{\log}\left(\lambda^2\right)-\left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right]Z_0\left(k_1;k_2;\lambda^2\right)\right\}\right.\\
&-2\left(m_1+m_2\right)Q^{\mu}\Delta_{\mu\nu}\left(\lambda^2\right)\\
&\left.-2q_{\nu}\left(m_1+m_2\right)\left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right]\left[2Z_1\left(k_1;k_2;\lambda^2\right)-Z_0\left(k_1;k_2;\lambda^2\right)\right]\right\}. \qquad (6.10)
\end{aligned}$$

E assim podemos identificar na expressão acima

$$\left(k_1-k_2\right)^{\mu}T_{\mu\nu}^{VV}=-T_{\nu}^{V}\left(m_1,k_1\right)+T_{\nu}^{V}\left(m_2,k_2\right)+\left(m_1-m_2\right)T_{\nu}^{VS}, \qquad (6.11)$$

que é a relação que foi estabelecida no capítulo 2. Notamos que no processo descrito acima não realizamos escolhas específicas para as quantidades arbitrárias envolvidas o que nos leva a concluir que a relação entre funções de Green é mantida mesmo na presença das arbitrariedades intrínsecas aos cálculos.

A verificação da segunda identidade, aquela correspondente ao índice ν,

$$\left(k_1-k_2\right)^{\nu}T_{\mu\nu}^{VV}=T_{\mu}^{V}\left(m_2,k_2\right)-T_{\mu}^{V}\left(m_1,k_1\right)+\left(m_1-m_2\right)T_{\mu}^{VS} \qquad (6.12)$$

segue caminhos completamente similares e é por fim verificada igualmente satisfeita.

Para completarmos as verificações envolvendo funções de dois pontos tomamos agora a função $T_{\mu\nu}^{AA}$. Após seguir os passos utilizados para a função $T_{\mu\nu}^{VV}$, identificaremos as relações

$$\left(k_1-k_2\right)^{\nu}T_{\mu\nu}^{AA}=T_{\mu}^{V}\left(m_2,k_2\right)-T_{\mu}^{V}\left(m_1,k_1\right)+\left(m_1+m_2\right)T_{\mu}^{AP}, \qquad (6.13)$$

$$\left(k_1-k_2\right)^{\mu}T_{\mu\nu}^{AA}=-T_{\nu}^{V}\left(m_1,k_1\right)+T_{\nu}^{V}\left(m_2,k_2\right)+\left(m_1+m_2\right)T_{\nu}^{AP}. \qquad (6.14)$$

6.3 Relações entre funções de Green para funções de três pontos

Para a verificação das identidades envolvendo as funções de três pontos escolhemos algumas representativas para cada classe de amplitudes, já que a quantidade de funções de três pontos com um número par de matrizes γ_5 é suficientemente grande para considerarmos todas explicitamente.

Inicialmente consideramos a função T_{λ}^{VSS} cuja contração com o momento $(k_3 - k_2)^{\lambda} = (p+q)^{\lambda}$ pode ser escrita, com a utilização da forma explícita da função T_{λ}^{VSS}, expressão (5.27), como

$$\begin{aligned}
(k_3 - k_2)^{\lambda} T_{\lambda}^{VSS} &= -2\,(p+q)^{\lambda}\,(k_2+k_3)^{\alpha}\,\Delta_{\alpha\lambda}\left(\lambda^2\right) \\
&\quad -2\,(p+q)^{\lambda}\,q_{\lambda}\left\{ I_{\log}\left(\lambda^2\right) - \left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right]\left[Z_0\,(1,2) + 2Z_1\,(2,3) - Z_0\,(2,3)\right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left. +\ \left[p^2 - (m_1+m_3)^2\right](\xi_{00})\right]\right\} \\
&\quad +2\,(p+q)^{\lambda}\,p_{\lambda}\left\{ I_{\log}\left(\lambda^2\right) - \left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right]\left[Z_0\,(1,3) - 2Z_1\,(2,3) + Z_0\,(2,3)\right]\right. \\
&\qquad\qquad \left. +\ \left[q^2 - (m_2+m_1)^2\right](\xi_{00})\right]\right\} \\
&\quad +2\left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right]\left[(m_2+m_1)^2 + (m_1+m_3)^2 - (m_2-m_3)^2\right]\times \\
&\qquad\qquad \times\left\{\left[q^2\,(\xi_{01}) - p.q\,(\xi_{10})\right] - \left[p^2\,(\xi_{10}) - p.q\,(\xi_{01})\right]\right\} \\
&\quad +4\,(p.q)\left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right]\left[q^2\xi_{01} - (q.p)\,\xi_{10} - p^2\xi_{10} + (p.q)\,\xi_{01}\right]. \qquad (6.15)
\end{aligned}$$

Onde podemos ver o surgimento natural das propriedades (3.37) e (3.36) estabelecidas para as funções ξ_{10} e ξ_{01};

$$\begin{aligned}
q^2\varepsilon_{01} - (p.q)\,\varepsilon_{10} &= \frac{1}{2}\left\{-Z_0\,(2,3) + Z_0\,(1,3)\right. \\
&\qquad \left. +\ \left[q^2 + \left(m_1^2 - m_2^2\right)\right]\varepsilon_{00}\right\}, \qquad (6.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p^2\varepsilon_{10} - (p.q)\,\varepsilon_{01} &= \frac{1}{2}\left\{-Z_0\,(2,3) + Z_0\,(1,2)\right. \\
&\qquad \left. +\ \left[p^2 + \left(m_1^2 - m_3^2\right)\right]\varepsilon_{00}\right\}. \qquad (6.17)
\end{aligned}$$

A utilização de tais propriedades permite estabelecer o resultado

$$
\begin{aligned}
(k_3-k_2)^{\lambda}T^{VSS}_{\lambda} &= -4I_{quad}\left(\lambda^2\right)-p^{\alpha}p^{\lambda}\Delta_{\alpha\lambda}\left(\lambda^2\right)-(k_1+k_3)^{\alpha}(k_1+k_3)^{\lambda}\Delta_{\alpha\lambda}\left(\lambda^2\right)\\
&-2\left\{\left(m_1^2-\lambda_1^2\right)I_{\log}\left(\lambda^2\right)+\left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right]\left[m_1^2-\lambda^2+m_1^2\ln\left(\frac{\lambda^2}{m_1^2}\right)\right]\right\}\\
&-2\left\{\left(m_3^2-\lambda^2\right)I_{\log}\left(\lambda^2\right)+\left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right]\left[m_3^2-\lambda^2+m_3^2\ln\left[\frac{\lambda^2}{m_3^2}\right]\right]\right\}\\
&+2\left[(m_1+m_3)^2-p^2\right]\left\{I_{\log}\left(\lambda^2\right)-\left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right]Z_0\left(1,3\right)\right\}\\
&+4I_{quad}\left(\lambda^2\right)+q^{\alpha}q^{\lambda}\Delta_{\alpha\lambda}\left(\lambda^2\right)+(k_1+k_2)^{\alpha}(k_1+k_2)^{\lambda}\Delta_{\alpha\lambda}\left(\lambda^2\right)\\
&+2\left\{\left(m_1^2-\lambda^2\right)I_{\log}\left(\lambda^2\right)+\left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right]\left[m_1^2-\lambda^2+m_1^2\ln\left(\frac{\lambda^2}{m_1^2}\right)\right]\right\}\\
&+2\left\{\left(m_2^2-\lambda^2\right)I_{\log}\left(\lambda^2\right)+\left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right]\left[m_2^2-\lambda^2+m_2^2\ln\left[\frac{\lambda^2}{m_2^2}\right]\right]\right\}\\
&+2\left[(m_1+m_2)^2-q^2\right]\left\{I_{\log}\left(\lambda^2\right)-\left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right]Z_0\left(1,2\right)\right\}\\
&+(m_3-m_2)\Bigg\{\\
&\qquad +2\left(m_2+m_3\right)\left[I_{\log}\left(\lambda^2\right)-\left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right)Z_0\left(2,3\right)\right]\\
&\qquad +2\left(m_1+m_2\right)\left[I_{\log}\left(\lambda^2\right)-\left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right)Z_0\left(1,2\right)\right]\\
&\qquad +2\left(m_1+m_3\right)\left[I_{\log}\left(\lambda^2\right)-\left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right)Z_0\left(1,3\right)\right]\\
&\qquad +2\left\{\left[(m_1+m_3)^2-p^2\right]m_2+\left[(m_2-m_1)^2-q^2\right]m_3\right.\\
&\qquad +\left.\left[(m_2+m_3)^2-(p+q)^2\right]m_1\right\}\left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right]\left(\xi_{00}\right)\Bigg\}. \qquad (6.18)
\end{aligned}
$$

onde é possível identificar, claramente, a seguinte relação entre funções de Green:

$$
\begin{aligned}
(k_3-k_2)^{\lambda}T^{VSS}_{\lambda} &= T^{SS}\left(m_1,k_1;m_2,k_2\right)-T^{SS}\left(m_1,k_1;m_3,k_3\right)\\
&+\left(m_3-m_2\right)T^{SSS}, \qquad (6.19)
\end{aligned}
$$

que é a propriedade desejada.

Seguindo um procedimento idêntico ao descrito acima podemos estabelecer também

$$
\begin{aligned}
(k_3-k_2)^{\lambda}T^{VPP}_{\lambda} &= T^{PP}\left(m_1,k_1;m_3,k_3\right)-T^{PP}\left(m_1,k_1;m_2,k_2\right)\\
&+\left(m_2-m_3\right)T^{SPP}, \qquad (6.20)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(k_1-k_2)^{\nu}\, T_{\nu}^{PPV} &= T^{PP}\left(m_2,k_2;m_3,k_3\right)-T^{PP}\left(m_1,k_1;m_3,k_3\right) \\
&\quad +\left(m_1-m_2\right) T^{PPS},
\end{aligned} \tag{6.21}
$$

$$
\begin{aligned}
(k_3-k_1)^{\mu}\, T_{\mu}^{PVP} &= T^{PP}\left(m_1,k_1;m_2,k_2\right)-T^{PP}\left(m_2,k_2;m_3,k_3\right) \\
&\quad +\left(m_3-m_1\right) T^{PSP}.
\end{aligned} \tag{6.22}
$$

Para a função T_{μ}^{PAS} teremos inicialmente

$$
\begin{aligned}
(k_3-k_1)^{\mu}\, T_{\mu}^{PAS} &= -2p^{\mu}\left(k_1+k_3\right)^{\alpha}\Delta_{\alpha\mu}\left(\lambda^2\right) \\
&\quad +2p^{\mu}\left(p+q\right)_{\mu}\left\{I_{\log}\left(\lambda^2\right)-\left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right]Z_0\left(2,3\right)\right\} \\
&\quad +2p^2\left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right]\left\{2Z_1\left(1,3\right)-Z_0\left(1,3\right)+\left[\left(m_2+m_1\right)^2-q^2\right]\xi_{00}\right\} \\
&\quad +2\left(p.q\right)\left\{I_{\log}\left(\lambda^2\right)-\left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right]\left[Z_0\left(1,2\right)-\left[\left(m_3+m_1\right)^2-p^2\right]\xi_{00}\right]\right\} \\
&\quad +2\left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right]\left[\left(m_3+m_1\right)^2-\left(m_3-m_2\right)^2-\left(m_2+m_1\right)^2\right]\times \\
&\qquad\qquad \times\left[p^2\xi_{10}-\left(p.q\right)\xi_{01}\right] \\
&\quad +4\left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right]\left[q^2+\left(p.q\right)\right]\left[p^2\xi_{10}-\left(p.q\right)\xi_{01}\right].
\end{aligned} \tag{6.23}
$$

A utilização das propriedades (3.37) e (3.36) e mais algumas manipulações puramente algébricas torna possível colocar o resultado na forma

$$
\begin{aligned}
(k_3-k_1)^{\mu}\, T_{\mu}^{PAS} &= T^{SS}\left(m_1,k_1;m_2,k_2\right)+T^{PP}\left(m_2,k_2;m_3,k_3\right) \\
&\quad +\left(m_3+m_1\right) T^{PPS},
\end{aligned} \tag{6.24}
$$

que é a propriedade desejada. Igualmente fácil é verificar

$$
\begin{aligned}
(k_1-k_2)^{\nu}\, T_{\nu}^{PSA} &= T^{PP}\left(m_2,k_2;m_3,k_3\right)+T^{SS}\left(m_1,k_1;m_3,k_3\right) \\
&\quad +\left(m_1+m_2\right) T^{PSP}.
\end{aligned} \tag{6.25}
$$

Passamos agora para funções contendo dois índices de Lorentz, onde iremos inicialmente considerar a relação envolvendo a contração do momento externo $(k_3-k_1)^{\mu}=p^{\mu}$

com a amplitude $T_{\mu\nu}^{SVV}$. Utilizando a forma explícita obtida no capítulo 5, expressão (5.35), para a amplitude em questão poderemos facilmente obter a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned}
p^{\mu}T_{\mu\nu}^{SVV} &= 2\left(m_3+m_2\right)p^{\mu}\Delta_{\mu\nu}\left(\lambda^2\right) \\
&+2p_{\nu}\left(m_3+m_2\right)I_{\log}\left(\lambda^2\right) \\
&+\left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right]\{ \\
&-4\left(m_3+m_2\right)p_{\nu}\eta_{00} \\
&+8p_{\nu}\left(m_3+m_2\right)\left\{\left(p^2\right)\xi_{20}-\left(p.q\right)\xi_{11}\right\} \\
&-8\left(p^2\right)p_{\nu}\left[m_2\xi_{10}\right] \\
&-8q_{\nu}\left(m_3+m_2\right)\left\{\left(p^2\right)\xi_{11}-\left(p.q\right)\xi_{02}\right\} \\
&-8\left(p.q\right)q_{\nu}\left[m_3\xi_{01}\right] \\
&-4\left(p^2\right)q_{\nu}\left[-\left(m_1+m_3\right)\xi_{10}-\left(m_1+m_2\right)\xi_{01}+m_1\xi_{00}\right] \\
&-4\left(p.q\right)p_{\nu}\left[+\left(m_1-m_3\right)\xi_{10}+\left(m_1-m_2\right)\xi_{01}-m_1\xi_{00}\right] \\
&+4p_{\nu}\left[m_1-m_3-m_2\right]I_{\log}\left(\lambda^2\right) \\
&+2p_{\nu}\left\{\left[\left(m_2-m_3\right)^2-\left(p+q\right)^2\right]m_1-\left[\left(m_1-m_2\right)^2-q^2\right]m_3+\right. \\
&\qquad\left.-\left[\left(m_1-m_3\right)^2-p^2\right]m_2\right\}\xi_{00} \\
&-2p_{\nu}\left(m_1-m_3\right)Z_0\left(1,3\right) \\
&-2p_{\nu}\left(m_1-m_2\right)Z_0\left(1,2\right) \\
&+2p_{\nu}\left(m_3+m_2\right)Z_0\left(2,3\right)\}, \qquad (6.26)
\end{aligned}$$

onde é possível identificar as propriedades (3.38) e (3.39) estabelecidas no capítulo 3 para as funções ξ_{20}, ξ_{11} e ξ_{02}.

