Dissertação de
Mestrado

Processos radiativos em tempo finito e o efeito de Zenão quântico

Ricardo Kullock

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro, Fevereiro de 2008.

Resumo

Em 1977 Sudarshan mostrou que, na mecânica quântica, a observação contínua de um sistema instável (N observações durante um intervalo de tempo finito, levando N a infinito) pode torná-lo estável. Como qualquer sistema fisico sempre interage com os modos do vácuo, é possível encontrar uma evolução não unitária somando sobre os graus de liberdade do campo, o que faz com que o sistema tenha uma probabilidade de decaimento não nula, mesmo se continuamente observado. Para isso é usado o modelo de um sistema de dois níveis interagindo com um campo escalar preparado no vácuo de Minkowski. Usando os argumentos usuais do paradoxo de Zenão quântico é possível mostrar que este sistema tem um decaimento puramente exponencial, como esperado classicamente.

Abstract

In 1977 Misra and Sudarshan show that, in quantum mechanics, the continuous observation of an unstable system (N observations in the finite interval T, taking N to infinity) can make it stable, they called that the quantum Zeno paradox. If this system interacts with the vacuum modes, we find a non-unitary temporal evolution summing over the degrees of freedom of the field, resulting in a decay probability, even when continuously observed. In order to prove this the studied model is that of a two-level system coupled with a scalar field, respectively prepared in the excited state and in the vacuum state. Following the usual arguments of the quantum Zeno paradox it is possible to show that this system exibits an exponential decay, as classicaly expected.

Agradecimentos

- A minha familia que sempre me apoiou.
- Aos meu amigos, cujas presenças são essenciais.
- Ao meu orientador, Nami Fux Svaiter, sem o qual este trabalho não seria possível.
- Aos meus colegas.
- Aos meus professores.
- Ao CBPF pelo ambiente de trabalho.
- Ao CNPq e a CAPES pelo apoio financeiro.

Índice

1 Introdução **1**
1.1 O paradoxo de Zenão quântico 4

2 Propostas experimentais **9**
2.1 Experiência com um sistema de 3 níveis 9
2.2 Experimento com spins 13

3 A Hamiltoniana de um sistema de dois níveis interagindo com um campo escalar **18**
3.1 Quantização do campo escalar 18
3.2 Hamiltonianas de interação qubit-campo 22

4 Sucessivas observações sobre o sistema de dois níveis **27**
4.1 A probabilidade de decaimento para tempo finito 27
4.2 N observações e o limite do contínuo 39

5 Conclusões **44**

A A construção de Misra e Sudarshan **46**

B A Aproximação de Weisskopf-Wigner **50**

Capítulo 1

Introdução

O problema da medida na mecânica quântica ainda levanta controvérsias. Este é normalmente caracterizado pelo acoplamento do sistema quântico de interesse com um aparelho de medida macroscópico e clássico. Este acoplamento leva ao heurístico "colapso da função de onda" - como descrito por von Neumann [1] - causando descoerência no estado do sistema e levando a descrição não-local da função de onda em um correspondente clássico. Misra e Sudarshan [2] mostraram, usando a teoria de von Neumann, que dado um sistema quântico instável, a observação contínua deste pode torná-lo estável. Por exemplo, um átomo instável nunca decairia. Obviamente esta previsão foi considerada como paradoxal, levando os dois a nomear esta situação de "paradoxo de Zenão quântico" ("quantum Zeno paradox") em analogia aos famosos paradoxos de Zenão de Eléia, aluno de Parmênides [3]. Em um de seus paradoxos Zenão descreve Aquiles correndo contra a tartaruga: dado que a tartaruga começe a corrida antes, Aquiles nunca conseguirá alcançá-la por mais rápido que seja, já que sempre que chega na posição em que a tartaruga estava ela já caminhou mais a frente, *ad infinitum*, ou seja, Zenão dividiu o trajeto de Aquiles em diversas partes discretas para chegar a esta conclusão. Misra e Sudarshan, analogamente, dividiram a observação contínua do sistema em N observações discretas dentro de um intervalo de tempo finito T. Ao levarmos N a infinito o resultado paradoxal que o sistema instável se torna estável é encontrado. É importante ressaltar que um resultado próximo a este já havia sido encontrado a bastante tempo atrás por Khalfin [4].

O limite de observações contínuas é considerado por muitos não físico por violar o princípio de incerteza entre energia e tempo. Se as observações são feitas com um intervalo de tempo nulo entre elas, a incerteza na energia seria infinita [5] [6], logo este limite deveria ser considerado apenas como uma idealização matemática [7] [8] [9]. Esta questão é bastante discutida e depende da interpretação das relações de incerteza (especificamente a ausência dos operadores que levariam a esta relação).

Note que o limite $N \rightarrow \infty$ não é necessário para observarmos mudanças no dacaimento segundo a construção do paradoxo [10], pois para valores muito grandes de N poderíamos ainda observar um desvio do decaimento expenoncial esperado. Para observar este efeito, modelos de observação de um sistema quântico são usados [11] [12], e alguns autores afirmam ter observado o resultado em laboratório [13]. Modelos de medida para a análise do paradoxo de Zenão quântico devem ser tratados com cuidado, pois existe uma grande diferença entre congelar a evolução de um sistema com interações microscópicas ou utilizar o acoplando do sistema com um objeto macroscópico clássico. Na referência [7] os autores propõem uma nomenclatura diferente para cada um dos casos: "quantum Zeno effect" para o primeiro e "quantum Zeno paradox" para o segundo, ou seja, apenas o segundo caso é realmente inesperado, um paradoxo. Os autores afirmam que o primeiro caso, mesmo que capaz de congelar a evolução do sistema, é "inerentemente razoável".

Qualquer sistema em evolução interage com o mundo a sua volta. É possível blindar um sistema de forma que este possa ser considerado classicamente isolado, mas uma blindagem perfeita nunca é possível. Um sistema sempre irá interagir com os modos do vácuo, onde o valor esperado de um campo ϕ pode ser nulo mas $< \phi^2 >$ não é (oscilações do campo sempre existem). Desta forma somos motivados a estudar o paradoxo de Zenão quântico com o sistema em questão interagindo também com o vácuo [14] [15].

Para estudar o paradoxo de Zenão quântico de um sistema interagindo com o vácuo utilizaremos um sistema de dois níveis (um qubit) interagindo com um campo bosônico. O sistema observado é o qubit e para isso calculamos a evolução do sistema reduzido. A observação é feita através da interação do qubit com um aparelho clássico, o qual não está descrito dinâmicamente, podendo ser percebido apenas pelo colapso da função de onda do qubit, onde este colapso é tratado como instantâneo. Não existe nenhum interesse aqui de discutir o processo pelo qual a medida é realizada, ou seja, como a informação do qubit é transferida para o detector ou como o colapso da função de onda acontece. Uma vasta literatura sobre o problema de medida da mecânica quântica pode ser encontrada nas referências [16] [17] [18] [19] [20]. Obviamente um colapso descrito por algum processo dinâmico não instântaneo não permitiria uma observação contínua, ou ao menos modificaria uma descrição de tal processo.

O estudo de sistemas instáveis começou com os trabalhos de Gamow [21] e Weisskopf e Wigner [22]. A evolução destes sistemas pode ser dividida em uma parte inicial Gaussiana, uma exponencial para tempos intermediários e uma lei de potência para tempos longos [10] [23] [31]. A evolução quadrática no tempo na parte Gaussiana é que tem como consequência o paradoxo. Por isso o que deve ser analisado na evolução do sistema interagindo com o vácuo é seu comportamento para tempos pequenos. O problema de interesse é quando um sitema de dois níveis é preparado no estado excitado e o campo escalar com o qual ele interage é preparado no vácuo. Para aplicar os argumentos usuais do paradoxo de Zenão quântico devemos calcular a probabilidade de decaimento para pequenos tempos do sistema reduzido do qubit. Apesar deste calcuo já existir na literatura, existem considerações que nos levam a necessidade de um novo cálculo, como será discutido.

Vamos discutir rapidamente alguns trabalhos importantes que nos baseamos para os calculos que iremos apresentar. Svaiter e Svaiter discutem nas referências [25] [26] a evolução de um sistema de dois níveis interagindo com um campo escalar supondo um acoplamento fraco entre os dois. Estes autores fazem o cálculo da taxa de transição do sistema de dois níveis para diversas situações sem utilizar o uso da aproximação de ondas girantes ("rotating wave approximation"). Não usar esta aproximação é de grande importância, como será discutido mais adiante. Ford e colaboradores [27] discutem como a presença de uma ou duas superfícies refletivas (espelhos) alteram as flutuações do vácuo, modificando os processos radioativos a temperatura nula e também a temperatura finita.

Nesta tese será usada a convenção $k_B = c = \hbar = 1$

1.1 O paradoxo de Zenão quântico

O paradoxo de Zenão quântico é uma consequência da evolução quadrática no tempo na probabilidade de decaimento de um sistema instável. Supondo que o sistema seja preparado em um estado $|a\rangle$ que não é auto-estado da Hamiltoniana, então sua probabilidade de permanecer neste mesmo depois de um tempo t é dado pelo operador unitário de evolução temporal, que depende apenas da diferença $t_2 - t_1$, já que o sistema tem invâriancia temporal:

$$P(t) = |\langle\, a \,|\, e^{-iHt} \,|\, a \,\rangle|^2, \tag{1.1}$$

Para um tempo suficientemente pequeno podemos expandir esta probabilidade, encontrando uma dependência quadrática no tempo

$$P(t) = 1 - \frac{t^2}{\tau_z^2} + ..., \tag{1.2}$$

onde $\tau_z^{-1} = [\langle\, a \,|\, H^2 \,|\, a \,\rangle - \langle\, a \,|\, H \,|\, a \,\rangle^2]^{\frac{1}{2}}$.

Ao medirmos que o sistema continua no estado $|a\rangle$ depois de um intervalo de tempo $\Delta\tau$, a função de onda do sistema irá colapsar para o mesmo. Supondo que o colapso seja instantâneo e que a evolução do sistema seja Markoviana, ou seja, a probabilidade não depende de sua história passada, a probabilidade de decaimento para um segundo intervalo $\Delta\tau$ será exatamente a mesma. Desta forma, a probabilidade de que o sistema seja medido N vezes no mesmo estado inicial $|a\rangle$ é

$$P^{(N)}(T) = \left[P\left(\frac{T}{N}\right)\right]^N = \left[1 - \frac{1}{\tau_z^2}\left(\frac{T}{N}\right)^2 + ...\right]^N, \tag{1.3}$$

onde $T = N\Delta\tau$. Ao levarmos o limite para observações contínuas $N \to \infty$, obtemos

$$P(T) = \lim_{N\to\infty} P^{(N)}(T) = \lim_{N\to\infty} \exp\left(-\frac{T^2}{\tau_z^2 N},\right) = 1, \tag{1.4}$$

ou seja, ao observarmos contínuamente um sistema instável, este se torna estável.

Nesta derivação do paradoxo de Zenão quântico fizemos uso de um colapso da função de onda instantâneo, mas isto não é necessário como mostram os autores na Ref. [7]. Supondo que a Hamiltoniana tenha um auto-estado fundamental $|b\rangle$, e que $\langle a|b\rangle = 0$, depois um tempo o sistema será encontrado no estado

$$|\psi(T)\rangle = \exp(-\imath HT)|a\rangle = \alpha(T)|a\rangle + \beta(T)|b\rangle, \tag{1.5}$$

e a probabilidade de encontrarmos o sistema no estado inicial é

$$P(T) = |\alpha(T)|^2. \tag{1.6}$$

Se não supormos nenhum colapso da função de onda, o estado do sistema combinado com o detector neste instante T é dado por

$$|\psi(T)\rangle = \alpha(T)|a\rangle \otimes |A_0\rangle + \beta(T)|b\rangle \otimes |A_1\rangle, \tag{1.7}$$

onde $|A_0\rangle$ e $|A_1\rangle$ são estados ortogonais do aparelho de medida. Este estado combinado não contém "misturas" do tipo $|a\rangle \otimes |A_1\rangle$ porque o detector é clássico.

