

DISSERTAÇÃO DE
MESTRADO

Rotação do Plano de Polarização em Métricas em Rotação

CLAUDIA ISABEL AZUCENA DEL PILAR RIVASPLATA PAZ

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS-CBPF

RIO DE JANEIRO, MARÇO DE 2009

Dedicatória

A mi mamá Lolita y mi tía Maritza.

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradecer a minha família por ter-me apoiado sempre, por ter-me dado forças para eu seguir adiante com este objetivo sem ter que me preocupar por outra coisa. À minha linda mãe que me deu carinho e compreensão, a meu pai que me deu segurança e estabilidade durante toda a minha vida. Nunca acabarei de lhes agradecer.

Obrigada também a meu eterno parceiro que me deu forças em horas de ansiedade e por ter acreditado em mim em tempos de pouca fé em mim mesma. Eu te amo Alfredo.

Agradeço ao professor José Salim por toda a paciência e bom humor durante nossas sessões, e por todos os ensinamentos com os quais consegui concluir este trabalho.

A todos meus amigos que compartilharam comigo horas de dispersão, começando pelos meus companheiros de sala Cassio, Enrique, Josefine à pequena colônia peruana aqui no CBPF, Virginia, William, Pablo, Diego, Victor, Jacky, etc. Obrigado a todos pela sua amizade!

Resumo

Estudamos o efeito que os campos gravitacionais produzem nas ondas eletromagnéticas. O plano de polarização gira rigidamente ao longo da trajetória. A partição 1+3 de Landau-Lifshitz de espaços estacionários nos permitiram trabalhar no formalismo tridimensional. Obtivemos uma lei de evolução para o plano de polarização na aproximação ótica geométrica. Esses resultados foram aplicados aos espaços de Kerr e Gödel

Abstract

We have studied the effect of gravitational fields produced by rotating bodies on electromagnetic waves . The polarization plane rotates rigidly along the trajectory. The 1+3 partition of Landau-Lifshitz of stationary spaces allowed us to work in a three-dimensional formalism. We obtained an evolution law for the polarization plane in the geometric optics approximation. These results were applied on the Kerr and Gödel metrics.

Sumário

Dedicatória	i
Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Abstract	iv
Sumário	v
1 Introdução	1
2 Geodésicas em Métricas com Rotação	4
2.1 Geodésicas em Espaço de Kerr	4
2.1.1 Breve revisão da métrica de Kerr.	4
2.1.2 Equações gerais de movimento geodésico e Método de Separação das equações de Hamilton-Jacobi	7
2.2 Geodésicas em espaços de Gödel	11
3 Polarização	17
3.1 Ótica Geométrica em Espaços Curvos	17
3.2 Espaço-Tempo Estacionario.	22
3.3 Polarização	24
4 Aplicações em Espaços de Kerr e Gödel	32
4.1 Espaço de Kerr	32
4.1.1 Sistemas de Referência Local	32

4.1.2	Aplicação à Métrica de Kerr	34
4.2	Espaço de Gödel	40
4.2.1	Sistema de Referência Local	40
4.2.2	Aplicação à Métrica de Gödel	40
5	Conclusões	44

Capítulo 1

Introdução

Em relatividade geral é bem conhecido o fato de que os campos eletromagnéticos num espaço-tempo são afetados por campos gravitacionais provocando o fenômeno já conhecido como a deflexão da luz. Outro efeito produzido por campos gravitacionais é o redshift gravitacional, que modifica o comprimento de onda de uma onda eletromagnética quando esta é emitida num campo gravitacional forte e detetada num ponto onde o campo gravitacional é fraco. Mas existe outro efeito, que se produz quando as fontes do campo gravitacional estão girando: o fenômeno da rotação do plano de polarização da luz. Este efeito foi abordado por diferentes autores com diferentes enfoques [4], [7], [8], [9], [11], [10], [6]. O estudo feito por Mohamad [3] consiste em fazer uma analogia com o efeito da rotação de Faraday num contexto gravitoeletromagnético. Demonstra-se que a rotação têm a mesma forma integral que o efeito de Faraday habitual, ou seja o ângulo de rotação é proporcional à integral de linha da componente do campo gravitomagnético ao longo da trajetória do raio de luz. Outro trabalho que aborda o tema é o de Mashhoon[6], ele considera que as ondas se propagam num espaço plano, mas na presença de um "meio" definido por sua permissividade elétrica e permeabilidade magnética. É nelas onde são encontradas as propriedades do espaço-tempo. Nesse contexto as equações de Maxwell são escritas numa forma não covariante de tal forma que elas serão equivalentes às equações eletrodinâmicas num meio.

Apesar de ambos estudarem o mesmo problema, o enfoque proposto por Mohammed não poderia ser aplicado para a métrica de Gödel, já que para achar o ângulo de rotação, ele integra numa curva fechada, dividida em duas partes, dentro da qual fica a fonte. Uma parte passa perto da fonte e a outra está infinitamente longe da fonte. Isso faz que a contribuição da trajetória que está longe seja nula, com isso ele aplica o teorema de Stokes e resolve o problema. Porém em Gödel o espaço é homogêneo e não têm região assintoticamente plana. Conseqüentemente não é possível aplicar este método no espaço de Gödel.

Em nosso trabalho vamos estudar a rotação do plano de polarização de uma onda eletromagnética num campo gravitacional baseado no artigo de Fayos e Llosa [5]. Os espaços nos quais vamos estudar este efeito serão os espaço de Kerr que já foi estudado em [5] e o espaço de Gödel, onde esse método não foi utilizado. Ambos são espaço-tempos com métricas em rotação.

No primeiro capítulo são descritos os comportamentos das geodésicas em cada espaço-tempo. As geodésicas têm um papel muito importante na relatividade geral porque uma vez determinadas, elas dão toda a informação sobre o movimento de uma partícula livre nesse espaço. Então o problema do cálculo do movimento se reduz a achar as geodésicas de uma geometria dada. No caso do espaço-tempo de Kerr, que é um espaço-tempo estacionário e apresenta simetria axial, a simples vista veremos que existem três leis de conservação, a do momento angular por ter simetria axial, a da energia por ser estacionário e a conservação da norma da 4-velocidade, porém todas elas não serão suficientes para resolver o problema de encontrar as equações geodésicas. O que se fez então foi aplicar o método de separação de variáveis das equações de Hamilton-Jacobi, método descoberto por Carter. No caso de Gödel utilizamos um outro método, desenvolvido por Novello et al [2], onde o potencial efetivo é utilizado para tirar informação das geodésicas sem necessitar integrar.

O capítulo 2 estará dedicado ao estudo do propósito deste trabalho, a polarização. Começando vamos obter as principais leis da ótica geométrica em espaços curvos no

marco da relatividade geral. Por outro lado usaremos a partição $1 + 3$ de Landau-Lifshitz para espaços-tempo estacionários, onde a conexão ∇ da variedade Riemanniana v_4 se relaciona com a conexão $\tilde{\nabla}$ em ξ_3 . A seguir na seção Polarização o tensor eletromagnético é definido por medio do potencial vetor eletromagnético e são aplicados alguns resultados da ótica geométrica e finalmente com isso obtemos as equações de propagação dos vetores de polarização ϵ e vetor de onda k .

No último capítulo são feitas as aplicações dos resultados obtidos no capítulo anterior nas geometrias de Kerr e Gödel. Estudamos o efeito quando o raio se propaga em diferentes direções. No espaço de Kerr no primeiro caso o raio incide paralelamente ao eixo de simetria do espaço onde as equações obtidas no capítulo 1 devem ser modificadas de acordo com a direção do raio. No segundo caso o raio emerge radialmente onde também neste caso as equações geodésicas gerais do capítulo 1 devem ser modificadas segundo as condições do caso. No espaço de Gödel o ângulo é calculado para os caso em que o foton se propaga numa direção paralela ao eixo z , quando se propaga no plano (r, φ) , e numa direção arbitraria.

Capítulo 2

Geodésicas em Métricas com Rotação

Em Relatividade Geral as geodésicas têm um papel importante, já que o movimento de uma partícula sob ação de uma distribuição de energia e momento, que modifica a geometria, é reduzido ao problema de determinar as geodésicas do espaço-tempo.

Nesta seção estudaremos os movimentos geodésicos em espaços-tempos estacionários com rotação em particular os espaços de Kerr e Gödel. Para o espaço de Kerr é usado o método de separação das equações de Hamilton-Jacobi [1]. Para o espaço de Gödel é usado o método do potencial efetivo [2].

2.1 Geodésicas em Espaço de Kerr

2.1.1 Breve revisão da métrica de Kerr.

A solução de Kerr em coordenadas de Boyer-Lindquist é dada por

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) dt^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) \sin^2 \theta d\varphi^2 + \frac{4aMr \sin^2 \theta}{\rho^2} d\varphi dt - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 \quad (2.1)$$

$$\Delta \equiv r^2 - 2mr + a^2,$$

$$\rho^2 \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta.$$

Esta expressão é a mais usada porque permite com mais facilidade obter informação das características e propriedades do espaço. À primeira vista vemos que o elemento de linha (2.1) depende dos parâmetros a e m , e ao mesmo tempo se reduz à solução de Schwarzschild quando $a = 0$. Mas o que representa o parâmetro a ? Deixemos esta pergunta para o final.

Os coeficientes em (2.1) não dependem de t nem φ . A não dependência de t indica que a solução é estacionária, ou seja ela admite um vetor de Killing tipo tempo $\frac{\partial}{\partial t}$ em todo o espaço-tempo. A independência de φ indica que ela tem simetria axial. Isto significa que existe um eixo fixo de simetria no qual a rotação da solução permanece invariante.

Outra propriedade interessante do espaço de Kerr é a invariância com respeito à reflexão das coordenadas t e φ , ou seja se $t \rightarrow -t$ e $\varphi \rightarrow -\varphi$ se transformam simultaneamente, a equação (2.1) permanece invariante. Isto nos sugere que o espaço de Kerr é o produto de uma fonte em rotação. O elemento de linha é invariante também se t e a se transformam como $t \rightarrow -t$ e $a \rightarrow -a$ simultaneamente, então podemos dizer que a seria responsável pela direção de rotação.