$$\begin{aligned}
\left[p^2\xi_{20}-p.q\xi_{11}\right] &= \frac{1}{2}\left\{-Z_1\left(2,3\right)+\eta_{00}\right. \\
&\left.+\left(p^2+m_1^2-m_3^2\right)\xi_{10}\right\}, \qquad (6.27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[p^2\xi_{11}-p.q\xi_{02}\right] &= \frac{1}{2}\left\{Z_1\left(2,3\right)-Z_0\left(2,3\right)+Z_1\left(1,2\right)\right. \\
&\left.+\left(p^2+m_1^2-m_3^2\right)\xi_{01}\right\}. \qquad (6.28)
\end{aligned}$$

A utilização de tais propriedades além daquelas (3.37) e (3.36) nos permite escrever

$$\begin{aligned}
p^{\mu}T_{\mu\nu}^{SVV} &= +2\left(m_1-m_3\right)\left(k_2+k_1\right)^{\mu}\Delta_{\mu\nu}\left(\lambda^2\right) \\
&\quad +2p_{\nu}\left(m_1-m_3\right)\left\{2I_{\log}\left(\lambda^2\right)-\left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right]\left[Z_0\left(1,3\right)+Z_0\left(2,3\right)\right.\right. \\
&\qquad +\left[p^2-\left(m_3+m_1\right)^2\right]\xi_{10}+\left[\left(p+q\right)^2-\left(m_3+m_2\right)^2\right]\xi_{10} \\
&\qquad \left.\left.+\left[q^2-\left(m_1-m_2\right)^2\right]\left(\xi_{00}-\xi_{10}\right)\right]\right\} \\
&\quad +2q_{\nu}\left(m_1-m_3\right)\left\{I_{\log}\left(\lambda^2\right)+\left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right]\left[-Z_0\left(2,3\right)+2Z_1\left(1,2\right)-Z_0\left(1,2\right)\right.\right. \\
&\qquad +\left[\left(p+q\right)^2-\left(m_3+m_2\right)^2\right]\xi_{01}-\left[q^2-\left(m_1-m_2\right)^2\right]\xi_{01} \\
&\qquad \left.\left.-\left[p^2-\left(m_3+m_1\right)^2\right]\left(\xi_{00}-\xi_{01}\right)\right]\right\} \\
&\quad -2\left(m_1+m_2\right)\left(k_2+k_1\right)^{\mu}\Delta_{\mu\nu}\left(\lambda^2\right) \\
&\quad +2\left(m_1+m_2\right)q_{\nu}\left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right]\left[-2Z_1\left(1,2\right)+Z_0\left(1,2\right)\right] \\
&\quad -2q_{\nu}\left(m_1-m_2\right)\left[I_{\log}\left(\lambda^2\right)-\left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right]Z_0\left(1,2\right)\right] \\
&\quad +2\left(m_3+m_2\right)\left(k_3+k_2\right)^{\mu}\Delta_{\mu\nu}\left(\lambda^2\right) \\
&\quad +2\left(m_2+m_3\right)\left(q+p\right)_{\nu}\left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right]\left[-2Z_1\left(2,3\right)+Z_0\left(2,3\right)\right] \\
&\quad -2\left(p+q\right)_{\nu}\left(m_2-m_3\right)\left[I_{\log}\left(\lambda^2\right)-\left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right]Z_0\left(2,3\right)\right],
\end{aligned} \tag{6.29}$$

de onde podemos identificar a seguinte relação entre funções de Green:

$$\begin{aligned}
\left(k_3-k_1\right)^{\mu}T_{\mu\nu}^{SVV} &= T_{v}^{SV}\left(m_1,k_1;m_2,k_2\right)-T_{v}^{SV}\left(m_3,k_3;m_2,k_2\right) \\
&\quad +\left(m_3-m_1\right)T_{\nu}^{SSV}.
\end{aligned} \tag{6.30}$$

A contração com o índice ν nos conduz, seguindo os mesmos passos, à

$$\begin{aligned}
\left(k_1-k_2\right)^{\nu}T_{\mu\nu}^{SVV} &= T_{\mu}^{SV}\left(m_2,k_2;m_3,k_3\right)-T_{\mu}^{SV}\left(m_1,k_1;m_3,k_3\right) \\
&\quad +\left(m_1-m_2\right)T_{\mu}^{SVS}.
\end{aligned} \tag{6.31}$$

Podemos ainda verificar que

$$\begin{aligned}
\left(k_3-k_1\right)^{\mu}T_{\mu\nu}^{SAA} &= T_{v}^{PA}\left(m_1,k_1;m_2,k_2\right)-T_{v}^{SV}\left(m_2,k_2;m_3,k_3\right) \\
&\quad +\left(m_3+m_1\right)T_{\nu}^{SPA},
\end{aligned} \tag{6.32}$$

$$
\begin{aligned}
\left(k_1-k_2\right)^v T_{\mu\nu}^{SAA} &= T_\mu^{SV}\left(m_2,k_2;m_3,k_3\right)+T_\mu^{PA}\left(m_1,k_1;m_3,k_3\right)\\
&\quad+\left(m_2+m_1\right)T_\mu^{SAP}. \qquad (6.33)
\end{aligned}
$$

Por fim consideramos agora uma função com três índices de Lorentz. Tomamos para tal a amplitude $T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}$. No capítulo 5 vimos que esta amplitude poderia ser escrita em termos do tensor $T_{\lambda\mu\nu}$ e de funções de três pontos com um índice de Lorentz, onde obtemos

$$
T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}=4T_{\lambda\mu\nu}+g_{\mu\nu}T_\lambda^{VPP}+g_{\lambda\nu}T_\mu^{PVP}+g_{\lambda\mu}T_\nu^{PPV}. \qquad (6.34)
$$

No objetivo de analisar o resultado da contração do momento externo $(k_1-k_2)^\nu$ com a função $T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}$ deveremos, então, realizar a contração deste momento com cada uma das estruturas do lado direito da expressão acima. Para isso utilizamos os resultados do tensor, dado por (5.39), e das amplitudes com um índice vetorial, expressões (5.29), (5.30) e (5.31). Na contração do momento q^ν com o tensor $T_{\lambda\mu\nu}$ surgirá naturalmente a necessidade de utilizarmos as relações determinadas no capítulo 3 para as funções $\xi's$ de soma $n+m=3$ e aquelas envolvendo as funções η_{01} e η_{10}, a saber:

$$
\begin{aligned}
\left[q^2\xi_{21}-p.q\xi_{30}\right] &= \frac{1}{2}\left\{-Z_2\left(2,3\right)+Z_2\left(1,3\right)\right.\\
&\quad\left.+\left(q^2+m_1^2-m_2^2\right)\xi_{20}\right\}, \qquad (6.35)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[q^2\xi_{03}-p.q\xi_{12}\right] &= \frac{1}{2}\left\{-Z_0\left(2,3\right)+2Z_1\left(2,3\right)\right.\\
&\quad-Z_2\left(2,3\right)+2\eta_{01}\\
&\quad\left.+\left(q^2+m_1^2-m_2^2\right)\xi_{02}\right\}, \qquad (6.36)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[q^2\xi_{12}-p.q\xi_{21}\right] &= \frac{1}{2}\left\{Z_2\left(2,3\right)-Z_1\left(2,3\right)\right.\\
&\quad+\eta_{10}\\
&\quad\left.+\left(q^2+m_1^2-m_2^2\right)\xi_{11}\right\}, \qquad (6.37)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[q^2\eta_{01}-\left(p.q\right)\eta_{10}\right] &= \frac{1}{2}\left\{2p^2Z_2\left(1,3\right)-\left[p^2+m_1^2-m_3^2\right]Z_1\left(1,3\right)\right.\\
&\quad-2\left(p+q\right)^2Z_2\left(2,3\right)+\left[\left(p+q\right)^2-m_2^2-m_3^2\right]Z_1\left(2,3\right)\\
&\quad\left.+\left[q^2+m_1^2-m_2^2\right]\eta_{00}\right\}, \qquad (6.38)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\left[p^2\eta_{10}-(p.q)\,\eta_{01}\right] &= \frac{1}{2}\left\{2q^2Z_2\,(1,2)-\left[q^2+m_1^2-m_2^2\right]Z_1\,(1,2)\right.\\
&\quad -2\,(p+q)^2\,Z_2\,(2,3)+\left[(p+q)^2-m_2^2-m_3^2\right]Z_1\,(2,3)\\
&\quad \left.+\left[p^2+m_1^2-m_3^2\right]\eta_{00}\right\}, \qquad (6.39)
\end{aligned}$$

além daquelas envolvendo as funções $\xi's$ de soma um e dois já utilizadas neste capítulo.

A contração com as demais estruturas não traz nenhum ingrediente novo. Assim, após um longo e tedioso trabalho algébrico é possível colocar a contração na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
q^\nu T^{VVV}_{\lambda\mu\nu} &= +\,(m_1-m_2)\,T^{VVS}_{\lambda\mu}\\
&\quad +A_{\lambda\mu}\,(2,3)\\
&\quad +\frac{4}{3}\left[(p+q)^2\,g_{\lambda\mu}-(p+q)_\lambda\,(p+q)_\mu\right]I_{\log}\left(\lambda^2\right)\\
&\quad -2\,(m_3-m_2)^2\,g_{\lambda\mu}\left\{I_{\log}\left(\lambda^2\right)-\left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right]Z_0\,(2,3)\right\}\\
&\quad -2g_{\mu\lambda}\left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right]\left[m_2^2-m_3^2+m_2^2\ln\left[\frac{\lambda^2}{m_2^2}\right]-m_3^2\ln\left[\frac{\lambda^2}{m_2^2}\right]+(p+q)^2\,Z_0\,(2,3)\right]\\
&\quad +4\,(p+q)_\mu\,(p+q)_\lambda\left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right]Z_1\,(2,3)\\
&\quad +4\left(g_{\mu\lambda}\,(p+q)^2-(p+q)_\mu\,(p+q)_\lambda\right)\left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right]\left\{2Z_2\,(2,3)-Z_1\,(2,3)\right\}\\
&\quad -4g_{\mu\lambda}\left[m_2^2-m_3^2\right]\left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right]Z_1\,(2,3)\\
&\quad -A_{\lambda\mu}\,(1,3)\\
&\quad -\frac{4}{3}\left[\left(p^2\right)g_{\lambda\mu}-p_\mu p_\lambda\right]I_{\log}\left(\lambda^2\right)\\
&\quad +2\,(m_1-m_3)^2\,g_{\mu\lambda}\left\{I_{\log}\left(\lambda^2\right)-\left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right]Z_0\,(1,3)\right\}\\
&\quad +2g_{\lambda\mu}\left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right]\left[m_1^2-m_3^2+m_1^2\ln\left(\frac{\lambda^2}{m_1^2}\right)-m_3^2\ln\left(\frac{\lambda^2}{m_2^2}\right)+\left(p^2\right)Z_0\,(1,3)\right]\\
&\quad -4p_\mu p_\lambda\left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right]Z_1\,(1,3)\\
&\quad -4\left(g_{\mu\lambda}\left(p^2\right)-p_\mu p_\lambda\right)\left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right]\left\{2Z_2\,(1,3)-Z_1\,(1,3)\right\}\\
&\quad +4g_{\mu\lambda}\left[m_1^2-m_3^2\right]\left[\frac{i}{(4\pi)^2}\right]Z_1\,(1,3)\,.
\end{aligned}$$

E deste modo

$$
\begin{aligned}
(k_1 - k_2)^{\nu} T^{VVV}_{\lambda\mu\nu} &= T^{VV}_{\lambda\mu}(m_2, k_2; m_3, k_3) - T^{VV}_{\lambda\mu}(m_1, k_1; m_3, k_3) \\
&+ (m_1 - m_2) T^{VVS}_{\lambda\mu}, \qquad (6.40)
\end{aligned}
$$

que verifica a relação entre funções de Green procurada.

Do mesmo modo podemos encontrar:

$$
\begin{aligned}
(k_3 - k_1)^{\mu} T^{VVV}_{\lambda\mu\nu} &= T^{VV}_{\lambda\nu}(m_1, k_1; m_2, k_2) - T^{VV}_{\lambda\nu}(m_2, k_2; m_3, k_3) \\
&+ (m_3 - m_1) T^{VSV}_{\lambda\nu} \qquad (6.41)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
(k_3 - k_2)^{\lambda} T^{VVV}_{\lambda\mu\nu} &= T^{VV}_{\mu\nu}(m_1, k_1; m_2, k_2) - T^{VV}_{\mu\nu}(m_1, k_1; m_3, k_3) \\
&+ (m_3 - m_2) T^{SVV}_{\mu\nu}. \qquad (6.42)
\end{aligned}
$$

De modo similar surgem as relações

$$
\begin{aligned}
(k_1 - k_2)^{\nu} T^{VAA}_{\lambda\mu\nu} &= T^{VV}_{\lambda\mu}(m_2, k_2; m_3, k_3) - T^{AA}_{\lambda\mu}(m_1, k_1; m_3, k_3) \\
&+ (m_1 + m_2) T^{VAP}_{\lambda\mu}, \qquad (6.43)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(k_3 - k_1)^{\mu} T^{VAA}_{\lambda\mu\nu} &= T^{AA}_{\lambda v}(m_1, k_1; m_2, k_2) - T^{VV}_{\lambda v}(m_2, k_2; m_3, k_3) \\
&+ (m_3 + m_1) T^{VPA}_{\lambda\nu} \qquad (6.44)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
(k_3 - k_2)^{\lambda} T^{VAA}_{\lambda\mu\nu} &= T^{AA}_{\mu\nu}(m_1, k_1; m_2, k_2) - T^{AA}_{\mu\nu}(m_1, k_1; m_3, k_3) \\
&+ (m_3 - m_2) T^{SAA}_{\mu\nu}. \qquad (6.45)
\end{aligned}
$$

Com os resultados acima notamos que os cálculos e manipulações efetuadas para determinarmos as formas finais das funções de Green, no contexto do método adotado, preservaram as relações entre funções que identificamos como vínculos entre elas. Notamos também que as relações são mantidas preservadas sem que seja necessário fazermos escolhas específicas para as quantidades arbitrarias presentes. Uma vez que estes vínculos relacionam funções de Green com diferentes graus de divergência podemos concluir que o método adotado, alternativo aos usuais métodos de regularização, é consistente no tratamento das divergências no que diz respeito a preservação das relações entre funções de Green das funções contendo um número par de matrizes γ_5.

Embora as relações entre funções de Green nos sirvam como um teste de consistência para o método de tratamento das divergências estas relações não nos fornecem informações acerca de como eliminar consistentemente as arbitrariedades que ainda se fazem presentes nas formas finais das funções de Green. Para isso, será necessário consultarmos o outro conjunto de imposições sobre as funções de Green, que são as relações de simetria.