Digamos que realizamos duas medidas durante o intervalo T, uma em $T/2$ e a outra em T. Então, tomando a Eq.(1.7) para $T/2$ e aplicando o operador de evolução para o resto do intervalo, obtemos

$$|\psi(T)\rangle = \alpha(T/2)e^{-\imath HT/2}|a\rangle \otimes |A_0\rangle + \beta(T/2)e^{-\imath HT/2}|b\rangle \otimes |A_1\rangle. \tag{1.8}$$

Com isso a probabilidade de encontrar o sistema em $|a\rangle$ no tempo T é

$$\begin{aligned} P(T) = |\langle aA_0|\psi(T)\rangle|^2 = |\langle aA_0|\alpha(T/2)\exp(-\imath HT/2)|aA_0\rangle + \\ +\langle aA_0|\beta(T/2)\exp(-\imath HT/2)|bA_1\rangle|^2, \end{aligned} \tag{1.9}$$

e com isso, usando a ortogonalidade dos estados $|A\rangle$, temos

$$
\begin{aligned}
P(T) = |\langle aA_0|\alpha(T/2)\exp(-\imath HT/2)|aA_0\rangle|^2 = \\
= |\alpha(T/2)\langle aA_0|\Big(\alpha(T/2)|a\rangle + \beta(T/2)|b\rangle\Big)|^2 = \\
= |\alpha(T/2)|^4.
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

Com a mesma análise para um intervalo com N observações, cada intervalo entre as medidas durando T/N, a probabilidade fica

$$
P(T) = |\alpha(T/N)|^{2N}. \tag{1.11}
$$

Para uma probabilidade de decaimento exponencial

$$
|\alpha(t)|^2 = e^{-\Gamma t}, \tag{1.12}
$$

a Eq.(1.11) não representa problema algum, mas para uma probabilidade de decaimento dada pela Eq.(1.2) sim, tendo como resultado a Eq.(1.4). De forma geral, um decaimento qualquer pode ser expandido como

$$
|\alpha(T)|^2 = (1 - kT^m + ...). \tag{1.13}
$$

Para medidas realizadas em intervalos de T/n suficientemente pequenos, teremos a probabilidade final

$$
P(T) = 1 - kT^m n^{1-m}. \tag{1.14}
$$

Neste caso temos diferentes regiões a serem consideradas. Para $m > 1$ temos o paradoxo de Zenão quântico, enquanto para $0 < m < 1$ o decaimento é, pelo contrário, acelerado por medidas frequêntes. O único caso não modificado é o caso exponencial, onde $m = 1$

Então o paradoxo de Zenão quântico é consequência puramente de uma evolução quadrática no tempo dada pela mecâncica quântica, sem qualquer necessidade de usar colapso da função de onda, como a construção original de Misra e Sudarshan leva a crer e como o problema normalmente é tratado. Observe que para evitarmos a suposição do colapso da função de onda é necessário supor um acoplamento com um aparelho de medida clássico, onde o estado total irá refletir este fato.

No capítulo 2 serão discutidos modelos expêrimentais para medir o paradoxo de Zenão quântico. No capítulo 3 será discutido rapidamente a quantização do campo escalar e sua Hamiltoniana, em um segundo momento discutiremos modelos de interação entre um campo escalar e um sistema de dois níveis. No capítulo 4 a probabilidade de decaimento para tempo finito será calculada em duas situções diferentes e os resultados usados nos argumentos usuais do paradoxo de Zenão quântico (Eq.(1.11)). As conclusões são apresentadas no capítulo 5. No apêndice A apresentamos a construção original do problema como feita por Misra e Sudarshan. No apêndice B, a solução de Block e Berman é apresentada e discutida. Lemabramos que neste trabalho estaremos utilizando a notação $\hbar = k_B = c = 1$

Capítulo 2

Propostas experimentais

2.1 Experiência com um sistema de 3 níveis

Um possível experimento para medir o paradoxo de Zenão quântico foi proposto por Cook [28], sem assumir o limite $N \to \infty$. Este autor argumenta que alguma diferença do decaimento deveria ser observada. O experimento foi realizado por Itano, Heinzen, Bollinger e Wineland [13], que afirmaram ter medido experimentalmente o paradoxo de Zenão quântico com sucesso. O experimento foi seguido de muitas discussões para finalmente chegar a conclusão de que, apesar da taxa de decaimento ser modificada assim como o provisto pelo paradoxo, este não equivale exatamente a situação contemplada por Misra e Sudarshan, e pode ser compreendido usualmente dentro da mecâncica quântica.

O experimento consiste em utilizar não um sistema de 2 níveis, mas 3, o terceiro servindo como um suporte para realizar a medida sobre em que nível o sistema está. Isto é feito se a transição do terceiro nível para o segundo for proibida ou desprezível comparada a transição para o primeiro, como seria possível utilizando uma cavidade adequada. Com rápidos pulsos levando o sistema do estado inicial ao terceiro nível, este irá decair rapidamente de volta ao estado inicial emitindo um fóton, que pode ser detectado. Se, por um outro lado, o sistema não estiver mais no estado inicial, nenhuma transição irá ocorrer, devido a energia do pulso corresponder apenas a primeira transição.

Suponha então um sistema com níveis de energia $E_1 < E_2 < E_3$ e uma onda plana de frequência $\omega = E_2 - E_1$, fazendo com que o sistema oscile entre os níveis 1 e 2. Na aproximação de ondas girantes, o sistema pode ser definido pelo vetor de Bloch

$$\begin{aligned} R_1 &\equiv \rho_{21} + \rho_{12} \\ R_2 &\equiv i(\rho_{12} - \rho_(21)) \\ R_3 &\equiv \rho_{22} - \rho 11 \equiv P_2 - P_1 \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde ρ é a matriz densidade do sistema. A evolução deste é dada por

$$\dot{\mathbf{R}} = \omega \times \mathbf{R}, \tag{2.2}$$

que, com a condição inicial $\mathbf{R}(0) = (0, 0, -1)$ (o sistema está iniciamente no estado 1), resulta na solução

$$\mathbf{R}(t) = (0, \sin \omega t, -\cos \omega t). \tag{2.3}$$

Escolhendo $T = \pi/\omega$, apenas o estado 2 estará populado no final, ou seja, $P_2(T) = 1$.

Com os pulsos $\omega_0 = E_3 - E_1$ e a transição $3 \rightarrow 2$ proibida, a absorção-emissão corresponde a uma descoêrencia dos diferentes ramos da função de onda, fazendo com que os termos $R_{1,2}$ se tornem rapidamente zero. Ou seja, os termos fora da diagonal da matriz densidade, as superposições, se tornam nulas. Se um pulso é emitido em $\tau = \pi/N\omega$, então

$$\mathbf{R}(\tau) \equiv \mathbf{R}^{(1)} = (0, 0, -\cos \pi/N). \tag{2.4}$$

Supondo que a cada pulso emitido encontra-se um fóton detectado, ou seja, o sistema é encontrado no estado 1, depois de N pulsos em intervalos $\Delta\tau = \pi/N\omega$, temos finalmente

$$\mathbf{R}(T) \equiv \mathbf{R}^{(N)} = (0, 0, -\cos^N \pi/N). \tag{2.5}$$

Então, as probabilidades de encontrar o sistema no nível 1 ou 2 no tempo T, é

$$\begin{aligned} P_2^{(N)} &= \frac{1}{2}[1 + R_3^{(N)}] = \frac{1}{2}[1 - \cos^N \pi/N] \\ P_1^{(N)} &= \frac{1}{2}[1 - R_3^{(N)}] = \frac{1}{2}[1 + \cos^N \pi/N]. \end{aligned} \tag{2.6}$$

No limite $N \to \infty$ temos que a única probabilidade não nula é de o sistema ser encontrado no estado 1, ou seja no estado inicial, invertendo a situação resultante de uma evolução livre.

Este resultado foi considerado como um exemplo do paradoxo de Zenão quântico, e medido com sucesso por Itano *et al.* Mas se analisado com cuidado, fica óbvio que este não corresponde ao paradoxo, ou seja, que o sistema, colocado em um estado inicial instável, permanece neste estado indefinidamente, enquanto estivermos observando. Como consequência do sistema consistir de transições induzidas e não expontâneas, a cada instante ele sofre o fênomeno de repopulação. Na primeira medida, temos

$$\begin{aligned} R_3^{(1)} &= -\cos \pi/N = P_2^{(1)} - P_1^{(1)} \\ P_1^{(1)} &= \cos^2 \frac{\pi}{2N} \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$P_2^{(1)} = \sin^2 \frac{\pi}{2N}.$$

Agora observe a probabilidade de encontrar o sistema no estado inicial na segunda medida:

$$\begin{aligned} R_3^{(2)} &= -\cos^2 \pi/N = P_2^{(2)} - P_1^{(2)} \\ P_1^{(2)} &= \cos^4 \frac{\pi}{2N} + \sin^4 \frac{\pi}{2N} \\ P_2^{(2)} &= 2\sin^2 \frac{\pi}{2N} \cos^2 \frac{\pi}{2N}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

A probabilidade de encontrar o sistema no estado 1 depois da segunda medida consiste de duas contribuições, a primeira é a de interesse, onde o sistema nunca saiu do estado 1. A segunda contribuição muda $P_1^{(2)}$ adcionando a transição $1 \to 2 \to 1$, ou seja, a probabilidade de que o sistema seja encontrado no estado 1 mas tenha passado intermediariamente pelo estado 2.

Desta forma podemos ver que a experiência feita por Itano e colaboradores não se adequa a proposta de Misra e Sudarshan. Esta considera a probabilidade de encontrar o sistema no estado inicial no tempo final, independentemente do caminho feito no intervalo.

Na referência [29] os autores mostram que, para um número N de observações feitas em um intervalo T, temos as probabilidades segundo as distribuições binomiais

$$P_1^{(N)}(T) = \sum_{n\,par} \binom{N}{n} \sin^{2n} \frac{\pi}{2N} \cos^{2(N-n)} \frac{\pi}{2N}, \tag{2.9}$$

e também

$$P_2^{(N)}(T) = 1 - \sum_{n\,par} \binom{N}{n} \sin^{2n} \frac{\pi}{2N} \cos^{2(N-n)} \frac{\pi}{2N}, \tag{2.10}$$

onde $\sum_{n\,par}$ é a soma de todos os termos pares começando em zero.

Estas expressões para as probabilidades correspondem ao estado final igual ao inicial (ou diferente para $P_2^{(N)}$), independente do caminho feito, um resultado conceitualmente diferente ao de Misra e Sudarshan, que é obtido mantendo apenas os termos de ordem 0, ou seja

$$\mathcal{P}_1^{(N)}(T) = \cos^{2N} \frac{\pi}{2N}. \tag{2.11}$$

Este problema de repopulação no decorrer do caminho das medidas é uma consequência para qualquer sistema cuja evolução temporal é oscilatória, onde nenhuma precaução foi tomada para evitar este problema. O único real decaimento existente no problema é ignorado no problema, funcionando apenas como uma forma heurística de incluir um modelo de medida, que é a transição $3 \rightarrow 1$.

2.2 Experimento com spins

Outra proposta para medir o paradoxo de Zenão quântico faz uso do spin de nêutrons [30], e não sofre de problemas de repopulação. Um experimento similar foi proposto por Peres [31], que utilizou fotons, no lugar de neutrons. Seguimos aqui o desenvolvimento exposto na referência [10].

O experimênto consiste em um feixe de neutrons em uma direção y que passa por diversas regiões com um campo magnético B, com componentes apenas na direção x, para chegar finalmente a um detector D_0. A Hamiltoniana de interação é dada por

$$H = \mu B \sigma_1, \tag{2.12}$$

onde μ é o módulo do momento magnético do nêutron e σ_1 a primeira matriz de Pauli.

