

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Limites Sobre a Constante de
Acoplamento da Eletrodinâmica
Regularizada**

DIEGO DA COSTA GUIMARÃES

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS - CBPF
RIO DE JANEIRO, SETEMBRO DE 2008

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por ter me dado a vida e até aqui ter me ajudado e sustentado.

Não poderia deixar de agradecer aos meus pais Hailton e Elizabeth Guimarães, por todo o amor, companheirismo, apoio moral, psicológico e financeiro.

Agradeço à minha família de modo geral, em especial à minha irmã Carla, meu cunhado Daniel e meu sobrinho Jonathan, por me apoiarem mesmo estando nós separados por quilômetros de distância.

Durante esses 2 anos, muitas pessoas me ajudaram de variadas maneiras, e também sou grato a elas e gostaria de destacar aqui: os amigos André e Tadeu, com quem dividi um apartamento (além discussões sobre física e sobre os mais variados assuntos, e muitas contas para pagar). Aos colegas Diogo e Esley, que mesmo que tenhamos convivido por um curto período, em muito colaboraram, principalmente o Esley, por toda a prestatividade, inclusive, nos assuntos computacionais. E agradeço especialmente à minha noiva Fernanda, que, com seu amor, carinho e humor, me ajuda a esquecer um pouco dos problemas (mas sem me deixar sair completamente da realidade), e, também, aos seus pais Fernando e Marileide por todo o apoio e minha cunhadinha Paola por me proporcionar muitas risadas.

Agradeço também aos professores Helayël e Sebastião Dias por toda ajuda, colaboração e compreensão as quais me foram dispensadas.

Obviamente que este trabalho não poderia ter sido desenvolvido sem o auxílio, a dedicação e paciência do professor Antônio José Accioly. A ele, um obrigado especial por me ensinar, me motivar e ouvir. Mostrou ser, além de um grande professor, um bom amigo.

Finalmente, agradeço ao CBPF pelas portas abertas e toda a estrutura a qual me foi oferecida e a CAPES pelo apoio financeiro indispensável para o desenvolvimento deste trabalho.

Resumo

A Lagrangeana de Maxwell é modificada pela introdução de um termo contendo derivadas segundas dos potenciais eletromagnéticos. A Lagrangeana resultante, além de ser invariante de gauge e de Lorentz, dá origem à equações de campo locais que são lineares nas quantidades do campo. Mostra-se como construir esta eletrodinâmica generalizando-se as leis da magnetostática (eletrostática) de modo a torná-las consistentes com a relatividade especial. Dois limites para a constante de acoplamento desta eletrodinâmica de ordem superior são também estimados: o primeiro se baseia em um experimento de laboratório usado para se testar a lei do inverso do quadrado de Coulomb, enquanto que o segundo envolve a determinação do momento magnético anômalo do elétron.

Abstract

Maxwell Lagrangian is modified by introducing a term containing second-order derivatives of the electromagnetic potentials. The resulting Lagrangian, besides being gauge and Lorentz invariant, gives origin to local field equations that are linear in the field quantities. It is shown how this electrodynamics can be built by generalizing the laws of magnetostatics (electrostatics) to be consistent with special relativity. Two bounds for the coupling constant of this higher-order electrodynamics are also estimated: the first is based on a lab experiment used to test the Coulomb's inverse square law, whereas the second one involves the computation of the anomalous magnetic moment of the electron.

Sumário

Apresentação	3
1 Sobre a eletrodinâmica de ordem mais alta	7
1.1 Modificações induzidas pelo termo de derivadas de ordem mais alta na eletrodinâmica de Maxwell	7
1.2 Propagação de ondas na eletrodinâmica de ordem mais alta	11
1.3 Teoria quântica da eletrodinâmica regularizada	12
1.4 Positividade da energia eletrostática na eletrodinâmica com derivadas superiores	15
2 Um roteiro simples para a obtenção das equações de campo da eletrodinâmica com derivadas de ordem mais alta	19
2.1 A magnetostática da eletrodinâmica regularizada	19
2.2 Generalização da magnetostática da eletrodinâmica regularizada via relatividade especial	22
2.3 Interpretação física das equações de campo da eletrodinâmica com derivadas superiores	24
3 Começando na eletrostática e terminando na eletrodinâmica regularizada	27
3.1 A eletrostática a partir da lei de força e do princípio de superposição	27
3.2 As equações de campo da eletrodinâmica regularizada . . .	29
4 O momento magnético anômalo do elétron na eletrodinâmica regularizada	33
4.1 Cálculo do momento magnético anômalo do elétron na eletrodinâmica de ordem superior	34

4.2	Um limite para o regularizador da eletrodinâmica de ordem superior	36
5	A constante de acoplamento da eletrodinâmica regularizada via uma experiência de laboratório	38
5.1	Cálculo do potencial no interior de uma esfera uniformemente carregada no contexto da eletrodinâmica regularizada	38
5.2	Cálculo da diferença de potencial entre as cascas esféricas .	40
5.3	Um limitante para l via experimento de Plimpton e Lawton	41
	Observações finais	42
	Referências Bibliográficas	45

Apresentação

As invariâncias de gauge e de Lorentz são duas simetrias da eletrodinâmica de Maxwell que tornaram-se fechos de abóboda para toda a física teórica fundamental. Isto não significa, no entanto, que elas não devam ser submetidas a testes experimentais. Certamente, como afirmava Feynman, *The test of all knowledge is experiment* [1]. Como proceder, então, a fim de verificar a validade destas consagradas idéias físicas de caráter praticamente universal? Construindo-se um arcabouço teórico onde seja permitido desvios de tais simetrias, desvios estes que seriam governados por parâmetros arbitrários; os dados experimentais, em decorrência, estabeleceriam limites sobre a grandeza dos parâmetros de quebra de simetria. Assim, por exemplo, violações da invariância de gauge podem ser parametrizadas pela massa m do campo do fóton A_μ . O termo massivo modifica a densidade de Lagrangeana \mathcal{L}_{EM} concernente ao eletromagnetismo de Maxwell *,

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (1)$$

tornando o fóton massivo:

$$\mathcal{L}_m = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}A^\mu A_\mu. \quad (2)$$

Aqui $F_{\mu\nu}(= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$ é o tensor eletromagnético. Na presença de uma corrente conservada J_ν , as equações de campo assumem a forma

$$(\square + m^2)A^\nu = j^\nu \quad , \quad \partial_\nu A^\nu = 0. \quad (3)$$

A invariância de gauge

$$A_\nu \rightarrow A_\nu + \partial_\nu \Lambda, \quad (4)$$

é claramente perdida. Dados geomagnéticos estabelecem então o limite $m \leq 3 \times 10^{-24} GeV$ [2]; observações do campo magnético galático permitem, por sua vez, estabelecer um limite mais estrito: $m \leq 3 \times 10^{-36} GeV$ [3].

Por outro lado, limites experimentais sobre uma outra modificação da teoria de Maxwell, que viola agora a simetria de Lorentz, foram analisados por Carroll, Field e Jackiw [4]. A modificação por eles proposta consiste

*Usamos unidades naturais e adotamos a assinatura (+, -, -, -) para a métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$.

em adicionar à densidade de Lagrangeana de Maxwell um termo que se assemelha ao termo de Chern-Simons em (2+1) dimensões:

$$\mathcal{L}_p = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}p_\alpha A_\beta \tilde{F}^{\alpha\beta}, \quad (5)$$

onde $\tilde{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\mu\nu}$ ($\epsilon^{0123} = +1$) é o dual do tensor eletromagnético. Note que esta modificação acopla o campo eletromagnético ao quadrivetor p_ν que será especificado a seguir. Neste espírito, vamos determinar sob que condições $\mathcal{L}_{CS} \equiv -\frac{1}{2}p_\alpha A_\beta \tilde{F}^{\alpha\beta}$ será invariante de gauge. Sob a transformação de gauge $\Delta A_\alpha = \partial_\alpha \Lambda$, \mathcal{L}_{CS} sofre a transformação

$$\Delta\mathcal{L}_{CS} = -\frac{1}{4}\tilde{F}^{\alpha\beta}[p_\alpha\partial_\beta\Lambda - p_\beta\partial_\alpha\Lambda], \quad (6)$$

que, a menos de uma divergência, pode ser escrita como

$$\Delta\mathcal{L}_{CS} = \frac{1}{4}\Lambda\tilde{F}^{\alpha\beta}(\partial_\alpha p_\beta - \partial_\beta p_\alpha). \quad (7)$$

A invariância de gauge exige que a equação (7) se anule para Λ arbitrário. Isto acontecerá se p_ν for, em um certo sentido, uma constante da natureza. No espaço plano, porém, se a quantidade $\partial_\alpha p_\beta$ for igual a zero em algum referencial, ela será nula em todos os outros e, conseqüentemente, $\Delta\mathcal{L}_{CS} = 0$, e a teoria será invariante de gauge. Observe que o fato de ser o vetor p_ν constante leva a escolha de uma direção preferencial no espaço-tempo quando ele se acopla com campos observáveis. Em outras palavras, uma componente espacial não nula \mathbf{p} viola a invariância rotacional e uma componente temporal não nula p^0 destroi a invariância sob *boosts* de Lorentz. Como é impossível “blindar” um experimento dos efeitos do termo de Chern-Simons, a invariância de Lorentz é violada. Dados geomagnéticos podem ser utilizados para estabelecer limites sobre o parâmetro $m = (p_\nu p^\nu)^{1/2}$ de Chern-Simons:

$$m \lesssim 6 \times 10^{-26} GeV.$$

Um limite mais estrito é obtido examinando-se a correlação entre os ângulos de posição e os ângulos de polarização observados de galáxias de rádio distantes; este teste astrofísico implica em

$$m \lesssim 1,7 \times 10^{-42} h_0 GeV, \quad 0,5 \lesssim h_0 \lesssim 1,0.$$

Hodiernamente, teorias que violam a simetria de Lorentz foram incorporadas à estrutura do Modelo Padrão Estendido por Colladay e Kostelecký

[5] como uma possível extensão do Modelo Padrão mínimo das interações fundamentais.

Neste trabalho exploramos uma outra modificação da teoria de Maxwell utilizada recentemente para resolver o problema dos $\frac{4}{3}$ da eletrodinâmica clássica. Esta modificação, ao contrário das duas outras discutidas anteriormente, não viola nem a simetria de gauge nem a de Lorentz.