Capítulo 7

Ambigüidades e relações de simetria

7.1 Introdução

Em soluções perturbativas de TQC's os processos físicos pertinentes à teoria são descritos, ordem a ordem no parâmetro perturbativo, por amplitudes físicas que podem ser construídas através do adequado uso das regras de Feynman. É, portanto, das amplitudes físicas perturbativas que devem ser obtidas informações sobre as conseqüências de um conjunto de simetrias admitidas como relevantes para a dinâmica de um determinado sistema de partículas interagentes. Porém, tais amplitudes físicas podem estar contaminadas por indefinições matemáticas provenientes de integrais de Feynman divergentes. Devido a isso, com raras exceções, no contexto de TQC's, a fim de que alguma predição possa ser construída a partir das amplitudes perturbativas, torna-se necessário primeiro dar um adequado tratamento para os infinitos ou divergências presentes nas soluções perturbativas. Um dos aspectos cruciais associados a este tipo de problema é a possibilidade de contaminação das amplitudes perturbativas por ambigüidades associadas à escolha tanto dos rótulos dos momentos internos dos loops como da escala comum na definição das partes finitas e divergentes das integrais de Feynman. Deste modo, a consistência nos cálculos perturbativos de TQC's passa, invariavelmente, pela eliminação sistemática destas possíveis ambigüidades a fim de que as amplitudes físicas sejam bem determinadas, ou seja, independam de parâmetros arbitrários permitindo assim que possam ser interpretadas como conseqüência das simetrias assumidas como relevantes. A teoria passa então a ter poder de predição.

Nos capítulos precedentes fizemos um esforço para tratar as amplitudes perturbativas escolhidas de modo a preservar as arbitrariedades envolvidas nos cálculos afim de não comprometer o resultado final das amplitudes com nenhuma particular escolha. Esperamos no entanto, que através de uma interpretação universal para as arbitrariedades seja possível elimina-las das expressões finais das funções de Green.

No capítulo anterior avaliamos explicitamente as relações entre funções de Green e concluímos que estas relações, que são identidades estabelecidas de modo anterior à introdução do sinal de integração, são mantidas preservadas durante as manipulações e cálculos que efetuamos. Tais relações são preservadas ainda na presença de termos potencialmente ambíguos. Assim, a verificação destas relações não se mostra uma ferramenta útil no que diz respeito à eliminação de ambigüidades, uma vez que nas relações que são explicitamente verificadas não é necessário que façamos restrições sobre as arbitrariedades.

Nossa tarefa nesse capítulo será a de tentar encontrar propriedades universais para as integrais divergentes que permitam a eliminação consistente de todas as possíveis ambigüidades e simultaneamente nos forneçam amplitudes livres de violações de relações de simetria. Neste contexto iremos encontrar um conjunto de propriedades que os objetos divergentes básicos devem satisfazer quando avaliados por alguma regularização explícita, as chamadas relações de consistência, de modo que todo os termos potencialmente violadores de relações de simetria sejam eliminados.

7.2 Ambigüidades associadas às escolhas para os momentos de linhas internas

Ao calcularmos as funções de Green escolhidas para fazer parte desta investigação notamos a presença de termos ambíguos, ou seja, termos que são dependentes de escolhas específicas. O mais popular destes casos é a dependência com as escolhas dos rótulos para os momentos das linhas internas dos diagramas contendo loops. Isto ocorre porque as relações de conservação de energia e momento não fixam completamente os momentos carregados pelas linhas internas. Pode-se adicionar uma quantidade arbitrária de momento em todas as linhas internas sem violar tais relações de conservação. Esta propriedade não é a causa em si das ambigüidades, uma vez que na construção de qualquer TQC a homogeneidade do espaço-tempo é uma simetria assumida fundamental. Nos diagramas isto se manifestaria pela invariância das amplitudes frente a um shift na variável de integração dos loops. O elemento complicador deste esquema simples é a presença de integrais cujo grau de divergência supere o logarítmico, pois para estes casos os shifts não podem ser efetuados impunemente. A cada shift efetuado é necessário a compensação por um termo de superfície e com isso as amplitudes podem diferir, em princípio, por termos de superfície quando as rotulações dos momentos das linhas internas, que são escolhas, diferem. Assim, a menos que propriedades gerais para as integrais de Feynman, capazes de eliminar consistentemente os termos incômodos, sejam identificadas, de tal forma que possam ser incorporadas por construção em regularizações, uma simetria fundamental do espaço-tempo, a homogeneidade, será quebrada nos cálculos perturbativos. As amplitudes conterão peças ambíguas. Consequentemente a descrição fenomenológica somente poderá ser feita através de ajustes das quantidades indefinidas. Neste quadro não há predições e sim ajustes fenomenológicos.

Na investigação promovida no presente trabalho fizemos um esforço para caracterizar de modo claro e transparente os termos que apresentam dependência com as escolhas para os rótulos dos momentos das linhas internas. Para facilitar a análise deste aspecto vamos inicialmente reunir todos os resultados para os termos potencialmente ambíguos.

Para as funções de um ponto temos

$$\left[T^S\right]_{amb} = 4m_1 \left[k_1^\alpha k_1^\beta \Delta_{\alpha\beta}\left(\lambda^2\right)\right], \tag{7.1}$$

$$
\begin{aligned}
\left[T_{\mu}^{V}\right]_{amb} &= 4\left\{-\frac{1}{3}k_1^{\alpha}k_1^{\beta}k_1^{\nu}\Box_{\alpha\beta\mu\nu}\left(\lambda^2\right)-k_1^{\alpha}\nabla_{\alpha\mu}\left(\lambda^2\right)+\frac{1}{3}k_1^2k_1^{\alpha}\Delta_{\mu\alpha}\left(\lambda^2\right)\right.\\
&\left.+\frac{2}{3}k_{1\mu}k_1^{\beta}k_1^{\alpha}\Delta_{\alpha\beta}\left(\lambda^2\right)+\left(\lambda^2-m_1^2\right)k_1^{\alpha}\Delta_{\mu\alpha}\left(\lambda^2\right)\right\}. \qquad (7.2)
\end{aligned}
$$

Por sua vez, para as funções de dois pontos consideradas neste trabalho temos

$$\left[T^{SS}\right]_{amb}=Q^{\alpha}Q^{\beta}\Delta_{\alpha\beta}\left(\lambda^2\right), \qquad (7.3)$$

$$\left[T^{PP}\right]_{amb}=-Q^{\alpha}Q^{\beta}\Delta_{\alpha\beta}\left(\lambda^2\right), \qquad (7.4)$$

$$\left[T_{\mu}^{AP}\right]_{amb}=-2\left(m_1-m_2\right)Q^{\alpha}\Delta_{\alpha\mu}\left(\lambda^2\right), \qquad (7.5)$$

$$\left[T_{\mu}^{VS}\right]_{amb}=-2\left(m_2+m_1\right)Q^{\alpha}\Delta_{\alpha\mu}\left(\lambda^2\right), \qquad (7.6)$$

$$
\begin{aligned}
\left[T_{\mu\nu}^{VV}\right]_{amb} &= \frac{1}{3}\left[3Q^{\alpha}Q^{\beta}\right]\left\{\Box_{\alpha\beta\mu\nu}\left(\lambda^2\right)+g_{\alpha\beta}\Delta_{\mu\nu}\left(\lambda^2\right)+g_{\alpha\nu}\Delta_{\beta\mu}\left(\lambda^2\right)+g_{\alpha\mu}\Delta_{\beta\nu}\left(\lambda^2\right)\right\}\\
&+\frac{1}{3}\left[q^{\alpha}Q^{\beta}-Q^{\alpha}q^{\beta}\right]\left\{\Box_{\alpha\beta\mu\nu}\left(\lambda^2\right)+g_{\alpha\beta}\Delta_{\mu\nu}\left(\lambda^2\right)\right.\\
&\qquad\left.+g_{\alpha\nu}\Delta_{\beta\mu}\left(\lambda^2\right)+g_{\alpha\mu}\Delta_{\beta\nu}\left(\lambda^2\right)\right\}\\
&-g_{\mu\nu}Q^{\alpha}Q^{\beta}\Delta_{\alpha\beta}\left(\lambda^2\right)-Q^{\alpha}Q^{\beta}g_{\alpha\beta}\Delta_{\mu\nu}\left(\lambda^2\right)\\
&-2Q_{\mu}Q^{\alpha}\Delta_{\alpha v}\left(\lambda^2\right)-2Q_{\nu}Q^{\alpha}\Delta_{\alpha\mu}\left(\lambda^2\right). \qquad (7.7)
\end{aligned}
$$

Já para aquelas funções de três pontos:

$$\left[T_{\lambda}^{VSS}\right]_{amb}=-2\left(k_2+k_3\right)^{\alpha}\Delta_{\alpha\lambda}\left(\lambda^2\right), \qquad (7.8)$$

$$\left[T_{\lambda}^{VPP}\right]_{amb}=2\left(k_2+k_3\right)^{\alpha}\Delta_{\alpha\lambda}\left(\lambda^2\right), \qquad (7.9)$$

$$\left[T_{\mu}^{PVP}\right]_{amb}=2\left(k_1+k_3\right)^{\alpha}\Delta_{\alpha\mu}\left(\lambda^2\right), \qquad (7.10)$$

$$\left[T_{\nu}^{PPV}\right]_{amb}=2\left(k_2+k_1\right)^{\alpha}\Delta_{\alpha\nu}\left(\lambda^2\right), \qquad (7.11)$$

$$\left[T_{\mu}^{PAS}\right]_{amb}=-2\left(k_1+k_3\right)^{\alpha}\Delta_{\alpha\mu}\left(\lambda^2\right), \qquad (7.12)$$

$$\left[T_{\nu}^{PSA}\right]_{amb}=+2\left(k_1+k_2\right)^{\alpha}\Delta_{\alpha\nu}\left(\lambda^2\right), \qquad (7.13)$$

$$
\begin{aligned}
\left(T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}\right)_{AMB} &= -\frac{2}{3}\left(k_1+k_3\right)^{\alpha}\Big[\Box_{\lambda\alpha\mu\nu}\left(\lambda^2\right)+g_{\alpha\lambda}\Delta_{\mu\nu}\left(\lambda^2\right)+g_{\alpha\mu}\Delta_{\lambda\nu}\left(\lambda^2\right)+g_{\alpha\nu}\Delta_{\lambda\mu}\left(\lambda^2\right)\\
&\qquad -\ 3g_{\alpha\mu}\Delta_{\lambda\nu}\left(\lambda^2\right)-3g_{\lambda\nu}\Delta_{\alpha\mu}\left(\lambda^2\right)\Big]\\
&\quad -\frac{2}{3}\left(k_3+k_2\right)^{\alpha}\Big[\Box_{\lambda\alpha\mu\nu}\left(\lambda^2\right)+g_{\alpha\lambda}\Delta_{\mu\nu}\left(\lambda^2\right)+g_{\alpha\mu}\Delta_{\lambda\nu}\left(\lambda^2\right)+g_{\alpha\nu}\Delta_{\lambda\mu}\left(\lambda^2\right)\\
&\qquad -\ 3g_{\alpha\lambda}\Delta_{\mu\nu}\left(\lambda^2\right)-3g_{\mu\nu}\Delta_{\alpha\lambda}\left(\lambda^2\right)\Big]\\
&\quad -\frac{2}{3}\left(k_1+k_2\right)^{\alpha}\Big[\Box_{\lambda\alpha\mu\nu}\left(\lambda^2\right)+g_{\alpha\lambda}\Delta_{\mu\nu}\left(\lambda^2\right)+g_{\alpha\mu}\Delta_{\lambda\nu}\left(\lambda^2\right)+g_{\alpha\nu}\Delta_{\lambda\mu}\left(\lambda^2\right)\\
&\qquad -\ 3g_{\alpha\nu}\Delta_{\lambda\mu}\left(\lambda^2\right)-3g_{\lambda\mu}\Delta_{\alpha\nu}\left(\lambda^2\right)\Big] \qquad (7.14)
\end{aligned}
$$

e

$$\left(T_{\lambda\mu\nu}^{VAA}\right)_{AMB}=\left(T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}\right)_{AMB}. \qquad (7.15)$$

7.3 Ambigüidades associadas à escolha da escala comum às partes finita e divergente

O tipo de arbitrariedade associada ao que denominamos ambigüidades de escala não costuma fazer parte das discussões presentes na literatura deste assunto. Este, entretanto pode ser considerado até mais abrangente que aquele caracterizado na seção anterior. As razões para isto podem ser percebidas quando separamos os termos caracterizáveis como potencialmente ambíguos de escala. Isto pode ser feito considerando as expressões obtidas para as amplitudes calculadas e as propriedades de escala dos objetos divergentes e das funções que carregam a parte finita das amplitudes. Mais especificamente, para as funções do tipo Z_k, definidas no capítulo 3 como,

$$Z_k\left(m_1^2;m_2^2,q^2;\lambda_1^2\right)=\int_0^1 dz\,[z]^k\ln\left[\frac{q^2\left(1-z\right)z+\left(m_1^2-m_2^2\right)z-m_1^2}{-\lambda_1^2}\right], \qquad (7.16)$$

o parâmetro arbitrário λ^2 desempenha o papel de escala para as quantidades envolvidas nas funções de dois pontos. É possível, entretanto, mudar a escala através de uma operação simples

$$
\begin{aligned}
Z_k\left(m_1^2;m_2^2,q^2;\lambda_1^2\right) &= \int_0^1 dz\,[z]^k \ln\left[\frac{q^2\,(1-z)\,z+\left(m_1^2-m_2^2\right)z-m_1^2}{-\lambda_2^2}\right] \\
&\quad +\frac{1}{k+1}\ln\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right),
\end{aligned} \tag{7.17}
$$

que significa

$$
Z_k\left(m_1^2;m_2^2,q^2;\lambda_1^2\right)=Z_k\left(m_1^2;m_2^2,q^2;\lambda_2^2\right)+\frac{1}{k+1}\ln\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right). \tag{7.18}
$$

De modo semelhante para as funções do tipo η podemos obter

$$
\begin{aligned}
\eta_{nm}\left(m_1^2;m_2^2,p^2;m_3^2,q^2;\lambda_1^2\right) &= \eta_{nm}\left(m_1^2;m_2^2,p^2;m_3^2,q^2;\lambda_2^2\right) \\
&\quad +\frac{1}{m+1}\ln\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\int_0^1 (1-z)^{m+1}\,dz.
\end{aligned} \tag{7.19}
$$

As duas expressões imediatamente acima nos permitem converter a escala das partes finitas de uma inicial qualquer para outra conveniente em qualquer etapa dos cálculos.

