



CBPF

Centro Brasileiro
de Pesquisas Físicas

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Programa de Pós-Graduação em Física

Observáveis Clássicos a partir de Amplitudes de Espalhamento Quânticas

Lucas Haiashi Lima

Rio de Janeiro - RJ

2024



Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Programa de Pós-Graduação em Física

Lucas Haiashi Lima

Observáveis Clássicos a partir de Amplitudes de Espalhamento Quânticas

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Física do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, como requisito parcial para a obtenção do Título de mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Gabriel Santos Menezes

Rio de Janeiro - RJ

2024

“OBSERVÁVEIS CLASSICOS A PARTIR DE AMPLITUDES DE
ESPALHAMENTO QUÂNTICAS”

LUCAS HAIASHI LIMA

Dissertação de Mestrado em Física apresentada no
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do
Ministério da Ciência Tecnologia e Inovação.
Fazendo parte da banca examinadora os seguintes
professores:



Gabriel Santos Menezes - Orientador/CBPF



Riccardo Sturani - IFT-UNESP

Documento assinado digitalmente
gov.br THALES AGRICOLA CALIXTO DE AZEVEDO
Data: 29/05/2024 08:41:52-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Thales Agrícola Calixto de Azevedo – UFRJ

Rio de Janeiro, 29 de abril de 2024.

À Helenita

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à minha mãe, principal apoiadora incondicional durante todos os anos e por toda ajuda e suporte para conclusão desta etapa.

Ao meu orientador Prof. Dr. Gabriel Menezes por todos os anos de estudo e por todos os ensinamentos que me permitiram escrever este trabalho e que, certamente, serão os fundamentos das próximas jornadas acadêmicas.

Agradeço também a todos os professores, em especial aos professores Nami e Sebastião, com os quais tive o prazer de ser aluno e de aprender lições que me acompanharão por toda a minha carreira.

À Agata, por me fazer seguir em frente e confiar incondicionalmente em mim.

À Júlia, pelo apoio e suporte emocional fundamental ao longo desses anos.

À Matheus, pela imensurável troca de conhecimento e aprendizagem que me proporcionou, além de toda ajuda na confecção deste trabalho.

Aos minhas colegas de CBPF Herus e Dudu, que em muito me ajudaram nas mais diversas tarefas e responsabilidades ao longo desses anos.

À todos que contribuíram de forma direta e indireta na confecção deste trabalhos e do meu mestrado.

À CAPES e a FAPERJ pelo financiamento. Finalmente, agradeço ao CBPF pela oportunidade de fazer parte do programa de Mestrado Acadêmico com auxílio de uma bolsa de Mestrado.

*“Os limites da minha linguagem são os limites do meu mundo”
(Ludwig Wittgenstein)*

Resumo

Os métodos on-shell são um componente fundamental do programa moderno de amplitudes. Utilizando o poder do método unitariedade generalizada e focando em quantidades invariantes de calibre, enormes progressos foram feitos no cálculo de amplitudes necessárias para previsões teóricas em experimentos como o LHC. Recentemente, um novo contexto experimental surgiu em que as amplitudes de espalhamento podem ser de grande utilidade: a astronomia de ondas gravitacionais. De fato, desenvolver novas técnicas teóricas para lidar com o problema de dois corpos na relatividade geral é essencial para medições de precisão futuras.

Explorando a relação de cópia dupla entre gravidade e teoria de Yang-Mills pode-se calcular amplitudes na gravitação. Ao empregar métodos de amplitudes na análise da física dos buracos negros, obtemos um enorme ganho no poder computacional, além de evidenciar conexões da gravitação com teorias quânticas de campo que outrora estariam obscuras.

Esta dissertação apresenta uma revisão dos artigos *Amplitudes, Observables, and Classical Scattering* de Kosower, Maybee e O’Connell [1] e *Waveforms from Amplitudes* de Cristofoli, Gonzo, Kosower e O’Connell [2].

Palavras-chave: Amplitudes de Espalhamento, Ondas Gravitacionais, Cópia Dupla

Abstract

On-shell methods are a fundamental component of the modern amplitudes program. Using the power of generalized unitarity method and focusing on gauge invariant quantities, huge progress has been made in calculating amplitudes needed for theoretical input to experiments such as the LHC. Recently, a new experimental context has emerged in which scattering amplitudes can be of great use: gravitational wave astronomy. Indeed, developing new theoretical techniques to deal with the two-body problem in general relativity is essential for future precision measurements.

By exploiting the double copy relationship between gravity and Yang-Mills theory, one can calculate amplitudes in gravitation. By employing amplitude methods in the analysis of black hole physics, we obtain an enormous gain in computational power, as well as highlighting gravitational connections with quantum field theories that were once obscure.

This dissertation presents a review of the articles *Amplitudes, Observables, and Classical Scattering* by Kosower, Maybee and O’Connell [1] and *Waveforms from Amplitudes* by Cristofoli, Gonzo, Kosower and O’Connell [2].

Keywords: Scattering Amplitudes, Gravitational Waves, Double copy

Notação e Convenções

Lista de abreviações

Abraham-Lorentz-Dirac	ALD
Eletrodinâmica Quântica	EDQ
Kosower-Maybee-O'Connell	KMOC
Leading order	LO
Next-to-leading order	NLO
Next-to-next-to-leading order	NNLO
Modelo Padrão	MP
Ondas gravitacionais	OG
Pós-Minkowskiana	PM
Pós-Newtoniana	PN
Relatividade Geral	RG
Relatividade Numérica	RN
Teoria Quântica de Campos	TQC
Transverse-traceless	TT

Lista de símbolos

$\delta_{\mu\nu}$	Métrica euclidiana
$g_{\mu\nu}$	Métrica do espaço-tempo
$\eta_{\mu\nu}$	Métrica de Minkowski
$h_{\mu\nu}$	Perturbação pequena

Lista de convenções

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$f(x) = \int \frac{d^n q}{(2\pi)^n} \tilde{f}(q) e^{-iq \cdot x}$$

$$\tilde{f}(q) = \int d^4 x f(x) e^{iq \cdot x}$$

$$i\mathcal{A}(p_1, p_2 \rightarrow p_1 + q, p_2 - q) = \sum (\text{diagramas de Feynman})$$

Lista de notações

$$\hat{d}^n p \equiv \frac{d^n p}{(2\pi)^n}$$

$$\hat{\delta}^{(n)} p \equiv (2\pi) \delta^{(n)}(p)$$

$$\hat{\delta}^{(+)}(p^2 - m^2) \equiv 2\pi \Theta(p^0) \delta(p^2 - m^2)$$

$$d\Phi(p) \equiv \hat{d}^4(p) \hat{\delta}^{(+)}(p^2 - m^2)$$

Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iv
Abstract	v
Notação e Convenções	vi
Introdução	1
1 Partículas pontuais e Impulso	5
1.1 Estados incidentes	6
1.2 O princípio da incerteza	8
1.3 O impulso	9
1.4 Pacotes de onda	12
1.5 Espalhamento de partículas pontuais	17
1.5.1 Zona dos “Cachinhos Dourados”	17
2 Radiação e partículas não massivas	23
2.1 O momento irradiado na colisão	23
2.2 Conservação do momento	25
2.3 Partículas não massivas	28
2.4 Estados coerentes do campo eletromagnético	28
2.5 Estados clássicos	30
2.6 Feixes de luz localizados	32
2.7 Estado incidente	35
3 Observáveis clássicos	36
3.1 Partículas massivas	36
3.1.1 Impulso clássico	36
3.1.2 Radiação clássica	37
3.1.3 Conservação de momento	39
3.2 Partículas não massivas	40
3.2.1 Impulso clássico	41
4 Exemplos	43
4.1 Impulso em leading order	43
4.2 Gravitação	44
4.3 Next-to-leading order	45
4.3.1 Contribuições puramente quânticas	46
4.3.2 Triângulos	47
4.3.3 Caixas	48
4.3.4 Corte da caixa	49

4.3.5	Combinando as contribuições	50
4.3.6	Verificação de condição on-shell	52
4.4	Espalhamento Thomson	53
4.5	Deflexão da Luz	54
5	Conclusões	57
	Referências	59
A	Cópia dupla clássica	69
B	Notação Espinorial	72
B.1	Matrizes de Pauli	72
B.2	Soluções da equação de Dirac	72
B.3	Notação espinorial-helicidade	73
B.3.1	Polarização de bósons	75
B.3.2	Polarização de férmions	75
C	Regras de Feynman da EDQ escalar	77

Introdução

A compreensão mais atual dos fundamentos da natureza envolve matéria e as quatro forças fundamentais conhecidas: eletromagnética, nuclear forte, nuclear fraca e gravitacional. O Modelo Padrão (MP) consiste numa teoria física de extremo sucesso construída em termos da Teoria Quântica de campos (TQC), que descreve partículas fundamentais e suas interações na escala subatômica. Após décadas de previsões do MP sendo confirmadas e estando de acordo com a maioria dos diversos experimentos, este ainda só descreve as três primeiras interações [3]. Por outro lado, a gravitação é descrita, na melhor das hipóteses, pela Relatividade Geral (RG), em que se estuda a dinâmica do espaço-tempo, no qual todas as partículas se propagam. É possível a formulação de uma teoria que combina a RG com uma TQC, gerando uma TQC efetivo, sendo válida somente em baixas energias [4]. Uma teoria quântica da gravitação aceita em todos os regimes ainda se mostra ausente. Tal teoria é extremamente desejável e sua ausência é particularmente notável em situações onde a RG simplesmente não funciona muito bem como buracos negros e o começo do universo, *i.e.* o Big Bang, pois nesse casos de singularidade as leis da física, como conhecemos, não são aplicáveis.

Previstas pela RG, a detecção de ondas gravitacionais pelos projetos LIGO e VIRGO, advindas da coalescência de buracos negros e estrelas de nêutrons, inauguraram uma nova era na astronomia e abriram uma nova janela para observação do universo [5–9]. Embora tais eventos sejam extremamente energéticos, as ondas gravitacionais detectadas na Terra são ruidosas e fracas. Atualmente, a precisão com que se pode compreender tais sinais recai sobre o quão preciso são os cálculos que podemos fazer através da RG [10]. Além da óbvia necessidade de se melhorar o aparato experimental, para filtrar os sinais detectados do ruído de fundo é preciso uma previsão meticulosa a partir da relatividade geral.

Após a detecção histórica, a física da OGs se torna o estudo das propriedades das fontes e suas propriedades. Em específico, sistemas binários com massas comparáveis ou com razões de massa extremamente altas têm se tornado a principal ferramenta para testar a dinâmica gravitacional e a física de objetos compactos, como buracos negros e estrelas de nêutrons, em condições únicas. O número de eventos observados até agora demonstra a viabilidade da detecção direta de ondas gravitacionais em uma ampla variedade de fontes [11, 12]. Futuros experimentos oferecem oportunidades inéditas para aprofundar nosso entendimento sobre buracos negros, estrelas de nêutrons e a própria RG [13–16]. No entanto, avanços teóricos são cruciais para criar extensos bancos de dados com modelos de formas de ondas, conforme destacado por [17]. Isso viabilizará a extração precisa de parâmetros de potenciais futuros sinais detectados [18].

Alcançar esse objetivo requer um esforço conjunto a partir das mais diversas abordagens. A maior parte dos dados acessíveis no sinal de uma onda gravitacional está contida no regime *inspiral*. Nesta fase, os corpos estão suficientemente distantes, é possível abordar a dinâmica de maneira perturbativa, adotando uma aproximação puntiforme e calculando correções de ordens superiores. Para uma inspiral de dois corpos com aproximadamente a mesma massa, pode-se, a princípio, fazer a expansão *pós-Newtoniana* (PN)

e estudar o caso de forma não relativística [11, 19–21]. Por outro lado, há a expansão *pós-Minkowskiana*, em que se incorpora por completo efeitos relativísticos, sendo esta mais útil no caso de espalhamentos, mas que contribui para os cálculos precisos da fase inspiral [22–30]. No caso da razão entre as massa dos corpos ser muito alta, *i.e.* um é muito mais pesado que o outro, a expansão de *auto-força* é utilizada [31–35].

Embora aparente simplicidade, a não linearidade da RG rapidamente torna os cálculos impossíveis de serem realizados. Isso nos conduz à busca por novas maneiras de se estudar a dinâmica gravitacional do problema de dois corpos na RG. Tais técnicas viriam a complementar os métodos de relatividade numérica [36–41], teoria de campo efetivo [42–45], formalismo Hamiltoniano de Arnowitt-Deser-Misner [46–48] e métodos de um-corpo-efetivo [49–52].

Uma alternativa é implementar técnicas originalmente desenvolvidas para física de partículas pelos programas modernos de colisores, em que se foi feito um extenso trabalho no desenvolvimento de um arcabouço teórico capaz de fazer previsões experimentais e que permitiu a extração precisa de medidas a partir dos dados caóticos. Métodos e ideias advindas da Teoria Quântica de Campos (TQC) mostram-se extremamente promissores, utilizando a linguagem das *amplitudes de espalhamento*. Estas amplitudes permitem a aplicação de um vasto arsenal de técnicas *on-shell* modernas nas situações de interesse [53, 54], incorporando o sucesso conquistado por essas abordagens na fenomenologia da física de partículas. Por exemplo, no potencial gravitacional clássico, o uso de amplitudes de espalhamentos na gravidade como teoria de campo efetivo é bem compreendido [4, 55–57].

Examinando ainda o potencial gravitacional, uma ferramenta extremamente útil mas que é coordenada-dependente, e, portanto, dependente de calibre, é que o poder das amplitudes de espalhamento torna-se mais evidente. O potencial também falha em capturar adequadamente a física relacionada à radiação emitida numa interação, resultando em complicações em ordens superiores. Amplitudes de espalhamento, por outro lado, são quantidades *on-shell*, invariantes de calibre e observáveis físicos, contendo naturalmente toda a informação física. Atualmente, há diversos trabalhos que se amparam em técnicas de amplitudes de espalhamento para o cálculo do potencial gravitacional clássico [58–65] e gerando resultados que são aplicados na física de OGs [66–75]. Mapeamento entre amplitudes e física clássica são conhecidos e válidos em certos regimes, por exemplo, a aproximação eikonal no regime de altas energias é usada de forma bem sucedida para se calcular ângulos de espalhamento [76–83].

Visto que é conhecido como se extrair informação sobre um espalhamento clássico e radiação a partir de amplitudes quânticas em apenas alguns regimes, é natural buscar uma generalização do mapeamento *on-shell* entre observáveis clássicos e amplitudes. Apresentaremos uma construção geral para uma variedade de observáveis *on-shell*, válidos tanto no regime quântico quanto no regime clássico de um espalhamento. Veremos como extrair o limite clássico de uma amplitude, aprimorando assim o entendimento de como utilizar amplitudes quânticas para calcular observáveis clássicos [1].

O método das amplitudes ganha maior relevância ao considerarmos um aspecto que talvez só possa ser notado sob a ótica das mesmas. Em TQC, calculamos as probabilidades com os possíveis eventos podem ocorrer. Assim, cada possibilidade de espalhamento, *i.e.* os estados iniciais e finais possíveis, está associada a um número chamado *amplitude de espalhamento*. Se houver mais de uma maneira de se obter o mesmo estado final,

as diferentes possibilidades são somadas para construir uma amplitude total \mathcal{A} , cuja a probabilidade de ocorrência é dada por $|\mathcal{A}|^2$. Pode-se compreender esse somatório das diferentes possibilidades como a inclusão de efeitos quânticos.

A forma tradicional para calcular amplitudes de espalhamento envolve o uso de *diagramas de Feynman*, que permitem uma visualização das interações entre partículas. As *regras de Feynman*, que dependem da teoria em questão, dizem como converter os diagramas para a linguagem matemática. Calcular amplitudes numa certa teoria é, portanto, equivalente a conhecer e aplicar suas regras de Feynman. Entretanto, desafios surgem quando lidamos com eventos não tão simples, pois o número de diagramas a serem calculados aumenta exponencialmente com o aumento do número de partículas e interações possíveis.

Numa teoria de YM, pode-se categorizar os diagramas de acordo com o número de laços que possuem. Assim, a amplitude de um processo com m partículas externas e L laços pode ser escrita de maneira geral como

$$\mathcal{A}_m^{(L)} = g^{m-2+2L} \sum_i \left(\prod_{n=1}^L \int \frac{d^4 p_l}{(2\pi)^4} \right) \frac{n_i c_i}{\prod_{\alpha_i} p_{\alpha_i}^2}, \quad (1)$$

em que a soma ocorre sobre todos os i 's diagramas, os p_l representam os L momentos de laço, n_i são numeradores cinemáticos dependentes de calibre e os c_i são fatores de cor. Devido à dependência de calibre, os numeradores cinemáticos não são únicos, e percebeu-se que obedecem uma álgebra similar a dos fatores de cor c_i [84–89]. Essa propriedade é conhecida como *dualidade cor-cinemática*, e existe uma escolha de numeradores n_i que permite escrever um amplitude a partir da (1)

$$\mathcal{M}_m^{(L)} = \left(\frac{\kappa}{2}\right)^{m-2+2L} \sum_i \left(\prod_{n=1}^L \int \frac{d^4 p_l}{(2\pi)^4} \right) \frac{n_i \tilde{n}_i}{\prod_{\alpha_i} p_{\alpha_i}^2}, \quad (2)$$

em que $\kappa = \sqrt{32\pi G}$ e \tilde{n}_i são os numeradores que satisfazem a dualidade cor-cinemática. Essas escolhas levam a (2) descrever uma amplitude gravitacional, estabelecendo o que é conhecido como *cópia dupla*. Embora não haja prova de que a cópia dupla seja válida em para todas as ordens acima do nível de árvore, há fortes indicativos de que isso seja verdade [90].

Isso nos mostra que, contrariando uma possível intuição inicial, amplitudes gravitacionais são mais simples do que o esperado e são estreitamente conectadas com amplitudes de YM. Embora essa definição difira um pouco da descrição original da cópia dupla [91], ela nos permite expressar que uma amplitude gravitacional é equivalente ao quadrado dos numeradores de YM [66, 84, 92], ou seja

$$\mathcal{M}_{gravity} = (\mathcal{A}_{YM})^2. \quad (3)$$

Além das surpreendentes previsões que vem sendo realizadas, essa nova abordagem advinda da física de partículas visa também explorar as novas estruturas teóricas que surgem no limite clássico das amplitudes de espalhamento. Embora possam ser corriqueiras na física de partículas, estas não são normalmente evidentes na abordagem tradicional ao problema de dois corpos da RG, ou talvez estejam inteiramente no regime clássico e se mostram invisíveis aos olhos da TQC. Podemos citar exemplos como a universalidade

em altas energias, conexões não perturbativas como soluções clássicas ou a relação entre efeitos conservativos e dissipativos [93]

A capacidade das amplitudes de espalhamento em auxiliar no entendimento e na modelagem precisa das fontes de ondas gravitacionais, de modo análogo à sua aplicação para as interações das partículas fundamentais, é notório. Diante de tal progresso recente, pode-se elencar os principais objetivos do programa como sendo

- Fornecer previsões acuradas para a dinâmica e radiação gravitacional de sistemas binários compostos por corpos massivos como buracos negros e estrelas de nêutrons. Para que possam ser usadas, em combinação com outros métodos analíticos e simulações, a fim de gerar modelos de formas de onda.
- Desenvolver o ferramental matemático da física teórica de alta energia para aplicação às ondas gravitacionais. Incluindo adaptar ferramentas existentes para melhorar a abordagem para o problema de dois corpos.
- Explorar o panorama teórico das amplitudes de espalhamento no regime clássico.

Nesta dissertação, vamos apresentar o formalismo introduzido por Kosower, Maybee e O'Connell (KMOC), em que, utilizando amplitudes de espalhamento, constrói-se observáveis on-shell que são válidos nos regimes clássicos e quânticos. Mostraremos também a construção dos estados de partículas pontuais que descrevem o limite clássico a sua região de validade. Aqui faremos uma revisão dos artigos *Amplitudes, Observables, and Classical Scattering* de Kosower, Maybee e O'Connell [1] e *Waveforms from Amplitudes* de Cristofoli, Gonzo, Kosower e O'Connell [2].

Capítulo 1

Partículas pontuais e Impulso

As amplitudes on-shell na TQC são comumente calculadas usando estados de ondas planas, totalmente deslocalizadas no espaço de posição, mas com momentos bem definidos, mas posições indefinidas. No entanto, se quisermos compreender a física de um buraco negro na mecânica quântica, ou de fato qualquer outra partícula pontual clássica, não podemos usar essa abordagem, faz-se necessário considerar estados bem localizados. Além disso, é crucial ter estados quânticos que representem com precisão as partículas pontuais quando o limite clássico é tomado. Iremos detalhar o que se entende por limite clássico e construiremos explicitamente pacotes de ondas localizados que descrevam partículas pontuais, não girantes, nesse contexto. A metodologia desenvolvida servirá como base para a construção de observáveis on-shell para buracos negros.

Exploraremos partículas carregadas, investigando os limites clássicos de estados em uma representação do grupo de calibre $SU(N)$ para garantir plena generalidade. A teoria YM, abordada como uma teoria de campo clássica, compartilha muitas das características físicas importantes com a gravidade, incluindo uma sutil estrutura de calibre e a não linearidade. Nesse sentido, o caso YM sempre serve como um modelo de brinquedo¹ para a dinâmica gravitacional. Contudo, o entendimento em evolução da cópia dupla tem indicado que a relação entre a teoria de Yang-Mills e a gravidade é mais profunda do que inicialmente concebido. Através da cópia dupla, os aspectos da dinâmica perturbativa da gravidade, incluindo radiação gravitacional, podem ser deduzidos via teoria de Yang-Mills. A seguir, iremos introduzir o formalismo desenvolvido por Kosower, Maybee e O'Connell (KMOC) [1].

Quando trabalhando na TQC, é comum que se adote a constante reduzida de Planck, \hbar , como sendo equivalente a unidade, de forma a simplificar os cálculos. No entanto, se desejamos extrair o limite clássico de um sistema quântico precisamos reintroduzir essa constante em seu fator original. Uma forma de se fazer isso é via análise dimensional. Mantendo $c = 1$ e definindo $[M]$ e $[L]$ como as dimensões de massa e comprimento, respectivamente, podemos escolher que uma amplitude de espalhamento de n pontos em quatro dimensões tenha dimensão de $[M]^{4-n}$ independentemente de \hbar . Isso é equivalente a escolher as dimensões dos operadores de criação e aniquilação tais que:

$$[a_p, a_p^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \quad (1.1)$$

Assim, os estados de uma partícula são dados por:

$$|p\rangle = \sqrt{2E_p} a_p^\dagger |0\rangle, \quad (1.2)$$

de modo que a dimensão de $|p\rangle$ é $[M]^{-1}$, pois o vácuo é adimensional. Os estados de n partículas serão expressos como produtos tensoriais dos estados de uma partícula norma-

¹toy model

lizados. Usaremos a seguinte convenção, para evitar ficar escrevendo os fatores 2π a todo momento:

$$\hat{\delta}^{(n)} \equiv (2\pi)^n \delta^{(n)}(p). \quad (1.3)$$

Como estamos interessados num processo de espalhamento, mais especificamente nos estados iniciais e finais assintóticos, utilizaremos a matriz S . Mais formalmente, a matriz S é definida como a matriz unitária que conecta os estados de partículas assintoticamente livres no espaço de Hilbert dos estados físicos. Um estado de múltiplas partículas é considerado livre se ele se transforma sob transformações de Lorentz como um produto tensorial, de estados de uma partícula. Logo, assintoticamente livre significa, então, que o estado tem essa aparência tanto no passado distante quanto no futuro distante [3, 94–96]. A matriz fica, então, definida como o operador de evolução entre o passado distante ($t = -\infty$) e o futuro distante ($t = +\infty$). Usando do fato que podemos escrever a matriz S em função de uma outra matriz T , devido a sua unitariedade

$$S = \mathbf{1} + iT \quad (1.4)$$

a amplitude de espalhamento em quatro dimensões pode ser expressa por:

$$\langle p'_1 \cdots p'_m | T | p_1 \cdots p_n \rangle = \mathcal{A}(p_1 \cdots p_n \rightarrow p'_1 \cdots p'_m) \hat{\delta}^{(4)}(p_1 + \cdots + p_n - p'_1 - \cdots - p'_m), \quad (1.5)$$

em que T é a matriz de transição. Como S e T são adimensionais, temos a dimensão desejada para a amplitude. Quando restaurando os fatores \hbar , é importante diferenciar entre o momento p^μ e o número de onda, que possui dimensão $[L]^{-1}$. Assim, o número de onda \bar{p} associado ao momento p será definido como:

$$\bar{p} \equiv \frac{p}{\hbar}. \quad (1.6)$$

Suponhamos que estamos restaurando os \hbar 's de uma amplitude qualquer, quando $\hbar = 1$ a amplitude tem dimensão de $[M]^{4-n}$. Da mesma forma, as dimensões dos momentos e das massas na amplitudes não mudam quando $\hbar \neq 1$. Entretanto, devemos ter que as constantes de acoplamento possuam um fator de $1/\sqrt{\hbar}$, na eletrodinâmica é $e/\sqrt{\hbar}$ e na gravitação é $\sqrt{32\pi G/\hbar}$. Assim, a maneira de restaurar os \hbar 's nas amplitudes, seja eletromagnética ou gravitacional, é, para cada constante de acoplamento, multiplica-se por $1/\sqrt{\hbar}$.

Com isso, o objetivo é construir observáveis *on-shell* consistentes tanto classicamente e quanto quanticamente. Para obter isso, é essencial analisar o comportamento quando \hbar se torna muito pequeno e como as amplitudes de espalhamento guardam as informações clássicas da física. As diferentes situações irão requerer diferentes abordagens. Para partículas pontuais, será necessário fixar o momento conforme \hbar vai a zero, enquanto que para partículas não massivas ou transferência de momento entre partículas massivas, o que deve ser fixado é o número de onda, pois tomar o limite clássico tem o efeito de impor o dimensionamento do número de onda sobre certos momentos.

1.1 Estados incidentes

Começaremos construindo os estados que serão apropriados pra descrever a situação de nosso interesse. Usando a (1.2) como base, vamos expandir um pacote de onda

representando um estado genérico de uma partícula numa base de ondas planas, tal que:

$$|\psi\rangle = \int \hat{d}^4p \hat{\delta}^{(+)}(p^2 - m^2) \phi(p) |p\rangle, \quad (1.7)$$

em que se restringe as soluções de energia positiva. Aqui a função de onda $\phi(p)$, em última instância deve representar a partícula clássica, por esse motivo estudaremos mais a frente as restrições que ela deverá respeitar e seu comportamento. Tendo a normalização dos estados dada por:

$$\langle p'|p\rangle = 2E_p \hat{\delta}^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \quad (1.8)$$

temos que a função delta fica expressa por:

$$\int d\Phi(p') 2E_{p'} \hat{\delta}^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') f(p') = f(p). \quad (1.9)$$

Com essa, pode-se definir

$$\hat{\delta}_{\Phi}(p - p') \equiv 2E_{p'} \hat{\delta}^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \quad (1.10)$$

o que permite reescrever as (1.8) e (1.9) como

$$\int d\Phi(p') \hat{\delta}_{\Phi}(p - p') f(p') = f(p) e \quad \langle p'|p\rangle = \hat{\delta}_{\Phi}(p - p'). \quad (1.11)$$

Juntando essas notações, a (1.7) fica:

$$|\psi\rangle = \int d\Phi(p) \phi(p) |p\rangle, \quad (1.12)$$

que resulta numa condição de normalização como sendo:

$$\begin{aligned} 1 &= \langle \psi | \psi \rangle \\ &= \int d\Phi(p') d\Phi(p) \phi^*(p') \phi(p) \langle p' | p \rangle \\ &= \int d\Phi(p') d\Phi(p) \phi^*(p') \phi(p) \hat{\delta}_{\Phi}(p - p') \\ &= \int d\Phi(p) |\phi^2(p)|. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Estamos interessados em analisar eventos de espalhamentos envolvendo pelo menos duas partículas, as quais, no instante inicial, estão infinitamente separadas espacialmente e em um tempo $t \rightarrow -\infty$, e em seguida se aproximam uma da outra com um parâmetro de impacto b^μ . Vamos estudar o caso do espalhamento de dois *quanta* (partículas) estáveis de dois campos escalares diferentes. Os quanta dos campos 1 e 2 estarão presentes nos estados finais e nenhum quanta novo dos campos pode ser produzido na colisão.

Tendo estabelecido estados apropriados para uma única partícula, agora podemos generalizar os estados de várias partículas. Sejam duas partículas escalares distintas, associadas a dois campos igualmente distintos, $\phi_{1,2}$, com um pacote de onda $\phi_{1,2}(p_{1,2})$ descrevendo-as no espaço de momento. A generalização é direta e se dá por:

$$|\psi\rangle = \int d\Phi(p_1) d\Phi(p_2) \phi_1(p_1) \phi_2(p_2) e^{ib \cdot p_1/\hbar} |p_1, p_2\rangle. \quad (1.14)$$

Aqui b é o parâmetro de impacto relativo às duas partículas, *i.e.* a separação física entre elas. Esse parâmetro poderia estar implícito no estado $|p_1, p_2\rangle$, porém, devido a sua relevância no problema, comumente é posto de forma explícita. Com isso, a condição de normalização fica

$$\begin{aligned}
 1 &= \langle \psi | \psi \rangle \\
 &= \int d\Phi(p_1) d\Phi(p_2) d\Phi(p'_1) d\Phi(p'_2) \phi_1^*(p'_1) \phi_2^*(p'_2) \phi_1(p_1) \phi_2(p_2) \times \\
 &\quad \times e^{-ib \cdot p'_1/\hbar} e^{ib \cdot p_1/\hbar} \langle p_1 p_2 | p_1 p_2 \rangle \\
 &= \int d\Phi(p_1) d\Phi(p_2) d\Phi(p'_1) d\Phi(p'_2) \phi_1^*(p'_1) \phi_2^*(p'_2) \phi_1(p_1) \phi_2(p_2) \times \\
 &\quad \times e^{ib \cdot (p_1 - p'_1)/\hbar} \hat{\delta}_\Phi(p_1 - p'_1) \hat{\delta}_\Phi(p_2 - p'_2) \\
 &= \int d\Phi(p_1) d\Phi(p_2) |\phi_1(p_1)|^2 |\phi_2(p_2)|^2, \tag{1.15}
 \end{aligned}$$

que implica em

$$\int d\Phi(p_1) |\phi_1(p_1)|^2 = 1 \tag{1.16}$$

$$\int d\Phi(p_2) |\phi_2(p_2)|^2 = 1. \tag{1.17}$$

1.2 O princípio da incerteza

Heuristicamente podemos esperar que, para que os estados sejam minimamente bem definidos num limite de partícula pontual, sob ação de um operador \mathcal{O} qualquer, seja essencial que o valor esperado desses estados não seja infinito, e que, sob ação consecutiva de dois operadores as ordens superiores sejam desprezíveis [97, 98], *i.e.*:

$$\langle \psi | \mathcal{O} \mathcal{O} | \psi \rangle = \langle \psi | \mathcal{O} | \psi \rangle \langle \psi | \mathcal{O} | \psi \rangle + \text{desprezível}. \tag{1.18}$$

Isso pode ser entendido a partir do princípio de incerteza. Em uma situação semiclássica, o valor esperado deste operador em um estado $|\psi\rangle$ deve ser igual ao campo clássico, com correções quânticas desprezíveis

$$\langle \psi | \mathcal{O} | \psi \rangle = O_{cl} + \text{desprezível} \tag{1.19}$$

Como na teoria quântica o valor de um campo é substituído pelo valor esperado de um operador, devemos abordar a questão quântica essencial de incerteza. Tal incerteza pode ser caracterizada pela variância, dada por

$$\text{Var}(\mathcal{O}) = \langle \psi | \mathcal{O} \mathcal{O} | \psi \rangle - \langle \psi | \mathcal{O} | \psi \rangle \langle \psi | \mathcal{O} | \psi \rangle. \tag{1.20}$$

Assim, podemos dizer que o limite clássico é obtido quando temos esta variância sendo desprezível, retornando assim a (1.18).

Além disso, o limite clássico não implica em injetividade, dois estados quânticos distintos $|\psi'\rangle$ e $|\psi\rangle$ podem ser mapeados na mesma partícula clássica, pois a física clássica não deve ser sensível aos pormenores dos distintos estados quânticos. Devemos portanto ter também que:

$$\langle \psi' | \psi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle + \text{desprezível}. \tag{1.21}$$

Do mesmo modo, devemos ter que o valor esperado seja o mesmo para dois estados quânticos distintos mas que classicamente são equivalentes. Portanto, é fundamental considerar não apenas a coerência quântica, mas também como esses observáveis se comportam no limite clássico. A análise cuidadosa desses aspectos é crucial para garantir que estes capturem de forma consistente tanto a física quântica quanto a clássica. Resta agora descrever os observáveis \mathcal{O} que estamos interessados e quais pacotes de onda $\phi(p)$ que satisfazem as condições até aqui estabelecidas.

1.3 O impulso

As ondas gravitacionais captadas pelos detectores nada mais são do que a radiação gravitacional emitida no processo em questão. Como as ondas gravitacionais incorporam em si informações sobre o potencial gravitacional experimentado pelos corpos, é sensato buscar um observável on-shell que esteja relacionado a esse potencial. A seguir, exploraremos o impulso de uma partícula durante um evento de espalhamento. Do ponto de vista clássico, isso se traduz na variação do momento de uma das partículas durante a colisão e, ultimamente, no *ângulo de espalhamento*.

Então, definiremos o observável de interesse. Nossos detectores estarão localizados no infinito e serão capazes de medir o momento de uma das partículas. Vamos também supor que eles abrangem todos os ângulos de espalhamento. Portanto, seja \mathbb{P}_i^μ o operador de momento da i -ésima partícula, o valor esperado do momento da primeira partícula que emerge do espalhamento é dado por:

$$\begin{aligned} \langle p_{out,1}^\mu \rangle &= {}_{out} \langle \psi | \mathbb{P}_1^\mu | \psi \rangle_{out} \\ &= \langle \psi | U^\dagger(\infty, -\infty) \mathbb{P}_1^\mu U(\infty, -\infty) | \psi \rangle \\ &= \langle \psi | S^\dagger \mathbb{P}_1^\mu S | \psi \rangle, \end{aligned} \quad (1.22)$$

podemos inserir um conjunto completo de estados, tal que

$$\sum_X \int d\Phi(r_1) d\Phi(r_2) |r_1, r_2, X\rangle \langle r_1, r_2, X| = \mathbf{1} \quad (1.23)$$

e fazer:

$$\begin{aligned} \langle p_{out,1}^\mu \rangle &= \sum_X \int d\Phi(r_1) d\Phi(r_2) {}_{in} \langle \psi | S^\dagger |r_1, r_2, X\rangle \langle r_1, r_2, X | \mathbb{P}_1^\mu S | \psi \rangle_{in} \\ &= \sum_X \int d\Phi(r_1) d\Phi(r_2) r_1^\mu \langle \psi | S^\dagger |r_1, r_2, X\rangle \langle r_1, r_2, X | S | \psi \rangle_{in} \\ &= \sum_X \int d\Phi(r_1) d\Phi(r_2) r_1^\mu |\langle r_1, r_2, X | S | \psi \rangle_{in}|^2 \end{aligned} \quad (1.24)$$

em que podemos pensar nos estados inseridos como o estado final de um processo de espalhamento. Neste caso, X representa qualquer outra partícula que possa ser criada durante processo. O estado intermediário contendo X contém, necessariamente, exatamente uma partícula de cada campo, com momentos r_1 e r_2 . A soma sobre X engloba todos os estados, incluindo o estado em que X é vazio, e contém integrais no espaço de fase para X não vazio. A integral no espaço de fase sobre os momentos das partículas 1

e 2 junto com a soma dos estados X é o que dá uma soma completa de todos os estados no espaço de Hilbert.