A terceira propriedade a considerar é a presença de um elemento cruzado $dt d\varphi$. Fazendo uma analogia com a teoria Newtoniana, também sugere uma rotação. Falando rigorosamente, não existe um análogo clássico à métrica de Kerr. Na teoria clássica da gravitação, o campo de um corpo com simetria axial é independente de seu movimento rotacional diferindo com os resultados em relatividade. Em 1918 Lense e Thirring acharam a solução para uma esfera com densidade constante em rotação. Eles conseguiram encontrar uma solução aproximada válida só para taxas baixas de rotação e para campos

gravitacionais fracos tanto dentro como fora da esfera. A solução exterior à esfera é:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{2m}{r}\right) d\sigma^2 + 4\frac{kJ}{r} \sin^2 \theta d\varphi dt. \quad (2.2)$$

Podemos chegar a esta solução se aproximamos (2.1) expandindo em primeira ordem a/ρ , onde $\rho \approx r$. O elemento de linha nessa aproximação fica:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{\rho}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{2m}{\rho}\right)^{-1} dr^2 + \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + 4\frac{ma}{\rho} \sin^2 \theta d\varphi dt. \quad (2.3)$$

Vemos que esta expressão é a solução de Schwarzschild exata mais um termo cruzado, usamos este fato para expressar o elemento de linha em sua forma isotrópica usando as mesmas coordenadas isotrópicas de métrica de Schwarzschild. Seja $\rho = \hat{\rho} (1 + m/2\hat{\rho})^2$. Onde $\hat{\rho}$ é a coordenada isotrópica e expandindo outra vez em primeira ordem em $\frac{m}{\hat{\rho}}$, e temos,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{\hat{\rho}}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{2m}{\hat{\rho}}\right)^{-1} d\sigma^2 + 4\frac{ma}{\hat{\rho}} \sin^2 \theta d\varphi dt, \quad (2.4)$$

onde $d\sigma^2$ é o elemento de linha tridimensional ($d\hat{\rho}^2 + \hat{\rho}^2 d\theta^2 + \hat{\rho}^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$). Comparando ambas soluções, a de Kerr (2.4) e a de Lense e Thirring (2.2), podemos fazer a correspondência

$$a \sim \frac{J}{m}. \quad (2.5)$$

Assim, respondendo a pergunta feita anteriormente, o parâmetro a é uma medida do momento angular por unidade de massa da fonte. Cabe ressaltar que isto não implica que a fonte no espaço de Kerr seja necessariamente esférica pois esta solução baseia-se num argumento aproximado da solução de Lense -Thirring. Por isso para referir-nos à fonte só diremos que ela possui um momento angular igual a ma sem falar da sua estrutura

2.1.2 Equações gerais de movimento geodésico e Método de Separação das equações de Hamilton-Jacobi

Sabendo agora que o espaço de Kerr é estacionário e têm simetria axial é possível encontrar duas constantes de movimento: a energia e o momento angular. Além disso a norma da quadri-velocidade também é fixa. Com isso já temos três quantidades que se conservam, mas estas três constantes não serão suficientes para resolver as equações de movimento geodésico. Contudo é possível ainda resolver o problema usando o fato de se poder separar as equações de Hamilton-Jacobi e com isso encontrar mais uma quantidade conservada[1]. Método descoberto por Carter(1968). A continuação se obterão as equações geodésicas que se derivam usando este método.

Tendo o lagrangeano,

$$2\mathcal{L} = \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) \dot{t}^2 + \frac{4aMr \sin^2 \theta}{\rho^2} \dot{t}\dot{\varphi} - \frac{\rho^2}{\Delta} \dot{r}^2 - \rho^2 \dot{\theta}^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2Mr \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) (\sin^2 \theta) \dot{\varphi}^2, \quad (2.6)$$

facilmente podemos deduzir a energia e o momento angular, utilizando

$$p_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \quad (2.7)$$

$$E = p_t = \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) \dot{t} + \frac{2aMr \sin^2 \theta}{\rho^2} \dot{\varphi}, \quad (2.8)$$

$$L_z = -p_\varphi = -\frac{2aMr \sin^2 \theta}{\rho^2} \dot{t} + \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2Mr \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) \sin^2 \theta \dot{\varphi}. \quad (2.9)$$

A equação de Hamilton-Jacobi num espaço-tempo de tensor métrico $g^{\mu\nu}$ está dada por,

$$2\frac{\partial S}{\partial \tau} = g^{\mu\nu} S_{,\mu} S_{,\nu} \quad (2.10)$$

onde S é a equação principal de Hamilton, com $g^{\mu\nu}$ para a geometria de Kerr dada por,

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{\Sigma^2}{\rho^2\Delta} & 0 & 0 & \frac{2aMr}{\rho^2\Delta} \\ 0 & \frac{-\Delta}{\rho^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{\rho^2} & 0 \\ \frac{2aMr}{\rho^2\Delta} & 0 & 0 & \frac{-(\Delta - a^2 \sin^2 \theta)}{\rho^2\Delta \sin^2 \theta} \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

a equação fica ,

$$2\frac{\partial S}{\partial \tau} = \frac{\Sigma^2}{\rho^2\Delta} \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + \frac{4aMr}{\rho^2\Delta} \frac{\partial S}{\partial t} \frac{\partial S}{\partial \varphi} - \frac{(\Delta - a^2 \sin^2 \theta)}{\rho^2\Delta \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 + \quad (2.12)$$

$$-\frac{\Delta}{\rho^2} \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2,$$

é mais conveniente escrever a equação da seguinte forma :

$$2\frac{\partial S}{\partial \tau} = \frac{1}{\rho^2} \left[(r^2 + a^2) \frac{\partial S}{\partial t} + a \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right]^2 - \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \left[(a \sin^2 \theta) \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right]^2 - \frac{\Delta}{\rho^2} \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 \quad (2.13)$$

por outro lado,

$$k^\mu = (\dot{t}, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}).$$

$$|k|^2 = \delta_1$$

em nosso caso consideramos geodésicas nulas, logo δ_1 toma o valor de 0, mas vamos manter δ_1 para estudo mais geral deste método.

Podemos encontrar a solução para a equação (2.13) utilizando o método de separação de variáveis, propondo que S seja da forma

$$S = \frac{1}{2}\delta_1\tau - Et + L_z\varphi + S_r(r) + S_\theta(\theta), \quad (2.14)$$

Substituindo (2.14) em (2.13) e usando a identidade :

$$(aE \sin^2 \theta - L_z)^2 \cos^2 \theta = (L_z^2 \cos^2 \theta - a^2 E^2) \cos^2 \theta + (L_z - aE)^2, \quad (2.15)$$

a equação fica ,

$$\begin{aligned} \Delta \left(\frac{dS_r}{dr} \right)^2 - \frac{1}{\Delta} [(r^2 + a^2) E - aL_z]^2 + (L_z - aE)^2 + \delta_1 r^2 + \left(\frac{dS_\theta}{d\theta} \right)^2 + \\ + (L_z^2 \cos^2 \theta - a^2 E^2 + \delta_1 a^2) \cos^2 \theta \} = 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Assim a separação está dada e podemos inferir que

$$\Delta \left(\frac{dS_r}{dr} \right)^2 = \frac{1}{\Delta} [(r^2 + a^2) E - aL_z]^2 - [\ell + (L_z - aE)^2 + \delta_1 r^2], \quad (2.17)$$

$$\left(\frac{dS_\theta}{d\theta} \right)^2 = \ell - (L_z^2 \cos^2 \theta - a^2 E^2 + \delta_1 a^2) \cos^2 \theta, \quad (2.18)$$

onde ℓ é a constante de separação. Abreviando,

$$S_r = \int \frac{\sqrt{R(r)}}{\Delta} dr \implies R(r) = [(r^2 + a^2) E - aL_z]^2 - \Delta [\ell + (L_z - aE)^2 + \delta_1 r^2], \quad (2.19)$$

$$S_\theta = \int \sqrt{\Theta(\theta)} d\theta \implies \Theta(\theta) = \ell - (L_z^2 \cos^2 \theta + (\delta_1 - E^2) a^2) \cos^2 \theta, \quad (2.20)$$

a solução para S é

$$S = \frac{1}{2}\delta_1\tau - Et + L_z\varphi + \int \frac{\sqrt{R}}{\Delta} dr + \int \sqrt{\Theta} d\theta \quad (2.21)$$

As equações de movimento podem ser encontradas derivando parcialmente a equação

(2.21) com relação a cada uma das constantes de movimento ℓ, δ_1, E, L_z e igualamos a zero.

Com relação a ℓ :

$$\frac{\partial S}{\partial \ell} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\Delta \sqrt{R}} \frac{\partial R}{\partial \ell} dr + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{\Theta}} \frac{\partial \Theta}{\partial \ell} d\theta = 0, \quad (2.22)$$

chega-se à seguinte equação,

$$\int \frac{dr}{\sqrt{R}} = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\Theta}}, \quad (2.23)$$

com relação a δ_1 :

$$\tau = \int \frac{r^2}{\sqrt{R}} dr + a^2 \int \frac{\cos^2 \theta}{\sqrt{\Theta}} d\theta, \quad (2.24)$$

com relação a E :

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\Delta \sqrt{R}} \frac{\partial R}{\partial E} dr + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{\Theta}} d\theta \\ &= \tau E + 2M \int r [r^2 E - a(L_z - aE)] \frac{dr}{\Delta \sqrt{R}}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

e com relação a L_z :

$$\begin{aligned} \varphi &= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\Delta \sqrt{R}} \frac{\partial R}{\partial L_z} dr - \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{\Theta}} \frac{\partial \Theta}{\partial L_z} d\theta, \\ &= a \int [(r^2 + a^2) E - aL_z] \frac{dr}{\Delta \sqrt{R}} + \int (L_z \cos^2 \theta - aE) \frac{d\theta}{\sqrt{\Theta}}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

As equações (2.23 – 2.26) são equivalentes às equações (160 – 163) deduzidas em [1], usando teoremas sobre integrais de movimento geodésico em espaços-tempo tipo-D, se a constante de separação ℓ for definida como,

$$\ell = K - (L_z - aE)^2, \quad (2.27)$$

onde K é uma integral de movimento geodésico.

Em particular, com esta identificação de ℓ (2.27) as equações (2.19) e (2.20) concordam com as equações (160) e (164) de Chandrasekhar [1]. Nossas equações então são

$$\dot{r} = \frac{\sqrt{R}}{\rho^2}, \quad (2.28)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\sqrt{\Theta}}{\rho^2}, \quad (2.29)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{\rho^2 \Delta} [2aMrE + (\rho^2 - 2Mr) L_z \cos ec^2 \theta], \quad (2.30)$$

$$\dot{t} = \frac{1}{\rho^2 \Delta} (\Sigma^2 E - 2aMrL_z). \quad (2.31)$$

2.2 Geodésicas em espaços de Gödel

O espaço de Gödel foi objeto de estudo de vários autores, em particular o movimento geodésico foi analisado por Chandrasekhar e Wright e por Kundt, eles encontraram propriedades inusuais das trajetórias das partículas, aqui nos centramos num enfoque diferente proposto por Novello et al. [2]. A diferença básica desta proposta está em que foi usado o método do potencial efetivo, o qual obtém não só as mesmas propriedades do modelo de Chandrasekhar mas ressalta também uma imagem clara do movimento de partículas nesse espaço-tempo e sem necessidade de integrar as equações geodésicas.

Em coordenadas cilíndricas (t, r, ϕ, z) o intervalo para uma métrica de tipo Gödel é dada por,

$$ds^2 = a^2 \{ [dt + H(r) d\phi]^2 - dr^2 - dz^2 - R^2(r) d\phi^2 \}, \quad (2.32)$$

para o espaço de Gödel,

$$R(r) = \sinh r \cosh r,$$

$$H(r) = \sqrt{2} \sinh^2 r,$$

$$a^2 = \frac{4}{\omega^2}$$

e ω é a medida da rotação constante da matéria.