Por outro lado para os objetos divergentes temos as propriedades encontradas no capítulo 4;

$$
I_{\log}(\lambda_1^2)=I_{\log}(\lambda_2^2)-\left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right)\ln\left(\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}\right), \tag{7.20}
$$

$$
\begin{aligned}
I_{quad}(\lambda_1^2) &= I_{quad}(\lambda_2^2)+\left(\lambda_1^2-\lambda_2^2\right)I_{\log}(\lambda_2^2) \\
&\quad +\left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right)\left\{\left(\lambda_1^2-\lambda_2^2\right)+\lambda_1^2\ln\left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\right)\right\}.
\end{aligned} \tag{7.21}
$$

que nos permitem converter a escala das partes divergentes de uma amplitude. As quatro propriedades acima nos permite caracterizar os termos potencialmente ambíguos de escala. Para ver isso de modo mais claro consideremos uma função de dois pontos, a função T_μ^{VS} que é dada por

$$
\begin{aligned}
T_\mu^{VS} &= -2\,(m_2+m_1)\left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right)q_\mu\left[2Z_1\left(m_1;m_2,q^2;\lambda^2\right)-Z_0\left(m_1;m_2,q^2;\lambda^2\right)\right] \\
&\quad -2\,(m_2+m_1)\,Q^\alpha\Delta_{\alpha\mu}\left(\lambda^2\right) \\
&\quad +2\,(m_2-m_1)\,q_\mu\left\{I_{\log}\left(\lambda^2\right)-\left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right)Z_0\left(m_1;m_2,q^2;\lambda^2\right)\right\}.
\end{aligned} \tag{7.22}
$$

Podemos converter a escala de λ^2 para uma das massas presentes na amplitude, m_2^2 por exemplo, utilizando

$$Z_k\left(m_1^2;m_2^2,q^2;\lambda^2\right)=Z_k\left(m_1^2;m_2^2,q^2;m_2^2\right)+\frac{1}{k+1}\ln\left(\frac{m_2^2}{\lambda^2}\right), \tag{7.23}$$

$$I_{\log}(\lambda^2)=I_{\log}(m_2^2)-\left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right)\ln\left(\frac{\lambda^2}{m_2^2}\right).$$

Com isso teremos

$$\begin{aligned}
T_\mu^{VS} &= -2\left(m_2+m_1\right)\left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right)q_\mu\left[2Z_1\left(m_1^2;m_2^2,q^2;m_2^2\right)-Z_0\left(m_1^2;m_2^2,q^2;m_2^2\right)\right]\\
&\quad +2\left(m_2-m_1\right)q_\mu\left[I_{\log}\left(m_2^2\right)-\left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right)Z_0\left(m_1^2;m_2^2,q^2;m_2^2\right)\right]\\
&\quad -2\left(m_2+m_1\right)Q^\alpha\Delta_{\alpha\mu}\left(\lambda^2\right).
\end{aligned} \tag{7.24}$$

A amplitude agora depende apenas de parâmetros físicos, exceto pelo último termo, $2\left(m_2+m_1\right)Q^\alpha\Delta_{\alpha\mu}\left(\lambda^2\right)$ que é simultaneamente potencialmente ambíguo de momento e de escala.

Seguindo esta estratégia podemos converter a escala nas amplitudes calculadas para identificar aqueles termos que podem violar as propriedades de escala das amplitudes. Teremos então

$$T^S\left(m_1,k_1\right)=4m_1I_{quad}\left(m_1^2\right)+4m_1\left[k_1^\alpha k_1^\beta\Delta_{\alpha\beta}\left(\lambda^2\right)\right],$$

$$\begin{aligned}
T_\mu^V &= 4\left\{-\frac{1}{3}k_1^\alpha k_1^\beta k_1^\nu\Box_{\alpha\beta\mu\nu}\left(\lambda^2\right)-k_1^\alpha\nabla_{\alpha\mu}\left(\lambda^2\right)+\frac{1}{3}k_1^2k_1^\nu\Delta_{\mu\nu}\left(\lambda^2\right)\right.\\
&\qquad\left.+\frac{2}{3}k_{1\mu}k_1^\beta k_1^\nu\Delta_{\nu\beta}\left(\lambda^2\right)+\left(\lambda^2-m_1^2\right)k_1^\alpha\Delta_{\mu\alpha}\left(\lambda^2\right)\right\},
\end{aligned} \tag{7.25}$$

$$\begin{aligned}
T^{SS} &= 2\left[I_{quad}\left(m_1^2\right)+I_{quad}\left(m_2^2\right)\right]\\
&\quad +2\left[\left(m_1+m_2\right)^2-q^2\right]\left\{I_{\log}\left(m_2^2\right)-\left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right)Z_0\left(m_1;m_2,q^2;m_2^2\right)\right\}\\
&\quad +q^\alpha q^\beta\Delta_{\alpha\beta}\left(\lambda^2\right)+Q^\alpha Q^\beta\Delta_{\alpha\beta}\left(\lambda^2\right),
\end{aligned} \tag{7.26}$$

$$\begin{aligned}
T^{PP} &= -2\left[I_{quad}\left(m_1^2\right)+I_{quad}\left(m_2^2\right)\right]\\
&\quad -2\left[\left(m_1-m_2\right)^2-q^2\right]\left\{I_{\log}\left(m_2^2\right)-\left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right)Z_0\left(m_1;m_2,q^2;m_2^2\right)\right\}\\
&\quad -\left(q^\alpha q^\beta+Q^\alpha Q^\beta\right)\Delta_{\alpha\beta}\left(\lambda^2\right),
\end{aligned} \tag{7.27}$$

$$
\begin{aligned}
T_{\mu}^{AP} &= -2\left(m_1-m_2\right)\left(\frac{iq_\mu}{(4\pi)^2}\right)\left[2Z_1\left(m_1;m_2,q^2;m_2^2\right)-Z_0\left(m_1;m_2,q^2;m_2^2\right)\right] \\
&\quad -2\left(m_2+m_1\right)q_\mu\left\{I_{\log}\left(m_2^2\right)-\left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right)Z_0\left(m_1;m_2,q^2;m_2^2\right)\right\} \\
&\quad -2\left(m_1-m_2\right)Q^\alpha\Delta_{\alpha\mu}\left(\lambda^2\right), \qquad (7.28)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{VV} &= \frac{4}{3}\left[g_{\mu\nu}q^2-q_\nu q_\mu\right]I_{\log}\left(m_2^2\right) \\
&\quad -4\left[q_\mu q_\nu-g_{\mu\nu}q^2\right]\left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right)\left[2Z_2\left(m_1;m_2,q^2;m_2^2\right)-Z_1\left(m_1;m_2,q^2;m_2^2\right)\right] \\
&\quad +4q_\mu q_\nu\left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right)Z_1\left(m_1;m_2,q^2;m_2^2\right) \\
&\quad -2g_{\mu\nu}\left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right)\left\{m_1^2-m_2^2+q^2Z_0\left(m_1;m_2,q^2;m_2^2\right)\right\} \\
&\quad -2g_{\mu\nu}\left(m_1-m_2\right)^2\left\{I_{\log}\left(m_2^2\right)-\left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right)Z_0\left(m_1;m_2,q^2;m_2^2\right)\right\} \\
&\quad -4g_{\mu\nu}\left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right)\left(m_1^2-m_2^2\right)Z_1\left(m_1;m_2,q^2;m_2^2\right) \\
&\quad +A_{\mu\nu}\left(\lambda^2\right). \qquad (7.29)
\end{aligned}
$$

E assim por diante para as demais amplitudes. Deste modo podemos caracterizar os termos potencialmente ambíguos de escala presentes nas amplitudes:

$$\left[T_{\mu}^{VS}\right]_{amb}^{esc} = -2\left(m_2+m_1\right)Q^\alpha\Delta_{\alpha\mu}\left(\lambda^2\right), \qquad (7.30)$$

$$\left[T^{S}\right]_{amb}^{esc} = 4m_1\left[k_1^\alpha k_1^\beta\Delta_{\alpha\beta}\left(\lambda^2\right)\right], \qquad (7.31)$$

$$
\begin{aligned}
\left[T_{\mu}^{V}\right]_{amb}^{esc} &= 4\left\{-\frac{1}{3}k_1^\alpha k_1^\beta k_1^\nu\Box_{\alpha\beta\mu\nu}\left(\lambda^2\right)-k_1^\alpha\nabla_{\alpha\mu}\left(\lambda^2\right)+\frac{1}{3}k_1^2k_1^\nu\Delta_{\mu\nu}\left(\lambda^2\right)\right. \\
&\quad \left.+\frac{2}{3}k_{1\mu}k_1^\beta k_1^\nu\Delta_{\nu\beta}\left(\lambda^2\right)+\left(\lambda^2-m_1^2\right)k_1^\alpha\Delta_{\mu\alpha}\left(\lambda^2\right)\right\}, \qquad (7.32)
\end{aligned}
$$

$$\left[T^{SS}\right]_{amb}^{esc} = q^\alpha q^\beta\Delta_{\alpha\beta}\left(\lambda^2\right)+Q^\alpha Q^\beta\Delta_{\alpha\beta}\left(\lambda^2\right), \qquad (7.33)$$

$$\left[T^{PP}\right]_{amb}^{esc} = -\left(q^\alpha q^\beta+Q^\alpha Q^\beta\right)\Delta_{\alpha\beta}\left(\lambda^2\right), \qquad (7.34)$$

$$\left[T_{\mu}^{AP}\right]_{amb}^{esc} = -2\left(m_1-m_2\right)Q^\alpha\Delta_{\alpha\mu}\left(\lambda^2\right), \qquad (7.35)$$

$$\left[T_{\mu\nu}^{VV}\right]_{amb}^{esc} = \left[T_{\mu\nu}^{AA}\right]_{amb}^{esc} = A_{\mu\nu}\left(\lambda^2\right), \qquad (7.36)$$

$$\left[T_{\lambda}^{VPP}\right]_{amb}^{esc} = -\left[T_{\lambda}^{VSS}\right]_{amb}^{esc} = 2\left(k_2+k_3\right)^{\alpha}\Delta_{\alpha\lambda}\left(\lambda^2\right), \tag{7.37}$$

$$\left[T_{\mu}^{PVP}\right]_{amb}^{esc} = -\left[T_{\mu}^{PAS}\right]_{amb}^{esc} = 2\left(k_1+k_3\right)^{\alpha}\Delta_{\alpha\mu}\left(\lambda^2\right), \tag{7.38}$$

$$\left[T_{\nu}^{PPV}\right]_{amb}^{esc} = \left[T_{\nu}^{PSA}\right]_{amb}^{esc} = 2\left(k_1+k_2\right)^{\alpha}\Delta_{\alpha\nu}\left(\lambda^2\right), \tag{7.39}$$

$$\left[T_{\mu\nu}^{SVV}\right]_{amb}^{esc} = \left[T_{\mu\nu}^{SAA}\right]_{amb}^{esc} = 2\left(m_3+m_2\right)\Delta_{\mu\nu}\left(\lambda^2\right), \tag{7.40}$$

$$\begin{aligned}
\left[T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}\right]_{amb}^{esc} = & -\frac{2}{3}\left(k_1+k_3\right)^{\alpha}\Big[\Box_{\lambda\alpha\mu\nu}\left(\lambda^2\right)+g_{\alpha\lambda}\Delta_{\mu\nu}\left(\lambda^2\right)+g_{\alpha\mu}\Delta_{\lambda\nu}\left(\lambda^2\right)+g_{\alpha\nu}\Delta_{\lambda\mu}\left(\lambda^2\right) \\
& \qquad - 3g_{\alpha\mu}\Delta_{\lambda\nu}\left(\lambda^2\right)-3g_{\lambda\nu}\Delta_{\alpha\mu}\left(\lambda^2\right)\Big] \\
& -\frac{2}{3}\left(k_3+k_2\right)^{\alpha}\Big[\Box_{\lambda\alpha\mu\nu}\left(\lambda^2\right)+g_{\alpha\lambda}\Delta_{\mu\nu}\left(\lambda^2\right)+g_{\alpha\mu}\Delta_{\lambda\nu}\left(\lambda^2\right)+g_{\alpha\nu}\Delta_{\lambda\mu}\left(\lambda^2\right) \\
& \qquad - 3g_{\alpha\lambda}\Delta_{\mu\nu}\left(\lambda^2\right)-3g_{\mu\nu}\Delta_{\alpha\lambda}\left(\lambda^2\right)\Big] \\
& -\frac{2}{3}\left(k_1+k_2\right)^{\alpha}\Big[\Box_{\lambda\alpha\mu\nu}\left(\lambda^2\right)+g_{\alpha\lambda}\Delta_{\mu\nu}\left(\lambda^2\right)+g_{\alpha\mu}\Delta_{\lambda\nu}\left(\lambda^2\right)+g_{\alpha\nu}\Delta_{\lambda\mu}\left(\lambda^2\right) \\
& \qquad - 3g_{\alpha\nu}\Delta_{\lambda\mu}\left(\lambda^2\right)-3g_{\lambda\mu}\Delta_{\alpha\nu}\left(\lambda^2\right)\Big],
\end{aligned} \tag{7.41}$$

$$\left[T_{\lambda\mu\nu}^{VAA}\right]_{amb}^{esc} = \left[T_{\lambda\mu\nu}^{VVV}\right]_{amb}^{esc}. \tag{7.42}$$

É interessante notar agora que existem dois tipos de termos ambíguos de escala. Aqueles que têm coeficientes ambíguos de momentos e aqueles cujo coeficiente é independente de momentos ou dependem de combinações físicas dos momentos.

7.4 Relações de simetria

A formulação de uma TQC tem como ponto inicial a construção da lagrangiana. Esta é escrita utilizando-se os campos associados às partículas e com base no grupo total de simetrias que consideramos relevantes para a dinâmica dos campos presentes na teoria. Logo, as simetrias possuem um papel fundamental na formulação de uma TQC. O objetivo no estudo de uma TQC é, então, obter as conseqüências fenomenológicas deste conjunto de simetrias. No presente trabalho associamos às partículas do modelo os campos espinoriais $\psi\left(x\right)$ e $\bar{\psi}\left(x\right)$ e na construção da lagrangiana implementamos somente a simetria de Lorentz.

Com os campos $\psi(x)$ e $\bar{\psi}(x)$ e com as matrizes de Dirac construímos as correntes $j_i(x)$ definidas em (2.6) - (2.9). Na forma explícita da lagrangiana os campos de interação apareceriam acoplados à estas correntes. Uma conseqüência dos campos espinoriais obedecerem a equação de Dirac, devido ao fato das partículas serem de spin $s = 1/2$, é que pode-se construir relações entre as correntes $j_i(x)$. Tais relações, relevantes para a presente discussão, são a proporcionalidade entre o divergente da corrente vetorial e a corrente escalar e a proporcionalidade entre o divergente da corrente axial e a corrente pseudo-escalar. Estas duas proporcionalidades são a fonte das relações de simetria a serem verificadas pelos resultados finais das funções de Green, as Identidades de Ward.