Os nêutrons tem uma velocidade v e o percurso total comprimento l, passando por N regiões de campo magnético, resultando em um período $T = N\tau$, $\tau = l/v$, de interação, onde iremos desprezar o período em que os nêutrons passam pelas regiões sem campo. Supondo que o sistema está inicialmente no estado

$$\rho_0 = \rho_{\uparrow\uparrow} = |\uparrow\rangle\langle\uparrow|, \tag{2.13}$$

o estado do sistema, depois de uma evolução de $t_0 = 0$ até t, será

$$\rho(t) = \cos^2(\frac{1}{2}wt)\rho_{\uparrow\uparrow} + \sin^2(\frac{1}{2}wt)\rho_{\downarrow\downarrow} - i\cos(\frac{1}{2}wt)\sin(\frac{1}{2}wt)\rho_{\uparrow\downarrow} + H.C., \tag{2.14}$$

com $w = 2\mu B$. Se escolhermos $N\tau = T = (2m+1)\pi/w$, $m \in \mathbf{N}$, então

$$\begin{aligned} \rho(T) &= \rho_{\downarrow\downarrow} \qquad (2.15) \\ P_\downarrow(T) &= 1. \end{aligned}$$

Entre cada região de campo magnético, é colocado um espelho, separando as partes da onda incidente de spin up e spin down, a segunda sendo levada a um detector D_i em cada um dos casos, de modo que sabemos se o feixe que continua até o detector D_0 ainda contém spins up. Para apenas um detector colocado no final, mas já com os espelhos colocados, apenas a parte de $\rho_{\uparrow\uparrow}$ continua, e o que chega ao detector D_0 é

$$\begin{aligned} \rho(T) &= \cos^2(\frac{1}{2}wt)\rho_{\uparrow\uparrow} = 0 \\ P_\uparrow(T) &= 0, \qquad (2.16) \end{aligned}$$

para $T = (2m+1)\pi/w$, mas no caso em que existe um colapso em cada região com os detectores intermediários, temos

$$\rho^{(N)}(T) = \left[\cos^2(\frac{1}{2}wT)\right]^N \rho_{\uparrow\uparrow} = \left[\cos^2(\frac{\pi}{2N})\right]^N \rho_{\uparrow\uparrow}, \tag{2.17}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} \rho^{(N)}(T) &= \rho_{\uparrow\uparrow} \\ \lim_{N\to\infty} P^{(N)}(T) &= 1. \end{aligned} \tag{2.18}$$

O mesmo resultado pode ser obtido sem o uso de projetores, como foi implicitamente usado acima. Para isso, como já foi discutido, basta acoplar o sistema com um aparelho clássico de medida. Neste caso, o estado inicial dos nêutrons e detectores é

$$\Xi_I^{tot} = (\xi_0 \otimes \rho_{\uparrow\uparrow}) \otimes \sigma_I^{D_0} \otimes \prod_{j=1}^{N} \sigma_I^{D_j}, \tag{2.19}$$

onde $\xi_0 = |\phi_0\rangle\langle\phi_0|$, ϕ_0 sendo o pacote de onda dos nêutrons, viajando na direção y, e $\sigma_I^{D_j}$ a matriz densidade inicial do detector D_j. O estado final, depois do feixe passar pelos espelhos e detectores é

$$\begin{aligned} \Xi_F^{tot} &= (\cos^N \frac{\pi}{2N})\, \xi_0 \otimes \rho_{\uparrow\uparrow} \otimes \sigma_F^{D_0} \otimes \prod_{j=1}^{N} \sigma_I^{D_j} \\ &+ \sin^2 \frac{\pi}{2N} \sum_{k=1}^{N} (\cos^{2(k-1)} \frac{\pi}{2N})\, \xi_k \otimes \rho_{\downarrow\downarrow} \otimes \sigma_I^{D_0} \otimes \sigma_F^{D_k} \otimes \prod_{j\neq k} \sigma_I^{D_j}, \end{aligned} \tag{2.20}$$

onde o primeiro termo corresponde a detecção do spin up, enquanto os outros detectores permanecem intactos, e o segundo uma soma onde o k-ésimo detector mediu o spin down, com todos os outros intactos (inclusive D_0). A matriz densidade acima não contém termos fora da diagonal, como consequência das medidas serem ideais. Podemos escrever a matriz densdade como

$$\Xi^{tot}_{F,ij} = \begin{pmatrix} c^{2N}\rho_{\uparrow\uparrow} & o & \cdots & & o \\ o & s^2c^{2N-2}\rho_{\downarrow\downarrow} & & & \\ \vdots & & s^2c^{2N-4}\rho_{\downarrow\downarrow} & & \\ & & & \ddots & \\ o & \cdots & & & s^2\rho_{\downarrow\downarrow} \end{pmatrix}, \tag{2.21}$$

onde está sendo usada a notação $c \equiv \cos\frac{\pi}{2N}$ e $s \equiv \sin\frac{\pi}{2N}$. Também podemos calcular a matriz densidade para o caso onde não exite colapso da função de onda. Se retiramos os detectores $j = 1...N$, restando apenas o detector final, temos, com o estado inicial

$$|\psi^{tot}_I\rangle = |\phi_0\rangle \otimes |\uparrow\rangle, \tag{2.22}$$

o estado final

$$|\psi^{tot}_F\rangle = c^N|\phi_0\rangle \otimes |\uparrow\rangle + (-isc^{N-1}|\phi_N\rangle - isc^{N-2}|\phi_{N-1}\rangle - \cdots - is|\phi_1\rangle) \otimes |\downarrow\rangle. \tag{2.23}$$

Este estado final corresponde a uma matriz densidade com elementos fora da diagonal não-nulos, ou seja, ignorando momentaneamente o spin por simplicidade, temos

$$\rho_{ij} = \begin{pmatrix} c^{2N} & isc^{2N-1} & isc^{2N-2} & \cdots & isc^N \\ -isc^{2N-1} & s^2c^{2N-2} & s^2c^{2N-3} & \cdots & s^2c^{N-1} \\ -isc^{2N-2} & s^2c^{2N-3} & s^2c^{2N-4} & \cdots & s^2c^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -isc^N & s^2c^{N-1} & s^2c^{N-2} & \cdots & s^2 \end{pmatrix}. \tag{2.24}$$

Observe que os elementos da diagonal são idênticos. Especificamente, a probabilidade de encontrar os nêutrons com spin up é a mesma, e levando $N \to \infty$, as duas se tornam idênticas e igual a

$$\Xi^{tot}_{F,ij}, \rho_{ij} \rightarrow \begin{pmatrix} \rho_{\uparrow\uparrow} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.25}$$

ou seja, com colapso ou não, no limite de observações contínuas a evolução do sistema é congelada, e o paradoxo de Zenão quãntico é consequência direta da mecânica quântica.

Capítulo 3

A Hamiltoniana de um sistema de dois níveis interagindo com um campo escalar

3.1 Quantização do campo escalar

A Hamiltoniana do sistema físico que estamos interessados em discutir é composta das Hamiltonianas livres do campo e do qubit, além da Hamiltoniana de interação. A Hamiltoniana do campo é escrita de forma bastante simples, como uma soma de Hamiltonianas de infinitos osciladores harmônicos quântizados, o que pode ser demonstrado utilizando as relações de comutação canônicas $[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)] = \imath\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ e as expansões do campo $\phi(\mathbf{x})$ e de seu momento canônicamente conjugado $\pi(\mathbf{x})$. Seguiremos aqui uma abordagem um pouco diferente. A Hamiltoniana de um campo escalar clássico pode, como será demonstrado a seguir, ser escrita como uma soma de osciladores harmônicos clássicos independentes. Por serem independentes estes osciladores podem ser quantizados separadamente.

A Hamiltoniana do campo escalar aqui considerado é dada por

$$H = \int d^3x\, \mathcal{H} = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\pi^2(\mathbf{x},t) + \frac{1}{2}(\nabla\phi(\mathbf{x},t))^2 + V(\phi(\mathbf{x},t)) \right]. \quad (3.1)$$

Estaremos trabalhando com o caso em que $V(\phi(\mathbf{x},t)) = 0$. Este campo obedece a equação de Klein-Gordon sem massa $(\partial_\mu \partial^\mu)\phi(\mathbf{x},t) = 0$, e pode ser expandido em uma base de ondas planas, ou seja,

$$\phi(\mathbf{x},t) = \sum_{\mathbf{k}} q_{\mathbf{k}}(t) e^{\imath \mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (3.2)$$

assim como seu momento canônicamente conjugado

$$\pi(\mathbf{x},t) = \sum_{\mathbf{k}} p_{\mathbf{k}}(t) e^{\imath \mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (3.3)$$

Agora usamos estas expansões em cada um dos termos na Hamiltoniana, o primeiro é

$$\pi^2(\mathbf{x},t) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} \left(p_{\mathbf{k}}(t)\, p_{\mathbf{k}'}(t) e^{\imath(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} \right), \quad (3.4)$$

e o segundo

$$(\nabla\phi(\mathbf{x},t))^2 = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} \left((i)^2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'\, q_{\mathbf{k}}(t)\, q_{\mathbf{k}'}(t) e^{\imath(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} \right). \quad (3.5)$$

Como a integração é apenas sobre $\mathbf{x}$ e apenas as exponenciais possuem tal dependência, a densidade Hamiltoniana é facilmente integrável, resultando em deltas $\delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'}$, e a Hamiltoniana total é dada por

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} \left(p_{\mathbf{k}}(t)\, p_{-\mathbf{k}}(t) + k^2\, q_{\mathbf{k}}(t)\, q_{-\mathbf{k}}(t) \right). \quad (3.6)$$

Com a imposição de que o campo escalar seja real ($\phi^*(\mathbf{x},t) = \phi(\mathbf{x},t)$), podemos ver que

$$\sum_{\mathbf{k}} q^*_{-\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \sum_{\mathbf{k}} q_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}, \tag{3.7}$$

ou seja, $q_{\mathbf{k}} = q^*_{-\mathbf{k}}$ ou $q^*_{-\mathbf{k}} = q_{\mathbf{k}}$, o que significa que $q_{\mathbf{k}}(t)\, q_{-\mathbf{k}}(t) = |q_{\mathbf{k}}(t)|^2$. O mesmo pode ser encontrado para $p_{\mathbf{k}}$, resultando na seguinte Hamiltoniana

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} \left(|p_{\mathbf{k}}(t)|^2 \; + k^2 \, |q_{\mathbf{k}}(t)|^2 \right), \tag{3.8}$$

ou seja, uma soma de infinitos osciladores harmônicos independentes (com massa igual a 1). É importante observar que em nenhum momento foi necessário utilizar o comutador de $q_k(t)$ com $p_k(t)$. Com isso, se quântizarmos cada um destes osciladores independentemente, a Hamiltoniana quântizada será escrita como uma soma de Hamiltonianas de osciladores harmônicos quântizados, ou seja,

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} (a^\dagger_{\mathbf{k}}\, a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2}), \tag{3.9}$$

onde os operadores de criação e aniquilação obedecem a seguinte álgebra

$$\begin{aligned} [a_{\mathbf{k}}, a^\dagger_{\mathbf{k}'}] &= \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \\ [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}] &= [a^\dagger_{\mathbf{k}}, a^\dagger_{\mathbf{k}'}] = 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Usando os operadores de criação e aniquilação para cada modo do campo escalar, a expansão para campo em ondas planas fica escrita como

$$\phi(x,t) = \sum_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}} \left(a_{\mathbf{k}}(t) e^{\imath \mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + a^{\dagger}_{\mathbf{k}}(t) e^{-\imath \mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right), \tag{3.11}$$

onde $N_{\mathbf{k}}$ é uma constante de normalização. Para o caso do campo livre, a dependência temporal de $a^{\dagger}_{\mathbf{k}}(t)$ e $a_{\mathbf{k}}(t)$ é trivial, e os campo e momento conjugado podem ser escritos da seguite maneira

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x},t) &= \sum_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}} \left(a_{\mathbf{k}} e^{-\imath kx} + a^{\dagger}_{\mathbf{k}} e^{\imath kx} \right), \\ \pi(\mathbf{x},t) &= \sum_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}} (-\imath w_{\mathbf{k}}) \left(a_{\mathbf{k}} e^{-\imath kx} - a^{\dagger}_{\mathbf{k}} e^{\imath kx} \right), \end{aligned} \tag{3.12}$$

onde $kx = k^{\mu} x_{\mu} = w_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x}$ e $w_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$

Para a quântização de osciladores harmomicos, temos o espaço de Fock para os autoestados da Hamiltoniana, de modo que

$$\begin{aligned} a^{\dagger}|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle \\ a|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle, \end{aligned} \tag{3.13}$$

onde $|n\rangle$ é o autovetor que satisfaz

$$H|n\rangle = (n + 1/2)\omega|n\rangle. \tag{3.14}$$

Da mesma forma, a Hamiltoniana do campo escalar quântizado obedece a

$$H_{\mathbf{k}}|n_{\mathbf{k}}\rangle = (n_{\mathbf{k}} + 1/2)|n_{\mathbf{k}}\rangle \tag{3.15}$$

Da mesma forma que um oscilador harmônico quântizado tem seu menor estado de energia com autovetor $a|0\rangle = 0$, definimos o estado do vácuo de um campo como sendo aquele onde

$$a_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0 \qquad \forall\ \mathbf{k}. \tag{3.16}$$

O vácuo de um campo é composto pelos menores estados de energia de cada um dos modos do campo, ou seja,

$$|0, M\rangle = |0_{\mathbf{k}_1}\rangle \otimes |0_{\mathbf{k}_2}\rangle ... , \tag{3.17}$$

onde $|0, M\rangle$ é o vácuo como visto por um observador inercial em um espaço plano.