Da densidade Lagrangeana

$$2\mathcal{L} = a^2 \{ \dot{t}^2 + 2H(r) \dot{t} \dot{\varphi} + (H(r)^2 - R^2) \dot{\varphi}^2 - \dot{r}^2 - \dot{z}^2 \}, \quad (2.33)$$

podemos encontrar as equações de movimento facilmente usando as equações de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu}. \quad (2.34)$$

Temos as seguintes equações de movimento,

$$p_t = (\dot{t} + H\dot{\varphi}) = A_0, \quad (2.35)$$

$$p_z = -\dot{z} = -C_0, \quad (2.36)$$

$$p_\varphi = (H^2 - R^2)\dot{\varphi} + H\dot{t} = B_0, \quad (2.37)$$

Para a coordenada r usamos o fato que $|k|^2 = \epsilon$, e temos

$$\dot{t}(\dot{t} + H\dot{\varphi}) + \dot{\varphi}[H\dot{t} + (H^2 - R^2)\dot{\varphi}] - \dot{r}^2 = \frac{\epsilon}{a^2} + C_0^2, \quad (2.38)$$

com $k^\mu = (\dot{t}, \dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{z})$ e ϵ pode ter valores de zero ou um para geodésicas nulas ou tipo tempo respectivamente. Definimos o lado direito da equação anterior através de um novo parâmetro D_0^2 ,

$$D_0^2 = C_0^2 + \frac{\epsilon}{a^2} \quad (2.39)$$

onde para ftons $D_0 = C_0$. As equações geodésicas podem ser escritas como,

$$\dot{\varphi} = \frac{\sqrt{2}A_0}{\cosh^2 r} - \frac{B_0}{\sinh^2 r \cosh^2 r}, \quad (2.40)$$

$$\dot{t} = A_0 \left[1 - \frac{2 \sinh^2 r}{\cosh^2 r} \right] + \frac{\sqrt{2}B_0}{\cosh^2 r}, \quad (2.41)$$

$$\dot{z} = C_0, \quad (2.42)$$

$$\dot{r}^2 = A_0^2 - D_0^2 - \left[\sqrt{2}A_0 \frac{\sinh r}{\cosh r} - \frac{B_0}{\sinh r \cosh r} \right]^2. \quad (2.43)$$

A equação (2.43) pode ser reescrita como

$$\dot{r}^2 = A_0^2 - V(r), \quad (2.44)$$

é aqui onde o potencial efetivo $V(r)$ aparece e permite entender melhor as trajetórias das geodésicas, onde

$$V(r) = D_0^2 + \left[\sqrt{2}A_0 \frac{\sinh r}{\cosh r} - \frac{B_0}{\sinh r \cosh r} \right]^2, \quad (2.45)$$

Para nosso caso $\epsilon = 0$ (*fotons*). De (2.44) podemos inferir que A_0 é a energia total e B_0 é interpretado como o momento angular total da trajetória. Podemos diferenciar três tipos de trajetória tomando $B_0 > 0$, $B_0 = 0$ e $B_0 < 0$. Definimos os parâmetros

$$\gamma = \frac{B_0}{A_0}, \quad \beta^2 = \frac{D_0^2}{A_0^2} \quad (2.46)$$

Assim (2.45) fica em função desses parâmetros e teremos três casos distintos de $V(r) - \beta^2 A_0^2$ para $\gamma > 0$, $\gamma = 0$, $\gamma < 0$. [2], mostrados nos gráficos da figura 2.1

Podemos ver nos gráficos que devido a que A_0^2 é uma quantidade fixa para cada geodésica, a trajetória é mantida num intervalo $r_1 \leq r \leq r_2$, onde r_1 e r_2 são os limites do casco cilíndrico onde a partícula se movimenta e são obtidos pelas raízes da equação

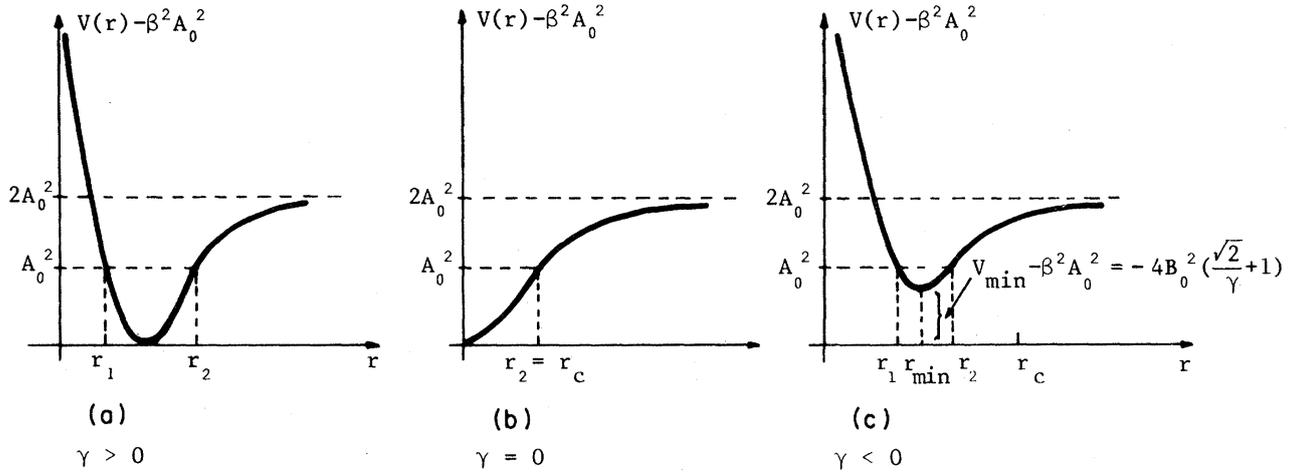


Figura 2.1: Gráfico do Potencial Efetivo para a) $\gamma > 0$. b) $\gamma = 0$. c) $\gamma < 0$

$$\dot{r}^2 = 0$$

$$\sinh^2 r_i = \frac{1 + 2\sqrt{2}\gamma - \beta^2 \pm (1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}} \left[(2\gamma + \sqrt{2})^2 - (1 + \beta^2) \right]^{\frac{1}{2}}}{2(1 + \beta^2)}, \quad (2.47)$$

onde $i = 1, 2$.

Caso $\gamma > 0$

A Fig. 2.1 a) mostra que para $\beta^2 = 1$ o potencial $V(r)$ apresenta um mínimo em A_0^2 e que a foton se movimentava só no eixo z . Além disso, implica trajetórias de partículas massivas ou ftons com momento não nulo ao longo da direção z . Para um β^2 geral ($\beta^2 \neq 0 \neq 1$) o foton se movimentava numa casca cilíndrica entre r_1 e r_2 , a qual vai diminuir conforme $\beta^2 \rightarrow 1$. Neste limite $\beta^2 \rightarrow 1$ ($D_0 = C_0 \rightarrow A_0$) toda a energia se concentra na direção z , então os ftons viajam só na direção z a uma distância r_{\min} do eixo z . A coordenada radial r correspondente ao mínimo do potencial é

$$r = r_{\min} = \arcsin h^2 \frac{\sqrt{2}}{2} \gamma, \quad (\beta^2 = 1) \quad (2.48)$$

Substituindo (2.48) em (2.40) vemos que $\dot{\varphi} = 0$ o qual confirma que o foton se movimentava na direção z . A única importância que γ vai ter aqui é a de determinar a distância do foton ao eixo z .

Por outro lado quando $\beta^2 = 0$ as trajetórias correspondem a fotons que se movimentam na casca cilíndrica $r_1 \leq r \leq r_2$ no plano $z = const$, já que $\beta^2 = \frac{C_0^2}{A_0^2} = 0$ e tendo em conta (2.42).

Caso $\gamma = 0$

Para $\beta^2 = 0$ (*fotons*) vemos que o valor máximo que r pode ter é $\sinh r_c = 1$. O valor $r = r_c$ foi chamado por Gödel como o valor que limita as regiões causais com as regiões não causais. A fig. 2.1 b) mostra que para qualquer valor de A_0^2 os fotons vão estar sempre confinados a se movimentar dentro do cilindro de radio r_c .

Caso $\gamma < 0$

O potencial $V(r)$ apresenta um mínimo em

$$r = r_{\min} = \arcsin h^2 \left[-\frac{\sqrt{2}\gamma}{2(1 + \sqrt{2}\gamma)} \right], \quad (2.49)$$

este mínimo esta dado por

$$V_{\min} - \beta^2 A_0^2 = -4B_0^2 \left[\frac{\sqrt{2}}{\gamma} + 1 \right] \quad (2.50)$$

E da equação (2.43) também temos

$$V_{\min} \leq A_0^2 \quad (2.51)$$

Isto implica que os valores negativos para γ estam limitados por

$$\frac{-\sqrt{2} + (1 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}}{2} \leq \gamma < 0 \quad (2.52)$$

O valor mínimo de $\gamma = \gamma_{\min}$

$$\gamma_{\min} = \frac{-\sqrt{2} + (1 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}}{2} \quad (2.53)$$

que corresponde a igualdade em (2.50). Isto leva a valores para $\beta^2 < 1$ e $\dot{\varphi} \neq 0$, então

para este limite as órbitas terão $\gamma = \gamma_{\min}$ e $\dot{\varphi} = cte \neq 0$ e $r = r_{\min}$. Isto corresponde a órbitas que são circulares na projecção no plano (r, φ) .

A visualização das trajetórias se apresenta na seguinte figura.

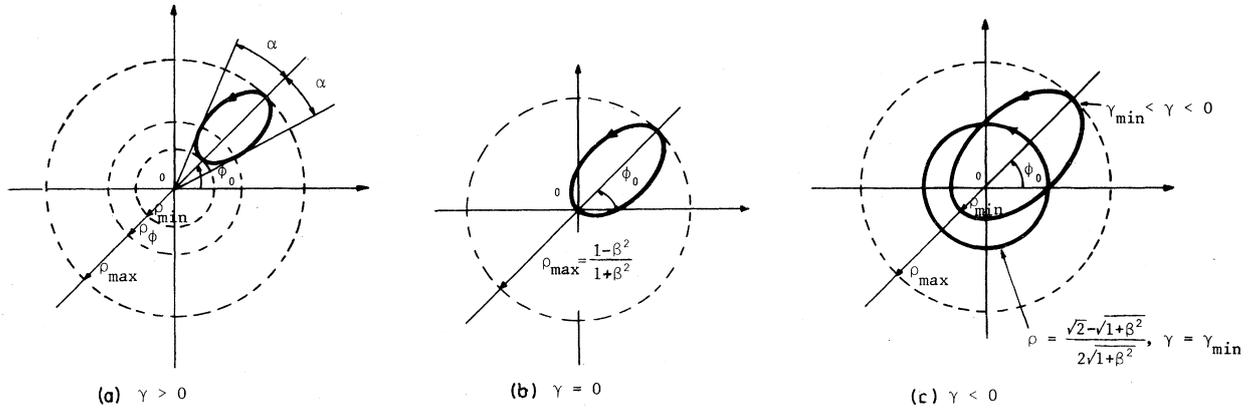


Figura 2.2: Gráficos das trajetórias no plano (r, φ)

Capítulo 3

Polarização

Nesta seção estudamos as leis da propagação da luz usando os princípios da ótica geométrica em espaços curvos, que são derivados das equações de Maxwell que servirão para achar a equação de evolução do vetor polarização. Obteremos uma expressão para o ângulo de rotação que este experimenta quando passa por um espaço-tempo em rotação.

3.1 Ótica Geométrica em Espaços Curvos

A ótica geométrica estuda a propagação da luz em forma de raios. Os raios são curvas cujas tangentes coincidem com a direção de propagação da onda, ou seja são geodésicas nulas. Para chegar à idéia de raio vamos fazer uso do conceito de ondas planas.

Ondas planas têm a propriedade de ter a amplitude constante e a mesma direção de propagação em toda parte do espaço. Ondas eletromagnéticas arbitrárias não têm esta propriedade, contudo em regiões pequenas podem ser consideradas localmente planas. Para isto a amplitude e a direção de propagação devem permanecer constantes em regiões da ordem da longitude de onda. Satisfeita esta condição podemos introduzir o conceito de frente de onda, superfície na qual a fase é igual em todos os pontos e que é perpendicular à direção da propagação. É nesse sentido que entra o conceito de raio. Podemos dizer agora que a ótica geométrica estuda as leis de propagação das ondas, em particular da

luz, como raios sem ter em conta as propriedades ondulatórias da mesma, limitada a casos em que $\lambda \rightarrow 0$.

Definimos as seguintes longitudes,

λ : comprimento de onda

\mathcal{L} : comprimento onde λ , a polarização e a amplitude variam.

\mathfrak{R} : radio de curvatura do espaço onde as ondas se propagam.