Na tentativa de encontrar restrições que fixem propriedades para as integrais divergentes ainda presentes nas amplitudes podemos lançar mão também de teoremas gerais tais como o Teorema de Furry (TF) [15]. Este teorema estabelece que toda a amplitude que possuir um número ímpar de vetores externos e apenas uma espécie de férmion nas linhas internas deve se anular identicamente. Logo este teorema pode ser aplicado na função vetorial de um ponto e no limite de massas iguais das funções de Green com mais pontos.

Temos agora um pequeno conjunto de condições a serem satisfeitas pelas funções de Green. Elas devem estar de acordo com a simetria de Lorentz, com o TF e devem satisfazer as relações de simetria vindas das relações entre as correntes.

É fácil verificar que os resultados finais das funções de Green se transformam corretamente sobre transformações de Lorentz, ou seja, o resultado final da função $T_{\mu\nu}^{VV}$ se transforma como um tensor de segunda ordem bem como a forma final da função T_{μ}^{V} se transforma como um vetor de Lorentz. Isto porque eliminamos os termos que possuem integrandos ímpares nos momentos do loop exigindo que uma distribuição regularizadora seja par no momento de integração.

Para estudarmos as conseqüências devidas a imposição do TF sobre as funções de

Green lembramos, inicialmente, a forma final da função de um ponto vetorial, que é

$$\begin{aligned} T_{\mu}^{V} &= 4\left\{-\frac{1}{3}k_1^{\alpha}k_1^{\beta}k_1^{\nu}\Box_{\alpha\beta\mu\nu}\left(\lambda^2\right)-k_1^{\alpha}\nabla_{\alpha\mu}\left(\lambda^2\right)+\frac{1}{3}k_1^2k_1^{\alpha}\Delta_{\mu\alpha}\left(\lambda^2\right)+\frac{2}{3}k_{1\mu}k_1^{\beta}k_1^{\alpha}\Delta_{\alpha\beta}\left(\lambda^2\right)\right. \\ &\left.+\left(\lambda^2-m_1^2\right)k_1^{\alpha}\Delta_{\mu\alpha}\left(\lambda^2\right)\right\}, \end{aligned} \tag{7.43}$$

onde tanto o rótulo k_1 como o parâmetro de escala λ são completamente arbitrários. Segundo o TF esta função de Green deve ser identicamente nula, independente de escolhas sobre as arbitrariedades. A escolha do valor $k_1 = 0$ garantiria o valor identicamente nulo exigido pelo TF mas esta é uma escolha particular que não está disponível em todas as situações onde este tipo de função está presente. Assim a única possibilidade razoável de garantir o valor nulo para a amplitude sem escolher valores particulares para as arbitrariedades é exigir propriedades para as integrais divergentes envolvidas. Isto implica que após avaliarmos os objetos divergentes básicos $\Box_{\alpha\beta\mu\nu}(\lambda^2)$, $\nabla_{\alpha\mu}(\lambda^2)$ e $\Delta_{\alpha\beta}(\lambda^2)$ com algum método de regularização deveremos exigir que:

$$\left[\Box_{\alpha\beta\mu\nu}\left(\lambda^2\right)\right]^{\text{Reg}}=0, \tag{7.44}$$

$$\left[\nabla_{\alpha\mu}\left(\lambda^2\right)\right]^{\text{Reg}}=0, \tag{7.45}$$

$$\left[\Delta_{\alpha\beta}\left(\lambda^2\right)\right]^{\text{Reg}}=0. \tag{7.46}$$

Se estas condições, que denominamos de relações de consistência (RC), forem impostas sobre os objetos divergentes encontraremos que a função de Green T_{μ}^{V} será identicamente nula para quaisquer valores das quantidades arbitrárias envolvidas, satisfazendo as determinações do TF. É fácil verificar que todas as relações de simetria envolvendo as amplitudes que calculamos terão como condições necessárias as condições acima. Tomamos como exemplo a função $T_{\mu\nu}^{VV}$. A relação entre funções de Green estabelecida para ela é

$$\left(k_1-k_2\right)^{\nu}T_{\mu\nu}^{VV}=T_{\mu}^{V}\left(m_2;k_2\right)-T_{\mu}^{V}\left(m_1;k_1\right)+\left(m_1-m_2\right)T_{\mu}^{VS}, \tag{7.47}$$

que verificamos satisfeita pelas expressões obtidas por nós para as três amplitudes envolvidas sem quaisquer restrições sobre as arbitrariedades presentes nas respectivas expressões.

Por outro lado a relação de simetria, conseqüência da proporcionalidade existente entre a corrente vetorial e a escalar, estabelece que o resultado deve ser

$$(k_1 - k_2)^\nu T_{\mu\nu}^{VV} = (m_1 - m_2) T_\mu^{VS}. \tag{7.48}$$

Este resultado somente será possível se as relações de consistência forem satisfeitas pois elas garantem a anulação das duas funções T_μ^V presentes na relação entre funções de Green. Na forma explícita da função $T_{\mu\nu}^{VV}$ estes termos estão contidos no termo $A_{\mu\nu}(\lambda^2)$. Deste modo as condições de consistência anulam o termo $A_{\mu\nu}(\lambda^2)$ que é o termo onde estão presentes todos os termos ambíguos e violadores da identidade de Ward e correspondentemente anulam a função de um ponto vetorial T_μ^V como exigido pelo TF.

A imposição das RC permite que definamos a versão consistentemente regularizada das amplitudes. Como tal teríamos, como exemplos,

$$\mathcal{T}^S(m_1, k_1) = 4m_1 I_{quad}\left(m_1^2\right), \tag{7.49}$$

$$\mathcal{T}_\mu^V = 0, \tag{7.50}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^{SS} &= 2\left[I_{quad}\left(m_1^2\right) + I_{quad}\left(m_2^2\right)\right] \\ &\quad +2\left[(m_1+m_2)^2 - q^2\right]\left\{I_{\log}\left(m_i^2\right) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) Z_0\left(m_1; m_2, q^2; m_i^2\right)\right\},\end{aligned} \tag{7.51}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^{PP} &= -2\left[I_{quad}\left(m_1^2\right) + I_{quad}\left(m_2^2\right)\right] \\ &\quad -2\left[(m_1-m_2)^2 - q^2\right]\left\{I_{\log}\left(m_i^2\right) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) Z_0\left(m_1; m_2, q^2; m_i^2\right)\right\},\end{aligned} \tag{7.52}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_\mu^{AP} &= -2(m_1 - m_2)\left(\frac{iq_\mu}{(4\pi)^2}\right)\left[2Z_1\left(m_1; m_2, q^2; m_i^2\right) - Z_0\left(m_1; m_2, q^2; m_i^2\right)\right] \\ &\quad -2(m_2 + m_1) q_\mu \left\{I_{\log}\left(m_i^2\right) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) Z_0\left(m_1; m_2, q^2; m_i^2\right)\right\},\end{aligned} \tag{7.53}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}_{\mu\nu}^{VV} &= \frac{4}{3}\left[g_{\mu\nu}q^2 - q_\nu q_\mu\right] I_{\log}\left(m_i^2\right) \\
&-4\left[q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu}q^2\right]\left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right)\left[2Z_2\left(m_1; m_2, q^2; m_i^2\right) - Z_1\left(m_1; m_2, q^2; m_i^2\right)\right] \\
&+4q_\mu q_\nu\left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) Z_1\left(m_1; m_2, q^2; m_i^2\right) \\
&-2g_{\mu\nu}\left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right)\left\{m_1^2 - m_2^2 + q^2 Z_0\left(m_1; m_2, q^2; m_i^2\right)\right\} \\
&-2g_{\mu\nu}\left(m_1 - m_2\right)^2\left\{I_{\log}\left(m_i^2\right) - \left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right) Z_0\left(m_1; m_2, q^2; m_i^2\right)\right\} \\
&-4g_{\mu\nu}\left(\frac{i}{(4\pi)^2}\right)\left(m_1^2 - m_2^2\right) Z_1\left(m_1; m_2, q^2; m_i^2\right). \qquad (7.54)
\end{aligned}
$$

O mesmo pode ser verificado para todas as funções de três pontos consideradas. Após a imposição das relações de consistência teremos amplitudes livres de termos ambíguos e tendo suas relações de simetria satisfeitas. Como exemplo:

$$(k_3 - k_2)^\lambda \mathcal{T}_\lambda^{V\to SS} = (m_3 - m_2)\,\mathcal{T}_{\lambda\mu}^{S\to SS}, \qquad (7.55)$$

$$(k_3 - k_2)^\lambda \mathcal{T}_\lambda^{V\to PP} = (m_3 - m_1)\,\mathcal{T}_{\lambda\nu}^{S\to PP}, \qquad (7.56)$$

$$(k_1 - k_2)^\nu \mathcal{T}_{\lambda\mu\nu}^{V\to VV} = (m_1 - m_2)\,\mathcal{T}_{\lambda\mu}^{V\to VS}, \qquad (7.57)$$

$$(k_3 - k_1)^\mu \mathcal{T}_{\lambda\mu\nu}^{V\to VV} = (m_3 - m_1)\,\mathcal{T}_{\lambda\nu}^{V\to SV}, \qquad (7.58)$$

$$(k_3 - k_2)^\lambda \mathcal{T}_{\lambda\mu\nu}^{V\to VV} = (m_3 - m_2)\,\mathcal{T}_{\mu\nu}^{S\to VV}. \qquad (7.59)$$

Onde a notação utilizada, $V \to SS$ por exemplo, indica a soma dos canais direto e cruzado das amplitudes envolvidas, devido à necessidade de simetrização nos estados finais para satisfazer à estatística de Bose.

Uma conseqüência adicional das relações de consistência é a anulação da amplitude $\mathcal{T}_{\lambda\mu\nu}^{V\to VV}$ no limite de massas iguais, de modo consistente com o TF. Para estabelecermos este resultado devemos primeiro simetrizar os estados finais, isto é, somar as contribuições do canal direto e do canal cruzado e tomar o limite de massas iguais para os férmions. A função de Green $\mathcal{T}_{\lambda\mu\nu}^{VVV}$ pode ser escrita na forma

$$\mathcal{T}_{\lambda\mu\nu}^{VVV} = \mathcal{T}^{VVV} + g_{\mu\nu}\mathcal{T}_\lambda^{VPP} + g_{\lambda\nu}\mathcal{T}_\mu^{PVP} + g_{\lambda\mu}\mathcal{T}_\nu^{PPV}. \qquad (7.60)$$

Representando a função tri-vetorial simetrizada nos estados finais por $\mathcal{T}_{\lambda\mu\nu}^{V\to VV}$ teremos

$$\mathcal{T}_{\lambda\mu\nu}^{V\to VV} = \mathcal{T}_{\lambda\mu\nu}^{VVV}(k_1;k_2;k_3) + \mathcal{T}_{\lambda\nu\mu}^{VVV}(l_1;l_2;l_3), \tag{7.61}$$

onde, para o canal cruzado os momentos internos arbitrários satisfazem: $(l_3 - l_1) = q$ e $(l_1 - l_2) = p$. Deste modo

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\lambda\mu\nu}^{V\to VV} &= \mathcal{T}_{\lambda\mu\nu}(p,q) + g_{\mu\nu}\mathcal{T}_{\lambda}^{VPP}(p,q) + g_{\lambda\nu}\mathcal{T}_{\mu}^{PVP}(p,q) + g_{\lambda\mu}\mathcal{T}_{\nu}^{PPV}(p,q) \\ &\quad + \mathcal{T}_{\lambda\nu\mu}(q,p) + g_{\nu\mu}\mathcal{T}_{\lambda}^{VPP}(q,p) + g_{\lambda\mu}\mathcal{T}_{\nu}^{PVP}(q,p) + g_{\lambda\nu}\mathcal{T}_{\mu}^{PPV}(q,p). \end{aligned}\tag{7.62}$$

No limite de massas iguais é fácil verificar que

$$\mathcal{T}_{\lambda}^{VPP}(p,q) = -\mathcal{T}_{\lambda}^{VPP}(q,p), \tag{7.63}$$

$$\mathcal{T}_{\mu}^{PVP}(p,q) = -\mathcal{T}_{\mu}^{PPV}(q,p), \tag{7.64}$$

$$\mathcal{T}_{\nu}^{PPV}(p,q) = -\mathcal{T}_{\nu}^{PVP}(q,p) \tag{7.65}$$

e

$$\mathcal{T}_{\lambda\mu\nu}(p,q) = -\mathcal{T}_{\lambda\mu\nu}(q,p). \tag{7.66}$$

Com isso teremos o resultado

$$\mathcal{T}_{\lambda\mu\nu}^{V\to VV} = 0, \tag{7.67}$$

exigido pelo Teorema de Furry.

Se não tivéssemos utilizado as formas consistentemente regularizadas teríamos a presença de termos violadores, todos quantidades ambígüas.

Com isso podemos concluir a investigação a que nos propomos neste trabalho.

Capítulo 8

Conclusões

Com o objetivo de investigar aspectos relacionados à consistência em cálculos perturbativos de TQC, no capítulo 2, estabelecemos um modelo e delimitamos um conjunto de amplitudes sobre as quais construímos nossa investigação. As amplitudes escolhidas foram as funções de Green de um, dois e três pontos, ao nível um loop, construídas com propagadores fermiônicos massivos. Com isso ficamos apenas com divergências ultravioletas nas amplitudes. Além disto selecionamos dentre as amplitudes possíveis do modelo apenas aquelas com um número par de matrizes γ_5 de Dirac, deixando a discussão das amplitudes anômalas para outra ocasião. Isto tudo porque delimitamos como objetivo para este trabalho a caracterização das ambigüidades de escala e o estudo do possível papel desempenhado por estas na construção de uma estratégia consistente para manipulações e cálculos envolvendo amplitudes contendo divergências. A delimitação desta arena de estudos nos proporciona também a possibilidade de utilizar a RD como referência, já que o cálculo das amplitudes escolhidas pode ser efetuado no contexto desta técnica. A técnica que utilizamos tem, entretanto, a pretensão de ir além pois, por construção, as limitações existentes para a aplicação da técnica da RD, tais como o cálculo de amplitudes pseudo-tensoriais em dimensões espaço-temporais pares ou o cálculo de amplitudes em dimensões espaço-temporais ímpares, não estão presentes no contexto da técnica adotada para a realização da investigação.

Para efetuar o pretendido estudo, principiamos por construir uma sistematização para escrever os resultados para as partes finitas das amplitudes calculadas, no capítulo 3. Todos os resultados para as funções de dois e três pontos puderam ser escritos em termos destas funções. As manipulações necessárias para a verificação das relações entre funções de Green e das relações de simetria (identidades de Ward) também puderam ser enormemente simplificadas pois tais operações puderam ser colocadas em termos de propriedades das funções usadas na definição da sistematização que adotamos. Portanto, uma das conclusões importantes deste trabalho refere-se precisamente à utilidade e eficiência da metodologia propiciada pela identificação das funções $Z's$, $\xi's$ e $\eta's$ e de suas propriedades. Sem esta sistematização seria praticamente inviável boa parte das operações realizadas, particularmente aquelas envolvendo funções de três pontos.