3.2 Hamiltonianas de interação qubit-campo

Após apresentarmos a Hamiltoniana do campo livre, analizaremos as Hamiltonianas do sistema de dois níveis livre e a Hamiltoniana de interação. As duas serão discutidas nesta seção. De modo mais geral as Hamiltonianas discutidas envolverão $\mathcal{N}$ sistemas de dois níveis, onde cada um dos sistemas não interage diretamente entre si, apenas atraves de um campo escalar quantizado em uma cavidade (os modos do campo são discretos). Para o problema em questão basta tomar $\mathcal{N} = 1$. O espaço de Hilbert do campo é $\mathcal{H}^{(B)}$ e o espaço dos qubits é $\mathcal{H}^{(Q)}$, de forma que o espaço de Hilbert total é dado por $\mathcal{H}^{(B)} \otimes \mathcal{H}^{(Q)}$. Logo, a Hamiltoniana total, dada em termos das Hamiltonianas do campo H_B, da Hamiltoniana dos qubits H_Q, e das identidades de cada espaço I_B e I_Q é

$$H = H_B \otimes I_Q + I_B \otimes H_Q + H_I, . \tag{3.18}$$

A Hamiltoniana do j-ésimo qubit tem os seguintes autovalores e autoestados:

$$H_Q^{(j)} |\, i \,\rangle_j = \omega_i^{(j)} |\, i \,\rangle_j, \tag{3.19}$$

ou seja, usando a ortogonalidade dos autoestados da Hamiltoniana, podemos escreve-la como

$$H_D^{(j)} = \sum_{i=1}^{2} \omega_i^{(j)} (|\, i \,\rangle \langle\, i |\,)_j. \tag{3.20}$$

A Hamiltoniana de sistemas de dois níveis pode ser convenientemente escrita em termos de operadores de criação e aniquilação, em analogia ao campo escalar. Para isso, definimos os operadores de Dicke $\sigma^z_{(j)}$, $\sigma^+_{(j)}$ and $\sigma^-_{(j)}$ para cada qubit como

$$\begin{aligned} \sigma^z_{(j)} &= \frac{1}{2} (|2\,\rangle \langle\, 2| - |1\,\rangle \langle\, 1|\,)_j, \\ \sigma^+_{(j)} &= (|2\,\rangle \langle\, 1|\,)_j, \\ \sigma^-_{(j)} &= (|1\,\rangle \langle\, 2|\,)_j, \end{aligned} \tag{3.21}$$

onde os operadores σ obedecem a uma álgebra de momento angular

$$\begin{aligned} \left[\sigma^+_{(j)}, \sigma^-_{(j)}\right] &= 2\,\sigma^z_{(j)}, \\ \left[\sigma^z_{(j)}, \sigma^+_{(j)}\right] &= \sigma^+_{(j)}, \\ \left[\sigma^z_{(j)}, \sigma^-_{(j)}\right] &= -\sigma^-_{(j)}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Com estes operadores, é trivial mostrar que a Hamiltoniana (livre) de cada qubit pode ser escrita como

$$H_D^{(j)} = \Omega^{(j)}\, \sigma^z_{(j)} + \frac{1}{2}\Big(\omega_1^{(j)} + \omega_2^{(j)}\Big), \tag{3.23}$$

onde $\Omega^{(j)} = \omega_2^{(j)} - \omega_1^{(j)}$. Podemos mudar a energia por uma constante $\frac{1}{2}(\omega_1^{(j)} + \omega_2^{(j)})$ para ficarmos com a Hamiltoniana do qubit com a forma mais compacta

$$H_D^{(j)} = \Omega^{(j)}\, \sigma^z_{(j)}. \tag{3.24}$$

O modelo mais simples, facilmente generalizado para o caso que desejamos é o de apenas um qubit interagindo com apenas um modo do campo escalar

$$\begin{aligned} & I_B \otimes H_D^{(j)} + H_B \otimes I_Q + H_I^{(j)} = \\ & I_B \otimes \Omega^{(j)} \sigma^z_{(j)} + \omega_0 \, a^\dagger a \otimes I_Q + g \left(a \, + \, a^\dagger \right) \otimes \left(\sigma^+_{(j)} + \sigma^-_{(j)} \right), \end{aligned} \tag{3.25}$$

onde as contribuições qubit livre e do do campo livre (primeiro e segundo termos do lado direito) estão com suas energias modificadas por uma constante (a constante que some da Eq.(3.23) resultando na Eq.(3.24) e a energia de ponto zero do campo).Também temos a uma constante de acoplamento g entre o campo e o qubit. A generalização para $\mathcal{N}$ sistemas é trivial, e a Hamiltoniana é dada por

$$\begin{aligned} & I_B \otimes \sum_{j=1}^{N} H_D^{(j)} + H_B \otimes I_Q + \sum_{j=1}^{N} H_I^{(j)} = \\ & I_B \otimes \sum_{j=1}^{N} \Omega^{(j)} \sigma^z_{(j)} + \omega_0 \, a^\dagger a \otimes I_Q + \left(a + a^\dagger \right) \otimes \frac{g}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} \left(\sigma^+_{(j)} + \sigma^-_{(j)} \right), \end{aligned} \tag{3.26}$$

onde a soma para os N qubits é escrita explicitamente como

$$\sum_{j=1}^{N} \Omega^{(j)} \sigma^z_{(j)} = \Omega^{(1)} \sigma^z_{(1)} \otimes \mathbf{1} \otimes ... \otimes \mathbf{1} + ... + \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes ... \otimes \mathbf{1} \otimes \Omega^{(N)} \sigma^z_{(N)}, \tag{3.27}$$

onde $\mathbf{1}$ é a identidade do espaço de Hilbert de cada qubit.

Neste momentos vamos discutir rapidamente sistemas fisicos conhecidos como geradores de estados emaranhados. Para isso é necessário introduzir na Hamiltoniana um termo de interção direta entre os qubits. Por exemplo,

$$H_{(qq)} = \sum_{i \neq j}^{2} H_{(ij)} \, \sigma^+_{(i)} \otimes \sigma^-_{(j)}. \tag{3.28}$$

Enquanto os qubits não interagem diretamente (podem interagir através de um campo), o espaço de Hilbert é gerado pelo conjunto de estados $|\, g_1 \rangle \otimes |\, g_2 \rangle, |\, g_1 \rangle \otimes |\, e_2 \rangle, |\, e_1 \rangle \otimes$

$|\, g_2 \,\rangle, |\, e_1 \,\rangle \otimes |\, e_2 \,\rangle$, onde g e e indicam os estados fundamental e excitado respectivamente. Com termos do tipo Eq.(3.28), o estados $|\, g_1 \,\rangle \otimes |\, e_2 \,\rangle$ e $|\, e_1 \,\rangle \otimes |\, g_2 \,\rangle$ não mais são parte da base de autoestados do sistema, devendo ser substituidos por

$$
\begin{aligned}
|\, s \,\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\, e_1 \,\rangle \otimes |\, g_2 \,\rangle + |\, g_1 \,\rangle \otimes |\, e_2 \,\rangle\right) \\
|\, a \,\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\, e_1 \,\rangle \otimes |\, g_2 \,\rangle - |\, g_1 \,\rangle \otimes |\, e_2 \,\rangle\right). \qquad (3.29)
\end{aligned}
$$

Voltando para Eq.(3.26), uma possibilidade de simplificação é supor a aproximação de ondas girantes (rotating-wave approximation), ignorando termos que não conservam energia, ou seja, os dois termos de interação que contém operadores de criação (aniquilação) para tanto o campo como o qubit.

A Hamiltoniana do modelos de Jaynes-Cummings [35] é

$$
\begin{aligned}
& I_B \otimes H_D^{(j)} + H_B \otimes I_Q + H_I^{(j)} = \\
& I_B \otimes \Omega^{(j)}\, \sigma^z_{(j)} + \omega_0\, a^\dagger a \otimes I_Q + g\Big(a \otimes \sigma^+_{(j)} + a^\dagger \otimes \sigma^-_{(j)}\Big). \qquad (3.30)
\end{aligned}
$$

A Hamiltoniana é trivialmente generalizada pra $\mathcal{N}$ qubits e para todos os modos do campo, sendo escrita como

$$
I_B \otimes \Omega \sum_{j=1}^{N} \sigma^z_{(j)} + \sum_k \omega_k\, a_k^\dagger\, a_k \otimes I_Q + \frac{g}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} \sum_k \Big(a_k \otimes \sigma^+_{(j)} + a_k^\dagger \otimes \sigma^-_{(j)}\Big). \qquad (3.31)
$$

Uma outra possível Hamiltoniana de interação é o modelo proposto por Di Vicenzo [36] para o estudo da influência de descoerência em computadores quânticos, onde um qubit interage com um campo bosônico através de

$$
I_B \otimes H_Q + H_B \otimes I_Q + H_I =
$$

$$I_B \otimes \Omega\, \sigma^z + \sum_k \omega_k\, a_k^\dagger\, a_k \otimes I_Q + g \sum_k \left(a_k^\dagger + a_k\right) \otimes \sigma^z, \tag{3.32}$$

Neste trabalho usaremos o modelo onde a Hamiltoniana de interação é linear tanto no campo como no qubit:

$$H_I = \lambda \left(m_{21}\, \sigma^+ + m_{12}\, \sigma^- + \sigma^z (m_{22} - m_{11})\right) \otimes \varphi(x), \tag{3.33}$$

onde $m_{ij} = \langle\, i \,|\, m(0) \,|\, j \,\rangle$, e λ é uma constante de acoplamento pequena, de tal forma que poderemos realizar uma expansão perturbativa. O campo $\varphi(x)$ pode ser expandido como

$$\varphi(x) = \sum_{\mathbf{k}} \left(a_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) + a_{\mathbf{k}}^\dagger u_{\mathbf{k}}^*(t, \mathbf{x})\right). \tag{3.34}$$

Os modos $u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x})$ formam uma base no espaço de soluções da equação de Klein-Gordon. Escolhendo condições de contorno periódicas para estes, eles podem ser escritos da seguinte forma

$$u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) = (2L^3\omega)^{-1/2} e^{i\mathbf{k}.\mathbf{x} - i\omega t} \tag{3.35}$$

onde

$$k_i = 2\pi j_i / L \quad j_i = 0, \pm 1, \pm 2 ... \;\; i = 1, 2, 3. \tag{3.36}$$

É possível mostrar que a Hamiltoniana dada por Eq.(3.33) é equivalente a Hamiltoniana de interação $H_I = m(\tau)\varphi(x(\tau))$. Este modelo é conhecido como o detector de Unruh-Dewitt [32] [33] [34]. Neste o detector é um objeto pontual (infinitamente localizado) com graus de liberdade internos definindo dois níveis de energia.

Capítulo 4

Sucessivas observações sobre o sistema de dois níveis

4.1 A probabilidade de decaimento para tempo finito

Para o repetir o cálculo do paradoxo de Zenão quântico para o sistema de dois níveis, necessitamos da probabilidade de decaimento para tempos pequenos, já que desejamos levar $\Delta\tau$ a zero. Este resultado já exsite na literatura [25] [26]. Alguns pontos importantes deste cálculo serão colocados aqui.

A seguinte notação será adotada. Os dois níveis do sistema observado são o nivel excitado, com o autoestado $|\,e\rangle$ e energia ω_e, e o nível fundamental com o autoestado $|\,g\rangle$ e energia ω_g. As energias são definidas de certa forma tal que $\omega = \omega_e - \omega_g > 0$. A interação entre o qubit e o campo é dada pela Hamiltoniana de interação de monopolo

$$H_I = \lambda\, m(\tau)\, \varphi(x(\tau)), \tag{4.1}$$

onde $m(\tau)$ é o operador de monopolo do sistema de dois níveis e $\varphi(x(\tau))$ é o operador do campo escalar. A Hamiltoniana total é composta pela Hamiltoniana livre do qubit na Eq.(3.24) e do campo na Eq.(3.9), além da Hamiltoniana de interação acima, onde λ é uma constante de acoplamento pequena.