A quantidade física que nos interessa é a variação de momento da partícula durante o espalhamento. Assim, definimos:

$$\langle \Delta p_1^\mu \rangle = \underbrace{\langle \psi | S^\dagger \mathbb{P}_1^\mu S | \psi \rangle}_{\langle p_{out,1}^\mu \rangle} - \underbrace{\langle \psi | \mathbb{P}_1^\mu | \psi \rangle}_{\langle p_{in,1}^\mu \rangle}, \quad (1.25)$$

temos que $\langle \Delta p_1^\mu \rangle$, o impulso, é a diferença entre o valor esperado do momento da partícula espalhada e o valor esperado do momento incidente da partícula. Essa quantidade é um observável on-shell definido tanto classicamente quanto quanticamente. Podemos fazer o mesmo pra partícula 2, quanta do campo quântico 2

$$\langle \Delta p_2^\mu \rangle = \underbrace{\langle \psi | S^\dagger \mathbb{P}_2^\mu S | \psi \rangle}_{\langle p_{out,2}^\mu \rangle} - \underbrace{\langle \psi | \mathbb{P}_2^\mu | \psi \rangle}_{\langle p_{in,2}^\mu \rangle}, \quad (1.26)$$

Agora, usando a (1.4) e a unitariedade de S

$$S^\dagger S = \mathbf{1} \rightarrow -i(T - T^\dagger) = T^\dagger T, \quad (1.27)$$

podemos escrever o impulso como

$$\begin{aligned} \langle \Delta p_1^\mu \rangle &= \langle \psi | (1 + iT)^\dagger \mathbb{P}_1^\mu (1 + iT) | \psi \rangle - \langle \psi | \mathbb{P}_1^\mu | \psi \rangle \\ &= \langle \psi | i [\mathbb{P}_1^\mu, T] | \psi \rangle + \langle \psi | T^\dagger [\mathbb{P}_1^\mu, T] | \psi \rangle \end{aligned} \quad (1.28)$$

Depois de estabelecer uma expressão geral para o impulso, vamos agora expressá-la em termos das amplitudes de espalhamento. É prático dividir o trabalho nos dois termos da equação separadamente. Para simplificar a análise, vamos trabalhar a (1.28) em separado, definindo

$$I_{(1)}^\mu \equiv \langle \psi | i [\mathbb{P}_1^\mu, T] | \psi \rangle, \quad (1.29)$$

$$I_{(2)}^\mu \equiv \langle \psi | T^\dagger [\mathbb{P}_1^\mu, T] | \psi \rangle, \quad (1.30)$$

Expandindo a (1.29) usando a definição do estado incidente feita em (1.14), temos

$$\begin{aligned} I_{(1)}^\mu &= \int d\Phi(p_1) d\Phi(p_2) d\Phi(p'_1) d\Phi(p'_2) \phi_1(p_1) \phi_1^*(p'_1) \phi_2(p_2) \phi_2^*(p'_2) \times \\ &\quad \times e^{i\mathbf{b} \cdot (p_1 - p'_1)/\hbar} i (p'_1{}^\mu - p_1{}^\mu) \langle p'_1 p'_2 | T | p_1, p_2 \rangle \\ &= \int d\Phi(p_1) d\Phi(p_2) d\Phi(p'_1) d\Phi(p'_2) \phi_1(p_1) \phi_1^*(p'_1) \phi_2(p_2) \phi_2^*(p'_2) \times \\ &\quad \times e^{i\mathbf{b} \cdot (p_1 - p'_1)/\hbar} i \int d\Phi(r_1) d\Phi(r_2) (r_1{}^\mu - p_1{}^\mu) \langle p'_1; p'_2 | r_1; r_2 \rangle \langle r_1; r_2 | T | p_1; p_2 \rangle, \end{aligned} \quad (1.31)$$

em que os estados na função de onda incidentes são indexados por $p_{1,2}$ e os conjugados por $p'_{1,2}$. Ao introduzir a mudança de momento $q_i = p'_i - p_i$ e substituir a integração de p'_i por q_i , obtemos os elementos da matriz de transição

$$\langle p'_1 p'_2 | T | p_1, p_2 \rangle = \mathcal{A}(p_1 p_2 \rightarrow p'_1, p'_2) \hat{\delta}^{(4)}(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2) \quad (1.32)$$

$$= \mathcal{A}(p_1 p_2 \rightarrow p_1 + q_1, p_2 + q_2) \hat{\delta}^{(4)}(q_1 + q_2), \quad (1.33)$$

que nos dará

$$I_{(1)}^\mu = \int d\Phi(p_1)d\Phi(p_2)d\Phi(q_1 + p_1)d\Phi(q_2 + p_2)\phi_1(p_1)\phi_1^*(q_1 + p_1)\phi_2(p_2)\phi_2^*(q_2 + p_2) \times \\ \times \hat{\delta}^{(4)}(q_1 + q_2)e^{-ib \cdot q_1/\hbar}iq_1^\mu \mathcal{A}(p_1p_2 \rightarrow p_1 + q_1, p_2 + q_2) \quad (1.34)$$

Ao integrar em q_2 utilizando a função delta de Dirac e lembrando que $d\Phi(q_1 + p_1) = \hat{d}^4q_1\hat{\delta}((p_1 + q_1)^2 - m_1^2)\Theta(p_1^0 + q_1^0)$, obtemos:

$$I_{(1)}^\mu = \int d\Phi(p_1)d\Phi(p_2)\hat{d}^4q_1\hat{\delta}((p_1 + q_1)^2 - m_1^2)\Theta(p_1^0 + q_1^0)\hat{d}^4q_2\hat{\delta}((p_2 + q_2)^2 - m_2^2)\Theta(p_2^0 + q_2^0) \times \\ \times \phi_1(p_1)\phi_1^*(q_1 + p_1)\phi_2(p_2)\phi_2^*(q_2 + p_2)\hat{\delta}^{(4)}(q_1 + q_2)e^{-ib \cdot q_1/\hbar}iq_1^\mu \mathcal{A}(p_1p_2 \rightarrow p_1 + q_1, p_2 + q_2) \\ = \int d\Phi(p_1)d\Phi(p_2)\hat{d}^4q\hat{\delta}(2p_1 \cdot q + q^2)\Theta(p_1^0 + q^0)\hat{\delta}(2p_2 \cdot q - q^2)\Theta(p_2^0 - q^0) \times \\ \times \phi_1(p_1)\phi_1^*(q + p_1)\phi_2(p_2)\phi_2^*(-q + p_2)e^{-ib \cdot q/\hbar}iq^\mu \mathcal{A}(p_1p_2 \rightarrow p_1 + q, p_2 - q), \quad (1.35)$$

na última linha eliminamos o índice, uma vez que agora só há um q . Curiosamente este termo contribui linearmente na amplitude. Os momentos incidente e o emergente nessa amplitude não são os momentos dos estados iniciais e finais do processo de espalhamento, mas sim ambos se relacionam aos momentos do estado inicial, pois estão relacionados apenas à função de onda e ao conjugado da função do estado inicial. Embora o momento q pareça ser uma transferência de momento, ele deve ser visto apenas como a diferença entre o momento da função de onda e da função de onda conjugada. Podemos pensar nesse termo como uma interferência de uma amplitude padrão com um espalhamento frontal sem interação. Diagramaticamente ficamos com

$$I_{(1)}^\mu = \int d\Phi(p_1)d\Phi(p_2)\hat{d}^4q\hat{\delta}(2p_1 \cdot q + q^2)\Theta(p_1^0 + q^0)\hat{\delta}(2p_2 \cdot q - q^2)\Theta(p_2^0 - q^0)$$

$$\times e^{-ib \cdot q/\hbar}iq^\mu \times \quad \begin{array}{ccc} \phi_1(p_1) & & \phi_1^*(p_1 + q) \\ & \searrow & \nearrow \\ & \text{Círculo hachurado} & \\ & \nearrow & \searrow \\ \phi_2(p_2) & & \phi_2^*(p_2 - q) \end{array} \quad (1.36)$$

Aqui o círculo hachurado (*blob*) representa todos os possíveis diagramas de quatro pernas externas.

Agora, analisando $I_{(2)}^\mu$, podemos expressá-lo da seguinte forma ao expandirmos

$$I_{(2)}^\mu = \langle \psi | T^\dagger [\mathbb{P}_1^\mu, T] | \psi \rangle \\ = \sum_X \int d\Phi(r_1)d\Phi(r_2) \langle \psi | T^\dagger | r_1, r_2, X \rangle \langle r_1, r_2, X | [\mathbb{P}_1^\mu, T] | \psi \rangle \\ = \sum_X \int \prod_{i=1,2} d\Phi(r_i)d\Phi(p_i)d\Phi(p'_i)\phi(p_i)\phi_i^*(p'_i)e^{ib \cdot (p_1 - p'_1)/\hbar}(r_1^\mu - p_1^\mu) \times \\ \times \hat{\delta}^{(4)}(p_1 + p_2 - r_1 - r_2 - r_X)\hat{\delta}^{(4)}(p'_1 + p'_2 - r_1 - r_2 - r_X) \times \\ \times \mathcal{A}(p_1, p_2 \rightarrow r_1, r_2, r_X)\mathcal{A}^*(p'_1, p'_2 \rightarrow r_1, r_2, r_X). \quad (1.37)$$

Aqui, r_X representa o momento total das partículas em X . Esse segundo termo no impulso pode ser interpretado como um peso no corte da amplitude. Definindo novamente um $q_i = p'_i - p_i$ e trocando a variável de integração para $p'_i \rightarrow q_i$, obtemos:

$$I_{(2)}^\mu = \sum_X \int \prod_{i=1,2} d\Phi(r_i) d\Phi(p_i) d\Phi(p_i + q_i) \phi(p_i) \phi_i^*(p_i + q_i) e^{ib \cdot q_i/\hbar} (r_1^\mu - p_1^\mu) \times \\ \times \hat{\delta}^{(4)}(p_1 + p_2 - r_1 - r_2 - r_X) \hat{\delta}^{(4)}(q_1 + q_2) \mathcal{A}(p_1, p_2 \rightarrow r_1, r_2, r_X) \times \\ \times \mathcal{A}^*(p_1 + q, p_2 - q \rightarrow r_1, r_2, r_X). \quad (1.38)$$

Mais um vez podemos integrar em q_2 e reindexar $q_1 \rightarrow q$, de modo que ficamos com

$$I_{(2)}^\mu = \sum_X \int \prod_{i=1,2} d\Phi(p_i) \hat{d}^4 q \hat{\delta}(2p_1 \cdot q + q^2) \Theta(p_1^0 + q^0) \hat{\delta}(2p_2 \cdot q - q^2) \Theta(p_2^0 - q^0) \times \\ \times \phi_1(p_1) \phi_2(p_2) \phi_1^*(p_1 + q) \phi_1^*(p_2 - q) e^{ib \cdot q/\hbar} (r_1^\mu - p_1^\mu) \times \\ \times \hat{\delta}^{(4)}(p_1 + p_2 - r_1 - r_2 - r_X) \mathcal{A}(p_1, p_2 \rightarrow r_1, r_2, r_X) \\ \times \mathcal{A}^*(p_1 + q, p_2 - q \rightarrow r_1, r_2, r_X). \quad (1.39)$$

Novamente, é importante ressaltar que q não representa uma transferência de momento. Vamos então definir a transferência de momento como sendo $w_1 \equiv r_i - p_i$. Isso é necessário visto que esse termo será importante na análise do limite clássico. Reescrevendo a (1.39) em termos dessas variáveis resulta em:

$$I_{(2)}^\mu = \sum_X \int \prod_{i=1,2} d\Phi(p_i) \hat{d}^4 w_i \hat{d}^4 q \hat{\delta}(2p_i \cdot w_i + w_i^2) \Theta(p_i^0 - w_i^0) \hat{\delta}(2p_1 \cdot q + q^2) \Theta(p_1^0 + q^0) \times \\ \times \hat{\delta}(2p_2 \cdot q - q^2) \Theta(p_2^0 - q^0) \phi_1(p_1) \phi_2(p_2) \phi_1^*(p_1 + q) \phi_1^*(p_2 - q) \times \\ \times e^{ib \cdot q/\hbar} w_1^\mu \hat{\delta}^{(4)}(w_1 + w_2 + r_X) \mathcal{A}(p_1, p_2 \rightarrow p_1 + w_1, p_2 + w_2, r_X) \\ \times \mathcal{A}^*(p_1 + q, p_2 - q \rightarrow p_1 + w_1, p_2 + w_2, r_X). \quad (1.40)$$

Por fim, diagramaticamente temos

$$I_{(2)}^\mu = \sum_X \int \prod_{i=1,2} d\Phi(p_i) \hat{d}^4 w_i \hat{d}^4 q \hat{\delta}(2p_i \cdot w_i + w_i^2) \Theta(p_i^0 - w_i^0) \hat{\delta}(2p_1 \cdot q + q^2) \Theta(p_1^0 + q^0) \times \\ \times \hat{\delta}(2p_2 \cdot q - q^2) \Theta(p_2^0 - q^0) \phi_1(p_1) \phi_2(p_2) \phi_1^*(p_1 + q) \phi_1^*(p_2 - q) \times \\ \times e^{ib \cdot q/\hbar} w_1^\mu \hat{\delta}^{(4)}(w_1 + w_2 + r_X) \times$$

\times

$$(1.41)$$

1.4 Pacotes de onda

O observável construído até aqui, e os próximos, são construídos para serem bem definidos tanto no domínio quântico quanto no domínio clássico. À medida que nos

aproximamos do domínio clássico, *i.e.* $\hbar \rightarrow 0$, os valores esperados do observável deve convergir para os valores clássicos de impulso.

Antes de prosseguirmos com a discussão, é importante detalhar as funções de onda e as condições que descrevem as partículas às quais aplicamos o formalismo. A noção de partículas pontuais clássicas implica em posições e momentos bem definidos. Portanto, é natural esperar que os estados quânticos também sejam bem localizados. Nesse sentido, consideramos as funções de onda no espaço de momentos, denotadas como $\phi(p)$, como pacotes de ondas. Esses pacotes de ondas são caracterizados por uma dispersão ou alargamento nos momentos, refletindo o princípio da incerteza.

Para aprimorar nossa compreensão ainda mais, vamos começar examinando funções de onda não relativísticas. Uma função de onda de incerteza mínima no espaço dos momentos para uma partícula com massa m e que se torna mais localizada conforme $\hbar \rightarrow 0$, pode ser expressa como:

$$\phi(p) \exp \left\{ -\frac{\mathbf{p}^2}{2\hbar m \frac{\ell_c}{\ell_w^2}} \right\} = \exp \left\{ -\frac{\mathbf{p}^2}{2m^2 \frac{\ell_c^2}{\ell_w^2}} \right\}, \quad (1.42)$$

em que ℓ_c é o comprimento de onda de Compton da partícula, e ℓ_w é um parâmetro adicional com dimensões de comprimento. Podemos obter o conjugado no espaço de posições através da transformada de Fourier:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int dp e^{-ipx} e^{-\alpha p^2} \\ \tilde{\phi}(x) &= \exp \left\{ -\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2}{2\ell_w^2} \right\}, \end{aligned} \quad (1.43)$$

Isso mostra que a precisão com que sabemos a posição depende apenas de ℓ_w , que será tomada como uma medida intrínseca do alargamento da função de onda. Quando for o caso de uma função de onda relativística, leva-se em conta a razão entre os quadrados de ℓ_c e ℓ_w , definida como

$$\xi \equiv \left(\frac{\ell_c}{\ell_w} \right)^2. \quad (1.44)$$

O resultado clássico é obtido ao tomar $\xi \rightarrow 0$, ou em outras palavras na região em que:

$$\ell_c \ll \ell_w \quad (1.45)$$

Neste limite, as funções de onda devem apresentar um pico agudo em torno do valor clássico para o momento, $\check{p}_i = m_i \check{u}_i$, em que u_i é a quadrivelocidade. Podemos expressar isso por:

$$\begin{aligned} f_{p,i}(\xi) &= 1 + \mathcal{O}(\xi^{\beta'}), \\ \check{u}_i \cdot u_i &= 1 + \mathcal{O}(\xi^{\beta''}), \\ \langle p_i \rangle &= m \check{u}^\mu f_{p,i}(\xi), \end{aligned} \quad (1.46)$$

em que os β 's são expoentes racionais e var a variância

$$\begin{aligned} \frac{\text{var}(p_i)}{m_i^2} &= \frac{\langle (p_i - \langle p_i \rangle)^2 \rangle}{m_i^2} \\ &= \frac{(\langle p_i^2 \rangle - \langle p_i \rangle^2)}{m_i^2} = c_\Delta \xi^\beta, \end{aligned} \quad (1.47)$$

em que c_Δ é uma constante. Essa dispersão ao redor do valor clássico não é necessariamente positivo, logo não é sensato tomar a raiz quadrada como a variância.

Sabendo que a integrais no espaço de fase sobre os momentos do estado inicial forçam $p_i^2 = m_i^2$, os invariantes de Lorentz construídos a partir de cada p_i serão constantes, logo a função de onda não deve depender deste. A função de onda deve, então, depender de ao menos de um quadrivetor. A função de onda mais simples dependeria de apenas um quadrivetor, que podemos ver como a quadri-velocidade clássica de uma partícula. E, pode também depender, apenas, da combinação entre $(p \cdot u)/m$ e ξ .

Vamos analisar as condições impostas para a função de onda a fim de satisfazer os requisitos quando nos aproximamos do limite clássico. A função de onda e o conjugado devem representar a partícula, o que significa que devem ter um pico acentuado e ter uma interseção em $\mathcal{O}(1)$, e correções em $\mathcal{O}(\xi)$. A amplitude deve variar pouco em relação à função de onda neste limite. Supondo um q_0 como um valor característico de q , requerer que a interseção seja em $\mathcal{O}(1)$ é equivalente a $\phi^*(p + q_0)$ não variar muito de $\phi(p)$, o que por sua vez requer que a derivada em p seja pequena, ou simplesmente

$$\frac{q_0 \cdot u_i}{m\xi} \ll 1. \quad (1.48)$$

Ao redimensionarmos q para $\bar{q} = q/\hbar$, ficamos com

$$\frac{q_0 \cdot u_i \ell_w}{m \ell_c \sqrt{\xi}} \ll 1 \quad \rightarrow \quad \bar{q}_0 \cdot u_i \ell_w \ll \sqrt{\xi}. \quad (1.49)$$

Olhemos agora para um exemplo de uma função de onda que respeitará tais condições

$$\begin{aligned} \phi(p_1) &= \mathcal{N} m_1^{-1} \exp \left\{ -\frac{p_1 \cdot u}{\hbar \ell_c / \ell_w^2} \right\} \\ &= \mathcal{N} m_1^{-1} \exp \left\{ -\frac{p_1 \cdot u}{\ell_c m_1 \ell_c / \ell_w^2} \right\} \\ &= \mathcal{N} m_1^{-1} \exp \left\{ -\frac{p_1 \cdot u}{m_1 \xi} \right\}, \end{aligned} \quad (1.50)$$

uma função de onda similar tem sua análise vista em [99]. Aqui u é um quadrivetor adimensional. Para normalizarmos essa função de onda, fazemos

$$\begin{aligned} |\phi(p)| &= 1 \\ \int d\Phi(p) \phi(p)^* \phi(p) &= 1. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Isso nos leva a:

$$\mathcal{N}^2 m^{-2} \int d\Phi(p) \exp \left\{ -\frac{2p \cdot u}{m\xi} \right\} = 1. \quad (1.52)$$

Para que possamos resolver a integral, introduzimos a seguinte parametrização

$$p^\mu = E (\cosh \zeta, \sinh \zeta \sin \theta \cos \phi, \sinh \zeta \sin \theta \sin \phi, \sinh \zeta \cos \theta), \quad (1.53)$$

de modo que a medida na integral fica

$$d\Phi(p) = (2\pi)^{-3} dE d\zeta d\theta d\phi d\hat{\epsilon} (E^2 - m^2) \Theta(E) E^3 \sinh^2 \zeta \sin \theta, \quad (1.54)$$

e ζ varia entre $[0, \infty]$, θ varia entre $[0, \pi]$ e ϕ varia entre $[0, 2\pi]$. Realizando a integral em E ficamos com

$$d\Phi(p) = \frac{m^2}{2(2\pi)^3} d\zeta d\theta d\phi \sinh^2 \zeta \sin \theta. \quad (1.55)$$

Isso nos permite reescrever a equação (1.52) como:

$$\frac{\mathcal{N}^2}{2(2\pi)^3} \int d\zeta d\theta d\phi \sinh^2 \zeta \sin \theta \exp \left\{ -\frac{2p \cdot u}{m\xi} \right\} = 1 \quad (1.56)$$

A (1.52) deve ser uma função invariante de Lorentz de u , cujo único invariante possível é $u^2 = 1$, logo o resultado deve ser função apenas de ξ . Faremos a integral no referencial de repouso, *i.e.* $u = (1, \mathbf{0})$

Pra resolver esta integral, usamos a função de Bessel modificada do segundo tipo, que pode ser definida como

$$K_\alpha(x) = \int_0^\infty e^{-x \cosh t} \cosh \alpha t dt = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\alpha \Gamma(1/2)}{\Gamma(\alpha + 1/2)} \int_0^\infty e^{-x \cosh t} \sinh^{2\alpha} \alpha t dt \quad (1.57)$$

Comparando a (1.56) e (1.57), ficamos com

$$\frac{\mathcal{N}^2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty d\zeta \sinh^2 \zeta \exp \left\{ -\frac{2 \cosh \zeta}{\xi} \right\} = \frac{\mathcal{N}^2}{2(2\pi)^2} \xi K_1 \left(\frac{2}{\xi} \right) = 1, \quad (1.58)$$

logo

$$\mathcal{N} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{\sqrt{\xi K_1(2/\xi)}}. \quad (1.59)$$

Assim a função de onda fica

$$\phi(p) = \frac{2\sqrt{2}\pi}{m_1 \sqrt{\xi K_1(2/\xi)}} \exp \left\{ -\frac{p_1 \cdot u}{m_1 \xi} \right\}. \quad (1.60)$$

Uma consequência imediata é que

$$\int d\Phi(p) \phi^*(p + q_0) \phi(p) = \exp \left\{ -\frac{u \cdot \bar{q}_0}{m\xi} \right\}, \quad (1.61)$$

O que claramente vai a zero quando $\xi \rightarrow 0$.

Agora, calculamos o alargamento do pacote de onda através de $\langle p^\mu \rangle$, que como é proporcional a u^μ , podemos calcular no referencial de repouso novamente

$$\begin{aligned} \langle p^\mu \rangle &= \langle \phi | p^\mu | \phi \rangle = \int d\Phi(p) |\phi(p)|^2 p^\mu = f(\xi, u^2) u^\mu \\ &= \int d\Phi(p) |\phi(p)|^2 \underbrace{u_\mu}_{=(1, \mathbf{0})} p^\mu = f(\xi) \underbrace{u_\mu u^\mu}_{u^2=1} \\ &= \int d\Phi(p) |\phi(p)|^2 u_0 p^0 = f(\xi) \\ &= \frac{8\pi^2}{m^2 \xi K_1(2/\xi)} \int d\Phi(p) \exp \left\{ -\frac{2p^0 \cdot u_0}{\xi} \right\} u_0 p^0 = f(\xi) \\ &= \frac{2m}{\xi K_1(2/\xi)} \int_0^\infty d\zeta \sinh^2 \zeta \cosh \zeta \exp \left\{ -\frac{2 \cosh \zeta}{\xi} \right\} = f(\xi). \end{aligned} \quad (1.62)$$

Para calcular $f(\xi)$, notamos que

$$\sinh^2 \zeta \cosh \zeta \exp \left\{ -\frac{2 \cosh \zeta}{\xi} \right\} = \frac{\xi^2}{2} \frac{d}{d\xi} \left(\sinh^2 \zeta \exp \left\{ -\frac{2 \cosh \zeta}{\xi} \right\} \right), \quad (1.63)$$

então

$$\begin{aligned} \langle p^\mu \rangle &= \frac{m\xi}{K_1(2/\xi)} \int_0^\infty \frac{d}{d\xi} \left(d\zeta \sinh^2 \zeta \exp \left\{ -\frac{2 \cosh \zeta}{\xi} \right\} \right) \\ &= \frac{m\xi}{K_1(2/\xi)} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\xi}{2} K_1(2/\xi) \right) \\ &= \frac{m\xi}{K_1(2/\xi)} \frac{d}{d\xi} \left[\left(\frac{2}{\xi} \right)^{-1} K_1(2/\xi) \right], \end{aligned} \quad (1.64)$$

agora usando as seguintes propriedades das funções de Bessel, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (x^{-\alpha} K_\alpha(x)) &= -x^{-\alpha} K_{\alpha+1}(x) \\ -\frac{\xi^2}{2} \frac{d}{d\xi} ((2/\xi)^{-\alpha} K_\alpha(2/\xi)) &= -(2/\xi)^{-\alpha} K_{\alpha+1}(2/\xi) \\ \frac{d}{d\xi} ((2/\xi)^{-1} K_1(2/\xi)) &= \frac{2}{\xi^2} \frac{\xi}{2} K_2(2/\xi) = \frac{K_2(2/\xi)}{\xi} \end{aligned} \quad (1.65)$$

ficamos com

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \frac{m\xi}{K_1(2/\xi)} \frac{K_2(2/\xi)}{\xi} \\ &= m \frac{K_2(2/\xi)}{K_1(2/\xi)}, \end{aligned} \quad (1.66)$$

e portanto

$$\langle p^\mu \rangle = mu^\mu \frac{K_2(2/\xi)}{K_1(2/\xi)}. \quad (1.67)$$

De fato, conforme nos aproximamos do limite clássico, *i.e.* $\xi \rightarrow 0$, a função de onda apresenta um pico acentuado. Isso ocorre devido às propriedades da função de Bessel, pois temos que no caso assintótico

$$\langle p^\mu \rangle \Big|_{\xi \rightarrow 0} = mu^\mu \left(1 + \frac{3}{4} \xi \right) + \mathcal{O}(\xi^2). \quad (1.68)$$

Também podemos calcular o alargamento desse pacote de onda

$$\begin{aligned} \frac{\langle (\Delta p)^2 \rangle}{\langle p^2 \rangle} &= \frac{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}{\langle p^2 \rangle} \\ &= 1 - \frac{\langle p \rangle^2}{\langle p^2 \rangle} \\ &= 1 - \frac{K_2^2(2/\xi)}{K_1^2(2/\xi)} \\ &= -\frac{3}{2} \xi + \mathcal{O}(\xi^2). \end{aligned} \quad (1.69)$$

Por fim, fazendo uma conta semelhante, podemos chegar em

$$\langle p^\mu p^\nu \rangle = m^2 u^\mu u^\nu \left(1 + \frac{2\xi K_2(2/\xi)}{K_1(2/\xi)} \right) - \frac{m^2}{2} \frac{2\xi K_2(2/\xi)}{K_1(2/\xi)} \eta^{\mu\nu}, \quad (1.70)$$

que no eventual limite clássico fica

$$\begin{aligned} \langle p^\mu p^\nu \rangle \Big|_{\xi \rightarrow 0} &= m^2 u^\mu u^\nu (1 + 2\xi) - \frac{m^2}{2} \xi \eta^{\mu\nu} + \mathcal{O}(\xi^2) \\ &= -\langle p^\mu \rangle \langle p^\nu \rangle + \mathcal{O}(\xi). \end{aligned} \quad (1.71)$$

Nesse caso, vemos que $\beta = \beta' = \beta'' = 1$, $c_\Delta = -3/2$, o que claramente respeita as condições expostas em (1.46) e (1.47).

1.5 Espalhamento de partículas pontuais

Ao nos aproximarmos do limite clássico, é crucial que os resultados quânticos se alinhem harmoniosamente com as previsões clássicas. O observável que discutimos, o impulso, foi projetado para ser bem definido tanto na teoria quântica quanto na clássica. A transição suave entre os dois regimes é essencial para garantir a consistência e a aplicabilidade da teoria em uma ampla gama de contextos.

Explorar o limite clássico não é apenas uma questão acadêmica; é uma etapa fundamental na validação e na aplicação prática da teoria. À medida que fazemos \hbar próximo de zero, devemos observar uma convergência suave dos valores esperados quânticos para seus equivalentes clássicos. Isso nos capacita a usar ferramentas quânticas para fazer previsões precisas em cenários onde a física clássica tradicionalmente se aplica. Portanto, vamos aprofundar nossa análise do limite clássico e examinar suas implicações nas amplitudes de espalhamento.

1.5.1 Zona dos “Cachinhos Dourados”

Após estabelecido a maneira correta de retornar os fatores de \hbar à teoria e explicitado as funções de onda que possuem o comportamento que desejamos no limite clássico, que é representado pela região em que $\ell_c \ll \ell_w$, em tese já estaríamos aptos a realizar o cálculo almejado. Porém, vamos ver que podemos ignorar os pormenores das funções de onda e focar as restrições em outros aspectos, como abordar o limite clássico o mais rápido possível.

De modo heurístico, podemos esperar que as funções de onda respeitem duas restrições. Conforme discutido, é importante que os detalhes do pacote de ondas não sejam excessivamente sensíveis aos efeitos quânticos. Em outras palavras, esperamos que as propriedades gerais do pacote de ondas permaneçam relativamente estáveis mesmo no regime quântico, garantindo uma descrição coerente das partículas.

Por outro lado, quando nos concentramos na descrição do espalhamento de partículas pontuais, esperamos que o alargamento das funções de onda não sejam muito grandes. Essa restrição é crucial para nos assegurar de que o espalhamento não seja afetado pelos detalhes quânticos do pacote de ondas.

Para quantificar esse argumento, vamos nos atentar para o primeiro termo do impulso, dado por (1.35). Ele é composto por uma amplitude integrada num espaço de

fase on-shell para ambos momentos incidentes, restringidos por um par de funções deltas, ponderados por um fator relacionado ao parâmetro de impacto e dependente de uma diferença de momento q e por fim integrado sobre todos os q 's. Conforme nos aproximamos do limite clássico (1.45), a função de onda e seu conjugado devem representar a partícula. A amplitude variará lentamente na escala da função de onda quando se está próximo do limite. Portanto, esta é exatamente a mesma restrição que tivemos em (1.49).

A seguir, examinamos outro fator que varia rapidamente e aparece em todas as nossas integrais, as funções delta decorrentes das restrições on-shell nos momentos. Essas funções delta têm a forma:

$$\hat{\delta}(2p_i \cdot q + q^2) = \hat{\delta}\left(2m_i u_i \cdot \hbar \frac{q}{\hbar} + \hbar m_i \ell_c \frac{q^2}{\hbar^2}\right) = \frac{1}{m_i \hbar} \hat{\delta}(2u_i \cdot \bar{q} + \ell_c \bar{q}^2). \quad (1.72)$$

A integração sobre os momentos p_i fará com que as deltas assumam a forma de um pico acentuado, cuja escala será a mesma das funções de onda originais. A medida que ξ se aproxima de 0 a função retorna a ser apenas uma delta na integração em \bar{q} . Para exemplificar, vamos analisar uma integral similar à $I_{(1)}^\mu$

$$T_1 = \int d\Phi(p_1) \phi(p_1) \phi^*(p_1 + q) \hat{\delta}(2p_1 \cdot q + q^2), \quad (1.73)$$

Escolhendo ϕ para que seja da forma como em (1.60) e trocando $q \rightarrow \hbar \bar{q}$, esta integral fica:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{8\pi^2}{m^2 \xi K_1(2/\xi)} \int d\Phi(p_1) \exp\left\{-\frac{p \cdot u}{m\xi}\right\} \exp\left\{-\frac{(p + \hbar \bar{q}) \cdot u}{m\xi}\right\} \hat{\delta}(2p_1 \cdot \hbar \bar{q} + \hbar^2 \bar{q}^2) \\ &= \frac{8\pi^2}{\hbar m^3 \xi K_1(2/\xi)} \exp\left\{-\frac{\hbar \bar{q} \cdot u}{m\xi}\right\} \int d\Phi(p) \hat{\delta}\left(\frac{2p \cdot \bar{q}}{m} + \frac{\hbar \bar{q}^2}{m}\right) \exp\left\{-\frac{2p \cdot u}{m\xi}\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi \hbar m \xi K_1(2/\xi)} \exp\left\{-\frac{\hbar \bar{q}^0}{m\xi}\right\} \int d\zeta \sinh^2 \zeta d\theta \sin \theta d\phi \exp\left\{-\frac{2 \cosh \zeta}{\xi}\right\} \times \\ &\quad \times \hat{\delta}\left(2 \cosh \zeta \bar{q}^0 - 2 \sinh \zeta \cos \theta \bar{q}^z + \frac{\hbar \bar{q}^2}{m}\right). \end{aligned} \quad (1.74)$$

Podemos realizar a integral em θ fazendo

$$\begin{aligned} \hat{\delta}\left(2 \cosh \zeta \bar{q}^0 - 2 \sinh \zeta \cos \theta \bar{q}^z + \frac{\hbar \bar{q}^2}{m}\right) &= \hat{\delta}\left(\bar{q}^z 2 \sinh \zeta \left[\cos \theta - \frac{2 \cosh \zeta \bar{q}^0}{\bar{q}^z 2 \sinh \zeta} - \frac{\hbar \bar{q}^2}{m \bar{q}^z 2 \sinh \zeta}\right]\right) \\ &= \frac{1}{\bar{q}^z 2 \sinh \zeta} \hat{\delta}\left(\cos \theta - \frac{\bar{q}^0 \coth \zeta}{\bar{q}^z} - \frac{\hbar \bar{q}^2 \operatorname{csch} \zeta}{2m \bar{q}^z}\right), \end{aligned} \quad (1.75)$$

logo a integral fica

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \frac{1}{2\pi\hbar m\xi K_1(2/\xi)} \exp\left\{-\frac{\hbar\bar{q}^0}{m\xi}\right\} \int_0^\infty d\zeta \sinh^2 \zeta d\phi \exp\left\{-\frac{2\cosh \zeta}{\xi}\right\} \times \\
 &\quad \times \int_0^\pi d\theta \sin \theta \frac{1}{2\bar{q}^z \sinh \zeta} \hat{\delta}\left(\cos \theta - \frac{\bar{q}^0 \coth \zeta}{\bar{q}^z} - \frac{\hbar\bar{q}^2 \operatorname{csch} \zeta}{2m\bar{q}^z}\right) \\
 &= \frac{1}{4\pi\hbar m\bar{q}^z \xi K_1(2/\xi)} \exp\left\{-\frac{\hbar\bar{q}^0}{m\xi}\right\} \int_0^\infty d\zeta \sinh \zeta d\phi \exp\left\{-\frac{2\cosh \zeta}{\xi}\right\} \times \\
 &\quad \times \Theta\left(1 - \frac{\bar{q}^0 \coth \zeta}{\bar{q}^z} - \frac{\hbar\bar{q}^2 \operatorname{csch} \zeta}{2m\bar{q}^z}\right) \\
 &\quad \times \Theta\left(1 + \frac{\bar{q}^0 \coth \zeta}{\bar{q}^z} + \frac{\hbar\bar{q}^2 \operatorname{csch} \zeta}{2m\bar{q}^z}\right). \tag{1.76}
 \end{aligned}$$

A segunda theta não terá efeito algum no limite \hbar muito pequeno. A primeira irá impor uma restrição do tipo

$$\begin{aligned}
 1 - \frac{\bar{q}^0 \coth \zeta}{\bar{q}^z} - \frac{\hbar\bar{q}^2 \operatorname{csch} \zeta}{2m\bar{q}^z} &> 0 \\
 \frac{\bar{q}^0 \coth \zeta}{\bar{q}^z} - \frac{\hbar\bar{q}^2 \operatorname{csch} \zeta}{2m\bar{q}^z} &< 1 \\
 \bar{q}^0 \cosh \zeta - \frac{\hbar\bar{q}^2}{2m} &< \sinh \zeta \bar{q}^z \\
 \cosh \zeta &\geq \frac{\bar{q}^z \sqrt{1 - \hbar^2 \bar{q}^2 / 4m^2}}{\sqrt{-\bar{q}^2}} - \frac{\hbar\bar{q}^0}{2m}, \tag{1.77}
 \end{aligned}$$

definindo

$$w \equiv \cosh \zeta \tag{1.78}$$

$$\omega \equiv \frac{\bar{q} \cdot u}{\sqrt{-\bar{q}^2}} \tag{1.79}$$

$$\tau \equiv \frac{\hbar\sqrt{-\bar{q}^2}}{2m}, \tag{1.80}$$

tal que

$$\bar{q}^0 = \frac{2m\omega\tau}{\hbar} \tag{1.81}$$

$$\bar{q}^z = \frac{2m\sqrt{1 + \omega^2\tau}}{\hbar} \tag{1.82}$$

$$-\bar{q}^2 = \frac{4m^2\tau^2}{\hbar^2}, \tag{1.83}$$

a (1.77) fica

$$\begin{aligned}
 w &\geq \frac{2m\sqrt{1 + \omega^2\tau}}{\hbar} \sqrt{1 - \frac{\hbar^2}{4m^2} \frac{4m^2\tau^2}{\hbar^2}} \sqrt{\frac{\hbar^2}{4m^2\tau^2}} - \frac{\hbar}{2m} \frac{2m\omega\tau}{\hbar} \\
 &\geq \sqrt{1 + \omega^2} \sqrt{1 - \tau^2} - \omega\tau. \tag{1.84}
 \end{aligned}$$

