

Tese de Mestrado
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Março - 2009

Um estudo sobre a Teoria Espinorial da Gravitação

Maria Borba
Orientador: Mário Novello

RESUMO

Esta tese é um estudo sobre a Teoria Espinorial da Gravitação (TEG) – uma nova proposta de descrição da gravitação onde o campo gravitacional, assim como na Teoria da Relatividade Geral (TRG), está associado à geometria do espaço-tempo através do Princípio de Equivalência de Einstein (PEE). A diferença nesta nova teoria está na descrição dinâmica do campo: a métrica tem carácter efetivo - não possui dinâmica própria. Ela (a dinâmica) é herdada de campos espinoriais que satisfazem uma equação espinorial não-linear. Estudamos aqui uma versão simplificada da TEG, onde a geometria é gerada a partir de um único campo espinorial (originalmente a TEG foi desenvolvida com dois campos). Além deste estudo proporcionar uma visão clara e explícita de todas as etapas desta teoria – da solução da equação espinorial à obtenção da métrica (o que no caso de dois campos é um pouco mais trabalhoso) - mostramos que ela apresenta igualmente uma solução para o problema do campo gravitacional ao redor de uma estrela com simetria esférica compatível com os dados observacionais que dispomos até o momento. No apêndice, estudamos as propriedades gerais do potencial efetivo produzido por tal solução.

ABSTRACT

This thesis is a study about the Spinor Theory of Gravity (STG/TEG) – a new proposal of gravity description where the gravitational field, as in the General Relativity (GR/TRG), is associated with the space-time geometry through Einstein's Equivalence Principle (EEP/PEE). The difference in this new theory lies in the field dynamic description: the metric has an effective character – it doesn't have its own dynamic. The dynamic is inherited from spinor fields that satisfy a non-linear spinorial equation. We study here a simplified version of STG, where the geometry is derived from only one spinor field (originally, STG was developed with two spinorial fields). Besides this study provides a clear and explicit view of all the stages of this theory - from the spinorial equation solution until the obtainment of the metric (what in the two fields theory is a little bit harder) - we exhibit that it has a solution of the gravitational field around a spherically symmetric star problem compatible with the experimental data available until now. In the appendix, we study the general properties of the effective potential produced by this solution.

Índice

Resumo-----02

Definições e notações-----07

Introdução-----09

Capítulo 0: Identificação do campo gravitacional com a geometria do espaço-tempo-----11

Capítulo 1: Cinemática e dinâmica da gravitação

1.1 Cinemática – relação da gravitação com o universo físico: Princípio da Equivalência de Einstein-----21

1.1.1 De como o campo gravitacional atua nas partículas teste

1.1.2 De como a matéria e toda a forma de energia são afetadas pelo campo gravitacional: Princípio de Acoplamento Mínimo da Gravitação

1.2 Dinâmica-----27

1.2.1 Geometria com dinâmica própria: a Teoria da Relatividade Geral

1.2.2 Geometria efetiva: um novo caminho

Capítulo 2: A Teoria Espinorial da Gravitação

2.0 Grupo de Lorentz, Álgebra de Clifford e campos espinoriais-----	35
2.1 Espinores de Heisenberg e uma generalização-----	40
2.2.1 Solução de onda plana	
2.2 A Teoria Espinorial da Gravitação-----	43
2.2.1 A idéia	
2.2.2 Do Princípio de Equivalência de Einstein ao campo espinorial	

Capítulo 3: A Teoria Espinorial da Gravitação com um campo

3 A Teoria Espinorial da Gravitação com um campo-----	51
---	----

Capítulo 4: Solução para uma estrela

4.1 Equação de Movimento-----	58
4.2 Cálculo de A e B e consequências-----	62
4.3 Cálculo das correntes-----	65
4.3.1 Identidades a serem satisfeitas pelas correntes	
4.4 Construção da geometria-----	71
4.5 Compatibilidade com os dados observacionais-----	72

Apêndice: Algumas consequências da solução da estrela na TEG

A.1 Equações de movimento ou geodésicas-----	80
A.2 O potencial efetivo-----	83
A.2.1 Análise do potencial efetivo na TRG	
A.2.2 Análise do potencial efetivo na TEG	

A.2.3 Conclusão do apêndice

Conclusão-----107

Agradecimentos

Referências

Definições e notações

- (i) espaços-tempo aqui estudados possuem 4 dimensões
- (ii) índices gregos variam como 0,1,2,3
- (iii) índices latinos variam como 1,2,3
- (iv) convenção de Einstein para somas
- (v) um ponto no espaço: x^μ
- (vi) transformação de coordenadas: $x'^\mu = x'^\mu(x^\mu)$
- (vii) vetores contravariantes: $A'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} A^\alpha$
- (viii) vetores covariantes: $B'_\mu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} B_\alpha$
- (ix) índices sobem e descem de acordo com a seguinte regra:

$$\begin{cases} A^\beta \equiv g^{\alpha\beta} A_\alpha \text{ e } B_\beta \equiv g_{\alpha\beta} B^\alpha \\ g^{\alpha\beta} g_{\alpha\gamma} = \delta_\gamma^\beta \end{cases}, \text{ onde } g_{\alpha\beta} \text{ é um tensor simétrico de}$$

segunda ordem chamado métrica ou geometria

- (x) assinatura do tensor métrico: (1,-1,-1,-1)
- (xi) derivada covariante de um vetor contravariante: $A^\mu{}_{;\nu} \equiv A^\mu{}_{,\nu} - \Gamma_{\lambda\nu}^\mu A^\lambda$
- (xii) derivada covariante de um vetor covariante: $B_\mu{}_{;\nu} \equiv B_\mu{}_{,\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda B_\lambda$
- (xiii) TEG: Teoria Espinorial da Gravitação
- (xiv) TRG: Teoria da Relatividade Geral
- (xv) TRR: Teoria da Relatividade Restrita
- (xvi) PEE: Princípio de Equivalência de Einstein.

“...porque o problema da ciência não pode ser resolvido no domínio da ciência.”¹

¹ Friedrich Nietzsche, *A Origem da Tragédia*, 1886.

Introdução

Esta tese possui três objetivos principais:

1. Partindo da representação geométrica da interação gravitacional através do Princípio de Equivalência de Einstein (PEE), apresentar um novo modo de pensar a descrição evolutiva do campo gravitacional. Mostra-se que a geometria pode ser tratada como um campo efetivo. Em outras palavras, para que a geometria possua dinâmica ela não necessariamente deve estar associada a uma equação de movimento, ela pode, em princípio, herdar dinâmica de outros campos.
2. Apresentar e desenvolver uma teoria, onde a geometria não tem dinâmica própria. Ela é tratada como um campo efetivo que herda a dinâmica de campos espinoriais: Teoria Espinorial da Gravitação (TEG). Em particular, trataremos uma versão da TEG cuja lagrangiana é constituída por apenas um campo espinorial.
3. Apresentar e desenvolver a solução do campo gravitacional estático gerado por um corpo esfericamente simétrico através da teoria espinorial apresentada compatível com os dados observacionais [01, 02] - uma geometria semelhante à obtida por Karl Schwarzschild em 1915 [03] através da Teoria da Relatividade Geral (TRG). Iremos ver que a distinção entre estas duas soluções é controlada por um único parâmetro β : existe um valor para β ($\beta = 0$) para o qual ambas soluções são idênticas.

O desenvolvimento do trabalho foi dividido nas seguintes etapas:

- (i) mostrar que a geometria do espaço-tempo, se associada ao campo gravitacional através do Princípio de Equivalência de Einstein e definida como um processo efetivo de interação, pode possuir descrição dinâmica distinta da TRG e esta descrição não é única - (Cap. 1);
- (ii) mostrar que, a partir da interação entre campos espinoriais de Heisenberg [04] é possível construir novas teorias da gravitação (TEG) onde a geometria é gerada conforme descrito acima: como resultado de um processo efetivo de interação. (Cap. 2);
- (iii) desenvolver, a partir de uma lagrangiana espinorial específica com apenas um campo, a Teoria Espinorial da Gravitação. (Cap. 3); e
- (iv) mostrar que existe solução nesta teoria para o problema do campo gravitacional gerado por um objeto massivo estático com simetria esférica, e que ela é semelhante à obtida pela TRG. (Cap. 4).
- (v) como apenas o princípio de muitas questões a serem examinadas, apresentar algumas consequências desta solução através do método do potencial efetivo e compará-las com os resultados correspondentes obtidos através da TRG. (Apêndice).

Essencialmente, a idéia é abrir um novo caminho: desvinculando o efeito que se observa da gravitação na matéria e energia da forma com que a dinâmica é gerada, pensar a gravitação como resultado de um processo dinâmico distinto daquele proposto pela Teoria da Relatividade Geral.

Em especial, a solução do problema do campo gravitacional estático em torno de uma estrela apresenta mais de uma representação. Olhar para duas formas de descrição de um mesmo problema nos possibilita olhar para o mesmo como outro.

Capítulo 0: Identificação do campo gravitacional com a geometria do espaço-tempo

Antes de entrar nos detalhes da construção de uma nova teoria da gravitação, é importante compreender porque esta interação está associada à geometria do espaço-tempo. Em outras palavras, deixar claro quais características permitem esta identificação.

I. Universalidade da gravitação

A física moderna se baseia [05] na existência de somente quatro forças fundamentais consideradas de origem distintas, a saber:

- (i) forte: responsável por parte da estabilidade da matéria, experienciada por quarks, gluons e hadrons;
- (ii) fraca: responsável por processos de desintegração da matéria, experienciada por quarks e leptons;
- (iii) eletromagnética: responsável também por parte da estabilidade da matéria, experienciada por partículas eletricamente carregadas. Pode ser atrativa ou repulsiva;
- (iv) gravitacional: exercida e sofrida por todos os corpos materiais e energia sob qualquer forma: universal. Em particular, o próprio campo gravitacional é fonte de si.

Desta divisão, uma observação destaca classicamente a gravitação das outras forças: o caráter universal.

II. Fato experimental

“... se um corpo teste não carregado é colocado em um evento inicial no espaço-tempo e ali uma velocidade inicial é dada, então sua trajetória subsequente será independente de sua estrutura inercial e composição.” [01]

Em outras palavras, a aceleração sofrida por diferentes corpos submetidos a um mesmo campo gravitacional não depende de nenhuma característica particular do corpo, ela é a mesma para todos. Este fato, observado por Galileu Galilei (Pisa, século XVI) e medido com precisão pelo experimento de Eötvös [06, 07] (dentre outros mais recentes), constitui o *Princípio de Equivalência Fraco*.

Com efeito, do ponto de vista newtoniano, este resultado está expresso na relação ²

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\vec{\nabla}\varphi \quad (0-1)$$

onde \vec{r} é o vetor posição de uma partícula teste e φ o potencial gravitacional ao qual ela está submetida definido como

$$\varphi = \varphi(\vec{r}) = -g_N \int d\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (0-2)$$

onde $\rho(\vec{r}')$ é a densidade de massa gravitacional que gera o campo e g_N a constante newtoniana de acoplamento da gravitação com a matéria.

² A segunda lei de Newton nos diz que quando uma partícula teste, de massas inercial e gravitacional m_I e m_g respectivamente, é submetida à ação de uma força gravitacional, a dinâmica de seu movimento devido a esta força é determinada pela equação

$$m_I \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -m_g \vec{\nabla}\varphi.$$

Em contrapartida, a informação que o experimento nos dá neste caso é:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\vec{\nabla}\varphi.$$

Vê-se explicitamente em (0-1) que a aceleração $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ gerada na partícula teste pela ação do campo φ não depende de nenhuma quantidade (ou característica) intrínseca desta. Portanto de (0-1) fica explícito que corpos de massas inerciais diferentes sofrem mesma aceleração quando submetidos ao mesmo campo gravitacional.

Juntando este fato com a informação fornecida por (I) - de que toda a forma de energia e matéria interagem gravitacionalmente - Albert Einstein observou que no caso particular em que são submetidos às mesmas condições iniciais, corpos quaisquer que caem livremente num campo gravitacional estão em repouso relativo no que diz respeito à ação desta força. A partir daí conjecturou³ que as leis físicas que regem os eventos neste referencial, exceto a gravitacional, são exatamente aquelas da Teoria da Relatividade Restrita: aquelas que são definidas para um observador inercial. Em suas palavras

“... O que torna possível esta maneira de conceber as coisas é o fato de a experiência nos ter ensinado que existe um campo de forças (o campo de gravidade) que possui a notável propriedade de comunicar a todos os corpos a mesma aceleração. O comportamento mecânico dos corpos em relação a K' é o mesmo que a experiência nos revela em relação a sistemas que estamos habituados a considerar como sistemas

³ “Seja K um referencial de Galileu, isto é, um sistema de referência tal que, em relação a ele (e pelo menos no domínio quadridimensional considerado), uma massa suficientemente afastada de outras massas se desloca em movimento retilíneo e uniforme. Seja K' um segundo sistema de coordenadas que tem, em relação a K , um movimento de translação *uniformemente acelerado*. Teríamos então uma massa suficientemente afastada de outras massas (*aquela que está em movimento retilíneo e uniforme em relação a K*) animada de movimento acelerado relativamente a K' , sendo a sua aceleração, tanto em grandeza como em direção, independente da sua composição material e do seu estado físico. Poderá um observador, em repouso relativamente a K' , inferir daqui que se encontra sobre um referencial ‘realmente’ acelerado?”

A resposta deve ser negativa.

Com efeito, o referido comportamento de massas que se movem livremente em relação a K' é susceptível de uma outra forma de interpretação, igualmente boa, que é a seguinte: o referencial K' não está animado de movimento acelerado, mas existe um campo de gravidade no domínio espaço-temporal considerado, e é esse o campo que origina o movimento acelerado dos corpos em relação a K' .” [08]

em ‘repouso’, ou seja, como sistemas ‘admissíveis’; o que, do ponto de vista físico, sugere a aceitação de que os dois sistemas K e K' se podem, com igual direito considerar ‘em repouso’, isto é, como sistemas igualmente admissíveis para a descrição física dos fenômenos. (...) Desde que se faça uma escolha apropriada de coordenadas, torna-se possível aplicar a teoria da relatividade no sentido restrito a domínios quadridimensionais infinitamente pequenos.” [08]

Este resultado também constitui um princípio, *Princípio de Equivalência de Einstein*, cujo conteúdo está expresso no seguinte enunciado:

“(i) o Princípio de Equivalência Fraco é válido, (ii) o resultado de qualquer experimento-teste local não gravitacional é independente da velocidade do aparato que está em queda livre, e (iii) o resultado de qualquer experimento-teste local não gravitacional é independente de onde e de quando no universo ele é realizado.” [01]

III. Princípio da Covariância Geral

“As leis gerais da natureza devem ser representadas por equações que tenham validade em todos os sistemas de coordenadas, isto é, que sejam covariantes em relação a toda e qualquer substituição (covariância geral).” [08]

Matematicamente isto significa que as equações da física devem ser tensoriais, ou seja, preservar a forma em mudanças arbitrárias de coordenadas. Em particular, a equação de movimento newtoniana (0-1) para uma partícula teste submetida a um campo gravitacional, não possui esta propriedade. Se escrita em um sistema de coordenadas acelerado ganha outra forma.

De fato, a equação newtoniana poderia não somente ser escrita numa forma covariante, como também generalizada (usando quantidades de um espaço-tempo quadridimensional), de um modo tal que o efeito da gravitação pudesse ser anulado por uma mudança de referencial e que, sob certas condições (cf. adiante), se reduzisse à (0-1).

Com efeito, seja um espaço-tempo riemanniano caracterizado por uma geometria $g_{\mu\nu}(x^\lambda)$ arbitrária. A equação covariante que descreve a trajetória $x^\mu(s)$ de uma partícula livre da ação de forças é chamada equação da geodésica

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0 \quad (0-3)$$

onde

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \equiv \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} [g_{\lambda\alpha,\beta} + g_{\lambda\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\lambda}] \quad (0-4)$$

é o símbolo de Christoffel. Esta equação generaliza o conceito de movimento retilíneo uniforme num espaço-tempo riemanniano de curvatura qualquer.

Como a conjectura de Einstein é de que a força gravitacional possa ser anulada por uma escolha de coordenadas, a idéia é olhar para (0-3) como uma generalização covariante de (0-1), onde o campo gravitacional φ não é mais interpretado como um campo que exerce força nas partículas e sim é incorporado à conexão de Christoffel efetivamente no campo $g_{\mu\nu}$ que caracteriza o espaço. Assim, a equação de movimento de uma partícula sob a ação do campo gravitacional se torna a equação de movimento de uma partícula livre, isto é, livre de forças, num espaço-tempo não euclidiano.

A fim de verificarmos se (0-3) de fato contém (0-1) é necessário estudar a primeira contribuição da conexão afim (0-4), isto é, a primeira contribuição dada pela geometria quando infinitesimalmente variada da geometria de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$, além de se considerar o regime de baixas velocidades comparativamente à da luz.

Assim, seja $g_{\mu\nu}$ uma geometria riemanniana que possa ser escrita como

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu} \quad (0-5)$$

onde $\varepsilon \ll 1$ e $h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}(x^\lambda)$ um tensor simétrico estático arbitrário. Para garantir o regime de baixas velocidades, considera-se que

$$\frac{dx^\mu}{ds} = \delta_0^\mu + \varepsilon v^\mu \quad (0-6)$$

onde v^μ é um campo de velocidades arbitrário. Substituindo-se (0-5), (0-6) em (0-4) e (0-3); e considerando apenas os termos de primeira ordem em ε , chega-se à expressão

$$\frac{d}{ds}(\delta_0^\mu + \varepsilon v^\mu) - \frac{1}{2}\varepsilon h_{00,\mu} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \mu = 0 \Rightarrow \frac{dv_0}{ds} = 0 \\ \mu = i \Rightarrow \frac{dv_i}{ds} = \frac{1}{2}h_{00,i} \end{cases}$$

que resulta em

$$x_0 = ct = as + b \quad (0-7a)$$

onde a e b são constantes arbitrárias, e

$$\frac{dv_i}{ds} = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{1}{2}h_{00} \right). \quad (0-7b)$$

Comparando (0-7) com (0-1), conclui-se que:

(i) o parâmetro s está associado ao tempo físico medido por um observador que se move junto com a partícula teste; e que

(ii) a componente '00' da perturbação da geometria está associada ao campo gravitacional newtoniano da seguinte forma: $\frac{1}{2}h_{00}(x^i) \rightarrow -\varphi(\vec{r})$.

A equação (0-7b) não depende das propriedades inerciais de quem sofre a força e, neste sentido, pode ser vista exatamente como a equação newtoniana que descreve o

movimento de uma partícula teste sob a ação do campo gravitacional. Como as leis físicas devem ser por princípio covariantes, a equação (0-3) da geodésica pode ser pensada como a expressão covariante da equação de movimento newtoniana na ausência de forças não gravitacionais, e portanto como a expressão matemática do Princípio da Equivalência de Einstein. O fato do campo gravitacional atuar da mesma forma em todos os corpos permite que a expressão covariante da equação de movimento sem forças externas seja feita através da gravitação identificando-a com a geometria do espaço-tempo, isto é, como algo que age em todos os corpos da mesma maneira através da própria estrutura do espaço. O potencial gravitacional gerado por uma determinada distribuição de matéria-energia seria a geometria do espaço-tempo que, através do símbolo de Christoffel, afetaria o movimento das partículas. A relação gravitacional entre os corpos, seria portanto, o agente estruturador do espaço-tempo físico.

Fica claro agora que, para fazer esta identificação, cada um dos pontos destacados - (I), (II) e (III) - têm papel crucial: as equações devem ser covariantes e o efeito da gravitação sobre um corpo (devido ao seu caráter universal) pode ser anulado localmente por uma mudança de referencial, isto é, para este observador tudo se passa como se estivesse na ausência de forças gravitacionais.

Assim, a partir desta analogia e de necessidades ideológicas (terminar com a noção de espaço e movimento absolutos deixada por Newton e permitir que as leis da física sejam as mesmas, na sua forma, para observadores submetidos a *qualquer* tipo de

movimento - Princípio da Relatividade estendido ou Postulado da Relatividade), Einstein empreende a construção de uma teoria da gravitação através da identificação do campo gravitacional com a geometria do espaço-tempo.⁴ Como consequência desta representação, a gravitação entre os corpos está agora expressa na estrutura do espaço-tempo. A matéria (e também toda a forma de energia) passa a modificar explicitamente o espaço-tempo no qual os eventos físicos acontecem.

É importante deixar claro que não pretendo convencer que o resultado da aproximação de campo fraco que faço implica univocamente na identificação do campo gravitacional com a geometria. A forma pela qual esta conexão se dá é singular - um caminho complexo e sem linearidade ao qual não temos acesso. Qualquer processo linear de construção de uma teoria é fictício e de teor meramente didático para que nos convençamos de que há um encadeamento lógico e contínuo que permeie sua construção. A idéia aqui é apenas fazer um convite, uma sugestão ao seguinte pensamento: um possível tratamento formal para o campo gravitacional, devido à sua ação ser a mesma para todos os corpos, é considerar espaços não euclidianos e incorporar seu efeito à geometria do espaço-tempo. Sendo assim, a demonstração de que a equação da geodésica contém, em primeira aproximação, as equações de Newton para a gravitação, serve aqui somente como estímulo para esta analogia. E desta forma, meio no escuro, seguimos em frente.