Vamos abrir aqui um parêntese a fim de recapitular brevemente o problema dos $\frac{4}{3}$. Como é bem conhecido, o cálculo da auto-força atuando sobre uma partícula carregada é um problema relevante da eletrodinâmica que tem ocupado a atenção dos físicos desde os dias de Abraham (1903) e Lorentz (1904), que derivaram pela primeira vez a expressão para a força de reação radiativa sobre o elétron extenso [6]. Supondo que o elétron fosse uma distribuição de cargas rígida, no seu referencial de repouso instantâneo, eles mostraram que a partícula sujeita a uma força \mathbf{F}_{ext} obedece à equação de movimento

$$\frac{4}{3}U\dot{\mathbf{v}} - \frac{2}{3}e^2\ddot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{ext}, \quad (8)$$

onde $\dot{\mathbf{v}}$ é a aceleração da partícula e U representa sua energia eletrostática

$$U = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}.$$

O fator de $\frac{4}{3}$ em frente da massa eletromagnética[†] U na equação (8) é exatamente uma das dificuldades da teoria de partículas carregadas de Abraham-Lorentz.

Para superar a dificuldade acima mencionada, variados e interessantes propostas foram sugeridas a partir de 1905. Aqui nos reportaremos apenas à proposta de Frenkel (1996) [7,8]. Esta se baseia na introdução de um *cutoff* na teoria de Maxwell a nível Lagrangeano via a adição de um novo termo com derivadas de segunda ordem do campo A_μ :

$$\mathcal{L}(l) = -\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + \frac{l^2}{2}\partial_\beta F^{\alpha\beta}\partial^\gamma F_{\alpha\gamma} - j_\alpha A^\alpha, \quad (9)$$

onde j_α é a quadricorrente conservada. Chamamos atenção para o fato desta Lagrangeana ser invariante de gauge e de Lorentz. Ela também fornece equações de campo locais que são lineares nas quantidades do

[†]A equação de Abraham-Lorentz não contém, por hipótese, massa mecânica.

campo. A adição do termo com derivadas de ordem mais alta regulariza a eletrodinâmica do elétron a curtas distâncias, eliminando soluções com auto-aceleração (*runaway solutions*) e que violam a causalidade; e mais, no contexto desta Eletrodinâmica de Ordem Mais Alta, a massa efetiva do elétron comparece com o fator correto na equação de movimento. É curioso que esta modificação da eletrodinâmica clássica foi proposta há muito tempo atrás por Podolsky e colaboradores [9] num contexto bastante diferente.

O objetivo precípuo desta dissertação é determinar limites superiores para a constante de acoplamento l . Ela tem também por meta analisar algumas das propriedades da eletrodinâmica regularizada.

Abrimos nosso trabalho discutindo no Capítulo 1 algumas das modificações que o regularizador l introduz na eletrodinâmica de Maxwell.

No Capítulo 2 construímos a eletrodinâmica de ordem mais alta simplesmente generalizando as leis da magnetostática — obtidas a partir do campo magnético elementar devido a um elemento de corrente e do princípio de superposição — de modo a torná-las consistentes com a relatividade restrita [10].

Esta dedução tipo “passe de mágica” é repetida no Capítulo 2, partindo-se agora da lei de força para a interação de duas cargas pontuais estáticas [11].

Um limite para o *cutoff* l é determinado no Capítulo 3 calculando-se explicitamente o momento magnético anômalo do elétron [10].

No Capítulo 4 determinamos um outro limitante para l utilizando os resultados de uma experiência de laboratório que visava detectar desvios na lei de Coulomb [11]. Os cálculos realizados neste capítulo são puramente clássicos.

Encerramos nosso trabalho no Capítulo 5 discutindo possíveis extensões dos resultados aqui apresentados.

Capítulo 1

Sobre a eletrodinâmica de ordem mais alta

Tecemos aqui algumas considerações sobre a eletrodinâmica clássica com um *cutoff*. Neste modelo o comportamento do campo eletromagnético só difere do de Maxwell em pequenas distâncias. As equações de campo são ainda locais e lineares no campo eletromagnético, tal como no caso de Maxwell, e a Lagrangeana é invariante tanto por transformações de gauge quanto de Lorentz. Discutimos também, de passagem, a teoria quântica da eletrodinâmica regularizada.

1.1 Modificações induzidas pelo termo de derivadas de ordem mais alta na eletrodinâmica de Maxwell

As modificações introduzidas pela Lagrangeana $\mathcal{L}_l \equiv \frac{l^2}{2} \partial_\alpha F^{\lambda\alpha} \partial^\beta F_{\lambda\beta}$ na eletrodinâmica de Maxwell podem ser melhor apreciadas pela observação das equações de campo. Variando $\mathcal{L}(l)$ [vide equação (9)] com respeito a A_ν , obtemos prontamente

$$\delta\mathcal{L}(l) = -F^{\mu\nu} \partial_\mu \delta A_\nu + l^2 \partial_\beta F^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial^\nu \delta A_\nu + l^2 \partial_\mu F^{\mu\nu} \square \delta A_\nu - j^\nu \delta A_\nu,$$

que a menos de divergências pode ser escrita como

$$\delta\mathcal{L}(l) = [(1 + l^2 \square) \partial_\mu F^{\mu\nu} - j^\nu] \delta A_\nu.$$

Conseqüentemente, as equações de campo inhomogêneas são dadas por

$$(1 + l^2 \square) \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu. \quad (1.1)$$

Como $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ continua sendo um tensor antissimétrico, as identidades de Bianchi

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} = 0 \quad (1.2)$$

continuam sendo válidas na eletrodinâmica regularizada. Note que o *cut-off* l modifica apenas as leis de Coulomb-Gauss e de Ampère-Maxwell alterando o relacionamento do campo eletromagnético com sua fonte.

Vamos mostrar em seqüência que o regularizador l introduz modificações na eletrodinâmica apenas em pequenas distâncias. Para tanto, notemos que no gauge de Lorentz a equação (1.1) assume a forma

$$(1 + l^2 \square) \square A^\nu = J^\nu. \quad (1.3)$$

Por outro lado, tanto A^ν como J^ν podem ser expressos em termos de suas respectivas transformadas de Fourier, ou seja,

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int \tilde{A}^\mu(k) e^{-ikx} d^4k, \\ J^\mu(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int \tilde{J}^\mu(k) e^{-ikx} d^4k. \end{aligned}$$

Podemos assim reescrever a equação (1.3) como

$$\int (-k^2 + l^2 k^4) \tilde{A}^\mu(k) e^{-ikx} d^4k = \int \tilde{J}^\mu(k) e^{-ikx} d^4k. \quad (1.4)$$

Logo,

$$\tilde{A}^\mu(k) = \frac{\tilde{J}^\mu(k)}{k^2(k^2 l^2 - 1)}. \quad (1.5)$$

Comparando esta expressão com a expressão equivalente oriunda da eletrodinâmica de Maxwell, vemos que o regularizador só é efetivo em pequenas distâncias ($k \rightarrow \infty$); em grandes distâncias ($k \rightarrow 0$) seu efeito é suprimido.

Isto pode ser visto de maneira explícita se analisarmos a eletrostática da eletrodinâmica regularizada. Neste caso a equação (1.5) se reduz a

$$\tilde{V}(\mathbf{k}) = \frac{\tilde{\rho}(\mathbf{k})}{k^2(k^2 l^2 + 1)}, \quad (1.6)$$

com $k^2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$. No caso de uma partícula puntiforme de carga e na origem do raio vetor,

$$\rho(\mathbf{r}) = e\delta^3(\mathbf{r}),$$

e

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}(\mathbf{k}) &= \int \rho(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{r} \\
&= e \int \delta^3(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{r} \\
&= e.
\end{aligned}$$

Conseqüentemente, o potencial $V(r)$ pode ser calculado a partir da expressão

$$\begin{aligned}
V(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \tilde{V}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{k} \\
&= \frac{eM^2}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{k^2(k^2 + M^2)}, \tag{1.7}
\end{aligned}$$

onde $M^2 \equiv \frac{1}{l^2}$. Como a orientação do nosso sistema de coordenadas é arbitrário, podemos escolher o eixo z ao longo de \mathbf{r} e obter

$$V(\mathbf{r}) = \frac{eM^2}{(2\pi)^3} \int_0^\infty k^2 dk \int_{-1}^1 \frac{e^{-ikr \cos \theta}}{(k^2 + M^2)k^2} d(\cos \theta) \int_0^{2\pi} d\phi,$$

onde $r = |\mathbf{r}|$, $k = |\mathbf{k}|$ e (θ, ϕ) são coordenadas esféricas convencionais. Segue-se que,

$$\begin{aligned}
V(\mathbf{r}) &= \frac{eM^2}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin kr}{kr} \frac{dk}{k^2 + M^2} \\
&= \frac{eM^2 r}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \frac{dk}{k^2 + M^2 r^2}.
\end{aligned}$$

Porém,

$$\frac{1}{x} \frac{1}{x^2 + M^2 r^2} = \frac{1}{M^2 r^2} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + M^2 r^2} \right).$$

Portanto,

$$V(\mathbf{r}) = \frac{e}{(2\pi)^2} r [I_1 - I_2],$$

onde

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx, \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + M^2 r^2} dx \\
&= \text{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2 + M^2 r^2} dx. \tag{1.9}
\end{aligned}$$

A integral (1.8) pode ser encontrada em qualquer livro texto sobre teoria de funções de variável complexa [12]. Ela pode também ser calculada por meio de um truque trivial [13]. De fato, seja $I(\alpha) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} \sin x}{x} dx$, de modo que $I_1 = 2I(0)$. Por outro lado, $\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = -\int_0^\infty e^{-\alpha x} \sin x dx = -\frac{1}{1+\alpha^2}$. Logo, $I_\alpha = -\int \frac{d\alpha}{1+\alpha^2} = C - \tan^{-1} \alpha$. Mas $I(\infty) = 0$. Portanto $C = \frac{\pi}{2}$, $I(\alpha) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \alpha$ e $I_1 = 2I(0) = \pi$.