Como o lado direito é maior do que 1, este se torna o limite inferior de integração. Assim temos

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \frac{1}{4\pi\hbar m\bar{q}^z K_1(2/\xi)} \exp\left\{-\frac{\hbar\bar{q}^0}{m\xi}\right\} \int_w^\infty d\zeta \sinh \zeta d\phi \exp\left\{-\frac{2 \cosh \zeta}{\xi}\right\} \\
 &= \frac{1}{8m^2\pi\sqrt{1+\omega^2\tau} K_1(2/\xi)} \exp\left\{-2\frac{\hbar\omega\tau}{\xi}\right\} \exp\left\{-\frac{2}{\xi}\left(\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{1-\tau^2}-\omega\tau\right)\right\} \\
 &= \frac{1}{4\hbar m\pi\sqrt{(\bar{q}\cdot u)^2-\bar{q}^2} K_1(2/\xi)} \exp\left\{-\frac{2\hbar\sqrt{(\bar{q}\cdot u)^2-\bar{q}^2}}{\xi\sqrt{-\bar{q}^2}}\sqrt{1-\hbar^2\bar{q}^2/4m^2}\right\}. \quad (1.85)
 \end{aligned}$$

Vale ressaltar que o resultado é, além da dependência em ξ , dependente de outros dois fatores adimensionais

$$\frac{\ell_c}{\ell_s} \quad \text{e} \quad \bar{q}\cdot u\ell_s, \quad (1.86)$$

em que definimos $1/\sqrt{-\bar{q}^2}$ como um “comprimento de espalhamento” ℓ_s . Próximo ao limite em que ξ e \hbar são muito pequenos, a função de Bessel se reduz a uma exponencial

$$\frac{1}{K_1(2/\xi)} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{\xi}} \exp\left\{\frac{2}{\xi}\right\}, \quad (1.87)$$

assim, quando $\sqrt{\xi}$ for da ordem de \hbar , de modo que $\hbar\sqrt{\xi} \sim \xi$, a (1.85) fica modulada por

$$\frac{1}{\xi} \exp\left\{-\frac{f(\bar{q})}{\xi}\right\}, \quad (1.88)$$

que resulta numa função delta desde que $f(\bar{q})$ seja positiva. Para acharmos o argumento dessa delta, parametrizamos \bar{q} da seguinte maneira

$$\bar{q}^\mu = E_{\bar{q}} (\sinh \zeta, \cosh \zeta \sin \theta \cos \phi, \cosh \zeta \sin \theta \sin \phi, \cosh \zeta \cos \theta), \quad (1.89)$$

e novamente ζ varia entre $[0, \infty]$, θ varia entre $[0, \pi]$ e ϕ varia entre $[0, 2\pi]$. Mais uma vez, calculando no referencial de repouso de u^μ e usando a propriedade de (1.87), a exponencial em (1.85) fica:

$$-\frac{2}{\xi} \left(\cosh \zeta \sqrt{1 + (\hbar^2 E_{\bar{q}}^2)/(4m^2)} - 1 \right), \quad (1.90)$$

de modo que

$$\cosh \zeta \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + (\hbar^2 E_{\bar{q}}^2)/(4m^2)}} = 1 - \frac{\hbar^2 e_{\bar{q}}^2}{8m^2} + \mathcal{O}(\hbar^4), \quad (1.91)$$

zera a função delta. Logo a delta é dada por

$$\delta\left(\bar{q}\cdot u\ell_s + \frac{\ell_c^2}{4\ell_s^2} \frac{1}{\bar{q}\cdot u\ell_s}\right). \quad (1.92)$$

Para chegar a essa expressamos, absorvemos um fator de $\hbar \sim \sqrt{\xi}$. Como o argumento da delta é polinomial, ambos os termos devem ser restringidos por essa ordem, ou seja

$$\frac{\ell_c}{\ell_s} \lesssim \sqrt{\xi} \quad (1.93)$$

$$\bar{q}\cdot u\ell_s \lesssim \sqrt{\xi}. \quad (1.94)$$

Combinando a (1.94) com a (1.49) e a (1.45), temos

$$\ell_c \ll \ell_w \ll \ell_s, \quad (1.95)$$

que será chamada de desigualdade dos “cachinhos dourados”. Veremos que $\ell_s \sim \sqrt{-b^2}$, para o espalhamento de partículas massivas, logo a restrição final pode ser escrita como

$$\ell_c \ll \ell_w \ll \sqrt{-b^2}. \quad (1.96)$$

Por outro lado a (1.93) é uma restrição mais branda do que (1.49), e não esperamos que ela se fortaleça no limite clássico, ou seja, esperamos que ℓ_c/ℓ_w não torne muito menor que $\sqrt{\xi}$. Isso nos diz que $\bar{q} \cdot u$ deve ser menor mas da mesma ordem que $\sqrt{\xi}/\ell_s$. Com isso, agora olhando pra delta (1.92), podemos dizer que

$$\ell_c \bar{q}^2 \sim \frac{\ell_c}{\ell_s^2} \ll \frac{\sqrt{\xi}}{\ell_s}, \quad (1.97)$$

de modo que $\ell_c \bar{q}^2 \ll \bar{q} \cdot u$, ou seja, podemos desprezar o segundo termo na delta. Logo, vemos que a integral T_1 é um pico acentuado centrado numa função delta da forma

$$\delta(\bar{q} \cdot u). \quad (1.98)$$

Isso vai nos permitir desprezar os termos \bar{q}^2 quando estivermos tomando o limite clássico, caso não haja nenhum dos impedimentos que serão mencionados em breve.

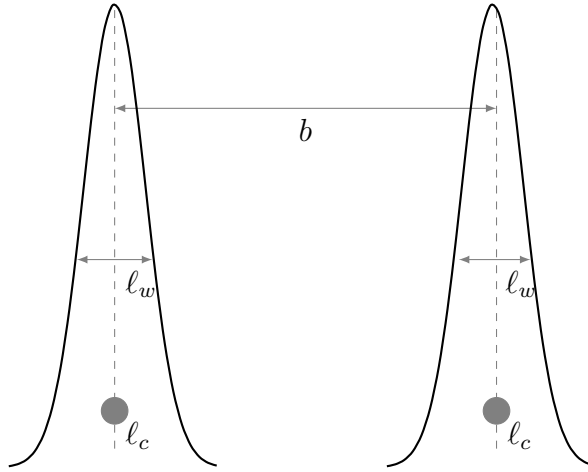


Figura 1.1: Representação da desigualdade dos cachinhos dourados.

Quando a cálculo do observável clássico for realizado, não se pode tomar, de fato, $\xi = 0$. Não será nem tomado totalmente o limite $\xi \rightarrow 0$, ao invés disso queremos apenas o termo principal desse limite. Podemos entender isso ao analisarmos uma outra escala de comprimento presente, o raio clássico da partícula pontual. Na eletrodinâmica, temos:

$$r_{cl} = \frac{e^2}{4\pi m} = \frac{\hbar e^2}{4\pi \hbar m} = \alpha \ell_c, \quad (1.99)$$

em que α é constante de acoplamento usual do eletromagnetismo. Alguns parâmetros adimensionais relacionados com o raio clássico irão surgir, mas durante a tomada do limite clássico eles se anularam.

Esperamos que os pacotes de onda, quando submetidos uma interação fraca e abaixo do limiar de criação de partícula, sejam deformados, mas que não alterem muito seu formato durante o espalhamento. Em outras palavras, as partículas que emergem do espalhamento devem ser caracterizadas por funções onda similares às do estado incidente. Podemos estimar o alargamento $\sigma^2(r_i)$ num estado final de momento r_i

$$\begin{aligned}
 \frac{\sigma^2(r_i)}{m_i^2} &= \frac{\langle (r_i - \langle r_i \rangle)^2 \rangle}{m_i^2} \\
 &= \frac{\langle r_i \rangle - \langle r_i \rangle^2}{m_i^2} \\
 &= 1 - \frac{(\langle p_i \rangle + \langle \Delta p_i \rangle)^2}{m_i^2} \\
 &= \frac{\sigma^2(p_i)}{m_i^2} - \frac{\langle \Delta p_i \rangle \cdot (2 \langle p_i \rangle + \langle \Delta p_i \rangle)}{m_i^2}.
 \end{aligned} \tag{1.100}$$

Desde que $\frac{\langle \Delta p_i \rangle}{m_i^2} \lesssim \frac{\sigma^2(p_i)}{m_i^2}$, o segundo termo não contribuirá significativamente para o resultado, e o alargamento do momento do estado final será da mesma ordem do momento do estado inicial. A validade dessa condição dependerá de pormenores da função de onda

Para fatores de integrando que aparecem em todas as contribuições, *i.e.* que aparecem diretamente na expressão final no limite $\hbar \rightarrow 0$, duas simplificações podem ser úteis: tomar $p_i = m_i u_i$ e truncar na ordem mais baixa em \hbar e ξ . Dentro da integrais de delta on-shell $\hat{\delta}(2p_i \cdot q \pm \hbar \bar{q}^2)$ podemos desprezar o termo $\hbar \bar{q}^2$, isso é válido desde que os fatores multiplicando a delta não sejam singulares em \hbar . Argumentos deste tipo vão servir para outros termos. Se tais fatores forem singulares em \hbar , devemos manter os termos $\hbar \bar{q}^2$.

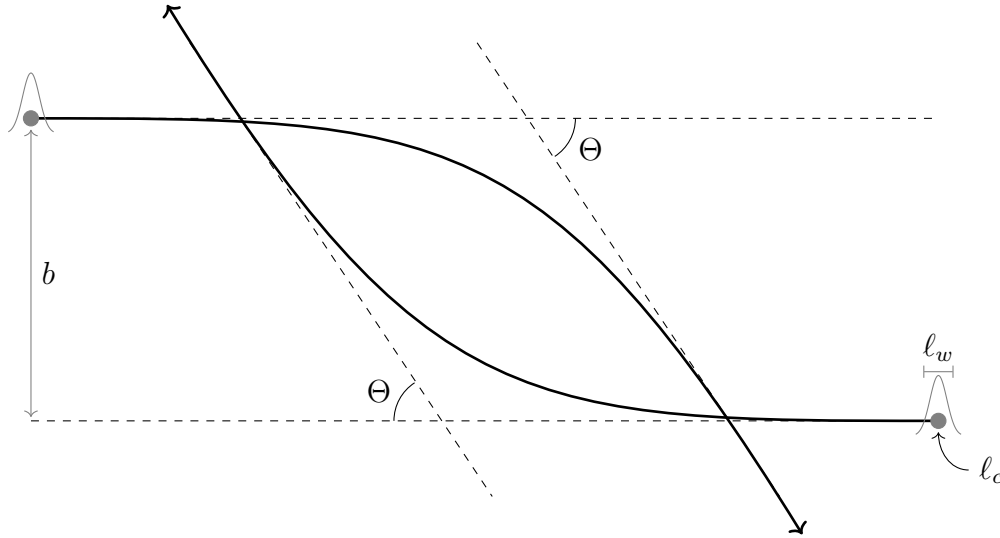


Figura 1.2: Representação das escalas no processo de espalhamento.

Capítulo 2

Radiação e partículas não massivas

A detecção e análise de dados provenientes da radiação gravitacional são fundamentais para a astronomia de ondas gravitacionais. Neste capítulo, iremos utilizar as técnicas desenvolvidas para estudar o impulso a fim de estabelecer outro observável importante, também quântico e on-shell, a radiação total emitida.

Sabemos que impulso e radiação estão interligados. Mais ainda, a relação entre eles está no cerne de uma das dificuldades das abordagens tradicionais da teoria clássica de campo com fontes pontuais. No espalhamento de duas partículas na eletrodinâmica clássica, por exemplo, o momento é transferido de uma partícula para outra via o campo eletromagnético, conforme descrito pela força de Lorentz. No entanto, a energia e momento perdida pelas partículas pontuais devido à radiação não é contabilizada pela força de Lorentz. De modo a manter a conservação do momento é necessário levar em conta uma força adicional, a força de AbrahamLorentzDirac (ALD)[100–103]. A inclusão dessa força de reação à radiação leva à conhecidos problemas de violações de causalidade na eletrodinâmica clássica com fontes pontuais.

O uso da mecânica quântica para descrever o espalhamento de partículas carregadas resolverá esses problemas. De fato, veremos explicitamente que uma descrição quântica automaticamente conservará energia e momento no espalhamento de partículas.

2.1 O momento irradiado na colisão

Um observável clássico conhecido é a energia irradiada por um partícula acelerada. Na mecânica quântica, podemos calcular o valor esperado do quadrimomento irradiado num processo de espalhamento. Vamos observar o processo e identificar as partículas irradiadas como “mensageiras”. Seja \mathbb{K}^μ o operador de momento de um campo irradiado, o valor esperado do momento irradiado será:

$$\begin{aligned}\langle k^\mu \rangle &= {}_{out} \langle \psi | \mathbb{K}^\mu | \psi \rangle_{out} \\ &= \langle \psi | U^\dagger(-\infty, \infty) \mathbb{K}^\mu U(-\infty, \infty) | \psi \rangle,\end{aligned}\tag{2.1}$$

novamente $U(-\infty, \infty)$ vai ser a matriz S , que podemos expandir em $S = \mathbf{1} + iT$ nos resultando em

$$\begin{aligned}
 R^\mu &\equiv \langle k^\mu \rangle = \langle \psi | U^\dagger(-\infty, \infty) \mathbb{K}^\mu U(-\infty, \infty) | \psi \rangle \\
 &= \langle \psi | S^\dagger \mathbb{K}^\mu S | \psi \rangle \\
 &= \langle \psi | (\mathbf{1} + iT)^\dagger \mathbb{K}^\mu (\mathbf{1} + iT) | \psi \rangle \\
 &= (\langle \psi | - i \langle \psi | T^\dagger) (\mathbb{K}^\mu | \psi \rangle + i \mathbb{K}^\mu T | \psi \rangle) \\
 &= \langle \psi | \mathbb{K}^\mu | \psi \rangle + i \langle \psi | \mathbb{K}^\mu T | \psi \rangle - i \langle \psi | T^\dagger \mathbb{K}^\mu | \psi \rangle - i \langle \psi | T^\dagger i \mathbb{K}^\mu T | \psi \rangle \\
 &= \langle \psi | T^\dagger \mathbb{K}^\mu T | \psi \rangle.
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Podemos inserir um conjunto completo de estados que contenham ao menos um mensageiro de momento k

$$\begin{aligned}
 R^\mu &= \sum_X \int d\Phi(k) d\Phi(r_1) d\Phi(r_2) \langle \psi | T^\dagger | k r_1 r_2 X \rangle \langle k r_1 r_2 X | \mathbb{K}^\mu T | \psi \rangle \\
 &= \sum_X \int d\Phi(k) d\Phi(r_1) d\Phi(r_2) k_X^\mu |\langle k; r_1; r_2; X | T | \psi \rangle|^2,
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

em que, novamente, X pode ser vazio, k_X^μ é a soma dos momentos k^μ dos mensageiros e do momento de qualquer mensageiro que no esteja no estado X . O estado $|k\rangle$ descreve um mensageiro irradiado, e a integral no espaço de fase sobre k inclui implicitamente todas as helicidades. Expandindo a (2.3)

$$\begin{aligned}
 R^\mu &= \sum_X \int d\Phi(k) d\Phi(r_1) d\Phi(r_2) k_X^\mu \left| \int d\Phi(p_1) d\Phi(p_2) \phi_1(p_1) \phi_2(p_2) e^{ib \cdot p_1/\hbar} \times \right. \\
 &\quad \left. \times \mathcal{A}(p_1, p_2 \rightarrow r_1, r_2, k, r_X) \hat{\delta}^{(4)}(p_1 + p_2 - r_1 - r_2 - k - r_X) \right\}^2
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_X \int d\Phi(k) \prod_{i=1,2} d\Phi(r_1) d\Phi(p_i) d\Phi(p'_i) \phi_i(p_i) \phi_i^*(p'_i) k_X^\mu e^{ib \cdot (p_1 - p'_1)/\hbar} \times \\
 &\quad \times \mathcal{A}(p_1, p_2 \rightarrow r_1, r_2, k, r_X) \hat{\delta}^{(4)}(p_1 + p_2 - r_1 - r_2 - k - r_X) \times \\
 &\quad \times \mathcal{A}^*(p'_1, p'_2 \rightarrow r_1, r_2, k, r_X) \hat{\delta}^{(4)}(p'_1 + p'_2 - r_1 - r_2 - k - r_X).
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Agora, introduzimos um mudança de momento $q_i = p'_i - p_i$, trocamos a integral de p'_i para q_i , de modo que uma das deltas se torne $\hat{\delta}^{(4)}(q_1 + q_2)$ e, por fim, realizamos a integral em q_2 . Troca-se a variável $q_1 \rightarrow q$ e sobra apenas δ 's on-shell e Θ 's de energia positiva

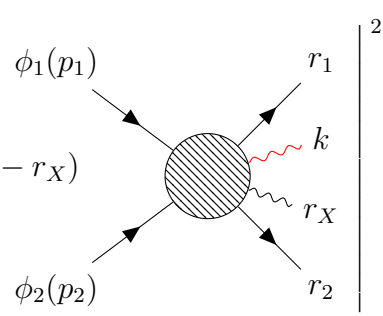
$$\begin{aligned}
 R^\mu &= \sum_X \int d\Phi(k) \prod_{i=1,2} d\Phi(r_1) d\Phi(p_i) \hat{d}^4 q \phi_1(p_1) \phi_2(p_2) \phi_1^*(p_1 + q) \phi_2^*(p_2 - q) \times \\
 &\quad \times \hat{\delta}(2p_1 \cdot q + q^2) \hat{\delta}(2p_1 \cdot q - q^2) \Theta(p_1^0 + q^0) \Theta(p_2^0 - q^0) \times \\
 &\quad \times k_X^\mu e^{ib \cdot q/\hbar} \hat{\delta}^{(4)}(p_1 + p_2 - r_1 - r_2 - k - r_X) \mathcal{A}(p_1, p_2 \rightarrow r_1, r_2, k, r_X) \times \\
 &\quad \times \mathcal{A}^*(p_1 + q, p_2 - q \rightarrow r_1, r_2, k, r_X).
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Define-se a transferência de momento do espalhamento $w_i \equiv r_i - p_i$, e coloca-se a (2.6)

em função de w_i

$$\begin{aligned}
 R^\mu = \sum_X \int d\Phi(k) \prod_{i=1,2} d\Phi(p_i) \hat{d}^4 w_i \hat{d}^4 q \phi_1(p_1) \phi_2(p_2) \phi_1^*(p_1 + q) \phi_2^*(p_2 - q) \times \\
 \times \hat{\delta}(2p_i \cdot w_i + w_i^2) \Theta(p_i^0 + w_i^0) \times \\
 \times \hat{\delta}(2p_1 \cdot q + q^2) \hat{\delta}(2p_2 \cdot q - q^2) \Theta(p_1^0 + q^0) \Theta(p_2^0 - q^0) \times \\
 \times k_X^\mu e^{ib \cdot q/\hbar} \hat{\delta}^{(4)}(w_1 + w_2 + k + r_X) \times \\
 \times \mathcal{A}(p_1, p_2 \rightarrow r_1, r_2, k, r_X) \mathcal{A}^*(p_1 + q, p_2 - q \rightarrow r_1, r_2, k, r_X). \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

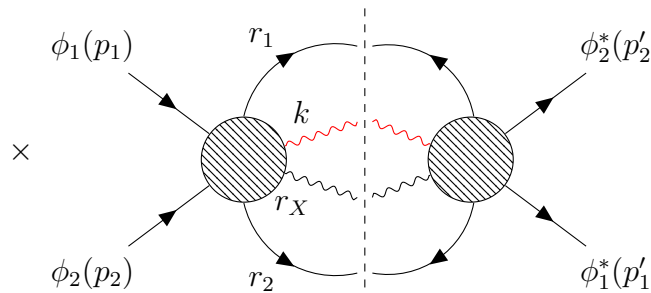
Diagramaticamente temos, para a (2.4)

$$\begin{aligned}
 R^\mu = \sum_X \int d\Phi(k) d\Phi(r_1) d\Phi(r_2) k_X^\mu \times \\
 \times \int d\Phi(p_1) d\Phi(p_2) e^{ib \cdot p_1/\hbar} \hat{\delta}^{(4)}(p_1 + p_2 - r_1 - r_2 - k - r_X)
 \end{aligned}$$


(2.8)

e a (2.5) fica

$$\begin{aligned}
 R^\mu = \sum_X \int d\Phi(k) \prod_{i=1,2} d\Phi(r_i) d\Phi(p_i) d\Phi(p'_i) k_X^\mu e^{ib \cdot (p_1 - p'_1)/\hbar} \times \\
 \times \hat{\delta}^{(4)}(p_1 + p_2 - r_1 - r_2 - k - r_X) \hat{\delta}^{(4)}(p'_1 + p'_2 - r_1 - r_2 - k - r_X) \times
 \end{aligned}$$



(2.9)

2.2 Conservação do momento

O valor esperado do momento irradiado não é independente do impulso. Sabemos que na eletrodinâmica clássica o impulso, de partículas pontuais, é resultado de uma integral no tempo da força de Lorentz usual. No entanto, quando essas partículas emitem radiação, o fato de serem partículas pontuais gera problemas conhecidos. Este é um problema conhecido na teoria clássica dos campos. Os empecilhos surgem devido à natureza singular da fonte das partículas pontuais. Especificamente, o campo eletromagnético na posição de uma carga pontual diverge para infinito. Para contornar essa questão e tornar

a força de Lorentz na partícula compreensível, subtrai-se o campo gerado pela própria partícula do campo eletromagnético total na da força de Lorentz. Isso gera uma força bem definida, entretanto a conservação do momento é comprometida.

A conservação do momento é restaurada ao incluir outra força, a força de Abraham-Lorentz-Dirac (ALD) [100–103], atuando nas partículas. Isso dá origem a um impulso na partícula 1 além do impulso devido à força de Lorentz. Enquanto a força de Lorentz troca momento entre as partículas 1 e 2, o impulso da reação de radiação,

$$\Delta p_{1,ALD}^\mu = \frac{e^2 Q_1^2}{6\pi m_1} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left(\frac{d^2 p_1^\mu}{d\tau^2} + \frac{p_1^\mu}{m_1^2} \frac{dp_1}{d\tau} \cdot \frac{dp_1}{d\tau} \right), \quad (2.10)$$

leva em consideração a perda irreversível de momento devido à radiação. Na EDQ, não pode haver violação da conservação do momento, então os observáveis quânticos que definimos devem incluir todos os efeitos que, classicamente, seriam atribuídos tanto às forças de Lorentz quanto à ALD. E isso também deve valer para os equivalentes dessas forças em qualquer outra teoria. Veremos que força de Lorentz troca momento entre as partículas 1 e 2, enquanto que a reação de radiação dá conta da perda de momento por radiação.

O processo de espalhamento que nos interessa é composto por duas partículas incidentes, seja então

$$\begin{aligned} \langle \Delta p_1^\mu \rangle + \langle \Delta p_2^\mu \rangle &= \langle \psi | i [\mathbb{P}_1^\mu + \mathbb{P}_2^\mu, T] | \psi \rangle + \langle \psi | T^\dagger [\mathbb{P}_1^\mu + \mathbb{P}_2^\mu, T] | \psi \rangle \\ &= \langle \psi | i \left[\sum_i \mathbb{P}_i^\mu, T \right] | \psi \rangle + \langle \psi | T^\dagger [\mathbb{P}_1^\mu + \mathbb{P}_2^\mu, T] | \psi \rangle, \end{aligned} \quad (2.11)$$

em que $\sum_i \mathbb{P}_i^\mu$ são todos os possíveis operadores de momento, não apenas os das partículas 1 e 2, logo $\mathbb{P}_i^\mu | \psi \rangle = 0$ para $i \neq 1, 2$. Como o momento total é independente do tempo, temos

$$\left[\sum_i \mathbb{P}_i^\mu, T \right] = 0, \quad (2.12)$$

o que implica em

$$\langle \psi | i [\mathbb{P}_1^\mu + \mathbb{P}_2^\mu, T] | \psi \rangle = \langle \psi | i \left[\sum_i \mathbb{P}_i^\mu, T \right] | \psi \rangle = 0. \quad (2.13)$$

Assim, a (1.29) descreve exclusivamente a transferência de momento entre a partícula 1 com a 2, de modo que se associa, então, com a força de Lorentz. Já a (1.30) incluirá a contribuição da radiação. Para exemplificar, suponhamos o caso em que o único operador de momento presente seja \mathbb{K}^μ , o operador de momento do mensageiro. Isso implica que $[\mathbb{P}_1^\mu + \mathbb{P}_2^\mu + \mathbb{K}^\mu, T] = 0$. Trabalhando essa expressão, temos:

$$\begin{aligned} [\mathbb{P}_1^\mu + \mathbb{P}_2^\mu + \mathbb{K}^\mu, T] &= (\mathbb{P}_1^\mu + \mathbb{P}_2^\mu + \mathbb{K}^\mu)T - T(\mathbb{P}_1^\mu + \mathbb{P}_2^\mu + \mathbb{K}^\mu) \\ &= \mathbb{P}_1^\mu T + \mathbb{P}_2^\mu T + \mathbb{K}^\mu T - T\mathbb{P}_1^\mu - T\mathbb{P}_2^\mu - T\mathbb{K}^\mu = 0 \\ &\rightarrow \mathbb{P}_1^\mu T + \mathbb{P}_2^\mu T - T\mathbb{P}_1^\mu - T\mathbb{P}_2^\mu = T\mathbb{K}^\mu - \mathbb{K}^\mu T. \end{aligned} \quad (2.14)$$

a partir disso, temos a expressão para a variação nos momentos:

$$\begin{aligned}
\langle \Delta p_1^\mu \rangle + \langle \Delta p_2^\mu \rangle &= \langle \psi | i [\mathbb{P}_1^\mu + \mathbb{P}_2^\mu, T] | \psi \rangle + \langle \psi | T^\dagger [\mathbb{P}_1^\mu + \mathbb{P}_2^\mu, T] | \psi \rangle \\
&= \langle \psi | T^\dagger [\mathbb{P}_1^\mu + \mathbb{P}_2^\mu, T] | \psi \rangle \\
&= \langle \psi | T^\dagger ((\mathbb{P}_1^\mu + \mathbb{P}_2^\mu)T - T(\mathbb{P}_1^\mu + \mathbb{P}_2^\mu)) | \psi \rangle \\
&= \langle \psi | T^\dagger (\mathbb{P}_1^\mu T + \mathbb{P}_2^\mu T - T\mathbb{P}_1^\mu - T\mathbb{P}_2^\mu) | \psi \rangle \\
&= \langle \psi | T^\dagger (T\mathbb{K}^\mu - \mathbb{K}^\mu T) | \psi \rangle \\
&= \langle \psi | T^\dagger T \underbrace{\mathbb{K}^\mu}_{=0} | \psi \rangle - \langle \psi | T^\dagger \mathbb{K}^\mu T | \psi \rangle \\
&= -\langle k^\mu \rangle = -R^\mu.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Na Eletrodinâmica clássica, a reação de radiação é um efeito subdominante, surgindo no espalhamento de dois corpos apenas em ordem de e^6 na teoria de perturbação. Essa característica também se mantém na teoria quântica. Para entender isso, podemos expandir novamente o produto de operadores na segunda parcela da (1.28) utilizando um conjunto completo de estados:

$$\langle \psi | T^\dagger [P_1^\mu, T] | \psi \rangle = \sum_X \int d\Phi(r_1) d\Phi(r_2) \langle \psi | T^\dagger | r_1; r_2; X \rangle \langle r_1; r_2; X | [P_1^\mu, T] | \psi \rangle. \tag{2.16}$$

A soma sobre X é realizada sobre todos os estados. Os momentos dos estados inseridos das partículas 1 e 2 são denominados por r_i , e as integrações correspondentes sobre esses momentos por $d\Phi(r_i)$. Essas integrações se tornam, em última análise, integrações sobre os momentos dos estados finais no espalhamento. Para tornar explícita a perda de momento devido à radiação, podemos observar que

$$\langle \psi | T^\dagger [P_1^\mu + P_2^\mu, T] | \psi \rangle = - \sum_X \int d\Phi(r_1) d\Phi(r_2) \langle \psi | T^\dagger | r_1; r_2; X \rangle \langle r_1; r_2; X | P_X^\mu T | \psi \rangle, \tag{2.17}$$

em que P_X^μ é a soma dos operadores de momento de todos os campos quânticos distintos dos escalares 1 e 2. A soma sobre todos os estados X conterà termos nos quais o estado X inclui mensageiros de momento k^μ junto com outras partículas não massivas por exemplo. Podemos restringir ainda mais a atenção às contribuições do momento do mensageiro para P_X^μ . Essa contribuição produz uma variação de momento na partícula 1 dada por

$$\Delta p_1 = - \sum_X \int d\Phi(k) d\Phi(r_1) d\Phi(r_2) k^\mu \langle \psi | T^\dagger | k; r_1; r_2; X \rangle \langle k; r_1; r_2; X | T | \psi \rangle = -\langle k^\mu \rangle, \tag{2.18}$$

em que aqui usamos a (2.3). Dessa forma, vemos explicitamente que a perda de momento é devido aos mensageiros. O caso de ordem mais baixa corresponde a $X = \emptyset$, como há dois quanta em $|\psi\rangle$, devemos calcular o módulo quadrado de uma amplitude de cinco pontos. O termo é proporcional a g^6 , em que g é o acoplamento de uma amplitude de três pontos. No que diz respeito ao impulso, é um efeito de *next-to-next-to-leading order* (NNLO). Outras partículas no estado X , e outras contribuições para seu momento, descrevem efeitos de ordens superiores.

2.3 Partículas não massivas

Sabemos que, à medida que a massa de uma partícula tende a zero, seu comprimento de Compton cresce infinitamente, o que torna impossível satisfazer as condições de "cachinhos dourados". Assim, a extensão do formalismo a partir do caso massivo para o caso não massivo não é totalmente direta. Além disso, é evidente que tratar os mensageiros (fótons ou grávitons) como partículas pontuais também não é viável, pois a localização, por completo, de partículas não massivas no espaço é impossível [104, 105]. Para lidar com esses desafios, é necessário adotar uma abordagem diferente. Neste contexto, os estados coerentes emergem como uma ferramenta promissora [2, 106–108].

Vamos explorar como esses estados coerentes podem ser aplicados, tendo nossa análise com foco no eletromagnetismo. Ao empregar estados coerentes, buscamos contornar as limitações associadas à modelagem de partículas pontuais, proporcionando uma descrição mais precisa de fenômenos físicos complexos. Com isso, esperamos estabelecer um quadro teórico mais sólido para compreendermos não apenas o comportamento de partículas individuais, mas também as interações entre elas, especialmente no contexto de sistemas com massa tendendo a zero e comprimento de Compton divergente.

2.4 Estados coerentes do campo eletromagnético

O operador campo eletromagnético pode ser escrito em termos dos operadores de criação e aniquilação da seguinte forma:

$$\mathbb{A}_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \sum_\eta \int d\Phi(k) \left[a_{(\eta)}(k) \varepsilon_\mu^{(\eta)*}(k) e^{-i\frac{k \cdot x}{\hbar}} + a_{(\eta)}^\dagger(k) \varepsilon_\mu^{(\eta)}(k) e^{i\frac{k \cdot x}{\hbar}} \right], \quad (2.19)$$

em que $\eta = \pm$ indexa a helicidade dos fótons, e $\varepsilon_\mu^{(\eta)}(k)$ é o vetor de polarização, obedecendo a condição

$$[\varepsilon_\mu^{(\eta)}(k)]^* = \varepsilon_\mu^{(-\eta)}(k). \quad (2.20)$$

Seguimos, então, com a convenção de representar um fóton emergente com momento k e helicidade positiva por $\varepsilon_\mu^{(+)}(k)$, que corresponde também a um fóton incidente com momento oposto e helicidade negativa. Fótons com helicidade positiva, momento k e com $k^0 > 0$ são representados pelo vetor de polarização $\varepsilon_\mu^{(+)}(k)$, enquanto fótons com helicidade positiva, momento k mas com $k^0 < 0$ são representados pelo vetor de polarização $\varepsilon_\mu^{(-)}(k)$.

De forma mais genérica, o operador $a_{(\eta)}^\dagger(k)$ cria um estado mensageiro de momento k e helicidade η , enquanto que $a_{(\eta)}(k)$ o aniquila. Equivalentemente, este último também cria um estado conjugado com momento k e helicidade η . As relações de comutação desses operadores são dadas por:

$$[a_{(\eta)}(k), a_{(\eta)}^\dagger(k')] = \delta_{\eta, \eta'} \hat{\delta}_\Phi(k - k'), \quad (2.21)$$

Ao aplicar o operador de criação $a_{(+)}^\dagger(k)$ ao estado de vácuo $|0\rangle$, obtemos o estado de uma partícula com helicidade positiva:

$$|k^+\rangle \equiv a_{(+)}^\dagger(k) |0\rangle = [a_{(+)}(k)]^\dagger |0\rangle \quad (2.22)$$

Usando o campo dado por (2.19), o tensor de campo é dado por

$$\mathbb{F}_{\mu\nu} = -\frac{2i}{\hbar^{3/2}} \sum_{\eta} \int d\Phi(k) \left[a_{(\eta)}(k) k_{[\mu} \varepsilon_{\nu]}^{(\eta)*} e^{-i\frac{k \cdot x}{\hbar}} - a_{(\eta)}^{\dagger}(k) k_{[\mu} \varepsilon_{\nu]}^{(\eta)} e^{i\frac{k \cdot x}{\hbar}} \right] \quad (2.23)$$

em que

$$A_{[\mu} B_{\nu]} = \frac{1}{2} (A_{\mu} B_{\nu} - A_{\nu} B_{\mu}). \quad (2.24)$$

Introduzimos então o operador de estado coerente

$$\mathbb{C}_{\alpha,(\eta)} \equiv \mathcal{N}_{\alpha} \exp \left\{ \int d\Phi(k) \alpha(k) a_{(\eta)}^{\dagger}(k) \right\}, \quad (2.25)$$

em que a \mathcal{N}_{α} é a normalização, que pode ser encontrada fazendo $\langle a^+ \rangle = 1$, com

$$|a^+\rangle = \mathbb{C}_{\alpha,(+)} |0\rangle, \quad (2.26)$$

logo

$$\langle a^+ \rangle = \langle 0 | \mathbb{C}_{\alpha,(+)}^{\dagger} \mathbb{C}_{\alpha,(+)} |0\rangle = 1 \quad (2.27)$$

usando que

$$e^X e^Y = e^Z \quad \rightarrow \quad Z = X + Y + \frac{1}{2} [X, Y] + \frac{1}{12} [X, [X, Y]] + \dots \quad (2.28)$$

e

$$[a, a^{\dagger}] = 1 \quad \rightarrow \quad [a, [a, a^{\dagger}]] = [a^{\dagger}, [a, a^{\dagger}]] = 0, \quad (2.29)$$

temos que

$$e^X e^Y = e^X e^Y e^{\frac{1}{2}[X, Y]}. \quad (2.30)$$

E portanto temos a normalização dada por

$$\mathcal{N}_{\alpha}^2 = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d\Phi(k) |a(k)|^2 \right\} \quad (2.31)$$

Até este ponto, consideramos a função $\alpha(k)$ como genérica, vamos agora considerar alguns exemplos específicos, nos quais esta função será tomada como real. Tal escolha é motivada pelo fato de que a forma funcional de $\alpha(k)$ determinará diretamente a configuração física do estado coerente resultante. Por essa razão, vamos denominá-la de "configuração de onda".