⁴ Por trás havia a necessidade ideológica de formular uma teoria que satisfizesse as idéias contestadoras de Ernst Mach - o espaço só poderia ser definido a partir do que há nele, não teria existência a priori: “Ninguém é competente para prever coisas sobre o espaço absoluto e o movimento absoluto; eles são pura criação do pensamento, puras construções mentais, que não podem ser produzidas na experiência. Todos os nossos princípios da mecânica são ... conhecimentos experimentais baseados nas posições e movimentos relativos dos corpos.” (Mach, *The Science of Mechanics* -1883. [09])

Formalmente, no artigo citado de 1916 intitulado *Os Fundamentos da Teoria da Relatividade Geral* [08], Einstein expõe a identificação da gravitação com a geometria através da expressão covariante do elemento de linha

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

isto é, da definição de medida infinitesimal de distância espaço-temporal entre dois pontos independente do observador. Neste, lê-se

“(...) resulta que, do ponto de vista físico, as grandezas $g_{\sigma\tau}$ devem ser consideradas como sendo aquelas que, relativamente ao sistema de referência escolhido, fazem a descrição do campo de gravidade. (...) A intervenção de um campo de gravidade aparece-nos, deste modo, associada a uma variabilidade espaço-temporal dos $g_{\sigma\tau}$. No caso geral não é possível fazer uma escolha de coordenadas que permita alcançar a validade da teoria da relatividade especial num domínio finito, mas mesmo nesse caso manter-nos-emos fiéis à idéia de que os $g_{\sigma\tau}$ descrevem o campo gravitacional.

A gravidade desempenha pois, na teoria da relatividade geral, um papel excepcional em relação às outras forças, e particularmente às forças eletromagnéticas, visto que as funções $g_{\sigma\tau}$ que fazem a descrição do campo gravitacional determinam, ao mesmo tempo, as propriedades métricas do espaço métrico quadridimensional.”

Por fim, para alguns autores [01], fazer esta identificação significa dizer que uma teoria qualquer que pretenda descrever a gravitação como um fenômeno de curvatura do espaço-tempo deve satisfazer os postulados de *teorias métricas da gravitação* baseados no Princípio de Equivalência de Einstein:

“(i) o espaço-tempo é dotado de uma métrica g , (ii) as linhas de universo de partículas teste são geodésicas desta métrica, e (iii) nos referenciais locais em queda livre, chamados referenciais locais de Lorentz, as leis da física não gravitacionais são aquelas da relatividade especial.” [01]⁵

⁵ As observações realizadas que suportam esta identificação são divididas em três categorias [01]:

(i) *Testes do Princípio de Equivalência Fraco*: experimentos do tipo Eötvös (balança de torção). A maior diferença encontrada entre as acelerações de dois corpos distintos submetidos a um mesmo campo gravitacional é da ordem de 10^{-4} ;

(ii) *Testes de Invariância de Lorentz Local*: as leis físicas não gravitacionais devem ser as mesmas para qualquer referencial de Lorentz local. Experimento de Hughes-Drever (1959-60). A contribuição que indicaria uma quebra desta invariância é da ordem de pelo menos 10^{-18} ; e

(iii) *Testes de Invariância de Posição Local*: “os resultados de experimentos-teste não gravitacionais locais devem ser independentes da localização espaço-temporal do referencial. (...) Os dois principais

A linha a ser traçada neste trabalho é mostrar que o cumprimento destas condições não implica na existência de uma equação diferencial para a geometria, e que, a dinâmica apresentada por ela pode ser herdada da dinâmica de outros campos sem que seja perdida sua identificação com o campo gravitacional.

testes da Invariância de Posição Local são o red-shift gravitacional que testam a existência de dependência espacial nos resultados dos experimentos locais, e as medições da constância das constantes fundamentais não gravitacionais que testam a dependência temporal.”

Capítulo 1: Cinemática⁶ e dinâmica da gravitação

Este capítulo é dedicado a mostrar que a formulação da Teoria da Relatividade Geral é dividida em duas partes independentes: cinemática e dinâmica. E que, sendo assim, mantendo a descrição cinemática da TRG, é possível propor um modo distinto de descrição dinâmica da geometria: pensar na nela como um campo efetivo, isto é, como produto de processos dinâmicos de outras entidades.

Com efeito, no artigo citado anteriormente [08], Einstein divide a construção da teoria em três partes fundamentais:

- I. cinemática I: movimento de partículas teste / Princípio de Equivalência de Einstein;
- II. dinâmica do campo: equações dinâmicas no vazio; e
- III. cinemática II: Princípio de Acoplamento Mínimo da Gravitação / Princípio de Equivalência de Einstein.

1.1 Cinemática – relação da gravitação com o universo físico:

Princípio de Equivalência de Einstein

⁶ O termo *cinemática* neste trabalho está empregado à forma com que o campo gravitacional age na matéria de uma forma geral: partículas teste, campos de força não gravitacionais - matéria e energia sob qualquer forma.

O estudo do movimento da matéria submetido a uma dada interação é chamado cinemática.

A pergunta é: como o campo gravitacional interage com a matéria e outros campos que não ele mesmo? De que forma a matéria e estes outros campos são afetados por esta modificação na geometria do espaço-tempo?

Devido ao caráter não-linear da gravitação, a cinemática dos corpos submetidos a ela precisa ser dividida em duas partes: a primeira relativa ao movimento das partículas teste e a segunda relativa a um conteúdo arbitrário de matéria e energia não gravitacional.

1.1.1 De como o campo gravitacional atua nas partículas teste

Como vimos inicialmente, na Teoria da Relatividade Geral, a cinemática das partículas teste é determinada pelo Princípio de Equivalência de Einstein e sua representação matemática: a equação (0-3) da geodésica. O objetivo aqui é mostrar que esta caracterização independe de como a dinâmica da geometria é determinada.

Repetindo a pergunta: como o campo gravitacional interage com a matéria?

Com efeito, no princípio do trabalho [pg. 09], mostramos que uma partícula teste de massa m submetida a um campo gravitacional pode ser tratada como uma partícula livre num espaço-tempo riemanniano, desde que os efeitos do campo gravitacional sejam incorporados à geometria deste espaço. Assim, a lagrangiana $L_{p.teste}$ associada a este sistema deve ser

$$L_{p.teste} = T - V = T.$$

Seja $x^\mu(s)$ a função que define a trajetória desta partícula num espaço-tempo riemanniano caracterizado por uma geometria $g_{\mu\nu}(x^\lambda)$ arbitrária. A energia cinética T é definida como

$$T = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx^\mu}{ds} \right)^2 = \frac{1}{2} m g_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\mu}{ds}$$

e a lagrangiana como

$$L_{p.teste} = \frac{1}{2} m g_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\mu}{ds}. \quad (1.1.1-1)$$

Pelo Princípio Variacional de Hamilton [10], a equação de movimento de um sistema qualquer representado por uma lagrangiana L é determinada pela seguinte variação

$$\frac{\delta S}{\delta x^\mu} = \frac{\delta \int ds \sqrt{-g} L}{\delta x^\mu}$$

onde x^μ são os graus de liberdade independentes do sistema. Substituindo na expressão acima a lagrangiana $L_{p.teste}$ (1.1.1-1) e efetuando a variação em relação à x^μ , a equação obtida é (0-3), isto é

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0.$$

Portanto a equação da geodésica, que contém o caso newtoniano (0-1), é resultado do princípio variacional de um sistema de partícula livre num espaço-tempo métrico riemanniano arbitrário. Isto significa que, seguindo os princípios fundamentais da mecânica, a equação da geodésica é a equação de movimento de partículas teste submetidas ao campo gravitacional se este for interpretado como geometria. A interação gravitacional está incluída na variação da geometria associada ao espaço-

tempo presente no símbolo de Christoffel (0-4). Com isto, a cinemática destas partículas está completamente caracterizada.

O ponto a ser retido aqui é o fato de que nenhuma informação sobre a caracterização dinâmica do campo $g_{\mu\nu}(x^\lambda)$ é necessária na caracterização cinemática. De fato, neste artigo [08], Einstein determina formalmente o movimento das partículas teste antes mesmo de determinar quais seriam as equações de movimento dinâmicas da geometria.

1.1.2 De como a matéria e toda a forma de energia são afetadas pelo campo gravitacional: o Princípio de Acoplamento Mínimo da Gravitação

“A teoria da relatividade especial levou à conclusão de que a massa inerte não é mais do que energia, cuja expressão matemática completa se encontra num tensor simétrico de segunda ordem – o tensor energia. Isto indica-nos que também na teoria da relatividade geral nós teremos de introduzir um tensor energia da matéria, T_σ^α , o qual há de ter caráter misto, como as componentes t_σ^α , da energia do campo gravitacional mas há de corresponder a um tensor simétrico covariante.” [08]

Na TRR, este tensor é definido [10,11] a partir da densidade lagrangiana \mathcal{L} de um campo qualquer. No caso de um campo vetorial $\psi_\alpha(x^\mu)$ e $\mathcal{L}(\psi_\alpha, \psi_{\alpha,\mu})$ temos pelo princípio variacional que, por exemplo

$$\frac{d}{dx^\nu} \left[\psi_{\alpha,\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{\alpha,\nu}} - \mathcal{L} \delta_{\mu\nu} \right] = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu}$$

$$T_\nu^\mu \equiv \psi_{\alpha,\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{\alpha,\nu}} - \mathcal{L} \delta_\nu^\mu \quad (1.1.2-1)$$

$$\frac{d}{dx^\nu} T_\mu^\nu = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu}. \quad (1.1.2-2)$$

Onde (1.1.2-2) é válida para um campo qualquer. Se as coordenadas x^μ são cíclicas em \mathcal{L} , a quantidade T_ν^μ é conservada

$$\frac{d}{dx^\nu}(T_\nu^\mu) = 0. \quad (1.1.2-3)$$

Com o objetivo de determinar como o campo gravitacional age na matéria, baseado na definição (1.1.2-1), Einstein faz a seguinte hipótese:

“Na distinção que a seguir vamos fazer entre o <<campo gravitacional>> e <<matéria>>, daremos a este último termo o significado de tudo quanto não for campo de gravidade, incluindo assim, dentro dele, não só aquilo que vulgarmente se entende por matéria, mas também o campo eletromagnético.” [08]

Isto significa propor uma separação entre a lagrangiana relacionada ao campo gravitacional $\mathcal{L}_{geom.}$ e a lagrangiana responsável pelos outros campos $\mathcal{L}_{mat.}$. Assim, em um sistema onde atuem forças gravitacionais e forças de outra natureza, a lagrangiana total seria estruturada como

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{mat.} + \mathcal{L}_{geom.} \quad (1.1.2-4)$$

Como na TRG as equações físicas devem ser, por princípio, covariantes, a lei de conservação (1.1.2-3) também deve ser e por este motivo assume a forma

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \quad (1.1.2-5)$$

onde o ponto-e-vírgula representa a derivada covariante definida como

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} \equiv \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} - \Gamma_{\alpha\nu}^\mu T^{\alpha\nu} - \Gamma_{\alpha\nu}^\alpha T^{\mu\nu}. \quad (1.1.2-6)$$

Assim, o tensor momento-energia $T_{\mu\nu}$ é redefinido também através da formulação variacional como

$$T^{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_{mat.})}{\delta g_{\mu\nu}} = g^{\mu\nu} \mathcal{L}_{mat.} + 2 \frac{\delta \mathcal{L}_{mat.}}{\delta g_{\mu\nu}} \quad (1.1.2-7)$$

onde $g_{\mu\nu}$ é a geometria do espaço-tempo, $g \equiv \det g_{\mu\nu}$ e $\mathcal{L}_{mat.}$ é a mesma lagrangiana (1.1.2-2) definida na TRR. A geometria de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ é substituída por uma geometria arbitrária $g_{\mu\nu}$.

Como visto, o símbolo de Christoffel é constituído de derivadas do tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Portanto, se partimos da identificação da interação gravitacional com a geometria, a expressão da derivada covariante (1.1.2-6) e a redefinição do tensor momento-energia (1.1.2-7), representam uma ação mínima e inevitável deste campo. Se o objetivo é construir uma teoria covariante e tratar a gravitação como geometria - não há escapatória - a interação mínima da gravitação está determinada pelo próprio formalismo. Esta constatação está formalizada no chamado *Princípio de Acoplamento Mínimo da Gravitação* [12], que nada mais é do que mais uma expressão do Princípio de Equivalência de Einstein, no que diz respeito ao fato de que as leis da TRR devem valer localmente na TRG: - uma derivada covariante, localmente, sempre pode ser escrita como uma derivada simples (1.1.2-6) e a lagrangiana de um sistema, também localmente, sempre pode ser escrita como a lagrangiana da TRR (1.1.2-4) e (1.1.2-7).

Ao final deste resultado, Einstein escreve:

“Os instrumentos matemáticos desenvolvidos em B proporcionam-nos a possibilidade de, sem ter de recorrer a outros meios, proceder a um alargamento dos enunciados das leis físicas da matéria (hidrodinâmica, eletrodinâmica de Maxwell) - tal como são formulados na teoria da relatividade especial - com o fim de adaptar à teoria da relatividade geral. Com essa adaptação, o que vai se obter não é uma nova limitação de possibilidades imposta pelo princípio da relatividade geral, mas sim um conhecimento exato da influência que o campo gravitacional exerce sobre todos os processos, e isto independentemente da introdução de qualquer nova hipótese.

Pôr o problema deste modo implica que não se introduzam como necessárias hipóteses concretas a respeito da natureza física da matéria (tomada no seu sentido restrito). Pode em particular ficar em aberto a questão de se saber se as teorias dos campos eletromagnético e gravitacional formam ou não, no seu conjunto, uma base suficiente para a teoria da matéria. O postulado da relatividade geral nada pode, em

princípio, ensinar-nos a este respeito. Será o desenvolvimento da teoria que há-de revelar se as doutrinas eletromagnéticas e da gravitação serão capazes de realizar, em conjunto, aquilo que a primeira não foi capaz de realizar sozinha.” [08]

Apesar de neste artigo este resultado só ser expresso a partir das equações dinâmicas do campo gravitacional, ele é definitivamente independente da descrição dinâmica do campo já que a conservação da energia constitui um princípio fundamental da física (Teorema de Noether) e o Postulado de Covariância Geral um princípio sem o qual a identificação da gravitação com a geometria não seria possível.

Assim como na equação da geodésica (0-3), vê-se em (1.1.2-5) e (1.1.2-6) que uma mudança na configuração de matéria-energia de um sistema altera a geometria do espaço-tempo também via símbolo de Christoffel. Espaços-tempos são criados pelo que há: matéria e energia.

Por fim, conclui-se aqui que a cinemática da TRG é completamente determinada através do Princípio de Equivalência de Einstein sem que nenhuma consideração sobre a descrição dinâmica da geometria seja feita. O movimento das partículas teste é definido através do Princípio de Equivalência Fraco e do Princípio de Covariância Geral - equação da geodésica - e o de um conteúdo arbitrário de matéria e energia, através do Princípio de Acoplamento Mínimo da Gravitação.

1.2 Dinâmica

Uma vez fixada a cinemática dos corpos pontuais submetidos à interação gravitacional e, de uma forma mais geral, de um conteúdo arbitrário de matéria e

energia, a questão que se coloca é: se a geometria possui uma dinâmica, o que a determina?

Definir a dinâmica de um campo significa apontar o modo pelo qual sua evolução é gerada, isto é, sua equação de movimento. O Princípio Variacional nos diz que dada a densidade lagrangiana \mathcal{L} , a variação da ação [10,11]

$$S = \int d^4V \mathcal{L}$$

em relação à variável dinâmica do sistema dá lugar às equações de movimento do campo em questão. Assim,

$$\delta S = \delta \int d^4V \mathcal{L} = 0 \Rightarrow \text{equação de movimento,} \quad (1.2-1)$$

onde d^4V é o elemento de volume quadridimensional.

No caso do campo gravitacional a pergunta é: que lagrangiana determina a dinâmica sob a qual a geometria $g_{\mu\nu}$ do espaço-tempo é submetida?

Segundo Princípio de Covariância Geral [pg.07], para gerar equações covariantes, as lagrangianas devem ser invariantes sob mudanças de coordenadas arbitrárias.

Vimos em (1.1.2-4) que o Princípio de Acoplamento Mínimo da Gravitação propõe uma tentativa de separação entre o conteúdo material-energético gravitacional e não gravitacional da seguinte forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{mat.} + \mathcal{L}_{geom.}$$

onde o termo $\mathcal{L}_{mat.}$ gera o acoplamento da matéria não gravitacional com a gravitação e $\mathcal{L}_{geom.}$, o responsável por gerar a dinâmica da geometria. Assim, seguindo (1.2-1), a dinâmica do campo gravitacional é determinada a partir da variação

$$S = \int d^4V \mathcal{L}_{geom.} \quad (1.2-2a)$$

$$\delta S = \int d^4V \delta(\mathcal{L}_{geom.}) = 0 \Rightarrow \text{dinâmica para } g_{\mu\nu}. \quad (1.2-2b)$$

Como o objetivo final é gerar evolução na geometria, vamos mostrar nas próximas sessões que existem ao menos duas formas distintas de construir esta dinâmica:

- (i) pensando a geometria como sendo um campo que satisfaz uma equação diferencial, e portanto, possuindo dinâmica (própria);
- (ii) pensando a geometria como um campo efetivo que herda a dinâmica de outros campos que, estes sim, satisfazem uma equação de movimento e por este motivo possuem dinâmica (própria).

1.2.1 Geometria com dinâmica própria: a Teoria da Relatividade Geral

Para construir a dinâmica do campo gravitacional, o caminho seguido por Einstein na construção da teoria foi, por inúmeras razões, partir diretamente à busca de uma *equação diferencial para a geometria*. A forma final destas equações é

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi}{c^2} g_N T_{\mu\nu}. \quad (1.2.1-1)$$

As quantidades $R_{\mu\nu}$ e R são respectivamente o tensor de Riemann e o escalar de curvatura que são definidos a partir do tensor de curvatura $R_{\eta\beta\gamma}^\alpha$ da seguinte maneira

$$R_{\eta\beta\gamma}^{\alpha} \equiv -\Gamma_{\beta\eta,\gamma}^{\alpha} + \Gamma_{\eta\gamma,\beta}^{\alpha} + \Gamma_{\tau\gamma}^{\alpha}\Gamma_{\beta\eta}^{\tau} - \Gamma_{\tau\beta}^{\alpha}\Gamma_{\gamma\eta}^{\tau}$$

e

$$R_{\eta\gamma} \equiv R_{\eta\alpha\gamma}^{\alpha} \quad \text{e} \quad R \equiv R_{\eta}^{\eta}.$$

O tensor $G_{\mu\nu}$ é conhecido como tensor de Einstein, c é a velocidade da luz no vácuo e $T_{\mu\nu}$ o tensor momento-energia não gravitacional do sistema definido de acordo com (1.1.2-7). Como o tensor métrico é simétrico, se trata de um conjunto de 10 equações diferenciais de segunda ordem não-lineares cujas variáveis dinâmicas são as componentes da métrica. Um conjunto de equações que determinam a geometria $g_{\mu\nu}$ do espaço-tempo a partir de relações entre a matéria ($T_{\mu\nu}$) e quantidades que a caracterizam ($R_{\eta\gamma}, R$).

Claramente, o conteúdo material e energético do sistema afeta diretamente a geometria. Parecia que Einstein havia finalmente construído uma teoria que colocasse em prática o Princípio de Mach [09]. Além disto, ele diz

“...a razão mais forte para que aceitemos as equações precedentes está em que elas acarretam a seguinte consequência, como vai se mostrar no §17: para as componentes da energia total vigoram equações de conservação (da quantidade de movimento e energia)...” [08]

Isto é, as equações (1.2.1-1) têm a importante propriedade de serem consistentes com a lei de conservação de energia (1.1.2-5)

$$G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \Rightarrow G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = T^{\mu\nu}{}_{;\nu}.$$

A formulação variacional desta teoria foi feita posteriormente por David Hilbert [13] em 1915. Ele mostrou que, na ausência de matéria, a lagrangiana $\mathcal{L}_{geom.}$ responsável

pela interação gravitacional, que quando variada em relação à uma geometria de Riemann gera o tensor de Einstein, é justamente aquela proporcional ao escalar de curvatura R . Isto é,

$$S = \int d^4V \sqrt{-g} \mathcal{L}_{geom.}$$

onde

$$\mathcal{L}_{geom.} = R.$$

De fato, sua variação em relação à uma geometria riemanniana gera justamente as equações de Einstein (1.2.1-1) no vazio

$$\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = \int d^4V \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_{geom.})}{\delta g_{\mu\nu}} = 0$$

$$\Downarrow \quad (1.2.1-2)$$

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0.$$

Sobre esta lagrangiana Einstein escreve:

“...resulta também que G deve ser igual (a menos de um fator constante) ao escalar de curvatura de Riemann; isto porque não há nenhum outro invariante que possua as propriedades exigidas para G^* . (...)” [13]

* “É aqui que reside o motivo por que a postulação da relatividade geral conduz a uma teoria da gravitação inteiramente determinada.” (nota de pé de página). N.a.: $G = \mathcal{L}_{geom.}$.

Por fim, a dinâmica da Teoria da Relatividade Geral é construída a partir da idéia de que a geometria possui dinâmica própria e portanto deve satisfazer uma equação de movimento. Partindo deste princípio, as equações (1.2.1-1) são praticamente uma consequência direta do PEE, já que relacionam o tensor momento-energia com a geometria e preservam a lei da conservação de energia.

Importante também notar que não é através da descrição cinemática da teoria que estas equações são construídas.

1.2.2 Geometria efetiva: um novo caminho

A secção 1.1 foi dedicada a mostrar que a cinemática da TRG é independente da descrição dinâmica, e a secção anterior a mostrar que a descrição dinâmica não decorre diretamente da cinemática. Em outras palavras, nada sobre a forma com que a dinâmica da geometria é determinada é requerida na descrição cinemática.