A integral (1.9), por sua vez pode ser computada pelo método de integração de contorno. Considere neste espírito $\int_\gamma \frac{ze^{iz}}{z^2 + M^2 r^2} dz$, onde o contorno de integração γ foi escolhido como sendo o eixo real mais um semicírculo de raio infinito no semiplano superior. Ao longo do eixo real a integral é I_2 , enquanto que no grande semicírculo situado no semiplano superior ela é zero, já que $\exp iz \rightarrow 0$ para $z \rightarrow i\infty$. Por sua vez, o resíduo de

$$\frac{ze^{iz}}{z^2 + M^2 r^2} = \frac{ze^{iz}}{2Mri} \left[\frac{1}{z - Mri} - \frac{1}{z + Mri} \right],$$

em $z = Mri$ (que é o único pólo que jaz dentro do contorno de integração) é $\frac{e^{-Mr}}{2}$. Assim, $I_2 = \text{Im} \left(2\pi i \frac{e^{-Mr}}{2} \right) = \pi e^{-Mr}$. Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} V(r) &= \frac{e}{(2\pi)^2 r} [\pi - \pi e^{-Mr}] \\ &= \frac{e}{4\pi} \frac{1 - e^{-r/l}}{r}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Para confirmar que a Lagrangeana \mathcal{L}_l modifica a eletrodinâmica de Maxwell apenas para pequenas distâncias, basta analisar a equação (1.10) quando $\frac{r}{l} \ll 1$. Neste caso,

$$V(\mathbf{r}) \approx \frac{e}{4\pi l}. \tag{1.11}$$

Porém, quando $\frac{r}{l} \gg 1$, recuperamos a expressão usual para o potencial de uma carga puntiforme, ou seja,

$$V(\mathbf{r}) \approx \frac{e}{4\pi r}. \tag{1.12}$$

O fato do potencial escalar ser finito quando $r \rightarrow 0$ é uma evidência de que a auto-energia e a massa eletromagnética da partícula puntiforme são finitas no modelo regularizado da eletrodinâmica. De fato, na eletrodinâmica clássica com um *cutoff*, não só a massa eletromagnética é finita como o problema dos $\frac{4}{3}$ encontra uma resolução natural, dada a natureza covariante do procedimento de regularização adotado [7].

1.2 Propagação de ondas na eletrodinâmica de ordem mais alta

É interessante observar que o regularizador interfere na propagação livre do campo eletromagnético. Para vê-lo basta tomar $j^\mu = 0$ na equação (1.3). Assim, a equação (1.4) se torna

$$\int k^2(k^2 l^2 - 1) \tilde{A}^\mu(k) e^{-ikx} d^4k = 0, \quad (1.13)$$

com $k^\mu = (\omega, \mathbf{k})$. Para que a equação (1.13) seja verdadeira a despeito de $\tilde{A}^\mu(k)$, é preciso que

$$(\omega^2 - k^2)[(\omega^2 - k^2)l^2 - 1] = 0, \quad (1.14)$$

com $k^2 \equiv \mathbf{k}^2$. A equação (1.14) admite duas classes de soluções. A primeira família é a das soluções usuais da eletrodinâmica para as quais vale a relação de dispersão $\omega = k$. A outra família de soluções satisfaz a relação

$$k^2 = \omega^2 - \frac{1}{l^2}. \quad (1.15)$$

Talvez a equação (1.15) seja mais familiar na forma

$$k = \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2} \quad (1.16)$$

com $\omega_p \equiv \frac{1}{l}$. A equação (1.16) descreve tanto a propagação de ondas eletromagnéticas em guias de onda quanto a propagação de ondas eletromagnéticas em um plasma no limite de alta-freqüência ou pequenos comprimentos de onda [14]. O fenômeno não deve trazer maiores conseqüências pois a distância típica para atenuações destas ondas é $\delta \sim \frac{1}{2\omega_p} = \frac{l}{2}$ e se $l \sim \frac{1}{m}$, onde m é a massa do elétron, então $\delta \sim 10^{-13}m$.

Seguindo a analogia com a propagação em guias de onda e analisando a equação (1.16), vemos que k é um número real se $\omega > \omega_p$. Para freqüências menores que ω_p , k é imaginário; tais modos não se propagam e são chamados de modos evanescentes. No caso das soluções propagantes, a velocidade de fase é dada por

$$v_{fase} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}} > 1;$$

enquanto que a velocidade de grupo é igual a

$$v_{grupo} = \frac{d\omega}{dk} = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2} < 1.$$

O regularizador altera as propriedades dielétricas do vácuo, transformando-o em uma espécie de plasma. Do ponto de vista físico, a explicação é intuitiva. A regularização proposta para a eletrodinâmica procura levar em conta, no regime clássico, fenômenos associados com a criação de pares virtuais elétron-pósitron na vizinhança do elétron puntiforme. Deste modo as ondas eletromagnéticas interagem com estes pares virtuais e o resultado é sua propagação em um meio que é, de modo efetivo, um plasma ao redor do elétron puntiforme.

Estes resultados podem ser interpretados como indicadores da presença de duas excitações distintas na eletrodinâmica regularizada. De fato, sabemos da mecânica quântica que uma onda pode ser considerada como associada a uma partícula. Ou seja, à onda com frequência ω e vetor de propagação \mathbf{k} , a mecânica quântica associa uma partícula com energia $E = \omega$ e momento $\mathbf{p} = \mathbf{k}$. Logo, no caso $\omega = k$, a relação entre a energia e o momento é $E^2 = \mathbf{p}^2$, que é a relação relativística entre a energia e o momento para uma partícula de massa zero. Para a onda com $k = \sqrt{\omega^2 - \frac{1}{l}}$, $E^2 = \mathbf{p}^2 + \frac{1}{l}$, que é a relação relativística entre a energia e o momento de uma partícula livre de massa finita e igual a $\frac{1}{l}$. Vamos mostrar na próxima seção que esta interpretação é compatível com uma teoria quântica da eletrodinâmica regularizada.

1.3 Teoria quântica da eletrodinâmica regularizada

Processos quânticos como criação de pares virtuais induzem o surgimento, na eletrodinâmica clássica, de um regularizador $l \sim \lambda_c$ em pequenas distâncias [15]. Este regularizador é responsável por, no limite de partícula puntiforme, resolver o problema dos $\frac{4}{3}$, dotar o elétron com uma massa eletromagnética finita e com uma massa não-eletromagnética positiva e produzir uma equação de movimento que não admite soluções com auto-aceleração ou com pré-aceleração. Apesar da eletrodinâmica regularizada ser uma teoria efetiva que incorpora algumas consequências da eletrodinâmica quântica no quadro conceitual da eletrodinâmica clássica,

acreditamos que seria instrutivo construir uma teoria quântica da eletrodinâmica regularizada e investigar algumas de suas características.

Inicialmente, convém determinar o propagador do fóton na eletrodinâmica regularizada. Seja, então, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{livre} + \mathcal{L}_{g.f.}$, onde \mathcal{L}_{livre} e $\mathcal{L}_{g.f.}$ são, respectivamente, as Lagrangeanas livre e fixadora de gauge de uma teoria eletromagnética genérica. Como é bem conhecido, esta Lagrangeana pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} A_\mu \mathcal{O}^{\mu\nu} A_\nu.$$

Expandindo, em seqüência, o operador \mathcal{O} em termos dos operadores de projeção

$$\Theta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}; \quad \omega_{\mu\nu} = \frac{k_\mu k_\nu}{k^2},$$

que obedecem a álgebra fechada

$$\begin{array}{c|cc} & \Theta & \omega \\ \hline \Theta & \Theta & 0 \\ \omega & \omega & 0 \end{array}$$

obtemos

$$\mathcal{O} = A\Theta + B\omega,$$

onde A e B são os coeficientes da expansão. Se \mathcal{O}^{-1} é, por sua vez, o propagador almejado, então $\mathcal{O}^{-1} = C\Theta + D\omega$. Porém, $\mathcal{O}\mathcal{O}^{-1} = I$, onde $I = \Theta + \omega$. Conseqüentemente,

$$(A\Theta + B\omega)(C\Theta + D\omega) = AC\Theta + BD\omega = \Theta + \omega.$$

Logo,

$$\mathcal{O}^{-1} = \frac{1}{A}\Theta + \frac{1}{B}\omega. \quad (1.17)$$

Isto posto, vamos determinar o operador \mathcal{O} no gauge de Lorentz para a eletrodinâmica regularizada. Neste caso, \mathcal{L} é dado por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{l^2}{2} \partial_\lambda F^{\mu\lambda} \partial^\nu F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\lambda} (\partial_\mu A^\mu)^2,$$

que a menos de divergências pode ser reescrito como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} A_\mu \left[\eta^{\mu\nu} \square + \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right) \partial^\mu \partial^\nu + l^2 (\eta^{\mu\nu} \square \square - \partial^\mu \partial^\nu \square) \right] A_\nu.$$

Portanto,

$$\mathcal{O}^{\mu\nu} = -k^2 \eta^{\mu\nu} - \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right) k^\mu k^\nu + l^2 (\eta^{\mu\nu} k^4 - k^\mu k^\nu k^2).$$

Segue-se que

$$\mathcal{O} = (l^2 k^4 - k^2) \Theta - \frac{k^2}{\lambda} \omega,$$

e, conseguintemente, o propagador toma a forma

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\mu\nu}^{-1} &= \frac{\Theta_{\mu\nu}}{k^2(l^2 k^2 - 1)} - \frac{\lambda}{k^2} \omega_{\mu\nu} \\ &= \frac{\eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}}{k^2(l^2 k^2 - 1)} - \frac{\lambda k_\mu k_\nu}{k^4} \\ &= \frac{1}{k^2(l^2 k^2 - 1)} \left\{ \eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} [1 + \lambda(l^2 k^2 - 1)] \right\}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

É importante observar-se que o coeficiente de $\eta_{\mu\nu}$ na equação (1.18) apresenta um bom comportamento ultravioleta, sendo proporcional a $\frac{1}{k^4}$ para valores grandes de k . Este coeficiente pode ser escrito como

$$\frac{1}{k^2(l^2 k^2 - 1)} = -\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2 - \frac{1}{l^2}}. \quad (1.19)$$

O primeiro termo no lado direito da equação (1.19) vem do propagador usual para o fóton; já o segundo termo é uma correção introduzida pela presença de $\frac{l^2}{2} \partial^\alpha F_{\mu\alpha} \partial_\beta F^{\mu\beta}$ na Lagrangeana $\mathcal{L}(l)$. Este termo representa o propagador de um bóson vetorial neutro de massa $\frac{1}{l}$. Estes resultados confirmam, pois, as previsões obtidas pela análise da propagação de ondas eletromagnéticas na eletrodinâmica regularizada da seção anterior. No entanto, o sinal positivo na frente do termo $\frac{1}{k^2 - \frac{1}{l^2}}$ nos alerta para o fato que este bóson vetorial pode levar a interações que violam a conservação de probabilidade. Na verdade, este fantasma não-taquiônico é exatamente o responsável pelo bom comportamento ultravioleta do termo que independe do gauge. Fantasmas não-taquiônicos aparecem também em teorias

de gravitação de ordem mais alta [16], bem como em extensões de teorias abelianas de Chern-Simons com derivadas superiores em 2+1 dimensões [17]. Esta breve análise nos permite concluir que a teoria quântica que emerge da eletrodinâmica regularizada é, no que tange aos seus fundamentos, insatisfatória a menos que seja interpretada como a primeira aproximação de uma teoria efetiva que descreve, em alguma escala de energia, os efeitos de uma teoria mais fundamental válida em energias mais elevadas [18].