Para o tratamento das integrais de Feynman divergentes adotamos uma estratégia alternativa aos métodos usuais de regularização, o que foi detalhadamente discutido no capítulo 4. A idéia principal da referida estratégia é evitar o comprometimento dos resultados, em passos intermediários, com escolhas particulares para as arbitrariedades envolvidas. Integrais divergentes não são, de fato, calculadas. As formas originais das integrais divergentes, provenientes das regras de Feynman, são manipuladas com o uso de identidades de modo a produzir uma soma de termos divergentes e finitos tal que a parte que depende dos momentos internos do loop esteja contida apenas naqueles finitos. É precisamente nesta separação que aparece o tipo de arbitrariedade associada à ambigüidade que denominamos ambigüidade de escala. Isto ocorre devido ao fato de, em princípio, a cada vez que uma integral divergente é separada, em uma soma de termos com diferentes graus de divergência, existir uma arbitrariedade nesta separação. A fim de levar em conta tal arbitrariedade nas operações de separação, introduzimos um parâmetro arbitrário, com dimensão de massa, que termina desempenhando o papel de escala tanto para as quantidades físicas presentes na amplitude, tais como momentos externos (bilineares) e massas, quanto para as integrais divergentes, uma vez que a única quantidade mantida no interior das integrais divergentes, remanescentes depois da separação, com dimensão, é o parâmetro arbitrário. A exigência de que o resultado final independa do parâmetro de escala, como o faz o integrando original de uma integral de Feynman, leva a restrições sobre a forma regularizada das integrais divergentes básicas ou a propriedades de escala para tais objetos. Tais propriedades funcionam como restrições que uma regularização deve satisfazer a fim de que tenha uma chance de produzir resultados consistentes para o cálculo perturbativo em TQC. As propriedades de escala identificadas permitem que todas as operações envolvendo as peças (finitas e divergentes) de uma amplitude possam ser manipuladas algebricamente de modo exato. Na verificação de relações de simetria as manipulações envolvem ligações precisas entre funções finitas e suas propriedades de escala com os objetos divergentes básicos. Não há, em nenhum momento, tomada de limites e expansões onde termos divergentes dominantes sejam comparados com outros de menor importância permitindo que estes últimos sejam descartados. Todos os termos são mantidos de forma que quando os termos dominantes se cancelam os termos de ordem imediatamente inferior possuam significado exato, diferentemente do que ocorre no contexto de regularizações usuais. O conceito associado à arbitrariedade de escala permite que se estabeleça uma observação definitiva sobre termos violadores de simetria no cálculo perturbativo: todo termo potencialmente violador é ambíguo. Isto porque em certas amplitudes, como, por exemplo, o tensor de polarização do vácuo da QED, na ausência do conceito de arbitrariedade de escala, temos a presença de termos violadores da invariância de gauge que não dependem dos momentos internos. Estes portanto, não são ambíguos quanto á escolha de tais momentos. Com a discussão que promovemos foi possível estabelecer que estes termos são ambíguos de escala.

No que diz respeito à consistência global dos cálculos perturbativos, concluímos, de modo claro e transparente, que se as denominadas relações de consistência não forem satisfeitas por uma eventual distribuição regularizadora, teremos amplitudes ambíguas de escala, de momentos e com suas simetrias fundamentais violadas. Satisfazer às condições

$$\left[\Box_{\alpha\beta\mu\nu}\left(\lambda^2\right)\right]^{\mathrm{Reg}} = 0, \tag{8.1}$$

$$\left[\nabla_{\alpha\mu}\left(\lambda^2\right)\right]^{\mathrm{Reg}} = 0, \tag{8.2}$$

e

$$\left[\Delta_{\alpha\beta}\left(\lambda^2\right)\right]^{\mathrm{Reg}} = 0 \tag{8.3}$$

é condição necessária para a consistência nos cálculos perturbativos de TQC. Na verdade esta é a justificativa para o sucesso da RD e do método de Pauli-Villars (PV), onde estes métodos se aplicam. Nestes, as condições acima são satisfeitas, automaticamente na RD e por construção no método de PV. O que parece claro, depois das investigações, é que uma regularização explícita não se torna necessária para nenhum propósito em cálculos perturbativos em TQC. Apenas as propriedades acima para as integrais divergentes mais as propriedades de escala, em adição obviamente àquelas duas de caráter geral assumidas que são o caráter par no momento do loop e a existência de um limite de conexão bem definido, parecem ser necessárias. Os objetos divergentes irredutíveis remanescentes não necessitam ser explicitados. Em procedimentos de renormalização eles são absorvidos integralmente [11]. Em caso de ajustes fenomenológicos no contexto de teorias não renormalizáveis, apenas parametrizações gerais fornecidas pelas propriedades de escala são necessárias [20].

Em face a estas constatações, uma questão relevante emerge naturalmente: como são descritas as amplitudes anômalas no contexto do método que brota das investigações promovidas? Esta pergunta é natural já que na descrição tradicional, as violações de identidades de Ward nas formas adotadas para tais amplitudes na construção do mecanismo de cancelamento de anomalias no modelo padrão, ambigüidades estão entre os ingredientes invariavelmente utilizados [18]. Como, em conseqüência das relações de consistência, as ambigüidades são eliminadas, desaparece o principal ingrediente utilizado que é a escolha conveniente de ambigüidades. Embora os detalhes não tenham sido apresentados no presente trabalho esta verificação foi efetuada de forma detalhada [12]. Os resultados mostram uma surpreendentemente simples descrição das anomalias triangulares. Naturalmente, mesmo com a eliminação dos termos ambíguos, a as amplitudes AVV e

AAA emergem dos cálculos com suas formas adequadas ao mecanismo de cancelamento de anomalias. Mais especificamente, na amplitude AVV são satisfeitas as identidades de Ward vetoriais e o teorema de baixa energia (relacionado ao decaimento do Píon no limite de massas iguais) e a identidade de Ward axial aparece violada com o valor correto para o termo anômalo.

Por fim, poderíamos nos questionar pelas perspectivas para aplicações do método utilizado no presente trabalho em futuras investigações. Dentre as inúmeras possibilidades, aquelas mais atraentes e interessantes estão no contexto de situações não atendidas pela RD. Entre estas, o estudo de anomalias em diferentes dimensões espaço-temporais (pares). Estudos realizados [10], e em andamento [12], indicam que as anomalias podem ser descritas adequadamente, mesmo em dimensões onde teorias com férmions de spin 1/2 são não renormalizáveis (6D, 8D, 10D...), aplicando-se absolutamente o mesmo procedimento utilizado no presente trabalho. O mesmo ocorre com cálculos em dimensões espaço-temporais ímpares. Em qualquer desses casos, mesmo não sendo possível a renormalização da teoria correspondente, é possível obter amplitudes livres de ambigüidades e preservando as simetrias fundamentais. Vislumbra-se assim, entre outras, possibilidades importantes de aplicações em teorias supersimétricas. Outro terreno que tem se mostrado de grande fertilidade é o contexto de teorias (efetivas) não renormalizáveis [21]. Isto tudo além, é claro, da reformulação dos tratamentos dados usualmente a teorias fundamentais (renormalizáveis). A possibilidade de descrever todas as amplitudes de todas as teorias e modelos com a utilização de uma única e universal estratégia para o tratamento das divergências intrínsecas ao cálculo perturbativa em TQC, por si só é muito estimulante. Levando em conta que tal estratégia evita consistentemente; ambigüidades, violações de causalidade e unitariedade, violações de relações de simetria e fornece uma adequada e natural descrição de anomalias, simultaneamente, prescindindo do cálculo em si de integrais indefinidas, para qualquer propósito, passa a restar pouca dúvida no que diz respeito à correteza do ponto de vista conceitual assumido.

Apêndice A

Álgebra das matrizes de Dirac

No capítulo 2 construimos as densidades fermiônicas escalar, pseudo-escalar, vetorial, axial e tensorial utilizando os campos espinoriais massivos e um conjunto de matrizes. Estas são as chamadas matrizes de Dirac que são um conjunto de matrizes 4×4 que satisfazem a álgebra não comutativa de Clifford. Uma vez que estas matrizes estão presentes nas correntes, às quais os campos se acoplam, elas estarão também presentes na lagrangiana, nas funções de Green e, consequentemente, nas amplitudes físicas perturbativas. Neste contexto, ao longo do desenvolvimento das investigações acerca do modelo considerado somos levados a utilizar propriedades e identidades que estas matrizes obedecem. Neste apêndice iremos detalhar estas propriedades e identidades que se mostram fundamentais para o nossos objetivos neste trabalho.

Começamos por definir as matrizes que formam o conjunto das matrizes de Dirac. Estas são 4 matrizes γ_μ 4×4 que obedecem a álgebra não comutativa de Clifford:

$$\{\gamma^\mu \ , \ \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\hat{I}, \tag{A.1}$$

onde $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico do espaço de Minkowki:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{A.2}$$

e $\hat{I}$ é a matriz identidade 4×4. Definimos também uma matriz que possui a propriedade de anticomutar com todas as matrizes γ_μ, esta é a matriz γ_5 definida por:

$$\gamma^5 = -\frac{i}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta, \tag{A.3}$$

onde $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ é o tensor totalmente antissimétrico de Levi-Civita.

Obviamente que não existe somente um conjunto de matrizes que satisfazem a álgebra de Clifford, de modo que podemos escolher trabalhar com uma das representações possíveis. Fazemos a escolha:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e deste modo a matriz γ_5 será dada por:

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

É fácil verificarmos as seguintes propriedades:

$$\gamma^\mu\gamma_\mu = 4\hat{I}, \tag{A.4}$$

$$\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma^\mu = -2\gamma_\nu, \tag{A.5}$$

$$\gamma^5 \gamma^5 = \hat{I}, \tag{A.6}$$

$$\gamma^5 \gamma^\mu = -\gamma^\mu \gamma^5, \tag{A.7}$$

$$\gamma_\mu \sigma_{\alpha\beta} \gamma^\mu = 0, \tag{A.8}$$

$$\gamma_\mu \sigma_{\alpha\beta} = -i \left(g_{\mu\alpha} \gamma_\beta - g_{\mu\beta} \gamma_\alpha - \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \gamma^\nu \gamma^5 \right), \tag{A.9}$$

onde:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{i}{2} \left(\gamma_\alpha \gamma_\beta - \gamma_\beta \gamma_\alpha \right). \tag{A.10}$$

A contração das matrizes de Dirac com quadrivetores do espaço-tempo é representada por:

$$\not{k} = k_\mu \gamma^\mu, \tag{A.11}$$

e conseqüentemente teremos:

$$\not{k} \not{p} + \not{p} \not{k} = 2k.p, \tag{A.12}$$

$$\gamma_\mu \not{k} + \not{k} \gamma_\mu = 2k_\mu, \tag{A.13}$$

$$\gamma^\mu \not{k} \not{p} \gamma_\mu = \not{p} \not{k} + 2p.k, \tag{A.14}$$

$$\gamma^\mu \not{k} \gamma_\mu = - \not{k}, \tag{A.15}$$

e:

$$\gamma^\mu \not{k} \not{p} \not{q} \gamma_\mu = \not{k} \not{p} \not{q} - 2 \not{q} \not{p} \not{k}. \tag{A.16}$$

Para encerrarmos este apêndice vamos analizar os traços das matrizes de Dirac, os quais surgem quando estamos analizando as funções de Green. Os traços são dados por:

$$\begin{aligned}
Tr\left(\gamma_\mu\right) &= 0, && \text{(A.17)}\\
Tr\left(\gamma_\mu \gamma_\nu\right) &= 4g_{\mu\nu}, && \text{(A.18)}\\
Tr\left(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho\right) &= 0, && \text{(A.19)}\\
Tr\left(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta\right) &= 4\left(g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} - g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} + g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha}\right), && \text{(A.20)}\\
Tr\left(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\alpha \gamma_\beta\right) &= 0, && \text{(A.21)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Tr\left(\gamma_\lambda\gamma_\alpha\gamma_\mu\gamma_\beta\gamma_\nu\gamma_\rho\right) &= 4\left\{\left(g_{\alpha\nu}g_{\mu\beta}-g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu}+g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\right)g_{\rho\lambda}\right. \\
&\quad \left(g_{\lambda\nu}g_{\mu\beta}-g_{\lambda\beta}g_{\mu\nu}+g_{\lambda\mu}g_{\beta\nu}\right)g_{\rho\alpha} \\
&\quad \left(g_{\lambda\nu}g_{\alpha\beta}-g_{\lambda\beta}g_{\alpha\nu}+g_{\lambda\alpha}g_{\beta\nu}\right)g_{\rho\mu} \\
&\quad \left(g_{\lambda\nu}g_{\alpha\mu}-g_{\lambda\mu}g_{\alpha\nu}+g_{\lambda\alpha}g_{\mu\nu}\right)g_{\rho\beta} \\
&\quad \left.\left(g_{\lambda\beta}g_{\alpha\mu}-g_{\lambda\mu}g_{\alpha\beta}+g_{\lambda\alpha}g_{\mu\beta}\right)g_{\rho\nu}\right\}, \qquad (A.22) \\
Tr\left(\gamma_5\right) &= 0, \qquad (A.23) \\
Tr\left(\gamma_5\gamma_\nu\right) &= 0, \qquad (A.24) \\
Tr\left(\gamma_5\gamma_\nu\gamma_\alpha\right) &= 0, \qquad (A.25) \\
Tr\left(\gamma_5\gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma_\beta\right) &= 0, \qquad (A.26) \\
Tr\left(\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma_\beta\right) &= 4i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}, \qquad (A.27) \\
Tr\left(\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\rho\right) &= 0, \qquad (A.28)
\end{aligned}
$$

e:

$$
\begin{aligned}
Tr\left(\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\lambda\gamma_\tau\right) &= 4\left\{\varepsilon_{\rho\sigma\lambda\tau}g_{\mu\nu}-\varepsilon_{\nu\sigma\lambda\tau}g_{\mu\rho}+\varepsilon_{\mu\sigma\lambda\tau}g_{\nu\rho}\right. \\
&\quad \left.+\varepsilon_{\mu\nu\rho\tau}g_{\sigma\lambda}-\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}g_{\sigma\tau}+\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}g_{\lambda\tau}\right\}. \qquad (A.29)
\end{aligned}
$$

Estes são os resultados necessários acerca da álgebra das matrizes de Dirac que se mostram interessantes no presente trabalho.