Contrariamente a declaração supracitada de Einstein [pg. 25], onde ele diz que a postulação da TRG conduz a uma teoria da gravitação inteiramente determinada, vamos mostrar aqui que é possível manter toda a descrição cinemática – equações: (0-3), (1.1.2-4), (1.1.2-5), (1.1.2-6) e (1.1.2-7) - e propor outra descrição dinâmica para a gravitação. Para isto é necessário que a geometria seja definida a partir de outro campo que apresente dinâmica própria. Em outras palavras, $\mathcal{L}_{geom.}$ ainda determinará a dinâmica do campo $g_{\mu\nu}$, mas de forma indireta, não será mais função do escalar de curvatura R e sim deste outro campo.

Com efeito, seja $f(x^\mu)$ um campo qualquer cuja dinâmica esta contida na lagrangiana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(f). \quad (1.2.2-1)$$

De acordo com (1.2-1), a equação de movimento deste campo é dada pela variação da ação

$$S = \int d^4V \mathcal{L}(f) .$$

Assim,

$$\frac{\delta S}{\delta f} = \int d^4V \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta f} = 0 \Rightarrow \text{dinâmica para } f(x^\mu) .$$

O que está sendo dito é que, se o campo gravitacional for identificado com a geometria através de PEE (isto é sobre $g_{\mu\nu}$ valem as relações (0-3), (1.1.2-4), (1.1.2-5) e (1.1.2-7)), e além disto for definido por

$$g_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu}(f) \quad (1.2.2-2)$$

em princípio, não há problemas em se descrever a dinâmica da métrica através da dinâmica de f . Se definida de forma indireta de acordo com (1.2.2-2), a variação da lagrangiana do campo f gera dinâmica para a geometria

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta f} = \int d^4V \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta f} = 0 \\ \Downarrow \\ \text{dinâmica para } f \\ \Downarrow \quad (1.2.2-3) \\ g_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu}(f) \\ \Downarrow \\ \text{dinâmica para } g_{\mu\nu} \end{aligned}$$

onde $g_{\mu\nu}$ é uma geometria efetiva que desempenha o mesmo papel àquela proposta pela TRG (Princípio de Equivalência de Einstein [pg. 07]) e satisfaz os postulados que *teorias métricas da gravitação* [pg.12] devem satisfazer.

Desta forma, vimos que na TRG são finalmente, cinemática e dinâmica, descrições descoladas uma da outra. Toda a caracterização cinemática da geometria se baseia apenas no seu caráter efetivo, isto é, na sua relação com o universo físico. É exatamente este fato que nos permite, mantendo esta relação, descrever sua dinâmica através do processo acima (1.2.2-3). Um caminho conceitualmente distinto do proposto pela TRG (1.2.1-2).

A idéia fundamental aqui é observar que identificar a gravitação com a geometria do espaço-tempo através do PEE não implica em uma descrição dinâmica única deste campo.

A partir deste ponto vamos desenvolver a Teoria Espinorial da Gravitação, uma teoria da gravitação cuja cinemática é idêntica a da TRG, e cuja geometria é tratada como um campo efetivo através de (1.2.2-3).

Capítulo 2: A Teoria Espinorial da Gravitação

Antes de apresentar a Teoria Espinorial da Gravitação, é necessário introduzir brevemente as estruturas matemáticas necessárias.

2.0 Grupo de Lorentz, Álgebra de Clifford e campos espinoriais

O Grupo de Lorentz é o grupo de simetrias que representa as mudanças de observadores sob as quais as equações físicas da TRR são invariantes.

Por apresentar 6 graus de liberdade relativos às rotações espaço-temporais, este grupo é formado pelo produto direto de duas representações irredutíveis do grupo de simetrias das rotações tridimensionais O_3 caracterizado por seus autovalores de momento angular

$$\lambda = j(j+1) \text{ e } m$$

e cuja dimensão é dada por

$$\dim(O_3) = (2j+1)$$

Por este motivo, a dimensão do espaço-base das representações irredutíveis do Grupo de Lorentz depende dos autovalores de momento angular j e j' associados às duas representações do grupo O_3 associadas e é dada por

$$\dim(\text{Lor. } (j, j')) = (2j+1)(2j'+1).$$

Se além das simetrias de Lorentz estivermos também interessados em simetrias de inversão espacial (transformações de paridade) e conjugação complexa, é necessário

fazer uma soma direta de duas representações de Lorentz complementares cuja dimensão é dada por

$$\dim(2Lor. (j, j') + par. + comp.) = 2(2j + 1)(2j' + 1). \quad (2.0-1)$$

Neste trabalho, o interesse está nos campos relativísticos de momento angular intrínseco (spin) $j = 1/2$, simétricos em relação à inversão espacial e conjugação complexa. Trabalharemos com campos escalares Ψ que são base da representação $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ do grupo que é constituído pela soma direta de duas representações irredutíveis do Grupo de Lorentz - $(1/2, 0)$ e $(0, 1/2)$.

Pela relação acima (2.0-1), como em cada representação temos $j = 0$ e $j' = 1/2$ e vice-versa, a dimensão deste espaço é 4 e portanto os campos escalares Ψ devem possuir 4 componentes. Esta é a chamada *representação espinorial de Dirac* e os campos a quatro componentes são chamados *espinores de Dirac*. [14, 15]

Vamos apresentar aqui apenas as características e propriedades que serão importantes para o trabalho que segue. Detalhes e demonstrações podem ser encontrados nas referências acima citadas.

Com efeito, seja um espaço-tempo de Minkowski caracterizado por uma geometria $\eta'_{\mu\nu}$ num sistema de coordenadas arbitrário e x^μ as coordenadas de um ponto deste espaço. Sobre cada ponto é definido um objeto constituído por quatro funções escalares complexas representadas por

$$\Psi(x^\mu) = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} (x^\mu).$$

Seu transposto conjugado é , por construção, definido como

$$\bar{\Psi} \equiv \Psi^\dagger \gamma^0$$

onde

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

é uma matriz 4x4, de forma que o produto

$$\bar{\Psi}\Psi$$

seja um escalar por transformações de Lorentz. Definido desta maneira, este campo espinorial obedece às seguintes propriedades fundamentais

(i) $\bar{\Psi}(\tilde{x}^\mu) = \Psi(x^\mu)$: é invariante por transformações arbitrárias de coordenadas no espaço-tempo físico;

(ii) o produto escalar é invariante sob transformações de Lorentz locais, isto é

$$\bar{\Psi}'\Psi' = \bar{\Psi}\Psi$$

onde

$$\Psi'(x^\mu) = S(\Lambda)\Psi(x^\mu) \quad \text{e} \quad \bar{\Psi}'(x^\mu) = \bar{\Psi}(x^\mu)S^{-1}(\Lambda) \quad (2.0-2)$$

e $S(\Lambda)$ são as matrizes de Lorentz da representação espinorial de Dirac $(1/2,0) \oplus (0,1/2)$, tais que

$$S(\Lambda)^\dagger = \gamma^0 S(\Lambda)^{-1} \gamma^0.$$

Assim, se torna possível definir as seguintes quantidades no espaço-tempo de Minkowski:

$$(i) A \equiv \bar{\Psi}'\Psi' = \bar{\Psi}\Psi \Rightarrow \text{escalar de Lorentz} \quad (2.0-3a)$$

$$(ii) B \equiv i\bar{\Psi}'\gamma^5\Psi' = \det(\Lambda)i\bar{\Psi}\gamma^5\Psi \Rightarrow \text{pseudo-escalar de Lorentz} \quad (2.0-3b)$$

$$(iii) J^\mu \equiv \bar{\Psi}'\gamma^\mu\Psi' = \Lambda_\nu^\mu\bar{\Psi}\gamma^\nu\Psi \Rightarrow \text{vetor de Lorentz} \quad (2.0-3c)$$

$$(iv) I^\mu \equiv \bar{\Psi}'\gamma^\mu\gamma^5\Psi' = \det(\Lambda)\Lambda_\nu^\mu\bar{\Psi}\gamma^\nu\gamma^5\Psi \Rightarrow \text{pseudo-vetor de Lorentz} \quad (2.0-3d)$$

$$(v) \bar{\Psi}'\sigma^{\mu\nu}\Psi' = \Lambda_\alpha^\mu\Lambda_\beta^\nu\bar{\Psi}\sigma^{\alpha\beta}\Psi \Rightarrow \text{tensor de Lorentz}^7 \quad (2.0-3e)$$

com a condição de que as quantidades γ^μ com $\mu=0,1,2,3$, chamadas *matrizes de Dirac* (cf. adiante), sejam as matrizes de representação da Álgebra de Clifford na base dos espinores de Dirac, e que portanto devem satisfazer às condições

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2I\eta^{\mu\nu} \quad (2.0-4a)$$

e

$$(\gamma^\mu)^+ = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 \quad (2.0-4b)$$

onde I é a matriz identidade quadridimensional. Em coordenadas cartesianas, estas matrizes têm a forma

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

onde $i=1,2,3$, 1 é a matriz identidade bidimensional e σ_i são as matrizes de Pauli e obedecem as relações

$$\sigma_i\sigma_j = i\varepsilon_{ijk}\sigma_k + \delta_{ij}. \quad (2.0-5)$$

Definindo

$$\gamma^5 \equiv \frac{i}{4!}\eta_{\alpha\beta\mu\nu}\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu\gamma^\nu$$

onde

⁷ $\sigma^{\mu\nu} \equiv \gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu$.

$$\eta_{\alpha\beta\mu\nu} \equiv -\frac{1}{\sqrt{-g}} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$$

é possível mostrar que γ^5 obedece às propriedades

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \quad (2.0-6a)$$

e

$$\gamma^5 \gamma^5 = I. \quad (2.0-6b)$$

As propriedades (2.0-4) e (2.0-6) definem uma álgebra chamada Álgebra de Clifford, cujos elementos são

$$I, \gamma^\mu, \gamma^5, \gamma^\mu \gamma^5. \quad (2.0-7)$$

Uma última propriedade importante e característica desta álgebra, é o fato dos campos espinoriais terem que satisfazer a identidade Pauli-Kofink [16]

$$(\bar{\Psi} Q \gamma_\mu \Psi) \gamma^\mu \Psi = (\bar{\Psi} Q \Psi) \Psi - (\bar{\Psi} Q \gamma_5 \Psi) \gamma^5 \Psi \quad (2.0-8)$$

onde Q é um elemento qualquer de (2.0-7). Algumas consequências imediatas de (2.0-8):

$$(i) \quad Q = I \quad \Rightarrow \quad J_\mu J^\mu = A^2 + B^2 \quad (\text{multiplicando à esquerda } \bar{\Psi}) \quad (2.0-9a)$$

$$(ii) \quad Q = \gamma_5 \quad \Rightarrow \quad I_\mu J^\mu = 0 \quad (\text{multiplicando à esquerda } \bar{\Psi}) \quad (2.0-9b)$$

$$(iii) \quad Q = \gamma_5 \quad \Rightarrow \quad I_\mu I^\mu = -J_\mu J^\mu \quad (\text{multiplicando à esquerda } \bar{\Psi} \gamma^5) \quad (2.0-9c)$$

Como A e B são quantidades reais⁸, e pelos resultados (2.0-9a) e (2.0-9c), as correntes J^μ e I^μ definidas em (2.0-3c) e (2.0-3d) são chamadas vetoriais (vetor tipo tempo) e axiais (vetor tipo espaço).

⁸ Com efeito: $A^+ = (\bar{\Psi} \Psi)^+ = (\Psi^+ \gamma^0 \Psi)^+ = \bar{\Psi} \Psi = A$ e $B^+ = (i \bar{\Psi} \gamma^5 \Psi)^+ = (i \Psi^+ \gamma^0 \gamma^5 \Psi)^+ = i \bar{\Psi} \gamma^5 \Psi = B$.

2.1 Espinores de Heisenberg e uma generalização

Como uma aplicação da estrutura apresentada acima, com o intuito de construir uma *Teoria Quântica das Partículas Elementares*, Werner Karl Heisenberg propôs em 1957 [04] a seguinte lagrangiana *não-linear* para campos espinoriais a quatro componentes

$$\mathcal{L}_H = \frac{i}{2} \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - \frac{i}{2} (\partial_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu \Psi - V(\Psi)^9 \quad (2.1-1a)$$

onde

$$V(\Psi) \equiv \pm \frac{l^2}{2} (A^2 + B^2) = \pm \frac{l^2}{2} J^\mu J_\mu \quad (2.1-1b)$$

e l^2 um parâmetro positivo responsável pela intensidade da não-linearidade do campo (que para Heisenberg estaria associado com um “comprimento universal”). A equação de movimento associada é

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi \mp l^2 (A + iB\gamma^5) \Psi = 0. \quad (2.1-2)$$

Uma possível generalização desta lagrangiana é

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - \frac{i}{2} (\partial_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu \Psi - V(\Psi) \quad (2.1-3a)$$

onde

$$V(\Psi) \equiv \mp \frac{l^2}{2} (A^2 + \varepsilon B^2) \quad (2.1-3b)$$

e $\varepsilon = \pm 1$, e a equação de movimento associada

⁹ A lagrangiana de Dirac é

$$\mathcal{L}_D = \frac{i}{2} \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - \frac{i}{2} (\partial_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu \Psi - m \bar{\Psi} \Psi.$$

Como A e B são escalares, a diferença da lagrangiana de Heisenberg para a de Dirac está no fato de que estes escalares dependem de ponto. Assim, o potencial $V(\Psi)$, atua formalmente como uma massa de Dirac que depende de ponto.

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi \pm l^2 (A + i\varepsilon B \gamma^5) \Psi = 0. \quad (2.1-4)$$

Nestas teorias, (2.1-1) e (2.1-3), as correntes vetoriais e axiais, (2.0-3c) e (2.0-3d), apresentam as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} \partial_\mu J^\mu &= 0 \\ \partial_\mu I^\mu &= 2l^2(1-\varepsilon)AB. \end{aligned}$$

Portanto, vale observar que a divergência de ambas as correntes é nula apenas quando $\varepsilon = 1$. Esta é exatamente a escolha de Heisenberg (2.1-1).

Estas teorias servirão de base para a construção da Teoria Espinorial da Gravitação.

2.1.1 Solução de onda plana

Com o objetivo apenas de examinar uma solução específica das teorias (2.1-3) apresentadas, vamos analisar em que elas se diferenciam na solução de onda plana.

Com efeito, seja um campo espinorial da forma

$$\Psi(x) = \overset{0}{\Psi} e^{ik_\mu x^\mu}$$

onde $\overset{0}{\Psi}$ possui quatro componentes constantes, x^μ é um sistema de coordenadas cartesiano e k_μ o vetor de onda do campo. Substituindo esta forma em (2.1-4), encontra-se

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \overset{0}{\Psi} e^{ik_\mu x^\mu} \pm l^2 \left(\overset{0}{A} + i\varepsilon \overset{0}{B} \gamma^5 \right) \overset{0}{\Psi} e^{ik_\mu x^\mu} = 0$$

onde

$$\overset{0}{A} \equiv \overset{0}{\Psi} \overset{0}{\Psi} \text{ e } \overset{0}{B} \equiv i \overset{0}{\Psi} \gamma^5 \overset{0}{\Psi}.$$

Definindo as quantidades

$$\mu \equiv l^2 \overset{0}{A} \text{ e } \alpha \equiv l^2 \overset{0}{B}$$

a equação fica reescrita como

$$\gamma^\mu k_\mu \overset{0}{\Psi}_\pm (\mu + i\varepsilon\alpha\gamma^5) \overset{0}{\Psi} = 0.$$

Substituindo nela a forma matricial dos espinores e as matrizes de Dirac em coordenadas cartesianas, obtém-se

$$k_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \eta \end{pmatrix} - k_i \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \eta \end{pmatrix} \pm \mu \begin{pmatrix} \varphi \\ \eta \end{pmatrix} \pm i\varepsilon\alpha \begin{pmatrix} \varphi \\ \eta \end{pmatrix} = 0$$

onde cada campo φ e η possui duas componentes. Escrevendo de outra forma

$$\begin{cases} k_0\varphi + k_i\sigma_i\eta \pm \mu\varphi \pm i\varepsilon\alpha\eta = 0 \\ -k_0\eta - k_i\sigma_i\varphi \pm \mu\eta \pm i\varepsilon\alpha\varphi = 0. \end{cases}$$

Ou ainda

$$(k_i\sigma_i \pm i\varepsilon\alpha)\eta = -(k_0 \pm \mu)\varphi \quad (2.1.1-1a)$$

$$(-k_i\sigma_i \pm i\varepsilon\alpha)\varphi = (k_0 \mp \mu)\eta. \quad (2.1.1-1b)$$

Isolando o campo η em (2.1.1-1b)

$$\eta = \frac{(-k_i\sigma_i \pm i\varepsilon\alpha)}{(k_0 \mp \mu)}\varphi \quad (2.1.1-2)$$

e substituindo em (2.1.1-1a) obtém-se

$$\frac{(k^2_i\sigma^2_i + \alpha^2)}{(k^2_0 - \mu^2)}\varphi = \varphi$$

onde $(k_0 \pm \mu) \neq 0$. Assim, como φ é constante e σ_i obedece à (2.0-5), encontra-se a relação

$$k^2_0 - k^2_i = \mu^2 + \alpha^2. \quad (2.1.1-3)$$

Por fim, de (2.1.1-2) e (2.1.1-3), a solução de onda plana da equação (2.1-4) é

$$\Psi(x^\mu) = \overset{0}{\Psi} e^{ik_\mu x^\mu} = \left(\frac{1}{-k_i \sigma_i \pm i \varepsilon \alpha} \right) \varphi e^{ik_\mu x^\mu} \quad (2.1.1-4a)$$

com a condição

$$k_\nu k^\nu = \mu^2 + \alpha^2 \text{ e } (k_0 \pm \mu) \neq 0 \quad (2.1.1-4b)$$

onde a relação (2.1.1-4b) não depende de ε e é análoga à obtida na solução de onda plana de Dirac.¹⁰ O sinal de ε atua somente na parte constante da solução, portanto as soluções de onda plana para a teoria de Heisenberg e para a teoria com $\varepsilon = -1$ são estruturalmente muito semelhantes.

2.2 A Teoria Espinorial da Gravitação

2.2.1 A idéia

A TEG propõe um novo caminho: pensar na gravitação como uma teoria efetiva, isto é, considerar a possibilidade da geometria não estar vinculada a uma equação diferencial.

Proposta pelo Cosmólogo Mário Novello à comunidade científica em 2006 [17], a Teoria Espinorial da Gravitação é uma aplicação direta das idéias desenvolvidas até

¹⁰ Comparativamente à solução de onda plana de Dirac, novamente vemos aqui que os escalares A e B fazem o mesmo papel da massa no que diz respeito à relação com o vetor de onda k . Com efeito

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\Psi = 0$$

cuja solução de onda plana é

$$\Psi(x^\mu) = \overset{0}{\Psi} e^{ik_\mu x^\mu} = \left(\frac{1}{k_i \sigma_i} \right) \varphi e^{ik_\mu x^\mu}$$

e

$$k_\nu k^\nu = m^2 \text{ e } (k_0 - m) \neq 0.$$

aqui: uma teoria da gravitação que propõe uma dinâmica para a geometria distinta da proposta pela Teoria da Relatividade Geral mantendo a identificação entre geometria e gravitação via Princípio de Equivalência de Einstein.

Formalmente se trata de olhar para a geometria como um campo efetivo vinculado dinamicamente à um campo espinorial do tipo (2.1-3) de acordo com (1.2.2-3), isto é

$$g_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu}(\Psi)$$

e

$$\delta S = \int d^4V \delta \mathcal{L}_{geom.}(\Psi) = 0 \Rightarrow \text{dinâmica para } g_{\mu\nu}(\Psi) .$$

O ponto principal é que a geometria seja definida de forma tal que herde a dinâmica de campos espinoriais não-lineares.¹¹

Por motivos e associações que o perseguiram durante sua carreira como cientista, Mário Novello decidiu retomar a proposta não-linear de Werner Heisenberg (2.1-1) para descrever campos quânticos e partículas elementares como uma possibilidade de, através deles, descrever a dinâmica da geometria $g_{\mu\nu}$ do espaço-tempo identificada com a gravitação.

De fato, o que esta teoria faz é introduzir um intermediário entre a matéria e a geometria. Sobre o caráter fundamental do campo gravitacional, podemos entender de

¹¹ A possibilidade de se construir uma teoria para a gravitação cujos objetos dinâmicos fossem campos espinoriais de spin semi-inteiro foi estudada por Richard Feynman nos anos 60 [07]. Nesta época, concluiu que não seria possível produzir - através dos campos já conhecidos ou de combinações deles - um potencial com as propriedades fundamentais do potencial gravitacional, isto é, proporcional a massa, inversamente proporcional à distância e estático. De fato, não é possível sequer encontrar uma solução da equação de Dirac proporcional a alguma potência arbitrária de r . O mesmo não acontece aqui. O fato das equações espinoriais serem não-lineares nos permite produzir - com os campos de spin semi-inteiro - um campo proporcional $\frac{1}{r}$, como veremos a seguir.

duas maneiras: o campo gravitacional continua a ser um campo fundamental da natureza mas agora passa a ser identificado com o campo espinorial e não com a geometria do espaço-tempo ou, o campo gravitacional continua a ser identificado com a geometria mas perde o caráter fundamental - já que ele é gerado por combinações de outro campo (espinorial).