É interessante notar que podemos expressar o operador de criação do estado coerente, usando (2.28) e (2.29), como [109, 110]

$$\mathbb{C}_{\alpha,(\eta)} |0\rangle = \exp \left\{ \int d\phi(k) \alpha(k) (a_{(\eta)}^{\dagger}(k) - a_{(\eta)}(k)) \right\} |0\rangle, \quad (2.32)$$

em que sua ação nos operadores de criação e aniquilação é dada por

$$\mathbb{C}_{\alpha,(\eta)}^{\dagger} a_{(\rho)}(k) \mathbb{C}_{\alpha,(\eta)} = a_{(\rho)}(k) + \delta_{\eta\rho} \alpha(k) \quad (2.33)$$

$$\mathbb{C}_{\alpha,(\eta)}^{\dagger} a_{(\rho)}^{\dagger}(k) \mathbb{C}_{\alpha,(\eta)} = a_{(\rho)}^{\dagger}(k) + \delta_{\eta\rho} \alpha^*(k). \quad (2.34)$$

Para melhor compreensão do estado, vamos calcular o valor esperado do campo eletromagnético $\langle \mathbb{A}^\mu(x) \rangle$ nesse estado. Isso nos leva a:

$$\begin{aligned} \langle \alpha^+ | \mathbb{A}^\mu(x) | \alpha^+ \rangle &= \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \int d\Phi(k) \left[\alpha(k) \varepsilon_\mu^{(+)*}(k) e^{-i\frac{k \cdot x}{\hbar}} + \alpha^*(k) \varepsilon_\mu^{(+)}(k) e^{i\frac{k \cdot x}{\hbar}} \right] \\ &= \int d\Phi(\bar{k}) \left[\bar{\alpha}(\bar{k}) \varepsilon_\mu^{(+)*}(\bar{k}) e^{-i\bar{k} \cdot x} + \bar{\alpha}^*(\bar{k}) \varepsilon_\mu^{(+)}(\bar{k}) e^{i\bar{k} \cdot x} \right] \\ &\equiv A_{cl\mu}(x), \end{aligned} \quad (2.35)$$

em que introduzimos a definição $\bar{\alpha}(\bar{k}) \equiv \hbar^{3/2} \alpha(k)$, e usamos

$$a_{(+)}(k) | \alpha^+ \rangle = \alpha(k) | \alpha^+ \rangle \quad (2.36)$$

$$a_{(-)}(k) | \alpha^+ \rangle = 0 \quad (2.37)$$

$$\langle \alpha^+ | a_{(+)}^\dagger(k) = \langle \alpha^+ | \alpha^*(k) \quad (2.38)$$

$$\langle \alpha^+ | a_{(-)}^\dagger(k) = 0. \quad (2.39)$$

Maiores restrições em $\bar{\alpha}$ surgirão a partir de algumas considerações futuras a respeito do limite clássico.

Agora, vamos usar que solução mais geral para as equações de Maxwell no vácuo é dada por

$$\sum_\eta A_{cl}^{(\eta)\mu} = \sum_\eta \int d\Phi(\bar{k}) \left[\tilde{A}_\eta(\bar{k}) \varepsilon^{(\eta)*\mu}(\bar{k}) e^{-i\bar{k} \cdot x} + \tilde{A}_\eta^*(\bar{k}) \varepsilon^{(\eta)\mu}(\bar{k}) e^{i\bar{k} \cdot x} \right], \quad (2.40)$$

em termos de coeficientes de Fourier $\tilde{A}_\eta(\bar{k})$ que podemos identificar como os $\bar{\alpha}(\bar{k})$. Evidentemente, nosso estado $|\alpha^+\rangle$ contribui apenas com os termos de helicidade positiva. Um estado coerente mais geral envolvendo operadores de criação de ambas as helicidades geraria essa solução mais geral das equações de Maxwell livres. Aqui vamos nos ater a esse caso mais simples.

2.5 Estados clássicos

Um estado ser coerente não é o suficiente para que tenhamos um comportamento clássico, devemos exigir também que os valores esperados possam ser fatorizados conforme vimos na seção 1.2

$$\langle \alpha^+ | \mathbb{A}^\mu(x) \mathbb{A}^\nu(y) | \alpha^+ \rangle \simeq \langle \alpha^+ | \mathbb{A}^\mu(x) | \alpha^+ \rangle \langle \alpha^+ | \mathbb{A}^\nu(y) | \alpha^+ \rangle. \quad (2.41)$$

Podemos calcular, num calibre de cone de luz¹ definido por um vetor tipo luz q , que

$$\begin{aligned} \langle \alpha^+ | \mathbb{A}^\mu(x) \mathbb{A}^\nu(y) | \alpha^+ \rangle &= \langle \alpha^+ | \mathbb{A}^\mu(x) | \alpha^+ \rangle \langle \alpha^+ | \mathbb{A}^\nu(y) | \alpha^+ \rangle + \\ &\quad + \frac{1}{\hbar} \int d\Phi(k) \left[\eta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu q^\nu + k^\nu q^\mu}{k \cdot q + i\delta} \right] e^{-i\frac{k \cdot (x-y)}{\hbar}} \\ &= \langle \alpha^+ | \mathbb{A}^\mu(x) | \alpha^+ \rangle \langle \alpha^+ | \mathbb{A}^\nu(y) | \alpha^+ \rangle + \\ &\quad + \frac{1}{\hbar} \int d\Phi(k) \left[\eta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu q^\nu + k^\nu q^\mu}{k \cdot q + i\delta} \right] e^{-i\bar{k} \cdot (x-y)}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

¹i.e. $q \cdot A^a = 0$ e $q^2 = 0$, para uma discussão mais aprofundada ver [111].;

Fazendo o mesmo para o tensor de campo, temos

$$\begin{aligned} \langle \alpha^+ | \mathbb{F}^\mu(x) \mathbb{F}^\nu(y) | \alpha^+ \rangle &= \langle \alpha^+ | \mathbb{F}^\mu(x) | \alpha^+ \rangle \langle \alpha^+ | \mathbb{F}^\nu(y) | \alpha^+ \rangle + \\ &+ 4\hbar \partial^{[\mu} \eta^{\nu][\sigma} \partial^{\rho]} \int d\Phi(k) e^{-i\bar{k}\cdot(x-y)}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

No caso clássico, o último termo é desprezível em relação ao primeiro. Definindo $F_{cl}^{\mu\nu}(x) \equiv \langle \alpha^+ | \mathbb{F}^{\mu\nu}(x) | \alpha^+ \rangle$, ficamos com

$$F_{cl}^{\mu\nu}(x) F_{cl}^{\rho\sigma}(x) + \frac{\hbar}{\pi^2} \partial^{[\mu} \eta^{\nu][\sigma} \partial^{\rho]} \frac{1}{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2 - (x^0 - y^0 - i\delta)^2}. \quad (2.44)$$

Vemos que o segundo termo torna-se desprezível conforme tomamos \hbar muito pequeno, enquanto o primeiro termo não. Essa condição de fatorização é conhecida como condição de coerência completa [106].

Definimos também um operador de número, que mede o número de fótons, como

$$\mathbb{N}_\gamma = \sum_\eta \int d\Phi(k) a_{(\eta)}^\dagger(k) a_{(\eta)}(k), \quad (2.45)$$

cujo o valor esperado no estado coerente é

$$\begin{aligned} N_\gamma &= \langle \alpha^+ | \mathbb{N}_\gamma | \alpha^+ \rangle \\ &= \int d\phi(k) |\alpha(k)|^2 \\ &= \frac{1}{\hbar} \int d\phi(\bar{k}) |\bar{\alpha}(\bar{k})|^2. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Vemos que o limite clássico, \hbar muito pequeno, equivale ao limite de um grande número de fótons, um limite de alto número de ocupação. Com isso, a propriedade de fatorização dada em (2.41) é válida no regime de

$$N_\gamma \gg 1. \quad (2.47)$$

Ademais, devemos escolher uma configuração de onda α de modo que a integral em (2.46) não seja parametricamente pequena quando tomarmos \hbar muito pequeno. A forma mais simples é tomar $\bar{\alpha}$ independente de \hbar .

Analogamente, o momento carregado pelos estado coerente é

$$\begin{aligned} K_\odot^\mu &= \langle \alpha^+ | \mathbb{K}^\mu | \alpha^+ \rangle \\ &= \int d\Phi(k) |\alpha(k)|^2 k^\mu \\ &= \int d\Phi(\bar{k}) |\bar{\alpha}(\bar{k})|^2 \bar{k}^\mu, \end{aligned} \quad (2.48)$$

que é finita no limite clássico.

Esta construção de estados coerente e sua conexão à estados clássicos pode ser generalizada para qualquer partícula não massiva, como um gráviton, diretamente. Por exemplo, se definirmos a métrica do espaço-tempo como

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}, \quad (2.49)$$

teremos uma descrição quântica para o campo dada por

$$h_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \sum_{\eta=\pm 2} \int d\Phi(k) \left[a_{\eta}(k) \varepsilon_{\mu}^{*\eta}(k) \varepsilon_{\nu}^{*\eta}(k) e^{-i\bar{k}\cdot x} + a_{\eta}^*(k) \varepsilon_{\mu}^{\eta}(k) \varepsilon_{\nu}^{\eta}(k) e^{i\bar{k}\cdot x} \right]. \quad (2.50)$$

É sempre possível expressar o tensor de polarização que convencionalmente aparece no operador do gráviton como um produto externo explícito de dois vetores de polarização conforme feito acima. Com a (2.50), o operador para o tensor de Riemann linearizado fica

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\rho\sigma} &= \frac{\kappa}{2} (\partial_{\sigma} \partial_{\mu} h_{\nu\rho} - \partial_{\sigma} \partial_{\nu} h_{\mu\rho} - \partial_{\rho} \partial_{\mu} h_{\nu\sigma} + \partial_{\rho} \partial_{\nu} h_{\mu\sigma}) \\ &= -\frac{\kappa}{2\sqrt{\hbar}} \sum_{\eta=\pm 2} \int d\Phi(k) \left[\partial_{\sigma} \partial_{\mu} \left(a_{\eta}(k) \varepsilon_{\nu}^{*\eta}(k) \varepsilon_{\rho}^{*\eta}(k) e^{-i\bar{k}\cdot x} + \text{h.c.} \right) + \right. \\ &\quad \left. - \partial_{\sigma} \partial_{\nu} \left(a_{\eta}(k) \varepsilon_{\mu}^{*\eta}(k) \varepsilon_{\rho}^{*\eta}(k) e^{-i\bar{k}\cdot x} + \text{h.c.} \right) + \right. \\ &\quad \left. - \partial_{\rho} \partial_{\mu} \left(a_{\eta}(k) \varepsilon_{\nu}^{*\eta}(k) \varepsilon_{\sigma}^{*\eta}(k) e^{-i\bar{k}\cdot x} + \text{h.c.} \right) + \right. \\ &\quad \left. - \partial_{\rho} \partial_{\nu} \left(a_{\eta}(k) \varepsilon_{\mu}^{*\eta}(k) \varepsilon_{\sigma}^{*\eta}(k) e^{-i\bar{k}\cdot x} + \text{h.c.} \right) \right] \quad (2.51) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{\kappa}{2\sqrt{\hbar}} \sum_{\eta=\pm 2} \int d\Phi(k) \left[a_{\eta}(k) \left(\bar{k}_{\mu} \varepsilon_{\nu}^{*\eta}(k) - \bar{k}_{\nu} \varepsilon_{\mu}^{*\eta}(k) \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\bar{k}_{\sigma} \varepsilon_{\rho}^{*\eta}(k) - \bar{k}_{\rho} \varepsilon_{\sigma}^{*\eta}(k) \right) e^{-i\bar{k}\cdot x} + \text{h.c.} \right]. \quad (2.52) \end{aligned}$$

É relevante lembrar que o tensor de Riemann linearizado é um invariante de calibre.

2.6 Feixes de luz localizados

Vamos começar o estudo a partir de um caso conhecido, a ótica geométrica. Podemos fazer um paralelo com o que estamos fazendo aqui, ao lembrarmos que a ótica geométrica é uma aproximação clássica dos fenômenos ondulatórios, representando uma clara separação de escala, pois depende dos comprimentos de onda serem desprezíveis em comparação com as outras escalas físicas do problema. Um dos nossos interesses estará nos efeitos do espalhamento da luz por um objeto pontual. Para que problemas desse tipo sejam bem definidos, a onda incidente deve estar espacialmente separada da partícula incidente no passado distante. Logo, precisamos entender como definir um feixe de luz incidente localizado. . Sem perda de generalidade, vamos escolher o feixe para se mover na direção z , localizado em torno da origem do plano xy . A configuração de onda mais simples é do tipo

$$\alpha(k) = \alpha_{\odot} \hat{\delta}(k - \hbar \bar{k}_{\odot}), \quad (2.53)$$

em que \bar{k}_{\odot} (“ k -barra feixe”) é o vetor de onda total da onda e α_{\odot} (“ α feixe”) é uma constante que se dimensiona com $\sqrt{\hbar}$. Definindo $\bar{\alpha}_{\odot} = \hbar^{1/2} \alpha_{\odot}$, ficamos com

$$\bar{\alpha}(\bar{k}) = \bar{\alpha}_{\odot} \hat{\delta}_{\Phi}(\bar{k} - \bar{k}_{\odot}), \quad (2.54)$$

de modo que o campo clássico assume a forma

$$A_{cl}^{\mu}(x) = 2Re\bar{\alpha}_{\odot} \varepsilon_{\odot}^{\mu*}(\bar{k}_{\odot}) e^{-i\bar{k}_{\odot}\cdot x}. \quad (2.55)$$

O valor esperado do potencial entre dois estados coerentes deve sempre ser uma quantidade real, um campo físico que podemos medir. Podemos escolher, para estudar um exemplo, os seguintes

$$\bar{k}_{\odot}^{\mu} = (\omega, 0, 0, \omega) \quad (2.56)$$

$$\varepsilon_{\odot}^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, i, 0). \quad (2.57)$$

Tomando a normalização de $\bar{\alpha}$ dada por $\bar{\alpha}_{\odot} = A_{\odot}/\sqrt{2}$, com A_{\odot} real, o campo clássico fica

$$A_{cl}^{\mu}(x) = A_{\odot}(0, \cos \omega(t - z), -\sin \omega(t - z), 0), \quad (2.58)$$

que é uma onda plana circularmente polarizada movendo-se na direção z com frequência angular ω . Esta é totalmente deslocalizada, como queremos que haja uma separação entre a onda incidente e as partículas pontuais, precisamos localizá-la. Podemos fazer isso “alargando” a função delta em (2.53), definimos

$$\delta_{\sigma}(\bar{k}) \equiv \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\bar{k}^2}{\sigma^2}}. \quad (2.59)$$

A largura do pico da função é controlada pelo parâmetro σ . Como \bar{k} é um número de onda, devemos ter que σ tenha dimensão de L^{-1} .

Podemos considerar a onda incidente como sendo invariante sob rotações no eixo de propagação. Seja então a escolha

$$\alpha(k) = \frac{1}{\hbar^3} |\mathbf{k}| (2\pi)^3 A_{\odot} \sqrt{2\hbar} \delta_{\parallel} \left(\omega - \frac{k^z}{\hbar} \right) \delta_{\sigma_{\perp}} \left(\frac{k^x}{\hbar} \right) \delta_{\sigma_{\perp}} \left(\frac{k^y}{\hbar} \right), \quad (2.60)$$

ou

$$\bar{\alpha}(k) = \sqrt{2} |\mathbf{k}| (2\pi)^3 A_{\odot} \delta_{\parallel} (\omega - \bar{k}^z) \delta_{\sigma_{\perp}}(\bar{k}^x) \delta_{\sigma_{\perp}}(\bar{k}^y), \quad (2.61)$$

com A_{\odot} sendo real. Temos na expressão duas medidas do alargamento do feixe, σ_{\parallel} e σ_{\perp} , nas direções perpendiculares e paralelas a direção de propagação da onda. O campo clássico correspondente será

$$A_{cl}^{\mu}(x) = \sqrt{2} A_{\odot} \text{Re} \int d^3 k \varepsilon_{\odot}^{\mu*}(\bar{k}) \delta_{\parallel} (\omega - \bar{k}^z) \delta_{\sigma_{\perp}}(\bar{k}^x) \delta_{\sigma_{\perp}}(\bar{k}^y) e^{-i\bar{k} \cdot x} \Big|_{\bar{k}^t = \sqrt{(\bar{k}^x)^2 + (\bar{k}^y)^2 + (\bar{k}^z)^2}}. \quad (2.62)$$

Vamos explorar mais este exemplo, seja $\sigma_{\parallel} \ll \sigma_{\perp}$ e $\omega = \bar{k}_{\odot}^t$. E também que o feixe seja monocromático, de modo que a δ_{\parallel} seja simplesmente uma delta de Dirac. Com isso, temos

$$A_{cl}^{\mu}(x) = \sqrt{2} A_{\odot} \text{Re} \int d^2 \bar{k} \varepsilon_{\odot}^{\mu*}(\bar{k}) \delta_{\sigma_{\perp}}(\bar{k}^x) \delta_{\sigma_{\perp}}(\bar{k}^y) e^{-it\sqrt{(\bar{k}^x)^2 + (\bar{k}^y)^2 + (\omega)^2}} e^{i\omega z} e^{i\bar{k}^x x} e^{i\bar{k}^y y}. \quad (2.63)$$

Esta expressão pode ser simplificada fazendo-se algumas considerações. Para que o feixe esteja se movendo na direção z , os fótons no feixe devem ter os momentos, ou números de onda, alinhados com a direção z . A delta alargada $\delta_{\sigma_{\perp}}$ permite componentes de momento pequenas nas direções x e y , porém essas devem ser subdominantes. Os números de onda

em x e y devem ser da ordem de σ_\perp enquanto que na direção z seja da ordem de ω . Definindo um comprimento de onda $\lambda \equiv \omega^{-1}$, precisamos que

$$\lambda^{-1} \gg \sigma_\perp. \quad (2.64)$$

Podemos também definir um tamanho do corte transversal do feixe

$$\ell_\perp = \sigma_\perp^{-1}, \quad (2.65)$$

e também um “comprimento de pulso”

$$\ell_\parallel = \sigma_\parallel^{-1}. \quad (2.66)$$

E, então, devemos ter

$$\lambda \ll \ell_\perp \quad (2.67)$$

Ou seja, um feixe monocromático e colimado deve ter um corte transversal que possua um tamanho muito maior que o comprimento de onda do feixe. Embora a (2.67) se pareça com a condição dos “cachinhos dourados”, esta condição surgiu apenas da necessidade de localizar a onda, ondas que violem a (2.67) ainda podem ser clássicas.

Agora podemos simplificar a dependência temporal na exponencial em (2.63), a delta δ_{σ_\perp} impõe que

$$(\bar{k}^x)^2 + (\bar{k}^y)^2 \lesssim \sigma_\perp^2 = \ell_\perp^{-2}, \quad (2.68)$$

tal que

$$\sqrt{\omega^2 + (\bar{k}^x)^2 + (\bar{k}^y)^2} \lesssim \sqrt{\omega^2 + \ell_\perp^{-2}} \simeq \omega + \mathcal{O}(\ell^{-2}\omega^{-2}) \simeq \omega. \quad (2.69)$$

Então, o campo da onda, nesta aproximação assume a forma de

$$\begin{aligned} A_{cl}^\mu(x) &= \sqrt{2}A_\odot Re \left\{ e^{-it(\omega-z)} \int d^2\bar{k}_\perp \varepsilon_\odot^{\mu*}(\bar{k}) \delta_{\sigma_\perp}(\bar{k}^x) \delta_{\sigma_\perp}(\bar{k}^y) e^{i\bar{k}^x x} e^{i\bar{k}^y y} \right\} \\ &= \sqrt{2}A_\odot Re \left\{ e^{-it(\omega-z)} \varepsilon_\odot^{\mu*}(\bar{k}_\odot) \int d^2\bar{k}_\perp \delta_{\sigma_\perp}(\bar{k}^x) \delta_{\sigma_\perp}(\bar{k}^y) e^{i\bar{k}^x x} e^{i\bar{k}^y y} \right\}, \end{aligned} \quad (2.70)$$

em que trocamos $\varepsilon_\odot^{\mu*}(\bar{k})$ por $\varepsilon_\odot^{\mu*}(\bar{k}_\odot)$ devido ao fato das componentes transversais de \bar{k} serem pequenas. Usando que

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\bar{q} e^{i\bar{q}\cdot x} \delta_\sigma(\bar{q}) = e^{-\frac{x^2\sigma^2}{4}}, \quad (2.71)$$

temos que

$$A_{cl}^\mu(x) = \sqrt{2}A_\odot Re \left\{ e^{-i\omega(t-z)} \varepsilon_\odot^{\mu*}(\bar{k}_\odot) e^{-\frac{x^2+y^2}{4\ell_\perp^2}} \right\}, \quad (2.72)$$

que é uma onda circularmente polarizada se propagando ao longo do eixo z com um tamanho finito no plano $x-y$.

2.7 Estado incidente

Devemos ter, no limite clássico, que o comprimento de onda Compton ℓ_c seja pequeno em relação às escalas do problema. No entanto, não há necessidade de que o comprimento de onda de ondas não massivas seja pequena. Pelo contrário, ondas clássicas de comprimento de onda finito são fenômenos comuns e presentes em muitos livros-texto de física clássica. No espalhamento de duas partículas tínhamos a necessidade de que a proximidade das partículas não fosse pequena o bastante, ao ponto de que os efeitos quânticos fossem relevantes. Já no caso do espalhamento entre uma onda e uma partícula, vamos apenas exigir que seu comprimento de onda λ seja muito maior que ℓ_c . Nessa situação, os mensageiros que compõem a onda são alheios aos pormenores quânticos da partícula. Para que a aproximação de partícula pontual seja válida, também é necessário que λ seja muito maior que ℓ_w do pacote de onda da partícula. Ou seja

$$\ell_c \ll \ell_w \ll \lambda. \quad (2.73)$$

A princípio não há restrições ao parâmetro de impacto b . O processo de espalhamento entre a onda e partícula também introduz uma outra escala de comprimento relevante, o comprimento de espalhamento ℓ_s , dado em função da troca de momento característica da interação, lembrando

$$\ell_s = \frac{1}{\sqrt{|\vec{q}^2|}}. \quad (2.74)$$

O valor de ℓ_s depende dos detalhes do processo de espalhamento. No caso em que duas partículas pontuais se espalham, por exemplo, encontra-se que $\ell_c \sim b$. Para uma onda e uma partícula interagindo, isso não é necessariamente verdade. Por exemplo, num espalhamento no canal s é mais sensato esperar que ℓ_s seja caracterizado pelos propagadores intermediários do tipo $s^2 - m^2$. De modo a quantificar, tomemos o momento da partícula incidente como sendo $p_1 = m_1 u_1$ e a onda incidente tendo número de onda característico \bar{k}_\odot , então $s - m_1^2 = 2\hbar \bar{k}_\odot \cdot p_1$ e o comprimento de espalhamento será

$$\ell_s \sim \frac{1}{\bar{k}_\odot \cdot u_1}, \quad (2.75)$$

que é simplesmente o comprimento de onda da onda incidente.

Vamos agora construir o estado incidente. Assim como feito antes, a partícula pontual será expressa como uma superposição de ondas planas ponderada com uma função de onda $\phi(p)$. Já a onda será escrita como um estado coerente com helicidade η caracterizado por uma configuração de onda $\alpha(k)$. Usando $|\alpha^\eta\rangle = \mathbb{C}_{\alpha,(\eta)} |0\rangle$, temos uma base para os estados dada por

$$|p_1, \alpha_2^\eta\rangle = |p_1\rangle |\alpha_2^\eta\rangle. \quad (2.76)$$

E com isso o estado inicial fica da forma

$$|\psi_w\rangle = \int d\Phi(p_1) \phi_1(p_1) e^{i b \cdot p_1 / \hbar} |p_1, \alpha_2^\eta\rangle. \quad (2.77)$$

Conforme enunciado antes, este estado também se normaliza por $\langle \psi_w | \psi_w \rangle = 1$. Assim como detalhes a respeito da quadrivelocidade da partícula pontual ficam implícitos na função de onda, detalhes a respeito do momento K_\odot estão implícitos em $\bar{\alpha}(k)$.

Capítulo 3

Observáveis clássicos

Após derivarmos as regras e os observáveis de interesse, vamos nos atentar para a tomada do limite clássico. Precisaremos obedecer todos os requisitos e condições apresentadas nos capítulos anteriores. Vamos tratar que todos os espalhamentos acontecem na região da zona dos cachinhos dourados. Definiremos a notação

$$\left\langle\left\langle f(p_1, p_2, \dots) \right\rangle\right\rangle \equiv \int d\Phi(p_1)d\Phi(p_2) |\phi_1(p_1)|^2 |\phi_2(p_2)|^2 f(p_1, p_2, \dots), \quad (3.1)$$

Dentro dos colchetes angulares, aproximamos $\phi(p+q) \simeq \phi(p)$. Em seguida, confiando em nosso estudo detalhado das funções de onda de momento, podemos simplificar cálculo das integrais e dos valores esperados nos colchetes angulares ao definir $p_i \simeq m_i u_i$. Isso devido a toda discussão feita na seção 1.5.1.

3.1 Partículas massivas

3.1.1 Impulso clássico

Nós já discutimos o impulso e escrevemos este como a soma de dois termos, $\langle \Delta p_1^\mu \rangle = I_{(1)}^\mu + I_{(2)}^\mu$ e posteriormente os expandimos em termos de funções de onda. Vamos analisar o limite clássico destes observáveis usando as regras impostas acima.

Começando pelo primeiro termo, $I_{(1)}^\mu$, que na notação definida em (3.1) fica

$$I_{(1),cl}^\mu = \left\langle\left\langle \int \hat{d}^4 q \hat{\delta}(2p_1 \cdot q + q^2) \Theta(p_1^0 + q^0) \hat{\delta}(2p_2 \cdot q - q^2) \Theta(p_2^0 - q^0) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times e^{-ib \cdot q/\hbar} i q^\mu \mathcal{A}(p_1 p_2 \rightarrow p_1 + q, p_2 - q) \right\rangle\right\rangle. \quad (3.2)$$

Redimensionando q para $\hbar \bar{q}$, ignorando os termos com q^2 e retirando os fatores de g^2 junto dos \hbar 's, podemos obter a contribuição de *leading-order* (LO) para o impulso clássico

$$\Delta p_1^{\mu,(0)} \equiv I_{(1),cl}^{\mu,(0)} = i \frac{g^2}{4} \left\langle\left\langle \hbar^2 \int \hat{d}^4 q \hat{\delta}(\bar{q} \cdot p_1) \hat{\delta}(\bar{q} \cdot p_2) e^{-ib \cdot q/\hbar} \bar{q}^\mu \bar{\mathcal{A}}^{(0)}(p_1 p_2 \rightarrow p_1 + \hbar \bar{q}, p_2 - \hbar \bar{q}) \right\rangle\right\rangle. \quad (3.3)$$

O termo $\bar{\mathcal{A}}^{(L)}$ é a amplitude de L -loop reduzida, *i.e.* a amplitude com os fatores $g/\sqrt{\hbar}$ removidas a cada interação. Em geral, essa amplitude redimensionada numa ordem fixa depende apenas das constantes de acoplamento livres de \hbar . Embora seja independente das potências de \hbar , de forma genérica, ainda assim irá ser dimensionada com uma potência de \hbar devido a dependência dos w_i e q_i . Veremos que fatores adicionais de potências inversas

de \hbar surgirão a partir da amplitude $\bar{\mathcal{A}}$ que cancelarão com o termo \hbar^2 , produzindo um resultado clássico conforme esperado.

Quando tratando apenas do caso de LO, apenas I_{cl}^μ contribui. Porém, no geral, é somente a soma dada por (1.28) que possui um limite clássico bem definido. Assim, escrevemos essa soma como

$$I_{cl}^\mu = i \left\langle\left\langle \hbar^2 \int \hat{d}^4 q \hat{\delta}(2p_1 \cdot q + q^2) \hat{\delta}(2p_2 \cdot q + q^2) \Theta(p_1^0 + q^0) \Theta(p_2^0 - q^0) e^{-ib \cdot q / \hbar} \mathcal{I}^\mu \right\rangle\right\rangle, \quad (3.4)$$

em que \mathcal{I}^μ é o *kernel do impulso*, definido como

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^\mu \equiv & \hbar^2 q^\mu \mathcal{A}(p_1, p_2 \rightarrow p_1 + q, p_2 - q) - i \hbar^2 \sum_X \int \prod_{i=1,2} \hat{d}^4 w_i \hat{\delta}^{(4)}(2p_i \cdot w_i + w_i^2) \Theta(p_i^0 + w_i^0) \times \\ & \times \mathcal{A}(p_1, p_2 \rightarrow p_1 + w_1, p_2 + w_2, r_X) \mathcal{A}^*(p_1 + q, p_2 - q \rightarrow p_1 + w_1, p_2 + w_2, r_X). \end{aligned} \quad (3.5)$$

O fator multiplicando o kernel do impulso em (3.4) e a normalização deste último são escolhidas de modo que impulse kernel seja da ordem $\mathcal{O}(\hbar^0)$ no limite clássico. Em leading-order, somente o primeiro termo em (3.5) vai contribuir e, quando tomado o limite clássico, temos de volta a (3.3). Em *next-to-leading-order* (NLO), os dois termos vão contribuir.

Olhando para a contribuição em NLO, sabemos que, ao tomarmos o limite clássico, podemos desprezar os termos q^2 nas funções delta, redimensionamos $q \rightarrow \hbar \bar{q}$ e retiramos g^4 e os \hbar 's das amplitudes. Podemos também redimensionar $w \rightarrow \hbar \bar{w}$, porém não podemos desprezar os w^2 devido ao fato de termos singulares poderem estar presentes no somatório do kernel do impulso. Com isso temos

$$\Delta p_1^{\mu,(1)} = i \frac{g^4}{4} \left\langle\left\langle \int \hat{d}^4 \bar{q} \hat{\delta}(p_1 \cdot \bar{q}) \hat{\delta}(p_2 \cdot \bar{q}) e^{-ib \cdot \bar{q}} \mathcal{I}_{cl}^{\mu,(1)} \right\rangle\right\rangle, \quad (3.6)$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{cl}^{\mu,(1)} = & \hbar \bar{q}^\mu \bar{\mathcal{A}}^{(1)}(p_1, p_2 \rightarrow p_1 + \hbar \bar{q}, p_2 - \hbar \bar{q}) - \\ & - i \hbar^3 \int \hat{d}^4 \bar{w} \hat{\delta}(2p_1 \cdot \bar{w} + \hbar \bar{w}^2) \hat{\delta}(2p_2 \cdot \bar{w} - \hbar \bar{w}^2) \bar{w}^\mu \times \\ & \times \bar{\mathcal{A}}^{(0)}(p_1, p_2 \rightarrow p_1 + \hbar \bar{w}, p_1 + \hbar \bar{w}, p_2 - \hbar \bar{w}) \times \\ & \times \bar{\mathcal{A}}^{(0)*}(p_1 + \hbar \bar{q}, p_2 - \hbar \bar{q} \rightarrow p_1 + \hbar \bar{w}, p_2 - \hbar \bar{w}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

3.1.2 Radiação clássica

Para conseguir o limite clássico do momento radiado escrevemos a (3.32)

$$\begin{aligned} R^\mu = & \sum_X \int d\Phi(k) \prod_{i=1,2} d\Phi(r_i) d\Phi(p_i) \hat{d}^4 q \phi_1(p_1) \phi_2(p_2) \phi_1^*(p_1 + q) \phi_2^*(p_2 - q) \times \\ & \times \hat{\delta}(2p_1 \cdot q + q^2) \hat{\delta}(2p_1 \cdot q - q^2) \Theta(p_1^0 + q^0) \Theta(p_2^0 - q^0) \times \\ & \times k_X^\mu e^{ib \cdot q / \hbar} \hat{\delta}^{(4)}(p_1 + p_2 - r_1 - r_2 - k - r_X) \\ & \times \mathcal{A}(p_1, p_2 \rightarrow r_1, r_2, k, r_X) \times \\ & \times \mathcal{A}^*(p_1 + q, p_2 - q \rightarrow r_1, r_2, k, r_X), \end{aligned} \quad (3.8)$$

na forma definida em (3.1)

$$\begin{aligned}
 R_{cl}^\mu = \sum_X \left\langle\left\langle \int d\Phi(k) \prod_{i=1,2} \hat{d}^4 w_i \hat{d}^4 q \hat{\delta}(2p_i \cdot w_i + w_i^2) \Theta(p_i^0 + w_i^0) \times \right. \right. \\
 \times \hat{\delta}(2p_1 \cdot q + q^2) \hat{\delta}(2p_2 \cdot q - q^2) \Theta(p_1^0 + q^0) \Theta(p_2^0 - q^0) \times \\
 \times k_X^\mu e^{ib \cdot q/\hbar} \hat{\delta}^{(4)}(w_1 + w_2 k + r_X) \\
 \times \mathcal{A}(p_1, p_2 \rightarrow p_1 + w_1, p_2 + w_2, k, r_X) \times \\
 \left. \left. \times \mathcal{A}^*(p_1 + q, p_2 - q \rightarrow p_1 + w_1, p_2 + w_2, k, r_X) \right\rangle\right\rangle \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

em que k_X^μ é a soma dos mensageiros de momento k^μ e dos momentos dos outros mensageiros em X . Prosseguimos como antes, redimensionando $q \rightarrow \hbar \bar{q}$, desprezando os q^2 dentro das delta on-shell. Removemos um fator de g^6 e os \hbar 's da amplitude e de seu conjugado. Redimensionamos também $w \rightarrow \hbar \bar{w}$ e $k \rightarrow \hbar \bar{k}$. Em LO, com $X = \emptyset$, não há nenhum somatório e, portanto podemos negligenciar os w^2 , ficando com

$$\begin{aligned}
 R_{cl}^{\mu,(0)} = g^6 \left\langle\left\langle \hbar^4 \int d\Phi(\bar{k}) \prod_{i=1,2} \hat{d}^4 \bar{w}_i \hat{d}^4 \bar{q} \hat{\delta}(2p_i \cdot \bar{w}_i) \hat{\delta}(2p_1 \cdot \bar{q}) \hat{\delta}(2p_2 \cdot \bar{q}) \times \right. \right. \\
 \times k_X^\mu e^{ib \cdot \bar{q}} \hat{\delta}^{(4)}(\bar{w}_1 + \bar{w}_2 \bar{k}) \\
 \times \bar{\mathcal{A}}^{(0)}(p_1, p_2 \rightarrow p_1 + \hbar \bar{w}_1, p_2 + \hbar \bar{w}_2, \hbar \bar{k}) \times \\
 \left. \left. \times \bar{\mathcal{A}}^{(0)*}(p_1 + \hbar \bar{q}, p_2 - \hbar \bar{q} \rightarrow p_1 + \hbar \bar{w}_1, p_2 + \hbar \bar{w}_2, \hbar \bar{k}) \right\rangle\right\rangle \quad (3.10)
 \end{aligned}$$

O problema dessa última expressão é que não podemos escrevê-la como um quadrado perfeito como a (2.8), porém podemos escrever a (3.9) como

$$\begin{aligned}
 R_{cl}^\mu = \sum_X \prod_{i=1,2} \int d\Phi(p_i) |\phi_i(p_i)|^2 \int d\Phi(k) d\Phi(w_i + p_i) d\Phi(q_i + p_i) \times \\
 \times \hat{\delta}^{(4)}(w_1 + w_2 + k + r_X) \hat{\delta}^{(4)}(q_1 + q_2) k_X^\mu e^{ib \cdot q_1/\hbar} \times \\
 \times \mathcal{A}(p_1, p_2 \rightarrow p_1 + w_1, p_2 + w_2, k, r_X) \times \\
 \times \mathcal{A}^*(p_1 + q_1, p_2 + q_2 \rightarrow p_1 + w_1, p_2 + w_2, k, r_X), \quad (3.11)
 \end{aligned}$$

e em seguida fazemos uma mudança de variáveis tal que

$$\tilde{p}_i = p_i - \tilde{w}_i \quad (3.12)$$

$$\tilde{q}_i = q_i + \tilde{w}_i \quad (3.13)$$

$$\tilde{w}_i = -w_i, \quad (3.14)$$

tal que, mudando de p_i para \tilde{p}_i , q_i para \tilde{q}_i e w_i para \tilde{w}_i , a (3.11) fica

$$\begin{aligned}
 R_{cl}^\mu = \sum_X \prod_{i=1,2} \int d\Phi(\tilde{p}_i) d\Phi(k) d\Phi(\tilde{p}_i + \tilde{w}_i) d\Phi(\tilde{p}_i + \tilde{q}_i) |\phi_i(\tilde{p}_i + \tilde{w}_i)|^2 e^{-ib \cdot (\tilde{q}_1 - \tilde{w}_1)/\hbar} k_X^\mu \times \\
 \times \hat{\delta}^{(4)}(\tilde{w}_1 + \tilde{w}_2 - k - r_x) \hat{\delta}^{(4)}(\tilde{q}_1 + \tilde{q}_2 - k - r_x) \times \\
 \times \mathcal{A}(\tilde{p}_1 + \tilde{w}_1, \tilde{p}_2 + \tilde{w}_2 \rightarrow \tilde{p}_1, \tilde{p}_2, k, r_X) \times \\
 \times \mathcal{A}^*(\tilde{p}_1 + \tilde{q}_1, \tilde{p}_2 + \tilde{q}_2 \rightarrow \tilde{p}_1, \tilde{p}_2, k, r_X). \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