A região de validade da ótica geométrica é determinado por

$$\lambda \ll \mathcal{L}, \quad (3.1)$$

$$\lambda \ll \mathfrak{R}. \quad (3.2)$$

A ótica geométrica é valida quando o comprimento de onda é muito menor comparado com \mathfrak{R} e \mathcal{L} . O potencial vetor eletromagnético A

$$A = \hat{A}e^{i\theta} = \hat{A}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t+\alpha)} = \hat{A}e^{i(k_\beta x^\beta + \alpha)}, \quad (3.3)$$

(omitimos aqui o $\Re e$, pois é entendido que tomaremos em conta só a parte real de todas as expressões seguintes), é expressado através de uma fase real θ (chamada eikonal) que varia rapidamente onde,

$$\theta \sim (\text{distancia propagada})/\lambda. \quad (3.4)$$

No caso em que a onda não seja plana e a ótica geométrica ainda é aplicável, a amplitude \hat{A} varia lentamente e a fase não tem a forma simples de (3.3) mas sabemos que a fase pelo menos deve ser uma quantidade grande, já que estamos trabalhando no limite $\lambda \rightarrow 0$, ou seja quando \mathcal{L} e \mathfrak{R} são fixadas e fazemos λ ir ficando menor e a fase θ , que é inversamente proporcional a λ , vai ficar maior. Em regiões pequenas do espaço a fase θ pode ser

expandida em serie, em termos de primeira ordem, temos

$$\theta = \theta_0 + \mathbf{r} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{r}} + t \frac{\partial \theta}{\partial t},$$

comparando com (3.3) vemos que

$$k_\beta = \theta_{,\beta} = \frac{\partial \theta}{\partial x^\beta}. \quad (3.5)$$

A amplitude, como já dizíamos linhas acima, varia lentamente. Podemos então expandir a amplitude em potencias de λ

$$\hat{A} = a + b + c + \dots$$

Onde a é a parte dominante da amplitude e independente de λ , b é proporcional a λ , c é proporcional a λ^2 , etc. Na verdade a expansão se faz em função do número adimensional $\frac{\lambda}{L}$, onde $L = \min\{\mathfrak{R}, \mathcal{L}\}$. Esta expansão é chamada "two-length-scale expansion" (expansão a duas escalas).

É útil introduzir o parâmetro ρ que irá nos permitir saber quão rápido os termos do vetor potencial irão se aproximando a zero. Assim, nosso potencial vetor ótico geométrico toma a forma

$$A_\mu = (a_\mu + \rho b_\mu + \rho^2 c_\mu + \dots) e^{\frac{i\theta}{\rho}}. \quad (3.6)$$

Ou seja, qualquer termo com fator com ρ^n varia como $\left(\frac{\lambda}{L}\right)^n$. A única importância que o fator ρ têm é de dar-nos uma referência de como os termos do vetor potencial variam e pode ser eliminado quando necessário. A forma do vetor potencial eletromagnético (3.6) é a base para encontrar todas as leis que a ótica geométrica fornece.

As equações de Maxwell para o espaço vazio e o gauge de Lorentz são:

$$\nabla^\beta \nabla_\beta A^\nu = 0, \quad (3.7)$$

$$\nabla_\mu A^\mu = 0. \quad (3.8)$$

Substituindo (3.6) na condição de Lorentz (3.8).

$$A_{;\mu}^{\mu} = \left[\frac{i}{\rho} k_{\mu} (a^{\mu} + \rho b^{\mu} + \dots) + (a^{\mu} + \rho b^{\mu} + \dots)_{;\mu} \right] e^{\frac{i\theta}{\rho}}, \quad (3.9)$$

o único termo significativo é da ordem $\left(\frac{1}{\rho}\right)$. Obtemos,

$$k_{\mu} a^{\mu} = 0, \quad (3.10)$$

definindo o vetor polarização como

$$p^{\mu} \equiv \frac{a^{\mu}}{\alpha}, \quad (3.11)$$

onde $\alpha = (a^{\mu} a_{\mu})^{\frac{1}{2}}$ é a amplitude escalar. Disso vemos que

$$p^{\mu} k_{\mu} = 0. \quad (3.12)$$

As equações (3.10) e (3.12) são equivalentes e claramente vemos que tanto a amplitude como a polarização são perpendiculares ao vetor de onda. Da equação (3.7), segue que

$$\left[\frac{1}{\rho^2} k^{\nu} k_{\nu} (a^{\mu} + \rho b^{\mu} + \rho^2 c^{\mu} + \dots) - 2 \frac{i}{\rho} k^{\nu} (a^{\mu} + \rho b^{\mu} + \rho^2 c^{\mu} + \dots)_{;\nu} + \right. \\ \left. - \frac{i}{\rho} k_{;\nu}^{\nu} (a^{\mu} + \rho b^{\mu} + \rho^2 c^{\mu} + \dots) - (a^{\mu} + \dots)_{;\nu}^{\nu} \right] e^{\frac{i\theta}{\rho}} = 0, \quad (3.13)$$

considerando só os termos de ordem $\frac{1}{\rho^2}$ e $\frac{1}{\rho}$, agrupamos respetivamente e temos, para termos de $O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)$:

$$a^{\mu} k^{\nu} k_{\nu} = 0 \implies k^{\nu} k_{\nu} = 0. \quad (3.14)$$

Esta equação revela que o vetor de onda é nulo.

Para termos de $O\left(\frac{1}{\rho}\right)$:

$$a^{\mu\nu}k_\nu = -\frac{1}{2}a^\mu k_{\nu\nu} \implies \vec{\nabla}_k \vec{a} = -\frac{1}{2}(\vec{\nabla} \cdot \vec{k}) \vec{a}, \quad (3.15)$$

obtemos a equação de propagação do vetor amplitude. É também possível obter uma equação que determina a conservação dos ftons. Da equação anterior multiplicamos por a_μ

$$\begin{aligned} a_\mu a^{\mu\nu} k_\nu &= \frac{1}{2}(\alpha^2 k_\nu)^{\nu\nu} - \frac{\alpha^2}{2} k_{\nu\nu} = -\frac{\alpha^2}{2} k_{\nu\nu}, \\ (\alpha^2 k_\nu)^{\nu\nu} &= 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Esta equação expressa a lei de conservação do número de ftons, terceiro resultado importante da ótica geométrica.

Da equação (3.14) e usando (3.5) chegamos a um dos principais resultados das leis da ótica geométrica,

$$k^{\mu\nu} k_\nu = 0 \implies \nabla_k k = 0, \quad (3.17)$$

a equação da propagação do vetor de onda, que como vemos, determina uma geodésica.

Agora de (3.15) e usando (3.11) temos que,

$$\begin{aligned} \nabla_k(\alpha p^\mu) + \frac{1}{2}(\nabla_\nu k^\nu) a^\mu &= 0, \\ \alpha \nabla_k p + p \left[\nabla_k \alpha + \frac{1}{2}(\nabla \cdot k) \alpha \right] &= 0, \end{aligned}$$

De (3.16) vamos ver que o segundo termo é zero,

$$\begin{aligned} 2\alpha \alpha^{\nu\nu} k_\nu + \alpha^2 k_{\nu\nu} &= 0 \\ 2\nabla_k \alpha + \alpha(\nabla \cdot k) &= 0 \\ \nabla_k \alpha &= -\frac{1}{2}(\nabla \cdot k) \alpha, \end{aligned} \quad (3.18)$$

com isto podemos deduzir facilmente que,

$$\nabla_k p = 0. \quad (3.19)$$

Esta última equação mostra a lei de propagação do vetor de polarização. Junto com (3.17) formam os principais resultados da ótica geométrica.

Em conclusão podemos dizer que o vetor de polarização é paralelamente propagado ao longo da geodésica seguida pelo raio e é perpendicular ao vetor de onda. Os vetores k e p uma vez especificados num ponto são determinados ao longo do raio devido as suas equações de propagação.

3.2 Espaço-Tempo Estacionario.

Um espaço-tempo representado pela variedade v_4 , é estacionário quando possui um vetor de killing tipo tempo u .

$$L_{\mathbf{u}}g = 0 \quad , \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle < 0. \quad (3.20)$$

Isto quer dizer que o tensor métrico é independente da coordenada x^0 . Esta coordenada é chamada tempo universal, cabe ressaltar que o tempo universal não é único, se acrescentamos uma função dependente só das coordenadas, a métrica segue sendo independente de x^0 . Isso se deve ao fato de ser possível escolher arbitrariamente a origem do tempo em qualquer ponto no espaço.

Como consequencia de (3.20) na vizinhança de um evento qualquer na variedade v_4 há um sistema de coordenadas x^μ tal que x^0 é de tipo tempo e $\mathbf{u} = \partial_o$ e com isso $\partial_o g_{\mu\nu} = 0$. Estas coordenadas estão em repouso em relação a v_4 . Podemos particionar v_4 num conjunto de classes de equivalência ξ_3 , se temos que, dado $P, Q \in v_4$; $P \sim Q$ obedecem a mesma relação de equivalência, se e somente se existe uma curva integral de \mathbf{u} entre P e Q . Então, define-se uma projeção canônica de v_4 em ξ_3 . As coordenadas espaciais de qualquer sistema (x^μ) em repouso em v_4 definem um sistema de coordenadas (x^i) em ξ_3 .

Este espaço ξ_3 esta definido por uma métrica espacial Riemanniana γ_{ij} ,

$$\gamma_{ij}(x^k) = \left(g_{ij} - \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}} \right) (x^k). \quad (3.21)$$

$$\gamma^{ij} = g^{ij}. \quad (3.22)$$

As outras componentes do tensor métrico g_{ij} são:

$$g_i(x_k) \equiv -\frac{g_{0i}}{g_{00}}(x_k); g^i(x^k) \equiv g^{0i}(x^k) \quad (3.23)$$

$$h(x^k) \equiv g_{00}(x^k) \quad (3.24)$$

elas se transformam em ξ_3 como um campo vetorial g e como campo escalar h respectivamente. Vale notar que o produto escalar em ξ_3 é definido da maneira habitual $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ com a métrica (3.21).

Definiremos agora as derivadas $\tilde{\nabla}$ em ξ_3 e vamos ver como elas se relacionam com as derivadas ∇ em v_4 . A conexão $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ se expressa através da métrica como

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha}(g_{\mu\alpha,\lambda} + g_{\nu\alpha,\lambda} - g_{\mu\nu,\alpha}). \quad (3.25)$$

Encontramos as componentes de $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ com relação as componentes espaciais da métrica (3.21), o vetor (3.23) e o escalar (3.24) como segue

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2}h^i, \quad (3.26)$$

$$\Gamma_{j0}^i = \frac{h}{2}(\tilde{\nabla}_j g^i - \tilde{\nabla}^i g_j) - \frac{1}{2}g_j h^i, \quad (3.27)$$

$$\Gamma_{jk}^i = \lambda_{jk}^i + \frac{h}{2} \left[g_j (\tilde{\nabla}^i g_k - \tilde{\nabla}_k g^i) + (\tilde{\nabla}^i g_j - \tilde{\nabla}_j g^i) + \frac{1}{2}g_j g_k h^i \right], \quad (3.28)$$

onde λ_{jk}^i são as conexões em ξ_3 .