2.2.2 Do Princípio de Equivalência de Einstein ao campo espinorial

I. Princípio de Equivalência de Einstein: geodésicas e acoplamento mínimo da geometria com a matéria

Vimos que o conteúdo do Princípio de Equivalência de Einstein é relativo à ação da gravitação na matéria, isto é, se refere ao efeito da gravitação na matéria e energia sob qualquer forma. Por se tratar de um princípio, não tem nenhuma ligação formal com o desenvolvimento da dinâmica da geometria. Assim, o PEE também é princípio da TEG:

(i) *Na ausência de forças não gravitacionais, corpos materiais pontuais seguem geodésicas no espaço-tempo quadridimensional riemanniano;*

(ii) *Vale o Princípio de Acoplamento Mínimo da Gravitação: o tensor momento-energia é definido como em (1.1.2-7)*

$$T^{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_{mat.})}{\delta g_{\mu\nu}} = g^{\mu\nu} \mathcal{L}_{mat.} + 2 \frac{\delta \mathcal{L}_{mat.}}{\delta g_{\mu\nu}}$$

onde $\mathcal{L}_{mat.}$ se refere a todo o conteúdo material e energético não gravitacional (o mesmo da TRR); e também obedece à lei de conservação de energia na forma covariante (1.1.2-5)

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0.$$

II. A geometria efetiva

Seja $g_{\mu\nu}$ a geometria do espaço-tempo identificada com a gravitação definida da seguinte forma

$$g_{\mu\nu}(\Psi) \equiv \eta'_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\nu}(\Psi) \quad (2.2.2-1)$$

onde $\varphi_{\mu\nu}$ é um tensor de segunda ordem simétrico que depende de um campo espinorial Ψ vinculado à lagrangiana

$$\mathcal{L}_{TEG}(\Psi; T_{\mu\nu}) \equiv \mathcal{L}_{geom.}(\Psi) + \mathcal{L}_{mat.}(\Psi; T_{\mu\nu}) \quad (2.2.2-2)$$

onde

$$\mathcal{L}_{geom.}(\Psi) = \frac{i}{2} \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - \frac{i}{2} \partial_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi - V(\Psi) \quad (2.2.2-3a)$$

e

$$V(\Psi) = s(A^2 + \varepsilon B^2) \quad \text{e} \quad s \equiv \frac{l^2}{2}. \quad (2.2.2-3b)$$

A lagrangiana da matéria $\mathcal{L}_{mat.}$ é definida (cf. adiante) de tal forma que o Princípio de Equivalência de Einstein seja satisfeito. Vale observar que a expressão (2.2.2-1) que define a geometria é exata – não se trata uma pequena perturbação na métrica de Minkowski.

De (2.2.2-1) e (2.2.2-3) se torna explícito o que foi dito acima sobre o caráter efetivo da geometria do espaço-tempo: a dinâmica carregada pela geometria é herdada da dinâmica de Heisenberg.

III. O tensor $\varphi_{\mu\nu}$

Para se contruir um tensor de segunda ordem simétrico definido no espaço-tempo físico a partir de Ψ , é necessário recorrer às quantidades definidas em (2.0-3). Como o tensor $\sigma_{\mu\nu}$ é antissimétrico, restam as correntes J_μ e I_μ .

A forma de $\varphi_{\mu\nu}$ é arbitrária desde que cumpra o requisito de ser segunda ordem, simétrico, adimensional e de gerar uma geometria que seja compatível com a obsevação. Cada definição gera uma relação distinta da geometria com o campo espinorial.

Como uma consequência imediata de (2.2.2-1), e do fato de o objeto dinâmico ser o campo espinorial e não a métrica, a variação de $g_{\mu\nu}$ em relação a Ψ é equivalente à variação $\varphi_{\mu\nu}$ em relação a Ψ :

$$\delta g_{\mu\nu} = \delta \varphi_{\mu\nu}. \quad (2.2.2-4)$$

IV. O princípio variacional e a equação de movimento

A partir da lagrangiana (2.2.2-2), obtém-se a equação de movimento ao variar a ação S em relação a Ψ e $\bar{\Psi}$ independentemente. Com efeito

$$S = \int d^4x \sqrt{-\eta'} (\mathcal{L}_{geom.} + \mathcal{L}_{mat.})$$

$$\frac{\delta S}{\delta \bar{\Psi}} = \int d^4x \frac{\sqrt{-\eta'} \delta \mathcal{L}_{geom.}}{\delta \bar{\Psi}} + \int d^4x \frac{\delta (\sqrt{-\eta'} \mathcal{L}_{mat.})}{\delta \bar{\Psi}} \quad (2.2.2-5)$$

onde $\eta' \equiv \det \eta'_{\mu\nu}$.

Substituindo (2.2.2-3) na primeira integral e fazendo a variação, temos

$$\begin{aligned} \int d^4x \sqrt{-\eta'} \delta \mathcal{L}_{geom.} &= \int d^4x \sqrt{-\eta'} \delta \left[\frac{i}{2} \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - \frac{i}{2} \partial_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi - s(A^2 + \varepsilon B^2) \right] \\ \int d^4x \sqrt{-\eta'} \delta \mathcal{L}_{geom.} &= \int d^4x \sqrt{-\eta'} \delta \bar{\Psi} \left[i \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - \frac{i}{2} \partial_\mu (\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi) - 2s(A \Psi + i \varepsilon B \gamma^5 \Psi) \right] \\ \int d^4x \sqrt{-\eta'} \delta \mathcal{L}_{geom.} &= \int d^4x \sqrt{-\eta'} \delta \bar{\Psi} \left[i \gamma^\mu \partial_\mu - 2s(A + i \varepsilon B \gamma^5) \right] \Psi. \end{aligned} \quad (2.2.2-6)$$

A variação da segunda integral depende de quem for a lagrangiana de matéria $\mathcal{L}_{mat.}$, mas para garantir que esta interação seja determinada pelo Princípio do Acoplamento Mínimo da Gravitação (1.1.2-7), isto é, que $\mathcal{L}_{mat.}$ seja a mesma da TRR, é necessário definir

$$\mathcal{L}_{mat.} = w \mathcal{L}_{mat.(TRR)} \quad (2.2.2-7)$$

onde $w \equiv \frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{-\eta'}}$, $g \equiv \det g_{\mu\nu}$. Assim, garantimos que o tensor momento-energia seja

definido como em (1.1.2-7)

$$\delta(\sqrt{-\eta'} \mathcal{L}_{mat.}) = \delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_{mat.(TRR)}) = \frac{\sqrt{-g}}{2} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad (2.2.2-8)$$

e a lei de conservação do tensor momento-energia de acordo com (1.1.2-5)

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0.$$

Desta forma, fica assegura-se que, na TEG, a geometria do espaço-tempo é afetada diretamente pela distribuição de matéria através do Princípio de Acoplamento Mínimo da Gravitação assim como na TRG.

Substituindo (2.2.2-8) e (2.2.2-4) na segunda integral de (2.2.2-5), encontra-se

$$\int d^4x \frac{\delta(\sqrt{-\eta} \mathcal{L}_{mat.})}{\delta\Psi} = \int d^4x \delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_{mat.(TRR)}) = \int d^4x \frac{\sqrt{-g}}{2} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = \int d^4x \frac{\sqrt{-g}}{2} T^{\mu\nu} \delta\varphi_{\mu\nu}.$$

Por fim, substituímos o resultado acima e (2.2.2-6) em (2.2.2-5) e obtemos

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{-g} \delta\bar{\Psi} \left\{ \left[i\gamma^\mu \partial_\mu - 2s(A + i\varepsilon B\gamma^5) \right] \Psi + \frac{w}{2} T^{\mu\nu} \frac{\delta\varphi_{\mu\nu}}{\delta\Psi} \right\} = 0. \quad (2.2.2-9)$$

Como $\bar{\Psi}$ é arbitrário, a equação de movimento da TEG fica completamente determinada ao se definir o tensor $\varphi_{\mu\nu}$. Para cada definição, um modo diferente de gerar a geometria através dos campos espinoriais e portanto uma nova teoria - desde que ela seja compatível com os dados observacionais. De fato, este é o critério de escolha do tensor $\varphi_{\mu\nu}$ adequado.

Originalmente, a TEG foi desenvolvida a partir de dois campos espinoriais fundamentais e, através dela, foram obtidas duas soluções: o campo gravitacional gerado por um objeto esfericamente simétrico no vácuo e uma solução cosmológica que representa um universo vácuo espacialmente homogêneo que se expande isotropicamente [17]. No decorrer de nossos estudos apresentou-se a possibilidade de desenvolver uma versão da TEG com apenas um campo espinorial e é ela que será apresentada no próximo capítulo.

Os pontos principais da estrutura das duas teorias (TEG e TRG) estão esquematizados na tabela abaixo (ver próxima pg.).

	Teoria Espinorial da Gravitação (TEG)	Teoria da Relatividade Geral (TRG)
CINEMATICA		
Acoplamento com Matéria	Princípio de Equivalência de Einstein: <i>partículas teste seguem geodésicas;</i> $.T^{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_{mat.}(TRR))}{\delta g_{\mu\nu}}$	Princípio de Equivalência de Einstein: <i>partículas teste seguem geodésicas;</i> $.T^{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_{mat.}(TRR))}{\delta g_{\mu\nu}}$
DINAMICA		
Variável dinâmica	$\Psi(x^\mu) = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$	$g_{\mu\nu}(x^\mu)$
Equação de movimento	Para o campo espinorial.	Para a geometria.
Solução da equação de movimento	Ψ	$g_{\mu\nu}$
Correntes	$J^\mu = \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \text{ e } I^\mu = \bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma^5 \Psi$	–
Tensor $\varphi_{\mu\nu}$	$\varphi_{\mu\nu}(J^\mu, I^\mu)$	$\varphi_{\mu\nu}$
Métrica	$g_{\mu\nu \text{ efetivo}} \equiv \eta'_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\nu}$	$g_{\mu\nu} = \eta'_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\nu}$
Observação	$g_{\mu\nu \text{ efetivo}} \rightarrow \text{observação}$	$g_{\mu\nu} \rightarrow \text{observação}$
Identities do formalismo	$(\bar{\Psi} Q \gamma_\mu \Psi) \gamma^\mu \Psi = (\bar{\Psi} Q \Psi) \Psi - (\bar{\Psi} Q \gamma_5 \Psi) \gamma^5 \Psi$	$\{R_{\alpha\eta\beta\gamma\delta}\}_{(\beta,\gamma,\delta)} = 0$

O Princípio do Acoplamento Mínimo da Gravitação permanece em ambas teorias através do Princípio de Equivalência de Einstein. O ponto principal da Teoria Espinorial da Gravitação, em relação à Teoria da Relatividade Geral, é que naquela teoria não existe equação de movimento para a geometria: a função $\varphi_{\mu\nu}$ (definida a partir do campo espinorial) gera a métrica $g_{\mu\nu}$ do espaço-tempo físico que obedece à dinâmica do campo espinorial Ψ através das correntes I^μ e J^μ . É este o motivo pelo qual a geometria tem caráter efetivo e não dinâmico nesta nova teoria.

Capítulo 3: A Teoria Espinorial da Gravitação com um campo

Como vimos, a Teoria Espinorial da Gravitação foi inicialmente desenvolvida [17] tendo como objetos dinâmicos dois campos espinoriais de Heisenberg.

Baseado nos pontos estruturais da teoria apresentados [cap. 2], este capítulo é dedicado a desenvolver, a partir deles, uma versão da TEG com apenas um campo espinorial.

I. A lagrangiana

Com efeito, seja

$$\mathcal{L}_{TEG}(\Psi; T_{\mu\nu}) \equiv \mathcal{L}_{geom.}(\Psi) + w \mathcal{L}_{mat.(TRR)}(\Psi; T_{\mu\nu}) \quad (3-1)$$

onde

$$\mathcal{L}_{geom.}(\Psi) = \frac{i}{2} \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - \frac{i}{2} \partial_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi - V(\Psi) \quad (3-2a)$$

com

$$V(\Psi) = s(A^2 - B^2) \quad (3-2b)$$

a lagrangiana (2.2.2-3) com $\varepsilon = -1$.

II. O tensor $\varphi_{\mu\nu}$ e a geometria efetiva

Considerando as combinações possíveis entre as correntes J^μ e I^μ , e a necessidade de se construir um tensor de segunda ordem simétrico, adimensional e real, a forma mais geral que ele pode ter é

$$\varphi_{\mu\nu} \equiv \frac{aJ_\mu J_\nu + bI_\mu I_\nu + d(J_\mu I_\nu + I_\mu J_\nu)}{\sqrt{J^\mu J_\mu}} \quad (3-3)$$

onde a, b, d são constantes reais arbitrárias com dimensão de comprimento ao cubo – $[a, b, d] = [L^3]$ – que serão fixadas pela observação. A dimensão das constantes e o produto escalar da corrente J^μ no denominador garantem a adimensionalidade de $\varphi_{\mu\nu}$. Pela identidade de Pauli-Kofink (2.0-9a) pode-se escrever (3-3) como

$$\varphi_{\mu\nu} \equiv \frac{aJ_\mu J_\nu + bI_\mu I_\nu + d(J_\mu I_\nu + I_\mu J_\nu)}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (3-4)$$

A geometria efetiva $g_{\mu\nu}$ é identificada com a gravitação através do Princípio de Equivalência de Einstein, e é definida de acordo com (2.2.2-1)

$$g_{\mu\nu}(\Psi) \equiv \eta'_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\nu}(\Psi). \quad (3-5)$$

III. O princípio variacional e a equação de movimento

Conforme visto no ítem IV. da secção 2.2 do capítulo anterior, a equação de movimento está determinada a menos da definição do tensor $\varphi_{\mu\nu}$. Assim, agora podemos substituir (3-4) e $\varepsilon = -1$ em (2.2.2-9) para obter, através de sua variação, a equação de movimento da TEG para uma configuração arbitrária de matéria e energia. Com efeito reescrevemos a variação da ação

$$\delta S = \delta S_{geom.} + \delta S_{mat.} \quad (3-6)$$

onde de (2.2.2-9)

$$\delta S_{geom.} \equiv \int d^4x \sqrt{-\eta'} \delta \bar{\Psi} \left[i\gamma^\mu \partial_\mu - 2s(A - iB\gamma^5) \right] \Psi \quad (3-7a)$$

e

$$\delta S_{mat.} \equiv \int d^4x \sqrt{-\eta'} \delta \mathcal{L}_{mat.} = \int d^4x \sqrt{-\eta'} \delta \left[\frac{w}{2} T^{\mu\nu} \delta \varphi_{\mu\nu} \right]. \quad (3-7b)$$

Para fazer a variação de (3-7b), de (3-4), temos

$$\delta\varphi_{\mu\nu} = \delta\varphi_{\mu\nu 1} + \delta\varphi_{\mu\nu 2}. \quad (3-8)$$

onde

$$\delta\varphi_{\mu\nu 1} = \delta\left(\frac{1}{X}\right)\left[aJ_{\mu}J_{\nu} + bI_{\mu}I_{\nu} + d(J_{\mu}I_{\nu} + I_{\mu}J_{\nu})\right]$$

e

$$\delta\varphi_{\mu\nu 2} = \frac{1}{X}\delta\left[aJ_{\mu}J_{\nu} + bI_{\mu}I_{\nu} + d(J_{\mu}I_{\nu} + I_{\mu}J_{\nu})\right]$$

com

$$X \equiv \sqrt{J^{\alpha}J_{\alpha}}.$$

Assim

$$\begin{aligned} \delta\varphi_{\mu\nu 1} &= -\frac{\delta X}{X^2}\left[aJ_{\mu}J_{\nu} + bI_{\mu}I_{\nu} + d(J_{\mu}I_{\nu} + I_{\mu}J_{\nu})\right] \\ &= -\delta\bar{\Psi}\left(\varphi_{\mu\nu} \frac{\gamma_{\alpha}J^{\alpha}}{X^2}\right)\Psi. \end{aligned} \quad (3-9)$$

Partindo para $\delta\varphi_{\mu\nu 2}$, encontra-se

$$\begin{aligned} \delta\varphi_{\mu\nu 2} &= \frac{\delta\left[aJ_{\mu}J_{\nu} + bI_{\mu}I_{\nu} + d(J_{\mu}I_{\nu} + I_{\mu}J_{\nu})\right]}{X} \\ \delta\varphi_{\mu\nu 2} &= \frac{\delta\bar{\Psi}}{X}\left\{\gamma_{\mu}\left[(a + d\gamma^5)J_{\nu} + (d + b\gamma^5)I_{\nu}\right]\right\} \end{aligned} \quad (3-10)$$

Substituindo (3-9) e (3-10) em (3-8)

$$\delta\varphi_{\mu\nu} = -\frac{\delta\bar{\Psi}}{X}\left\{\varphi_{\mu\nu} \frac{\gamma^{\alpha}J_{\alpha}}{X} - \left\{\gamma_{\mu}\left[(a + d\gamma^5)J_{\nu} + (d + b\gamma^5)I_{\nu}\right]\right\}\right\}\Psi. \quad (3-11)$$

Substituindo (3-11) em $\delta S_{mat.}$ (3-7b) encontramos

$$\delta S_{mat.} = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-\eta'} w T^{\mu\nu} \frac{\delta \bar{\Psi}}{X} \left\{ \varphi_{\mu\nu} \frac{\gamma^\alpha J_\alpha}{X} - \left\{ \gamma_\mu, \left[(a + d\gamma^5) J_\nu + (d + b\gamma^5) I_\nu \right] \right\} \right\} \Psi.$$

Finalmente substituindo a expressão acima e (3-7a) em (3-6) temos

$$\begin{aligned} \delta S = \int d^4x \sqrt{-\eta'} \delta \bar{\Psi} \left\{ i\gamma^\mu \partial_\mu - 2s(A - iB\gamma^5) + \right. \\ \left. - \frac{wT^{\mu\nu}}{2X} \left[\varphi_{\mu\nu} \frac{\gamma^\alpha J_\alpha}{X} - \left\{ \gamma_\mu, \left[(a + d\gamma^5) J_\nu + (d + b\gamma^5) I_\nu \right] \right\} \right] \right\} \Psi = 0. \end{aligned} \quad (3-12)$$

Como a integral deve ser nula para uma variação arbitrária $\delta \bar{\Psi}$, o integrando deve ser nulo, resultando na seguinte equação de movimento

$$\left\{ i\gamma^\mu \partial_\mu - 2s(A - iB\gamma^5) - \frac{wT^{\mu\nu}}{2X} \left[\varphi_{\mu\nu} \frac{\gamma^\alpha J_\alpha}{X} - \left\{ \gamma_\mu, \left[(a + d\gamma^5) J_\nu + (d + b\gamma^5) I_\nu \right] \right\} \right] \right\} \Psi = 0.$$

Como $T^{\mu\nu}$ é simétrico, podemos reescrever a equação acima como

$$\left\{ i\gamma^\mu \partial_\mu - 2s(A - iB\gamma^5) - \left[wT^{\mu\nu} \varphi_{\mu\nu} \frac{\gamma^\alpha J_\alpha}{2X^2} - \frac{wT^{\mu\nu}}{X} \left[\gamma_\mu (aJ_\nu + dI_\nu) + \gamma_\nu (bI_\mu + dJ_\mu) \gamma^5 \right] \right] \right\} \Psi = 0. \quad (3.13)$$

Definindo as quantidades

$$\Phi \equiv wT^{\mu\nu} \frac{\varphi_{\mu\nu}}{2X^2}$$

$$\Sigma_{\mu} \equiv w \frac{(aJ_{\mu} + dI_{\mu})}{X}$$

$$\Pi_{\mu} \equiv w \frac{(bI_{\mu} + dJ_{\mu})}{X}$$

$$E^{\mu} \equiv T^{\mu\nu} \Sigma_{\nu}$$

$$H^{\mu} \equiv T^{\mu\nu} \Pi_{\nu}$$

e substituindo em (3-13), ficamos com a equação

$$i\gamma^{\mu} \partial_{\mu} \Psi - 2s(A - iB\gamma^5)\Psi = \gamma^{\mu} J_{\mu} \Phi \Psi - \gamma^{\mu} (E_{\mu} + H_{\mu} \gamma^5) \Psi. \quad (3-14)$$

Finalmente, está é a equação dinâmica para a Teoria da Espinorial da Gravitação com um campo espinorial construído a partir da lagrangiana (3-2).

O quadro do capítulo anterior fica agora mais detalhado (ver próxima pág.).

	Teoria Espinorial da Gravitação (TEG)	Teoria da Relatividade Geral (TRG)
CINEMATICA		
Acoplamento com Matéria	Princípio de Equivalência de Einstein: <i>partículas teste seguem geodésicas;</i> $T^{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_{mat.}(TRR))}{\delta g_{\mu\nu}}$	Princípio de Equivalência de Einstein: <i>partículas teste seguem geodésicas;</i> $T^{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_{mat.}(TRR))}{\delta g_{\mu\nu}}$
DINAMICA		
Variável dinâmica	$\Psi(x^\mu) = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$	$g_{\mu\nu}(x^\mu)$
Equação de movimento	$i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - 2s(A - iB\gamma^5)\Psi = \gamma^\mu J_\mu \Phi \Psi - \gamma^\mu (E_\mu + H_\mu \gamma^5)\Psi$	$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$
Solução da equação de movimento	Ψ	$g_{\mu\nu}$
Correntes	$J^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi \text{ e } I^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma^5\Psi$	-
Tensor $\varphi_{\mu\nu}$	$\varphi_{\mu\nu} \equiv \frac{aJ_\mu J_\nu + bI_\mu I_\nu + d(J_\mu I_\nu + I_\mu J_\nu)}{\sqrt{A^2 + B^2}}$	$\varphi_{\mu\nu}$
Métrica	$g_{\mu\nu \text{ efetivo}} \equiv \eta'_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\nu}$	$g_{\mu\nu} = \eta'_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\nu}$
Observação	$g_{\mu\nu \text{ efetivo}} \rightarrow \text{observação}$	$g_{\mu\nu} \rightarrow \text{observação}$
Identities do formalismo	$(\bar{\Psi}Q\gamma_\mu\Psi)\gamma^\mu\Psi = (\bar{\Psi}Q\Psi)\Psi - (\bar{\Psi}Q\gamma_5\Psi)\gamma^5\Psi$	$\{R_{\alpha\eta\beta\gamma;\delta}\}_{(\beta,\gamma,\delta)} = 0$

Resumindo o que foi dito e desenvolvido, a sistemática da Teoria Espinorial da Gravitação para se resolver um problema do ponto de vista do campo gravitacional, pode ser resumida nos seguintes pontos:

- I. definir configuração de matéria do problema
- II. resolver equação de movimento para os campos espinoriais
- III. a partir da solução, construir e calcular as correntes I^μ e J^μ
- IV. construir a métrica através da função $\varphi_{\mu\nu}$
- V. compatibilizar solução encontrada com a observação.