1.4 Positividade da energia eletrostática na eletrodinâmica com derivadas superiores

Como fecho deste capítulo, discutiremos a questão da positividade da energia eletrostática na eletrodinâmica regularizada. Para tanto, vamos construir o tensor momento-energia simétrico utilizando um algoritmo bastante simples [19] baseado nas equações de campo; esta prescrição consiste em multiplicar a equação de campo em pauta por uma derivada apropriada deste campo de modo que a expressão resultante contenha somente um índice de espaço-tempo livre e então reescrevê-la como uma quadridivergência.

Na ausência de fontes, a equação de campo para a eletrodinâmica com *cutoff* assume a forma

$$(1 + l^2 \square) \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0. \quad (1.20)$$

Multiplicando ambos os membros desta equação por $F_{\nu\alpha}$, resulta

$$F_{\nu\alpha} \partial_\mu F^{\mu\nu} + l^2 F_{\nu\alpha} \square \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0. \quad (1.21)$$

O primeiro termo do lado esquerdo da equação (1.21) pode ser escrito

como

$$\begin{aligned}
F_{\nu\alpha}\partial_\mu F^{\mu\nu} &= \partial_\mu(F_{\nu\alpha}F^{\mu\nu}) - (\partial_\mu F_{\nu\alpha})F^{\mu\nu} \\
&= \partial_\mu(F_{\nu\alpha}F^{\mu\nu}) - \frac{1}{2}(\partial_\mu F_{\nu\alpha} - \partial_\nu F_{\mu\alpha})F^{\mu\nu} \\
&= \partial_\mu(F_{\nu\alpha}F^{\mu\nu}) - \frac{1}{2}(\partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu})F^{\mu\nu}. \quad (1.22)
\end{aligned}$$

As identidades de Bianchi, por sua vez, nos asseguram que $\partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\alpha F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} = 0$. Como consequência,

$$\begin{aligned}
F_{\nu\alpha}\partial_\mu F^{\mu\nu} &= \partial_\mu(F_{\nu\alpha}F^{\mu\nu}) + \frac{1}{2}(\partial_\alpha F_{\mu\nu})F^{\mu\nu} \\
&= \partial_\mu(F_{\nu\alpha}F^{\mu\nu}) + \frac{1}{4}\partial_\alpha(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \\
&= \partial_\mu(F_{\nu\alpha}F^{\mu\nu} + \frac{1}{4}\delta_\alpha^\mu F_{\rho\theta}F^{\rho\theta}). \quad (1.23)
\end{aligned}$$

Por outro lado, o segundo termo do lado esquerdo da equação (1.21) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}
F_{\nu\alpha}\square\partial_\mu F^{\mu\nu} &= \partial_\mu(F_{\nu\alpha}\square F^{\mu\nu}) - \partial_\mu F_{\nu\alpha}\square F^{\mu\nu} \\
&= \partial_\mu(F_{\nu\alpha}\square F^{\mu\nu}) - \frac{1}{2}(\partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu})\square F^{\mu\nu} \\
&= \partial_\mu(F_{\nu\alpha}\square F^{\mu\nu}) + \frac{1}{2}\partial_\alpha F_{\mu\nu}\square F^{\mu\nu} \\
&= \partial_\mu(F_{\nu\alpha}\square F^{\mu\nu}) + \partial_\alpha(\frac{1}{2}F_{\mu\nu}\square F^{\mu\nu}) - \frac{1}{2}F^{\mu\nu}\square\partial_\alpha F_{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

Porém,

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}F^{\mu\nu}\square\partial_\alpha F_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}F^{\mu\nu}\square(\partial_\nu F_{\alpha\mu} + \partial_\mu F_{\nu\alpha}) \\
&= F^{\mu\nu}\square\partial_\nu F_{\alpha\mu} \\
&= \partial_\nu(F^{\mu\nu}\square F_{\alpha\mu}) - \partial_\nu F^{\mu\nu}\square F_{\alpha\nu}.
\end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned}
-\partial_\nu F^{\mu\nu}\square F_{\alpha\mu} &= -\partial_\nu F^{\mu\nu}\partial^\beta\partial_\beta F_{\alpha\mu} \\
&= \partial_\nu F^{\mu\nu}\partial^\beta(\partial_\mu F_{\beta\alpha} + \partial_\alpha F_{\mu\beta}) \\
&= \partial_\mu(\partial_\nu F^{\mu\nu}\partial^\beta F_{\beta\alpha}) + \partial_\nu F^{\mu\nu}\partial_\alpha\partial^\beta F_{\mu\beta} \\
&= \partial_\mu(\partial_\nu F^{\mu\nu}\partial^\beta F_{\beta\alpha}) + \partial_\alpha(\frac{1}{2}\partial_\nu F^{\mu\nu}\partial^\beta F_{\mu\beta}).
\end{aligned}$$

Segue-se que

$$l^2 F_{\nu\alpha} \square \partial_\mu F^{\mu\nu} = l^2 \partial_\mu [F_{\nu\alpha} \square F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \delta_\alpha^\mu (F_{\rho\theta} \square F^{\rho\theta} + \partial_\theta F^{\rho\theta} \partial^\beta F_{\rho\beta}) + F^{\nu\mu} \square F_{\alpha\nu} + \partial_\nu F^{\mu\nu} \partial^\beta F_{\beta\alpha}].$$

O tensor momento-energia simétrico pode então ser expresso como

$$\begin{aligned} T^{\alpha\mu} &= F^\alpha_\nu F^{\nu\mu} + \frac{1}{4} \eta^{\alpha\nu} F_{\rho\theta} F^{\rho\theta} + \frac{l^2}{2} \eta^{\alpha\mu} (F_{\rho\theta} \square F^{\rho\theta} + \partial_\theta F^{\rho\theta} \partial^\beta F_{\rho\beta}) \\ &- l^2 (F^{\alpha\nu} \square F^\mu_\nu + F^{\mu\nu} \square F^\alpha_\nu + \partial_\beta F^{\alpha\beta} \partial_\nu F^{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (1.24)$$

O momento total do campo $P^\alpha = (\mathcal{E}, \mathbf{p})$, onde \mathcal{E} e \mathbf{p} são respectivamente, a energia e o trimomento totais do campo, como de ordinário, é dado por

$$P^\alpha = \int d^3\mathbf{x} T^{0\alpha}. \quad (1.25)$$

No caso eletrostático, as equações (1.24) e (1.25) nos fornecem a seguinte expressão para a energia*

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int \{ \mathbf{E}^2 - l^2 [(\nabla \cdot \mathbf{E})^2 + 2\mathbf{E} \cdot \nabla^2 \mathbf{E}] \} d^3\mathbf{x}. \quad (1.26)$$

Da identidade vetorial $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$, obtemos prontamente que $\nabla^2 \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E})$, uma vez que $\nabla \times \mathbf{E} = 0$. Porém, $\nabla \cdot [(\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E}] = \mathbf{E} \cdot \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) + (\nabla \cdot \mathbf{E})^2$. Utilizando este resultado e supondo que $\mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{E}$ se anule no infinito mais rapidamente que $\frac{1}{r^2}$, encontramos que a equação (1.26) pode ser colocada sob a forma

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int [\mathbf{E}^2 + l^2 (\nabla \cdot \mathbf{E})^2] d^3\mathbf{x}, \quad (1.27)$$

que é obviamente positiva.

Conforme vimos na Seção 1.1, o potencial eletrostático de uma carga pontual é dado por $V(r) = \frac{e}{4\pi} \frac{1-e^{-r/l}}{r}$, o qual tende ao valor finito $\frac{e}{4\pi l}$ quando r se aproxima de zero. Lembrando agora que $\mathbf{E} = -\nabla V$, obtemos a expressão para o campo eletrostático devido a carga pontual em questão:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{e}{4\pi} \left[\frac{1 - e^{-r/l}}{r^2} - \frac{e^{-r/l}}{lr} \right] \hat{\mathbf{r}}. \quad (1.28)$$

*Em nossa convenção, $F^{0i} = -E^i$ e $F^{ij} = \epsilon^{ijk} B_k$.

Substituindo (1.28) em (1.27) e realizando a integração da expressão resultante, encontramos que a energia para os campos de uma carga pontual é dada por $\frac{e^2}{2l}$. Concluimos, assim, que ao contrário da eletrodinâmica de Maxwell, a eletrodinâmica de ordem mais alta exibe um valor finito para a energia em todo o espaço. Evidentemente, o momento do campo é zero neste caso. As expressões para a energia e momento totais dos campos não são muito iluminativas e por esta razão não serão mostradas aqui.

Capítulo 2

Um roteiro simples para a obtenção das equações de campo da eletrodinâmica com derivadas de ordem mais alta

Neste capítulo vamos mostrar como obter as equações de campo da eletrodinâmica regularizada generalizando-se as leis da magnetostática de modo a torná-las consistentes com a relatividade especial. Esta mesma rota que leva à eletrodinâmica com *cutoff*, leva também à eletrodinâmica de Maxwell desde que partamos da magnetostática de Maxwell em vez daquela relacionada à eletrodinâmica regularizada. Na verdade, uma mesma e única rota conduz a duas eletrodinâmicas marcantes: a de Maxwell e a de Podolsky.

2.1 A magnetostática da eletrodinâmico regularizada

Suponhamos que em um certo mundo hipotético o campo magnético elementar $d\mathbf{B}$ no ponto P , devido a um elemento de corrente $I d\mathbf{L}$ (vide a Figura 2.1), seja dado por

$$d\mathbf{B} = \frac{I d\mathbf{L}}{4\pi} \times \left(\frac{1 - e^{-R/l}}{R^2} - \frac{e^{-R/l}}{lR} \right) \frac{\mathbf{R}}{R}, \quad (2.1)$$

onde l é uma constante com dimensão de comprimento e, como de hábito, $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Observe que para $\frac{R}{l} \gg 1$, a equação (2.1) se reduz a

$$d\mathbf{B} \approx \frac{Id\mathbf{L}}{4\pi R^2} \times \frac{\mathbf{R}}{R},$$

que, como era esperado, é uma lei do inverso do quadrado. Certamente, as modificações da equação (2.1) com relação à correspondente equação de Maxwell só serão sentidas em pequenas distâncias, ou seja, $\frac{R}{l} \ll 1$. De fato, nesta situação $d\mathbf{B} \approx \frac{Id\mathbf{L}}{4\pi} \times \left(\frac{1}{l^2}\right) \frac{\mathbf{R}}{R}$.