Como os \tilde{w}_i carregam um fator de \hbar podemos ignorar a translação na função de onda, assim como fizemos para o q . Podemos agora tirar os tís e associando as integrais em w_i com \mathcal{A} e as integrais em q_i com \mathcal{A}^* recuperamos o quadrado de antes

$$\begin{aligned}
 R_{cl}^\mu &= \sum_X \prod_{i=1,2} \int d\Phi(p_i) |\phi_i(p_i)|^2 \int d\Phi(k) k_X^\mu \times \\
 &\quad \times \left| \int d\Phi(w_i + p_i) \hat{\delta}^{(4)}(w_1 + w_2 - k - r_x) \times \right. \\
 &\quad \left. \times e^{-ib \cdot w_1/\hbar} \mathcal{A}(p_1 + w_1, p_2 + w_2 \rightarrow p_1, p_2, k, r_x) \right|^2 \\
 &= \sum_X \prod_{i=1,2} \left\langle \left\langle \int d\Phi(k) k_X^\mu \left| \int d\Phi(w_i + p_i) \hat{\delta}^{(4)}(w_1 + w_2 - k - r_x) \times \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. \times e^{-ib \cdot w_1/\hbar} \mathcal{A}(p_1 + w_1, p_2 + w_2 \rightarrow p_1, p_2, k, r_x) \right|^2 \right\rangle \right\rangle. \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

Essa estrutura de quadrado perfeito permite definir um *kernel de radiação*

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}(k, r_x) &\equiv \hbar^{3/2} \prod_{i=1,2} \int d\Phi(k) k_X^\mu \int d\Phi(w_i + p_i) \hat{\delta}^{(4)}(w_1 + w_2 - k - r_x) \times \\
 &\quad \times e^{-ib \cdot w_1/\hbar} \mathcal{A}(p_1 + w_1, p_2 + w_2 \rightarrow p_1, p_2, k, r_x) \\
 &= \hbar^{3/2} \prod_{i=1,2} \int \hat{d}^4(w_i) \hat{\delta}(2p_1 \cdot w_i + w_i^2) \Theta(p_i^0 + w_i^0) \hat{\delta}^{(4)}(w_1 + w_2 - k - r_x) \times \\
 &\quad \times e^{-ib \cdot w_1/\hbar} \mathcal{A}(p_1 + w_1, p_2 + w_2 \rightarrow p_1, p_2, k, r_x), \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

de modo que

$$R_{cl}^\mu = \sum_X \hbar^{-3} \left\langle \left\langle \int d\Phi(k) k_X^\mu |\mathcal{R}(k, r_x)|^2 \right\rangle \right\rangle. \quad (3.18)$$

Novamente, vamos escolher as normalizações de modo a deixar o limite clássico do kernel de radiação da ordem de $\mathcal{O}(\hbar^0)$. Focando na contribuição de LO, com $X = \emptyset$, fazemos os mesmos procedimentos de antes. Redimensionar $w \rightarrow \hbar \bar{w}$, desprezar os w^2 , remover um fator g^6 com os \hbar 's da amplitude e seu conjugado. Podemos, assim, expressar o termo de LO do kernel de radiação como

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}^{(0)} &\equiv \hbar^2 \prod_{i=1,2} \int \hat{d}^4 \bar{w}_i \hat{\delta}(2p - i \cdot \bar{w}_i) \hat{\delta}^{(4)}(\bar{w}_1 + \bar{w}_2 - \bar{k}) e^{ib \cdot \bar{w}_1} \times \\
 &\quad \times \bar{\mathcal{A}}^{(0)}(p_1 + \hbar \bar{w}_1, p_2 + \hbar \bar{w}_2 \rightarrow p_1, p_2, \hbar \bar{k}), \quad (3.19)
 \end{aligned}$$

de forma que o momento irradiado em leading-order é dado por

$$R_{cl}^{\mu,(0)} = g^6 \left\langle \left\langle \int d\Phi(\bar{k}) \bar{k}^\mu |\mathcal{R}^{(0)}(\bar{k})|^2 \right\rangle \right\rangle. \quad (3.20)$$

3.1.3 Conservação de momento

Conforme vimos, o formalismo é consistente com a conservação de momento em todas as ordens. Em LO e NLO não problema algum pois

$$\Delta p_1^{\mu,(0)} + \Delta p_2^{\mu,(0)} = 0 \quad \text{e} \quad \Delta p_1^{\mu,(1)} + \Delta p_2^{\mu,(1)} = 0. \quad (3.21)$$

Usando a (3.3), podemos escrever o impulso, em LO, para a partícula 2 como

$$\begin{aligned} \Delta p_2^{\mu,(0)} &= i \frac{g^2}{4} \left\langle\left\langle \hbar^2 \int \hat{d}^4 \bar{q}_1 \hat{d}^4 \bar{q}_2 \hat{d}^4 \bar{q}_2 \hat{\delta}(\bar{q}_1 \cdot p_1) \hat{\delta}(\bar{q}_1 \cdot p_2) \hat{\delta}^{(4)}(\bar{q}_1 + \bar{q}_2) \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times e^{-ib \cdot \bar{q}_1} \bar{q}_2^\mu \bar{\mathcal{A}}(p_1, p_2 \rightarrow p_1 + \hbar \bar{q}_1, p_2 + \hbar \bar{q}_2), \right. \right. \end{aligned} \quad (3.22)$$

usando a $\hat{\delta}^{(4)}(\bar{q}_1 + \bar{q}_2)$ temos claramente $\Delta p_2^{\mu,(0)} = -\Delta p_1^{\mu,(0)}$. O mesmo pode ser feito para o impulso em NLO

$$\Delta p_2^{\mu,(1)} = i \frac{g^4}{4} \left\langle\left\langle \int \hat{d}^4 \bar{q}_1 \hat{d}^4 \bar{q}_2 \hat{\delta}(p_1 \cdot \bar{q}_1) \hat{\delta}(p_2 \cdot \bar{q}_2) e^{-ib \cdot \bar{q}_1} \hat{\delta}^{(4)}(\bar{q}_1 + \bar{q}_2) \mathcal{I}_{cl}^{\mu,(1)} \right. \right\rangle\right\rangle, \quad (3.23)$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{cl}^{\mu,(2)} &= \hbar \bar{q}_2^\mu \bar{\mathcal{A}}^{(1)}(p_1, p_2 \rightarrow p_1 + \hbar \bar{q}_1, p_2 + \hbar \bar{q}_2) - \\ &\quad - i \hbar^3 \int \prod_{i=1,2} \hat{d}^4 \bar{w}_i \hat{\delta}(2p_i \cdot \bar{w}_i + \hbar \bar{w}_i^2) \bar{w}^\mu \times \\ &\quad \times \bar{\mathcal{A}}^{(0)}(p_1, p_2 \rightarrow p_1 + \hbar \bar{w}_1, p_2 + \hbar \bar{w}_2) \times \\ &\quad \times \bar{\mathcal{A}}^{(0)*}(p_1 + \hbar \bar{q}_1, p_2 + \hbar \bar{q}_2 \rightarrow p_1 + \hbar \bar{w}_1, p_2 + \hbar \bar{w}_2), \end{aligned} \quad (3.24)$$

que novamente nos dá $\Delta p_2^{\mu,(1)} = -\Delta p_1^{\mu,(1)}$. O espalhamento é conservativo em LO e NLO, porém em *next-to-next-to-leading-order* (NNLO) temos que considerar efeitos radiativos, que são descritos por $I_{(2)}^\mu$. Vamos nos restringir ao caso mais simples, tomando o estado X como sendo apenas um mensageiro. Assim, ficamos com

$$\begin{aligned} I_{(2)}^\mu &= \sum_X \int \prod_{i=1,2} d\Phi(p_i) \hat{d}^4 w_i \hat{d}^4 q_1 \hat{d}^4 q_2 \hat{\delta}(2p_i \cdot w_i + w_i^2) \Theta(p_i^0 - w_i^0) \hat{\delta}(2p_1 \cdot q + q^2) \Theta(p_1^0 + q^0) \times \\ &\quad \times \hat{\delta}(2p_2 \cdot q - q^2) \Theta(p_2^0 - q^0) \phi_1(p_1) \phi_2(p_2) \phi_1^*(p_1 + q) \phi_2^*(p_2 - q) \times \\ &\quad \times e^{ib \cdot q/\hbar} w_1^\mu \hat{\delta}^{(4)}(w_1 + w_2 + k) \mathcal{A}(p_1, p_2 \rightarrow p_1 + w_1, p_2 + w_2, k) \\ &\quad \times \mathcal{A}^*(p_1 + q, p_2 - q \rightarrow p_1 + w_1, p_2 + w_2, k), \end{aligned} \quad (3.25)$$

que retirando g^6 , \hbar , ignorando os q^2 e redimensionando os termos, temos a contraparte clássica

$$\begin{aligned} I_{(2),cl}^{\mu,(rad)} &= g^6 \left\langle\left\langle \hbar^4 \int d\Phi(\bar{k}) \prod_{i=1,2} \hat{d}^4 \bar{w}_i \hat{d}^4 \bar{q}_i \hat{d}^4 \bar{q}_1 \hat{d}^4 \bar{q}_2 \hat{\delta}(2p_i \cdot \bar{w}_i) \hat{\delta}(2p_1 \cdot \bar{q}_1) \hat{\delta}(2p_2 \cdot \bar{q}_2) \times \right. \right. \\ &\quad \times e^{-ib \cdot \bar{q}_1} \bar{w}_1^\mu \hat{\delta}^{(4)}(\bar{w}_1 + \bar{w}_2 + \bar{k}) \hat{\delta}^{(4)}(\bar{q}_1 + \bar{q}_2) \times \\ &\quad \times \bar{\mathcal{A}}^{(0)}(p_1, p_2 \rightarrow p_1 + \hbar \bar{w}_1, p_2 + \hbar \bar{w}_2, \hbar \bar{k}) \times \\ &\quad \left. \left. \times \bar{\mathcal{A}}^{(0)*}(p_1 + \hbar \bar{q}_1, p_2 + \hbar \bar{q}_2 \rightarrow p_1 + \hbar \bar{w}_1, p_2 + \hbar \bar{w}_2, \hbar \bar{k}), \right. \right. \end{aligned} \quad (3.26)$$

O que de fato balanceia o momento irradiado de (3.10), pois o fator de k^μ desta se cancela com o \bar{w}_1^μ de (3.26) e \bar{w}_2^μ da expressão equivalente pra partícula 2.

3.2 Partículas não massivas

Agora nos voltamos para o caso não massivo. Uma vez compreendido que estados coerente podem ser vistos como ondas compostas por mensageiros não-massivos e que o

limite clássico surge a partir de um alto número de ocupação, vamos agora considerar o espalhamento de uma onda mensageira e uma partícula pontual escalar.

Vamos nos ater a observáveis globais, obtidos ao se rodear o evento com uma esfera de detectores. Tais detectores registram a variação total de momento de uma partícula, ou da onda, durante o espalhamento

3.2.1 Impulso clássico

Sabemos que podemos escrever o impulso como

$$\langle \Delta p_1^\mu \rangle = \langle \psi_w | i [\mathbb{P}_1^\mu, T] | \psi_w \rangle + \langle \psi_w | T^\dagger [\mathbb{P}_1^\mu, T] | \psi_w \rangle = I_{w(1)}^\mu + I_{w(2)}^\mu. \quad (3.27)$$

Assim como no caso massivo, em LO somente $I_{w(1)}^\mu$ contribui e esta aparece em $\mathcal{O}(g^2)$. O termo $I_{w(2)}^\mu$ contribui apenas em $\mathcal{O}(g^4)$. Podemos escrever $I_{w(1)}^\mu$ como

$$I_{w(1)}^\mu = \int d\Phi(p_1) d\Phi(p'_1) e^{-i \frac{b \cdot (p_1 - p'_1)}{\hbar}} \phi_1(p_1) \phi_1^*(p'_1) i(p_1 - p'_1)^\mu \langle p'_1 \alpha_2^\eta | T | p_1 \alpha_2^\eta \rangle. \quad (3.28)$$

Se introduzirmos um conjunto completo de estados definidos temos

$$\begin{aligned} I_{w(1)}^\mu &= \sum_{X, X'} \sum_{\zeta, \zeta' = \pm} \int d\Phi(p_1) d\Phi(p'_1) d\Phi(r_1) d\Phi(r'_1) d\Phi(k_2) d\Phi(k'_2) \times \\ &\quad \times e^{-i \frac{b \cdot (p_1 - p'_1)}{\hbar}} \phi_1(p_1) \phi_1^*(p'_1) i(p_1 - p'_1)^\mu \times \\ &\quad \times \langle p'_1 \alpha_2^\eta | r'_1 k_2^{\zeta'} X' \rangle \langle r'_1 k_2^{\zeta'} X' | T | r_1 k_2^\zeta X \rangle \langle r_1 k_2^\zeta X | p_1 \alpha_2^\eta \rangle. \end{aligned} \quad (3.29)$$

As somas em X e X' são sobre os mensageiros (inclusive nenhum) e também as integrais no espaço de fase de seus momentos.

Em LO, $X = X' = \emptyset$ não é a contribuição mais simples, pois esta exclui partes desconexas da matriz S . Na situação que estamos interessados, muitos fótons do estado inicial vão diretamente ao estado final. Devemos, então somar sobre mensageiros adicionais nos estados coerentes. Essa soma de mensageiros não interagentes é necessária para obter a normalização correta.

Para evitar longas contas, vamos introduzir uma maneira alternativa de se representar a matriz T , em função dos operadores de criação e aniquilação que atuam nos estados coerentes

$$T = \sum_{\tilde{\eta}, \tilde{\eta}'} \int d\Phi(\tilde{r}_1, \tilde{r}'_1, \tilde{k}_2, \tilde{k}'_2) \langle \tilde{r}'_1 \tilde{k}_2^{\tilde{\eta}'} | T | \tilde{r}_1 \tilde{k}_2^{\tilde{\eta}} \rangle a_{(\tilde{\eta}')}^\dagger(\tilde{k}'_2) a^\dagger(\tilde{r}'_1) a(\tilde{r}_1) a_{(\tilde{\eta})}(\tilde{k}_2) + \dots, \quad (3.30)$$

as reticências indicam ordem superiores que não contribuem no limite clássico. Temos que $d\Phi(\tilde{r}_1 \tilde{r}'_1, \tilde{k}_2, \tilde{k}'_2) = d\Phi(\tilde{r}_1) d\Phi(\tilde{r}'_1) d\Phi(\tilde{k}_2) d\Phi(\tilde{k}'_2)$.

Com isso, podemos calcular

$$\begin{aligned} \langle p'_1 \alpha_2^\eta | T | p_1 \alpha_2^\eta \rangle &= \langle p'_1 \alpha_2^\eta | a_{(\tilde{\eta}')}^\dagger(\tilde{k}'_2) a_{(\tilde{\eta}')}^\dagger(\tilde{r}'_1) a(\tilde{r}'_1) a(\tilde{k}'_2)_{(\tilde{\eta}')} | p_1 \alpha_2^\eta \rangle \langle \tilde{r}'_1 \tilde{k}_2^{\tilde{\eta}'} | T | \tilde{r}_1 \tilde{k}_2^{\tilde{\eta}} \rangle \\ &= \hat{\delta}_\Phi(\tilde{r}_1 - p_1) \hat{\delta}_\Phi(\tilde{r}'_1 - p'_1) \delta_{\tilde{\eta}, \eta} \delta_{\tilde{\eta}', \eta} a_2(\tilde{k}_2) a_2^*(\tilde{k}'_2) \langle \tilde{r}'_1 \tilde{k}_2^{\tilde{\eta}'} | T | \tilde{r}_1 \tilde{k}_2^{\tilde{\eta}} \rangle, \end{aligned} \quad (3.31)$$

já desconsiderando os termos de ordem superior. O elemento de matriz restante nos dá a amplitude desejada

$$\langle \tilde{r}'_1 \tilde{k}_2^{\tilde{\eta}'} | T | \tilde{r}_1 \tilde{k}_2^{\tilde{\eta}} \rangle = \mathcal{A}(\tilde{r}_1 \tilde{k}_2^{\tilde{\eta}} \rightarrow \tilde{r}'_1 \tilde{k}_2^{\tilde{\eta}'}) \hat{\delta}^4(\tilde{r}_1 + \tilde{k}_2 - \tilde{r}'_1 - \tilde{k}'_2). \quad (3.32)$$

Usando os resultados (3.32) e (3.31) em (3.28) temos

$$I_{w(1)}^\mu = \int d\Phi(p_1)d\Phi(p'_1)d\Phi(k_2)d\Phi(k'_2)\phi(p_1)\phi^*(p'_1)\alpha_2(k_2)\alpha_2^*(k'_2) \times \\ \times e^{-i\frac{b(p'_1-p_1)}{\hbar}}i(p'_1-p_1)^\mu \mathcal{A}(r_1k_2^\eta \rightarrow r'_1k_2'^\eta)\hat{\delta}^4(r_1+k_2-r'_1-k'_2). \quad (3.33)$$

Fazendo a tradicional troca de variáveis

$$\begin{aligned} q_1 &= p'_1 - p_1 \\ q_1 &= k'_2 - k_2, \end{aligned} \quad (3.34)$$

e usando a função delta para integrar em q_2 , temos

$$I_{w(1)}^\mu = \int d\Phi(p_1)d\Phi(k_2)d^4q\hat{\delta}(2q \cdot k - q^2)\Theta(p_1^0 + q^0)\Theta(k_2^0 - q^0) \times \\ \times e^{-i\frac{b(p'_1-p_1)}{\hbar}}iq^\mu\phi(p_1)\phi^*(p_1+q)\alpha_2(k_2)\alpha_2^*(k_2-q) \times \\ \times \mathcal{A}(p_1k_2^\eta \rightarrow p_1+q, (k_2-q)^\eta). \quad (3.35)$$

O limite clássico é tomado como feito antes, atentando-se apenas para o caso de que agora lidamos com os números de onda, ao invés do momento. Em LO, não precisamos nos preocupar com termos singulares em \hbar , então temos

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(2q \cdot p_1 + q^2) &\sim \hbar^{-1}\hat{\delta}(2\bar{q} \cdot p_1) \\ \hat{\delta}(2q \cdot p_1 + q^2) &\sim \hbar^{-1}\hat{\delta}(2\bar{q} \cdot p_1). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Assim, temos que o limite clássico é dado por

$$I_{w(1)}^{\mu,cl} = g^2 \left\langle\left\langle \int d\Phi(\bar{k}_2)d^4\bar{q}\hat{\delta}(2\bar{q} \cdot p_1)(2\bar{q} \cdot \bar{k}_2 - \bar{q}^2)\Theta(\bar{k}^0 - \bar{q}^0)\bar{\alpha}_2^*(\bar{k}_2 - \bar{q})\bar{\alpha}_2(\bar{k}_2) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times e^{-ib\bar{q}}i\bar{q}^\mu \bar{\mathcal{A}}(p_1, \hbar\bar{k}_2^\eta \rightarrow p_1 + \hbar\bar{q}, \hbar(\bar{k}_2 - \bar{q})^\eta) \right\rangle\right\rangle, \quad (3.37)$$

que representa, classicamente uma função de momento p_1 com um pico em $p_1 = m_1 \cdot u_1$. Agora que foi estabelecido esse resultado geral, podemos usá-lo para analisar uma variedade de situações. A seguir estudaremos dois exemplos em detalhes: o espalhamento de Thomson de uma carga por uma onda eletromagnética, quando o parâmetro de impacto b é aproximadamente zero, e o espalhamento gravitacional da luz por uma massa, dentro do limite da óptica geométrica

Capítulo 4

Exemplos

Para consolidar o formalismo desenvolvido, vamos aplicá-los em alguns exemplos para obtermos alguns resultados explícitos. Trabalhando no contexto da Eletrodinâmica Escalar, uma teoria YM escalar, cuja Lagrangiana é

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \sum_{i=1,2} \left[(D^\mu\Phi_i)^\dagger D^\mu\Phi_i - m_i^2\Phi_i^\dagger\Phi_i \right]. \quad (4.1)$$

As cargas dos campos Φ_i são Q_i ¹ e a constante de acoplamento é e . Fazemos isso, pois usando a cópia dupla, podemos usar os resultados obtidos nesta teoria para a gravitação.

4.1 Impulso em leading order

Começando pelo impulso em *leading order* (LO) $\Delta p_1^{\mu,(0)}$ da partícula 1. Nesta ordem, apenas $I_{(1)}^\mu$ contribui, conforme (3.3) nos diz. Para obtermos esse impulso, precisamos calcular o espalhamento $2 \rightarrow 2$ a nível de árvore. Podemos expressar a amplitude reduzida como:

$$i\bar{\mathcal{A}}^{(0)}(p_1, p_2 \rightarrow p_1 + \hbar\bar{q}, p_2 - \hbar\bar{q}) = \begin{array}{c} p_1 \quad p_1 + \hbar\bar{q} \\ \swarrow \quad \nearrow \\ \text{---} \\ \searrow \quad \swarrow \\ p_2 \quad p_2 - \hbar\bar{q} \end{array} = iQ_1Q_2 \frac{4p_1 \cdot p_2 + \hbar^2\bar{q}^2}{\hbar^2\bar{q}^2}. \quad (4.2)$$

Colocando na expressão de $\Delta p_1^{\mu,(0)}$, temos

$$\Delta p_1^{\mu,(0)} = ie^2Q_1Q_2 \left\langle\left\langle \int \hat{d}^4\bar{q} \hat{\delta}(\bar{q} \cdot p_1) \hat{\delta}(\bar{q} \cdot p_2) e^{-ib\cdot\bar{q}} \bar{q}^2 \frac{p_1 \cdot p_2}{\bar{q}^\mu} \right\rangle\right\rangle. \quad (4.3)$$

Notamos que o impulso em leading order é independente de \hbar , conforme o esperado. Tomando o limite clássico, definido pelos brackets duplos de acordo com o que foi definido anteriormente, ficamos com

$$\Delta p_1^{\mu,(0)} = ie^2Q_1Q_2 \int \hat{d}^4\bar{q} \hat{\delta}(\bar{q} \cdot u_1) \hat{\delta}(\bar{q} \cdot u_2) e^{-ib\cdot\bar{q}} \frac{u_1 \cdot u_2}{\bar{q}^2} \bar{q}^\mu. \quad (4.4)$$

A (4.4) é similar a expressões que surgem do limite de altas energias do espalhamento de dois corpos[76–80, 82, 112].

¹Aqui já identificamos os fatores de cor da (1) como as cargas do eletromagnetismo.

Podemos integrar em \bar{q} e obter o resultado para o impulso em LO. Usando o referencial de repouso para a partícula 1, ou seja $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, e orientando as coordenadas de modo que $u_2 = (\gamma, 0, 0, \gamma\beta)$, em que γ é o tradicional fator de Lorentz e obedece a $\gamma = u_1 \cdot u_2$ e $\gamma^2(1 - \beta^2) = 1$, temos

$$\begin{aligned}\Delta p_1^{\mu,(0)} &= ie^2 Q_1 Q_2 \int d^4 \bar{q} \hat{\delta}(\bar{q}^0) \hat{\delta}(\gamma \bar{q}^0 - \gamma \beta \bar{q}^3) e^{-i\mathbf{b} \cdot \bar{\mathbf{q}}} \frac{\gamma}{\bar{q}^2} \bar{q}^\mu \\ &= \frac{ie^2 Q_1 Q_2}{4\pi |\beta|} \int d^2 \bar{q} e^{i\mathbf{b} \cdot \bar{\mathbf{q}}_\perp} \frac{1}{\mathbf{q}_\perp^2} \bar{q}^\mu,\end{aligned}\quad (4.5)$$

em que $\bar{q}^0 = \bar{q}^3 = 0$ e as componentes não nulas de q^μ no plano xy do sistema de coordenadas são $\bar{\mathbf{q}}_\perp$. Resta agora integrar nessas componentes. Isto pode ser feito mais facilmente usando coordenadas polares, de modo que $q^\mu = (0, r \cos \theta, r \sin \theta, 0)$. Assim, o impulso fica

$$\begin{aligned}\Delta p_1^{\mu,(0)} &= -\frac{ie^2 Q_1 Q_2}{4\pi^2 |\beta|} \int_0^\infty dr r \int_{-\pi}^\pi d\theta e^{i|\mathbf{b}|r \cos \theta} \frac{1}{r^2} (0, r \cos \theta, r \sin \theta, 0) \\ &= -\frac{ie^2 Q_1 Q_2}{4\pi^2 |\beta|} \int_0^\infty dr \int_{-\pi}^\pi d\theta e^{i|\mathbf{b}|r \cos \theta} (0, \cos \theta, \sin \theta, 0) \\ &= \frac{e^2 Q_1 Q_2}{2\pi |\beta|} \int_0^\infty dr J_1(|\mathbf{b}|r) \hat{\mathbf{b}} \\ &= \frac{e^2 Q_1 Q_2}{2\pi |\beta|} \frac{\hat{\mathbf{b}}}{\mathbf{b}}.\end{aligned}\quad (4.6)$$

Em que $\hat{\mathbf{b}}$ é o vetor unitário da direção do parâmetro de impacto.

De modo a restaurar a invariância de Lorentz, fazemos

$$\frac{1}{|\beta|} = \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 - 1}}, \quad \frac{\hat{\mathbf{b}}}{\mathbf{b}} = -\frac{b^\mu}{b^2},\quad (4.7)$$

logo

$$\Delta p_1^{\mu,(0)} = -\frac{e^2 Q_1 Q_2}{2\pi} \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \frac{b^\mu}{b^2}.\quad (4.8)$$

Para compreendermos melhor essa equação, lembremos do espalhamento de Rutherford. No caso de uma partícula leve espelhada por uma mais pesada, como um elétron espalhado por um núcleo atômico. Adotando o referencial em que a partícula pesada está em repouso, o ângulo de espalhamento pode ser expresso por [113]:

$$\theta(b) = 2 \tan^{-1} \left(\frac{Q_1 Q_2 e^2}{4\pi m v^2 b} \right) \simeq \frac{Q_1 Q_2 e^2}{2\pi m v^2 b},\quad (4.9)$$

em que v é a velocidade não relativística da partícula leve. Agora, no regime relativístico, podemos fazer a aproximação $\gamma \simeq 1 + v^2/2$, logo, neste regime, a (4.8) é o ângulo de espalhamento de Rutherford em função do parâmetro de impacto $\theta(b)$.

4.2 Gravitação

Ao invés de calcularmos amplitudes gravitacionais utilizando as regras de Feynman associadas à ação de Einstein-Hilbert, podemos simplesmente aplicar a técnica da cópia

dupla, um outro exemplo pode ser visto em [A](#), cujos equivalentes na teoria de calibre são conhecidos. A generalização das regras de substituição BCJ da teoria de calibre tradicional para estados de matéria massiva é direta [\[114\]](#). Neste caso, a amplitude possui apenas um diagrama no canal t , tornando a identidade de Jacobi trivial. Portanto, ao substituir o fator de cor pelo numerador desejado, garantimos obter uma amplitude gravitacional, desde que substituamos g por κ , com $\kappa = \sqrt{32\pi G}$ sendo o acoplamento na Lagrangiana de Einstein-Hilbert.

Um ajuste a ser feito antes da aplicação da cópia dupla é a uma normalização adicional dos fatores de cor, no EM carga, para $\tilde{Q}_i = \sqrt{2}Q_i$, pois simplifica a substituição dos fatores na cópia dupla. Com isso, a amplitude reduzida é expressa por:

$$\mathcal{A}^{(0)}(p_1, p_2 \rightarrow p_1 + \hbar\bar{q}, p_2 - \hbar\bar{q}) = \frac{e^2}{\hbar^3} \frac{2p_1 \cdot p_2 + \mathcal{O}(\hbar)}{\bar{q}^2} \tilde{Q}_1 \tilde{Q}_2. \quad (4.10)$$

Com isso, fazendo as substituições, a amplitude gravitacional é imediatamente obtida

$$\mathcal{M}^{(0)}(p_1, p_2 \rightarrow p_1 + \hbar\bar{q}, p_2 - \hbar\bar{q}) = \frac{4}{\hbar^3} \left(\frac{\kappa}{2}\right)^2 \frac{(p_1 \cdot p_2)^2 + \mathcal{O}(\hbar)}{\bar{q}^2}. \quad (4.11)$$

Essa não é exatamente a amplitude da RG devido a interferência do campo de dÍlaton, isto pode ser visto ao se analisar os canais de fatorização. Sejam os projetores em d dimensões no calibre de de-Donder do grÁvito e do dÍlaton

$$\mathcal{P}_{\mu\tilde{\mu}\nu\tilde{\nu}} = \eta_{\mu(\nu}\eta_{\tilde{\nu})\tilde{\mu}} - \frac{1}{d-2}\eta_{\mu\tilde{\mu}}\eta_{\nu\tilde{\nu}} \quad (4.12)$$

$$\mathcal{D}_{\mu\tilde{\mu}\nu\tilde{\nu}} = \frac{1}{d-2}\eta_{\mu\tilde{\mu}}\eta_{\nu\tilde{\nu}} \quad (4.13)$$

A amplitude puramente gravitacional é a parte que é contraída com o projetor do grÁvito, retirando assim o traço. Logo, a amplitude fica

$$\mathcal{M}^{(0)}(p_1, p_2 \rightarrow p_1 + \hbar\bar{q}, p_2 - \hbar\bar{q}) = \frac{4}{\hbar^3} \left(\frac{\kappa}{2}\right)^2 \left(\frac{(p_1 \cdot p_2)^2 - \frac{m_1^2 m_2^2}{2}}{\bar{q}^2} \right). \quad (4.14)$$

Agora, seguindo os mesmos passos feitos anteriormente para obter a [\(4.4\)](#), podemos chegar na expressão para o impulso em LO para partículas pontuais massivas e escalares na RG (buracos negros de Schwarzschild por exemplo)

$$\Delta p_1^{\mu,(0)} = 2im_1 m_2 \left(\frac{\kappa}{2}\right)^2 \int d^4\bar{q} \delta(2\bar{q} \cdot u_1) \delta(2\bar{q} \cdot u_2) e^{ib\bar{q}} \frac{2\gamma^2 - 1}{\bar{q}^2} \bar{q}^\mu. \quad (4.15)$$

Por fim, integrando, como feito na [\(4.6\)](#), obtemos

$$\Delta p_1^{\mu,(0)} = \frac{2Gm_1 m_2}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} (2\gamma^2 - 1) \frac{b^\mu}{b^2}, \quad (4.16)$$

que concorda o resultando do impulso gravitacional em 1PM encontrado em [\[26, 27\]](#).

4.3 Next-to-leading order

Em next-to-leading order precisamos de todos os termos de $\langle \Delta p_1^{\mu,(0)} \rangle$, *i.e.* $I_{(1)}^\mu$ e $I_{(2)}^\mu$. Vimos anteriormente que o impulso será um integral sobre um *kernel de impulso* $\mathcal{I}_{cl}^{\mu,(1)}$.

Para determinarmos esse kernel precisamos calcular algumas amplitudes a um loop. Para este exemplo da eletrodinâmica podemos calcular via teoria de perturbação no calibre de Feynman.

As contribuições podem ser divididas em classes de acordo com os fatores de cargas que as acompanham

$$C_1 \propto Q_1^3 Q_2, \quad C_1 \propto Q_1^2 Q_2^2, \quad C_1 \propto Q_1 Q_2^3. \quad (4.17)$$

A classe C_1 pode ser subdividida numa C_{1a} , que possui termos acompanhados de $Q_1(Q_1^2 - n_s Q_3^2)Q_2$ em que temos n_s espécies de um terceiro escalar com carga Q_3 , e em C_{1b} que ficam só os $Q_1^3 Q_2$. Faz-se o mesmo com C_3 gerando $C_{3a} \propto Q_1(Q_1^2 - n_s Q_3^2)Q_2$ e $C_{3b} \propto Q_1 Q_2^3$.

As classes C_{1a} e C_{3a} consistem em correções de auto-energia do fóton e contratermos de renormalização. Estas aparecem apenas nas correções a um loop na amplitude de quatro pontos, no primeiro termo de $\mathcal{I}_{cl}^{\mu,(1)}$, e não contribuem no limite clássico. As classes C_{1b} e C_{3b} são correções de vértice, renormalização de funções de onda e contratermos. Estas também não contribuem no limite clássico.

Restam apenas as contribuições de C_2 que aparecem em todos os termos do kernel de impulso. Essas contribuições a um loop são dadas por

$$i\bar{\mathcal{A}}^{(1)}(p_1, p_2 \rightarrow p'_1, p'_2) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} p_1 & & p_1 + q \\ & \searrow & \nearrow \\ & \text{---} \text{---} \text{---} & \\ & \nearrow & \searrow \\ p_2 & & p_2 - q \end{array} \\ = \\ \begin{array}{cccc} \text{---} \text{---} \text{---} & + & \text{---} \text{---} \text{---} & + & \text{---} \text{---} \text{---} & + & \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \end{array} \quad (4.18)$$

4.3.1 Contribuições puramente quânticas

Vamos olhar as contribuições puramente quânticas, os termos de auto-energia do vértice e do fóton, e contratermos. Seja, por exemplo, a auto-energia do fóton

$$Q_i^2 \Pi(q^2)(q^2 \eta^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \equiv \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \quad (4.19)$$

A contribuição na amplitude de quatro pontos reduzida será

$$\bar{\mathcal{A}} = Q_1 Q_2 Q_i^2 \frac{(2p_1 + \hbar\bar{q}) \cdot (2p_2 - \hbar\bar{q})}{\hbar^2 \bar{q}^2} \Pi(\hbar^2 \bar{q}^2) \quad (4.20)$$

Os contratermos são ajustados de forma a termos $\Pi(0) = 0$, para que a constante de acoplamento e seja identificada com sua contraparte clássica. A condição de renormalização é necessária para eliminar as possíveis contribuições de $\mathcal{O}(\hbar)$. Podemos entender que essa amplitude é puramente uma correção quântica olhando as potências de \hbar . Como $\Pi(\hbar^2 \bar{q}^2)$ será da ordem de \hbar^2 , a amplitude $\bar{\mathcal{A}}$ fica da ordem de \hbar^0 . Isso contribui com $\mathcal{O}(\hbar)$ no kernel do impulso, que por sua vez contribui com $\mathcal{O}(\hbar)$ para o impulso.