Estes mesmos passos estão formalmente representados no esquema baixo

$$\begin{aligned}
 & T_{\mu\nu} \\
 & \Downarrow \\
 & \llbracket i\gamma^\mu \partial_\mu - 2s(A - iB\gamma^5) \rrbracket \Psi = \gamma^\mu \llbracket J_\mu \Phi - (E_\mu + H_\mu \gamma^5) \rrbracket \Psi \\
 & \Downarrow \\
 & J^\mu = \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi, \quad I^\mu = \bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma^5 \Psi \\
 & \Downarrow \\
 & \varphi_{\mu\nu} \equiv \frac{aJ_\mu J_\nu + bI_\mu I_\nu + d(J_\mu I_\nu + I_\mu J_\nu)}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\
 & \Downarrow \\
 & g_{\mu\nu} \equiv \eta'_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\nu} \\
 & \Downarrow \\
 & \textit{observação.}
 \end{aligned}$$

Portanto, dada uma configuração arbitrária de matéria e energia, é possível em princípio, através de um campo espinorial intermediário, encontrar a geometria do espaço-tempo físico correspondente.

Capítulo 4: Solução para uma estrela

O problema que nos propomos a analisar aqui é o de encontrar o campo gravitacional efetivo gerado por uma estrela com simetria esférica através da Teoria Espinorial da Gravitação com um campo desenvolvida no capítulo anterior.

4.1 Equação de movimento

Pensamos na estrela como um objeto pontual, portanto simétrico e sem dinâmica no seu interior. Consideramos também o espaço ao seu redor mais próximo (onde o campo mais forte é gerado) vazio.

Fazendo $T^{\mu\nu} = 0$ em (3-14), a equação a ser resolvida é

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - 2s(A - iB\gamma^5)\Psi = 0. \quad (4.1-1)$$

Como se trata de um problema estático e esfericamente simétrico, utiliza-se um sistema de coordenadas esféricas para resolvê-lo. Pelo mesmo motivo, propõe-se uma solução que só dependa da distância radial r que conseqüentemente elimina todos os termos de derivadas de Ψ em relação às variáveis t , θ e φ . Com isto, pode-se admitir um campo espinorial com a seguinte estrutura

$$\Psi = f(r) \overset{0}{\Psi} \quad (4.1-2)$$

onde $f(r)$ é uma função arbitrária da variável r , real e não nula e $\overset{0}{\Psi}$ um campo espinorial constante de quatro componentes complexas

$${}^0\Psi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \eta \end{pmatrix}.$$

Substituindo (4.1-2) nas definições em (2.0-3a) e (2.0-3b), encontra-se as expressões de A e B

$$A = f^2(r) {}^0\Psi^+ \gamma^0 {}^0\Psi = f^2(r) \overline{{}^0\Psi} {}^0\Psi \equiv f^2(r) \overline{A} \quad (4.1-3a)$$

e

$$B = if^2(r) {}^0\Psi^+ \gamma^0 \gamma^5 {}^0\Psi = f^2(r) i \overline{{}^0\Psi} \gamma^5 {}^0\Psi \equiv f^2(r) \overline{B}. \quad (4.1-3b)$$

Substituindo (4.1-2) e (4.1-3) em (4.1-1) e dividindo toda a expressão por $f^3(r)$, tem-se

$$\left[i\gamma^1 \frac{f'}{f^3} - 2s \left(\overline{A} - i \overline{B} \gamma^5 \right) \right] {}^0\Psi = 0, \quad (4.1-4)$$

onde a linha representa derivada com relação a coordenada r . Observando (4.1-4) e o fato de γ^1 ser constante neste sistema¹², vê-se que cada termo da soma é constante e que portanto a quantidade

¹² O campo espinorial está definido no espaço de Minkowski. De acordo com o que foi dito no capítulo 2, as matrizes de Dirac γ^μ com $\mu = 0,1,2,3$, são definidas a partir da seguinte regra de comutação

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} I.$$

Como o sistema de coordenadas utilizado é esférico, surgem as seguintes relações

$$\gamma_{00} = \gamma^{00} = 1, \quad \gamma_{11} = \gamma^{11} = -1, \quad \gamma_{22} = \frac{1}{\gamma^{22}} = -r^2 \text{ e } \gamma_{33} = \frac{1}{\gamma^{33}} = -r^2 \text{sen}^2\theta.$$

Considerando as relações acima, e a notação $\tilde{\gamma}^\mu$ para as estas matrizes no sistema de coordenadas cartesiano, no sistema esférico elas tem a seguinte forma

$$\gamma^0 = \tilde{\gamma}^0, \quad \gamma^1 = \tilde{\gamma}^1, \quad \gamma^2 = h_2(r,\theta)\tilde{\gamma}^2 = -\frac{1}{r}\tilde{\gamma}^2 \text{ e } \gamma^3 = h_3(r,\theta)\tilde{\gamma}^3 = -\frac{1}{r\text{sen}\theta}\tilde{\gamma}^3.$$

$$\frac{f'(r)}{f^3(r)}, \quad (4.1-5)$$

também deve ser constante. Supondo $f(r)$ escrita como uma série de potências

$$f(r) = c_n r^n$$

onde n e c_n são números reais, encontra-se

$$f'(r) = n c_n r^{n-1}$$

e

$$f^3(r) = (c_n r^n)^3$$

resultando que

$$\frac{f'(r)}{f^3(r)} = \frac{n}{c_n^2} r^{-2n-1}.$$

Assim

$$\frac{n}{c_n^2} r^{-2n-1} = cte \Leftrightarrow n = -\frac{1}{2}$$

e f tem a forma

$$f(r) = \frac{m}{\sqrt{r}}, \quad (4.1-6)$$

onde m é uma constante real arbitrária. Assim, (4.1-5) fica

$$\frac{f'(r)}{f^3(r)} = -\frac{1}{2m^2}. \quad (4.1-7)$$

Substituindo (4.1-7) em (4.1-4)

- $\gamma^5 \equiv \frac{i}{4!} \eta_{\alpha\beta\mu\nu} \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu$ é pseudo-escalar (só muda de sinal por transformações de Lorentz

impróprias – que não é o caso tratado pois não formam grupo).

$$\left[i\gamma^1 \frac{1}{2m^2} + 2s \left(\overset{0}{A} - i \overset{0}{B} \gamma^5 \right) \right] \overset{0}{\Psi} = 0.$$

Multiplicando a equação acima por $2m^2$, explicitando as matrizes de Dirac γ^1 e γ^5 , e abrindo $\overset{0}{\Psi}$, encontra-se

$$\left[i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix} + 4m^2 s \left(\overset{0}{A} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - i \overset{0}{B} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \right] \begin{pmatrix} \varphi \\ \eta \end{pmatrix} = 0.$$

Definindo μ e α tais que

$$\mu \equiv 4m^2 s \overset{0}{A} \quad (4.1-8a)$$

$$\alpha \equiv 4m^2 s \overset{0}{B} \quad (4.1-8b)$$

temos

$$\left[i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - i\alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \varphi \\ \eta \end{pmatrix} = 0$$

que pode ser desmembrada no seguinte sistema de duas equações, ainda matriciais, acopladas

$$\begin{cases} i\sigma_1\eta + \mu\varphi - i\alpha\eta = 0 \\ -i\sigma_1\varphi + \mu\eta - i\alpha\varphi = 0. \end{cases}$$

Assim como no desenvolvimento da solução de ondas planas, isolam-se φ e η respectivamente

$$\varphi = -\frac{i}{\mu}(\sigma_1 - \alpha)\eta \quad (4.1-9a)$$

$$\eta = \frac{i}{\mu}(\sigma_1 + \alpha)\varphi \quad (4.1-9b)$$

onde μ deve ser diferente de zero. Substituindo (4.1-9a) em (4.1-9b) encontra-se

$$\varphi = \frac{1}{\mu^2}(\sigma_1^2 - \alpha^2)\varphi.$$

Como σ_1 é matriz de Pauli, vale (2.0-5) e ficamos com

$$\varphi = \frac{1}{\mu^2} (1 - \alpha^2) \mu$$

que implica na condição

$$\mu^2 + \alpha^2 = 1.$$

Finalmente, a solução encontrada para (4.1-1) com Ψ da forma (4.1-2) é

$$\overset{0}{\Psi} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{i}{\mu} (\sigma_1 + \alpha) \varphi \end{pmatrix}$$

onde

(4.1-10)

$$\mu^2 + \alpha^2 = 1 \text{ e } \mu \neq 0.$$

No que diz respeito a independência entre as componentes do campo espinorial, o que encontramos nesta solução não difere qualitativamente do que encontramos na solução de onda plana (2.1.1-4): as componentes do campo espinorial não são independentes umas das outras e há uma condição adicional análoga entre os escalares da equação.

Fundamental notar que como μ e α , por definição (4.1-8), dependem da própria função $\overset{0}{\Psi}$, a solução também está escrita em função dela própria. De fato, se trata de uma equação espinorial *não-linear*. Ainda será preciso isolar $\overset{0}{\Psi}$ e expressá-lo em termos de parâmetros independentes dele mesmo.

4.2 Cálculo de A e B e consequências

A partir de (4.1-10), pode-se calcular explicitamente os escalares A e B (4.1-3). Com efeito

$$\begin{aligned}
A = f^2 \overset{0}{A} &= \frac{m^2}{r} \overset{0}{\Psi}^+ \gamma^0 \overset{0}{\Psi} = \frac{m^2}{r} (\varphi^+ \varphi - \eta^+ \eta) \\
&= -\frac{2m^2}{r} \frac{\alpha}{\mu^2} (\alpha \varphi^+ \varphi + \varphi^+ \sigma_1 \varphi)
\end{aligned} \tag{4.2-1a}$$

$$\begin{aligned}
B = f^2 \overset{0}{B} &= \frac{m^2}{r} i \overset{0}{\Psi}^+ \gamma^0 \gamma^5 \overset{0}{\Psi} = \frac{m^2}{r} i (\varphi^+ \eta - \eta^+ \varphi) \\
&= -\frac{2m^2}{r} \frac{1}{\mu} (\alpha \varphi^+ \varphi + \varphi^+ \sigma_1 \varphi)
\end{aligned} \tag{4.2-1b}$$

Supondo $(\alpha \varphi^+ \varphi + \varphi^+ \sigma_1 \varphi) \neq 0$ ¹³, pode-se dividir A por B

$$\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\mu} = \frac{B}{A}$$

e encontrar que

$$A^2 = B^2. \tag{4.2-2a}$$

De (4.1-8) segue

$$\alpha^2 = \mu^2 \Rightarrow \alpha = \varepsilon_1 \mu \tag{4.2-2b}$$

onde

$$\varepsilon_1 = \pm 1.$$

Substituindo (4.2-2b) em (4.2-1), temos obviamente

$$A = -\frac{2m^2}{r\mu} \varepsilon_1 (\varepsilon_1 \mu \varphi^+ \varphi + \varphi^+ \sigma_1 \varphi) \tag{4.2-3a}$$

¹³ Considerando que as matrizes de Pauli σ_k são hermitianas e escrevendo

$$\varphi = \begin{pmatrix} \rho_1 e^{i\theta_1} \\ \rho_2 e^{i\theta_2} \end{pmatrix}$$

podemos mostrar que

$$\begin{aligned}
(\varphi^+ \varphi)^+ &= \varphi^+ (\varphi^+)^+ = \varphi^+ \varphi, \text{ e} \\
(\varphi^+ \sigma_k \varphi)^+ &= \varphi^+ \sigma_k^+ (\varphi^+)^+ = \varphi^+ \sigma_k \varphi
\end{aligned}$$

portanto $\varphi^+ \varphi$ e $\varphi^+ \sigma_k \varphi$ são quantidades reais. Portanto desde que

$$\alpha \varphi^+ \varphi \neq -\varphi^+ \sigma_1 \varphi$$

podemos dividir A por B .

$$B = -\frac{2m^2}{r\mu} (\varepsilon_1 \mu \varphi^+ \varphi + \varphi^+ \sigma_1 \varphi). \quad (4.2-3b)$$

Para a solução da equação, substitui-se (4.2-2b) em (4.1-10) e obtém-se que

$$\overset{0}{\Psi} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{i}{\mu} (\sigma_1 + \varepsilon_1 \mu) \varphi \end{pmatrix}$$

com a condição (4.2-4)

$$\mu^2 = \alpha^2 = \frac{1}{2}.$$

Portanto μ é de fato diferente de zero (como havíamos imposto anteriormente) e vale

$$\mu = \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (4.2-5)$$

Substituindo (4.1-8a) na expressão para μ em (4.2-5), obtemos as expressões de A e B em função de constantes e da variável r

$$\overset{0}{A} = \frac{\sqrt{2}\varepsilon_1}{8m^2s} \Rightarrow A = \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{\varepsilon_1}{sr} \Rightarrow B = \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{1}{sr}.^{14} \quad (4.2-6)$$

¹⁴ Paralelamente, é possível obter as expressões de A e B apenas em função das constantes do problema substituindo (4.1-6) e (4.1-8a) em (4.1-3a) e em seguida em (4.2-3a). Daí temos

$$\mu^2 + a \varphi^+ \varphi \mu + a \varepsilon_1 \varphi^+ \sigma_1 \varphi = 0$$

onde

$$a \equiv 8m^2s.$$

Resolvendo a equação acima encontra-se

$$\overset{0}{A} = -\varphi^+ \varphi \left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1}{2m^2s} \frac{\varphi^+ \sigma_1 \varphi}{(\varphi^+ \varphi)^2}} \right) \Rightarrow A = -\frac{m^2}{r} \varphi^+ \varphi \left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1}{2m^2s} \frac{\varphi^+ \sigma_1 \varphi}{(\varphi^+ \varphi)^2}} \right)$$

que deve ser compatível com (4.2-6)

$$1 = -\frac{8\varepsilon_1}{\sqrt{2}} sm^2 \varphi^+ \varphi \left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1}{2m^2s} \frac{\varphi^+ \sigma_1 \varphi}{(\varphi^+ \varphi)^2}} \right).$$

4.3 Cálculo da correntes

Com a expressão (4.2-4) e com as matrizes de Dirac no sistema de coordenadas esférico, pode-se calcular agora as correntes J^μ e I^μ respectivamente. Com efeito

I. correntes do tipo tempo $J^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$:

$$\begin{aligned}\rightarrow J^0 &= \bar{\Psi}\gamma^0\Psi = f^2(r)\overset{0}{\Psi}^+ \tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^0 \overset{0}{\Psi} = f^2(r)\overset{0}{\Psi}^+ \overset{0}{\Psi} = f^2(r)(\varphi^+\varphi + \eta^+\eta) \\ &= \frac{2f^2(r)}{\mu^2}(\varphi^+\varphi + \varepsilon_1\mu\varphi^+\sigma_1\varphi) \\ &= 4f^2(r)\left(\varphi^+\varphi + \frac{\varphi^+\sigma_1\varphi}{\sqrt{2}}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rightarrow J^1 &= \bar{\Psi}\gamma^1\Psi = f^2(r)\overset{0}{\Psi}^+ \tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^1 \overset{0}{\Psi} = f^2(r)(\varphi^+\sigma_1\eta + \eta^+\sigma_1\varphi) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rightarrow J^2 &= \bar{\Psi}\gamma^2\Psi = h_2(r,\theta)f^2(r)\overset{0}{\Psi}^+ \tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^2 \overset{0}{\Psi} = h_2(r,\theta)f^2(r)(\varphi^+\sigma_2\eta + \eta^+\sigma_2\varphi) \\ &= h_2(r,\theta)\frac{2f^2(r)}{\mu}(\varphi^+\sigma_3\varphi) \\ &= 2\sqrt{2}\varepsilon_1 h_2(r,\theta) f^2(r)(\varphi^+\sigma_3\varphi)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rightarrow J^3 &= \bar{\Psi}\gamma^3\Psi = f^2(r)h_3(r,\theta)\overset{0}{\Psi}^+ \tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^3 \overset{0}{\Psi} = f^2(r)h_3(r,\theta)(\varphi^+\sigma_3\eta + \eta^+\sigma_3\varphi) \\ &= -h_3(r,\theta)\frac{2f^2(r)}{\mu}(\varphi^+\sigma_2\varphi) \\ &= -2\sqrt{2}\varepsilon_1 h_3(r,\theta) f^2(r)(\varphi^+\sigma_2\varphi).\end{aligned}$$

II. correntes do tipo espaço $I^\mu = \bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma^5 \Psi$:

$$\rightarrow I^0 = \bar{\Psi} \gamma^0 \gamma^5 \Psi = f^2(r) \bar{\Psi}^0 \tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^0 \gamma^5 \Psi^0 = f^2(r) (\varphi^+ \eta + \eta^+ \varphi)$$

$$= 0$$

$$\rightarrow I^1 = \bar{\Psi} \gamma^1 \gamma^5 \Psi = f^2(r) \bar{\Psi}^0 \tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^1 \gamma^5 \Psi^0 = f^2(r) (\varphi^+ \sigma_1 \varphi + \eta^+ \sigma_1 \eta)$$

$$= \frac{2f^2(r)}{\mu^2} (\varphi^+ \sigma_1 \varphi + \varepsilon_1 \mu \varphi^+ \varphi)$$

$$= 4f^2(r) \left(\varphi^+ \sigma_1 \varphi + \frac{\varphi^+ \varphi}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\rightarrow I^2 = \bar{\Psi} \gamma^2 \gamma^5 \Psi = h_2(r, \theta) f^2(r) \bar{\Psi}^0 \tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^2 \gamma^5 \Psi^0 = h_2(r, \theta) f^2(r) (\varphi^+ \sigma_2 \varphi + \eta^+ \sigma_2 \eta)$$

$$= 0$$

$$\rightarrow I^3 = \bar{\Psi} \gamma^3 \gamma^5 \Psi = h_3(r, \theta) f^2(r) \bar{\Psi}^0 \tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^3 \gamma^5 \Psi^0 = h_3(r, \theta) f^2(r) (\varphi^+ \sigma_3 \varphi + \eta^+ \sigma_3 \eta)$$

$$= 0.$$

Portanto, temos a seguinte configuração de correntes

$$\rightarrow J = (J^0, 0, J^2, J^3) \tag{4.3-1a}$$

com

$$J^0 = \frac{4m^2}{r} \left(\varphi^+ \varphi + \frac{\varphi^+ \sigma_1 \varphi}{\sqrt{2}} \right)$$

$$J^2 = \frac{2\sqrt{2}m^2}{r} \varepsilon_1 h_2(r, \theta) (\varphi^+ \sigma_3 \varphi)$$

$$J^3 = -\frac{2\sqrt{2}m^2}{r} \varepsilon_1 h_3(r, \theta) (\varphi^+ \sigma_2 \varphi),$$

e

$$\rightarrow I = (0, I^1, 0, 0) \quad (4.3-1b)$$

com

$$I^1 = \frac{4m^2}{r} \left(\varphi^+ \sigma_1 \varphi + \frac{\varphi^+ \varphi}{\sqrt{2}} \right)$$

onde foi substituída a expressão (4.1-6).

Pela simetria do problema, faremos a escolha

$$J^2 = J^3 = 0. \quad (4.3-2)$$

De acordo com (4.3-1a), esta escolha implica a seguinte restrição algébrica

$$\varphi^+ \sigma_2 \varphi = \varphi^+ \sigma_3 \varphi = 0. \quad (4.3-3)$$

Assumindo (4.3-3) e definindo as variáveis

$$u \equiv 4m^2 \left(\varphi^+ \varphi + \frac{\varphi^+ \sigma_1 \varphi}{\sqrt{2}} \right) \quad (4.3-4a)$$

$$v \equiv 4m^2 \left(\varphi^+ \sigma_1 \varphi + \frac{\varphi^+ \varphi}{\sqrt{2}} \right) \quad (4.3-4b)$$

ficamos com

$$J = \left(\frac{u}{r}, 0, 0, 0 \right) \quad (4.3-5)$$

$$I = \left(0, \frac{v}{r}, 0, 0 \right)$$

com a condição (4.3-3).