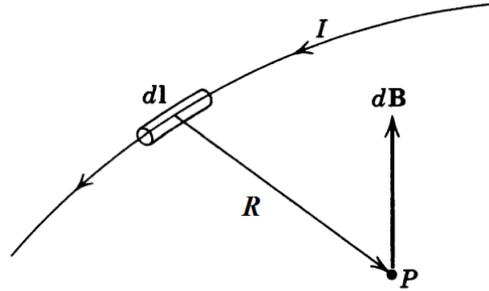


Figura 2.1: Campo magnético elemental devido ao elemento de corrente $Id\mathbf{L}$.

Supondo então que seja válido o *princípio de superposição*, podemos escrever a lei básica dada pela equação (2.1) sob a forma geral

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3\mathbf{r}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \left(\frac{1 - e^{-R/l}}{R^2} - \frac{e^{-R/l}}{lR} \right) \frac{\mathbf{R}}{R},$$

onde $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ é a densidade de corrente estacionária.

Como de praxe, podemos agora determinar as equações de campo para a magnetostática. Para isto, notemos que a equação precedente pode ser reescrita como

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi} \int d^3\mathbf{r}' \nabla \left[\frac{1 - e^{-R/l}}{R} \right] \times \mathbf{j}(\mathbf{r}'), \quad (2.2)$$

onde ∇ age somente nas coordenadas \mathbf{r} . Usando a identidade $\nabla \times [f(r)\mathbf{C}] = \nabla f(r) \times \mathbf{C}$, onde \mathbf{C} é um vetor constante, podemos escrever a equação (2.2) como

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \int \frac{d^3\mathbf{r}'}{4\pi} \left[\frac{1 - e^{-R/l}}{R} \right] \mathbf{j}(\mathbf{r}'), \quad (2.3)$$

ou seja,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}), \quad (2.4)$$

com

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \equiv \int \frac{d^3\mathbf{r}'}{4\pi} \left[\frac{1 - e^{-R/l}}{R} \right] \mathbf{j}(\mathbf{r}'). \quad (2.5)$$

Da equação (2.4) concluímos prontamente que

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.6)$$

Por outro lado, tomando o rotacional da equação (2.3), obtemos

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \int d^3\mathbf{r}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \left[\frac{1 - e^{-R/l}}{4\pi R} \right] - \int d^3\mathbf{r}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \nabla^2 \left[\frac{1 - e^{-R/l}}{4\pi R} \right]. \quad (2.7)$$

Usando o fato que

$$\nabla f(R) = -\nabla' f(R), \quad (\nabla' \text{ age somente nas coordenadas } \mathbf{r}')$$

podemos escrever a primeira integral do lado direito da equação (2.7) como:

$$\begin{aligned} \int d^3\mathbf{r}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \left[\frac{1 - e^{-R/l}}{4\pi R} \right] &= - \int d^3\mathbf{r}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \left[\frac{1 - e^{-R/l}}{4\pi R} \right] \\ &= \int d^3\mathbf{r}' \left[\frac{1 - e^{-R/l}}{4\pi R} \right] \nabla' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \\ &= 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

já que para fenômenos magnéticos estacionários $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$. Por outro lado, apelando para a identidade $\nabla^2 \frac{e^{-R/l}}{R} = \frac{e^{-R/l}}{Rl^2} - 4\pi \delta^3(\mathbf{R})$ [20], podemos reescrever a segunda integral do lado direito da equação (2.7) sob a forma:

$$\int d^3\mathbf{r}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \nabla^2 \left[\frac{1 - e^{-R/l}}{4\pi R} \right] = - \int d^3\mathbf{r}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \frac{e^{-R/l}}{4\pi Rl^2}. \quad (2.9)$$

Segue-se, então, que

$$\nabla \times \mathbf{B} = \int d^3\mathbf{r}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \frac{e^{-R/l}}{4\pi Rl^2}. \quad (2.10)$$

Tomando o laplaciano da equação (2.10), obtemos finalmente:

$$\begin{aligned} \nabla^2 [\nabla \times \mathbf{B}] &= \int d^3\mathbf{r}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \frac{e^{-R/l}}{4\pi Rl^2} - \int d^3\mathbf{r}' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{l^2} \delta^3(\mathbf{R}) \\ &= \frac{1}{l^2} \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) - \frac{1}{l^2} \mathbf{j}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Portanto,

$$[1 - l^2 \nabla^2] \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}(\mathbf{r}). \quad (2.12)$$

As equações (2.6) e (2.12) são as leis fundamentais da magnetostática da eletrodinâmica regularizada.

2.2 Generalização da magnetostática da eletrodinâmica regularizada via relatividade especial

Suponhamos agora que os físicos do mundo hipotético mencionado na seção anterior só estejam familiarizados, no que tange ao eletromagnetismo, com a magnetostática. Em outras palavras, eles sabem calcular o campo magnético gerado por uma corrente estacionária. Apesar, no entanto, do parco conhecimento de eletromagnetismo desta comunidade científica, seus membros possuem, como compensação, um profundo conhecimento sobre relatividade restrita. Certo dia, um brilhante e engenhoso físico desta comunidade, extremamente impressionado por um livro que acabara de ler sobre o papel das simetrias na física, resolve generalizar as leis da magnetostática de modo a torná-las consistentes com a relatividade restrita. Como um hábil relativista, ele sabe, com segurança, que deverá escrever as suas equações de campo em roupagem tensorial quadri-dimensional em vez de tri-dimensional. Inicia nosso amigo então seu trabalho, reescrevendo a equação (2.12) sob a forma

$$[1 + l^2 \partial_i \partial^i] [-\epsilon^{lmn} \partial_m B_n] = j^l. \quad (2.13)$$

A bem da simplicidade, ele define as quantidades

$$F^{ab} = \epsilon^{abc} B_c, \quad (2.14)$$

e nota que devido a antissimetria de ϵ^{abc} , $F^{ab} = -F^{ba}$ e $F^{ab} = 0$ se $a = b$. Um cálculo trivial lhe mostra que a equação (2.14) é equivalente a

$$B^i = -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F_{jk}, \quad (2.15)$$

o que lhe permite escrever explicitamente as componentes de \mathbf{B} em função da quantidade F^{ab} :

$$\begin{aligned} B_1 &= -B^1 = F_{23} = F^{23} \\ B_2 &= -B^2 = -F_{13} = -F^{13} \\ B_3 &= -B^3 = F_{12} = F^{12}. \end{aligned}$$

Assim, nosso físico sagaz consegue, através de manipulações algébricas convenientes, expressar as leis da magnetostática de seu planeta numa forma mais elegante e ao mesmo tempo mais apropriada para uma futura generalização. Em sua nova roupagem, estas equações podem ser escritas como se segue:

$$\frac{1}{2}\partial_i\epsilon^{ijk}F_{jk} = 0, \quad (2.16)$$

$$[1 + l^2\partial_i\partial^i]\partial_m F^{ml} = j^l, \quad (2.17)$$

$$- [1 + l^2\partial_i\partial^i]\partial_m F^{lm} = j^l. \quad (2.18)$$

Nosso sábio amigo exige agora que as equações (2.16), (2.17) e (2.18) sejam invariantes sob transformações de Lorentz. Com este intuito ele supõe que os F^{ab} sejam as componentes tipo espaço-espaço de um tensor de *rank* 2. Consequentemente, as equações em pauta serão explicitamente covariantes se os índices espaciais forem simplesmente substituídos por índices tipo espaço-tempo. Generalizando covariantemente as equações (2.17) e (2.18), ele obtém:

$$(1 + l^2\Box)\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad (2.19)$$

e

$$-(1 + l^2\Box)\partial_\mu F^{\nu\mu} = j^\nu, \quad (2.20)$$

com $j^\nu = (\rho, \mathbf{j})$. Comparando as equações (2.19) e (2.20), ele supõe então, tentativamente, que $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ em todos os referenciais de Lorentz*, e escreve:

$$(1 + l^2\Box)\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad (2.21)$$

*Uma demonstração formal da antissimetria do tensor $F^{\mu\nu}$ pode ser encontrada na Ref.[21].

com $F^{\mu\nu}$ antissimétrico. Procedendo de maneira análoga, ele generaliza covariantemente a equação (2.16), e obtém:

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \quad (2.22)$$

onde $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$.

As equações (2.21) e (2.22) são as equações de campo da eletrodinâmica regularizada.

2.3 Interpretação física das equações de campo da eletrodinâmica com derivadas superiores

Fazendo $\nu = 0$ na equação (2.21), obtemos

$$(1 + l^2 \square) \partial_i F^{i0} = j^0.$$

As componentes tipo espaço-tempo F^{i0} introduzidas pela generalização covariante ainda precisam ser interpretadas fisicamente. Isto não nos impede, certamente, de batizar estas quantidades que ainda não conhecemos. Seja, então, $F^{i0} \equiv E^i$. Logo,

$$(1 + l^2 \square) \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho. \quad (2.23)$$

Se $\nu = j$, a equação (2.21) se reduz a

$$(1 + l^2 \square) \left(-\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{B} \right) = \mathbf{j}. \quad (2.24)$$

A equação (2.22) fornece, como de hábito,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.25)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \quad (2.26)$$

Comparando estas equações com as correspondentes equações de Maxwell, vemos que o termo com derivadas mais altas altera apenas as equações inhomogêneas. Em outras palavras, ele só modifica as leis de Coulomb-Gauss

e de Ampère-Maxwell, alterando o relacionamento do campo eletromagnético com sua fonte.

Cabe-nos agora discutir a natureza do campo \mathbf{E} . Conforme explanamos anteriormente, nosso físico que conhecia somente a magnetostática e a relatividade especial pode prever a existência do campo \mathbf{E} . Mas, sem sombra de dúvida, ele vai se perguntar: Este campo é observável? Em caso afirmativo, como irei reconhecê-lo quando vê-lo? Como nosso esperto amigo conhece a magnetostática, ele imagina uma partícula de massa m e carga q movendo-se com velocidade \mathbf{v} através de um laboratório onde existe um campo magnetostático \mathbf{B} , e escreve a segunda lei de Newton como

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

que, em termos do tempo próprio, torna-se

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} &= q\gamma(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ &= q(\mathbf{u} \times \mathbf{B}), \end{aligned} \quad (2.27)$$

onde $d\tau^2 = dt^2 - d\mathbf{r}^2$, $\frac{dt}{d\tau} = \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ e $u^\mu = \frac{dx^\mu}{dt} = \gamma(1, \mathbf{v})$; τ é o tempo próprio e u^ν é a quadrivelocidade. A equação (2.27) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \frac{dp^i}{d\tau} &= q\epsilon^{ijk}u_jB_k \\ &= -\frac{q}{2}\epsilon^{ijk}\epsilon_{kab}u_jF^{ab} \\ &= \frac{q}{2}(\delta_a^i\delta_b^j - \delta_b^i\delta_a^j)u_jF^{ab} \\ &= qu_jF^{ij}, \end{aligned}$$

que tem por generalização covariante a expressão

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = qu_\nu F^{\mu\nu}. \quad (2.28)$$

Se $\mu = 0$, esta equação se reduz a

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}, \quad (2.29)$$

onde \mathcal{E} é a energia da partícula; por outro lado, se $\mu = i$, a equação (2.29) se torna

$$\begin{aligned}\frac{dp^i}{dt} &= q[F^{i0} + v_j F^{ij}] \\ &= q[E^i + \epsilon^{ijk} v_j B_k] \\ &= q[E^i + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})^i],\end{aligned}$$

que nada mais é que a i -ésima componente de

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (2.30)$$

A equação (2.30) é um caso particular da força de Lorentz da eletrodinâmica de Maxwell.