O problema que stamos interessados pode ser resumido da seguinte forma. Suponha que o sistema de dois níveis seja preparado no estado excitado e o campo em algum estado inicial qualquer, de modo geral, o sistema é preparado em um autoestado da Hamiltoniana total. Permitindo que o sistema evolua para algum outro estado sob influência da Hamiltoniana, qual é a probabilidade de que o sistema de dois níveis seja encontrado no estado fundamental? É importante perceber aqui que não existe nenhum interesse na evolução do campo. Para um sistema qualquer isolado, esta probabilidade seria nula, já que a evolução dada pela Hamiltoniana é unitária. A diferença da situação aqui estudada é que o sistema total não é definido apenas pelo estado do sitema de dois níveis, mas pelo estado do campo também, logo uma evolução de um estado excitado para o fundamental não deixa de ser uma evolução unitária do sistema total (mesmo que não seja para o sistema do qubit).

Já que um sistema de dois níveis não evolui de um estado para outro livremente, o que nos interessa estudar é a evolução do sistema na figura de interação, onde o estado do sistema evolue de acordo com a equação

$$i\frac{\partial}{\partial\tau}|\tau\rangle = H_{int}|\tau\rangle, \tag{4.2}$$

sendo H_{int} a Hamiltoniana de interação. Utilizando o operador

$$U(\tau,\tau_0)|\tau_0\rangle = |\tau\rangle, \tag{4.3}$$

temos a seguinte equação

$$U(\tau,\tau_0) = 1 - i\int_{\tau_0}^{\tau} H_{int}(\tau')U(\tau',\tau_0)d\tau'. \tag{4.4}$$

Realizando uma expansão perturbativa em λ, temos

$$U(\tau,\tau_0) = 1 - i\int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' H_{int}(\tau') + (-i)^2\int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' H_{int}(\tau')\int_{\tau_0}^{\tau'} d\tau'' H_{int}(\tau'') + ... \tag{4.5}$$

Utilizando a ortogonalidade entre os estados do sistema de dois níveis e do campo, temos que a amplitude de probabilidade em uma teoria de perturbação de primeira ordem em λ que um sistema preparado no estado $|\, e\,\rangle \otimes |\,\Phi_i\,\rangle$, depois de um tempo τ, tenha evoluido para o estado $|\, g\,\rangle \otimes |\,\Phi_f\,\rangle$ é dada pela expressão

$$\langle\, g| \otimes \langle\,\Phi_f|\, U(\tau,0)\,|\, e\,\rangle \otimes |\,\Phi_i\,\rangle = -i\lambda\int_0^{\tau}\langle\, g\,\Phi_f\,|m(\tau')\varphi(x(\tau'))|\, e\,\Phi_i\,\rangle d\tau' \tag{4.6}$$

onde $|\,\Phi_i\rangle$ e $|\,\Phi_f\rangle$ são os estados inicial e final do campo, respectivamente, e $U(\tau,0)$ é o operador de evolução na figura de interação (para um tempo inicial igual a zero).

Usando que

$$H_{int}(\tau) = e^{iH_0\tau}(H_{int})_S\, e^{-iH_0\tau}, \tag{4.7}$$

onde $(H_{int})_S$ é a Hamiltoniana de interação na figura de Schrödinger, temos que a amplitude fica escrita como

$$\langle\, g| \otimes \langle\,\Phi_f|\, U(\tau,0)\,|\, e\,\rangle \otimes |\,\Phi_i\,\rangle = -i\lambda\int_0^{\tau} e^{-iE\tau'}\langle\, g|m(0)|\, e\,\rangle\langle\,\Phi_f\,|\varphi(x(\tau'))|\,\Phi_i\,\rangle d\tau' \tag{4.8}$$

e $E = -\omega$. A probabilidade de encontrar o sistema no estado final $|\, g\,\rangle \otimes |\,\Phi_f\,\rangle$ é

$$|\langle\, g|\otimes\langle\,\Phi_f|\,U(\tau,0)\,|\,e\,\rangle\otimes|\,\Phi_i\,\rangle|^2 =$$

$$\lambda^2|\langle\, e\,|\,m(0)\,|\,g\,\rangle|^{\,2}\,\int_0^\tau d\tau'\int_0^\tau d\tau'' e^{-iE(\tau'-\tau'')}\langle\,\Phi_i\,|\,\varphi(x(\tau'))\,|\,\Phi_f\rangle\,\langle\Phi_f|\,\varphi(x(\tau''))|\,\Phi_i\,\rangle. \quad (4.9)$$

Esta probabilidade não é exatamente a desejada, ela faz menção ao estado final do campo, mas este não será observado. Como estamos interessados apenas na evolução do qubit, a probabilidade final deve levar em conta todas as possíveis evoluções do campo. Para isso podemos usar a relação de completeza para o espaço de Hilbert do campo escalar $\sum_f|\,\Phi_f\rangle\langle\Phi_f\,| = \mathbf{1}$, resultando na seguinte probabilidade para o sistema reduzido do qubit:

$$P(E,\tau,0) = \lambda^2|\langle\, e\,|\,m(0)\,|\,g\,\rangle|^{\,2}\,F(E,\tau,0), \quad (4.10)$$

onde a função resposta $F(E,\tau,0)$ é dada por

$$F(E,\tau,0) = \int_0^\tau d\tau'\int_0^\tau d\tau''\,e^{-iE(\tau'-\tau'')}\langle\,\Phi_i\,|\,\varphi(x(\tau'))\,\varphi(x(\tau''))|\,\Phi_i\,\rangle, \quad (4.11)$$

onde $E=-\omega$. Observe que essa é a função resposta para o decaimento de um sistema de dois níveis sob influência dos modos do campo. Outra possível abordagem é calcular o operador densidade reduzido do sistema de dois níveis.

No caso do paradoxo de Zenão quântico, o interesse é entender o decaimento de um sistema considerado como isolado por estar no vácuo. Obviamente este sistema não está realmente isolado, sua evolução é modificada por seu estado não ser um auto-estado da Hamiltoniana total. Assim, para o estudo em questão, iremos supor que é possível preparar o estado do campo inicialmente no vácuo, ou seja,

$$|\,\tau_i\,\rangle = |\,e\,\rangle\,\otimes\,|\,0,M\,\rangle. \quad (4.12)$$

Neste caso a função de dois pontos $\langle\, \Phi_i \,|\, \varphi(x(\tau'))\, \varphi(x(\tau''))|\, \Phi_i \,\rangle$ se torna a função de Whigtman positiva associada ao campo escalar calculada na linha de universo do sistema de dois níveis. A função de dois pontos depende apenas da diferença $(\tau' - \tau'')$, logo todo integrando depende apenas desta diferença e a integral dupla pode ser simplificada para uma integral simples através de uma devida transformação. A função resposta para o estado inicial do vácuo é

$$F^{(1)}(E, \tau_f, \tau_i) = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau' \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau''\, e^{-iE(\tau'-\tau'')} \langle\, 0, M \,|\, \varphi(x(\tau'))\, \varphi(x(\tau''))|\, 0, M \,\rangle. \tag{4.13}$$

O índice “1” foi adicionado para diferenciar este caso do que será discutido mais adiante.

Como já foi discutido, na quantização canônica, o campo pode ser expandido em uma base de ondas planas, e separado em coeficientes de criação e aniquilação, obedecendo

$$\begin{aligned} \varphi^{(+)}(x(\tau''))|0, M\rangle &= 0 \\ \langle 0, M|\varphi^{(-)}(x(\tau'')) &= 0, \end{aligned} \tag{4.14}$$

onde $\varphi^{(-)}(x(\tau''))$ e $\varphi^{(+)}(x(\tau''))$ são, respectivamente, os termos de frequência negativa e positiva da expansão do campo em uma base ortogonal de ondas planas. O termo de frequência positiva contém apenas operadores de aniquilação e o termo de frequência negativa contém apenas operadores de criação. Então, na amplitude de probabilidade temos termos do tipo

$$\langle\, \Phi_f |\, \varphi^{(+)}(x(\tau''))\,|\, \Phi_i \,\rangle + \langle\, \Phi_f |\, \varphi^{(-)}(x(\tau''))\,|\, \Phi_i \,\rangle, \tag{4.15}$$

ou seja, tanto excitações do campo como destruição de quântas do campo contribuem para qualquer processo. No caso de um fotodetector, para um sistema de dois níveis colocado no estado fundamental, é esperado que contribuam apenas processos onde o qubit absorve um quanta e o campo perde um. Nesse caso, na amplitude de probabilidade acima, o termo com $\varphi^{(-)}(x(\tau''))$ é desprezado, levando a uma probabilidade de detecção onde o único termo que contribui é

$$\langle \Phi_i \,|\, \varphi^{(-)}(x(\tau'))\, \varphi^{(+)}(x(\tau''))|\, \Phi_i \,\rangle. \tag{4.16}$$

Ou seja, é feita uma aproximação de ondas girantes. Nesta aproximação termos de flutuação (termos que não conservam energia em intervalos de tempo muito pequenos) são desconsiderados. Neste caso a função resposta com que estamos trabalhando seria nula, já que em vez da Whigtman positiva $G^{+}(x(\tau'), x(\tau''))$ na expressão Eq.(4.13), teríamos apenas $\langle\, 0, M \,|\, \varphi^{(-)}(x(\tau'))\, \varphi^{(+)}(x(\tau''))|\, 0, M \,\rangle$. Os termos de frequência positiva contém apenas operadores de aniquilação, então, no caso da aproximação de ondas girantes, a função de dois pontos seria nula para o vácuo, ou seja, o decaimento expontâneo do sistema de dois níveis pode ser atribuido a flutuações do campo. Para o caso considerado, todos os termos contribuem, ou seja,

$$\begin{aligned} \langle\, \Phi_i \,|\, (\tau'))\, \varphi(x(\tau''))|\, \Phi_i \,\rangle &= \langle\, \Phi_i \,|\, \varphi^{(+)}(x(\tau'))\, \varphi^{(+)}(x(\tau''))|\, \Phi_i \,\rangle + \\ +\langle\, \Phi_i \,|\, \varphi^{(-)}(x(\tau'))\, \varphi^{(+)}(x(\tau''))|\, \Phi_i \,\rangle &+ \langle\, \Phi_i \,|\, \varphi^{(-)}(x(\tau'))\, \varphi^{(-)}(x(\tau''))|\, \Phi_i \,\rangle + \\ &+\langle\, \Phi_i \,|\, \varphi^{(+)}(x(\tau'))\, \varphi^{(-)}(x(\tau''))|\, \Phi_i \,\rangle. \end{aligned} \tag{4.17}$$

No caso em que o estado inicial do campo é o vácuo, o único termo que contém uma contribuição não nula é

$$\langle\, \Phi_i \,|\, \varphi^{(+)}(x(\tau'))\, \varphi^{(-)}(x(\tau''))|\, \Phi_i \,\rangle. \tag{4.18}$$

A função de Whigtman positiva na integral acima é dada por

$$\langle\, 0, M \,|\, \varphi(x(\tau'))\, \varphi(x(\tau''))|\, 0, M \,\rangle = G^{+}(x(\tau'), x(\tau'')) = -\frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{\Delta\tau}. \tag{4.19}$$

Observe que a integral dupla é feita sobre a região definida pelo quadrado $[t_i, t_f]X[t_i, t_f]$. Com a transformação para as novas variáveis $\xi = \tau' - \tau''$ e $\eta = \tau' + \tau''$, a região de integração é modificada. Como a transformação corresponde a uma rotação, a nova região de integração corresponde simplesmente a um losango, e a variável η deve ser integrada de seu valor inicial $2t_i - |\xi|$ até $2t_f + |\xi|$, enquanto ξ será integrado de $-\Delta\tau$ a $\Delta\tau$. Com esta transformação, a função resposta é escrita da seguinte forma

$$F^{(1)}(E, \Delta\tau) = -\frac{1}{8\pi^2}\int_{-\Delta\tau}^{\Delta\tau} d\xi \int_{2t_i-|\xi|}^{2t_f+|\xi|} d\eta \frac{e^{-iE\xi}}{(\xi - i\varepsilon)^2}. \tag{4.20}$$