4.3.1 Identidades a serem satisfeitas pelas correntes

Conforme dito na secção 2.0, as identidades (2.0-9) de Pauli-Kofink devem ser obedecidas por qualquer campo espinorial. Assim, vamos verificar se estas identidades continuam sendo satisfeitas mesmo com as restrições feitas às componentes J^2 e J^3 das correntes.

$$\mathbf{I. } J^\mu J_\mu = -I^\mu I_\mu :$$

Como temos apenas as componentes J^0 e I^1

$$J^0 J_0 = -I^1 I_1$$

já que

$$J^0 = J_0 \text{ e } I^1 = -I_1$$

pois estamos no espaço de Minkowski em coordenadas esféricas. Assim

$$(J^0)^2 = (I^1)^2$$

que implica em

$$J^0 = \varepsilon_2 I^1$$

onde $\varepsilon_2 = \pm 1$. Em termos de u e v temos

$$u = \varepsilon_2 v .$$

Substituindo (4.3-4), ficamos com

$$4m^2 \left(\varphi^+ \varphi + \frac{\varphi^+ \sigma_1 \varphi}{\sqrt{2}} \right) = \varepsilon_2 4m^2 \left(\varphi^+ \sigma_1 \varphi + \frac{\varphi^+ \varphi}{\sqrt{2}} \right)$$

ou

$$\varepsilon_2 \varphi^+ \varphi \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{2}} \right) = \varphi^+ \sigma_1 \varphi \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{2}} \right). \quad (4.3.1-1)$$

Como

$$\left(1 - \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{2}}\right) \neq 0$$

obtém-se que, pelo fato de havermos escolhido $J^2 = J^3 = 0$, a identidade de Pauli-Kofink só é satisfeita se

$$\varepsilon_2 \varphi^+ \varphi = \varphi^+ \sigma_1 \varphi^{15}. \quad (4.3.1-2)$$

Uma opção de se satisfazer (4.3.1-2) é impor

$$\sigma_1 \varphi = \varepsilon_2 \varphi \quad (4.3.1-3)$$

que é equivalente a

$$\varphi^+ \sigma_2 \sigma_1 \varphi = \varepsilon_2 \varphi^+ \sigma_2 \varphi \Rightarrow -i \varphi^+ \sigma_3 \varphi = \varepsilon_2 \varphi^+ \sigma_2 \varphi.$$

Como

$$\left(\varphi^+ \sigma_k \varphi\right)^+ = \varphi^+ \sigma_k \varphi$$

para $k = 1, 2, 3$, as quantidades $\varphi^+ \sigma_k \varphi$ são reais e portanto se

$$-i \varphi^+ \sigma_3 \varphi = \varepsilon_2 \varphi^+ \sigma_2 \varphi$$

então

$$\varphi^+ \sigma_3 \varphi = \varphi^+ \sigma_2 \varphi = 0.$$

Portanto

$$\sigma_1 \varphi = \varepsilon_2 \varphi \Rightarrow \varphi^+ \sigma_2 \varphi = \varphi^+ \sigma_3 \varphi = 0 \Rightarrow J^3 = J^2 = 0.$$

A condição que surge para que a identidade de Pauli-Kofink seja satisfeita é justamente aquela que anula as componentes da corrente escolhidas. Isto mostra a consistência interna do formalismo. Fica evidente que as identidades de Pauli-Kofink

¹⁵ Substituindo o valor de μ na nota (13 - pg. 56), supomos que

$$\varepsilon_1 \frac{\varphi^+ \varphi}{\sqrt{2}} \neq -\varphi^+ \sigma_1 \varphi.$$

A relação (4.3.1-2) não viola a relação acima.

refletem propriedades do campo espinorial tratado. Nenhuma condição adicional é necessária.

Antes de verificar a segunda identidade, vamos substituir (4.3.1-3) em (4.2-4), (4.2-3a) e (4.3-4) a fim de atualizar a solução da equação, as expressões dos escalares A e B e as correntes. Com efeito

$$\overset{0}{\Psi} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{i}{\mu}(\varepsilon_2 + \varepsilon_1\mu)\varphi \end{pmatrix} \quad (4.3.1-5)$$

com

$$\mu^2 = \frac{1}{2};$$

$$A = -\frac{2\sqrt{2}m^2}{r} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \varepsilon_2 \right) \varphi^+ \varphi \quad (4.3.1-6)$$

onde foi substituído também o valor de μ ; e finalmente as correntes

$$J = \left(\frac{u}{r}, 0, 0, 0 \right)$$

$$I = \left(0, \frac{\varepsilon_2 u}{r}, 0, 0 \right)$$

com

(4.3.1-7)

$$u = 4m^2 \left(1 + \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{2}} \right) \varphi^+ \varphi.$$

II. $J^\mu J_\mu = A^2 + B^2$:

Usando (4.3.1-7)

$$J^0 J_0 = J^0 J^0 = \left(\frac{u}{r} \right)^2 = \frac{1}{r^2} \left[4m^2 \left(1 + \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{2}} \right) \varphi^+ \varphi \right]^2 = \frac{16m^4}{r^2} \left(1 + \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{2}} \right)^2 (\varphi^+ \varphi)^2.$$

Do outro lado tem-se

$$A^2 + B^2 = 2A^2.$$

De (4.3.1-6) encontra-se

$$2A^2 = 2 \left[-\frac{2\sqrt{2}m^2}{r} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \varepsilon_2 \right) \varphi^+ \varphi \right]^2 = \frac{16m^4}{r^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \varepsilon_2 \right)^2 (\varphi^+ \varphi)^2 = J^0 J_0.$$

III. $J^\mu I_\mu = 0$

Como as correntes J^μ e I^μ não possuem as mesmas componentes, a condição acima é automaticamente satisfeita.

4.4 Construção da geometria

Conforme dito anteriormente, a geometria na Teoria Espinorial da Gravitação é efetiva e construída através da soma da métrica de Minkowski com um tensor de ordem dois, contruído pelas correntes J^μ e I^μ , de acordo com as expressões

$$g_{\mu\nu} \equiv \eta'_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\nu} \quad (4.4-1)$$

$$\varphi_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \left[a J_\mu J_\nu + b I_\mu I_\nu + d (J_\mu I_\nu + I_\mu J_\nu) \right]. \quad (4.4-2)$$

Como neste caso só existem as componentes J^0 e I^1 , e como a métrica de Minkowski em coordenadas esféricas é diagonal, só haverá termo fora da diagonal '01'. Substituindo em (4.4-2) a condição **II** da secção anterior e a expressão simplificada para as correntes de (4.3.1-7), calcula-se cada componente de $\varphi_{\mu\nu}$. Com efeito

(i) componente '00':

$$\varphi_{00} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \frac{au^2}{r^2} = \frac{au}{r}$$

$$g_{00} = \eta'_{00} + \varphi_{00} = 1 + \frac{au}{r} \quad (4.4-3a)$$

(ii) componente '01':

$$\varphi_{01} = -\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \frac{d\varepsilon_2 u^2}{r^2} = -\frac{d\varepsilon_2 u}{r}$$

$$g_{01} = \eta'_{01} + \varphi_{01} = -\frac{d\varepsilon_2 u}{r} \quad (4.4-3b)$$

(iii) componente '11':

$$\varphi_{11} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \frac{b(\varepsilon_2 u)^2}{r^2} = \frac{bu}{r}$$

$$g_{11} = \eta'_{11} + \varphi_{11} = -1 + \frac{bu}{r}. \quad (4.4-3c)$$

A partir das expressões (4.4-3) pode-se, finalmente, obter a geometria gerada por uma estrela esfericamente simétrica através da Teoria Espinorial da Gravitação (geometria esta efetiva, formada pelas correntes que foram construídas a partir da solução da equação de movimento espinorial no vazio (4.1-1)). E ela tem a forma

$$ds^2 = \left(1 + \frac{au}{r}\right) c^2 dt^2 - 2\left(\varepsilon_2 \frac{du}{r}\right) c dt dr - \left(1 - \frac{bu}{r}\right) dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (4.4-4)$$

onde c é a velocidade da luz no vazio.

4.5 Compatibilidade com os dados observacionais

Neste ponto, vamos definir algumas das constantes da TEG a partir da relação entre a geometria encontrada (4.4-4) e os dados observacionais existentes para este sistema físico.

I. aproximação de campo fraco e baixas velocidades – componente g_{00}

Um dos resultados mais fortes na direção de se descrever a gravitação como um fenômeno geométrico é o fato de que uma perturbação de primeira ordem arbitrária na métrica de Minkowski, num regime de baixas velocidades, revela, através da equação da geodésica submetida a este mesmo regime (0-7), e da equação de movimento Newtoniana, que o elemento de linha desta primeira perturbação tem a forma

$$ds^2 \cong \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) c^2 dt^2$$

onde ϕ é o potencial Newtoniano gerado por uma dada configuração de matéria [18]

$$\phi = -\frac{g_N M}{r},$$

g_N é a constante de Newton da Gravitação e M a massa de um “corpo” pontual que gera este potencial. Definindo

$$r_H \equiv \frac{2g_N M}{c^2} \text{ }^{16}$$

escrevemos

$$ds^2 \cong \left(1 - \frac{r_H}{r}\right) c^2 dt^2. \quad (4.5-1)$$

No sentido inverso, fazemos a aproximação de campo fraco ($r \rightarrow \infty$) na geometria (4.4-4) e consideramos o regime de baixas velocidades. Neste caso a métrica se reduz a

$$ds^2 \cong \left(1 + \frac{au}{r}\right) c^2 dt^2.$$

¹⁶ Estimativa de r_H para o Sol:

$G = 6,67 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ sec}^{-2}$; $c = 3,00 \times 10^{10} \text{ cm/sec}$; $M_{sol} = 1,99 \times 10^{33} \text{ g} \Rightarrow r_{HSol} = 0,74 \times 10^5 \text{ cm}$.

Comparando a expressão acima com (4.5-1), se estabelece a primeira relação entre as constantes da teoria e os dados observacionais

$$-\frac{r_H}{a} = u. \quad (4.5-2)$$

Substituindo (4.5-2) em (4.4-4)

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_H}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(2\varepsilon_2 \frac{d r_H}{a r}\right) c dt dr - \left(1 + \frac{b r_H}{a r}\right) dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \text{sen}^2 \theta d\varphi^2.$$

Definindo

$$Q \equiv \frac{b r_H}{a} \text{ e } N \equiv \varepsilon_2 \frac{d r_H}{a} \quad (4.5-3)$$

a geometria fica

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_H}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(2 \frac{N}{r}\right) c dt dr - \left(1 + \frac{Q}{r}\right) dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \text{sen}^2 \theta d\varphi^2. \quad (4.5-4)$$

Para eliminar o termo que mistura as variáveis r e t , faz-se a seguinte transformação de coordenadas

$$cdt = dT - \frac{N}{r - r_H} dr. \quad (4.5-5)$$

Substituindo (4.5-5) em (4.5-4), conseguimos eliminar o termo diagonal da métrica ficando com

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_H}{r}\right) dT^2 - \left(1 + \frac{Q}{r} + \frac{N^2}{r(r - r_H)}\right) dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \text{sen}^2 \theta d\varphi^2. \quad (4.5-6)$$

II. dados observacionais da componente g_{11}

¹⁷ Substituindo em (4.5-2) a expressão para u (4.3.1-7) obtemos

$$4m^2 \left(1 + \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{2}}\right) \varphi^+ \varphi^- = -\frac{r_H}{a}$$

onde se pode ver que a constante m que aparece na definição da função $f(r)$ e a massa da estrela M estão conectadas da seguinte maneira

$$m = 0 \Leftrightarrow M = 0.$$

A informação observacional mais precisa que se tem disponível a respeito da componente g_{11} desta geometria, representante do campo gravitacional gerado ao redor de uma estrela de simetria esférica, tem precisão apenas até primeira ordem nas potências de $\frac{r_H}{r}$ [01, 02]

$$-g_{11} = 1 + \frac{r_H}{r}. \quad (4.5-7)$$

Por este motivo, vamos expandir a componente g_{11} de (4.5-6) em potências de $\frac{r_H}{r}$.

Com efeito

$$-g_{11} = 1 + \frac{Q}{r} + \frac{N^2}{r(r-r_H)} = \frac{r}{r-r_H} \left(1 - \frac{r_H}{r} + \frac{Q}{r} - \frac{Qr_H}{r^2} + \frac{N^2}{r^2} \right). \quad (4.5-8)$$

Como

$$\frac{r}{r-r_H} = \frac{1}{1 - \frac{r_H}{r}}$$

quando $\frac{r_H}{r} \ll 1$ ¹⁸, pode-se escrever como

$$\frac{1}{1 - \frac{r_H}{r}} = 1 + \frac{r_H}{r} + \left(\frac{r_H}{r} \right)^2 + \dots \quad (4.5-9)$$

Substituindo (4.5-9) em (4.5-8) e considerando até os termos de segunda ordem do resultado, temos

$$-g_{11} = \left(1 + \frac{r_H}{r} + \frac{r_H^2}{r^2} \right) \left(1 - \frac{r_H}{r} + \frac{Q}{r} - \frac{Qr_H}{r^2} + \frac{N^2}{r^2} \right)$$

¹⁸ Tomando como exemplo o sistema Terra-Sol, temos

$$\frac{r_{HSol}}{r_{Terra-Sol}} = \frac{0.74 \times 10^5 \text{ cm}}{1.50 \times 10^{13} \text{ cm}} = 0.49 \times 10^{-8} \text{ cm}.$$

$$-g_{11} = 1 + \frac{Q}{r} + \frac{N^2}{r_H^2} \left(\frac{r_H}{r} \right)^2 + O^3 \left(\frac{r_H}{r} \right) + \dots \quad (4.5-10)$$

Comparando (4.5-10) com (4.5-7), encontra-se que

$$Q = r_H. \quad (4.5-11)$$

Voltando a (4.5-3), concluí-se também que

$$b = a \quad (4.5-12a)$$

e portanto que

$$\frac{N^2}{r_H^2} = \left(\frac{d}{a} \right)^2 \quad (4.5-12b)$$

fixando através da observação mais uma constante da teoria espinorial. Assim, devido às restrições observacionais, as correntes I e J tem o mesmo peso na construção do tensor $\varphi_{\mu\nu}$ que (4.4-2) fica definitivamente reescrito como

$$\varphi_{\mu\nu} = \frac{a}{\sqrt{A^2 + B^2}} \left[J_\mu J_\nu + I_\mu I_\nu + \frac{d}{a} (J_\mu I_\nu + I_\mu J_\nu) \right]. \quad (4.5-13)$$

Voltando à expressão exata de g_{11} (4.5-8) e substituindo nela (4.5-11) e (4.5-12)

ficamos com

$$-g_{11} = \frac{r}{r - r_H} \left[1 - \left(1 - \frac{d^2}{a^2} \right) \frac{r_H^2}{r^2} \right]$$

$$-g_{11} = \frac{1 + \beta \left(\frac{r_H}{r} \right)^2}{1 - \frac{r_H}{r}} \quad (4.5-14)$$

onde

$$\beta = \left(\frac{d}{a} \right)^2 - 1. \quad (4.5-15)$$

Por fim, substituímos (4.5-14) em (4.5-6) e obtemos a forma final da geometria gerada no entorno de uma estrela estática e de simetria esférica através da Teoria Espinorial da Gravitação

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_H}{r}\right) dt^2 - \frac{1 + \beta \left(\frac{r_H}{r}\right)^2}{1 - \frac{r_H}{r}} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (4.5-16)$$

A forma desta geometria é a mesma da encontrada para a solução do mesmo problema através da TEG com dois campos espinoriais [17]. A única diferença é que naquela o parâmetro β é definido de tal forma que seja sempre positivo.

Pontos importantes:

(i) dados observacionais da aproximação de campo fraco e regime de baixas velocidades:

$$a = -\frac{r_H}{u} \Rightarrow \text{conexão com a aproximação newtoniana;}$$

(ii) dados observacionais do termo g_{11} (expansão em $\frac{r_H}{r}$):

$$a = b \Rightarrow \text{mesmo peso para ambas as correntes na definição da função } \varphi_{\mu\nu}.$$

Esta geometria em muito se assemelha à encontrada para o mesmo problema através da TRG: se $\beta = 0$ recaímos na mesma solução.¹⁹ O valor de β só poderá ser determinado - e daí sim verificar a relevância ou não desta solução, desta teoria -

¹⁹ Se $d = a$, recaímos exatamente à solução encontrada por Schwarzschild para o mesmo problema através da Teoria da Relatividade Geral.

quando os dados observacionais de sistemas físicos como este forem mais precisos e pudermos ter mais informações sobre potências de ordens maiores de $\frac{r_H}{r}$.

Aqui chegamos ao fim de nossa empreitada. A Teoria Espinorial da Gravitação, desenvolvida a partir de um campo espinorial, apresenta uma solução para o problema do campo gravitacional gerado por uma estrela de simetria esférica e estática compatível com os dados observacionais.

Apêndice: Algumas consequências da solução da estrela na TEG

A partir da geometria encontrada como solução do problema do campo gravitacional gerado por uma estrela de simetria esférica pela TEG (4.5-16), vamos agora estudar suas geodésicas, isto é, o movimento de partículas teste submetidas a esta geometria.

Através do método do potencial efetivo [20], analisaremos os efeitos que o parâmetro β pode gerar nestas geodésicas comparativamente às geradas pela Teoria da Relatividade Geral (caso $\beta = 0$).

A.1 Equações de movimento ou geodésicas

Como vimos, a ação S que representa o movimento de uma partícula teste submetida à gravitação através do campo $g_{\mu\nu}(x^\lambda)$ tem a forma associada é

$$S = \int \left(\frac{ds}{d\tau} \right)^2 d\tau \quad (\text{A.1-1})$$

onde τ é o tempo próprio da partícula teste. Substituindo (4.5-16) em (A.1-1), encontra-se

$$S = \int \left(1 - \frac{r_H}{r} \right) \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \frac{1 + \beta \left(\frac{r_H}{r} \right)^2}{1 - \frac{r_H}{r}} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - r^2 \left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 - r^2 \text{sen}^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 d\tau. \quad (\text{A.1-2})$$

Variando (A.1-1) em relação a cada uma das variáveis do problema (t, r, θ, φ) , encontram-se as respectivas equações de movimento

$$\frac{d}{d\tau} \left(\left(1 - \frac{r_H}{r} \right) \dot{t} \right) = 0 \quad (\text{A.1-3a})$$

$$2 \frac{1 + \beta \left(\frac{r_H}{r} \right)^2}{1 - \frac{r_H}{r}} \ddot{r} - \left[\frac{1 + \beta \left(\frac{r_H}{r} \right)^2 + \left(1 + \frac{2\beta r_H}{r} \right) \left(1 - \frac{r_H}{r} \right)}{\left(1 - \frac{r_H}{r} \right)^2} \right] \frac{r_H}{r^2} \dot{r}^2 + \frac{r_H}{r^2} \dot{t}^2 - 2r\dot{\theta}^2 - 2rsen^2\theta\dot{\varphi}^2 = 0$$

$$(\text{A.1-3b})$$

$$\ddot{\theta} - \frac{2}{r} \dot{\theta} \dot{\varphi} - sen\theta \cos\theta \dot{\varphi}^2 = 0 \quad (\text{A.1-3c})$$

e

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\varphi} + 2 \cos\theta \dot{\theta} \dot{\varphi} = 0. \quad (\text{A.1-3d})$$

A relação

$$V^\mu V_\mu = g^{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = \frac{ds^2}{d\tau^2} = k \quad (\text{A.1-4})$$

caracteriza o tipo de partícula que “caminha” por estas geodésicas. Quando $k=0$ estas partículas são fótons (partículas sem massa), e quando $k=1$ são partículas ponderáveis.