3.3 Polarização

O tensor eletromagnético $F_{\mu\nu}$ é construído com campos elétrico E_μ e magnético B_μ . Um observador em um ponto dado $Q \in v_4$ caracterizado por um vetor unitario de tipo tempo \hat{N} , pode escrever o campo eletromagnético da seguinte forma:

$$F_{\mu\nu} = E_\mu N_\nu - E_\nu N_\mu + \eta_{\mu\nu\alpha\beta} B^\alpha N^\beta, \quad (3.29)$$

os vetores E_μ e B_μ são perpendiculares a N_μ , e são dados por

$$E^\mu = F^{\mu\nu} N_\nu \quad (3.30)$$

$$B^\lambda = -\frac{1}{2} \eta^{\lambda\mu\nu\alpha} F_{\mu\nu} N_\alpha \quad (3.31)$$

Nos limites da ótica geométrica aplicando as equações (3.5), (3.6) e (3.11), o tensor eletromagnético fica

$$F_{\mu\nu} = \frac{\alpha(x)}{\rho} e^{\frac{i\theta}{\rho}} \{p_\mu k_\nu - p_\nu k_\mu\} + O(\rho^0), \quad (3.32)$$

por (3.30) temos o quadri-vetor elétrico da forma

$$\begin{aligned} E^\mu &= \frac{\alpha(x)}{\rho} e^{\frac{i\theta}{\rho}} (p^\mu k^\nu N_\nu - p^\nu k^\mu N_\nu), \\ E^\mu &= \frac{\alpha(x)}{\rho} e^{\frac{i\theta}{\rho}} k^\nu N_\nu \left(p^\mu - \frac{p^\lambda N_\lambda}{k^\nu N_\nu} k^\mu \right). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Definimos um novo vetor ϵ^μ

$$\epsilon^\mu \equiv p^\mu - \frac{p^\lambda N_\lambda}{k^\nu N_\nu} k^\mu, \quad (3.34)$$

que é um vetor unitario.

O quadri-vetor ϵ^μ tem as seguintes propriedades

$$\epsilon_\mu k^\mu = 0. \quad (3.35)$$

Para qualquer sistema de referência em repouso, em v_4 :

$$\hat{N} = \left(\frac{1}{h^{\frac{1}{2}}} \right) \partial_0$$

a componente zero de ϵ_μ

$$\epsilon_0 = N^\mu \epsilon_\mu = 0 \quad (3.36)$$

Isto também pode ser explicado pelo fato que as equações (3.12) e (3.14) admitem uma transformação de $\epsilon_\mu, \epsilon'_\mu = \epsilon_\mu + C k_\mu$. Com o qual se demonstra que há uma certa liberdade em escolher ϵ com o qual podemos ajustar o valor de ϵ_μ a zero sem perder generalidade.

As componentes espaciais ϵ^i e k^i se comportam como 3-vetores $\boldsymbol{\epsilon}$ e \mathbf{k} quando transformadas de um sistema de coordenadas em repouso a outro em v_4 . Por outro lado as componentes ϵ^0 e k^0 permanecem invariantes ante essas transformações. É fácil ver que

$$\begin{aligned} \epsilon^0 &= g^{0\nu} \epsilon_\nu = g^{00} \epsilon_0 + g^{0i} \epsilon_i = g^{0i} \epsilon_i, \\ \epsilon^0 &= g^i \epsilon_i = \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

A componente zero de k^μ também pode ser expressada de maneira análoga a equação anterior, de (3.14)

$$k^\alpha k_\alpha = g_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta = g_{00} (k^0)^2 + 2g_{0i} k^0 k^i + g_{ij} k^i k^j = 0. \quad (3.38)$$

A componente k^0 em função da componente covariante k_0 pode ser obtida através de $k_\mu = g_{\mu\nu} k^\nu$, segue que,

$$\begin{aligned}
k_0 &= g_{0\nu}k^\nu = g_{00}k^0 + g_{0i}k^i, \\
k_0 &= g_{00}(k^0 - g_i k^i), \\
k_0 &= h(k^0 - \mathbf{g} \cdot \mathbf{k}).
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Substituindo em (3.38)

$$k^\alpha k_\alpha = h \left(\frac{k_0}{h} + g_i k^i \right)^2 - 2g_{00}k^0 g_i k^i + g_{ij}k^i k^j = 0, \tag{3.40}$$

de (3.21)

$$\begin{aligned}
h \left(\frac{k_0}{h} + g_i k^i \right)^2 - 2h \left(\frac{k_0}{h} + g_i k^i \right) g_i k^i + (\gamma_{ij} - g_i g_{0j}) k^i k^j &= 0, \\
h \left(\frac{k_0}{h} + g_i k^i \right)^2 - 2g_i k^i k_0 - 2h (g_i k^i)^2 + \gamma_{ij} k^i k^j + h (g_i k^i)^2 &= 0, \\
\frac{k_0^2}{h} + h (g_i k^i)^2 + 2k_0 g_i k^i - 2g_i k^i k_0 - 2h (g_i k^i)^2 + \gamma_{ij} k^i k^j + h (g_i k^i)^2 &= 0,
\end{aligned}$$

$$\frac{k_0^2}{h} + \gamma_{ij} k^i k^j = 0,$$

$$\frac{k_0^2}{h} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 0.$$

$$k_0 = \pm \sqrt{h(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})}. \tag{3.41}$$

Se verifica facilmente que

$$\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{0} \quad , \tag{3.42}$$

$$\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{1} \quad , \tag{3.43}$$

onde $\boldsymbol{\epsilon}$ é chamado vetor de polarização. Todas as expressões que chegamos acima vão ser usadas para a dedução da evolução do vetor polarização.

De (3.34), definindo $\Phi \equiv \frac{p_\nu N^\nu}{k^\nu N_\nu}$, segue,

$$p^\mu = \epsilon^\mu + \Phi k^\mu. \quad (3.44)$$

Substituindo esta equação em (3.19) temos

$$k^\alpha \nabla_\alpha p^\mu = k^\alpha \nabla_\alpha \epsilon^\mu + \Phi_{,\alpha} k^\alpha k^\mu = 0, \quad (3.45)$$

tomando a parte espacial só:

$$k^\alpha \nabla_\alpha \epsilon^a + k^\alpha \Phi_{,\alpha} k^a = 0, \quad (3.46)$$

$a = 1, 2, 3$.

Calculando o primeiro termo $k^\alpha \nabla_\alpha \epsilon^a$ com ajuda de (3.26 – 3.28), temos que

$$\begin{aligned} k^\alpha \nabla_\alpha \epsilon^a &= \epsilon^a_{,j} k^j + \lambda_{ij}^a \epsilon^i k^j + \frac{1}{2} h'^a \epsilon^0 k^0 + \frac{h}{2} \left(\tilde{\nabla}_i g^a - \tilde{\nabla}^a g_i \right) \epsilon^0 k^i - \frac{1}{2} (g \cdot k) h'^a \epsilon^0 + \\ &- \frac{1}{2} g_i h'^a \epsilon^i k^0 + \frac{h}{2} \left[g_i \left(\tilde{\nabla}^a g_j - \tilde{\nabla}_j g^a \right) \epsilon^i k^j + g_j \left(\tilde{\nabla}^a g_i - \tilde{\nabla}_i g^a \right) \epsilon^j k^i \right] + \\ &+ \frac{1}{2} g_i g_j h'^a \epsilon^i k^j + \frac{h}{2} \left(\tilde{\nabla}_i g^a - \tilde{\nabla}^a g_i \right) \epsilon^i k^0, \end{aligned} \quad (3.47)$$

os primeiros dos termos formam a derivada covariante $\tilde{\nabla}_{\mathbf{k}} \epsilon$ em ξ_3 . Sabendo que

$$\tilde{\nabla}^s g_n - \tilde{\nabla}_n g^s = \eta_{nl}^s (\text{rot} \mathbf{g})^l, \quad (3.48)$$

substituimos em (3.46) e a equação fica como

$$\begin{aligned}
k^\alpha \nabla_\alpha \epsilon^a &= \tilde{\nabla}_{\mathbf{k}} \boldsymbol{\epsilon} + \frac{1}{2} h'^a \epsilon^0 k^0 - \frac{h}{k_0} \frac{k_0}{2} \eta_{il}^a (\text{rot} \mathbf{g})^l k^i \epsilon^0 - \frac{1}{2} (g \cdot k) h'^a \epsilon^0 - \frac{h}{k_0} \frac{k_0}{2} \eta_{il}^a (\text{rot} \mathbf{g})^l \epsilon^i k^0 + \\
&- \frac{1}{2} (\mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\epsilon}) h'^a k^0 + \frac{h}{k_0} \left[\frac{k_0}{2} \eta_{jl}^a (\text{rot} \mathbf{g})^l k^j (\mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\epsilon}) + \frac{k_0}{2} \eta_{jl}^a (\text{rot} \mathbf{g})^l \epsilon^i (\mathbf{g} \cdot k) \right] + \frac{1}{2} h'^a (\mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\epsilon}) (\mathbf{g} \cdot k).
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Chamamos a $\bar{\omega}$ como

$$\bar{\omega} \equiv -\frac{k_0}{2} (\text{rot} \mathbf{g}), \tag{3.50}$$

e a equação (3.46) fica

$$\begin{aligned}
k^\alpha \nabla_\alpha \epsilon^a &= \tilde{\nabla}_{\mathbf{k}} \boldsymbol{\epsilon} + \frac{1}{2} h'^a \epsilon^0 k^0 + \frac{h}{k_0} \eta_{il}^a \bar{\omega}^l k^i \epsilon^0 - \frac{1}{2} (g \cdot k) h'^a \epsilon^0 + \frac{h}{k_0} \eta_{il}^a \bar{\omega}^l \epsilon^i k^0 - \\
&- \frac{1}{2} (g \cdot \boldsymbol{\epsilon}) h'^a k^0 - \frac{h}{k_0} [\eta_{jl}^a \bar{\omega}^l k^j (g \cdot \boldsymbol{\epsilon}) + \eta_{jl}^a \bar{\omega}^l \epsilon^i (g \cdot k)] + \frac{1}{2} h'^a (g \cdot \boldsymbol{\epsilon}) (g \cdot k),
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Identificando os termos com rotacional escrevemos,

$$\begin{aligned}
k^\alpha \nabla_\alpha \epsilon^a &= \tilde{\nabla}_{\mathbf{k}} \boldsymbol{\epsilon} + \frac{1}{2} h'^a \epsilon^0 k^0 + \frac{h}{k_0} (k \times \bar{\omega})^a \epsilon^0 - \frac{1}{2} (g \cdot k) h'^a \epsilon^0 + \frac{h}{k_0} (\boldsymbol{\epsilon} \times \bar{\omega})^a k^0 - \\
&- \frac{1}{2} (g \cdot \boldsymbol{\epsilon}) h'^a k^0 - \frac{h}{k_0} [(k \times \bar{\omega})^a (g \cdot \boldsymbol{\epsilon}) + (\boldsymbol{\epsilon} \times \bar{\omega})^a (g \cdot k)] + \frac{1}{2} h'^a (g \cdot \boldsymbol{\epsilon}) (g \cdot k),
\end{aligned} \tag{3.52}$$

agrupando os termos com fatores iguais

$$\begin{aligned}
k^\alpha \nabla_\alpha \epsilon^a &= \tilde{\nabla}_{\mathbf{k}} \boldsymbol{\epsilon} + \frac{1}{2} h'^a \epsilon^0 k^0 + \frac{h}{k_0} (k \times \bar{\omega})^a [\epsilon^0 - (\mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\epsilon})] + \frac{h}{k_0} (\boldsymbol{\epsilon} \times \bar{\omega})^a [k^0 - (\mathbf{g} \cdot \mathbf{k})] + \\
&- \frac{1}{2} (\mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\epsilon}) h'^a k^0 + \frac{1}{2} h'^a (\mathbf{g} \cdot \mathbf{k}) [(\mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\epsilon}) - \epsilon^0].
\end{aligned} \tag{3.53}$$

usando (3.39) e calculando analogamente para ϵ_0 temos

$$\epsilon_0 = h (\epsilon^0 - \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\epsilon}) = 0. \quad (3.54)$$