4.3.2 Triângulos

Vamos ver agora as contribuições que aparecem no limite clássico. Temos primeiro os diagramas de triângulo

$$iT_{12} = \text{diagram} = -2Q_1^2 Q_2^2 \int \hat{d}^D \ell \frac{(2p_1 + \ell)(2p_1 + q + \ell)}{\ell^2 (\ell - q)^2 (2p_1 \cdot \ell + \ell^2 + i\varepsilon)}. \quad (4.21)$$

No limite clássico, fazemos $q = \hbar \bar{q}$, $\ell = \hbar \bar{\ell}$ e $p_i = m_i \cdot u_i$, de modo q e ℓ são desprezíveis em relação a m . Então, a integral fica

$$T_{12} = \frac{4iQ_1^2 Q_2^2 m_1^2}{\hbar} \int \hat{d}^4 \bar{\ell} \frac{1}{\bar{\ell}^2 (\bar{\ell} - \bar{q})^2 (p_1 \cdot \bar{\ell} + i\varepsilon)}, \quad (4.22)$$

nota-se que aparece um fator de $\frac{1}{\hbar}$, que será cancelado com outro \hbar presente em $\mathcal{I}_{cl}^{\mu, (1)}$. Também fizemos $D \rightarrow 4$, pois agora a integral não tem risco de divergir. Para seguir adiante fazemos o seguinte truque para simplificar a integral

$$p_1 \cdot \bar{q} = -\frac{\hbar \bar{q}^2}{2}, \quad \bar{\ell} \rightarrow \bar{\ell}' = \bar{q} - \bar{\ell}, \quad (4.23)$$

logo

$$\begin{aligned} T_{12} &= -\frac{4iQ_1^2 Q_2^2 m_1^2}{\hbar} \int \hat{d}^4 \bar{\ell}' \frac{1}{\bar{\ell}'^2 (\bar{\ell}' - \bar{q})^2 (p_1 \cdot \bar{\ell}' + \hbar \bar{q}^2 - i\varepsilon)} \\ &= -\frac{4iQ_1^2 Q_2^2 m_1^2}{\hbar} \int \hat{d}^4 \bar{\ell}' \frac{1}{\bar{\ell}'^2 (\bar{\ell}' - \bar{q})^2 (p_1 \cdot \bar{\ell}' - i\varepsilon)} + \mathcal{O}(\hbar^0) \end{aligned} \quad (4.24)$$

Ignorando as correções quânticas, ficamos com

$$T_{12} = -\frac{4iQ_1^2 Q_2^2 m_1^2}{\hbar} \int \hat{d}^4 \bar{\ell}' \frac{1}{\bar{\ell}'^2 (\bar{\ell}' - \bar{q})^2 (p_1 \cdot \bar{\ell}' - i\varepsilon)}. \quad (4.25)$$

Usando

$$\frac{1}{x - i\varepsilon} - \frac{1}{x + i\varepsilon} = i\hat{\delta}(x), \quad (4.26)$$

para simetrizar as (4.22) e (4.25), chegamos em

$$T_{12} = \frac{2Q_1^2 Q_2^2 m_1^2}{\hbar} \int \hat{d}^4 \bar{\ell}' \frac{\hat{\delta}(p_1 \cdot \bar{\ell}')}{\bar{\ell}'^2 (\bar{\ell}' - \bar{q})^2}. \quad (4.27)$$

O outro gráfico pode ser facilmente obtido

$$T_{21} = \frac{2Q_1^2 Q_2^2 m_2^2}{\hbar} \int \hat{d}^4 \bar{\ell}' \frac{\hat{\delta}(p_2 \cdot \bar{\ell}')}{\bar{\ell}'^2 (\bar{\ell}' - \bar{q})^2}. \quad (4.28)$$

Esses dois gráficos contribuem no kernel do impulso com

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{cl}^{\mu,(1)} \Big|_{\Delta, \nabla} &= \hbar \bar{q}^\mu (T_{12} + T_{21}) \\ &= 2Q_1^2 Q_2^2 \bar{q}^\mu \int \hat{d}^4 \bar{\ell} \frac{1}{\bar{\ell}^2 (\bar{\ell} - \bar{q})^2} \left(m_1^2 \hat{\delta}(p_1 \cdot \bar{\ell}) + m_2^2 \hat{\delta}(p_2 \cdot \bar{\ell}) \right) \end{aligned} \quad (4.29)$$

Tomando o limite clássico ficamos com

$$\mathcal{I}_1^\mu = 2Q_1^2 Q_2^2 \bar{q}^\mu \int \hat{d}^4 \bar{\ell} \frac{1}{\bar{\ell}^2 (\bar{\ell} - \bar{q})^2} \left(m_1 \hat{\delta}(u_1 \cdot \bar{\ell}) + m_2 \hat{\delta}(u_2 \cdot \bar{\ell}) \right), \quad (4.30)$$

resta ainda fazer uma integração em \bar{q}

4.3.3 Caixas

A amplitude de um loop também inclui diagramas de caixas e caixas cruzadas, e a contribuição de NLO para o impulso também inclui um termo quadrático na amplitude em nível de árvore, que podemos considerar como o corte a um loop na caixa. Agora calculando as caixas

$$\begin{aligned} iB &= \text{Diagrama de caixa} = Q_1^2 Q_2^2 \int \hat{d}^D \ell \frac{(2p_1 + \ell) \cdot (2p_2 - \ell)(2p_1 + q + \ell)(2p_2 - q - \ell)}{\ell^2 (\ell - q)^2 (2p_1 \cdot \ell + \ell^2 + i\varepsilon)(-2p_1 \cdot \ell + \ell^2 + i\varepsilon)} = \\ &= \frac{Q_1^2 Q_2^2}{\hbar^{2+2\varepsilon}} \int \hat{d}^D \ell \frac{[4p_1 \cdot p_2 - 2\hbar(p_1 - p_2) \cdot (\bar{\ell} + \bar{q}) - \hbar^2(\bar{\ell}^2 + \bar{q})]}{\bar{\ell}^2 (\bar{\ell} - \bar{q})^2 (2p_1 \cdot \bar{\ell} + \ell^2 + i\varepsilon)(-2p_1 \cdot \bar{\ell} + \ell^2 + i\varepsilon)} \times \\ &\quad \times [4p_1 \cdot p_2 - 2\hbar(p_1 - p_2) \cdot \bar{\ell} - \hbar^2 \bar{\ell}^2] \end{aligned} \quad (4.31)$$

Fazendo uma expansão de Laurent em \hbar , truncando após a ordem $\frac{1}{\hbar}$ e separando as diferentes ordens, vemos que a caixa contribui com

$$B = B_{-1} + B_0 \quad (4.32)$$

$$B_{-1} = \frac{4iQ_1^2 Q_2^2}{\hbar^{2+2\varepsilon}} (p_1 \cdot p_2)^2 \int \frac{\hat{d}^D \bar{\ell}}{\bar{\ell}^2 (\bar{\ell} - \bar{q})^2 (p_1 \cdot \bar{\ell} + i\varepsilon)(p_2 \cdot \bar{\ell} - i\varepsilon)} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} B_0 &= -\frac{2iQ_1^2 Q_2^2}{\hbar^{1+2\varepsilon}} p_1 \cdot p_2 \int \frac{\hat{d}^D \bar{\ell}}{\bar{\ell}^2 (\bar{\ell} - \bar{q})^2 (p_1 \cdot \bar{\ell} + i\varepsilon)(p_2 \cdot \bar{\ell} - i\varepsilon)} \times \\ &\quad \times \left[2(p_1 - p_2) \cdot \bar{\ell} + \frac{(p_1 \cdot p_2) \bar{\ell}^2}{p_1 \cdot \bar{\ell} + i\varepsilon} - \frac{(p_1 \cdot p_2) \bar{\ell}^2}{p_2 \cdot \bar{\ell} - i\varepsilon} \right] \end{aligned} \quad (4.34)$$

A integral em B_{-1} não é independente de \hbar , logo, posteriormente será necessário fazer uma outra expansão.

De modo similar, temos o mesmo para a caixa cruzada

$$\begin{aligned}
 iC &= \text{Diagrama de caixa cruzada com momentos } p_1, p_1+q, p_2, p_2-q \text{ e } p_1+\ell, p_1+\ell+q. \\
 &= Q_1^2 Q_2^2 \int \hat{d}^D \ell \frac{(2p_1 + \ell) \cdot (2p_2 - 2q + \ell)(2p_1 + 2q + \ell) \cdot (2p_2 - q + \ell)}{\ell^2(\ell - q)^2(2p_1 \cdot \ell + \ell^2 + i\varepsilon)(2p_2 \cdot (\ell - q) + (\ell - q)^2 + i\varepsilon)} \\
 &= \frac{Q_1^2 Q_2^2}{\hbar^{2+2\varepsilon}} \int \hat{d}^D \ell \frac{(2p_1 + \hbar\bar{\ell}) \cdot (2p_2 - 2\hbar\bar{q} + \hbar\bar{\ell})(2p_1 + 2\hbar\bar{q} + \hbar\bar{\ell}) \cdot (2p_2 - \bar{q} + \hbar\bar{\ell})}{\hbar\bar{\ell}^2(\hbar\bar{\ell} - \bar{q})^2(2p_1 \cdot \hbar\bar{\ell} + \hbar\bar{\ell}^2 + i\varepsilon)(2p_2 \cdot (\hbar\bar{\ell} - \bar{q}) + (\hbar\bar{\ell} - \bar{q})^2 + i\varepsilon)} \quad (4.35)
 \end{aligned}$$

Podemos usar as condições de on-shell para simplificar os $p_i \cdot \bar{q}$ e depois expandir em potências de \hbar , truncando após $\frac{1}{\hbar}$ e separando as diferentes ordens em \hbar , temos

$$C = C_{-1} + C_0 \quad (4.36)$$

$$C_{-1} = -\frac{4Q_1^2 Q_2^2}{\hbar^{2+2\varepsilon}} (p_1 p_2)^2 \int \frac{\hat{d}^D \ell}{\bar{\ell}^2(\bar{\ell} - \bar{q})^2(p_1 \cdot \bar{\ell} + i\varepsilon)(p_2 \cdot \bar{\ell} + i\varepsilon)} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned}
 C_0 &= -\frac{2Q_1^2 Q_2^2}{\hbar^{1+2\varepsilon}} p_1 \cdot p_2 \int \frac{\hat{d}^D \ell}{\bar{\ell}^2(\bar{\ell} - \bar{q})^2(p_1 \cdot \bar{\ell} + i\varepsilon)(p_2 \cdot \bar{\ell} + i\varepsilon)} \times \\
 &\quad \times \left[2(p_1 + p_2) \cdot \bar{\ell} - \frac{(p_1 \cdot p_2)\bar{\ell}^2}{p_1 \cdot \bar{\ell} + i\varepsilon} - \frac{(p_1 \cdot p_2)[(\bar{\ell} - \bar{q})^2 - \bar{q}^2]}{p_2 \cdot \bar{\ell} + i\varepsilon} \right] \quad (4.38)
 \end{aligned}$$

4.3.4 Corte da caixa

Para que possamos ver como os termos singulares se cancelam, precisamos colocar no kernel de impulso termos quadráticos nas amplitudes de árvore. Essa contribuição pode ser vista como um corte na caixa a um loop, com um peso do momento de loop

$$\mathcal{B}^\mu = -i\hbar \int \hat{d}^4 \bar{w} \bar{w}^\mu \hat{\delta}(2p_1 \cdot \bar{w} + \hbar\bar{w}^2) \hat{\delta}(2p_2 \cdot \bar{w} - \hbar\bar{w}^2) \times \text{Diagrama de caixa com corte e momento de loop } \bar{w}^\mu. \quad (4.39)$$

Calculando o diagrama, temos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}^\mu &= -i\frac{Q_1^2 Q_2^2}{\hbar^2} \int \hat{d}\bar{w} \hat{\delta}(2p_1 \cdot \bar{w} + \hbar\bar{w}^2) (2p_2 \cdot \bar{w} - \hbar\bar{w}^2) \frac{\bar{w}^\mu}{\bar{w}^2(\bar{w} - \bar{q})^2} \times \\
 &\quad \times (2p_1 + \hbar\bar{w}) \cdot (2p_2 - \hbar\bar{w})(2p_1 + \hbar\bar{q} + \hbar\bar{w}) \cdot (2p_2 - \hbar\bar{q} - \hbar\bar{w}). \quad (4.40)
 \end{aligned}$$

Fazendo como antes, temos

$$\mathcal{B}^\mu = \mathcal{B}_{-1}^\mu + \mathcal{B}_0^\mu \quad (4.41)$$

$$\mathcal{B}_{-1}^\mu = -\frac{4iQ_1^2 Q_2^2}{\hbar^2} (p_1 \cdot p_2)^2 \int \frac{\hat{d}^4 \bar{\ell} \bar{\ell}^\mu}{\bar{\ell}^2(\bar{\ell} - \bar{q})^2} \hat{\delta}(p_1 \cdot \bar{\ell}) \hat{\delta}(p_2 \cdot \bar{\ell}) \quad (4.42)$$

$$\mathcal{B}_0^\mu = -\frac{2iQ_1^2 Q_2^2}{\hbar} (p_1 \cdot p_2)^2 \int \frac{\hat{d}^4 \bar{\ell} \bar{\ell}^\mu}{\bar{\ell}^2(\bar{\ell} - \bar{q})^2} \left[\hat{\delta}'(p_1 \cdot \bar{\ell}) \hat{\delta}(p_2 \cdot \bar{\ell}) - \hat{\delta}(p_1 \cdot \bar{\ell}) \hat{\delta}'(p_2 \cdot \bar{\ell}) \right] \quad (4.43)$$

4.3.5 Combinando as contribuições

Combinando as contribuições Vamos começar pelos termos da caixa, caixa cruzada e caixa com corte. Podemos simplificar o termo \mathcal{B}_{-1}^μ fazendo a seguinte troca de variável $\bar{\ell}' = \bar{q} - \bar{\ell}$, de modo que temos

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{-1}^\mu &= -\frac{4iQ_1^2Q_2^2}{\hbar^2}(p_1 \cdot p_2)^2 \int \frac{\hat{d}^4\bar{\ell}'(\bar{q}^\mu - \bar{\ell}'^\mu)}{\bar{\ell}'^2(\bar{\ell} - \bar{q})^2} \hat{\delta}(p_1 \cdot (\bar{\ell}' - \bar{q})) \hat{\delta}(p_2 \cdot (\bar{\ell}' - \bar{q})) \\ &= -\frac{4iQ_1^2Q_2^2}{\hbar^2}(p_1 \cdot p_2)^2 \int \frac{\hat{d}^4\bar{\ell}'(\bar{q}^\mu - \bar{\ell}'^\mu)}{\bar{\ell}'^2(\bar{\ell} - \bar{q})^2} \hat{\delta}(p_1 \cdot \bar{\ell}' + \frac{\hbar\bar{q}}{2}) \hat{\delta}(p_2 \cdot \bar{\ell}' - \frac{\hbar\bar{q}}{2}) \\ &= -\frac{2iQ_1^2Q_2^2}{\hbar^2}(p_1 \cdot p_2)^2 \bar{q}^\mu \int \frac{\hat{d}^4\bar{\ell} \hat{\delta}(p_1 \cdot \bar{\ell})(p_2 \cdot \bar{\ell})}{\bar{\ell}^2(\bar{\ell} - \bar{q})^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\hbar}\right),\end{aligned}\quad (4.44)$$

em que foi feito $p_1 \cdot \bar{q} \rightarrow -\frac{\hbar\bar{q}^2}{2}$ e $p_2 \cdot \bar{q} \rightarrow \frac{\hbar\bar{q}^2}{2}$.

É possível fazer o mesmo com a caixa e a caixa cruzada

$$\begin{aligned}B_{-1} + C_{-1} &= -\frac{4Q_1^2Q_2^2}{\hbar^{2+2\varepsilon}}(p_1 \cdot p_2)^2 \int \frac{\hat{d}^D\bar{\ell} \hat{\delta}(p_2 \cdot \bar{\ell})}{\bar{\ell}^2(\bar{\ell} - \bar{q})^2(p_1 \cdot \bar{\ell} + i\varepsilon)} \\ &= \frac{4Q_1^2Q_2^2}{\hbar^{2+2\varepsilon}}(p_1 \cdot p_2)^2 \int \frac{\hat{d}^D\bar{\ell}'}{\bar{\ell}'^2(\bar{\ell}' - \bar{q})^2(p_1 \cdot \bar{\ell}' + \hbar\bar{q}/2 - i\varepsilon)} (p_2 \cdot \bar{\ell}' - \hbar\bar{q}/2) \\ &= -\frac{2iQ_1^2Q_2^2}{\hbar^2}(p_1 \cdot p_2)^2 \int \frac{\hat{d}^4\bar{\ell} \hat{\delta}(p_1 \cdot \bar{\ell})(p_2 \cdot \bar{\ell})}{\bar{\ell}^2(\bar{\ell} - \bar{q})^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\hbar}\right)\end{aligned}\quad (4.45)$$

em que usamos novamente

$$\frac{1}{x - i\varepsilon} - \frac{1}{x + i\varepsilon} = i\hat{\delta}(x) \quad (4.46)$$

Combinando as (4.44) e (4.45), temos que a contribuição singular no kernel de impulso é

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{cl}^{\mu,(1)} \Big|_{sing} &= \hbar\bar{q}^\mu(B_{-1} + C_{-1}) + \hbar\mathcal{B}_{-1}^\mu \\ &= \frac{2iQ_1^2Q_2^2}{\hbar}(p_1 \cdot p_2)^2 \bar{q}^\mu \left[\int \frac{\hat{d}^4\bar{\ell} \hat{\delta}(p_1 \cdot \bar{\ell})(p_2 \cdot \bar{\ell})}{\bar{\ell}^2(\bar{\ell} - \bar{q})^2} - \frac{\hat{d}^4\bar{\ell} \hat{\delta}(p_1 \cdot \bar{\ell})(p_2 \cdot \bar{\ell})}{\bar{\ell}^2(\bar{\ell} - \bar{q})^2} \right] + \mathcal{O}(\hbar^0) \\ &= \mathcal{O}(\hbar^0),\end{aligned}\quad (4.47)$$

logo os termos problemáticos se cancelam.

Agora os termos de $\mathcal{O}(\frac{1}{\hbar})$ das outras contribuições. Usando novamente (4.46) e

$$\frac{i}{(x - i\varepsilon)^2} - \frac{i}{(x + i\varepsilon)^2} = \hat{\delta}'(x), \quad (4.48)$$

podemos fazer

$$\begin{aligned} \hbar\bar{q}^\mu(B_0 + C_0) + [\hbar\bar{q}^\mu(B_{-1} + C_{-1})] \Big\}_{\mathcal{O}(\hbar^0)} &= 2Q_1^2 Q_2^2 (p_1 \cdot p_2)^2 \bar{q}^\mu \int \frac{\hat{d}^4 \bar{\ell}}{\bar{\ell}^2 (\bar{\ell} - \bar{q})} \times \\ &\times \left(\hat{\delta}(p_2 \cdot \bar{\ell}) \frac{\bar{\ell} \cdot (\bar{\ell} - \bar{q})}{p_1 \cdot \bar{\ell} + i\varepsilon} + \hat{\delta}(p_1 \cdot \bar{\ell}) \frac{\bar{\ell} \cdot (\bar{\ell} - \bar{q})}{p_2 \cdot \bar{\ell} + i\varepsilon} \right) + Z^\mu, \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} \hbar\mathcal{B}_0^\mu + [\mathcal{B}_{-1}^\mu] \Big\}_{\mathcal{O}(\hbar^0)} &= -2iQ_1^2 Q_2^2 (p_1 \cdot p_2)^2 \int \frac{\hat{d}^4 \bar{\ell}}{\bar{\ell}^2 (\bar{\ell} - \bar{q})} \bar{\ell}^\mu \bar{\ell} \cdot (\bar{\ell} - \bar{q}) \left[\hat{\delta}'(p_1 \cdot \bar{\ell}) \hat{\delta}(p_2 \cdot \bar{\ell}) - \right. \\ &\quad \left. - \hat{\delta}(p_1 \cdot \bar{\ell}) \hat{\delta}'(p_2 \cdot \bar{\ell}) \right] - Z^\mu, \end{aligned} \quad (4.50)$$

em que

$$Z^\mu = 2Q_1^2 Q_2^2 (p_1 \cdot p_2)^2 \bar{q}^\mu \int \frac{\hat{d}^4 \bar{\ell}}{\bar{\ell}^2 (\bar{\ell} - \bar{q})} (2\bar{\ell} \cdot \bar{q} - \bar{\ell}^2) \left[\hat{\delta}'(p_1 \cdot \bar{\ell}) \hat{\delta}(p_2 \cdot \bar{\ell}) - \hat{\delta}(p_1 \cdot \bar{\ell}) \hat{\delta}'(p_2 \cdot \bar{\ell}) \right]. \quad (4.51)$$

E agora é possível realizar as integrais tomando o limite clássico. A contribuição da caixa fica

$$\mathcal{I}_2^\mu = 2Q_1^2 Q_2^2 \gamma^\mu \bar{q}^\mu \int \frac{\hat{d}^4 \bar{\ell}}{\bar{\ell}^2 (\bar{\ell} - \bar{q})} \left[m_2 \hat{\delta}(u_2 \cdot \bar{\ell}) \frac{\bar{\ell} \cdot (\bar{\ell} - \bar{q})}{u_1 \cdot \bar{\ell} + i\varepsilon} + m_1 \hat{\delta}(u_1 \cdot \bar{\ell}) \frac{\bar{\ell} \cdot (\bar{\ell} - \bar{q})}{u_2 \cdot \bar{\ell} + i\varepsilon} \right], \quad (4.52)$$

e a da caixa com corte

$$\mathcal{I}_3^\mu = -i2Q_1^2 Q_2^2 \gamma^\mu \int \frac{\hat{d}^4 \bar{\ell}}{\bar{\ell}^2 (\bar{\ell} - \bar{q})} \bar{\ell}^\mu \bar{\ell} \cdot (\bar{\ell} - \bar{q}) \left[m_2 \hat{\delta}'(u_1 \cdot \bar{\ell}) \hat{\delta}(u_2 \cdot \bar{\ell}) - m_1 \hat{\delta}(u_1 \cdot \bar{\ell}) \hat{\delta}'(u_2 \cdot \bar{\ell}) \right] \quad (4.53)$$

Juntando (4.30), (4.52) e (4.53) podemos calcular

$$\begin{aligned} \Delta p_1^{\mu,(1)} &= \frac{i\varepsilon}{4} \hbar \int \hat{d}^4 \bar{q} \hat{\delta}(\bar{q} \cdot u_1) \hat{\delta}(\bar{q} \cdot u_2) e^{-i\bar{q} \cdot b} \mathcal{I}_{cl}^{\mu,(1)} \\ &= \frac{i\varepsilon}{4} \hbar \int \hat{d}^4 \bar{q} \hat{\delta}(\bar{q} \cdot u_1) \hat{\delta}(\bar{q} \cdot u_2) e^{-i\bar{q} \cdot b} (\mathcal{I}_1^\mu + \mathcal{I}_2^\mu + \mathcal{I}_3^\mu) \\ &= \frac{iQ_1^2 Q_2^2 e^4}{2} \int \frac{\hat{d}^4 \bar{\ell}}{\bar{\ell}^2 (\bar{\ell} - \bar{q})^2} \hat{d}^4 \hat{\delta}(\bar{q} \cdot u_1) \hat{\delta}(\bar{q} \cdot u_2) e^{-i\bar{q} \cdot b} \times \\ &\quad \left[\bar{q}^\mu \left(\frac{\hat{\delta}(u_2 \cdot \bar{\ell})}{m_2} + \frac{\hat{\delta}(u_2 \cdot \bar{\ell})}{m_1} \right) + \gamma^2 \bar{q}^\mu \left(\frac{\hat{\delta}(u_2 \cdot \bar{\ell}) \bar{\ell} \cdot (\bar{\ell} - \bar{q})}{m_1 (u_1 \cdot \bar{\ell} + i\varepsilon)^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\hat{\delta}(u_1 \cdot \bar{\ell}) \bar{\ell} \cdot (\bar{\ell} - \bar{q})}{m_2 (u_2 \cdot \bar{\ell} - i\varepsilon)^2} \right) - i\gamma^2 \bar{\ell}^\mu \cdot (\bar{\ell} - \bar{q}) \left(\frac{\hat{\delta}'(u_1 \cdot \bar{\ell}) \hat{\delta}(u_2 \cdot \bar{\ell})}{m_1} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\hat{\delta}'(u_2 \cdot \bar{\ell}) \hat{\delta}(u_1 \cdot \bar{\ell})}{m_2} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.54)$$

Este resultado é precisamente o mesmo encontrado ao se usar teoria de perturbação no formalismo *wordline* [2]. Esse resultado final para o impulso quando feito numa teoria de calibre não Abelian, trocando as cargas por cargas de cor $Q_1 Q_2 \rightarrow c_1 c_2$, é exatamente o mesmo. A concordância do formalismo com o formalismo *wordline* é um forte indicativo a favor do formalismo KMOC.

4.3.6 Verificação de condição on-shell

Antes de prosseguirmos, façamos uma leve verificação de que os resultados obtidos até aqui continuam fazendo sentido fisicamente. Embora seja frequentemente enfatizado que diagramas triangulares para o potencial clássico em NLO são particularmente importantes, vimos que a inclusão cuidadosa de diagramas de caixas é necessária para determinar o impulso no regime. No entanto, no contexto do potencial, o cancelamento parcial entre caixas e caixas cruzadas é bem compreendido [115], e é por isso que os diagramas triangulares são particularmente importantes.

No caso do impulso, aparentemente as caixas desempenhem um papel mais relevante, pois, como vimos, certamente contribuem para o resultado clássico do impulso. De fato, é possível ver que esses termos devem ser incluídos para recuperar um resultado fisicamente sensato, pois o momento final, r_1^μ , da partícula emergente num processo de espalhamento clássico deve ser on-shell, $r_1^2 = m_1^2$. Vamos então verificar se essa quantidade continua sendo on-shell.

Podemos escrever esse momento final em função do impulso e do momento inicial

$$r_1^\mu = p_1^\mu + \Delta p_1^\mu. \quad (4.55)$$

Com a restrição desse momento ser on-shell dada por

$$(\Delta p_1)^2 + 2p_1 \cdot \Delta p_1 = 0. \quad (4.56)$$

Até segunda ordem, isso é claramente respeitado, pois $(\Delta p_1)^2$ é desprezível e

$$2p_1 \cdot \Delta p_1 = im_1 e^2 Q_1 Q_2 \int \hat{d}^4 \bar{q} \hat{\delta}(\bar{q} \cdot u_1) \hat{\delta}(\bar{q} \cdot u_2) e^{-ib \cdot \bar{q}} \bar{q}^\mu \cdot u_1 \frac{u_1 \cdot u_2}{\bar{q}^2} = 0, \quad (4.57)$$

em que usamos a (4.4). A condição do momento continuarmos on-shell fica mais turva quando em ordem quártica, pois tanto $(\Delta p_1)^2$ quanto $p_1 \Delta p_1$ não se anulam. Isso fica evidente ao usarmos novamente a (4.4) para ver que

$$\begin{aligned} (\Delta p_1)^2 = & -e^4 (Q_1^2 Q_2^2 u_1^2 u_2^2 \int \hat{d}^4 \bar{q} \hat{d}^4 \bar{q}' \hat{\delta}(\bar{q} \cdot u_1) \hat{\delta}(\bar{q}' \cdot u_1) \times \\ & \times \hat{\delta}(\bar{q} \cdot u_2) \hat{\delta}(\bar{q}' \cdot u_2) e^{-ib \cdot (\bar{q} + \bar{q}')} \frac{\bar{q}^\mu \cdot \bar{q}'^\mu}{\bar{q}^2 \bar{q}'^2}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Por outro lado, para calcularmos $2p_1 \cdot \Delta p_1$ precisamos usar o resultado em NLO, dado pela (4.54). Devido às funções delta presentes nessa expressão, podemos simplificar esse termo

$$\begin{aligned} 2p_1 \cdot \Delta p_1 = & iQ_1^2 Q_2^2 e^4 \int \frac{\hat{d}^4 \bar{\ell}}{\bar{\ell}^2 (\bar{\ell} - \bar{q})^2} \hat{d}^4 \bar{q} \hat{\delta}(\bar{q} \cdot u_1) \hat{\delta}(\bar{q} \cdot u_2) e^{-i\bar{q} \cdot b} m_1 u_1 \times \\ & \left[\bar{q}^\mu \left(\frac{\hat{\delta}(u_1 \cdot \bar{\ell})}{m_1} + \frac{\hat{\delta}(u_2 \cdot \bar{\ell})}{m_2} \right) + \gamma^2 \bar{q}^\mu \left(\frac{\hat{\delta}(u_2 \cdot \bar{\ell}) \bar{\ell} \cdot (\bar{\ell} - \bar{q})}{m_1 (u_1 \cdot \bar{\ell} + i\varepsilon)^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\hat{\delta}(u_1 \cdot \bar{\ell}) \bar{\ell} \cdot (\bar{\ell} - \bar{q})}{m_2 (u_2 \cdot \bar{\ell} - i\varepsilon)^2} \right) - i\gamma^2 \bar{\ell}^\mu \cdot (\bar{\ell} - \bar{q}) \left(\frac{\hat{\delta}'(u_1 \cdot \bar{\ell}) \hat{\delta}(u_2 \cdot \bar{\ell})}{m_1} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\hat{\delta}'(u_2 \cdot \bar{\ell}) \hat{\delta}(u_1 \cdot \bar{\ell})}{m_2} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.59)$$

para

$$2p_1 \cdot \Delta p_1 = Q_1^2 Q_2^2 u_1^2 u_2^2 e^4 \int \hat{d}^4 \bar{\ell} \hat{d}^4 \bar{q} \hat{d}^4 \hat{\delta}(\bar{q} \cdot u_1) \hat{\delta}(\bar{q} \cdot u_2) \times \\ \times \hat{\delta}'(\bar{\ell} \cdot u_1) \hat{\delta}(\bar{\ell} \cdot u_2) e^{-i\bar{q} \cdot b} u_1 \cdot \bar{\ell} \frac{\bar{\ell} \cdot (\bar{\ell} - \bar{q})}{\bar{\ell}^2 (\bar{\ell} - \bar{q})^2}. \quad (4.60)$$

Podemos considerar o referencial de repouso de u_1 , $u_1 = (1, \mathbf{0})$, para simplificar ainda mais a integral. Com isso, a integral em $\bar{\ell}$ envolve uma delta $\bar{\ell}^0 \hat{\delta}(\bar{\ell}^0)$ e a componente \bar{q}^0 é nula. Assim, temos que

$$\int \hat{d}\bar{\ell}^0 \bar{\ell}^0 \hat{\delta}'\bar{\ell}^0 f(\bar{\ell}^0) = - \int \hat{d}\bar{\ell}^0 \hat{\delta}\bar{\ell}^0 f(\bar{\ell}^0). \quad (4.61)$$

Fazendo uso desta, podemos escrever a (4.60) como

$$2p_1 \cdot \Delta p_1 = -Q_1^2 Q_2^2 u_1^2 u_2^2 e^4 \int \hat{d}^4 \bar{\ell} \hat{d}^4 \bar{q} \hat{d}^4 \hat{\delta}(\bar{q} \cdot u_1) \hat{\delta}(\bar{q} \cdot u_2) \times \\ \times \hat{\delta}(\bar{\ell} \cdot u_1) \hat{\delta}(\bar{\ell} \cdot u_2) e^{-i\bar{q} \cdot b} \frac{\bar{\ell} \cdot (\bar{\ell} - \bar{q})}{\bar{\ell}^2 (\bar{\ell} - \bar{q})^2}. \quad (4.62)$$

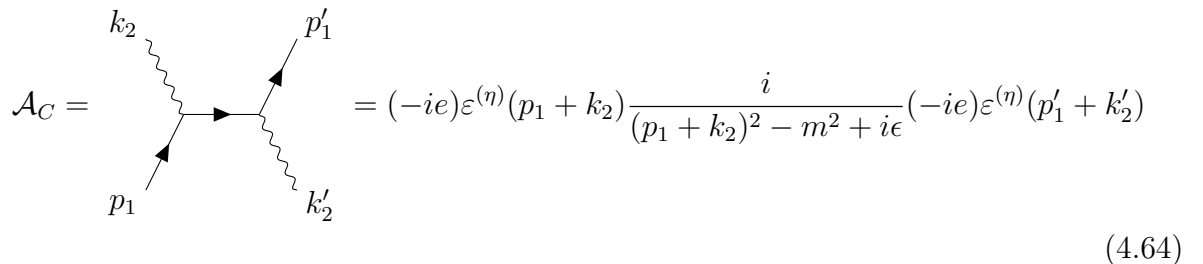
Fazendo uma mudança de variável $\bar{q}' = \bar{q} - \bar{\ell}$, temos

$$2p_1 \cdot \Delta p_1 = -Q_1^2 Q_2^2 u_1^2 u_2^2 e^4 \int \hat{d}^4 \bar{\ell} \hat{d}^4 \bar{q}' \hat{d}^4 \hat{\delta}(\bar{q}' \cdot u_1) \hat{\delta}(\bar{q}' \cdot u_2) \times \\ \times \hat{\delta}(\bar{\ell} \cdot u_1) \hat{\delta}(\bar{\ell} \cdot u_2) e^{-i(\bar{q}'+\bar{\ell}) \cdot b} \frac{\bar{\ell} \cdot \bar{q}'}{\bar{\ell}^2 \bar{q}'^2}. \quad (4.63)$$

Essa expressão é a mesma que (4.58), mas com sinal oposto. Logo, temos que a condição (4.56) é respeitada e o resultado continua sendo um momento físico e uma quantidade on-shell.

4.4 Espalhamento Thomson

Vamos agora considerar o espalhamento de uma partícula de massa m e carga Q por um feixe de luz colimado com helicidade positiva, correspondendo a estados $|\alpha^+\rangle$. Para tratarmos desse problema, precisamos da amplitude de Compton da EDQ escalar. Temos o seguinte diagrama



$$\mathcal{A}_C = \text{Diagram} = (-ie)\varepsilon^{(\eta)}(p_1 + k_2) \frac{i}{(p_1 + k_2)^2 - m^2 + i\epsilon} (-ie)\varepsilon^{(\eta)}(p_1' + k_2') \quad (4.64)$$

Se adotar o calibre $\varepsilon^{(\eta)} \cdot p_1 = 0$ para os fótons. Essa amplitude pode ser escrita como

$$\mathcal{A}(p_1, k_2^\eta \rightarrow p_1', k_2'^{\eta'}) = 2Q^2 \varepsilon^{(\eta)*}(k_2) \cdot \varepsilon^{(\eta)}(k_2') = 2Q^2 \varepsilon^{(-\eta)}(k_2) \cdot \varepsilon^{(\eta)*}(k_2'), \quad (4.65)$$

Na notação *espinorial-helicidade*, discutida no apêndice B e, para uma discussão mais aprofundada, o leitor pode ver as referências [53, 54], essa amplitude assume uma forma mais compacta.

$$\mathcal{A}(p_1, k_2^+ \rightarrow p_1', k_2'^+) = -\frac{Q^2 \langle k_2 | p_1 | k_2' \rangle^2}{2(k_2 \cdot p_1 k_2' \cdot p_1)}, \quad (4.66)$$

agora estamos supondo a helicidade positiva. Essa forma de expressar a amplitude é invariante de calibre, devido aos espinores $|k_2'\rangle$ e $|k_2\rangle$ associados aos momentos do fóton. Como estamos interessados nos números de onda, definimos

$$\begin{aligned} |\bar{k}_2\rangle &= \hbar^{-1/2} |k_2\rangle \\ |\bar{k}_2'\rangle &= \hbar^{-1/2} |k_2'\rangle, \end{aligned} \quad (4.67)$$

que são diretamente relacionados com os números de onda do fóton. Com isso, a amplitude fica

$$\bar{\mathcal{A}}(p_1, k_2^+ \rightarrow p_1', k_2'^+) = -\frac{Q^2 \langle \bar{k}_2 | p_1 | \bar{k}_2' \rangle^2}{2\bar{k}_2 \cdot p_1 \bar{k}_2' \cdot p_1}. \quad (4.68)$$

Agora, fazendo $b = 0$ e trocando as variáveis para $k = k_2$, $k' = k_2 - q$, de modo a facilitar a leitura da expressão, temos que o impulso (3.37) fica como

$$\langle \Delta p^\mu \rangle = \frac{Q^2 e^2}{2} \int d\Phi(\bar{k}) d\Phi(\bar{k}') \hat{\delta}(2p \cdot (\bar{k} - \bar{k}')) \bar{\alpha}^*(\bar{k}') \bar{\alpha}(\bar{k}) i(\bar{k}' - \bar{k})^\mu \frac{\langle \bar{k} | p | \bar{k}' \rangle^2}{(\bar{k} \cdot p)^2}. \quad (4.69)$$

Que é comparado ao resultado clássico obtido ao se iterar duas vezes a força de Lorentz clássica. Assim, podemos observar por meio de um exemplo que um parâmetro de impacto nulo é perfeitamente aceitável no espalhamento clássico de ondas na matéria, ao contrário da situação para o espalhamento de duas partículas massivas.

É interessante notar que a amplitude de Compton surge em um nível de árvore na física clássica do espalhamento de ondas por partículas massivas. Esta amplitude também é relevante para o espalhamento de partículas puramente massivas, entretanto somente até a ordem de um laço [116]. Embora a amplitude seja relativamente simples para partículas sem spin, ela se torna consideravelmente mais complexa para partículas com spins [117].