Comparativamente às equações obtidas através geometria que é solução do mesmo problema na TRG, as equações que aqui surgem são as mesmas exceto (A.1-3b) - que

se reduz à TRG quando $\beta = 0$. Por este motivo, as geodésicas geradas na TEG só irão diferir das encontradas na TRG na componente radial do movimento. Prossegue-se agora com a integração das equações (A.1-3). Com efeito:

(i) equação para t , (A.1-3a):

como se trata de uma derivada total em relação ao tempo próprio τ , obtém-se que

$$\left(1 - \frac{r_H}{r}\right) \dot{t} = cte = E$$

e portanto,

$$\dot{t} = \frac{E}{1 - \frac{r_H}{r}} \quad (\text{A.1-5a})$$

onde E é constante de movimento. Como $m\dot{t}$ é a componente p_0 do momento linear quadridimensional, a constante E está associada à energia mecânica do problema;

(ii) equação para θ , (A.1-3c):

escolhendo, sem perda de generalidade, as condições iniciais $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\dot{\theta} = 0$, e

substituindo na equação (A.1-3) e encontra-se que

$$\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = cte.$$

Portanto, se inicialmente a velocidade nesta direção ($\theta = \frac{\pi}{2}$) é nula, será nula durante todo o movimento

$$\dot{\theta} = 0; \quad (\text{A.1-5c})$$

(iii) equação para φ , (A.1-3d):

substituindo nela (A.1-5c) encontra-se

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\varphi} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{d\tau} (r^2 \dot{\varphi}) = 0.$$

Novamente temos uma derivada total em relação a τ . Assim, introduz-se uma nova constante de movimento l que, por estar relacionada ao movimento na direção φ , é associada à conservação momento angular do sistema. A solução fica

$$\dot{\varphi} = \frac{l}{r^2}; \quad (\text{A.1-5d})$$

(iv) equação para r , (A.1-3b):

esta equação pode ser substituída por (A.1-4) se substituirmos nela os resultados (A.1-5a), (A.1-5c) e (A.1-5d). Assim encontramos

$$\frac{E^2}{1 - \frac{r_H}{r}} - \frac{1 + \beta \left(\frac{r_H}{r} \right)^2}{1 - \frac{r_H}{r}} \dot{r}^2 - r^2 \left(\frac{l}{r^2} \right)^2 = k$$

que pode ser escrita como

$$E^2 = \left(k + \frac{l^2}{r^2} \right) \left(1 - \frac{r_H}{r} \right) + \left(1 + \beta \frac{r_H^2}{r^2} \right) \dot{r}^2. \quad (\text{A.1-6})$$

A.2 O potencial efetivo

A partir da equação (A.1-6) resultante da integração das equações de movimento (A.1-3), é possível construir o potencial efetivo gerado pela geometria (4.5-16) e estudar o movimento das partículas teste a partir do potencial gerado, ao invés de encontrar explicitamente o movimento radial resolvendo a equação (A.1-3b). Com efeito, pode-se reescrever (A.1-6) como

$$E^2 - \left(1 + \beta \frac{r_H^2}{r^2}\right) \dot{r}^2 = \left(k + \frac{l^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{r_H}{r}\right).$$

Dividindo por $1 + \beta \frac{r_H^2}{r^2}$ desde que não nulo, tem-se

$$\frac{E^2}{1 + \beta \frac{r_H^2}{r^2}} = \frac{\left(k + \frac{l^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{r_H}{r}\right)}{1 + \beta \frac{r_H^2}{r^2}} + \dot{r}^2.$$

Somando e subtraíndo E^2

$$E^2 = \frac{\left(k + \frac{l^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{r_H}{r}\right)}{1 + \beta \frac{r_H^2}{r^2}} + \dot{r}^2 - \frac{E^2}{1 + \beta \frac{r_H^2}{r^2}} + \frac{1 + \beta \frac{r_H^2}{r^2}}{1 + \beta \frac{r_H^2}{r^2}} E^2$$

$$E^2 = \frac{\left(k + \frac{l^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{r_H}{r}\right) + \beta \frac{r_H^2}{r^2} E^2}{1 + \beta \frac{r_H^2}{r^2}} + \dot{r}^2.$$

Redefinindo a energia como $E^2 \equiv \mathcal{E}$, encontra-se a expressão da conservação da energia mecânica deste sistema

$$\mathcal{E} = V_{ef(TEG)} + \dot{r}^2 \quad (\text{A.2-1a})$$

onde,

$$V_{ef(TEG)} \equiv \frac{V_{ef(TRG)} + \beta \frac{r_H^2}{r^2} \mathcal{E}}{1 + \beta \frac{r_H^2}{r^2}} \quad (\text{A.2-1b})$$

é o potencial efetivo gerado pela Teoria Espinorial da Gravitação, e

$$V_{ef(TRG)} \equiv \left(k + \frac{l^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{r_H}{r}\right), \quad (\text{A.2-1c})$$

o potencial efetivo gerado para o mesmo problema na Teoria da Relatividade Geral.

Isto é, o potencial efetivo gerado pela TEG é constituído do potencial gerado na TRG (caso $\beta = 0$) e de dois termos adicionais vinculados ao parâmetro β . Além disto, há uma diferença substancial: o potencial da teoria espinorial depende da própria energia mecânica do sistema. Enquanto na TRG tem-se

$$\mathcal{E} = T + V_{ef(TRG)}(r)$$

na TEG tem-se

$$\mathcal{E} = T + V_{ef(TEG)}(r, \mathcal{E}).$$

A partir de agora, vamos nos dedicar ao estudo da equação (A.2-1) observando que papel estes novos termos desempenham no novo potencial efetivo, e que diferenças entre as teorias aparecem do ponto de vista das órbitas permitidas ou não pelos potenciais.

A.2.1 Análise do potencial efetivo na TRG

A primeira parte desta análise é o estudo do potencial (A.2-1c) encontrado através da TRG. Com efeito

$$V_{ef(TRG)} = k - \frac{kr_H}{r} + \frac{l^2}{r^2} - \frac{r_H l^2}{r^3} \quad (\text{A.2.1-1})$$

Derivadas:

$$\frac{dV_{ef(TRG)}}{dr} = \frac{kr_H}{r^2} - 2\frac{l^2}{r^3} + 3\frac{r_H l^2}{r^4}$$

$$\frac{d^2V_{ef(TRG)}}{dr^2} = -2\frac{kr_H}{r^3} + 6\frac{l^2}{r^4} - 12\frac{r_H l^2}{r^5}.$$

I. Pontos de retorno (velocidade nula) e de velocidade máxima (independente do corpo em questão):

(i) pontos de retorno:

Os pontos de retorno, são aqueles que satisfazem a equação

$$\left(k + \frac{l^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{r_H}{r}\right) = \mathcal{E}. \quad (\text{A.2.1-2})$$

(ii) velocidade máxima da partícula teste:

A velocidade da partícula é dada por

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\mathcal{E} - V_{ef(TRG)}}. \quad (\text{A.2.1-3})$$

Ela é máxima quando

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\mathcal{E}}$$

e acontece nos pontos r_0 em que o potencial se anula

$$r_0 = r_H.$$

II. Fótons ($k = 0$):

(i) pontos onde o potencial se anula e limites assintóticos:

$$V_{ef(TRG)}(k = 0) = \frac{l^2}{r^2} - \frac{r_H l^2}{r^3} = 0 \Rightarrow r_0 = r_H$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} V_{ef(TRG)}(k = 0) = -\infty$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V_{ef(TRG)}(k = 0) = 0.$$

(ii) pontos de derivada nula:

$$\frac{dV_{ef(TRG)}}{dr} = -2\frac{l^2}{r^3} + 3\frac{r_H l^2}{r^4} = 0$$

↓

$$-2l^2 r + 3r_H l^2 = 0$$

onde

$$r \neq 0.$$

↓

$$r_m = \frac{3}{2}r_H.$$

(iii) máximos e mínimos:

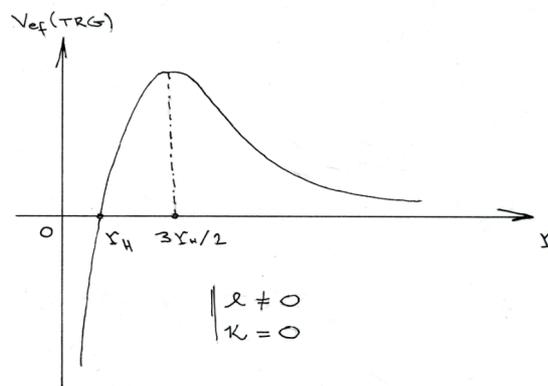
$$\frac{d^2V_{ef(TRG)}}{dr^2} = 6\frac{l^2}{r^4} - 12\frac{r_H l^2}{r^5}$$

↓

$$\frac{d^2V_{ef(TRG)}}{dr^2}(r_m) < 0 \Rightarrow \text{máximo em } V_{ef(TRG)}(r_m).$$

→ Para $l = 0$ (movimento somente na direção radial), o potencial é nulo.

→ Para $l \neq 0$, o potencial possui um máximo em r_m , criando uma barreira e não um poço, já que a função tende a zero quando o raio tende para infinito (ver gráfico abaixo). É a existência de um termo positivo $\frac{l^2}{r^2}$ no potencial (A.2.1-1), que permite a criação desta barreira.



Concluimos que, de acordo com a TRG, fótons não orbitam em torno de uma estrela de massa qualquer esfericamente simétrica e estática. De (A.2.1-1), vimos que para momentos angulares não nulos e energias maiores ou iguais que $V_{ef(TRG)}(r_m)$, estas partículas terão energia suficiente para ultrapassar a barreira de potencial criada e serão aprisionadas num poço infinito sem nunca terem energia suficiente para sair.

III. Corpos ponderáveis ($k = 1$):

(i) pontos onde o potencial se anula e limites assintóticos:

$$V_{ef(TRG)}(k = 1) = 1 - \frac{r_H}{r} + \frac{l^2}{r^2} - \frac{r_H l^2}{r^3} = 0 \Rightarrow r_0 = r_H^{20}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} V_{ef(TRG)}(k = 1) = -\infty$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V_{ef(TRG)}(k = 1) = 1.$$

(ii) pontos de derivada nula:

$$\frac{dV_{ef(TRG)}}{dr} = \frac{r_H}{r^2} - 2\frac{l^2}{r^3} + 3\frac{r_H l^2}{r^4} = 0$$

↓

$$r_H r^2 - 2l^2 r + 3r_H l^2 = 0, \text{ para } r \neq 0$$

↓

$$\begin{cases} r_{(k=1)} = \infty, l = 0 \\ r_{(k=1)} = \frac{l^2}{r_H} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{3r_H^2}{l^2}} \right), l \geq \sqrt{3}r_H \end{cases}$$

(iii) máximos e mínimos:

$$\frac{d^2 V_{ef(TRG)}}{dr^2} = -2\frac{r_H}{r^3} + 6\frac{l^2}{r^4} - 12\frac{r_H l^2}{r^5}$$

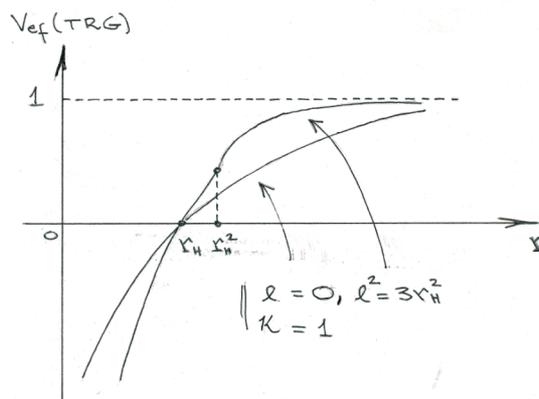
²⁰ Para $r \neq 0$, esta é uma equação do terceiro grau cujo discriminante é positivo. Por este motivo, possui apenas uma raiz real [21].

↓

$$\frac{d^2 V_{ef(TRG)}(r)}{dr^2} \begin{cases} < 0 \quad \forall r \text{ quando } l = 0 \\ r_{in.} = \frac{l^2}{r_H}, = 0 \Rightarrow \text{inflexão } (l^2 = 3r_H^2) \\ r_{mín.} = \frac{l^2}{r_H} \left(1 + \sqrt{1 - 3 \frac{r_H^2}{l^2}} \right), > 0 \Rightarrow \text{mínimo } (l^2 > 3r_H^2) \\ r_{máx.} = \frac{l^2}{r_H} \left(1 - \sqrt{1 - 3 \frac{r_H^2}{l^2}} \right), < 0 \Rightarrow \text{máximo } (l^2 > 3r_H^2) \end{cases}$$

em $V_{ef(TRG)}(r_{máx.})$, $V_{ef(TRG)}(r_{mín.})$ ou $V_{ef(TRG)}(r_{in.})$.

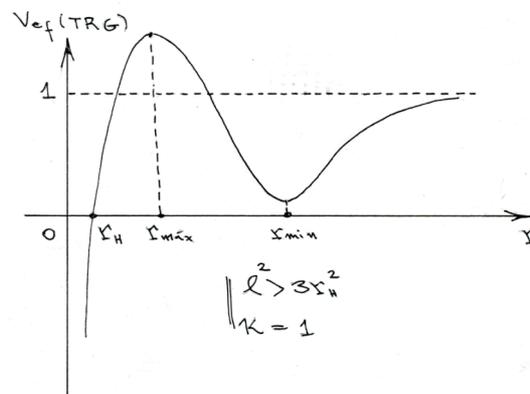
→ Para $l=0$ (partícula se movimenta exatamente na direção radial) e $l^2 = 3r_H^2$ o potencial não possui máximos nem mínimos para algum r finito (ver gráficos abaixo). Com isto, sempre que uma partícula ponderável vier do infinito com energia $E \geq 1$, ela terá energia suficiente para se aproximar da origem tanto o quanto queira, mas nunca terá energia suficiente para sair do poço infinito que se forma ali.



→ Para $l^2 > 3r_H^2$, o potencial possui um máximo em $r_{máx.}$, e um mínimo em $r_{mín.}$.

Portanto, além do poço infinito na origem, existe um poço finito no qual as partículas

podem ficar aprisionadas (ver gráfico abaixo). Os termos 1 e $\frac{l^2}{r^2}$ de $V_{ef(TRG)}$ são os que possibilitam a formação deste poço. Assim, sempre que a partícula tiver energia \mathcal{E} tal que $V_{ef(TRG)}(r_{máx.}) < \mathcal{E} < 1$ ela orbita em torno da estrela entre os pontos dados por (A.2.1-2) (ver gráfico abaixo). Se o valor da energia estiver fora deste intervalo, ou ela atravessa o poço e é aprisionada pelo potencial infinito, ou se encontra com a barreira e não tem energia suficiente para atravessá-la.



Conclui-se que, de acordo com a TRG, corpos ponderáveis só podem orbitar em torno de uma estrela de massa qualquer esfericamente simétrica e estática se seu momento angular l for diferente de zero.

A.2.2 Análise do potencial efetivo na TEG

Vamos prosseguir com o estudo do potencial efetivo gerado pela TEG de forma análoga à que estudamos o gerado pela TRG. Verificaremos então que diferenças surgem nas geodésicas devido aos termos que contém o parâmetro β .

Antes de prosseguir com os mesmos passos da sessão anterior, vamos primeiramente fazer uma análise estrutural superficial de $V_{ef(TEG)}$ (A.2-1b) observando que papel desempenham os novos termos que aparecem. Com efeito, a constante β está presente em $V_{ef(TEG)}$ em duas posições qualitativamente diferentes:

→ **numerador:** $\beta \frac{r_H^2}{r^2} \mathcal{E}$

(i) se $\beta > 0$, este termo contribui positivamente para o potencial e, por isso, tem o mesmo papel do termo $\frac{l^2}{r^2}$ de (A.2-1c) que, como vimos, possibilita a criação de órbitas na TRG para partículas ponderáveis;

(ii) se $\beta < 0$, o termo contribui negativamente para o potencial, e portanto compete com $\frac{l^2}{r^2}$. Se $l^2 > \beta r_H^2 \mathcal{E}$, a soma $\frac{l^2 + \beta r_H^2 \mathcal{E}}{r^2}$ ainda contribui positivamente para o potencial.

→ **denominador:** $\frac{1}{1 + \beta \frac{r_H^2}{r^2}}$: independente do sinal de β , esta função atua como um

fator conforme em relação ao numerador.

(i) se $\beta > 0$, ela apenas reescala a função do numerador em cada ponto;

(ii) se $\beta < 0$, ela introduz uma singularidade adicional ao potencial efetivo (além de $r = 0$) em $r_s = r_H \sqrt{-\beta}$ e altera o sinal do numerador sempre que $r < r_H \sqrt{-\beta}$.

Partimos agora para a análise detalhada de $V_{ef(TEG)}$. Neste trabalho, vamos nos restringir a tratar o caso em que $\beta > 0$.²¹ O caso $\beta < 0$ contém múltiplas possibilidades que merecem um estudo minucioso a parte.

A idéia aqui é que tenhamos uma idéia geral do comportamento desta função. É importante deixar claro que não esgotamos todas as possibilidades - resultados precisos dependem do valor das constantes β , r_H e \mathcal{E} assim como dos valores e combinações de l e k .

Substituindo (A.1-1c) em (A.1-1b) temos a seguinte expressão para o potencial da TEG

$$V_{ef(TEG)} \equiv \frac{k - \frac{kr_H}{r} + \frac{l^2 + \beta r_H^2 \mathcal{E}}{r^2} - \frac{r_H l^2}{r^3}}{1 + \beta \frac{r_H^2}{r^2}}. \quad (\text{A.2.2-1})$$

Derivadas

$$\frac{dV_{ef(TEG)}}{dr} = \frac{\frac{dV_{ef(TRG)}}{dr} + \frac{2\beta r_H^2}{r^3}(k - \mathcal{E}) + \beta r_H^3 \left(\frac{l^2}{r^6} - \frac{k}{r^4} \right)}{\left(1 + \frac{\beta r_H^2}{r^2}\right)^2} \quad (\text{A.2.2-2a})$$

onde

$$\frac{dV_{ef(TRG)}}{dr} = \frac{kr_H}{r^2} - \frac{2l^2}{r^3} + \frac{3r_H l^2}{r^4}. \quad (\text{A.2.2-2b})$$

²¹ Este parece ser o caso fisicamente relevante, pois quando $\beta < 0$, os invariantes associados à geometria possuem singularidade adicional à do ponto $r = 0$.

$$\frac{d^2V_{ef(TEG)}}{dr^2} = \frac{1}{\left(1 + \beta \frac{r_H^2}{r^2}\right)^3} \left[\frac{d^2V_{ef(TRG)}}{dr^2} - \frac{6\beta r_H^2}{r^4} (k - \mathcal{E}) + \frac{6k\beta r_H^3}{r^5} + \right. \\ \left. + \frac{2\beta^2 r_H^4}{r^6} (k - \mathcal{E}) - \frac{2\beta^2 r_H^4 l^2}{r^6} - \frac{6\beta r_H^3 l^2}{r^7} - \frac{2\beta^2 l^2 r_H^5}{r^9} \right] \quad (\text{A.2.2-3a})$$

onde

$$\frac{d^2V_{ef(TRG)}}{dr^2} = -\frac{2kr_H}{r^3} + \frac{6l^2}{r^4} - \frac{12l^2 r_H}{r^5}. \quad (\text{A.2.2-3b})$$

I. Pontos de retorno (velocidade nula) e de velocidade máxima (independente do corpo em questão):

(i) pontos de retorno:

$$\mathcal{E} \left(1 + \beta \frac{r_H^2}{r^2}\right) = \left(k + \frac{l^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{r_H}{r}\right) + \beta \frac{r_H^2}{r^2} \mathcal{E}$$

que fica

$$\mathcal{E} = \left(k + \frac{l^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{r_H}{r}\right). \quad (\text{A.2.2-4})$$

Vê-se que a relação (A.2.2-4) não depende de β e é idêntica à equação dos pontos de retorno do potencial $V_{ef(TRG)}$ gerado na TRG - (A.2.1-2).

Conclui-se com isto que o fator β existente na geometria (4.5-16) produzida pela TEG não é relevante na determinação dos pontos de retorno das possíveis órbitas geradas pelo potencial efetivo. De outra forma, as órbitas geodésicas produzidas por uma ou outra teoria não diferem no que diz respeito aos raios máximos e mínimos que podem ser alcançados pelas partículas teste submetidas às geometrias.

(ii) velocidade máxima da partícula teste:

De acordo com (A.2-1), a velocidade é dada pela expressão

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{\mathcal{E} - V_{ef(TRG)}}{1 + \beta \frac{r_H^2}{r^2}}}, \quad (\text{A.2.2-5})$$

que difere do valor encontrado pela TRG (A.2.1-3) no denominador e alcança seu máximo no ponto r_0 onde o potencial se anula

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\mathcal{E}}$$

que é a mesma relação obtida pela TRG.

II. Fótons ($k = 0$):

(i) pontos onde o potencial se anula e limites assintóticos:

De acordo com (A.2.2-1), o potencial para $k = 0$ tem a forma

$$V_{ef(TEG)}(k = 0) \equiv \frac{\frac{l^2 + \beta r_H^2 \mathcal{E}}{r^2} - \frac{r_H l^2}{r^3}}{1 + \beta \frac{r_H^2}{r^2}} \quad (\text{A.2.2-6})$$

e se anula quando

$$\left(\frac{l^2 + \beta r_H^2 \mathcal{E}}{r^2} \right) - \frac{r_H l^2}{r^3} = 0 \Rightarrow r_0 = \frac{r_H l^2}{l^2 + \beta r_H^2 \mathcal{E}}$$

onde

$$r \neq 0.$$

(ii) limites assintóticos

$$\lim_{r \rightarrow 0} V_{ef(TEG)} \equiv \frac{\frac{l^2 + \beta r_H^2 \mathcal{E}}{r^2} - \frac{r_H l^2}{r^3}}{1 + \beta \frac{r_H^2}{r^2}} = -\infty$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V_{ef(TEG)} \equiv \frac{\frac{l^2 + \beta r_H^2 \mathcal{E}}{r^2} - \frac{r_H l^2}{r^3}}{1 + \beta \frac{r_H^2}{r^2}} = 0$$

(ii) pontos de derivada nula:

A expressão (A.2.2-2) da primeira derivada para $k = 0$ fica

$$\frac{dV_{ef(TEG)}}{dr} = \frac{-\frac{2}{r^3}(l^2 + \beta r_H^2 \mathcal{E}) + \frac{3r_H l^2}{r^4} + \frac{\beta r_H^3 l^2}{r^6}}{(1 + \frac{\beta r_H^2}{r^2})^2} \quad (\text{A.2.2-7})$$

que se anula quando

$$2(l^2 + \beta r_H^2 \mathcal{E})^3 - 3r_H l^2 r^2 - \beta r_H^3 l^2 = 0$$

onde

$$r \neq 0.$$

A equação do terceiro grau acima possui discriminante positivo e portanto apenas uma raiz real. Assim há apenas um ponto r_m neste sistema físico no qual a derivada primeira se anula.

(iii) máximos e mínimos:

$$\frac{d^2 V_{ef(TEG)}}{dr^2} (k=0) = \frac{1}{(1 + \beta \frac{r_H^2}{r^2})^3} \left[\frac{6(l^2 + \beta r_H^2 \mathcal{E})}{r^4} - \frac{12l^2 r_H}{r^5} + \right. \\ \left. - \frac{2\beta^2 r_H^4 (\mathcal{E} + l^2)}{r^6} - \frac{6\beta r_H^3 l^2}{r^7} - \frac{2\beta^2 l^2 r_H^5}{r^9} \right]. \quad (\text{A.2.2-8})$$

Como $\lim_{r \rightarrow 0} V_{ef(TEG)}(k=0) = -\infty$, $\lim_{r \rightarrow \infty} V_{ef(TEG)}(k=0) = 0$ e o potencial se anula em r_0 , o ponto r_m de derivada nula só pode ser um máximo positivo cujo valor $V_{ef(TEG)}(r_m)$.