A integral em η é trivial, sobrando

$$F^{(1)}(E, \Delta\tau) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\Delta\tau}^{\Delta\tau} d\xi(\Delta\tau - |\,\xi|\,)\frac{e^{-iE\xi}}{(\xi - i\varepsilon)^2}, \tag{4.21}$$

onde $i\varepsilon$ define corretamente as singularidades da função de Whigtman, respeitando causalidade. No limite $\varepsilon \to 0$ esta expressão é dievergente, sendo necessário renormalização, como é discutido na referência [25]. Para calcular a integral, dividimos a função resposta em duas contribuições,

$$F_1^{(1)}(E, \Delta\tau) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\Delta\tau}^{\Delta\tau} d\xi \Delta\tau \frac{e^{-iE\xi}}{(\xi - i\varepsilon)^2}, \tag{4.22}$$

e

$$F_2^{(1)}(E,\Delta\tau) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\Delta\tau}^{\Delta\tau} d\xi |\,\xi| \frac{e^{-iE\xi}}{(\xi - i\varepsilon)^2}. \tag{4.23}$$

Para calcular a primeira parte $F_1^{(1)}(E,\Delta\tau)$, estendemos os limites de integração a $-\infty$ e ∞, e subtraimos os mesmos termos, de forma que a integral permaneça a mesma:

$$\begin{aligned} F_1^{(1)}(E,\Delta\tau) = \quad & -\tfrac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \Delta\tau \tfrac{e^{-iE\xi}}{(\xi-i\varepsilon)^2} \\ & +\tfrac{1}{4\pi^2}\int_{\Delta\tau}^{\infty} d\xi \Delta\tau \tfrac{e^{-iE\xi}}{(\xi-i\varepsilon)^2} \\ & +\tfrac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{-\Delta\tau} d\xi \Delta\tau \tfrac{e^{-iE\xi}}{(\xi-i\varepsilon)^2}. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Mudando os limites de integração do último termo, temos

$$\begin{aligned} F_1^{(1)}(E,\Delta\tau) = \quad & -\tfrac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \Delta\tau \tfrac{e^{-iE\xi}}{(\xi-i\varepsilon)^2} \\ & +\tfrac{1}{4\pi^2}\int_{\Delta\tau}^{\infty} d\xi \Delta\tau \tfrac{e^{-iE\xi}}{(\xi-i\varepsilon)^2} \\ & +\tfrac{1}{4\pi^2}\int_{\Delta\tau}^{\infty} d\xi \Delta\tau \tfrac{e^{iE\xi}}{(\xi-i\varepsilon)^2}, \end{aligned} \tag{4.25}$$

ou seja, a função $F_1^{(1)}(E,\Delta\tau)$ fica escrita como

$$F_1^{(1)}(E,\Delta\tau) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\Delta\tau \frac{e^{-iE\xi}}{(\xi - i\varepsilon)^2} + \frac{2}{4\pi^2}\int_{\Delta\tau}^{\infty} d\xi\Delta\tau \frac{\cos(E\xi)}{(\xi - i\varepsilon)^2}. \tag{4.26}$$

A primeira integral pode ser feita usando integração por resíduos. Como o polo da função integrada é em $i\varepsilon$ e $E < 0$, o contorno de integração deve ser fechado pelo semi-plano superior, resultando em

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\Delta\tau \frac{e^{-iE\xi}}{(\xi - i\varepsilon)^2} = 2\pi i Res\left[\frac{e^{-iE\xi}}{(\xi - i\varepsilon)^2},\, i\varepsilon\right] = 2\pi i \left[\frac{d}{d\xi}e^{-iE\xi}\right]_{\xi = i\varepsilon}, \tag{4.27}$$

ou seja,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \Delta\tau \frac{e^{-iE\xi}}{(\xi - i\varepsilon)^2} = 2\pi \, E \, \Delta\tau \tag{4.28}$$

A segunda integral, atraves de uma integração por partes, pode ser escrita como

$$\int_{\Delta\tau}^{\infty} d\xi \Delta\tau \frac{\cos(E\xi)}{(\xi - i\varepsilon)^2} = -\Delta\tau \left[\frac{\cos(E\xi)}{\xi} \right]_{\Delta\tau}^{\infty} - E\Delta\tau \int_{\Delta\tau}^{\infty} d\xi \frac{\sin(E\xi)}{\xi}. \tag{4.29}$$

Usando que

$$-\int_{x}^{\infty} dy \frac{\sin(y)}{y} = si(x) = Si(x) - \frac{\pi}{2}, \tag{4.30}$$

onde

$$Si(z) = \int_{0}^{z} \frac{\sin(t)}{t} dt, \tag{4.31}$$

temos (lembrando que $E < 0$)

$$\int_{\Delta\tau}^{\infty} d\xi \Delta\tau \frac{\cos(E\xi)}{(\xi - i\varepsilon)^2} = \Delta\tau \frac{\cos(E\Delta\tau)}{\Delta\tau} - E\Delta\tau \left(Si(|E|\Delta\tau) - \frac{\pi}{2} \right). \tag{4.32}$$

Desta forma, a função $F_1^{(1)}(E, \Delta\tau)$ é dada por

$$F_1^{(1)}(E, \Delta\tau) = -\frac{2\pi \, E \, \Delta\tau}{4\pi^2} + \frac{2}{4\pi^2} \left[\cos(E\Delta\tau) - E\Delta\tau \left(Si(|E|\Delta\tau) - \frac{\pi}{2} \right) \right], \tag{4.33}$$

ou seja

$$F_1^{(1)}(E, \Delta\tau) = \frac{1}{2\pi^2} \left[|E|\Delta\tau \left(\pi + Si(|E|\Delta\tau) - \frac{\pi}{2} \right) + \cos(E\Delta\tau) \right] \tag{4.34}$$

Resta agora calcular $F_2^{(1)}(E, \Delta\tau)$. Para isso usamos que apenas a parte par de $\exp(-iE\xi)$ irá contribuir, restando a integral

$$F_2^{(1)}(E, \Delta\tau) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\Delta\tau}^{\Delta\tau} d\xi \, \frac{|\xi|}{(\xi - i)^2} \cos(E\xi). \tag{4.35}$$

Usando a paridade do integrando temos que

$$F_2^{(1)}(E, \Delta\tau) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{0}^{\Delta\tau} d\xi \, \frac{|\xi|}{(\xi - i\epsilon)^2} \cos(E\xi). \tag{4.36}$$

O integrando é divergente na origem, o que não poderá ser contornado pela regularização usual $\xi \to (\xi - i\epsilon)$, sendo necessária uma renormalização. Percebendo que em

$$Ci(z) = \gamma + \ln z + \int_0^z \frac{\cos t - 1}{t} dt, \tag{4.37}$$

onde γ é a constante de Euler, a integral não é divergente, podemos somar e subtrair termos a $F_2^{(1)}(E, \Delta\tau)$ de forma que, após algumas integrações por partes, temos

$$F_2^{(1)}(E, \Delta\tau) = \frac{1}{2\pi^2} \left[-\gamma + Ci(|E|\Delta\tau) - 1 - \ln(|E|\epsilon)\right] \tag{4.38}$$

Esta expressão é divergente nao apenas no limite $\epsilon \to 0$, mas também quando $\Delta\tau \to 0$, sendo necessária uma renormalização para lidar com os dois casos. Desta forma, definimos

$$F_{ren}^{(1)}(E, \Delta\tau) = F^{(1)}(E, \Delta\tau) - \frac{1}{2\pi^2} \ln(\Delta\tau/\epsilon), \tag{4.39}$$

que é suficiente para renormalizar a função resposta.

Com estes cálculos temos que a probabilidade renormalizada é

$$P_{ren}^{(1)}(E, \Delta\tau) = \lambda^2 |\langle\, e \,|\, m(\tau_i) \,|\, g \,\rangle|^2 \, F_{ren}^{(1)}(E, \Delta\tau), \tag{4.40}$$

onde a função $F^{(1)}_{ren}(E,\Delta\tau)$ é dada por

$$F^{(1)}_{ren}(E,\Delta\tau) = \frac{1}{2\pi^2}\left(|E|\Delta\tau\left(\frac{\pi}{2}+Si\,|E|\,\Delta\tau\right)+\cos\,E\Delta\tau-1+\int_0^{|E|\,\Delta\tau}\frac{1}{\xi}\left(\cos\xi-1\right)d\xi\right). \tag{4.41}$$

Usando este resultado podemos calcular a probabilidade de encontrar o sistema ainda no estado excitado depois de um período τ de evolução:

$$P^{(1)}_{still}(E,\Delta\tau) = (1-P^{(1)}_{ren}(E,\Delta\tau)). \tag{4.42}$$

Para o cálculo desejado necessitamos da probabilidade para pequenos tempo, já que queremos o limite de observação contínua. Permitindo por enquanto termos de até segunda ordem no tempo, usando que

$$Si(z) = z + \Theta(z^2), \tag{4.43}$$

onde $\Theta(z^2)$ são termos quadráticos e de ordem superior em z, temos que

$$F^{(1)}_{ren}(E,\Delta\tau) = \left(\frac{|E|T}{4\pi N}+\frac{E^2T^2}{8\pi^2N^2}\right), \tag{4.44}$$

e a probabilidade de encontrar o sistema de dois níveis ainda no estado excitado depois de um tempo $\Delta\tau = T/N$ é

$$P^{(1)}_{still}\left(E,\frac{T}{N}\right) = \left(1-\frac{|E|T}{4\pi N}-\frac{E^2T^2}{8\pi^2N^2}\right). \tag{4.45}$$

O cálculo para a probabilidade de decaimento também poderia ser feita através das equações de movimento de Heisenberg para os operadores σ_z, σ^+ e σ^-, lembrando que para uma equivalência dos dois resultados deve ser calculada uma dinâmica reduzida para o sistema de dois níveis.

Após uma medida realizada sobre o sistema de dois níveis (não entraremos na discussão de como a informação é transferida do qubit para o aparelho de medida) o sistema colapsa para o estado medido, ou seja, ele irá colapsar para o estado excitado com a probabilidade dada pela expressão acima. Existe um problema em utilizar este resultado para a segunda medida, como é feito usualmente no cálculo do paradoxo de Zenão quântico. Este colapso acontece no subespaço de Hilbert do qubit, e não no espaço inteiro. Isto acontece porque estamos supondo que não é possível e nem existe interesse em observar o campo, percebido na medida apenas por alterar a probabilidade de decaimento do sistema de dois níveis. Somos tentados a utilizar a conservação da energia: se o qubit não decaiu então o campo não pode passar sozinho do vácuo para um estado excitado. Neste momento entramos num ponto onde a interpretação do principio de incerteza de energia-tempo é essencial. Para tempo suficientemente grandes poderíamos afirmar que o campo continua no vácuo, mas, pelo contrário, uma segunda medida irá ser realizada em um período de tempo infinitesimal, no limite de observações contínuas. Por esta razão o próximo cálculo levaremos em consideração esta possível evolução do campo para um estado arbitrário, que entrará como um novo estado inicial $|\Phi\rangle_i$ no lugar do vácuo. Obviamente este estado deve ser virtual, consequência das flutuações causadas por termos que não conservam energia na Hamiltoniana.

4.2 N observações e o limite do contínuo

Segundo o cálculo usual do paradoxo de Zenão quântico, no limite de observações contínuas encontramos:

$$P_{still}(E,T) = \lim_{N\to\infty}[P^{(1)}_{still}(E,T/N)]^N = e^{-\Gamma T}, \tag{4.46}$$

onde $\Gamma = \frac{|E|}{4\pi}$, obtendo um decaimento exponencial para um sisema de dois níveis no vácuo observado contínuamente.

O problema de usar Eq.(4.45) para todas as N probabilidades é que elas não são necessariamente iguais. Na passagem da Eq.(4.9) para a Eq.(4.10) foi utilizada a relação de completeza do campo $\sum_f |\Phi_f\rangle\langle\Phi_f| = 1$, ou seja, todos os possíveis estados finais do campo foram utilizados. Se o resultado é consequência da contribuição de todos os estados finais do campo, como podemos afirmar que na segunda medida o campo está novamente no vácuo? Obviamente para tempos suficientemente longos, por conservação de energia, se o qubit não decaiu então o campo ainda está no vácuo, mas estamos usando este resultado para pequenos intervalos de tempo, onde flutações podem modificar isto. De modo geral, esta discussão está relacionada com a discussão sobre o princípio de incerteza da energia, e se é possível realmente realizar o limite de observações contínuas.