4.5 Deflexão da Luz

Além dos exemplos anteriores, também podemos empregar o formalismo para calcular a deflexão da luz por uma partícula massiva, determinando o impulso de um feixe de luz estreito passando próximo a uma partícula massiva com $b \neq 0$. Como em LO não há momento irradiado, é possível afirmar que o impulso do feixe de luz é simplesmente o oposto do impulso da partícula.

No limite ótico-geométrico devemos ter o comprimento de onda da luz λ pequeno o suficiente e, ao mesmo tempo, grande o bastante para que possamos negligenciar efeitos quânticos, ou seja, maior que o comprimento de Compton ℓ_c . Também devemos ter, para que o feixe seja colimado, que a seção transversal seja maior que o comprimento de onda, resultando na desigualdade

$$\ell_{\ll} \lambda \ll \ell_c \ll \ell_{\perp} \sim b. \quad (4.70)$$

Por simplicidade, consideremos um feixe monocromático com $\sigma_{\parallel} \rightarrow 0$. Assim, partimos novamente de

$$I_{w(1)}^{\mu,cl} = \kappa^2 \left\langle\left\langle \int d\Phi(\bar{k}_2) \hat{d}^4 \bar{q} \hat{\delta}(2\bar{q} \cdot p_1) \hat{\delta}(2\bar{q} \cdot \bar{k}_2 - \bar{q}^2) \Theta(\bar{k}^0 - \bar{q}^0) \bar{\alpha}_2^*(\bar{k}_2 - \bar{q}) \bar{\alpha}_2(\bar{k}_2) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times e^{-ib \cdot \bar{q}} i \bar{q}^\mu \bar{\mathcal{A}}(p_1, \hbar \bar{k}_2^\eta \rightarrow p_1 + \hbar \bar{q}, \hbar(\bar{k}_2 - \bar{q})^\eta) \right\rangle\right\rangle, \quad (4.71)$$

com as restrições de (4.70). Temos que $|\bar{q} \cdot \bar{k}_2| \gg |\bar{q}^2|$ com $\bar{k}_2 \sim 1/\lambda$ e $\bar{q} \sim 1/\ell_s$. Assim o número de onda \bar{q} predomina no plano de espalhamento. Nesse plano, a configuração de onda coerente $\bar{\alpha}_2$ tem largura da ordem de $1/\ell_{\perp}$, de modo que podemos aproximar

$$\bar{\alpha}_2^*(\bar{k}_2 - \bar{q}) \simeq \bar{\alpha}_2^*(\bar{k}_2). \quad (4.72)$$

Assim como

$$\Theta(\bar{k}_2^0 - \bar{q}^0) \simeq 1. \quad (4.73)$$

Com essas temos que o impulso na onda é

$$\langle \Delta p_2^\mu \rangle = -\kappa^2 \left\langle\left\langle \int d\Phi(\bar{k}_2) \hat{d}^4 \bar{q} \hat{\delta}(2\bar{q} \cdot p_1) (2\bar{q} \cdot \bar{k}_2) |\bar{\alpha}_2(\bar{k}_2)|^2 \times \right. \right. \\ \left. \left. \times e^{-ib \cdot \bar{q}} i \bar{q}^\mu \bar{\mathcal{A}}(p_1, \hbar \bar{k}_2^\eta \rightarrow p_1 + \hbar \bar{q}, \hbar(\bar{k}_2 - \bar{q})^\eta) \right\rangle\right\rangle. \quad (4.74)$$

No limite ótico-geométrico $\bar{\alpha}_2(\bar{k}_2)$ é uma função com um pico acentuado em $\bar{k}_2 = \bar{k}_{\odot}$. A amplitude por sua vez é suave nessa região, de modo que a integral em k_2 assume

$$\int d\Phi(\bar{k}_2) \hat{\delta}(2\bar{q} \cdot \bar{k}_2) |\bar{\alpha}_2(\bar{k}_2)|^2 f(\bar{k}_2) \simeq f(\bar{k}_{\odot}) \int d\Phi(\bar{k}_2) \hat{\delta}(2\bar{q} \cdot \bar{k}_2) |\bar{\alpha}_2(\bar{k}_2)|^2, \quad (4.75)$$

em que f é uma função que varia lentamente. Temos então uma convolução da delta e de $|\alpha_2(k)|^2$, cujo resultado é uma função delta alargada e centrada em $\bar{k}_2 = \bar{k}_{\odot}$. Negligenciando a largura dessa função, pois é da ordem de σ_{\perp} , temos

$$f(\bar{k}_{\odot}) \int d\Phi(\bar{k}_2) \hat{\delta}(2\bar{q} \cdot \bar{k}_2) |\bar{\alpha}_2(\bar{k}_2)|^2 \simeq f(\bar{k}_{\odot}) N_{\gamma} \hbar \hat{\delta}(2\bar{q} \cdot \bar{k}_{\odot}) \quad (4.76)$$

o fator N_{γ} emerge da integral sobre $|\alpha_2(k)|^2$. Usando a (4.76), temos que o impulso se expressa por

$$\langle \Delta p_{geo}^\mu \rangle = -N_{\gamma} \hbar \kappa^2 \left\langle\left\langle \int \hat{d}^4 \bar{q} \hat{\delta}(2\bar{q} \cdot p_1) \hat{\delta}(2\bar{q} \cdot \bar{k}_{\odot}) e^{-ib \cdot \bar{q}} i \bar{q}^\mu \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \bar{\mathcal{A}}(p_1, \hbar \bar{k}_{\odot}^\eta \rightarrow p_1 + \hbar \bar{q}, \hbar(\bar{k}_{\odot} - \bar{q})^\eta) \right\rangle\right\rangle. \quad (4.77)$$

Em *leading-order* precisamos somente da amplitude de quatro pontos em nível de árvore. Como não há termos singulares em \hbar , podemos apenas levar em conta os termos que irão restar no regime clássico

$$\bar{\mathcal{M}}(p_1, k_2^\eta \rightarrow p_1', k_2'^\eta) = \frac{p_1 \cdot k_2 p_1 \cdot k_2'}{q^2} \varepsilon^{(\eta)*}(k_2) \cdot \varepsilon^{(\eta)}(k_2) + \dots \\ = \frac{p_1 \cdot \bar{k}_2 p_1 \cdot \bar{k}_2'}{\bar{q}^2} \varepsilon^{(\eta)*}(\bar{k}_2) \cdot \varepsilon^{(\eta)}(\bar{k}_2) + \dots, \quad (4.78)$$

novamente escolhendo $p_1 \cdot \varepsilon^{(\eta)}(k) = 0$ e as reticências indicam termos que serão suprimidos por fatores de \hbar .

Levando em conta a desigualdade (4.70), devemos ter

$$\bar{q} \sim \frac{1}{b} \ll \bar{k}_2, \quad (4.79)$$

de modo que (4.78) fica

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{M}}(p_1, k_2^\eta \rightarrow p_1', k_2'^\eta) &= \frac{p_1 \cdot \bar{k}_2 p_1 \cdot \bar{k}_2}{\bar{q}^2} \varepsilon^{(\eta)*}(k_2) \cdot \varepsilon^{(\eta)}(k_2) + \dots \\ &= -\frac{(p_1 \cdot \bar{k}_2)^2}{\bar{q}^2} + \dots \end{aligned} \quad (4.80)$$

No limite ótico-geométrico a amplitude para o espalhamento de um fóton independe da helicidade. Agora, para calcular o impulso usamos a (4.80) em (4.77)

$$\begin{aligned} \langle \Delta p_{geo}^\mu \rangle &= i\kappa^2 N_\gamma \hbar (p_1 \cdot \bar{k}_\odot)^2 \int d^4 \bar{q} \hat{\delta}(2\bar{q} \cdot p_1) \hat{\delta}(2\bar{q} \cdot \bar{k}_\odot) e^{-ib \cdot \bar{q}} \frac{\bar{q}^\mu}{\bar{q}^2} \\ &= i\kappa^2 (p_1 \cdot K_\odot)^2 \int d^4 \bar{q} \hat{\delta}(2\bar{q} \cdot p_1) \hat{\delta}(2\bar{q} \cdot K_\odot) e^{-ib \cdot \bar{q}} \frac{\bar{q}^\mu}{\bar{q}^2}, \end{aligned} \quad (4.81)$$

em que K_\odot é o momento total do feixe. Essa expressão é a mesma obtida antes para o espalhamento de dois objetos massivos clássicos.

Se tomarmos $K_\odot = (E, 0, 0, E)$ ficamos com

$$\langle \Delta p_{geo}^\mu \rangle = -\kappa^2 \frac{p_1 \cdot K_\odot}{8\pi b^2} b^\mu. \quad (4.82)$$

O ângulo de espalhamento pode ser obtido a partir de

$$\sin \theta = \frac{|b \cdot \Delta p|}{|\mathbf{b}| E}, \quad (4.83)$$

uma vez que o referencial esteja fixado. No referencial de repouso e tomando $g^2 = 32\pi G_N$, obtém-se

$$\theta = \frac{4G_N m}{|\mathbf{b}|} + \dots \quad (4.84)$$

É satisfatório que a (4.81) recupere essencialmente a mesma expressão do impulso em *leading-order* de partículas pontuais clássicas do formalismo. Isso se deve às desigualdades na equação (4.70) simplificarem bastante o impulso. Essa desigualdade é muito semelhante às condições de "cachinhos dourados" para partículas pontuais clássicas. Isso não é meramente coincidência, o fato de que a dinâmica das partículas massivas é similar ao comportamento das ondas na aproximação da óptica geométrica é um aspecto conhecido na física desde os séculos XIX e XX, a chama analogia ótico-mecânica de Hamilton. Essa analogia foi destacada por Schrödinger como uma consideração importante nos primeiros dias da mecânica quântica [118].

Capítulo 5

Conclusões

Nesta dissertação, fizemos o trabalho de revisão apresentando o aparato necessário para calcular observáveis on-shell relevantes para a astronomia de ondas gravitacionais, o formalismo é baseado no simples estudo de pacotes de ondas explícitos de uma única partícula. Apresentamos o primeiro observável de espalhamento no capítulo 1: o impulso, ou variação total do momento de uma partícula pontual num espalhamento. Construímos expressões explícitas para o impulso, válidas em qualquer teoria quântica de campos, em termos de amplitudes on-shell.

Munidos com uma compreensão completa do limite clássico, e em particular um conhecimento prático dos fatores de \hbar , foi possível fornecer expressões para o limite clássico do observável de impulso. Exemplos explícitos em LO e NLO levaram a expressões que concordam com a teoria de perturbação. Além dessas ordens, o impulso não captura totalmente a dinâmica de uma partícula sem spin, devido à emissão de radiação. No capítulo 2, portanto, incluímos o momento total irradiado no formalismo, eventualmente descobrindo que para espalhamento inelástico, as amplitudes, via o núcleo de radiação. Mostramos que basear o tratamento de radiação e impulso na mecânica quântica tem a enorme vantagem de amenizar as dificuldades conceituais inerentes aos tratamentos de partículas pontuais radiantes na teoria clássica de campos, recuperando explicitamente as previsões de LO da força de Abraham-Lorentz-Dirac na eletrodinâmica a partir de amplitudes. Ainda no capítulo 2 mostramos a extensão do formalismo para partículas não massivas, essencial para o cálculo de formas de onda, um futuro objetivo nosso.

Com os pacotes de ondas explícitos, fomos capazes de determinar rigorosamente o regime clássico desses observáveis no capítulo 3, encontrando as desigualdades dos cachinhos dourados, que são a chave para calcular o limite clássico das amplitudes de espalhamento. Por fim aplicamos o formalismo em alguns exemplos, de modo a validar e exemplificar o poder do mesmo.

As ondas gravitacionais detectadas têm origem em corpos que apresentam momento angular ou *spin*. Como o spin contém informações cruciais sobre a radiação gravitacional emitida [18], as medidas de spin tornam-se dos principais fatores a serem observados num evento de onda gravitacional.

Sabemos que qualquer corpos extenso, estacionário e assimétrico, possui infinitos momento de multipolos de massa \mathcal{I}_ℓ e momento de multipolo de corrente \mathcal{J}_ℓ , os quais dependem da estrutura e composição de tais corpos [119]. No limite de partícula pontual, a expansão em multipolos pode determinar se o corpo em questão é um buraco negro, estrela de nêutrons ou algum outro objeto massivo.

Para um buraco negro de Kerr, os multipolos são definidos apenas por sua massa

m e spin s [119], de modo que podemos expressá-los por

$$\mathcal{I}_\ell + i\mathcal{J}_\ell = m(ia)^\ell. \quad (5.1)$$

Isso é uma consequência direta do *teorema da calvíce* [120–122], que basicamente afirma que buracos negros em RG são definidos univocamente por sua massa, spin e carga. Recentemente, tem-se tornado cada vez mais evidente que os buracos negros representam um *acoplamento mínimo* no limite clássico de amplitudes de espalhamento quânticas para partículas massivas e grávitons [123]. Uma série de trabalhos já calcularam amplitudes gravitacionais para diversos spins, indicando esta relação de acoplamento mínimo [124–126].

A fim de replicar a dinâmica de buracos negros de Kerr, os estados massivos de spin s nas amplitudes de espalhamento devem ser acoplados minimamente com os grávitons. Isso significa que o limite de altas energias é dominado pela configuração de helicidade correspondente de partículas não massivas [127].

Porém, para aplicar técnicas de amplitudes de espalhamento a qualquer objeto girando, precisamos saber exatamente qual observável clássico estamos lidando e como tomar precisamente o limite clássico. Portanto, os observáveis aqui construídos são a base para o futuro estudo da dinâmica de buracos negros girantes, quando incorporaremos o *spin* no formalismo [128]. Usando também da cópia dupla, vamos poder usar o ferramental aqui apresentado para calcularmos amplitudes gravitacionais no espalhamento de buraco negros. E ultimamente, esperamos sermos capazes de calcular e construir formas de ondas que possam servir de modelos para melhorar as detecções e análises de futuros eventos de ondas gravitacionais.

Referências

- [1] D. Kosower, B. Maybee e D. OConnell. “Amplitudes, observables, and classical scattering”. Em: *Journal of High Energy Physics* 2019.2 (fev. de 2019). ISSN: 1029-8479. DOI: [10.1007/jhep02\(2019\)137](https://doi.org/10.1007/jhep02(2019)137). URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP02\(2019\)137](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP02(2019)137).
- [2] A. Cristofoli et al. “Waveforms from amplitudes”. Em: *Physical Review D* 106.5 (set. de 2022). ISSN: 2470-0029. DOI: [10.1103/physrevd.106.056007](https://doi.org/10.1103/physrevd.106.056007). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.106.056007>.
- [3] M. D. Schwartz. *Quantum field theory and the standard model*. Cambridge university press, 2014.
- [4] J. F. Donoghue. “General relativity as an effective field theory: The leading quantum corrections”. Em: *Phys. Rev. D* 50 (1994), pp. 3874–3888. DOI: [10.1103/PhysRevD.50.3874](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.50.3874). arXiv: [gr-qc/9405057](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9405057).
- [5] B. P. Abbott et al. “GW151226: Observation of Gravitational Waves from a 22-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence”. Em: *Physical Review Letters* 116.24 (jun. de 2016). ISSN: 1079-7114. DOI: [10.1103/physrevlett.116.241103](https://doi.org/10.1103/physrevlett.116.241103). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.241103>.
- [6] B. P. Abbott et al. “GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral”. Em: *Physical Review Letters* 119.16 (out. de 2017). ISSN: 1079-7114. DOI: [10.1103/physrevlett.119.161101](https://doi.org/10.1103/physrevlett.119.161101). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.161101>.
- [7] B. P. Abbott et al. “GW170104: Observation of a 50-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence at Redshift 0.2”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 118.22 (2017), p. 221101. DOI: [10.1103/PhysRevLett.118.221101](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.118.221101). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.118.221101>.
- [8] B.P. Abbott et al. “Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger”. Em: *Physical Review Letters* 116.6 (fev. de 2016). ISSN: 1079-7114. DOI: [10.1103/physrevlett.116.061102](https://doi.org/10.1103/physrevlett.116.061102). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.061102>.
- [9] B. P. Abbott et al. “GW170814: A Three-Detector Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Coalescence”. Em: *Physical Review Letters* 119.14 (out. de 2017). ISSN: 1079-7114. DOI: [10.1103/physrevlett.119.141101](https://doi.org/10.1103/physrevlett.119.141101). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.141101>.
- [10] M. Maggiore. *Gravitational Waves. Vol. 1: Theory and Experiments*. Oxford University Press, 2007. ISBN: 978-0-19-171766-6, 978-0-19-852074-0. DOI: [10.1093/acprof:oso/9780198570745.001.0001](https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198570745.001.0001).
- [11] S. Foffa et al. “Conservative dynamics of binary systems to fourth post-Newtonian order in the EFT approach. II. Renormalized Lagrangian”. Em: *Physical Review D* 100.2 (jul. de 2019). ISSN: 2470-0029. DOI: [10.1103/physrevd.100.024048](https://doi.org/10.1103/physrevd.100.024048). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.100.024048>.

- [12] R. A. Porto. *The Music of the Spheres: The Dawn of Gravitational Wave Science*. 2017. arXiv: [1703.06440 \[physics.pop-ph\]](#).
- [13] M. Punturo et al. “The Einstein Telescope: A third-generation gravitational wave observatory”. Em: *Class. Quant. Grav.* 27 (2010). Ed. por F. Ricci, p. 194002. DOI: [10.1088/0264-9381/27/19/194002](#).
- [14] P. Amaro-Seoane et al. “Laser Interferometer Space Antenna”. Em: (2017). arXiv: [1702.00786 \[astro-ph.IM\]](#).
- [15] D. Reitze et al. “Cosmic Explorer: The U.S. Contribution to Gravitational-Wave Astronomy beyond LIGO”. Em: *Bull. Am. Astron. Soc.* 51.7 (2019), p. 035. arXiv: [1907.04833 \[astro-ph.IM\]](#).
- [16] M. Maggiore et al. “Science Case for the Einstein Telescope”. Em: *JCAP* 03 (2020), p. 050. DOI: [10.1088/1475-7516/2020/03/050](#). arXiv: [1912.02622 \[astro-ph.CO\]](#).
- [17] S. Babak et al. “Science with the space-based interferometer LISA. V. Extreme mass-ratio inspirals”. Em: *Physical Review D* 95.10 (mai. de 2017). ISSN: 2470-0029. DOI: [10.1103/physrevd.95.103012](#). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.95.103012>.
- [18] A. Buonanno e B. S. Sathyaprakash. *Sources of Gravitational Waves: Theory and Observations*. 2015. arXiv: [1410.7832 \[gr-qc\]](#).
- [19] R. Sturani. “Fundamental Gravity and Gravitational Waves”. Em: *Symmetry* 13.12 (2021), p. 2384. DOI: [10.3390/sym13122384](#).
- [20] S. Foffa e R. Sturani. “Conservative dynamics of binary systems to fourth post-Newtonian order in the EFT approach. I. Regularized Lagrangian”. Em: *Physical Review D* 100.2 (jul. de 2019). ISSN: 2470-0029. DOI: [10.1103/physrevd.100.024047](#). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.100.024047>.
- [21] A. Einstein, L. Infeld e B. Hoffmann. “The Gravitational Equations and the Problem of Motion”. Em: *Annals Math.* 39 (1938), pp. 65–100. DOI: [10.2307/1968714](#).
- [22] A. Antonelli et al. “Energetics of two-body Hamiltonians in post-Minkowskian gravity”. Em: *Physical Review D* 99.10 (mai. de 2019). ISSN: 2470-0029. DOI: [10.1103/physrevd.99.104004](#). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.99.104004>.
- [23] Z. Bern et al. “Scattering Amplitudes and the Conservative Hamiltonian for Binary Systems at Third Post-Minkowskian Order”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 122.20 (2019), p. 201603. DOI: [10.1103/PhysRevLett.122.201603](#). arXiv: [1901.04424 \[hep-th\]](#).
- [24] C. Cheung, I. Z. Rothstein e M. P. Solon. “From Scattering Amplitudes to Classical Potentials in the Post-Minkowskian Expansion”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 121.25 (2018), p. 251101. DOI: [10.1103/PhysRevLett.121.251101](#). arXiv: [1808.02489 \[hep-th\]](#).
- [25] M. Portilla. “Momentum and angular momentum of two gravitating particles”. Em: *J. Phys. A* 12 (1979), pp. 1075–1090. DOI: [10.1088/0305-4470/12/7/025](#).
- [26] M. Portilla. “Scattering of two gravitating particles: Classical approach”. Em: *J. Phys. A* 13 (1980), pp. 3677–3683. DOI: [10.1088/0305-4470/13/12/017](#).

- [27] K. Westpfahl e M. Goller. “Gravitational scattering of two relativistic particles in postlinear approximation”. Em: *Lett. Nuovo Cim.* 26 (1979), pp. 573–576. DOI: [10.1007/BF02817047](https://doi.org/10.1007/BF02817047).
- [28] K. Westpfahl. “High-speed scattering of charged and uncharged particles in general relativity”. Em: *Fortsch. Phys.* 33.8 (1985), pp. 417–493. DOI: [10.1002/prop.2190330802](https://doi.org/10.1002/prop.2190330802).
- [29] B. Bertotti. “On gravitational motion”. Em: *Nuovo Cim.* 4.4 (1956), pp. 898–906. DOI: [10.1007/bf02746175](https://doi.org/10.1007/bf02746175).
- [30] B. Bertotti e J. Plebanski. “Theory of gravitational perturbations in the fast motion approximation”. Em: *Annals Phys.* 11.2 (1960), pp. 169–200. DOI: [10.1016/0003-4916\(60\)90132-9](https://doi.org/10.1016/0003-4916(60)90132-9).
- [31] L. Barack e A. Pound. “Self-force and radiation reaction in general relativity”. Em: *Rept. Prog. Phys.* 82.1 (2019), p. 016904. DOI: [10.1088/1361-6633/aae552](https://doi.org/10.1088/1361-6633/aae552). arXiv: [1805.10385](https://arxiv.org/abs/1805.10385) [gr-qc].
- [32] T. C. Quinn e R. M. Wald. “An Axiomatic approach to electromagnetic and gravitational radiation reaction of particles in curved space-time”. Em: *Phys. Rev. D* 56 (1997), pp. 3381–3394. DOI: [10.1103/PhysRevD.56.3381](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.56.3381). arXiv: [gr-qc/9610053](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9610053).
- [33] R. M. Wald. “Introduction to Gravitational Self-Force”. Em: *Fundam. Theor. Phys.* 162 (2011), pp. 253–262. arXiv: [0907.0412](https://arxiv.org/abs/0907.0412) [gr-qc].
- [34] Y. Mino, M. Sasaki e T. Tanaka. “Gravitational radiation reaction to a particle motion”. Em: *Phys. Rev. D* 55 (1997), pp. 3457–3476. DOI: [10.1103/PhysRevD.55.3457](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.55.3457). arXiv: [gr-qc/9606018](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9606018).
- [35] L. Blanchet. “Gravitational Radiation from Post-Newtonian Sources and Inspiral-ling Compact Binaries”. Em: *Living Rev. Rel.* 17 (2014), p. 2. DOI: [10.12942/lrr-2014-2](https://doi.org/10.12942/lrr-2014-2). arXiv: [1310.1528](https://arxiv.org/abs/1310.1528) [gr-qc].
- [36] F. Pretorius. “Evolution of binary black hole spacetimes”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 95 (2005), p. 121101. DOI: [10.1103/PhysRevLett.95.121101](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.95.121101). arXiv: [gr-qc/0507014](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0507014).
- [37] T. W. Baumgarte e S. L. Shapiro. “Numerical relativity and compact binaries”. Em: *Phys. Rept.* 376 (2003), pp. 41–131. DOI: [10.1016/S0370-1573\(02\)00537-9](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(02)00537-9). arXiv: [gr-qc/0211028](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0211028).
- [38] T. W. Baumgarte e S. L. Shapiro. *Numerical Relativity: Solving Einstein’s Equations on the Computer*. Cambridge University Press, 2010. DOI: [10.1017/CB09781139193344](https://doi.org/10.1017/CB09781139193344).
- [39] T. Damour et al. “Strong-Field Scattering of Two Black Holes: Numerics Versus Analytics”. Em: *Phys. Rev. D* 89.8 (2014), p. 081503. DOI: [10.1103/PhysRevD.89.081503](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.89.081503). arXiv: [1402.7307](https://arxiv.org/abs/1402.7307) [gr-qc].
- [40] S. Hopper, A. Nagar e P. Rettengo. “Strong-field scattering of two spinning black holes: Numerics versus analytics”. Em: *Phys. Rev. D* 107.12 (2023), p. 124034. DOI: [10.1103/PhysRevD.107.124034](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.107.124034). arXiv: [2204.10299](https://arxiv.org/abs/2204.10299) [gr-qc].
- [41] F. Foucart et al. “Snowmass2021 Cosmic Frontier White Paper: Numerical relativity for next-generation gravitational-wave probes of fundamental physics”. Em: (2022). arXiv: [2203.08139](https://arxiv.org/abs/2203.08139) [gr-qc].

- [42] W. D. Goldberger e I. Z. Rothstein. “An Effective field theory of gravity for extended objects”. Em: *Phys. Rev. D* 73 (2006), p. 104029. DOI: [10.1103/PhysRevD.73.104029](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.73.104029). arXiv: [hep-th/0409156](https://arxiv.org/abs/hep-th/0409156).
- [43] W. D. Goldberger e A. Ross. “Gravitational radiative corrections from effective field theory”. Em: *Phys. Rev. D* 81 (2010), p. 124015. DOI: [10.1103/PhysRevD.81.124015](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.81.124015). arXiv: [0912.4254](https://arxiv.org/abs/0912.4254) [[gr-qc](#)].
- [44] R. A. Porto. “The effective field theorist’s approach to gravitational dynamics”. Em: *Phys. Rept.* 633 (2016), pp. 1–104. DOI: [10.1016/j.physrep.2016.04.003](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2016.04.003). arXiv: [1601.04914](https://arxiv.org/abs/1601.04914) [[hep-th](#)].
- [45] M. Levi. “Effective Field Theories of Post-Newtonian Gravity: A comprehensive review”. Em: *Rept. Prog. Phys.* 83.7 (2020), p. 075901. DOI: [10.1088/1361-6633/ab12bc](https://doi.org/10.1088/1361-6633/ab12bc). arXiv: [1807.01699](https://arxiv.org/abs/1807.01699) [[hep-th](#)].
- [46] R. Arnowitt e S. Deser. “Quantum Theory of Gravitation: General Formulation and Linearized Theory”. Em: *Phys. Rev.* 113 (1959), pp. 745–750. DOI: [10.1103/PhysRev.113.745](https://doi.org/10.1103/PhysRev.113.745).
- [47] R. L. Arnowitt, S. Deser e C. W. Misner. “Canonical variables for general relativity”. Em: *Phys. Rev.* 117 (1960), pp. 1595–1602. DOI: [10.1103/PhysRev.117.1595](https://doi.org/10.1103/PhysRev.117.1595).
- [48] R. L. Arnowitt, S. Deser e C. W. Misner. “The Dynamics of general relativity”. Em: *Gen. Rel. Grav.* 40 (2008), pp. 1997–2027. DOI: [10.1007/s10714-008-0661-1](https://doi.org/10.1007/s10714-008-0661-1). arXiv: [gr-qc/0405109](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0405109).
- [49] T. Damour, P. Jaranowski e G. Schafer. “On the determination of the last stable orbit for circular general relativistic binaries at the third postNewtonian approximation”. Em: *Phys. Rev. D* 62 (2000), p. 084011. DOI: [10.1103/PhysRevD.62.084011](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.62.084011). arXiv: [gr-qc/0005034](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0005034).
- [50] T. Damour. “Coalescence of two spinning black holes: an effective one-body approach”. Em: *Phys. Rev. D* 64 (2001), p. 124013. DOI: [10.1103/PhysRevD.64.124013](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.64.124013). arXiv: [gr-qc/0103018](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0103018).
- [51] A. Buonanno e T. Damour. “Effective one-body approach to general relativistic two-body dynamics”. Em: *Phys. Rev. D* 59 (1999), p. 084006. DOI: [10.1103/PhysRevD.59.084006](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.59.084006). arXiv: [gr-qc/9811091](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9811091).
- [52] A. Buonanno e T. Damour. “Transition from inspiral to plunge in binary black hole coalescences”. Em: *Phys. Rev. D* 62 (2000), p. 064015. DOI: [10.1103/PhysRevD.62.064015](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.62.064015). arXiv: [gr-qc/0001013](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0001013).
- [53] H. Elvang e Y.-t. Huang. *Scattering amplitudes in gauge theory and gravity*. Cambridge University Press, 2015.
- [54] J. M. Henn e J. C. Plefka. *Scattering amplitudes in gauge theories*. Vol. 883. Springer, 2014.
- [55] Y. Iwasaki. “Quantum theory of gravitation vs. classical theory. - fourth-order potential”. Em: *Prog. Theor. Phys.* 46 (1971), pp. 1587–1609. DOI: [10.1143/PTP.46.1587](https://doi.org/10.1143/PTP.46.1587).

- [56] N. E. J. Bjerrum-Bohr, J. F. Donoghue e B. R. Holstein. “Quantum corrections to the Schwarzschild and Kerr metrics”. Em: *Phys. Rev. D* 68 (2003). [Erratum: *Phys.Rev.D* 71, 069904 (2005)], p. 084005. DOI: [10.1103/PhysRevD.68.084005](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.68.084005). arXiv: [hep-th/0211071](https://arxiv.org/abs/hep-th/0211071).
- [57] N. E. J. Bjerrum-Bohr, J. F. Donoghue e B. R. Holstein. “Quantum gravitational corrections to the nonrelativistic scattering potential of two masses”. Em: *Phys. Rev. D* 67 (2003). [Erratum: *Phys.Rev.D* 71, 069903 (2005)], p. 084033. DOI: [10.1103/PhysRevD.71.069903](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.71.069903). arXiv: [hep-th/0211072](https://arxiv.org/abs/hep-th/0211072).
- [58] D. Neill e I. Z. Rothstein. “Classical Space-Times from the S Matrix”. Em: *Nucl. Phys. B* 877 (2013), pp. 177–189. DOI: [10.1016/j.nuclphysb.2013.09.007](https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2013.09.007). arXiv: [1304.7263 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1304.7263).
- [59] N. E. J. Bjerrum-Bohr et al. “Graviton-Photon Scattering”. Em: *Phys. Rev. D* 91.6 (2015), p. 064008. DOI: [10.1103/PhysRevD.91.064008](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.91.064008). arXiv: [1410.4148 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/1410.4148).
- [60] N. E. J. Bjerrum-Bohr et al. “Bending of Light in Quantum Gravity”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 114.6 (2015), p. 061301. DOI: [10.1103/PhysRevLett.114.061301](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.114.061301). arXiv: [1410.7590 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1410.7590).
- [61] N. E. J. Bjerrum-Bohr et al. “Light-like Scattering in Quantum Gravity”. Em: *JHEP* 11 (2016), p. 117. DOI: [10.1007/JHEP11\(2016\)117](https://doi.org/10.1007/JHEP11(2016)117). arXiv: [1609.07477 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1609.07477).
- [62] N. E. J. Bjerrum-Bohr et al. “Illuminating Light Bending”. Em: *PoS CORFU2016* (2017), p. 077. DOI: [10.22323/1.292.0077](https://doi.org/10.22323/1.292.0077). arXiv: [1704.01624 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/1704.01624).
- [63] N. E. J. Bjerrum-Bohr, J. F. Donoghue e P. Vanhove. “On-shell Techniques and Universal Results in Quantum Gravity”. Em: *JHEP* 02 (2014), p. 111. DOI: [10.1007/JHEP02\(2014\)111](https://doi.org/10.1007/JHEP02(2014)111). arXiv: [1309.0804 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1309.0804).
- [64] F. Cachazo e A. Guevara. “Leading Singularities and Classical Gravitational Scattering”. Em: *JHEP* 02 (2020), p. 181. DOI: [10.1007/JHEP02\(2020\)181](https://doi.org/10.1007/JHEP02(2020)181). arXiv: [1705.10262 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1705.10262).
- [65] A. Cristofoli et al. “Post-Minkowskian Hamiltonians in General Relativity”. Em: *Phys. Rev. D* 100.8 (2019), p. 084040. DOI: [10.1103/PhysRevD.100.084040](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.100.084040). arXiv: [1906.01579 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1906.01579).
- [66] Z. Bern et al. “Black Hole Binary Dynamics from the Double Copy and Effective Theory”. Em: *JHEP* 10 (2019), p. 206. DOI: [10.1007/JHEP10\(2019\)206](https://doi.org/10.1007/JHEP10(2019)206). arXiv: [1908.01493 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1908.01493).
- [67] N. E. J. Bjerrum-Bohr et al. “General Relativity from Scattering Amplitudes”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 121.17 (2018), p. 171601. DOI: [10.1103/PhysRevLett.121.171601](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.171601). arXiv: [1806.04920 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1806.04920).
- [68] C. Cheung e M. P. Solon. “Classical gravitational scattering at $\mathcal{O}(G^3)$ from Feynman diagrams”. Em: *JHEP* 06 (2020), p. 144. DOI: [10.1007/JHEP06\(2020\)144](https://doi.org/10.1007/JHEP06(2020)144). arXiv: [2003.08351 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/2003.08351).
- [69] A. Brandhuber e G. Travaglini. “On higher-derivative effects on the gravitational potential and particle bending”. Em: *JHEP* 01 (2020), p. 010. DOI: [10.1007/JHEP01\(2020\)010](https://doi.org/10.1007/JHEP01(2020)010). arXiv: [1905.05657 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1905.05657).

- [70] M. A. Huber et al. “Eikonal phase matrix, deflection angle and time delay in effective field theories of gravity”. Em: *Phys. Rev. D* 102.4 (2020), p. 046014. DOI: [10.1103/PhysRevD.102.046014](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.102.046014). arXiv: [2006.02375](https://arxiv.org/abs/2006.02375) [hep-th].
- [71] C. Heissenberg. “Angular Momentum Loss due to Tidal Effects in the Post-Minkowskian Expansion”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 131.1 (2023), p. 011603. DOI: [10.1103/PhysRevLett.131.011603](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.131.011603). arXiv: [2210.15689](https://arxiv.org/abs/2210.15689) [hep-th].
- [72] T. Damour. “Gravitational scattering, post-Minkowskian approximation and effective one-body theory”. Em: *Phys. Rev. D* 94.10 (2016), p. 104015. DOI: [10.1103/PhysRevD.94.104015](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.94.104015). arXiv: [1609.00354](https://arxiv.org/abs/1609.00354) [gr-qc].
- [73] T. Damour. “High-energy gravitational scattering and the general relativistic two-body problem”. Em: *Phys. Rev. D* 97.4 (2018), p. 044038. DOI: [10.1103/PhysRevD.97.044038](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.97.044038). arXiv: [1710.10599](https://arxiv.org/abs/1710.10599) [gr-qc].
- [74] G. Menezes e M. Sergola. “NLO deflections for spinning particles and Kerr black holes”. Em: *JHEP* 10 (2022), p. 105. DOI: [10.1007/JHEP10\(2022\)105](https://doi.org/10.1007/JHEP10(2022)105). arXiv: [2205.11701](https://arxiv.org/abs/2205.11701) [hep-th].
- [75] T. Azevedo, D. E. A. Matamoros e G. Menezes. “Compton scattering from supers-strings”. Em: (2024). arXiv: [2403.08899](https://arxiv.org/abs/2403.08899) [hep-th].
- [76] D. Amati, M. Ciafaloni e G. Veneziano. “Classical and Quantum Gravity Effects from Planckian Energy Superstring Collisions”. Em: *Int. J. Mod. Phys. A* 3 (1988), pp. 1615–1661. DOI: [10.1142/S0217751X88000710](https://doi.org/10.1142/S0217751X88000710).
- [77] D. Amati, M. Ciafaloni e G. Veneziano. “Superstring Collisions at Planckian Energies”. Em: *Phys. Lett. B* 197 (1987), p. 81. DOI: [10.1016/0370-2693\(87\)90346-7](https://doi.org/10.1016/0370-2693(87)90346-7).
- [78] D. Amati, M. Ciafaloni e G. Veneziano. “Higher Order Gravitational Deflection and Soft Bremsstrahlung in Planckian Energy Superstring Collisions”. Em: *Nucl. Phys. B* 347 (1990), pp. 550–580. DOI: [10.1016/0550-3213\(90\)90375-N](https://doi.org/10.1016/0550-3213(90)90375-N).
- [79] D. Amati, M. Ciafaloni e G. Veneziano. “Planckian scattering beyond the semi-classical approximation”. Em: *Phys. Lett. B* 289 (1992), pp. 87–91. DOI: [10.1016/0370-2693\(92\)91366-H](https://doi.org/10.1016/0370-2693(92)91366-H).
- [80] G. 't Hooft. “Graviton Dominance in Ultrahigh-Energy Scattering”. Em: *Phys. Lett. B* 198 (1987), pp. 61–63. DOI: [10.1016/0370-2693\(87\)90159-6](https://doi.org/10.1016/0370-2693(87)90159-6).
- [81] I. J. Muzinich e M. Soldate. “High-Energy Unitarity of Gravitation and Strings”. Em: *Phys. Rev. D* 37 (1988), p. 359. DOI: [10.1103/PhysRevD.37.359](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.37.359).
- [82] D. N. Kabat e M. Ortiz. “Eikonal quantum gravity and Planckian scattering”. Em: *Nucl. Phys. B* 388 (1992), pp. 570–592. DOI: [10.1016/0550-3213\(92\)90627-N](https://doi.org/10.1016/0550-3213(92)90627-N). arXiv: [hep-th/9203082](https://arxiv.org/abs/hep-th/9203082).
- [83] G. D’Appollonio et al. “High-energy string-brane scattering: Leading eikonal and beyond”. Em: *JHEP* 11 (2010), p. 100. DOI: [10.1007/JHEP11\(2010\)100](https://doi.org/10.1007/JHEP11(2010)100). arXiv: [1008.4773](https://arxiv.org/abs/1008.4773) [hep-th].
- [84] Z. Bern, J. J. M. Carrasco e H. Johansson. “Perturbative Quantum Gravity as a Double Copy of Gauge Theory”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 105 (2010), p. 061602. DOI: [10.1103/PhysRevLett.105.061602](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.105.061602). arXiv: [1004.0476](https://arxiv.org/abs/1004.0476) [hep-th].
- [85] Z. Bern et al. “Gravity as the square of gauge theory”. Em: *Phys. Rev. D* 82.6 (2010), p. 065003. DOI: [10.1103/PhysRevD.82.065003](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.82.065003). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.82.065003>.