Apêndice B

Parametrização de Feynman

Um dos objetivos do capítulo 2 foi escrever as funções de Green de um, dois e três pontos como uma combinação de integrais de Feynman. Estas integrais são da forma:

$$(I_N)^{\mu\nu...\lambda} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu ... k^\lambda}{\left[(k+k_1)^2 - m_1^2\right]\left[(k+k_2)^2 - m_2^2\right]...\left[(k+k_N)^2 - m_N^2\right]}. \tag{B.1}$$

É fácil observarmos, atráves da contagem de potências do momento de integraçãon k, que algumas destas integrais podem ser divergentes e outras finitas. A possibilidade da existência de integrais divergentes nos obrigou a adotar um método para manipulação destas estruturas matematicamente indefinidas. Neste ponto vimos que com a adoção de uma distribuição regularizadora implícita e o uso de identidades puramente algébricas poderíamos separar a parte divergente da parte finita de uma integral de Feynman. A parte divergente destas integrais pode ser escrita como uma combinação de somente cinco estruturas divergentes básicas. Já a parte finita foi integrada usando-se para isso os métodos usuais de integração. O objetivo deste apêndice está em elucidar a primeira parte da solução das integrais finitas, que é a *Parametrização de Feynman.*

Tal estratégia consiste em utilizar as identidades:

$$\frac{1}{a_1 a_2 ... a_n} = (n-1)! \int dx_1 \int dx_2 ... \int dx_n \frac{\delta\left(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{\left[a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n\right]^n}, \tag{B.2}$$

para reescrever os integrandos. Na expressão acima os $a_i' s$ são os propagadores dos campos correspondentes às linhas internas dos diagramas ou estruturas do tipo $\left(k^2 - \lambda^2\right)^L$. Porém a identidade acima não compreende todas as possíves formas que poderemos encontrar nos integrandos, pois podemos nos deparar com integrais onde $L > 1$ ou até mesmo onde os propagadores podem aparecer repetidos. Neste caso devemos encontrar uma identidade análoga à acima mostrada para procedermos a parametrização. Para isso basta que derivemos a expressão acima em relação a algum dos parâmetros $a_i's$. Deste modo teremos:

$$\frac{1}{a_1^2 a_2 ... a_n} = n! \int dx_1 \int dx_2 ... \int dx_n \frac{\delta\left(1 - \sum_{i=1}^n x_i\right) x_1}{\left[a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n\right]^{n+1}}. \tag{B.3}$$

Com o uso destas relações, e outras que podem ser deduzidas a partir destas, podemos construir a lista de identidades que são necessárias para procedermos a parametrização das integrais finitas que surgem ao longo do presente trabalho. Esta lista é formada pelas relações:

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dz}{\left[(b-a)z + a\right]^2}, \tag{B.4}$$

$$\frac{1}{a^2 b} = 2\int_0^1 \frac{(1-z)dz}{\left[(b-a)z + a\right]^3}, \tag{B.5}$$

$$\frac{1}{a^3 b} = 3\int_0^1 \frac{(1-z)^2 dz}{\left[(b-a)z + a\right]^4}, \tag{B.6}$$

$$\frac{1}{a^4 b} = 4\int_0^1 \frac{(1-z)^3 dz}{\left[(b-a)z + a\right]^5}, \tag{B.7}$$

$$\frac{1}{abc} = 2\int_0^1 dz \int_0^{1-z} \frac{dy}{\left[(c-a)z + (b-a)y + a\right]^3}, \tag{B.8}$$

$$\frac{1}{a^2 bc} = 6\int_0^1 dz \int_0^{1-z} \frac{(1-y-z)dy}{\left[(c-a)z + (b-a)y + a\right]^4}, \tag{B.9}$$

$$\frac{1}{a^3 bc} = 12\int_0^1 dz \int_0^{1-z} \frac{(1-y-z)^2 dy}{\left[(c-a)z + (b-a)y + a\right]^5}, \tag{B.10}$$

$$\frac{1}{abcd} = 6\int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \int_0^{1-y-z} \frac{dx}{\left[(c-a)z + (b-a)y + (d-a)x + a\right]^4}, \tag{B.11}$$

e:

$$\frac{1}{a^2 bcd} = 24\int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \int_0^{1-y-z} \frac{(1-y-z-x)dx}{\left[(c-a)z + (b-a)y + (d-a)x + a\right]^5}. \tag{B.12}$$

A título de exemplo apliquemos a parametrização de Feynman à integral:

$$I = -\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\left(k_2^2 + 2k_2.k + \lambda^2 - m_2^2\right)}{\left(k^2 - \lambda^2\right)^2 \left[(k + k_2)^2 - m_2^2\right]}, \tag{B.13}$$

que surge na solução da integral de Feynman (I_2). Notamos que o denominador possui a forma $a^2 b$ e deste modo utilizamos a parametrização:

$$\frac{1}{a^2 b} = 2\int_0^1 (1-z)\,dz \frac{1}{\left[(b-a)\,z+a\right]^3}. \tag{B.14}$$

Onde:

$$\begin{aligned} a &= \left(k^2-\lambda^2\right), \\ b &= (k+k_2)^2 - m_2^2. \end{aligned}$$

Assim teremos:

$$(b-a)\,z + a = (k+k_2 z)^2 + k_2^2\,(1-z)\,z + \left(\lambda^2 - m_2^2\right) z - \lambda^2. \tag{B.15}$$

Definindo então:

$$\begin{aligned} k' &= k + k_2 z\ , \\ H &= k_2^2\,(1-z)\,z + \left(\lambda^2 - m_2^2\right) z - \lambda^2. \end{aligned} \tag{B.16}$$

Logo:

$$\frac{\partial H}{\partial z} = -2k_2^2 z + k_2^2 - m_2^2 + \lambda^2. \tag{B.17}$$

Substituindo na integral teremos:

$$A = -2\int_0^1 (1-z)\,dz \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \frac{\left(-2k_2^2 z + k_2^{2\prime} + \lambda^2 - m_2^2 + 2k_2.k\right)}{\left[k'^2 + H\right]^3}, \tag{B.18}$$

$$A = -2\int_0^1 (1-z)\,dz \left\{\frac{\partial H}{\partial z}\int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left[k'^2+H\right]^3} + 2k_2^{\alpha}\int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha}{\left[k'^2+H\right]^3}\right\}. \tag{B.19}$$

Após obtermos a forma acima para uma integral de Feynman finita devemos proceder com a integração no momento do loop k, e para isso utilizamos a integração dimensional.

Apêndice C

Integração Dimensional

No apêndice anterior consideramos o primeiro passo para a solução das integrais finitas que surgem na análise das funções de Green presentes neste estudo, a parametrização de Feynman. Para encontrarmos a solução final destas integrais falta-nos, ainda, estudar a integração dimensional, que é o objetivo deste apêndice.

Com o uso da parametrização de Feynman é possível colocar os integrandos em uma forma geral, qualquer que seja a integral. Esta forma geral é do tipo:

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(1, k_\mu, k_\mu k_\nu, k^2, k_\mu k_\nu k_\alpha, ...)}{[k^2 + 2Q \cdot k - H^2]^\alpha}. \tag{C.1}$$

Para que não seja necessário determinarmos a solução de um conjunto destas integrais podemos solucionar a mais simples delas e então encontrar um método para determinar a solução das demais a partir da solução desta primeira.

Partimos em busca da solução da mais simples das integrais vindas da parametrização de Feynman, que é a integral:

$$I = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 + 2Q \cdot k - H^2]^\alpha}. \tag{C.2}$$

O denominador pode ser reorganizando na forma:

$$\left(k^2 + 2Q \cdot k - H^2\right) = (k + Q)^2 - \left(Q^2 + H^2\right), \tag{C.3}$$

e uma vez que estamos analizando integrais finitas podemos realizar um shift na variável de integração sem nos preocuparmos com termos de superfícice. Realizando o shift:

$$k' = k + Q, \tag{C.4}$$

juntamente com a definição:

$$M^2 = Q^2 + H^2, \tag{C.5}$$

a integral tomará a forma:

$$I = \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left[k'^2 - M^2\right]^\alpha}. \tag{C.6}$$

Agora fazemos uma extensão $n-$dimensional do espaço dos momenta:

$$I = \int \frac{d^nk}{(2\pi)^n} \frac{1}{\left(k^2 - M^2\right)^\alpha}. \tag{C.7}$$

Uma vez que este espaço dos momenta é um espaço tipo Minkowski, teremos:

$$d^nk = dk_0 dk_1 dk_2 ... dk_m = dk_0 d^m\mathbf{k}, \tag{C.8}$$

$$k^2 = k_0^2 - \mathbf{k}^2, \tag{C.9}$$

$$\mathbf{k}^2 = k_1^2 + k_2^2 + ... + k_m^2, \tag{C.10}$$

onde $m = n - 1$. Assim a integral ficará:

$$I = \int d^m\mathbf{k} \int dk_0 \left\{ \frac{1}{\left[k_0^2 - ((\mathbf{k}^2 + M^2)^{1/2})^2\right]^\alpha} \right\}. \tag{C.11}$$

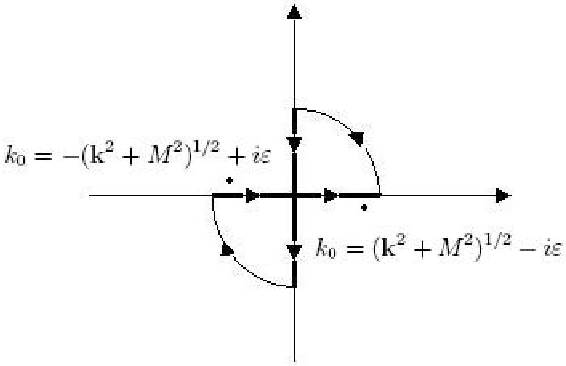
A integração em k_0 pode ser realizada no plano complexo. Notamos no entanto que os pólos do integrando estão situados sobre o eixo real, mas podemos escrever a integral I da seguinte maneira:

$$I\left(Q, n\right) = \int d^m\mathbf{k} \int dk_0 \left\{ \frac{1}{\left[k_0^2 - ((\mathbf{k}^2 + M^2)^{1/2} - i\varepsilon)^2\right]^\alpha} \right\}. \tag{C.12}$$

que faz com que os pólos estejam situados, no plano complexo, nos pontos:

$$k_0 = -(\mathbf{k}^2 + M^2)^{1/2} + i\varepsilon \tag{C.13}$$

$$k_0 = (\mathbf{k}^2 + M^2)^{1/2} - i\varepsilon \tag{C.14}$$



Com o contorno C escolhido, a integral de $f(k_0)$:

$$f(k_0) = \frac{1}{\left\{k_0^2 - \left[(\mathbf{k}^2 + M^2)^{1/2} - i\epsilon\right]^2\right\}^{\alpha}}, \tag{C.15}$$

se anula. Observemos ainda que $f(k_0)$ cai abruptamente com k_0 grande (tanto quanto $\alpha > 1$). Isto é:

$$\lim_{k_0 \to \infty} [f(k_0)] \simeq \frac{1}{k_0^{2\alpha}}. \tag{C.16}$$

Então a contribuição sobre o contorno circular C se anula e apenas restam as contribuições sobre os eixos. Fazemos a conveniente mudança de variável:

$$k_0 \longrightarrow ik_{m+1}, \tag{C.17}$$

com k_{m+1} real. Com isso a integral em k_0 fica:

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} dk_0 f(k_0) = i \int_{-\infty}^{+\infty} dk_{m+1}\ f(ik_{m+1}), \tag{C.18}$$

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} dk_0 f(k_0) = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_{m+1}}{\left[(ik_{m+1})^2 - \left((\mathbf{K}^2 + M^2)^{1/2} - i\epsilon\right)^2\right]^{\alpha}}, \tag{C.19}$$

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} dk_0 f(k_0) = i(-1)^{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_{m+1}}{\left[k_{m+1}^2 + \left((\mathbf{K}^2 + M^2)^{1/2} - i\epsilon\right)^2\right]^{\alpha}}. \tag{C.20}$$

Isto quer dizer que passamos, na prática, de um espaço dos momenta tipo Minkowski para um espaço tipo Euclideano $n-$dimensional, e assim:

$$k_{\mu} = (k_1, k_2, ..., k_{m+1}), \tag{C.21}$$

$$k^2 = k_1^2 + k_2^2 + ... + k_{m+1}^2, \tag{C.22}$$

$$d^n k = dk_1 dk_2 ... dk_{m+1}.$$

A relação entre as integrais nos dois espaços é dada por:

$$\int_{Mink.} \frac{d^n k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - M^2 + i\epsilon)^\alpha} = (-1)^{-\alpha} i \int_{Eucl.} \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{(k^2 + M^2 - i\epsilon)^\alpha}. \tag{C.23}$$

Agora expressamos as coordenadas deste espaço Euclidiano $n-$dimensional dos momenta em coordenadas polares:

$$\begin{cases} k_1 = ksen\theta_m sen\theta_{m-1} ... sen\theta_2 sen\theta_1, \\ k_2 = ksen\theta_m sen\theta_{m-1} ... sen\theta_2 cos\theta_1, \\ '' \qquad '' \qquad \qquad '' \\ k_{m+1} = kcos\theta_m. \end{cases} \tag{C.24}$$

Logo o elemento de volume será dado por:

$$\int d^n k = \int_0^\infty k^m dk \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^\pi sen\theta_2 d\theta_2 ... \int_0^\pi sen^{m-1}\theta_m d\theta_m. \tag{C.25}$$

A integral nos momenta toma a forma:

$$I = (-1)^\alpha i \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^\pi sen\theta_2 d\theta_2 ... \int_0^\pi sen^{m-1}\theta_m d\theta_m \int_0^\infty \frac{k^m dk}{(k^2 + M^2 - i\epsilon)^\alpha}. \tag{C.26}$$

Nos preocupemos agora em realizar as m integrações nos ângulos $\theta_1 ... \theta_m$ para depois integrarmos no momento k. Usando então os seguintes resultados:

$$\int_0^\pi sen^m \theta d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{m}{2}\right)}, \tag{C.27}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{C.28a}$$

Obteremos:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^\pi sen\theta_2 d\theta_2 \int_0^\pi sen^2\theta_3 d\theta_3 ... \int_0^\pi sen^{m-1}\theta_m d\theta_m = \\ = \ & (2\pi) \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right)}\right] \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1+1)}\right] \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1+1)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right)}\right] ... \\ & ... \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m-1+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2+m-1}{2}\right)}\right] \\ = \ & \frac{(2\pi)(\sqrt{\pi})^{m-1}}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}, \end{aligned} \tag{C.29}$$

ou seja, obtivemos:

$$\int d\Omega_m = \frac{2(\pi)^{\frac{m+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}. \tag{C.30}$$

Voltando com este resultado para a integral:

$$I = \frac{(-1)^{-\alpha} i(\pi)^{\frac{m+1}{2}}}{(2\pi)^{m+1}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{(k^2)^{\frac{m-1}{2}} dk^2}{(k^2+M^2)^\alpha}, \tag{C.31}$$

a qual, usando a expressão para a função Beta de Euler [19], fornece:

$$I = \frac{(-1)^{-\alpha} i(\pi)^{\frac{m+1}{2}}}{(2\pi)^{m+1}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\alpha-\left(\frac{m+1}{2}\right)\right)}{(M^2)^{\alpha-\left(\frac{m+1}{2}\right)}\Gamma(\alpha)}. \tag{C.32}$$