Para a evolução após a primeira medida, a nova probabilidade de que o sistema de dois níveis evolua de um estado $|e\rangle \otimes |\Phi_i\rangle$, onde desta vez $|\Phi_i\rangle$ é um estado arbitrário e não o vácuo, para um estado $|g\rangle \otimes |\Phi_f\rangle$ é dada por

$$P^{(2)}(E,\tau_f+\Delta\tau,\tau_i+\Delta\tau) = \lambda^2|\langle\, e \,|\, m(\tau_i+\Delta\tau)\,|\, g\,\rangle|^2\, F^{(2)}(E,\tau_f+\Delta\tau,\tau_i+\Delta\tau), \tag{4.47}$$

onde $F^{(2)}(E, \tau_f + \Delta\tau, \tau_i + \Delta\tau) = F^{(2)}(E, \Delta\tau)$ é a função resposta dada por

$$F^{(2)}(E, \Delta\tau) = \int_{-\Delta\tau}^{\Delta\tau} d\xi(\Delta\tau - |\,\xi|\,)e^{-iE\xi}\langle\, \Phi_i\,|\,\varphi(x(\tau'))\,\varphi(x(\tau''))|\,\Phi_i\,\rangle. \tag{4.48}$$

Nesta expressão o estado Φ_i é o estado final da evolução até a primeira medida. Este resultado segue extamente o procedimento feito anteriormente, somando sobre os estados finais do campo bosonico, de forma que o estado inicial para o próximo intervalo de tempo (ou seja, depois da segunda medida) também será desconhecido, como discutido acima.

No sistema do qubit e o campo escalar, apenas o primeiro está acoplado com o aparelho de medida. Como nenhuma medida é feita sobre o campo, o colapso da função de onda acontece apenas em uma seção do espaço de Hilbert total, especificamente no subespaço referente ao sistema de dois níveis. O resto do espaço (a parte referente ao campo) permanece não colapsado, ou seja, o campo pode ainda estar em um estado arbitrário, dado possivelvente por uma superposição do tipo

$$|\,\Phi_i\,\rangle = |\,0, M\,\rangle + \sum_j c_j\,(\tau)|\,\Phi_j\,\rangle, \tag{4.49}$$

onde a soma é sobre uma base ortonormal no espaço do campo, como os estados do espaço de Fock $|n_{\mathbf{k}}\rangle$. Com este estado inicial, a função de dois pontos que irá contribuir para a função resposta é

$$G^{+}(x(\tau'), x(\tau'')) + \sum_{j',j''} c^{*}_{j'}(\tau')c_{j''}(\tau'')\langle\, \Phi_{j'}\,|\,\varphi(x(\tau'))\,\varphi(x(\tau''))|\,\Phi_{j''}\,\rangle, \tag{4.50}$$

ou seja, a contribuição do vácuo ainda está presente, resultando em uma contribuição linear no tempo para a probabilidade de decaimento. Esta contribuição linear gera um decaimento exponencial no limite de um número muito grande de observações (ou no limite do contínuo), eliminando o paradoxo de Zenão quântico, apesar do resto das contribuições possivelmente contribuirem para a taxa de decaimento. Para a realização do cálculo da função resposta, são necessárias considerações a respeito das funções $c_j(\tau)$. Podemos esperar que, como o estado do campo segue não colapsado, este continue influenciando o decaimento do qubit da mesma forma que influenciaria caso não fosse feita nenhuma observação, ou seja, esperamos que a função resposta seja invariante por translações temporais, e que o termo extra não tenha contribuições de primeira ordem no tempo. Para que isto aconteça, basta que $c^*_{j'}(\tau')c_{j''} = f_j(\tau' - \tau'') \approx c_1(\tau' - \tau'') + ...$, tornando a função resposta a desejada no instande inicial, quando o estado era apenas o vácuo. A contribuição extra, ao ser escrita em termos de uma expansão na base do espaço de Fock $|n_{\mathbf{k}}\rangle$, pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\langle\, \Phi_i \,|\, \varphi(x(\tau'))\, \varphi(x(\tau''))|\, \Phi_i \,\rangle = \langle n_1(\mathbf{k}_1)...n_j(\mathbf{k}_j)|\, \varphi(x(\tau'))\, \varphi(x(\tau''))|\, n_1(\mathbf{k}_1)...n_j(\mathbf{k}_j)\rangle. =$$
$$G^+(x(\tau'), x(\tau'')) + \textstyle\sum_i n_i u_{\mathbf{k}_i}(x(\tau'))u^*_{\mathbf{k}_i}(x(\tau'')) + \sum_i n_i u^*_{\mathbf{k}_i}(x(\tau'))u_{\mathbf{k}_i}(x(\tau'')), \quad (4.51)$$

onde $G^+(x(\tau'), x(\tau''))$ é a Whigtman positiva calculada na linha de universo do sistema de dois níveis, os n_i são a densidade de quanta, e os $(u^*_{\mathbf{k}_i}(x(\tau')), u_{\mathbf{k}_i}(x(\tau'')))$ formam uma base no espaço de soluções de Klein-Gordon, podendo ser escolhidas como a base de ondas planas. Se $\langle\, \Phi_i \,|\, \varphi(x(\tau'))\, \varphi(x(\tau''))|\, \Phi_i \,\rangle = \langle\, n_{\mathbf{k}} \,|\, \varphi(x(\tau'))\, \varphi(x(\tau''))|\, n_{\mathbf{k}} \,\rangle$, então

$$\langle\, \Phi_i \,|\, \varphi(x(\tau'))\, \varphi(x(\tau''))|\, \Phi_i \,\rangle =$$
$$G^+(x(\tau'), x(\tau'')) + n_{\mathbf{k}} \left(u_{\mathbf{k}_i}(x(\tau'))u^*_{\mathbf{k}_i}(x(\tau'')) + u^*_{\mathbf{k}_i}(x(\tau'))u_{\mathbf{k}_i}(x(\tau'')) \right). \quad (4.52)$$

No caso de uma expansão de ondas planas, temos

$$\langle\, \Phi_i \,|\, \varphi(x(\tau'))\, \varphi(x(\tau''))|\, \Phi_i \,\rangle = G^{+}(x(\tau'), x(\tau'')) + n_{\mathbf{k}} \cos(k\Delta x). \tag{4.53}$$

A contribuição para a função resposta na linha de universo do sistema de dois níveis das ondas planas será proporcional a integral

$$\int_{-\Delta\tau}^{\Delta\tau} (\Delta\tau - |\xi|) f_{n_{\mathbf{k}}}(\xi) \cos(k_0 \xi). \tag{4.54}$$

Como a função $f_j(\xi)$ é pelo menos linear em ξ, esta integral obviamente terá termos, no mínimo, em $(\Delta\tau)^2$. Resta então a integral referente a $G^{+}(x(\tau'), x(\tau''))$:

$$\int_{-\Delta\tau}^{\Delta\tau} (\Delta\tau - |\xi|) \frac{e^{-iE\xi}}{\xi^2} f_{n_{\mathbf{k}}}(\xi). \tag{4.55}$$

Usando novamente que $f_{n_{\mathbf{k}}}(\tau - \tau')$ é pelo menos linear em $(\tau - \tau')$, basta calcular os termos de mais baixa ordem da seguinte integral

$$\int_{-\Delta\tau}^{\Delta\tau} (\Delta\tau - |\xi|) \frac{e^{-iE\xi}}{\xi}, \tag{4.56}$$

já que é fácil ver que termos de ordem superior em ξ serão no mínimo quadráticos em $(\Delta\tau)$. Usando o fato de que as partes ímpares da integral acima não irão contribuir, temos

$$(\Delta\tau) \int_{0}^{\Delta\tau} \frac{\sin E\xi}{\xi} - \int_{0}^{\Delta\tau} \sin E\xi. \tag{4.57}$$

A segunta integral é trivial, e sua contribuição de mais baixa ordem é

$$\cos(E\Delta\tau) - \cos(0) = 1 - \frac{(E\Delta\tau)^2}{2!} + ... - 1, \tag{4.58}$$

ou seja, contém apenas contribuições quadráticas (ou superiores). A primeira parte da integral também é fácil ver que não contém termos lineares realizando uma expansão da função seno:

$$(\Delta\tau)\int_0^{\Delta\tau} \frac{\sin E\xi}{\xi} = (\Delta\tau)\int_0^{\Delta\tau}\left(1 - \frac{\xi^2}{3!} + ...\right). \tag{4.59}$$

O termo de mais baixa ordem será $(\Delta\tau)\int_0^{\Delta\tau} 1 = (\Delta\tau)^2$. Desta forma todas as contribuições extras serão superiores a primeira ordem no tempo, tornando, em primeira ordem, a função resposta igual ao primeiro caso. Caso seja considerado que o limite de observações contínuas seja não-físico, podemos usar esta mesma análise para um número muito grande de observações em um período T (grandes o suficiente para ignorarmos contribuições de segunda ordem no tempo), resultando na probabilidade polinomial

$$P_{still}^{(N)}(E,T) = [P_{still}^{(1)}(E,T/N)]^N = \left[1 - \Gamma\frac{T}{N}\right]^N, \tag{4.60}$$

onde $\Gamma = \sigma|E|/4\pi$. Para um valor suficientemente grande, este polinômio é similar a uma exponencial, e levando ao caso de observações contínuas:

$$P_{still}(E,T) = \lim_{N\to\infty}[P_{still}^{(1)}(E,T/N)]^N = e^{-\Gamma T}, \tag{4.61}$$

Capítulo 5

Conclusões

Neste trabalho o estudo do paradoxo de Zenão quântico é analisado do ponto de vista de um sistema aberto, onde a evolução do campo, preparado no vácuo, é ignorada. O cálculo para a probabilidade de sobrevivência no estado excitado é calculado em dois casos, o primeiro sendo um número finito de observações feitas em um intervalo de tempo finito, e o segundo o limite de observações contínuas. No caso drástico do limite do contínuo o paradoxo desaparece, e encontramos um decaimento exponencial, como poderia ser esperado classicamente. Para o caso de um grande número de observações, o decaimento é polinomial, muito similar a uma exponencial (para ignorarmos termos de segunda ordem no tempo o número de observações deve ser grande).

Nesta abordagem do paradoxo de Zenão quântico utilizamos uma função resposta calculada em um tempo finito, diferentemente da soluções existente na literatura, que utiliza a aproximação de Weisskopf-Wigner, que consideramos não ser apropriada para o problema. Outra questão que deve ser cuidadosamente analisada é o fato do vácuo (campo) não ser observado. Isto tem como consequência um desconhecimento do estado do campo, que pode gerar novos termos em segunda ordem no tempo. Para eliminar este problema seria necessário conhecer a evolução do campo, e escrever o estado completo ao final da primeira medida. Logicamente isto significaria resolver o problema completo analiticamente, oque não é a proposta do tratamento.

O problema de observações contínuas é, muitas vezes, tratado como indo contra o princípio de incerteza de energia-tempo. A abordagem aqui utilizada leva em consideração que este limite é possível, mas que para intervalos de tempo suficientemente pequenos devemos levar em consideração flutuações, termos na hamiltoniana que não conservam energia, ou seja, trabalhamos fora da aproximação de ondas girantes, que vemos apenas como uma possibilidade simplificada de tratar "mecânicamente" processos onde apenas absorção e emissão são importantes, e flutuações podem ser desprezadas.

A abordagem deste trabalho pode ser considerada simplista, já que consideramos um colapso instantâneo da função de onda. Uma abordagem completa utilizaria teoria de medida, levando em conta questões como "back action", ou seja, a ação do detector sobre o sistema, capaz de modificar suas flutuações ou até sua evolução dinâmica.

Outra questão é que, frequêntemente, sistemas também tem um contínuo de estados, como por exemplo átomos. Apesar de um sistema de dois níveis ser muito utilizado como um simples detector, normalmente fotodeteção gera uma corrente, ou seja, uma excitação ao contínuo. Por isso, uma continuação natural seria levar em conta um sistema com dois níveis e também um contínuo de estados. Outra possível continuação é a utilização do formalismo utilizado para a análise de sistemas emaranhados, e estudar sua evolução sob efeito das flutuações do vácuo.

Apêndice A

A construção de Misra e Sudarshan

Neste apêndice será apresentada a construção do paradoxo quântico de Zenão como inicialmente feito por Misra e Sudarshan, usando o colapso da função de onda de von Neuman.