Nossa equação (3.53) é

$$\begin{aligned} k^\alpha \nabla_\alpha \epsilon^a &= \tilde{\nabla}_{\mathbf{k}} \boldsymbol{\epsilon} + \frac{1}{2} h'^a \epsilon^0 k^0 + (\boldsymbol{\epsilon} \times \bar{\boldsymbol{\omega}})^a - \frac{1}{2} (g \cdot \boldsymbol{\epsilon}) h'^a k^0, \\ k^\alpha \nabla_\alpha \epsilon^a &= \tilde{\nabla}_{\mathbf{k}} \boldsymbol{\epsilon} + (\boldsymbol{\epsilon} \times \bar{\boldsymbol{\omega}}). \end{aligned} \quad (3.55)$$

Vamos agora reduzir o segundo termo $\Phi_{,\alpha} k^\alpha k^a$ de (3.46). Para isto tomamos a representação covariante de com $\mu = 0$

$$\begin{aligned} k^\alpha \nabla_\alpha \epsilon_0 + \Phi_{,\alpha} k^\alpha k_0 &= 0, \\ k^\alpha \epsilon_{0,\alpha} - \Gamma_{0\alpha}^\lambda \epsilon_\lambda k^\alpha + \Phi_{,\alpha} k^\alpha k_0 &= 0, \\ \Phi_{,\alpha} k^\alpha k_0 &= \Gamma_{0\alpha}^\lambda \epsilon_\lambda k^\alpha \end{aligned} \quad (3.56)$$

Desenvolvendo o termo direito da equação

$$\begin{aligned} \Gamma_{0\alpha}^\lambda \epsilon_\lambda k^\alpha &= \Gamma_{0\alpha}^0 \epsilon_0 k^\alpha + \Gamma_{0\alpha}^i \epsilon_i k^\alpha, \\ \Gamma_{0\alpha}^\lambda \epsilon_\lambda k^\alpha &= \Gamma_{0o}^i \epsilon_i k^0 + \Gamma_{0j}^i \epsilon_i k^j, \\ \Gamma_{0\alpha}^\lambda \epsilon_\lambda k^\alpha &= \frac{1}{2} h^i \epsilon_i k^0 + \frac{h}{2} \left(\tilde{\nabla}_j g^i - \tilde{\nabla}^i g_j \right) \epsilon_i k^j - \frac{1}{2} g_j h^i \epsilon_i k^j, \end{aligned}$$

tendo usado (3.26 – 3.28) na equação anterior. Então a equação (3.56) fica

$$\begin{aligned} \Phi_{,\alpha} k^\alpha k_0 &= \frac{1}{2} h^i \epsilon_i k^0 + \frac{h}{2} \left(\tilde{\nabla}_j g^i - \tilde{\nabla}^i g_j \right) \epsilon_i k^j - \frac{1}{2} g_j h^i \epsilon_i k^j, \\ \Phi_{,\alpha} k^\alpha &= \frac{1}{2} \left(\tilde{\nabla} h \cdot \boldsymbol{\epsilon} \right) \frac{k^0}{k_0} - \frac{h}{2k_0} \eta_{jl}^i (\text{rot} \mathbf{g})^l \epsilon_i k^j - \frac{1}{2k_0} (\mathbf{g} \cdot \mathbf{k}) \left(\tilde{\nabla} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \right), \\ &= \frac{1}{2k_0} \left(\tilde{\nabla} h \cdot \boldsymbol{\epsilon} \right) [k^0 - (\mathbf{g} \cdot \mathbf{k})] - \frac{h}{k_0^2} \left(\mathbf{k} \times \bar{\boldsymbol{\omega}} \right)^i \epsilon_i. \end{aligned}$$

Usando (3.38)

$$\frac{h}{k_0^2} = \frac{1}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}},$$

temos,

$$\Phi_{,\alpha} k^\alpha k^a = \frac{1}{2h} \left(\tilde{\nabla} h \cdot \boldsymbol{\epsilon} \right) k^a - \frac{(\mathbf{k} \times \bar{\omega})^i}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}} \epsilon_i k^a. \quad (3.57)$$

Tendo desenvolvido cada termo de (3.46), estamos prontos para unir-los. Nossa equação de evolução para o vetor de polarização fica:

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\mathbf{k}} \boldsymbol{\epsilon} + (\boldsymbol{\epsilon} \times \bar{\omega}) + \frac{1}{2h} \left(\tilde{\nabla} h \cdot \boldsymbol{\epsilon} \right) k^a - \frac{(\mathbf{k} \times \bar{\omega})^i}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}} \epsilon_i k^a &= 0, \\ \tilde{\nabla}_{\mathbf{k}} \boldsymbol{\epsilon} &= (\bar{\omega} \times \boldsymbol{\epsilon}) - \frac{1}{2h} \left(\tilde{\nabla} h \cdot \boldsymbol{\epsilon} \right) k^a - \frac{(\bar{\omega} \times \mathbf{k})^i}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}} \epsilon_i k^a, \\ \tilde{\nabla}_{\mathbf{k}} \boldsymbol{\epsilon} &= (\bar{\omega} \times \boldsymbol{\epsilon}) - \frac{hk_0^2}{k_0^2 2h^2} \left(\tilde{\nabla} h \cdot \boldsymbol{\epsilon} \right) k^a - \frac{(\bar{\omega} \times \mathbf{k})^i}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}} \epsilon_i, \\ \tilde{\nabla}_{\mathbf{k}} \boldsymbol{\epsilon} &= (\bar{\omega} \times \boldsymbol{\epsilon}) - \frac{h}{k_0^2} (L \cdot \boldsymbol{\epsilon}) k^a - \frac{(\bar{\omega} \times \mathbf{k})^i}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}} \epsilon_i. \end{aligned}$$

Onde

$$L = \frac{k_0^2}{2h^2} \tilde{\nabla} h, \quad (3.58)$$

e aplicando algumas propriedades do produto vetorial finalmente obtemos,

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{k}} \boldsymbol{\epsilon} = 2(\bar{\omega} \times \boldsymbol{\epsilon}) + \frac{\mathbf{L} \times \mathbf{k}}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}} \times \boldsymbol{\epsilon} - \frac{\bar{\omega} \cdot \mathbf{k}}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\epsilon}.$$

Em forma simples chegamos a

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{k}} \boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\epsilon}, \quad (3.59)$$

definindo $\boldsymbol{\omega}$ como

$$\boldsymbol{\omega} = 2\bar{\boldsymbol{\omega}} - \frac{\bar{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{k}}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}} \mathbf{k} + \frac{1}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}} \mathbf{L} \times \mathbf{k}.$$

O signo \times representa o producto vetorial em ξ_3 asociado com γ_{ij} . Para o vetor \mathbf{k} se procede similarmente fazendo uso de (3.17) com a qual obtemos uma expressão semelhante

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{k}}\mathbf{k} = \omega \times \mathbf{k} + \beta\mathbf{k}, \quad (3.60)$$

onde $\beta = -(\mathbf{L}\cdot\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})^{-1}$.

As equações (3.59) e (3.60) mostram que os vetores $\boldsymbol{\epsilon}$ e \mathbf{k} giram rigidamente com uma velocidade angular ω ao longo da trajetória do raio. O plano de polarização é determinado pelos vetores $\boldsymbol{\epsilon}$ e \mathbf{k} e a rotação ao redor de \mathbf{k} é dada por

$$\begin{aligned} \omega_{||} &= \frac{(\omega\cdot\mathbf{k})}{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})^{\frac{1}{2}}}, \\ \omega_{||} &= -\frac{1}{2}\sqrt{h}(\mathbf{k}\cdot(\nabla\times\mathbf{g})). \end{aligned} \quad (3.61)$$

Se integramos a equação anterior entre dois pontos $\sigma(\lambda_1)$ e $\sigma(\lambda_2)$, o ângulo de rotação obtido será

$$\phi = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \omega_{||}(\lambda) d\lambda. \quad (3.62)$$

Este ângulo de rotação na realidade seria aquele entre o vetor de polarização no ponto $\sigma(\lambda_2)$ e o paralelamente transportado através de $\tilde{\nabla}$ ao ponto $\sigma(\lambda_1)$.

Capítulo 4

Aplicações em Espaços de Kerr e Gödel

Neste capítulo aplicaremos os resultados obtidos no capítulo anterior à métrica de Kerr e Gödel. Para o espaço de Kerr iremos tomar direções de raios que permitam um cálculo mais simples exemplificando de modo claro o procedimento, generalização para outros raios pode ser obtida implicando apenas integrais mais complexas.

4.1 Espaço de Kerr

4.1.1 Sistemas de Referência Local

No capítulo anterior obtivemos uma expressão para a rotação do vetor de polarização ϵ . É sabido que objetos em rotação além de curvar o espaço produzem um efeito de arraste do referencial conhecido como efeito Lense e Thirring. Este efeito nos leva a pensar que não é suficiente obter uma expressão para a evolução da polarização mas também é preciso estabelecer a evolução do sistema de referência ao longo da trajetória do raio.

Uma partícula teste que parte do repouso em qualquer ponto do espaço-tempo de Kerr se movimenta no plano (r, θ) . Essa direção e a do eixo de precessão do giroscópio que também pertence ao plano (r, θ) e é diferente da determinada pela partícula; permitem

estabelecer em qualquer ponto o plano $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta)$ e a direção \hat{e}_φ , perpendicular ao plano (r, θ) , que vai servir de referência para medir la rotação do plano de polarização.

O vetor unitário em coordenadas de Boyer-Lindquist é determinado por

$$\hat{e}_\varphi = \frac{\partial_\varphi}{\sqrt{\gamma_{\varphi\varphi}}}, \quad (4.1)$$

Se pode definir então o plano $(\hat{e}_\varphi, \mathbf{k})$ com o qual vamos a fazer referencia para calcular o ângulo total.