Nosso hipotético físico encontra nas equações (2.29) e (2.30) a fenomenologia que lhe permite observar e medir o campo \mathbf{E} assim como distingui-lo do campo \mathbf{B} . De fato, o novo campo se acopla à cargas elétricas, atua até mesmo sobre partículas estáticas e, ao contrário da interação magnética, é capaz de alterar a magnitude do momento da partícula e não somente sua direção.

Para concluir este capítulo, vamos determinar a expressão geral para a densidade de força. De acordo com a Ref.[19], a densidade de força, f^μ , é igual a

$$f^\mu = F^{\mu\nu} j_\nu,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}f^\mu &= (F^{0i} j_i, F^{k0} j_0 + F^{ki} j_i) \\ &= (\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}, \rho\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}).\end{aligned} \quad (2.31)$$

Esta expressão para a densidade de força é exatamente igual à da eletrodinâmica de Maxwell.

No próximo capítulo vamos deduzir as equações da eletrodinâmica regularizada a partir da eletrostática.

Capítulo 3

Começando na eletrostática e terminando na eletrodinâmica regularizada

Partindo da lei de força para a interação de duas cargas pontuais estáticas no contexto da eletrodinâmica de ordem superior, deduzimos novamente as equações de campo da eletrodinâmica com *cutoff*. O procedimento é semelhante ao do capítulo anterior: as leis da eletrostática são generalizadas de modo a tornarem-se consistentes com a relatividade especial. Analisando o procedimento do capítulo anterior, que tem como base a magnetostática, com o que iremos aqui desenvolver, que tem como suporte a eletrostática, concluímos que a eletrodinâmica regularizada ocupa uma posição completamente simétrica em relação a magnetostática e a eletrostática. Estes dois enfoques, que utilizam rotas alternativas mas conduzem ao mesmo resultado, ilustram claramente o alcance da exigência da invariância de Lorentz.

3.1 A eletrostática a partir da lei de força e do princípio de superposição

Imaginemos, para iniciar, que uma carga Q' , situada em \mathbf{r}' , exerça uma força sobre uma outra carga Q , situada em \mathbf{r} , que obedece a seguinte lei

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{QQ'}{4\pi} \left[\frac{1 - e^{-R/l}}{R^2} - \frac{e^{-R/l}}{Rl} \right] \hat{\mathbf{R}},$$

Por outro lado, como é bem conhecido, o campo elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ no ponto \mathbf{r} devido a uma carga Q situada em \mathbf{r}' é definido como a força $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ que atua sobre a carga teste Q dividida por esta carga, ou seja,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q'}{4\pi} \left[\frac{1 - e^{-R/l}}{R^2} - \frac{e^{-R/l}}{Rl} \right] \hat{\mathbf{R}}.$$

Admitindo agora que o campo elétrico obedeça ao *princípio de superposição*, conclui-se que o campo eletrostático devido a uma distribuição de cargas $\rho(\mathbf{r}')$ é dado por

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3\mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}')}{4\pi} \left[\frac{1 - e^{-R/l}}{R^2} - \frac{e^{-R/l}}{lR} \right] \hat{\mathbf{R}}. \quad (3.1)$$

Esta expressão para o campo eletrostático pode ser escrita, por sua vez, como o gradiente de um escalar:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}), \quad (3.2)$$

onde

$$V(\mathbf{r}) \equiv \int d^3\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi} \left[\frac{1 - e^{-R/l}}{R} \right].$$

A equação (3.2) fornece, como conseqüência

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0. \quad (3.3)$$

o que mostra que o campo eletrostático em estudo é conservativo.

Resta então a tarefa de determinar uma equação envolvendo a divergência do campo \mathbf{E} a fim de obter-se as leis fundamentais da eletrostática da eletrodinâmica regularizada. Tomando, com este intuito, o divergente da equação (3.1), obtém-se:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi} \left[\frac{1 - e^{-R/l}}{Rl^2} \right].$$

Tomando agora o laplaciano desta equação, encontra-se a equação que estava faltando, ou seja,

$$[1 - l^2 \nabla^2] \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}). \quad (3.4)$$

As equações (3.3) e (3.4) definem totalmente o campo eletrostático.

3.2 As equações de campo da eletrodinâmica regularizada

O próximo passo é tornar as equações de campo da eletrostática consistentes com a relatividade especial. Neste espírito, vamos escrever a equação (3.3) em roupagem tensorial. Para tanto, notemos que esta equação pode ser escrita, de início, como

$$-\varepsilon^{ijk} \partial_j E_k = 0,$$

ou, equivalentemente, como

$$\varepsilon^{ijk} \partial_j F_{0k} = 0, \quad (3.5)$$

onde as quantidades F^{0i} são definidas como

$$F^{0i} = -F_{0i} = -E^i = E_i.$$

Supondo agora que a lei do rotacional seja a equação para as componentes tipo espaço-espaço de uma equação manifestamente covariante (invariância sob transformações de Lorentz), podemos escrever prontamente que

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu F_{\alpha\beta} = 0, \quad (3.6)$$

onde $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ é um tensor completamente antissimétrico com $\varepsilon^{0123} = +1$.

Esta equação pode também ser escrita em termos do tensor dual como

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \quad (3.7)$$

A generalização covariante que utilizamos introduz obviamente as componentes F_{00} , F_{i0} e F_{ij} , as quais, neste estágio, ainda são desconhecidas. Observe que os F_{0i} não são mais necessariamente estáticos.

A próxima etapa é tornar a equação (3.4) covariante de Lorentz. O lado esquerdo desta equação pode ser reescrito, de início, como $[1 + l^2 \partial_i \partial^i] \partial_j E^i$. Se quisermos, porém, escrever a equação (3.4) em forma covariante de Lorentz, é preciso que identifiquemos a densidade de carga ρ com a componente zero de algum quadrivetor. Como fazer isto? A resposta é simples: Basta ter em conta que a carga elétrica é um escalar de Lorentz. De fato, sendo dq um escalar de Lorentz, segue-se que $\rho d^3\mathbf{x}$ ($= dq$) também o é. Mas, $d^4x' = |\det \frac{\partial x'}{\partial x}| d^4x$. Porém, para uma transformação de Lorentz, $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$, própria e ortócrona ($\det \Lambda = 1$ e $\Lambda_0^0 \geq 1$), que é o tipo de transformação que estamos considerando, $d^4x' = d^4x$; portanto, $d^4x = dx^0 d^3\mathbf{x}$ é também um escalar de Lorentz. Conseqüentemente, ρ transforma-se da mesma maneira que dx^0 , ou seja, a densidade de carga é a componente zero de um quadrivetor. Este quadrivetor é a densidade de corrente $j^\mu = (\rho, \mathbf{j})$. Segue-se que

$$[1 + l^2 \partial_i \partial^i] \partial_j F^{j0} = j^0,$$

cuja generalização covariante é

$$[1 + l^2 \square] \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad (3.8)$$

Seja, então, uma partícula de massa m e carga Q em repouso em um laboratório onde existe um campo eletrostático \mathbf{E} . A segunda lei de Newton nos permite escrever

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = Q\mathbf{E}.$$

Em termos do tempo próprio, esta equação pode ser reescrita como

$$\frac{dp^i}{d\tau} = Qu_0 F^{i0},$$

cuja generalização covariante é

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = Qu_\nu F^{\mu\nu}. \quad (3.9)$$

Multiplicando agora a equação (3.9) por $p_\mu = mu_\mu$, onde m é a massa de repouso, e lembrando que $p_\mu p^\mu = m^2$, obtemos

$$u_\mu u_\nu F^{\mu\nu} = 0$$

Utilizando este resultado, pode-se mostrar facilmente que $F^{\mu\nu}$ é um tensor antissimétrico [21]. Como $F^{\mu\nu}$ é antissimétrico, ele tem apenas seis componentes independentes, três das quais já foram especificadas. A bem da simplicidade, vamos batizar estas componentes desconhecidas como se segue

$$B^i = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk} F_{jk}, \quad (3.10)$$

o que implica em

$$F^{ab} = \varepsilon^{abc} B_c. \quad (3.11)$$

É importante frisar que se estivéssemos apenas familiarizados com a eletrostática da eletrodinâmica regularizada e a relatividade especial poderíamos prever a existência do campo magnético \mathbf{B} , o qual naturalmente ainda precisaria ser interpretado fisicamente. Note, no entanto, que para $\mu = i$, a equação (3.9) torna-se

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (3.12)$$

enquanto que para $\mu = 0$, ela nos fornece

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = Q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}. \quad (3.13)$$

Assim, tendo sido capazes de prever o campo magnético \mathbf{B} usando unicamente nossos conhecimentos de eletrostática e relatividade especial, podemos agora, utilizando judiciosamente as equações (3.12) e (3.13), observar,

medir e distinguir o campo \mathbf{B} do campo \mathbf{E} . O novo campo acopla-se à carga em movimento, não atua sobre uma partícula carregada estática e é capaz de mudar somente a direção do momento.

As equações (3.7) e (3.8) são as equações de campo da eletrodinâmica de ordem mais alta.

Capítulo 4

O momento magnético anômalo do elétron na eletrodinâmica regularizada

No Capítulo 1 mostramos que os efeitos do termo de ordem mais alta só se fazem sentir para pequenas distâncias, ou seja, $r \ll l$. Se nos reportarmos, porém, à afirmação de Feynman citada na Apresentação (*The test of all knowledge is experiment* [1]), devemos, sem sombra de dúvida, procurar um limite experimental para o *cutoff*. Certamente, só assim viremos a ter uma noção real sobre o efeito do regulador na eletrodinâmica de Maxwell. Por outro lado, um dos grande sucessos da eletrodinâmica quântica (QED) é a notável concordância existente entre o valor por ela previsto para o momento magnético anômalo do elétron e o valor observado (cerca de uma parte em 10^{10}). Utilizando este fantástico acordo entre a teoria e a experiência, vamos determinar um limitante para o regulador l , computando o fator de forma $F_2(q^2)$ relativo à eletrodinâmica de ordem mais alta no limite $q \rightarrow 0$. Uma comparação com os resultados teórico e experimental relativos a QED fornece um limite superior para l .