O estudo de interesse é analisar a evolução de um sistema colocado em um estado $|a\rangle$ que não é auto-estado da hamiltoniana. Esta hamiltoniana tem seu espectro limitado inferiormente. A partir do estado inicial do sistema, podemos escrever a matriz densidade inicial

$$\rho_0 = |a\rangle\langle a|, \tag{A.1}$$

sujeito a evolução do operador

$$U(t) = \exp(-iHt). \tag{A.2}$$

(lembrando que ainda está sendo usada a notação $\hbar = 1$).

Temos então o operador de projeção $\mathcal{O}$, representando um colapso instantâneo no subespaço do estado instável $|a\rangle$, que obedece a

$$\rho_0 = \mathcal{O}\rho_0\mathcal{O}$$

$$Tr[\rho_0 \mathcal{O}] = 1, \tag{A.3}$$

Desta forma, a probabilidade de encontrar o sistema neste subespaço depois de uma evolução τ é

$$P(\tau) = Tr[U(\tau)\rho_0 U^\dagger(\tau)\mathcal{O}]. \tag{A.4}$$

Repitindo este processo N vezes em intervalos igualmente espaçados, a probabilidade de encontrar o sistema ainda no estado inicial em um tempo $T = N\tau$ é

$$P^{(N)} = Tr[V_N(T)\rho_0 V_N^\dagger(T)], \tag{A.5}$$

onde foi usado que um colapso no estado inicial é representado por $U(\tau)\rho_0 U^\dagger(\tau) \rightarrow \mathcal{O}U(\tau)\rho_0 U^\dagger(\tau)\mathcal{O}$, e onde

$$V_N(T) \equiv [\mathcal{O}U(T/N)\mathcal{O}]^N, \tag{A.6}$$

e o estado colapsado é dado por

$$\rho^{(N)}(T) = V_N(T)\rho_0 V_N^\dagger(T). \tag{A.7}$$

Se o interesse é apenas no limite de observações contínuas, desejamos então

$$\begin{aligned} \rho(T) &\equiv \lim_{N\to\infty} \rho^{(N)}(T) = \mathcal{V}(T)\rho_0\mathcal{V}(T) \\ \mathcal{P}(T) &\equiv \lim_{N\to\infty} P^{(N)}(T) = Tr\left[\mathcal{V}(T)\rho_0\mathcal{V}^\dagger(T)\right], \end{aligned} \tag{A.8}$$

onde

$$\mathcal{V}(T) \equiv \lim_{N\to\infty} V_N(T). \tag{A.9}$$

Usando que $\mathcal{V}(T)\mathcal{V}^{\dagger(T)} = \mathcal{O}$ (que equivale a evolução quadrática no tempo), temos finalmente

$$\mathcal{P}(T) = \lim_{N\to\infty} P^{(N)}(T) = Tr\left[\rho_0\mathcal{O}\right] = 1, \tag{A.10}$$

ou seja, a observação contínua de um sistema instável inibe a evolução do mesmo.

O desenvolvimento de Misra e Sudarshan se apóia em um teorema, cuja a prova é apresentada no mesmo artigo. O teorema é o seguinte:

$U(t) = \exp -iHt$, t real, designa um grupo de um parâmetro fortemente contínuo de operadores unitários em um espaço de Hilbert. Suponha que

1. O gerador auto-adjunto H do grupo $U(t)$ é semi-limitado (inferiormente),
2. Existe um operador anti-unitário θ tal que $\theta\mathcal{O}\theta^{-1} = \mathcal{O}$ e $\theta U(t)\theta^{-1} = U(-t)$,
3. $\lim_{N\to\infty}[\mathcal{O}U(t/N)\mathcal{O}]^N = \mathcal{V}(t)$ existe para todo $t \geq 0$ (a continuidade em $t = 0$ é suposta, já que não é consequência direta da existência de $\mathcal{V}(t)$),
4. $\lim_{t\to 0}\mathcal{V}(t) = \mathcal{O}$,

então

- A função $t \to \mathcal{V}(t)$ é fortemente contínua e satisfaz para qualquer t a lei de semi-grupos $\mathcal{V}(t)\mathcal{V}(s) = \mathcal{V}(t+s)$ e
- $\mathcal{V}^*(t) = \mathcal{V}(-t)$.

Uma consequência deste teorema é exatamente que $\mathcal{V}^*(t)\mathcal{V}(t) = \mathcal{O}$, levando ao paradoxo $\mathcal{P}(t) = Tr[\rho_0\mathcal{O}] = 1$

Apêndice B

A Aproximação de Weisskopf-Wigner

Neste apêndice será exposta e criticada a solução ao problema de Sudarshan como colocada por Block e Berman [37]. Em seu artigo, os autores apresenta a idéia de que um sistema acoplado ao vácuo apresenta um decaimento exponencial, segundo a aproximação de Weisskopf-Wigner. Os autores consideram que a hamiltoniana total de um certo sistema é dada por

$$H = H_{atom} + H_{field} - \mu \cdot \mathbf{E}_{vac} + V_{int}, \text{(B.1)}$$

onde V_{int} é a parte da hamiltoniana que representa a interação com um sistema que irá medir se houve ou não decaimento. Em um primeiro momento, a probabilidade de decaimento é calculada sem este último termo, segundo a aproximação de Weisskopf-Wigner.

Para um sistema de dois níveis, usando a aproximação de ondas girantes, temos, para o estado

$$|\psi(t)\rangle = c_a(t)|a,0\rangle + \sum_{\mathbf{k}} c_{b,\mathbf{k}}(t)|b,1_{\mathbf{k}}\rangle, \tag{B.2}$$

onde $|a\rangle$ é o estado excitado e o fundamental, as seguintes equações para um sistema de dois níveis localizado em $\mathbf{r}_0$:

$$\dot{c}_a(t) = -i \sum_{\mathbf{k}} g^*_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}_0) e^{i(w-_k)t} c_{b,\mathbf{k}}$$
$$\dot{c_{b,\mathbf{k}}}(t) = -i g_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}_0) e^{-i(w-_k)t} c_a(t), \tag{B.3}$$

onde $g_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}_0) = g_{\mathbf{k}} \exp -i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0$, sendo $g_{\mathbf{k}} = -\langle a|m|b\rangle \cdot \hat{\epsilon_{\mathbf{k}}}\mathcal{E}_{\mathbf{k}}$, com m sendo o operador de dipolo magnético do qubit e $\mathcal{E}_{textbfk} = \nu_k/2\epsilon_0 V$ a normalização do operador de campo elétrico. As quantidade ν_k e w são, respectivamente, as frequências dos modos do campo e a diferença de energia entre os dois níveis do qubit.

É fácil ver que, depois de passar para um contínuo de modos do campo, a aplitude de probabilidade de encontrar o sistema no estado excitado é

$$\dot{c}_a(t) = -\frac{4|\langle a|m|b\rangle|^2}{(2\pi)^2 6\epsilon_0} \int_0^\infty d\nu_k \nu_k^3 \int_0^t dt' e^{i(w-\nu_k)(t-t')} c_a(t'). \tag{B.4}$$

A aproximação de Weisskopf-Wigner consiste em considerar que a exponencial é altamente oscilante para $\nu_k \neq w$. Com isso, podemos substituir $\nu_k^3 \to w^3$, levar o limite inferior da integração em ν_k a $-\infty$ e usar

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\nu_k e^{i(w-\nu_k)(t-t')} = 2\pi\delta(t-t'). \tag{B.5}$$

Com isso, temos

$$\dot{c}_a(t) = -\frac{\Gamma}{2} c_a(t), \tag{B.6}$$

resultando em

$$|c_a(t)|^2 = e^{-\Gamma t}. \tag{B.7}$$

Desta forma, qualquer número de medidas em um dado intervalo finito de tempo não irá alterar a probabilidade de decaimento.

O problema em utilizar esta abordagem consiste na suposição de que a integral na Eq.(B.4) é altamente oscilante para pequenos intervalos de tempo também. No desenvolvimento do cálculo do paradoxo de Zenão quântico, necessitamos da probabilidade de decaimento para intervlos de tempo infinitesimais. Desta forma, não só temos $t' << 1$ como também t' é, em todo limite de integração, muito próximo de t, compensando o fator $(w - \nu_k)$ para valores de ν_k muito diferentes de w.

Desta forma, a abordagem dos autores, apesar de qualitativamente similar a este trabalho, utiliza um resolução relativamente heurística, simplesmente considerando que, sob efeito do vácuo, o decaimento de um sistema de dois níveis é exponencial segundo a aproximação de Weisskopf-Wigner. Os autores também ignoram o problema tratado no último capítulo deste trabalho.

Referências

[1] J. von Neumann,*"Mathematical Foundations of Quantum Mechanics"*, Princeton University Press, New York (1983).

[2] B. Misra and E. C. G. Sudarshan, Jour. Math. Phys. **18**, 756 (1977).

[3] Plato, *"The Collected Dialogues"*, E. Hamilton and H. Cairns (Editors), Princeton University Press, N.Y (1989), pp. 921-956.

[4] L. A. Khalfin, Sov. Phys. JETP **6**, 1053 (1958).

[5] A. Venugopalanand and R. Ghosh, Phys. Lett. **A204**, 11 (1995).

[6] A. K. Peti, Phys. Lett. **A215**, 7 (1996).

[7] D. Home and M. A. B. Whitaker, J. Phys. **A25**, 657 (1992).

[8] D. Home and M. A. B. Whitaker, Phys. Lett. **A173**, 327 (1993).

[9] H. Nakazato, M. Namiki, S. Pascazio and H. Rauch, Phys. Lett. **A199**, 27 (1995).

[10] M. Namiki, S. Pascazio and H. Nakazato, *"Decoherence and Quantum Measurements"*, World Scientific, Singapure (1997).

[11] B. Kaulakys and V. Gontis, Phys. Rev. **A56**, 1131 (1997).

[12] Thomas P. Altenmller and Axel Schenzle, Phys. Rev. **A49** 2016 (1994).

[13] Wayne M. Itano, D.J. Heinzen, J.J. Bollinger and D.J. Wineland, Phys. Rev. **A41** 2295 (1990).

[14] R. Kullock and N.F. Svaiter, Notas de Física CBPF-NF-027/06 (2007).

[15] R. Kullock and N.F.Svaiter, arXiv:quant-ph/0703167.

[16] A. Damini, A. Loinger and G. M. Prosperi, Nucl. Phys. **33**, 297 (1962).

[17] N. G. Van Kampen, Physica **A153**, 97 (1988).

[18] J. Bell, Phys. World **3**, 33 (1990).

[19] V. B. Braginsky and F. Y. Khalili, *"Quantum Measurement"*, Cambridge University Press, Cambridge (1992).

[20] *"Quantum Theory and Measurements"*, J. A. Wheeler and W. H. Zurek (editors), Princeton University Press (1983).

[21] G. Gamow, Z. Phys. **51**, 204 (1928).

[22] V. Weisskopf and E. Wigner, Z. Phys. **63**, 54 (1930).

[23] L. Fonda, G. C. Ghirardi and A. Rimini, Rep. Prog. Phys. **41**, 587 (1978).

[24] A. Peres, Ann. Phys. **129**, 33 (1980).

[25] B. F. Svaiter and N. F. Svaiter, Phys. Rev. **D46**, 5267 (1992).

[26] B. F. Svaiter and N. F. Svaiter, Phys. Rev. **D47**, 4802 (1993) (erratum).

[27] L. H. Ford, N. F. Svaiter and M. L. Lyra, Phys. Rev. **A49**, 1378 (1994).

[28] Cook, R. J., Phys. Scr. **T21** 49 (1988)

[29] Nakazato, H., M. Namiki, S. Pascazio e H. Rauch, Phys. Lett. **A217**, 203 (1996)

[30] Pascazio, S., M. Namiki, G. Badurek e H. Rauch, Phys. Lett. **A179**, 155 (1993)

[31] Peres, A. Am. J. Phys. **48**, 931 (1980), Ann. Phys. **129**, 33 (1980)

[32] W. G. Unruh, Phys. Rev. **D14**, 870 (1976).

[33] B. S. DeWitt, Phys. Rep. **196**, 295 (1976).

[34] N. D. Birrel and P. C. W. Davies, "Quantum Fields in Curved Space", Cambridge University Press, Cambridge (1984), pp. 48-59.

[35] E. T. Jaynes and F. W. Cummings, Proc. I. E. E. **51**, 89 (1963).

[36] D. P. DiVicenzo, Phys. Rev. **A51**, 1015 (1995).

[37] E. Block e P.R. Berman, Phys. Rev. **A44**, 1466 (1991)