A rotação real do plano $(\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{k})$ com relação ao plano $(\hat{e}_\varphi, \mathbf{k})$ desde $\sigma(\lambda_1)$ a $\sigma(\lambda_2)$ vai estar dado pela diferença entre os ângulos de rotação de ambos planos. Para isto precisamos saber como \hat{e}_φ se propaga ao longo da trajetória.

$$\begin{aligned} \left(\tilde{\nabla}_k \hat{e}_\varphi\right)^l &= k^a \left(\gamma_{\varphi\varphi}^{-\frac{1}{2}} \delta_\varphi^l\right)_{,a} + \lambda_{ab}^l k^a \left(\gamma_{\varphi\varphi}^{-\frac{1}{2}} \delta_\varphi^b\right), \\ &= -\frac{1}{2} \gamma_{\varphi\varphi}^{-\frac{3}{2}} \delta_\varphi^l (\gamma_{\varphi\varphi,a} k^a) + \frac{1}{2} \gamma^{lm} (\gamma_{mb,a} + \gamma_{am,b} - \gamma_{ab,m}) k^a \delta_\varphi^b \gamma_{\varphi\varphi}^{-\frac{1}{2}}, \\ &= -\frac{1}{2} \gamma_{\varphi\varphi}^{-\frac{3}{2}} \delta_\varphi^l \gamma_{\varphi\varphi,a} k^a + \frac{1}{2} \gamma^{\varphi\varphi} \gamma_{\varphi\varphi,a} k^a \gamma_{\varphi\varphi}^{-\frac{1}{2}} \delta_\varphi^l - \frac{1}{2} \gamma_{\varphi\varphi,m} \gamma^{ml} k^\varphi \gamma_{\varphi\varphi}^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

como γ_{ab} não depende da coordenada r nem de θ , e sendo também diagonal, ou seja $\gamma^{\varphi\varphi} = \gamma_{\varphi\varphi}^{-1}$, os dois primeiros termos cancelam, então temos

$$\left(\tilde{\nabla}_k \hat{e}_\varphi\right)^l = -\frac{1}{2} \gamma_{\varphi\varphi,m} \gamma^{ml} k^\varphi \gamma_{\varphi\varphi}^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.3)$$

$$= -\frac{1}{2} \gamma_{\varphi\varphi,r} \gamma^{rl} k^\varphi \gamma_{\varphi\varphi}^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \gamma_{\varphi\varphi,\theta} \gamma^{\theta l} k^\varphi \gamma_{\varphi\varphi}^{-\frac{1}{2}} \quad (4.4)$$

Por outro lado temos que:

$$\begin{aligned} (\omega_0 \times \hat{e}_\varphi)^l &= \eta_{ab}^l \omega_0^a \hat{e}_\varphi^b = \sqrt{\gamma} \left\{ \varepsilon_{r\varphi}^l \omega_0^r \gamma_{\varphi\varphi}^{-\frac{1}{2}} + \varepsilon_{\theta\varphi}^l \omega_0^\theta \gamma_{\varphi\varphi}^{-\frac{1}{2}} \right\}, \\ &= \sqrt{\gamma} \left\{ -\delta_\theta^l \omega_0^r \gamma_{\varphi\varphi}^{-\frac{1}{2}} + \delta_r^l \omega_0^\theta \gamma_{\varphi\varphi}^{-\frac{1}{2}} \right\}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Comparando (4.4) e (4.5) obtemos que

$$\omega_0^r = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}}\gamma_{\varphi\varphi,\theta}k^\varphi \quad (4.6)$$

$$\omega_0^\theta = -\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}\gamma_{\varphi\varphi,r}k^\varphi \quad (4.7)$$

com isto vemos que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_0 &= \omega_0^a \partial_a = \omega_0^r \partial_r + \omega_0^\theta \partial_\theta \\ \boldsymbol{\omega}_0 &= \frac{k^\varphi}{2\sqrt{\gamma}} \{ (\partial_\theta \gamma_{\varphi\varphi}) \partial_r - (\partial_r \gamma_{\varphi\varphi}) \partial_\theta \} \end{aligned} \quad (4.8)$$

$\boldsymbol{\omega}_0$ conforma a velocidade angular com a qual o vetor unitario \widehat{e}_φ varia na direção a k .

Por tanto a rotação ao redor de k é

$$\omega_{o11} = \frac{\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{k}}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})^{\frac{1}{2}}} \quad (4.9)$$

Com isso temos o ângulo que o plano $(\widehat{e}_\varphi, \mathbf{k})$ girou desde $\sigma(\lambda_1)$ até $\sigma(\lambda_2)$ é dado por

$$\phi_0 = \int_{\lambda_2}^{\lambda_1} \omega_{o11}(\lambda) \cdot d\lambda \quad (4.10)$$

Assim o ângulo total de rotação é

$$\Delta\Phi = \phi - \phi_0 \quad (4.11)$$

4.1.2 Aplicação à Métrica de Kerr

Raio Paralelo ao eixo de Simetria.

Para obter as equações das geodésicas para um raio que incide paralelo ao eixo de simetria do espaço-tempo de Kerr desde $z = -\infty$, modificamos as equações gerais (2.28 – 2.31) para esse caso específico. Por ser paralelo ao eixo de simetria automaticamente fazemos

$L_z = 0$ e obviamente tambem $\delta_1 = 0$.(fotons)

$$k^r = \dot{r} = \frac{[(r^2 + a^2) E]^2 - \Delta [\ell - aE^2]^{\frac{1}{2}}}{\rho^2}, \quad (4.12)$$

$$k^\theta = \dot{\theta} = \frac{\ell + E^2 a^2 \cos^2 \theta}{\rho^2}, \quad (4.13)$$

$$k^\varphi = \dot{\varphi} = \frac{2aMrE}{\rho^2 \Delta}. \quad (4.14)$$

Da equação (2.27) as equações (4.12) e (4.13) ficam

$$k^r = \dot{r} = \frac{E}{\rho^2} \left\{ (r^2 + a^2)^2 - \Delta \frac{K}{E^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.15)$$

$$k^\theta = \dot{\theta} = \frac{E}{\rho^2} \left\{ \frac{K}{E^2} - a^2 \sin^2 \theta \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (4.16)$$

Definindo o parámetro L de (2.27) com $L_z = 0$

$$\begin{aligned} \ell &= K - a^2 E^2 \\ L &= \frac{\ell}{E^2} = \left(\frac{K}{E^2} - a^2 \right) \\ L + a^2 &= \frac{K}{E^2} \end{aligned} \quad (4.17)$$

As equações (4.15 – 4.17) ficam

$$k^r = \dot{r} = \frac{E}{\rho^2} \left\{ (r^2 + a^2)^2 - \Delta (L + a^2) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.18)$$

$$k^\theta = \dot{\theta} = \frac{E}{\rho^2} \left\{ L + a^2 \cos^2 \theta \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (4.19)$$

$$k^\varphi = \dot{\varphi} = \frac{2aMrE}{\rho^2 \Delta}. \quad (4.20)$$

Mas o qué significa o parámetro L ?. Das condições iniciais no limite $a \ll r$, podemos

estabelecer que

$$\begin{aligned}\rho_0^2 &= r_0^2 + a^2 \cos^2 \theta_0 \\ \rho_0^2 &= r_0^2 \left(1 + \frac{a^2}{r_0^2} \cos^2 \theta_0 \right) \approx r_0^2 \\ \rho_0^4 &\simeq r_0^4.\end{aligned}$$

onde ρ_0, r_0, θ_0 são valores iniciais de ρ, r, θ respectivamente.

Com isso a equação (4.19) fica

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_0^2 &= \frac{K}{r_0^4} - \frac{a^2}{r_0^4} \sin^2 \theta \\ r_0^2 \dot{\theta}_0^2 &\simeq \frac{K}{r_0^2}.\end{aligned}\tag{4.21}$$

A equação anterior representa a condition inicial.

Como o raio incide paralelamente ao eixo de simetria, chamamos D a distancia do raio ao eixo. A direção da velocidade inicial em coordenadas esféricas é dada por

$$\vec{V}_0 = \dot{r}_0 \hat{r} + r_0 \dot{\theta}_0 \hat{\theta}\tag{4.22}$$

$$\vec{V}_0 = V_0 \cos \theta_0 \hat{r} + V_0 \sin \theta_0 \hat{\theta}\tag{4.23}$$

onde θ é o angulo entre o eixo de simetria e o vetor \hat{r} . De (4.22) e (4.23)

$$r_0 \dot{\theta}_0 = V_0 \sin \theta_0,\tag{4.24}$$

lembrando que $V_0 = c = 1$ (*para fotons*). Combinamos (4.24) com (4.21) chegamos

a,

$$\sin^2 \theta_0 = \frac{K}{r_0^2}\tag{4.25}$$

e sabendo que

$$\sin \theta_0 = \frac{D}{r_0} \quad (4.26)$$

temos

$$\begin{aligned} D^2 &= K = E^2 (L + a^2) \\ \frac{D^2}{E^2} &= L + a^2 = s^2 \\ L &= s^2 - a^2 \end{aligned} \quad (4.27)$$

L então esta determinado pelo parâmetro de impacto s e pelo parâmetro a .

Na aproximação linear $r \sin \theta = s$. Com isso vamos ter só dependencia de θ . Ou seja

$$d\lambda = \frac{d\theta}{k^\theta} \quad (4.28)$$

A equação (3.61) fica como

$$\phi = \int \omega_{||}(\theta) \frac{d\theta}{k^\theta} \quad (4.29)$$

$$\phi = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{ma}{\rho^2 (\Delta - a^2 \sin^2 \theta)} \left\{ 2 \sin \theta (r^2 - a^2 \cos^2 \theta) - 4r \cos \theta \left[\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta s^2}{s^2 - a^2 \sin^2 \theta} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} d\theta \quad (4.30)$$

Na aproximação linear (trajetória de linea reta) temos que $r \sin \theta = s$ e a equação (4.30) fica

$$\phi \simeq 0. \quad (4.31)$$

A rotação de \hat{e}_φ é dada por

$$\phi_0 = - \int_\pi^0 \left(\frac{h}{\gamma} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{k^\varphi}{2k_0} \left(\frac{k_r}{k^\theta} \partial_\theta \gamma_{\varphi\varphi} - \gamma_{\theta\theta} \partial_r \gamma_{\varphi\varphi} \right) d\theta, \quad (4.32)$$

e em aproximação de primeira ordem, obtemos

$$\phi_0 \simeq \frac{4ma}{s^2}. \quad (4.33)$$

O ângulo total segundo a equação (4.11) é

$$\Delta\Phi \simeq -\frac{4ma}{s^2}. \quad (4.34)$$

Raio emergente radialmente.

A continuação derivamos a rotação do plano de polarização ao longo do raio das congruências principais nulas. Aqui a principal diferença com o caso anterior é que L_z não vai ser mais igual a zero. Nas equações (2.19) e (2.20) introduzimos novos parâmetros,

$$\xi = \frac{L_z}{E} \quad \text{e} \quad \eta = \frac{\ell}{E^2} \quad (4.35)$$

e elas ficam como

$$\frac{R}{E^2} = r^4 + (a^2 - \xi^2 - \eta) r^2 + 2mr [\eta + (\xi - a)^2] - a^2\eta \quad (4.36)$$

$$\frac{\Theta}{E^2} = \eta + (a - \xi)^2 - (a \sin \theta - \xi \csc \theta)^2 \quad (4.37)$$

Os parâmetros ξ e η substituem ao parâmetro de impacto s . Para órbitas gerais vamos nos concentrar nas projeções no plano (r, θ) . E a equação que rege essa projeção é dada pela equação (2.23). Vemos que Θ deve ser sempre positivo $\Theta \geq 0$. De (4.37) para que Θ seja positivo a condição

$$\eta + (a - \xi)^2 \geq 0 \quad (4.38)$$

deve ser cumprida. Para o caso das congruências principais nulas

$$\eta + (a - \xi)^2 = 0 \quad (4.39)$$

só para $\theta_0 = \text{constante}$. Com isso os parâmetros ξ e η assumem os valores

$$\xi = a \sin^2 \theta_0 \quad , \quad \eta = -a^2 \cos^4 \theta_0 \quad (4.40)$$

Introduzindo (4.40) em (2.28 – 2.30) chegamos a,

$$k^r = \dot{r} = E \quad (4.41)$$

$$k^\varphi = \dot{\varphi} = \frac{aE}{\Delta} \quad (4.42)$$

$$k^\theta = \dot{\theta} = 0 \quad (4.43)$$

Substituindo nas equações (3.61) fica

$$\phi = \int \frac{2mar \cos \theta}{\rho^2 (\Delta - a^2 \sin^2 \theta)} dr \quad (4.44)$$

$$\phi = -\arctan \frac{r}{a \cos \theta} + \frac{a \cos \theta}{(a^2 \cos^2 \theta - m^2)^{\frac{1}{2}}} \arctan \frac{r - m}{(a^2 \cos^2 \theta - m^2)^{\frac{1}{2}}} \Big|_{r_1}^{r_2} \quad , \quad |a \cos \theta| > m \quad (4.45)$$