Como $m+1=n$, teremos:

$$I = \frac{(-1)^{-\alpha} i\Gamma\left(\alpha-\frac{n}{2}\right)}{(2)^n\Gamma(\alpha)(M^2)^{\alpha-\frac{n}{2}}(\pi)^{m+1-\left(\frac{m+1}{2}\right)}}, \tag{C.33}$$

ou ainda:

$$I = \frac{(-1)^{-\alpha} i\Gamma\left(\alpha-\frac{n}{2}\right)}{(4\pi)^{n/2}\Gamma(\alpha)(M^2)^{\alpha-\frac{n}{2}}}. \tag{C.34}$$

A forma da expressão justifica a definição:

$$n \equiv 2\omega, \tag{C.35}$$

que então nos fornecerá:

$$I = \frac{i\Gamma(\alpha-\omega)}{(4\pi)^\omega\Gamma(\alpha)(-Q^2-H^2)^{\alpha-\omega}}, \tag{C.36}$$

que é o resultado desejado. A presença da função $\Gamma(\alpha-\omega)$ nos diz que o resultado obtido é válido para $\alpha > \omega$, ou seja, para integrais finitas. A solução para as demais formas genéricas que aparecem em (C.1) podem ser obtidas a partir desta. Por exemplo, se desejamos calcular:

$$I_\mu = \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu}{(k^2+2Q\cdot k-H^2)^\alpha}, \tag{C.37}$$

derivamos ambos os lados de I em relação ao momento externo Q_μ e obtemos:

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{(k^2+2Q\cdot k-H^2)^{\alpha+1}} = \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega}\right) \frac{(-)\Gamma(\alpha+1-\omega)Q_\mu}{\Gamma(\alpha+1)[-Q^2-H^2]^{\alpha-\omega+1}}. \tag{C.38}$$

Definindo $\alpha' = \alpha + 1$, uma vez que α é arbitrário, temos:

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu}{(k^2 + 2Q\cdot k - H^2)^\alpha} = \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega}\right) \frac{(-)\Gamma(\alpha-\omega)Q_\mu}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega}}. \tag{C.39}$$

Repetindo este procedimento podemos obter todas as outras soluções necessárias para os cálculos das integrais que surgem na avaliação das funções de Green.

A seguir apresentamos os resultados para as formas genéricas (C.1) encontradas nos cálculos das funções consideradas neste trabalho.

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2 + 2Q\cdot k - H^2)^\alpha} = \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega}\right) \frac{\Gamma(\alpha-\omega)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega}}, \tag{C.40}$$

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{4}} \frac{k_\mu}{(k^2 + 2Q\cdot k - H^2)^\alpha} = \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega}\right) \frac{(-)\Gamma(\alpha-\omega)Q_\mu}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega}}, \tag{C.41}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 + 2Q\cdot k - H^2)^\alpha} &= \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega}\right) \left[\frac{Q_\mu Q_\nu \Gamma(\alpha-\omega)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega}} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu} \frac{\Gamma(\alpha-\omega-1)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega-1}}\right],\end{aligned} \tag{C.42}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k^2}{(k^2 + 2Q\cdot k - H^2)^\alpha} &= \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega}\right) \left[\frac{Q^2 \Gamma(\alpha-\omega)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega}} + \right. \\ &+ \left. \frac{\omega\Gamma(\alpha-\omega-1)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega-1}}\right],\end{aligned} \tag{C.43}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha}{(k^2 + 2Q\cdot k - H^2)^\alpha} &= \left(\frac{(-)i}{(4\pi)^\omega}\right) \left[\frac{Q_\mu Q_\nu Q_\alpha \Gamma(\alpha-\omega)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega}} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2}(\delta_{\mu\nu}Q_\alpha + \delta_{\mu\alpha}Q_\nu + \delta_{\alpha\nu}Q_\mu) \frac{\Gamma(\alpha-\omega-1)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega-1}}\right],\end{aligned} \tag{C.44}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{4}} \frac{k^2 k_\alpha}{(k^2 + 2Q\cdot k - H^2)^\alpha} &= \left(\frac{(-)i}{(4\pi)^\omega}\right) \left[\frac{Q^2 Q_\alpha \Gamma(\alpha-\omega)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega}} + \right. \\ &+ \left. \frac{\frac{1}{2}(2\omega+2)Q_\alpha\Gamma(\alpha-\omega-1)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega-1}}\right],\end{aligned} \tag{C.45}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{4}} \frac{k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{(k^2 + 2Q\cdot k - H^2)^\alpha} &= \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega}\right) \left[\frac{Q_\mu Q_\nu Q_\alpha Q_\beta \Gamma(\alpha-\omega)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega}} + \right. \\ &+\frac{1}{2}\left(\delta_{\mu\nu}Q_\alpha Q_\beta + \delta_{\mu\alpha}Q_\nu Q_\beta + \delta_{\mu\beta}Q_\nu Q_\alpha + \delta_{\nu\alpha}Q_\mu Q_\beta + \right. \\ &\left. +\delta_{\nu\beta}Q_\mu Q_\alpha + \delta_{\alpha\beta}Q_\mu Q_\nu\right) \frac{\Gamma(\alpha-\omega-1)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega-1}} + \\ &+ \left. \frac{1}{4}(\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} + \delta_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu} + \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}) \frac{\Gamma(\alpha-\omega-2)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega-2}}\right],\end{aligned} \tag{C.46}$$

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^4} \frac{k^2 k_\alpha k_\beta}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} = \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega}\right) \left[\frac{Q^2 Q_\alpha Q_\beta \Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega}} + \right.$$
$$+ \frac{\frac{1}{2}\left((2\omega + 4)Q_\alpha Q_\beta + \delta_{\alpha\beta} Q^2\right) \Gamma(\alpha - \omega - 1)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega-1}} +$$
$$+ \left. \frac{\frac{1}{4}(2\omega + 2)\delta_{\alpha\beta} \Gamma(\alpha - \omega - 2)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega-2}} \right], \tag{C.47}$$

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^4} \frac{k^4}{(k^2 + 2Q \cdot k - H^2)^\alpha} = \left(\frac{i}{(4\pi)^\omega}\right) \left[\frac{Q^4 \Gamma(\alpha - \omega)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega}} + \right.$$
$$+ \frac{(2\omega + 2)Q^2 \Gamma(\alpha - \omega - 1)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega-1}} +$$
$$+ \left. \frac{\omega(\omega + 1)\Gamma(\alpha - \omega - 2)}{\Gamma(\alpha)[-Q^2 - H^2]^{\alpha-\omega-2}} \right]. \tag{C.48}$$

É interessante notar que decorrem destes resultados as seguintes propriedades:

$$i) \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^4} f(k^2) k_\mu = zero, \tag{C.49}$$

$$ii) \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} k_\mu k_\nu f(k^2) = \frac{g_{\mu\nu}}{2\omega} \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} k^2 f(k^2), \tag{C.50}$$

$$iii) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta f(k^2) = \frac{1}{4\omega(\omega + 1)} \left(g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} + g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} + g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu}\right) \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} k^4 f(k^2). \tag{C.51}$$

Os resultados deduzidos acima são suficientes para a solução de todas as integrais de Feynman consideradas no presente trabalho.

Bibliografia

[1] • A. Einstein, Ann. Phys. **17**, 891 (1905).

[2] • P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A **112**, 661 (1926).

[3] • W. E. Lamb and R. C. Rutherford, Phys. Rev. **72**, 241(1947);

• B. E. Lautrup, A. Peterman and E. de Rafael, Phys. Rep. **3C**, 193 (1972);

• J. Schwinger, Phys. Rev. **73**, 416 (1948);

• P. Kusch and H. Foley, Phys. Rev. **72**, 1256 (1946);

• P. Kusch and H. Foley, Phys. Rev. **73**, 412 (1948);

• T. Kinoshita, “Quantum Electrodynamics”, World Scientific, Singapure (1990);

• A. Akhiezer and V. B. Berestetskii, “Quantum Electrodynamics”, Interscience, New York (1965);

• J. M. Jauch and F. Rohrlich, “The Theory of Photons and Electrons”, Springer Verslag Berlin (1976);

• V. B. Berestetskii, E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii, “Relativistic Quantum Theory”, Pergamon Press, Oxford (1971);

• J. Schwinger, “Quantum Electrodynamics”, Dover, New York (1958);

• W. Greiner and J. Reinheardt, “Quantum Electrodynamics”, Springer Verlag, Heidelberg (1994);

• N. N. Bogoliubov and D. V. Shirkov, “Introduction to the Theory of Quantized Fields”, Wiley-Interscience (1959).

[4] • S. Weinberg, “The Quantum Theory of Fields”, Cambridge University Press, (1996);

• P. Ramond, “Field Theory: A modern Primer”, Addisson-Wesley (1990);

• C. Itzykson an J. B. Zuber, “Quantum Field Theory”, McGraw-Hill, New York (1980);

• R. P. Feynman, “Quantum Electrodynamics”, Frontiers on Physics Lecture note Series, Addison-Wesley (1961);

• F. Gross, “Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory”, John Wiley and Sons, (1993);

• P. H. Frampton, “ Field Theories”, Benjamin Cummings Publishing Company (1987);

• B. de Witt and J. Smith, ”Field Theory in Particle Physics”, North-Holland Physics Publishing, Amsterdan (1986);

• D. Lurié, “Particles and Fields”, Interscience, New York (1968);

• L. Ryder, ”Quantum Field Theory”, Cambridge University Press, New York (1985).

[5] • t’Hooft and Veltman, Nucl. Phys. **B44**, 189 (1972);

• C. G. Bollini and J. J. Giambiagi, Phys. Lett. **40B**, 566 (1972);

• G. M. Cicuta and E. Montaldi, Nuovo Cimento Lett. **4**, 329 (1972);

• J. F. Ashmore, Nuovo Cimento Lett. **4**, 289 (1972);

• E. R. Speer and M. J. Westwater, Ann. Inst. Henri Poincaré **A14**, 1 (1971);

• P. H. Frampton, “ Field Theories, Benjamin Cummings Publishing Company (1987), Capítulo XX;

• B. de Witt and J. Smith, ”Field Theory in Particle Physics”, North-Holland Physics Publishing, Amsterdan (1986), Capítulo XX;

• M. E. Fisher and D. S. Gaunt, Phys. Rev. **133**, 224 (1964);

• K. G. Wilson and M. E. Fisher, Phys. Rev. Lett. **28**, 240 (1972);

• K. G. Wilson, Phys. Rev. **07**, 2911 (1973);

• K. G. Wilson and J. Kogat, Phys. Rep. **12**, 75 (1974).

[6] • t'Hooft and Veltman, Nucl. Phys. **B44**, 189 (1972);

• M. Chanowitz, M. Furman and I. Hinchliffe, Nucl. Phys. **B159**, 225 (1979);

• P. Breitenlohner and D. Maison, Comm. Math. Phys. **52**, 11 (1977);

• P. Ramond, "Field Theory: A modern Primer", Addisson-Wesley (1990);

• P. H. Frampton, "Field Theories", Benjamin Cummings Publishing Company (1987);

[7] • G. Leibrant, Rev. Mod. Phys. **47** (849) 1975;

• R. Gastmans and R. Mensdermans, Nucl. Phys. **B105**, 454 (1973);

• R. Gastmans, J. Verwaest and R. Mensdermans, Nucl. Phys. **B105**, 454 (1976);

• W. Marciano and A. Sirlin, Nucl. Phys. **B88**, 86 (1975).

[8] • B. de Wit, "Introduction to Quantum Field Theory", Utrecht Lecture Notes, 2006.

[9] • O. A. Battistel, Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais (1999);

• O. A. Battistel and M. C. Nemes, Phys. Rev. D**59** (1999), 055010;

• O. A. Battistel and G. Dallabona, Nucl. Phys. B**610** 317 (2001);

• O. A. Battistel and G. Dallabona, J. Phys. G**27** L53-L60 (2001);

• O. A. Battistel and G. Dallabona, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **28**, L1-L10 (2002);

• O. A. Battistel and G. Dallabona, Phys. Rev. D**65** 1250 (2002);

• O. A. Battistel and O. L. Battistel, Int. J. Mod. Phys. A**17**, 1979 (2002);

• O. A. Battistel and G. Krein, Mod. Phys. Lett A**18**: 2255-2264 (2003);

• O. A. Battistel and G. Dallabona, Eur. Phys. J. C **1**, 001 (2003);

• G. Dallabona and O. A. Battistel, Phys. Rev. D**70**, 065017 (2004);

• O. A. Battistel, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **30**, 543 (2004).

[10] • O. A. Battistel, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **30**, 543 (2004).

[11] • E. Gambin, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Maria (2004).

• O. A. Battistel, J. Phys. G ...

[12] • O. A. Battitel, Dimensional aspects of anomalies, trabalho em preparação.

[13] • O. A. Battitel, Scale Ambiguities in perturbative calculations, trabalho em preparação.

[14] • Gross, D. J. Neveu, Phys. Rev. D **10** 3235 (1974).

[15] • H. W. Furry, Phys. Rev. **51,** 125 (1937).

[16] • O. A. Battistel, Parametrização da Ambigüidade de escala no cálculo Perturbativo, em preparação.

[17] • L. S. Gertsein e R. Jackiw, Phys. Rev. **181,** 1955 (1969).

[18] • R. A. Bertlmann, "*Anomalies in Quantum Field Theory*", Oxford University Press (1996);

• T. P. Cheng and L. F. Li, " Theory of Elementary Particle Physics", Oxford University Press, New York (1984);

• O. A. Battistel and G. Dallabona, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **28**, 1 (2002).

• J. S. Bell and Jackiw, Nuovo Cimento **60A**, 47 (1973);

• Fijikawa, K. Phys. Rev. Lett. **42**, 1195 (1979);

• Sutherland, D. G., Nucl. Phys, **B2**, 433 (1966);

• Veltman, M. Proc. R. Soc. **A301**, 107 (1967);

• Bardeen, W. A. Phys. Rev. **184**, 1848 (1969);

• K. G. Wilson, Phys. Rev. **125**, 1067 (1962).

• I. S. Gerstein and R. Jackiw, Phys. Rev. **181** 1955 (1969);

[19] • T. P. Cheng and L. F. Li, "Gauge Theory of Elementary Particle Physics", Oxford University, New York (1984).

[20] • O. A. Battistel and G. Krein, Mod. Phys. Let. **A18** 2255 (2003);

• R.L.S. Farias, G. Dallabona, G. Krein and O.A. Battistel, Phys. Rev. **C 73**, 018201 (2006).

[21] • O.A. Battistel and G. Dallabona, A predictive formulation of Nambu-Jona-Lasinio model, submetido para publicação.