De acordo com (A.2.2-6), este valor depende de l, r_H, β e \mathcal{E} .

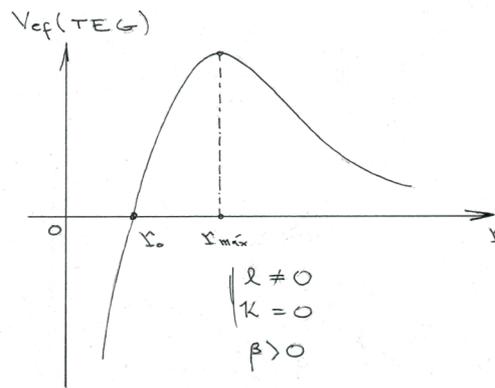
Concluimos que:

→ Para $l \neq 0$: há apenas um ponto r_m onde a primeira derivada se anula e este ponto é um máximo positivo. Existe portanto uma barreira de potencial dada por

$$V_{ef(TEG)}|_{r_m}(k=0) = \frac{l^2 + \beta r_H^2 \mathcal{E} - \frac{r_H l^2}{r_m}}{r_m^2 + \beta r_H^2}$$

cuja intensidade depende (entre outros) do próprio valor da energia mecânica \mathcal{E} .

Sempre que $\mathcal{E} > V_{ef(TEG)}(r_m)$, a partícula terá energia suficiente para atravessar a barreira e ser capturada pelo poço infinito sem nunca mais ter energia suficiente para sair (ver gráfico abaixo).



Vê-se que, para fótons com momento angular não nulo ($k=0$ e $l \neq 0$), o comportamento geral dos potenciais produzidos por ambas as teorias é o mesmo: fótons não podem orbitar em torno de um corpo massivo, e podem ser capturados por

um potencial infinito se tiverem energia suficiente para atravessar a barreira de potencial.

→ Para $l = 0$, o potencial (A.2.2-6) se reduz a

$$V_{ef(TEG)}(k = 0, l = 0) = \frac{\beta r_H^2 \mathcal{E}}{r^2 + \beta r_H^2}$$

que só se anula quando $r \rightarrow \infty$ e para energia nula²². Os limites assintóticos ficam

$$\lim_{r \rightarrow 0} V_{ef(TEG)} \equiv \frac{\beta r_H^2 \mathcal{E}}{r^2 + \beta r_H^2} = \mathcal{E}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V_{ef(TEG)} \equiv \frac{\beta r_H^2 \mathcal{E}}{r^2 + \beta r_H^2} = 0$$

significando que não há poço infinito quando $r \rightarrow 0$. As derivadas (A.2.2-7) e (A.2.2-8) ficam

$$\frac{dV_{ef(TEG)}}{dr}(k = 0, l = 0) = -\frac{2\beta r_H^2 \mathcal{E} r}{(r^2 + \beta r_H^2)^2}$$

que se anula quando

$$r_m = 0;$$

e

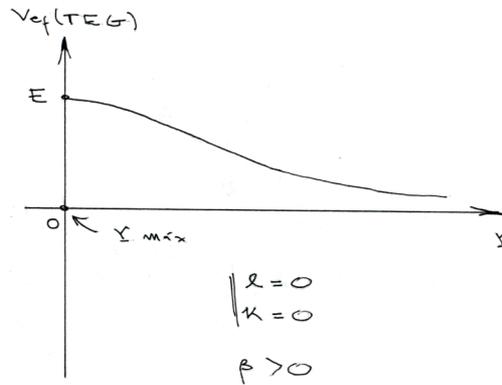
$$\frac{d^2 V_{ef(TEG)}}{dr^2}(k = 0, l = 0) = \frac{-2\beta r_H^2 \mathcal{E}}{(r^2 + \beta r_H^2)^2} + \frac{8\beta r_H^2 \mathcal{E} r^2}{(r^2 + \beta r_H^2)^3}$$

↓

$$\left. \frac{d^2 V_{ef(TEG)}}{dr^2} \right|_{r_m} (k = 0, l = 0) < 0 \Rightarrow \text{máximo.}$$

²² Neste caso, fica bastante clara a forte influência da energia \mathcal{E} no potencial efetivo produzido pela TEG. Se não há energia não há potencial - a energia da partícula gera o potencial. O mesmo não acontece na TRG.

Assim, o potencial forma uma barreira em r_m do valor da energia \mathcal{E} do sistema (ver gráfico abaixo).



Portanto, não há poço infinito na origem. Ao contrário, fótons sem momento angular ($k = l = 0$), encontram uma barreira de potencial finita ao se aproximar da origem, e esta barreira tem seu ponto máximo exatamente no valor da energia mecânica do sistema. Este resultado difere do obtido para o mesmo caso pela TRG, pois lá, neste caso, o potencial é nulo.

III. Corpos ponderáveis ($k = 1$):

(i) Pontos onde o potencial se anula e limites assintóticos:

De acordo com (A.2.1-1b), o potencial para $k = 1$ tem a forma

$$V_{ef(TEG)}(k=1) \equiv \frac{1 - \frac{r_H}{r} + \frac{l^2 + \beta r_H^2 \mathcal{E}}{r^2} - \frac{r_H l^2}{r^3}}{1 + \beta \frac{r_H^2}{r^2}} \quad (\text{A.2.2-9})$$

e se anula quando

$$r^3 - r_H r^2 + \left(l^2 + \beta r_H^2 \mathcal{E} \right) - r_H l^2 = 0$$

onde

$$r \neq 0.$$

O sinal do discriminante desta equação do terceiro grau depende de todas as constantes da equação, portanto, só iremos encontrar solução para casos particulares destas.

(ii) limites assintóticos

$$\lim_{r \rightarrow 0} V_{ef(TEG)} \equiv \frac{1 - \frac{r_H}{r} + \frac{l^2 + \beta r_H^2 \mathcal{E}}{r^2} - \frac{r_H l^2}{r^3}}{1 + \beta \frac{r_H^2}{r^2}} = -\infty$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V_{ef(TEG)} \equiv \frac{1 - \frac{r_H}{r} + \frac{l^2 + \beta r_H^2 \mathcal{E}}{r^2} - \frac{r_H l^2}{r^3}}{1 + \beta \frac{r_H^2}{r^2}} = 1$$

(ii) pontos de derivada nula:

A expressão (A.2.2-2) da primeira derivada para $k = 1$ fica

$$\frac{dV_{ef(TEG)}}{dr} = \frac{\frac{r_H}{r^2} + \frac{2(\beta r_H^2(1 - \mathcal{E}) - l^2)}{r^3} + \frac{3r_H l^2 - \beta r_H^3}{r^4} + \frac{\beta r_H^3 l^2}{r^6}}{\left(1 + \frac{\beta r_H^2}{r^2}\right)^2} \quad (\text{A.2.2-10})$$

que se anula quando

$$r_H r^4 + 2(\beta r_H^2(1 - \mathcal{E}) - l^2)r^3 + (3l^2 - \beta r_H^2)r^2 + \beta r_H^3 l^2 = 0$$

onde

$$r \neq 0.$$

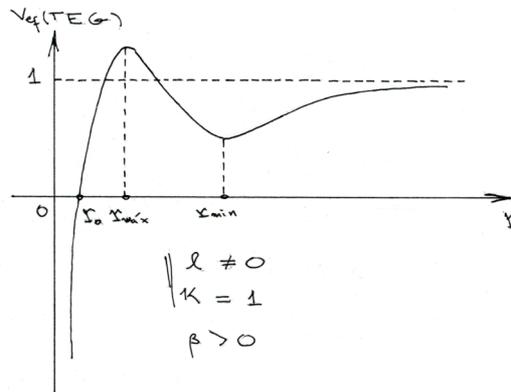
A quantidade de raízes reais desta equação do quarto grau também é dependente das constantes da equação. Por este motivo, também só poderemos saber a solução em casos específicos.

(iii) máximos e mínimos:

$$\frac{d^2V_{ef(TEG)}}{dr^2} = \frac{2}{(1 + \beta \frac{r_H^2}{r^2})^3} \left[-\frac{r_H}{r^3} + \frac{3(l^2 - \beta r_H^2(1 - \mathcal{E}))}{r^4} + \frac{3r_H(\beta r_H^2 - 2l^2)}{r^5} + \frac{\beta^2 r_H^4(1 - \mathcal{E} - l^2)}{r^6} - \frac{3\beta r_H^3 l^2}{r^7} - \frac{\beta^2 l^2 r_H^5}{r^9} \right] \quad (\text{A.2.2-11})$$

Concluimos que:

→ Para $l \neq 0$, de forma geral, podemos apenas fazer uma análise qualitativa do comportamento do potencial. O termo $\frac{\beta r_H^2 \mathcal{E}}{r^2}$ do numerador, como foi dito inicialmente, atua da mesma forma que $\frac{l^2}{r^2}$: pode produzir máximos positivos. E como quando $r \rightarrow \infty$, $V_{ef(TEG)} \rightarrow 1$, a formação de órbitas é possível (ver gráfico abaixo). O termo do denominador atua apenas como um fator conforme.



Assim, podemos concluir qualitativamente que, corpos ponderados na presença de momento angular ($k=1, l \neq 0$), apesar do ponto onde o potencial se anula - r_0 - e do ponto de derivada primeira nula - r_m - serem diferentes, o comportamento do

potencial da TEG não difere do produzido pela TRG neste caso: se $V_{ef(TEG)}(r_m) < \mathcal{E} < 1$, a partícula pode ficar aprisionada em uma órbita. Se a energia for maior que 1, eles podem ultrapassar a barreira de potencial formada e serem capturados por um poço infinito.

→ Para $l = 0$, o potencial (A.2.2-9) se reduz a

$$V_{ef(TEG)}(k=1, l=0) \equiv \frac{1 - \frac{r_H}{r} + \frac{\beta r_H^2 \mathcal{E}}{r^2}}{1 + \beta \frac{r_H}{r^2}}$$

e se anula quando

$$r^2 - r_H r + \beta r_H^2 \mathcal{E} = 0 \Rightarrow r_0 = \frac{r_H}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4\beta \mathcal{E}} \right)$$

onde

$$r \neq 0, r_0 > 0 \text{ e } \beta \leq \frac{1}{4\mathcal{E}}.$$

Neste caso, os limites assintóticos ficam

$$\lim_{r \rightarrow 0} V_{ef(TEG)} \equiv \frac{r^2 - r_H r + \beta r_H^2 \mathcal{E}}{r^2 + \beta r_H^2} = \mathcal{E}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V_{ef(TEG)} \equiv \frac{1 - \frac{r_H}{r} + \frac{\beta r_H^2 \mathcal{E}}{r^2}}{1 + \beta \frac{r_H}{r^2}} = 1$$

significando que não há poço infinito quando $r \rightarrow 0$. As derivadas (A.2.2-10) e (A.2.2-11) ficam

$$\frac{dV_{ef(TEG)}}{dr} = \frac{\frac{r_H}{r^2} + \frac{2(\beta r_H^2(1-\mathcal{E}))}{r^3} - \frac{\beta r_H^3}{r^4}}{\left(1 + \frac{\beta r_H^2}{r^2}\right)^2}$$

que se anula quando

$$r_m = r_H \left[\beta(\mathcal{E} - 1) \pm \sqrt{\beta^2(\mathcal{E} - 1)^2 + \beta} \right]$$

onde para que a raíz seja real, temos que exigir que

$$\left(\beta^2(\mathcal{E} - 1)^2 + \beta \right) \geq 0.$$

A expressão da segunda derivada fica

$$\frac{d^2V_{ef(TEG)}}{dr^2} = \frac{2}{\left(1 + \beta \frac{r_H^2}{r^2}\right)^3} \left[-\frac{r_H}{r^3} - \frac{3\beta r_H^2(1-\mathcal{E})}{r^4} + \frac{3\beta r_H^3}{r^5} + \frac{\beta^2 r_H^4(1-\mathcal{E})}{r^6} \right]$$

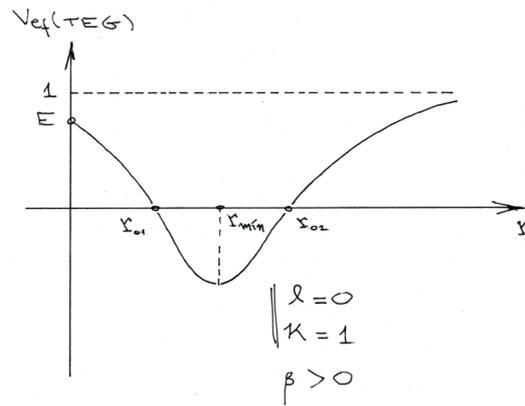
cuyo sinal, quando aplicada em r_m , é determinado por

$$\frac{\left(\beta^2(\mathcal{E} - 1)^2 + \beta \right)}{\left(1 + \beta \frac{r_H^2}{r^2}\right)^3}.$$

Como só existe r_m real se $\left(\beta^2(\mathcal{E} - 1)^2 + \beta \right) \geq 0$, então

$$\left. \frac{d^2V_{ef(TEG)}}{dr^2} \right|_{r_m} > 0 \Rightarrow \text{mínimo}.$$

O comportamento geral do potencial está no gráfico abaixo.



Então, se $E < 1$, corpos ponderáveis sem momento angular ($k=1, l=0$) podem orbitar (entre pontos que não estão previstos em (A.2.2-4)). Além disto, não há poço infinito na origem, o que significa que a partícula pode, em princípio, se aproximar da origem tanto quanto queira. Este caso difere em muito diferente do que ocorre na TRG onde, quando $l=0$, não há a possibilidade da formação de órbitas pela ausência de termos positivos no potencial (fora o termo constante k).

Aqui termina nossa análise.

A.2.3 Conclusão do apêndice

A tabela abaixo esquematiza os resultados encontrados:

	TRG	TEG
$k = 0, l \neq 0$		
$k = l = 0$	potencial nulo	
$k = 1, l \neq 0$		
$k = 1, l = 0$		

Lembrando que nos restringimos ao estudo do caso $\beta > 0$, segue esquematicamente, do ponto de vista do potencial efetivo gerado, as semelhanças e diferenças entre a TEG e a TRG .

I. Semelhanças

- (i) pontos de retorno das possíveis órbitas geradas pelo potencial;
- (ii) velocidade máxima que as partículas podem, em princípio, atingir;
- (iii) fótons com momento angular não nulo ($k = 0$ e $l \neq 0$) não podem orbitar em torno de um corpo massivo e podem ser capturados por um potencial infinito, se tiverem energia suficiente para atravessar a barreira de potencial;

(iv) corpos ponderados na presença de momento angular ($k = 1, l \neq 0$) podem ficar aprisionados em uma órbita e, se tiverem energia suficiente, ultrapassar a barreira de potencial e serem capturados por um poço infinito.

II. Diferenças

- (i) na TEG, existe potencial não nulo para fótons sem momento angular ($k = l = 0$).
- (ii) na TEG, corpos ponderáveis sem momento angular ($k = 1, l = 0$) podem orbitar para valores de energia tais que $\mathcal{E} < 1$.

A conclusão principal deste apêndice é que a TEG proporciona a formação de potencial não nulo na ausência de momento angular para qualquer tipo corpo. Em particular, para corpos ponderáveis, permite inclusive a formação de órbitas. Isto acontece porque o termo $\frac{l^2 + \beta r_H^2 \mathcal{E}}{r^2}$, presente no numerador de $V_{ef(TEG)}$, funciona como um momento angular efetivo; se $l = 0$ e $\mathcal{E} \neq 0$, o termo $\beta r_H^2 \mathcal{E}$ desempenha, estruturalmente, o mesmo papel de l^2 . O termo presente no denominador atua somente como um fator conforme, não altera o comportamento global da função.

Conclusão

Neste trabalho examinamos como a Teoria da Relatividade Geral pode ser dividida em duas partes: cinemática (referente a relação efetiva da gravitação com o universo físico: movimento dos corpos e “movimento” de qualquer conteúdo material-energético não gravitacional) e dinâmica (parte responsável pela descrição evolutiva da teoria).

A partir deste ponto, mostramos que é possível, em princípio, construir uma teoria métrica da gravitação onde a parte cinemática seja idêntica a proposta pela TRG, isto é, baseada no PEE, e que a geometria seja tratada como uma geometria efetiva - sem dinâmica própria. Neste caso, o objeto dinâmico da teoria não mais é a métrica e sim algum outro campo que satisfaça uma equação de movimento e a partir do qual a geometria é definida.

Com isto, apresentamos a Teoria Espinorial da Gravitação, que é uma teoria onde a geometria é definida a partir de campos espinoriais que obedecem a dinâmica de Heisenberg. Especialmente, construímos uma versão da TEG com apenas um campo espinorial.

Com esta versão da TEG, encontramos a solução do campo gravitacional (métrica) gerada ao redor de um objeto estático e de simetria esférica. Esta solução é semelhante à obtida por K. Schwarzschild para o mesmo problema através da TRG em 1915 e compatível com todos os dados observacionais que dispomos - elas diferem por um fator β , cuja relevância poderá ser verificada assim que os dados relativos ao termo g_{11} do campo deste sistema estiverem ainda mais apurados.

“Cada uma das duas histórias é contada de modo distinto. Os mesmos acontecimentos entram simultaneamente em duas lógicas narrativas antagônicas. (...) Os pontos de interseção são o fundamento da construção.” [19]

Mostramos também que o potencial efetivo produzido por esta solução apresenta um termo que se comporta como um *momento angular efetivo*, capaz de produzir órbitas para corpos ponderáveis mesmo na ausência de momento angular.

Referências

[01] Will, C. M., *Theory and Experiment in Gravitational Physics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1981.

[02] Will, C. M., *2006 Living Review Relativity*, **9**, 3, 2006.

[03] Schwarzschild. K., *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie*, , Sitzungsberichten der Preußischen, Akademie der Wissenschaften Phys. Math. Klasse, 189-196, 1916. (Em Schwarzschild, K., *On the Gravitational Field of a Mass Point according to Einstein's Theory*, *General Relativity and Gravitation*, **35**, nº5, 2003.).

[04] Heisenberg, W., *Quantum Theory of Fields and Elementary Particles*, *Rev. of Mod. Phys.*, **29**, numb. 3, 269, 1957; David C. Cassidy, *Uncertainty: The Life and Science of Werner Heisenberg*, W. H. Freeman, 1993.

[05] Particle Data Group, *Particle Physics Booklet*, 2008.

[06] Eötvös, R. v., *Über die Anziehung der Erde auf Verschiedene Substanzen*, *Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn*, 8, 65, 1890. (Tradução: *On the Gravitation Produced by Earth on different substances*, *The Abraham Zelmanov Journal*, 1, 2008.).

[07] Feynman, R. P., *Feynman Lectures on Gravitation*, Addison-Wesley Publishing Company, 1ª ed., 1995.

[08] Einstein, A., *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*, *Annalen der Physik*, **49**, 1916. (Em Einstein A., *Os fundamentos da Teoria da Relatividade Geral*, *Textos Fundamentais da Física Moderna - vol.1*, Fundação Calouste Gulbenkian, 3ª ed.).

[09] Mach, E., *The Science of Mechanics*, LaSalle, IL: Open Court 5ª ed., 1960. (1ª ed. 1883, Leipzig). (Em: Ray, C., *The Evolution of Relativity*, Adam Hilger, Bristol and Philadelphia, 1ª ed., 1987.).

[10] Goldstein H., Poole C., Safko J., *Classical Mechanics*, Addison Wesley, 3ª ed., 2000.

[11] Leite Lopes, J. e Vidal, A., *Introdução à Teoria Quântica dos Campos*, *Monografias de Física XVII*, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, 1963.

[12] R. de Oliveira, L. A., *Acoplamento não-mínimo com a gravitação e espaços de Weyl integráveis*, Tese de Doutorado, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, 1988.

[13] Einstein, A., *Hamiltonsches Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie*, *Sitzungsberichten der Preußischen Akademie der Wissenschaften Phys. Math.*

Klasse., 1, 1916. (Em Einstein, A., *O princípio de Hamilton e a Teoria da Relatividade Geral*, Textos Fundamentais da Física Moderna – vol.1, Fundação Calouste Gulbenkian, 3ª ed.).

[14] Damião Soares, I., *Introdução a Espinores em Espaços Curvos*, Anais da V Escola do CBPF – vol. 2, 119, 2004; *O cálculo de formas diferenciais e a equação de Dirac em espaços curvos*, Anais da II Escola de Cosmologia e Gravitação – vol. 1, 479, ed. Mário Novello, 1980.

[15] Cougo Pinto, M. V. *Notas de aula: Teoria Quântica de Campos I*, Instituto de Física – Universidade Federal do Rio de Janeiro.

[16] Kofink, W. v., *Über das magnetische und elektrische Moment des Elektrons nach der Diracschen Theorie*, Annalen der Physik, Band 30, 91, 1937.

[17] Novello, M. gr-qc/0609033, 2006; *A spinor theory of gravity and the cosmological framework*, Journal of Cosmology and Astroparticle Physics - vol. 0706, 06, 2007.

[18] Adler, R., Bazin, M. e Schiffer, M, *Introduction to General Relativity*, McGraw-Hill Book Company, 2ª ed., 1975.

[19] Piglia, Ricardo. *Formas Breves*, Companhia das Letras, 1ª ed., 2004.

[20] Ohanian, H. e Ruffini, R., *Gravitation and Space Time*, W. W. Norton & Company, 2ª ed., 1994.

[21] <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/medio/polinom/tartaglia.htm>.