O ângulo total de rotação do plano de polarização é

$$\begin{aligned} \Delta\Phi = & -\frac{\cos \theta \sin^2 \theta}{a^2 \sin^4 \theta + 4m^2 \cos^2 \theta} \left[4m^2 \cot^2 \theta \arctan \frac{r}{a \cos \theta} + ma \ln \frac{r^2 - 2mr + a^2}{\rho^2} + \right. \\ & \left. + (a^2 \sin^2 \theta - 2m^2) \left\{ \frac{a}{(a^2 - m^2)^{\frac{1}{2}}} \arctan \frac{r - m}{(a^2 - m^2)^{\frac{1}{2}}} \right\} \right]_{r_1}^{r_2} \quad (4.46) \end{aligned}$$

a equação (4.46) é dada para $|a| > m$. Para órbitas no plano equatorial ($\theta = \frac{\pi}{2}$) pode ser visto que não têm rotação para esse caso. A equação se reduz para aproximação de campos fracos a

$$\Delta\Phi = \left[\cos \theta \frac{a}{r} \right]_{r_1}^{r_2} \quad (4.47)$$

4.2 Espaço de Gödel

4.2.1 Sistema de Referência Local

Defina-se o vetor unitario

$$\hat{e}_z = \gamma_{zz}^{-\frac{1}{2}} \partial_z \quad (4.48)$$

Da mesma forma como procedemos para o espaço de Kerr, temos que

$$\left(\tilde{\nabla}_k \hat{e}_z \right)^l = \left(\gamma_{zz}^{-\frac{1}{2}} \delta_z^l \right)_{,a} k^a \quad (4.49)$$

$$\left(\tilde{\nabla}_k \hat{e}_z \right)^l = \left(\gamma_{zz}^{-\frac{1}{2}} \delta_z^l \right)_{,a} k^a + \lambda_{ma}^l \gamma_{zz}^{-\frac{1}{2}} k^a \delta_z^m \quad (4.50)$$

$$\left(\tilde{\nabla}_k \hat{e}_z \right)^l = \frac{1}{2} \gamma^{l\xi} (\gamma_{m\xi,a} + \gamma_{\xi a,m} - \gamma_{ma,\xi}) \gamma_{zz}^{-\frac{1}{2}} k^a \delta_z^m \quad (4.51)$$

$$\left(\tilde{\nabla}_k \hat{e}_z \right)^l = \frac{1}{2} \gamma^{l\xi} (\gamma_{z\xi,a} + \gamma_{\xi a,z} - \gamma_{za,\xi}) \gamma_{zz}^{-\frac{1}{2}} k^a \quad (4.52)$$

$$\left(\tilde{\nabla}_k \hat{e}_z \right)^l = 0 \quad (4.53)$$

Isto quer dizer que o vetor \hat{e}_z não varia ao longo de k . Sabendo disso podemos pegar como plano de referência o plano (\hat{e}_z, k) . Isto significa que o ângulo de rotação do plano de polarização dado pela equação (3.62) é o ângulo total.

4.2.2 Aplicação à Métrica de Gödel

A rotação ao longo de k é dada pela equação (3.61) lembrando que têm a seguinte forma,

$$\omega_{||} = -\frac{1}{2} \sqrt{h} (\mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{g})),$$

e da métrica dada por (2.32) desenvolvemos cada fator da equação. Começando por

$$\vec{\nabla} \times \vec{g} = \eta^{ijk} \partial_j g_k \quad (4.54)$$

usando (3.23) achamos g_k

$$g_k = -\frac{g_{0k}}{g_{00}} = \frac{-2a^2\sqrt{2}\sinh^2 r}{a^2}\delta_z^2 = -2\sqrt{2}\sinh^2 r\delta_k^2 \quad (4.55)$$

A equação (4.54) fica

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{g}\right)^i = -\frac{4\sqrt{2}}{a^3}\delta_3^i.$$

Com isto a equação (3.61) fica

$$\begin{aligned} \omega_{||} &= -\frac{1}{2}\sqrt{h}(\mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{g})) \\ \omega_{||} &= \frac{1}{2}a^2k^i\frac{4\sqrt{2}}{a^3}\delta_3^i \\ \omega_{||} &= \frac{2\sqrt{2}}{a}k^z = \frac{2\sqrt{2}}{a}C_0 \end{aligned} \quad (4.56)$$

O ângulo total é dado por

$$\phi = \int \frac{2\sqrt{2}}{a}C_0 d\lambda \quad (4.57)$$

- Para um foton se movimentando numa direção paralela ao eixo z ($\beta^2 = 1$). λ só vai depender de z , então,

$$d\lambda = \frac{d\lambda}{dz}dz = \frac{dz}{\dot{z}} \quad (4.58)$$

e a integral (4.57) fica

$$\phi = \int \frac{2\sqrt{2}C_0}{a\dot{z}} dz, \quad (4.59)$$

usando (2.42) o ângulo ϕ é dado por

$$\phi = \frac{2\sqrt{2}}{a}z \quad (4.60)$$

Vemos que o ângulo de rotação é independente dos valores de γ , mas devemos ter em

conta o seguinte, que para um foton com $\gamma > 0$, ele vai seguir uma trajetória paralela ao eixo z a uma distância dada por a equação (2.48), para o caso em que o foton apresente um $\gamma = 0$ ele se movimenta no mesmo eixo z . Ambos casos apresentam a mesma variação do ângulo ϕ . O caso $\gamma < 0$ não aceita que o foton se movimente ao longo ou paralelo a z .

- Para um foton que se movimenta no plano (r, φ) , ou seja ($\beta^2 = 0$) o ângulo de rotação é sempre zero, já que $\beta^2 = 0$ significa que $C_0 = 0$, e com isso o $\omega_{||} = 0$.

$$\phi = 0 \quad (4.61)$$

Vemos que este caso também é independente de γ . Só que analisando as diferentes situações, quando $\gamma > 0$ o foton esta confinado a se movimentar entre r_1 e r_2 dadas por (2.47), quando o foton se movimenta com $\gamma = 0$ ele é confinado a se movimentar de $0 \leq r \leq r_c$ nesse caso a coordenada radial sim pode tomar o valor de zero.

- Para $\beta^2 \neq 0 \neq 1$ e $\gamma = 0$ ($B_0 = 0$) é uma trajetória geral e o $d\lambda$ é expressado como

$$d\lambda = \frac{dr}{\dot{r}} \quad (4.62)$$

O ângulo então, é dado por

$$\phi = \frac{2\sqrt{2}}{a} C_0 \int \frac{dr}{\dot{r}}. \quad (4.63)$$

$$\phi = \frac{2\sqrt{2}}{a} C_0 \int \left\{ A_0^2 - D_0^2 - \left[\sqrt{2} A_0 \frac{\sinh r}{\cosh r} \right]^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} dr, \quad (4.64)$$

reduzindo esta equação fica

$$\phi = \frac{2\sqrt{2}}{a} C_0 \int \frac{\cosh r \, dr}{\sqrt{(A_0^2 - D_0^2) \cosh^2 r - 2A_0^2 \sinh^2 r}} \quad (4.65)$$

Depois de ter feito a mudança de variável $u = \sinh r$ e integrar, temos

$$\phi = \frac{2\sqrt{2}C_0}{a\sqrt{A_0^2 + D_0^2}} \arcsin \left[\frac{\sqrt{A_0^2 + D_0^2}}{\sqrt{A_0^2 - D_0^2}} \sinh r \right] \quad (4.66)$$

Lembrando que a coordenada r não pode tomar valores maiores que o valor crítico r_c e que neste caso ângulo ϕ é válido só para valores de $0 < \beta^2 < 1$. (trajetória geral)

- Para o caso $\beta^2 \neq 0 \neq 1$ e $\gamma > 0$

$$\phi = \frac{2\sqrt{2}}{a} C_0 \int \left[A_0^2 - D_0^2 - \left(\sqrt{2}A_0 \frac{\sinh r}{\cosh r} - \frac{B_0}{\sinh r \cosh r} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} dr \quad (4.67)$$

em função de β e γ fica,

$$\phi = \frac{2\sqrt{2}}{a} \beta \int \left[(1 - \beta^2) - \left(\frac{\sqrt{2} \sinh^2 r - \gamma}{\sinh r \cosh r} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} dr \quad (4.68)$$

$$\phi = \frac{\sqrt{2}}{a} \beta \arcsin h \left[\frac{\sinh^2 r - (1 - \beta^2 + 4\sqrt{2}\gamma)}{\sqrt{\frac{1}{4}(1 - \beta^2 + 4\sqrt{2}\gamma)^2 - 2\gamma^2}} \right] \quad (4.69)$$

Assim chegamos à expressão para o ângulo de rotação de uma trajetória geral com $\gamma > 0$.

Capítulo 5

Conclusões

Estudamos a rotação do plano de polarização de uma onda eletromagnética em espaço-tempos que apresentam rotação, mais especificamente os espaços de Kerr e Gödel. Aproveitamos o fato de que ambos são geometrias estacionárias onde podemos considerar um tempo universal separado do espaço de uma maneira bem definida. Este trabalho foi baseado no artigo de Fayos e Llosa os quais propuseram um método para determinar a evolução da polarização do campo eletromagnético em geometrias estacionárias. Foram discutidos os resultados lá obtidos e aplicado o mesmo método para o espaço-tempo de Gödel. O sucesso deste método é que dada a partição 1+3 de Landau-Lifshitz é possível trabalhar no formalismo tridimensional do eletromagnetismo. Foi possível achar uma lei de evolução do vetor de polarização no limite ótico-geométrico e com isso o ângulo de rotação do plano de polarização, tendo em conta o arraste do referencial provocado por estas métricas.

No capítulo 4 aplicamos o método à métrica de Kerr para duas classes de trajetórias diferentes. Para a trajetória paralela ao eixo de simetria chegamos a uma dependência inversamente proporcional do ângulo $\Delta\Phi$ com o parâmetro de impacto s . O ângulo dependerá então da proximidade da partícula com a fonte. Para a trajetória radialmente emergente vemos que não apresenta rotação nenhuma no caso em que $\theta = \frac{\pi}{2}$. No caso de Gödel as trajetórias no plano (r, φ) não apresentam rotação nenhuma o que concorda com o trabalho de Mashhoon[6], as trajetórias paralelas ao eixo z apresentam rotação,

esta rotação têm uma dependência linear em z o que indica que o ângulo cresce conforme o foton avança em z . Quando o foton for em sentido contrário, ou seja $-z$ o plano de polarização gira em sentido contrario. Em todos os casos é a presença da componente k^z do raio luminoso que induz a variação da polarização.

Esse método pode também ser aplicado para estudar o efeito de acoplamento não mínimo entre a curvatura e o campo eletromagnético, na variação da polarização.

Referências Bibliográficas

- [1] S.Chandrasekhar. (1983). The Mathematical Theory of Black Holes, Edition Oxford Science Publication
- [2] M. Novello, I. Damião Soares, and J. Tiomno (1983) Phys. Rev. D, 27, 4
- [3] Mohammad Nouri-Zonoz (1999). Phys. Rev. D, 60 ,024013
- [4] N. L. Balaz (1957). Phys. Rev. D, 110,1
- [5] F. Fayos and J. Llosa (1982). Gen. Rel. Grav, Vol 14, No. 10
- [6] B. Mashhoon (1975). Phys. Rev. D, Vol 11, No. 10
- [7] Plebansky, J. (1960). Phys. Rev., 118, 1396.
- [8] Pineault, S., and Roeder, R. C. (1977). Astrophys. J., 212, 541.
- [9] Newman, E., and Penrose, R. (1962). J. Math. Phys., 3, 566.
- [10] Godfrey, B. (1970). Phys REv., D, 10, 2721.
- [11] Su, F. S. O., and Mallett, R. (1980). Astrophys. J., 238, 1111.