4.1 Cálculo do momento magnético anômalo do elétron na eletrodinâmica de ordem superior

Como é bem conhecido, o momento magnético anômalo do elétron é obtido calculando-se a correção de vértice para o espalhamento do elétron por um campo externo como mostrado na Figura 4.1. Para um elétron submetido a um campo eletromagnético estático e no limite $q \rightarrow 0$, o fator giromagnético é dado por

$$g = 2 [1 + F_2(0)], \quad (4.1)$$

onde o fator de forma $F_2(0)$ nada mais é que o momento magnético anômalo do elétron [22].

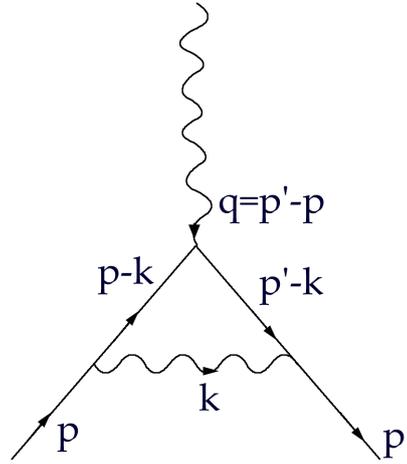


Figura 4.1: Diagrama de Feynman para o espalhamento de um elétron por um campo eletromagnético externo

No caso da QED, onde o coeficiente de $\eta_{\mu\nu}$ no propagador é igual a $-\frac{1}{k^2}$,

$$F_2(0) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \delta(1 - \sum_i \alpha_i) \frac{\alpha_1}{\alpha_2 + \alpha_3};$$

já no caso da eletrodinâmica regularizada o coeficiente de $\eta_{\mu\nu}$ no propagador é dado por [vide equação (1.19)]

$$-\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2 - \frac{1}{l^2}},$$

e, conseqüentemente, o fator de forma para esta eletrodinâmica pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
F_2^l(0) &= \frac{\alpha}{\pi} \int d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \delta(1 - \sum_i \alpha_i) \left[\frac{\alpha_1}{\alpha_2 + \alpha_3} - \frac{m^2 \alpha_1 (\alpha_2 + \alpha_3)}{m^2 (\alpha_2 + \alpha_3)^2 + \frac{\alpha_1}{l^2}} \right] \\
&= \frac{\alpha}{\pi} \int d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \delta(1 - \sum_i \alpha_i) \times \\
&\quad \left[\frac{\alpha_1}{\alpha_2 + \alpha_3} - \frac{\alpha_1^2 (\alpha_2 + \alpha_3)}{(\alpha_2 + \alpha_3)^2 + \frac{\alpha_1}{\epsilon}} \right], \tag{4.2}
\end{aligned}$$

onde $\epsilon \equiv \frac{1}{l^2 m^2}$, sendo m a massa do elétron.

Integrando primeiro em α_3 , obtemos

$$F_2^l(0) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{1-\alpha_1} d\alpha_2 \left[\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1} - \frac{\alpha_1(1-\alpha_1)}{(1-\alpha_1)^2 + \frac{\alpha_1}{\epsilon}} \right].$$

Integrando agora em α_2 , resulta

$$F_2^l(0) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 d\alpha_1 (1-\alpha_1) \left[\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1} - \frac{\alpha_1(1-\alpha_1)}{(1-\alpha_1)^2 + \frac{\alpha_1}{\epsilon}} \right],$$

ou, equivalentemente,

$$F_2^l(0) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 d\alpha_1 \frac{\alpha_1^2}{\alpha_1 + \epsilon(1-\alpha_1)^2}. \tag{4.3}$$

Por outro lado [23],

$$\begin{aligned}
\int dx \frac{x^2}{\epsilon x^2 + x(1-2\epsilon) + \epsilon} &= \frac{x}{\epsilon} - \frac{1-2\epsilon}{2\epsilon^2} \ln [\epsilon x^2 + x(1-2\epsilon) + \epsilon] \\
&\quad + \frac{1+2\epsilon^2-4\epsilon}{2\epsilon^2} \int \frac{dx}{\epsilon x^2 + x(1-2\epsilon) + \epsilon},
\end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{\epsilon x^2 + x(1-2\epsilon) + \epsilon} = \frac{1}{\sqrt{1-4\epsilon}} \ln \left| \frac{2\epsilon x + 1 - 2\epsilon - \sqrt{1-4\epsilon}}{2\epsilon x + 1 - 2\epsilon + \sqrt{1-4\epsilon}} \right|.$$

Conseqüentemente,

$$F_2^l(0) = \frac{\alpha}{\pi} \left[\frac{1}{\epsilon} + \frac{1-2\epsilon}{2\epsilon^2} \ln \epsilon + \frac{1+2\epsilon^2-4\epsilon}{2\epsilon^2 \sqrt{1-4\epsilon}} \ln \frac{1+\sqrt{1-4\epsilon}}{1-\sqrt{1-4\epsilon}} \right]. \tag{4.4}$$

4.2 Um limite para o regularizador da eletrodinâmica de ordem superior

Se $\epsilon \ll 1$,

$$\begin{aligned} \frac{1 - 4\epsilon + 2\epsilon^2}{2\epsilon^2\sqrt{1 - 4\epsilon}} &\approx \frac{1 - 2\epsilon + 2\epsilon^4}{2\epsilon^2}, \\ \ln \frac{1 + \sqrt{1 - 4\epsilon}}{1 - \sqrt{1 - 4\epsilon}} &\approx \ln[1 - (\epsilon + \epsilon^2 + 2\epsilon^3 + 5\epsilon^4)] - \ln \epsilon \\ &\quad - \ln(1 + \epsilon + 2\epsilon^2 + 5\epsilon^3 + 14\epsilon^4) \\ &\approx -[2\epsilon + 3\epsilon^2 + \frac{20\epsilon^3}{3} + \frac{35\epsilon^4}{2} + \ln \epsilon]. \end{aligned}$$

Em decorrência, a equação (4.4) assume a forma

$$F_2^l(0) \approx \frac{\alpha}{2\pi} \left[1 - \frac{2}{3}(lm)^2 - 2 \left(\frac{25}{12} + \ln(lm) \right) (lm)^4 \right]. \quad (4.5)$$

O primeiro termo desta equação foi obtida pela primeira vez por Schwinger [24], enquanto que o segundo é a mais importante correção associada com o parâmetro l da eletrodinâmica regularizada.

Por outro lado, sabe-se que para a QED, $F_2^{QED}(0)$ calculado até a ordem α^8 é dado por [25]

$$F_2^{QED}(0) = 0,001\ 159\ 652\ 140\ (28),$$

enquanto que o resultado encontrado experimentalmente $F_2^{EXP}(0)$ é ainda mais preciso [26]:

$$F_2^{EXP}(0) = 0,001\ 159\ 652\ 185\ 9\ (38).$$

Conseqüentemente, o valor teórico previsto pela QED para o momento magnético anômalo do elétron concorda com o valor observado em até uma parte em 10^{10} . Portanto, a correção mais importante introduzida pela eletrodinâmica regularizada, ou seja, $\frac{2}{3}(lm)^2$, deve ser menor que 10^{-10} , ou seja,

$$\frac{2}{3}(lm)^2 < 10^{-10}$$

Lembrando que $m = 0,510\ 998\ 918\ (44)\ MeV$ [26], concluimos que o regularizador da eletrodinâmica com *cutoff* deve ser menor que

$$l < 4,7 \times 10^{-18}\text{m}.$$

Capítulo 5

A constante de acoplamento da eletrodinâmica regularizada via uma experiência de laboratório

Usando os resultados de uma experiência de laboratório que visava originalmente detectar desvios na lei de Coulomb [27], vamos determinar neste capítulo um outro limitante para l . O experimento aludido é muito simples, e consiste em aferir a diferença de potencial entre duas cascas esféricas concêntricas, onde a casca externa é mantida em um potencial constante. Os cálculos necessários para obter este limitante, ao contrário daqueles envolvidos na obtenção do momento magnético anômalo do elétron, são puramente clássicos.

5.1 Cálculo do potencial no interior de uma esfera uniformemente carregada no contexto da eletrodinâmica regularizada

Considere, para fixar idéias, uma esfera de raio r' com uma carga Q uniformemente distribuída em sua superfície. Num ponto qualquer \mathbf{r} em seu interior, onde o vetor \mathbf{r} tem origem no centro da esfera de raio r' , o potencial pode ser calculado pela expressão

$$V(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}', \quad (5.1)$$

onde a função de Green

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1 - e^{-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{l}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

foi determinada no Capítulo 1.

Utilizando agora a figura 5.1, podemos reescrever a equação (5.1) como

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q}{8\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{1 - e^{-\frac{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta}}{l}}}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta}} d(\cos\theta),$$

que através da mudança de variável $u = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta}$ se reduz a

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q}{8\pi rr'} \int_{r'-r}^{r'+r} (1 - e^{-\frac{u}{l}}) du. \quad (5.2)$$

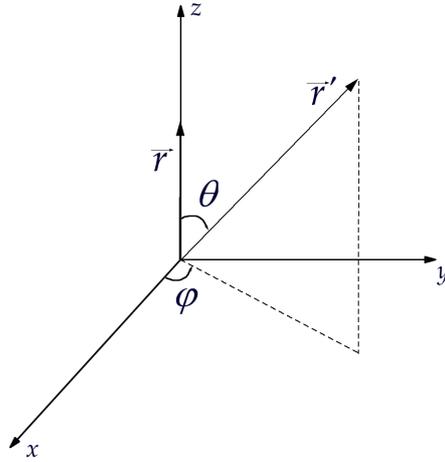


Figura 5.1: Geometria para o cálculo de $V(\mathbf{r})$

Assim, concluímos que

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q}{8\pi rr'} [2r + l(e^{-\frac{r'+r}{l}} - e^{-\frac{r'-r}{l}})]. \quad (5.3)$$

5.2 Cálculo da diferença de potencial entre as cascas esféricas

Vamos computar agora a diferença de potencial entre as duas cascas esféricas mostradas na Figura 5.2, supondo que a casca externa seja mantida a um potencial V_0

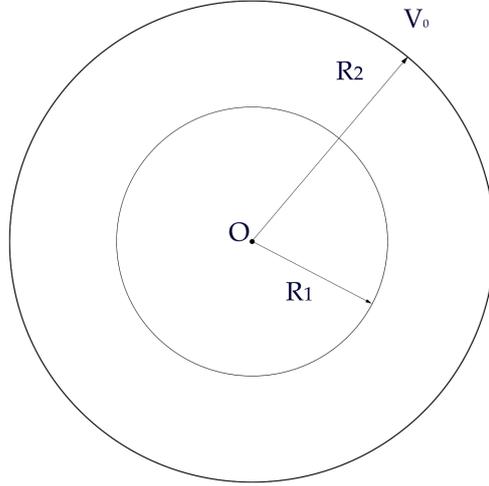


Figura 5.2: Geometria para a determinação do potencial

Fazendo $r' = R_2 = r$ na equação (5.3), obtemos prontamente

$$V(R_2) = \frac{Q}{8\pi R_2^2} [2R_2 + l(e^{-\frac{2R_2}{l}} - 1)].$$

Por outro lado, tendo em conta que $V(R_2) = V_0$, concluimos que

$$Q = \frac{8\pi R_2^2 V_0}{2R_2 + l(e^{-\frac{2R_2}{l}} - 1)}.$$

Portanto,

$$V(\mathbf{r}) = \frac{V_0 R_2}{2R_2 + l(e^{-\frac{2R_2}{l}} - 1)} \frac{2r + l(e^{-\frac{R_2+r}{l}} - e^{-\frac{R_2-r}{l}})}{r}. \quad (5.4)$$

Porém,

$$V(R_1) = \frac{V_0 R_2}{2R_2 + l(e^{-\frac{2R_2}{l}} - 1)} \frac{2R_1 + l(e^{-\frac{R_2+R_1}{l}} - e^{-\frac{R_2-R_1}{l}})}{R_1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{V} &= \frac{V(R_2) - V(R_1)}{V(R_2)} \\ &= 1 - \frac{R_2 \left[2R_1 + l \left(e^{-\frac{R_2+R_1}{l}} - e^{-\frac{R_2-R_1}{l}} \right) \right]}{R_1 \left[2R_2 + l \left(e^{-\frac{2R_2}{l}} - 1 \right) \right]}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

5.3 Um limitante para l via experimento de Plimpton e Lawton

A equação (5.5) é uma equação transcendental e não pode ser resolvida analiticamente. Para resolvê-la, utilizamos um software de computador alimentado com os dados do experimento de Plimpton e Lawton ($R_1 = 61$ cm, $R_2 = 76$ cm e $\Delta V/V = -10^6/3000$) e obtivemos que o regularizador l da eletrodinâmica de ordem superior deve ser menor que

$$5,1 \times 10^{-8} \text{ cm}$$

Observações finais

Vimos, nos Capítulos 2 e 3, o papel poderoso desempenhado pelos princípios de simetria na Física. Especificamente, pela invariância de Lorentz, que é uma simetria cinemática ou geométrica. Tal simetria não determina sozinha a estrutura dos campos de interação, mas ajuda a mapear estas interações de um espaço para outro, ou seja, do espaço tridimensional para o espaço quadri-dimensional. As simetrias dinâmicas, em contraste, determinam as interações. Exemplos célebres são fornecidas pela covariância geral e a invariância de gauge. A primeira determina o campo gravitacional a partir da teoria invariante de Lorentz, enquanto que a última fixa a estrutura das interações fundamentais a partir do conhecimento das Lagrangeanas para o campo livre e dos grupos de simetria. No nosso caso, onde no Capítulo 2 partimos da equação (2.3) enquanto que no Capítulo 3 iniciamos pela equação (3.1), a invariância estática de gauge já é, desde o princípio, inerente ao método utilizado.

No Capítulo 2, a exigência de invariância de Lorentz levou-nos do referencial onde o campo é produzido por uma corrente estacionária, para algum outro referencial inercial onde o observador vê passar o aparelho onde circula a citada corrente, introduzindo assim, explicitamente, fenômenos dependentes do tempo. No Capítulo 3, por sua vez, esta mesma invariância nos levou do referencial onde o campo é gerado por uma distribuição estática de carga, para um outro referencial inercial onde o observador vê esta distribuição estática por ele passar, dando origem a fenômenos explicitamente dependentes do tempo.

É importante frisar que esta mesma rota que leva à eletrodinâmica regularizada, leva também às eletrodinâmicas de Maxwell e Proca. Na verdade, acreditamos que eletrodinâmicas lineares, ou seja, aquelas onde os campos obedecem ao princípio de superposição, podem ser deduzidas

lançando-se mão do caminho descrito neste trabalho - seja partindo da eletrostática, seja da magnetostática. Em resumo, uma única rota leva a várias eletrodinâmicas lineares. É digno de nota que estas eletrodinâmicas são simétricas em relação às respectivas eletrostática e magnetostática. Isto não é de causar espície, já que a exigência de invariância de Lorentz, quer da eletrostática, quer da magnetostática, permite que se chegue às equações de campo da respectiva eletrodinâmica linear. Realmente, o que conta, é que a teoria obedeça a simetria de Lorentz.

Vale a pena mencionar, como complemento desta análise, os trabalhos extremamente interessantes de Kobe [28] e Newenschwander e Turner [29] sobre a questão da possibilidade de derivar-se as equações de Maxwell a partir da eletrostática (magnetostática) e das leis da relatividade especial.

O limitante para l encontrado no Capítulo 4 define um comprimento $l_0 = 4,7 \times 10^{-18} \text{m}$, que seria a dimensão característica de uma possível teoria efetiva baseada na eletrodinâmica quântica que levasse em conta alguns dos fenômenos que ocorrem em energias mais elevadas que as descritas pela eletrodinâmica quântica. Comprimentos tão pequenos quanto l_0 , no entanto, estão fora do domínio de validade da eletrodinâmica clássica. Por sua vez, o valor encontrado para l_0 no Capítulo 5 é razoável se olharmos a eletrodinâmica regularizada como uma teoria clássica. Experimentos de laboratório mais atualizados, certamente, fornecerão um valor mais preciso para l_0 .

Para finalizar, vamos comentar, de passagem, sobre as investigações que pretendemos fazer no âmbito da eletrodinâmica regularizada. Conforme foi demonstrado por Ignatiev e Joshi [30], monopólos magnéticos de Dirac não existem na eletrodinâmica de Proca. Elas também não existem no contexto da teoria de Cremmer-Scherk-Kalb-Ramond [31,32]. Ambas as teorias contém bósons vetoriais massivos. A idéia é verificar se estes monopólos poderiam existir no contexto da eletrodinâmica regularizada que, apesar de conter um bóson vetorial massivo, é uma teoria de gauge. Até onde sabemos, a eletrodinâmica regularizada é a única teoria de gauge

conhecida que é massiva. Um outro ponto, que nos interessa sobremaneira, é a questão da renormalizabilidade da teoria eletrodinâmica com *cutoff*. Conforme vimos na seção (1.3), a parte independente de gauge do propagador apresenta um bom comportamento assintótico, ou seja, ela tende a zero quando $k \rightarrow \infty$, como os propagadores usuais. Este fato sugere que a teoria deve ser renormalizável. Pretendemos investigar se esta hipótese é ou não verdadeira utilizando um enfoque semelhante àquele proposto por Boulware [33] para o estudo da renormalizabilidade das teorias de gauge massivas não abelianas, o qual utiliza a técnica de integração funcional.

Referências Bibliográficas

- [1] R. Feynman, R. Leighton, and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, v.1 (Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1966).
- [2] D. Boulware and S. Deser, Phys. Rev. Lett. **63**, 2319 (1989).
- [3] G. Chibisov, Sov. Phys. Usp. **19**, 624 (1976).
- [4] S. Carrol, G. Field, and R. Jackiw, Phys. Rev. D **41**, 1231 (1990).
- [5] D. Colladay and V. Kostelecký, Phys. Rev. D **55**, 6760 (1977); *ibid.* **58**, 116002 (1998).
- [6] H. Lorentz, *The Theory of Electrons*, 2.ed (Dover, New York, 1952).
- [7] J. Frenkel, Phys. Rev. E **54**, 5859 (1996).
- [8] J. Frenkel and R. Santos, Int. J. Mod. Phys. B **13**, 315 (1999).
- [9] B. Podolsky and P. Schwed, Rev. Mod. Phys **20**, 40 (1948)
- [10] A. Accioly, S. Dias, and D. Guimarães, *Limits on the coupling constant of higher-derivative electromagnetism* (submetido à publicação na Physical Review D).
- [11] A. Accioly, I. Vancea, and D. Guimarães, *Constructing higher-derivative electromagnetism from first principles* (submetido à publicação no International Journal of Theoretical Physics).
- [12] F. Byron, Jr. and R. Fuller, *Mathematics of Classical and Quantum Physics*, v.2 (Addison-Wesley Publishing Company, New York, 1970).
- [13] Jon Mathews and R. Walker, *Mathematical Methods of Physics*, (W. A. Benjamin, Inc., New York, 1965).
- [14] J. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 2. ed. (Wiley, New York, 1998).
- [15] E. Moniz and D. Sharp, Phys. Rev. D **10**, 1133 (1974).
- [16] K. Stelle, Phys. Rev. D **16**, 852 (1977).
- [17] S. Deser and R. Jackiw, Phys. Lett. B **451**, 73 (1999).
- [18] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, v.1 (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).

- [19] A. Accioly, Am. J. Phys. **65**, 882 (1997).
- [20] A. Accioly and H. Mukai, Braz. J. Phys. **28**, 35 (1998).
- [21] A. Accioly, J. Helayël, and E. Scatena, *Proca Electrodynamics from First Principles* (submetido à publicação no European Journal of Physics).
- [22] C. Itzykson and J. -B. Zuber, *Quantum Field Theory*. (McGraw-Hill, New York, 1980).
- [23] H. Dwight, *Table of Integrals and Other Mathematical Data*, 4.ed. (Collier-MacMillan Canada, Ltd., Toronto, Ontario, 1969).
- [24] W. Greiner and J. Reinhardt, *Quantum Electrodynamics* (Springer, Berlin, 1997).
- [25] T. Kinoshita, *Quantum Electrodynamics* (World Scientific, Singapore, 1990).
- [26] W. -M. Yao, *et al.* (Particle Data Group), J. Phys. G **33**, 1 (2006)
- [27] S. Plimpton and W. Lawton, Phys. Rev. **50**, 1066 (1936).
- [28] D. Kobe, Am. J. Phys. **52**, 631 (1986).
- [29] D. Neuenschwander and B. Turner, Am. J. Phys. **60** , 35 (1991).
- [30] A. Ignatiev and G. Joshi, Phys. Rev. D **53**, 984 (1996)
- [31] C. Cremmer and J. Scherk, Nucl. Phys. B **72**, 117 (1974).
- [32] M. Kalb and P. Ramond, Phys. Rev. D **9**, 2273 (1974).
- [33] D. Boulware, Ann. Phys. **56**, 140 (1970).