- [86] Z. Bern, J. J. M. Carrasco e H. Johansson. “New relations for gauge-theory amplitudes”. Em: *Phys. Rev. D* 78.8 (2008), p. 085011. DOI: [10.1103/PhysRevD.78.085011](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.78.085011). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.78.085011>.
- [87] G. Menezes. “Color-kinematics duality, double copy and the unitarity method for higher-derivative QCD and quadratic gravity”. Em: *JHEP* 03 (2022), p. 074. DOI: [10.1007/JHEP03\(2022\)074](https://doi.org/10.1007/JHEP03(2022)074). arXiv: [2112.00978](https://arxiv.org/abs/2112.00978) [hep-th].
- [88] H. Johansson e A. Ochirov. “Double copy for massive quantum particles with spin”. Em: *JHEP* 09 (2019), p. 040. DOI: [10.1007/JHEP09\(2019\)040](https://doi.org/10.1007/JHEP09(2019)040). arXiv: [1906.12292](https://arxiv.org/abs/1906.12292) [hep-th].
- [89] H. Johansson e A. Ochirov. “Color-Kinematics Duality for QCD Amplitudes”. Em: *JHEP* 01 (2016), p. 170. DOI: [10.1007/JHEP01\(2016\)170](https://doi.org/10.1007/JHEP01(2016)170). arXiv: [1507.00332](https://arxiv.org/abs/1507.00332) [hep-ph].
- [90] J. J. M. Carrasco e I. A. Vazquez-Holm. “Loop-level double-copy for massive quantum particles”. Em: *Physical Review D* 103.4 (fev. de 2021). ISSN: 2470-0029. DOI: [10.1103/physrevd.103.045002](https://doi.org/10.1103/physrevd.103.045002). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.103.045002>.
- [91] H. Kawai, D. C. Lewellen e S. H. H. Tye. “A Relation Between Tree Amplitudes of Closed and Open Strings”. Em: *Nucl. Phys. B* 269 (1986), pp. 1–23. DOI: [10.1016/0550-3213\(86\)90362-7](https://doi.org/10.1016/0550-3213(86)90362-7).
- [92] Z. Bern et al. *The Duality Between Color and Kinematics and its Applications*. 2019. arXiv: [1909.01358](https://arxiv.org/abs/1909.01358) [hep-th].
- [93] A. Buonanno et al. “Snowmass White Paper: Gravitational Waves and Scattering Amplitudes”. Em: *Snowmass 2021*. 2022. arXiv: [2204.05194](https://arxiv.org/abs/2204.05194) [hep-th].
- [94] J. A. Wheeler. “On the Mathematical Description of Light Nuclei by the Method of Resonating Group Structure”. Em: *Phys. Rev.* 52 (1937), pp. 1107–1122. DOI: [10.1103/PhysRev.52.1107](https://doi.org/10.1103/PhysRev.52.1107).
- [95] L. D. Landau e E. M. Lifshitz. *Quantum mechanics: non-relativistic theory*. Vol. 3. Elsevier, 2013.
- [96] S. Weinberg. *The Quantum Theory of Fields: Volume 1, Foundations*. Cambridge University Press, 2005.
- [97] L. G. Yaffe. “Large N limits as classical mechanics”. Em: *Rev. Mod. Phys.* 54.2 (1982), pp. 407–435. DOI: [10.1103/RevModPhys.54.407](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.54.407). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.54.407>.
- [98] A. Cristofoli et al. “The Uncertainty Principle and Classical Amplitudes”. Em: (2021). arXiv: [2112.07556](https://arxiv.org/abs/2112.07556) [hep-th].
- [99] M. H. Al-Hashimi e U.J. Wiese. “Minimal position-velocity uncertainty wave packets in relativistic and non-relativistic quantum mechanics”. Em: *Annals of Physics* 324.12 (dez. de 2009), pp. 2599–2621. ISSN: 0003-4916. DOI: [10.1016/j.aop.2009.09.001](https://doi.org/10.1016/j.aop.2009.09.001). URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.aop.2009.09.001>.
- [100] L. D. Landau. *The classical theory of fields*. Vol. 2. Elsevier, 2013.
- [101] P. A. M. Dirac. “Classical theory of radiating electrons”. Em: *Proceedings of The Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 167 (1938), pp. 148–169. URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:122020006>.

- [102] M. Abraham. “Prinzipien der Dynamik des Elektrons”. Em: *Annalen der Physik* 315.1 (1902), pp. 105–179. DOI: <https://doi.org/10.1002/andp.19023150105>. eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/andp.19023150105>. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/andp.19023150105>.
- [103] M. Abraham. “Zur Theorie der Strahlung und des Strahlungsdruckes”. Em: *Annalen der Physik* 319.7 (1904), pp. 236–287. DOI: <https://doi.org/10.1002/andp.19043190703>. eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/andp.19043190703>. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/andp.19043190703>.
- [104] T. D. Newton e E. P. Wigner. “Localized States for Elementary Systems”. Em: *Rev. Mod. Phys.* 21 (1949), pp. 400–406. DOI: [10.1103/RevModPhys.21.400](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.21.400).
- [105] A. S. Wightman. “On the localizability of quantum mechanical systems”. Em: *Rev. Mod. Phys.* 34 (1962), pp. 845–872. DOI: [10.1103/RevModPhys.34.845](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.34.845).
- [106] Roy J. Glauber. “The Quantum theory of optical coherence”. Em: *Phys. Rev.* 130 (1963), pp. 2529–2539. DOI: [10.1103/PhysRev.130.2529](https://doi.org/10.1103/PhysRev.130.2529).
- [107] R. J. Glauber. “Coherent and incoherent states of the radiation field”. Em: *Phys. Rev.* 131 (1963), pp. 2766–2788. DOI: [10.1103/PhysRev.131.2766](https://doi.org/10.1103/PhysRev.131.2766).
- [108] E. C. G. Sudarshan. “Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 10 (1963), pp. 277–279. DOI: [10.1103/PhysRevLett.10.277](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.10.277).
- [109] T. W. B. Kibble. “Frequency Shift in High-Intensity Compton Scattering”. Em: *Phys. Rev.* 138 (1965), B740–B753. DOI: [10.1103/PhysRev.138.B740](https://doi.org/10.1103/PhysRev.138.B740).
- [110] L. M. Frantz. “Compton Scattering of an Intense Photon Beam”. Em: *Phys. Rev.* 139 (5B 1965), B1326–B1336. DOI: [10.1103/PhysRev.139.B1326](https://doi.org/10.1103/PhysRev.139.B1326). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.139.B1326>.
- [111] G. Leibbrandt. “The Light Cone Gauge in Yang-Mills Theory”. Em: *Phys. Rev. D* 29 (1984), p. 1699. DOI: [10.1103/PhysRevD.29.1699](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.29.1699).
- [112] S. Melville et al. “Wilson line approach to gravity in the high energy limit”. Em: *Phys. Rev. D* 89.2 (2014), p. 025009. DOI: [10.1103/PhysRevD.89.025009](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.89.025009). arXiv: [1306.6019 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1306.6019).
- [113] H. Goldstein e V. Twersky. “Classical mechanics”. Em: *Physics Today* 5 (1952).
- [114] H. Johansson e A. Ochirov. “Pure Gravities via Color-Kinematics Duality for Fundamental Matter”. Em: *JHEP* 11 (2015), p. 046. DOI: [10.1007/JHEP11\(2015\)046](https://doi.org/10.1007/JHEP11(2015)046). arXiv: [1407.4772 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1407.4772).
- [115] J. F. Donoghue e T. Torma. “On the power counting of loop diagrams in general relativity”. Em: *Phys. Rev. D* 54 (1996), pp. 4963–4972. DOI: [10.1103/PhysRevD.54.4963](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.54.4963). arXiv: [hep-th/9602121](https://arxiv.org/abs/hep-th/9602121).
- [116] A. Guevara, A. Ochirov e J. Vines. *Scattering of Spinning Black Holes from Exponentiated Soft Factors*. 2019. DOI: [10.1007/JHEP09\(2019\)056](https://doi.org/10.1007/JHEP09(2019)056). arXiv: [1812.06895 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1812.06895).
- [117] M. Z. Chung et al. “The simplest massive S-matrix: from minimal coupling to Black Holes”. Em: *JHEP* 04 (2019), p. 156. DOI: [10.1007/JHEP04\(2019\)156](https://doi.org/10.1007/JHEP04(2019)156). arXiv: [1812.08752 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1812.08752).

- [118] Erwin Schrödinger. “An undulatory theory of the mechanics of atoms and molecules”. Em: *Physical review* 28.6 (1926), p. 1049.
- [119] R. O. Hansen. “Multipole moments of stationary space-times”. Em: *J. Math. Phys.* 15 (1974), pp. 46–52. DOI: [10.1063/1.1666501](https://doi.org/10.1063/1.1666501).
- [120] W. Israel. “Event Horizons in Static Vacuum Space-Times”. Em: *Phys. Rev.* 164.5 (1967), pp. 1776–1779. DOI: [10.1103/PhysRev.164.1776](https://doi.org/10.1103/PhysRev.164.1776). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.164.1776>.
- [121] B. Carter. “Axisymmetric Black Hole Has Only Two Degrees of Freedom”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 26.6 (1971), pp. 331–333. DOI: [10.1103/PhysRevLett.26.331](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.26.331). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.26.331>.
- [122] W. Israel. “Event horizons in static electrovac space-times”. Em: *Commun. Math. Phys.* 8 (1968), pp. 245–260. DOI: [10.1007/BF01645859](https://doi.org/10.1007/BF01645859).
- [123] B. Maybee, D. O’Connell e J. Vines. “Observables and amplitudes for spinning particles and black holes”. Em: *JHEP* 12 (2019), p. 156. DOI: [10.1007/JHEP12\(2019\)156](https://doi.org/10.1007/JHEP12(2019)156). arXiv: [1906.09260 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1906.09260).
- [124] A. Ross e B. R. Holstein. “Spin effects in the effective quantum field theory of general relativity”. Em: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 40.25 (2007), p. 6973.
- [125] V. Vaidya. “Gravitational spin Hamiltonians from the S matrix”. Em: *Phys. Rev. D* 91.2 (2015), p. 024017. DOI: [10.1103/PhysRevD.91.024017](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.91.024017). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.91.024017>.
- [126] A. Guevara. “Holomorphic classical limit for spin effects in gravitational and electromagnetic scattering”. Em: *Journal of High Energy Physics* 2019.4 (abr. de 2019). ISSN: 1029-8479. DOI: [10.1007/jhep04\(2019\)033](https://doi.org/10.1007/jhep04(2019)033). URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP04\(2019\)033](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP04(2019)033).
- [127] N. Arkani-Hamed, T.-C. Huang e Y.-t. Huang. *Scattering Amplitudes For All Masses and Spins*. 2021. arXiv: [1709.04891 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1709.04891).
- [128] G. Menezes e L. Haiashi. “in preparation”.
- [129] R. Monteiro, D. OConnell e C. D. White. “Black holes and the double copy”. Em: *Journal of High Energy Physics* 2014.12 (dez. de 2014). ISSN: 1029-8479. DOI: [10.1007/jhep12\(2014\)056](https://doi.org/10.1007/jhep12(2014)056). URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP12\(2014\)056](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP12(2014)056).
- [130] A. Luna et al. “The double copy: Bremsstrahlung and accelerating black holes”. Em: *Journal of High Energy Physics* 2016.6 (jun. de 2016). ISSN: 1029-8479. DOI: [10.1007/jhep06\(2016\)023](https://doi.org/10.1007/jhep06(2016)023). URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP06\(2016\)023](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP06(2016)023).
- [131] A. Luna et al. “The classical double copy for TaubNUT spacetime”. Em: *Physics Letters B* 750 (nov. de 2015), pp. 272277. ISSN: 0370-2693. DOI: [10.1016/j.physletb.2015.09.021](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2015.09.021). URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2015.09.021>.
- [132] M. C. González et al. *The classical double copy in three spacetime dimensions*. 2019. arXiv: [1904.11001 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1904.11001).
- [133] E. P. Wigner. “On Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group”. Em: *Annals Math.* 40 (1939). Ed. por Y. S. Kim e W. W. Zachary, pp. 149–204. DOI: [10.2307/1968551](https://doi.org/10.2307/1968551).

-
- [134] V. Bargmann e Eugene P. Wigner. “Group Theoretical Discussion of Relativistic Wave Equations”. Em: *Proc. Nat. Acad. Sci.* 34 (1948), p. 211. DOI: [10.1073/pnas.34.5.211](https://doi.org/10.1073/pnas.34.5.211).

Apêndice A

Cópia dupla clássica

Atualmente podemos entender a cópia dupla como uma conexão entre teorias de Yang-Mills e gravitação, diferente da proposição original que relacionava amplitudes em teoria de cordas [91]. De modo a exemplificar essa conexão, podemos pensar em construir uma onda gravitacional a partir da cópia dupla de uma onda eletromagnética. Sabemos que uma teoria de Yang-Mills pode ser descrita pelo tensor de campo

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (\text{A.1})$$

na qual temos uma equação de continuidade

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad (\text{A.2})$$

em que $j^\mu = (\rho, \mathbf{j})$, com ρ sendo a carga e \mathbf{j} sendo a densidade de corrente. Tomando o calibre de Lorenz

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \quad (\text{A.3})$$

a (A.1) se reduz a

$$\square A^\mu = j^\mu. \quad (\text{A.4})$$

No caso de vácuo, esta última se reduz a uma equação de onda, cuja uma das soluções é

$$A_\mu = \varepsilon_\mu e^{ik \cdot x}, \quad (\text{A.5})$$

com $k_\mu \varepsilon^\mu = 0$, em que ε_μ é o vetor de polarização e k_μ é o quadrimomento. Podemos dotar essa onda com um fator de cor, tal que

$$A_\mu^a = c^a A_\mu = c^a \varepsilon_\mu e^{ik \cdot x}. \quad (\text{A.6})$$

Se usarmos essa definição na derivada covariante e fazendo esta ir a zero

$$\mathcal{D}^\mu = F_{\mu\nu} = \partial^\mu F_{\mu\nu}^a + g f^{abc} F_{\mu\nu}^c = 0, \quad (\text{A.7})$$

com $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a$, esta se reduz a

$$\partial^\mu (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) = c^a \partial^\mu (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = 0, \quad (\text{A.8})$$

logo podemos ignorar o termo de cor c^a e tratar como se o campo de calibre atuasse apenas no eletromagnetismo.

Devido a complexidade das equações de Einstein e o fato de estarmos olhando para situações fora da distribuição de massa, podemos expressar a métrica do espaço-tempo como

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}, \quad (\text{A.9})$$

com $h_{\mu\nu}$ representando um *gráviton*, uma pequena perturbação no espaço-tempo plano. Quando adotado o calibre TT¹, temos [10]

$$\partial^j h^{ij} = 0, \quad h^{0\mu} = 0, \quad h_i^i = 0. \quad (\text{A.10})$$

As equações de Einstein no vácuo assumem a forma

$$\square h_{\mu\nu} = 0, \quad (\text{A.11})$$

que possui ondas planas como um das soluções

$$h_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu} e^{ik \cdot x} \quad (\text{A.12})$$

em que $\varepsilon_{\mu\nu}$ é o tensor de polarização. Sabendo que o gráviton tem duas helicidades, assim como o fóton, podemos representar este como

$$\varepsilon_{\mu\nu}^\pm = \varepsilon_\mu^\pm \varepsilon_\nu^\pm \quad (\text{A.13})$$

em que $\varepsilon_\mu^\pm = \frac{1}{2}(0, \mp 1, i, 0)$. Usando isso, a (A.12) fica

$$h_{\mu\nu}^\pm = \varepsilon_\mu^\pm \varepsilon_\nu^\pm e^{ik \cdot x}, \quad (\text{A.14})$$

exatamente a mesma forma da (A.6), uma fator de fase multiplicado por duas quantidade de uma teoria de calibre. Trocando o termo do vetor de cor da teoria de calibre por uma quantidade cinemática (o vetor de polarização) obtêm-se uma solução para gravitação.

Uma complicação é que independente da escolha feita ao fazermos $c_i \mapsto \tilde{n}_i$ não obtemos uma teoria de gravitação pura. Podemos ver isso ao lembrar que a escolha feita em (A.13) não é única, ao combinar dois estados de helicidade de dois fótons devemos ter quatro possibilidades, podemos tomar as duas que faltam como

$$\frac{1}{2} (\varepsilon_\mu^+ \varepsilon_\nu^- + \varepsilon_\mu^- \varepsilon_\nu^+), \quad \frac{1}{2} (\varepsilon_\mu^+ \varepsilon_\nu^- - \varepsilon_\mu^- \varepsilon_\nu^+), \quad (\text{A.15})$$

respectivamente as combinações simétrica e antissimétrica. Esses contribuem com um grau de liberdade e são associados com um campo escalar e um pseudo-escalar, respectivamente. Também fica claro esses campos extras ao vermos que o produto tensorial $A^\mu \otimes A^\nu$ fatoriza como um multipletto $\varphi \oplus B^{\mu\nu} \oplus h^{\mu\nu}$. Os graus extras são respectivamente o *dilaton* e o *axion*. Existem várias caminhos possíveis para se tratar esses campos não físicos e isolar o gráviton [92].

Com isso em vista, podemos afirmar que é possível obter amplitudes gravitacionais usando apenas quantidades de uma teoria de calibre. Tendo em conta que teoria de perturbação é mais simples em YM do que as abordagens tradicionais na gravitação, a cópia dupla tem potencial para revolucionar a física gravitacional.

Ainda no contexto da cópia dupla clássica, demonstrou-se que o procedimento pode ser estendido para mais situações [129]. Considerando espaço-tempo do tipo *Kerr-Schild*, uma família de soluções em RG, temos que a métrica se escreve como

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \varphi k_\mu k_\nu, \quad (\text{A.16})$$

¹*transverse-traceless*

com φ sendo uma função escalar e o vetor k_μ respeitando

$$k^2 = 0, \quad k \cdot \partial k_\mu = 0. \quad (\text{A.17})$$

Quando usadas nas equações de campo da RG, estas as linearizam e as tornam mais fáceis de resolver. A partir da (A.16) podemos identificar o gráviton como assumindo a forma $h_{\mu\nu} = \varphi k_\mu k_\nu$ e então propor que, para esse espaço-tempo, a cópia única assume a forma

$$A_\mu^a = \varphi c^a k_\mu, \quad (\text{A.18})$$

assim, a cópia dupla seria obtida mapeando a carga de cor c^a num vetor k_μ . E foi mostrado que esta é de fato solução para equações de YM, as quais também linearizam as equações de campo YM [129].

Embora pareça abstrato, a cópia dupla Kerr-Schild engloba buracos negros de Schwarzschild e de Kerr. A métrica do espaço-tempo destes casos pode ser escrita como

$$\varphi_{Schw}(r) = \frac{2GM}{r}, \quad k^\mu = (1, \mathbf{e}_r) \quad (\text{A.19})$$

$$\varphi_{Kerr}(r', \theta) = \frac{2GM r'}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta}, \quad k^\mu = \left(1, \frac{r'x + ay}{r'^2 + a^2}, \frac{r'y + ax}{r'^2 + a^2}, \frac{z}{r'}\right), \quad (\text{A.20})$$

em que a é o raio da singularidade de Kerr ao longo do eixo z . Esse parâmetro é a norma do pseudovetor a^μ que inclui toda a informação a respeito da rotação do buraco negro, o *vetor de spin*. Tomando a cópia única de (A.19), temos campo de calibre

$$A_\mu = -\frac{Q}{4\pi r} k^\mu, \quad (\text{A.21})$$

que nada mais que o campo de uma carga pontual. A cópia dupla mapeia uma carga pontual a uma massa gravitacional pontual, diretamente análogo a trocar uma carga de cor por uma quantidade cinemática no caso das amplitudes. Enquanto para o caso Kerr, como podemos considerar este como uma distribuição de massa axialmente simétrica rotacionando um eixo, *i.e.* um disco rodando, sua cópia simples será um disco de carga rodando ao redor de um eixo [129]. Outros exemplos e aplicações da cópia dupla Kerr-Schild incluem partículas aceleradas [130], monopólos magnéticos [131] e soluções em duas dimensões [132]. Chamaremos essa solução de $\sqrt{\text{Kerr}}$.

A relação de cópia dupla garante que a dinâmica gravitacional para Kerr é completamente incluída no comportamento de $\sqrt{\text{Kerr}}$ numa teoria de calibre. Isso é importante quando estivermos tratando de uma outra área em que amplitudes também podem ajudar: o spin de buracos negros.

Apêndice B

Notação Espinorial

Nos diversos campos em que a física atua, existem conceitos fundamentais que desempenham funções cruciais na compreensão e descrição do mundo ao nosso redor. Um desses conceitos é o de espinores, que desempenha um papel essencial em áreas como mecânica quântica, teoria quântica de campos e outras disciplinas avançadas.

Espinores são objetos matemáticos que possuem propriedades peculiares e desempenham um papel central na descrição de partículas elementares. As partículas são definidas como representações unitárias e irredutíveis do grupo de Poincaré [133, 134]. Ao contrário dos vetores e tensores, os espinores não se comportam da mesma maneira sob rotações espaciais. Eles apresentam uma propriedade intrínseca chamada de *spin*, que está relacionada à rotação intrínseca das partículas no contexto da mecânica quântica. Para uma discussão mais detalhada do que será apresentado a seguir o leitor pode ler as referências [53, 54].

B.1 Matrizes de Pauli

As matrizes fundamentais no formalismo dos espinores são conhecidas como matrizes de Pauli, denotadas por σ^μ , em que $\mu = 0, 1, 2, 3$. Essas matrizes são definidas por:

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

E definimos também $\bar{\sigma}^\mu = (1, -\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3)$. Podemos usar as matrizes de Pauli para representar um vetor quadridimensional, $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, como

$$x^{\alpha\beta} = x^\mu \bar{\sigma}_\mu^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.2})$$

$$x_{\alpha\beta} = x_\mu \sigma_{\alpha\beta}^\mu = \begin{pmatrix} x^0 - x^3 & -x^1 + ix^2 \\ -x^1 - ix^2 & x^0 + x^3 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

Podemos ver isso como um homomorfismo entre $SO(1, 3)$ e $SL(2, \mathbb{C})$, pois esse mapeamento identifica um vetor x^μ do grupo $SO(1, 3)$ com uma matriz 2×2 do grupo $SL(2, \mathbb{C})$.

B.2 Soluções da equação de Dirac

A motivação inicial dos espinores pode ser compreendida a partir das soluções da equação de Dirac. A lagrangiana livre para o campo de Dirac Ψ é dada por

$$\mathcal{L} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi, \quad (\text{B.4})$$

em que

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0. \quad (\text{B.5})$$

A equação de movimento dessa lagrangiana nos dá a equação de Dirac

$$(-i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \Psi = 0. \quad (\text{B.6})$$

Multiplicando a equação de Dirac por $(i\rlap{-}\not{\partial} + m)$ obtemos uma equação de Klein-Gordon para Ψ

$$(-\partial^2 + m^2) \Psi = 0. \quad (\text{B.7})$$

Pode-se facilmente encontrar que a solução para esta são ondas planas, logo temos que

$$\Psi(x) \sim u(p)e^{ipx} + v(p)e^{-ipx}, \quad (\text{B.8})$$

desde que o momento seja on-shell $p^2 = p_\mu p^\mu = -m^2$. Os $u(p)$ são as soluções de energia positiva, enquanto os $v(p)$ são soluções de energia negativa. Usando essa expansão de ondas planas da (B.8), a equação de Dirac (B.6) pode ser expressa por

$$(-\not{p} + m)u(p) = 0, \quad (\not{p} + m)v(p) = 0, \quad (\text{B.9})$$

Notemos que cada equação em (B.9) possui duas soluções independentes, que podemos denotar por $u_s(p), v_s(p)$, com $s = \pm$. Colecionando tudo, podemos escrever uma equação geral para o campo livre Ψ

$$\Psi = \sum_{s=\pm} \int \frac{dp}{(2\pi)^3 2E_p} (b_s(p)u_s(p)e^{ipx} + d_s^\dagger(p)v_s(p)e^{-ipx}). \quad (\text{B.10})$$

O mesmo pode ser feito para $\bar{\Psi}$, encontrando uma expressão em função de $b_\pm^\dagger(p)$ e $d_\pm(p)$. Numa eventual quantização canônica, os b 's e d 's tornam-se os operadores fermiônicos de criação e aniquilação. Isso levará à definição dos estados de uma partícula e posteriormente às regras de Feynman para os férmions externos. Os $\bar{u}_\pm(p)$ descreverão férmions se propagando para frente no tempo, enquanto os $v_\pm(p)$ serão anti-férmions se propagando para frente no tempo. Sempre é possível escolher uma base em que, no referencial de repouso, u_\pm e v_\pm sejam autoestados da componente z do spin; então \pm denota spin para cima ou para baixo ao longo do eixo z . Para férmions sem massa, \pm denota a helicidade, que é a projeção do spin ao longo do momento da partícula.

B.3 Notação espinorial-helicidade

Vamos agora introduzir o formalismo espinorial-helicidade. Podemos usar a prescrição de (B.2) e (B.3) para representar um quadrimomento p^μ com $p^2 = m^2$ como uma matriz 2×2

$$p^{\dot{\alpha}\alpha} \equiv p^\mu \bar{\sigma}_\mu^{\dot{\alpha}\alpha} = \begin{pmatrix} p^0 + p^3 & p^1 - ip^2 \\ p^1 + ip^2 & p^0 - p^3 \end{pmatrix} \quad (\text{B.11})$$

$$p_{\alpha\dot{\alpha}} \equiv p_\mu \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu = \begin{pmatrix} p^0 - p^3 & -p^1 + ip^2 \\ -p^1 - ip^2 & p^0 + p^3 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.12})$$

Essas quantidades são identificadas como bi-espinores de momento, os pontos representam que as componentes se transformam com a representação direita do grupo de transformações, neste caso $SL_R(2, \mathbb{C})$. É imediato ver que o determinante de $p^{\dot{\alpha}\alpha}$ equivale a condição on-shell

$$\det(p^{\dot{\alpha}\alpha}) = m^2. \quad (\text{B.13})$$

No caso não massivo, as equações (B.9) se reduzem a

$$\not{p}v_{\pm}(p) = 0, \quad \bar{u}_{\pm}(p)\not{p} = 0. \quad (\text{B.14})$$

E o determinante de $p^{\dot{\alpha}\alpha}$ vale zero, logo é possível decompor a matriz como um produto de dois espinores

$$p^{\dot{\alpha}\alpha} = \tilde{\lambda}_i^{\dot{\alpha}} \lambda_i^{\alpha}. \quad (\text{B.15})$$

Exigindo que quadrimomento seja real e possua uma assinatura do tipo Lorentz, $(+, -, -, -)$, pode-se chegar na relação $(\lambda_i^{\alpha})^* = \pm \tilde{\lambda}_i^{\dot{\alpha}}$. O sinal depende da energia associada ao quadrimomento em questão. Após uma breve manipulação algébrica, é possível determinar

$$\lambda^{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{p^0 + p^3}} \begin{pmatrix} p^0 + p^3 \\ p^1 + ip^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.16})$$

$$\tilde{\lambda}^{\dot{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{p^0 + p^3}} \begin{pmatrix} p^0 + p^3 \\ p^1 - ip^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.17})$$

Os índices dos espinores podem ser levantados e baixados usando o tensor de Levi-Civica

$$\lambda_{\alpha} = \epsilon_{\alpha\beta} \lambda^{\beta}, \quad \tilde{\lambda}_{\dot{\alpha}} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \tilde{\lambda}^{\dot{\beta}}. \quad (\text{B.18})$$

No formalismo *espinor-helicidade*, uma amplitude de espalhamento genérica, envolvendo partículas sem massa, é uma função do conjunto de espinores de helicidade $\{\lambda_i, \tilde{\lambda}_i\}$, com o índice i englobando todas as pernas incidentes e emergentes do diagrama. Para padronizar a descrição, vamos considerar, a partir de agora, todas as partículas como sendo emergentes. Quantidades invariantes de Lorentz podem ser construídas a partir de λ e $\tilde{\lambda}$ através dos brackets $\langle \dots \rangle$ e colchetes $[\dots]$, que atuam como os invariantes básicos dos espinores. Assim, definimos

$$\langle \lambda_i \lambda_j \rangle \equiv \lambda_i^{\alpha} \lambda_{j\alpha} = \epsilon_{\alpha\beta} \lambda_i^{\alpha} \lambda_j^{\beta} = -\langle \lambda_j \lambda_i \rangle \equiv \langle ij \rangle, \quad (\text{B.19})$$

$$[\tilde{\lambda}_i \tilde{\lambda}_j] \equiv \tilde{\lambda}_{i\dot{\alpha}} \tilde{\lambda}_j^{\dot{\alpha}} = -\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \tilde{\lambda}_i^{\dot{\alpha}} \tilde{\lambda}_j^{\dot{\beta}} = -[\tilde{\lambda}_j \tilde{\lambda}_i] \equiv [ij], \quad (\text{B.20})$$

com $i, j = 1, \dots, n$. É imediato ver que $\langle \lambda_i \lambda_i \rangle = \langle ii \rangle = 0$ e $[\tilde{\lambda}_i \tilde{\lambda}_i] = [ii] = 0$, e também

$$\langle ij \rangle [ji] = 2i \cdot j. \quad (\text{B.21})$$

Para um dado quadrimomento $p^{\alpha\dot{\alpha}}$ os espinores de helicidade associado não são fixos, uma fase φ deixa a equação (B.15) invariante

$$\lambda_i^{\alpha} \rightarrow e^{-i\varphi_i} \lambda_i^{\alpha}, \quad \tilde{\lambda}_i^{\dot{\alpha}} \rightarrow e^{-i\varphi_i} \tilde{\lambda}_i^{\dot{\alpha}}. \quad (\text{B.22})$$

Essa liberdade na definição dos λ 's é gerada por um gerador de helicidade $U(1)$

$$h = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[-\lambda_i^{\alpha} \frac{\partial}{\partial \lambda_i^{\alpha}} + \tilde{\lambda}_i^{\dot{\alpha}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\lambda}_i^{\dot{\alpha}}} \right]. \quad (\text{B.23})$$

Assim, vamos identificar a helicidade $-1/2$ com λ e a helicidade $+1/2$ com $\tilde{\lambda}$. Assim, esses termos carregam tanto informação do momento quanto da helicidade.

Pode-se ver facilmente que esses espinores de helicidade são soluções da equação de Dirac não massiva. Podemos escrever

$$\not{p} = p_\mu \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & p_{\alpha\dot{\alpha}} \\ p^{\dot{\alpha}\alpha} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.24})$$

usando que

$$p_{\alpha\dot{\alpha}} = p_\mu \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu, \quad p^{\dot{\alpha}\alpha} = \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} p_{\dot{\beta}\beta} = p_\mu \bar{\sigma}_{\dot{\alpha}\alpha}^\mu. \quad (\text{B.25})$$

Com isso, os λ 's formam uma base para as soluções da equação de Dirac não massiva. Podemos escrever então

$$u_+(p) = v_-(p) = \begin{pmatrix} \lambda_\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \equiv |p\rangle, \quad u_-(p) = v_+(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\lambda}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \equiv |p], \quad (\text{B.26})$$

que satisfaz $\not{p}|p\rangle = 0 = \not{p}|p]$.

A notação espinorial-helicidade imediatamente nós a seguinte propriedade a partir da conservação de momento total de uma amplitude

$$\sum_{i=1}^n p_i^\mu = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i^\alpha \tilde{\lambda}_i^{\dot{\alpha}} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \langle ai \rangle [ib] = 0 \quad (\text{B.27})$$

B.3.1 Polarização de bósons

Agora, avançamos para estabelecer uma representação de bi-espinores para o vetor de polarização de um bóson gauge sem massa de helicidade ± 1 . Podemos escrever os vetores de polarização dos bósons de calibre, ε_\pm^μ com spin 1, como

$$\varepsilon_{+,i}^{\alpha\dot{\alpha}} = \sqrt{2} \frac{\tilde{\lambda}_i^{\dot{\alpha}} \mu_i^\alpha}{\langle \lambda_i \mu_i \rangle}, \quad (\text{B.28})$$

$$\varepsilon_{-,i}^{\alpha\dot{\alpha}} = \sqrt{2} \frac{\lambda_i^\alpha \tilde{\mu}_i^{\dot{\alpha}}}{[\lambda_i \mu_i]}, \quad (\text{B.29})$$

em que μ_i e $\tilde{\mu}_i$ são espinores de referências arbitrários associados a momentos $q_i^{\alpha\dot{\alpha}} \equiv \mu_i^\alpha \tilde{\mu}_i^{\dot{\alpha}}$. Com as seguintes propriedades sendo respeitadas

$$(\varepsilon_+)^* = \varepsilon_-, \quad (\text{B.30})$$

$$k \cdot \varepsilon_\pm = \frac{1}{2} \lambda_\alpha \tilde{\lambda}_{\dot{\alpha}} \varepsilon_\pm^{\alpha\dot{\alpha}} \sim ([\lambda\lambda] \text{ ou } \langle \lambda\lambda \rangle) = 0 \quad (\text{B.31})$$

$$\varepsilon_+ \cdot (\varepsilon_+)^* = \varepsilon_+ \cdot \varepsilon_- = -\frac{2 \tilde{\lambda}_{\dot{\alpha}} \mu^\alpha \lambda_\alpha \tilde{\mu}_{\dot{\alpha}}}{2 \langle \lambda\mu \rangle [\lambda\mu]} = -1 \quad (\text{B.32})$$

$$\varepsilon_+ \cdot (\varepsilon_-)^* = \varepsilon_+ \cdot \varepsilon_- = \frac{2 \tilde{\lambda}_{\dot{\alpha}} \mu^\alpha \tilde{\lambda}_{\dot{\alpha}} \mu_\alpha}{2 \langle \lambda\mu \rangle^2} = 0. \quad (\text{B.33})$$

B.3.2 Polarização de férmions

A polarização de espinores de Dirac nós dá soluções de partícula e antipartículas. De modo similar à (B.26), para o caso das antipartículas, ficamos com

$$\bar{u}_+(p) = \bar{v}_-(p) = (0 \ \tilde{\lambda}_{\dot{\alpha}}) \equiv [p|, \quad \bar{u}_-(p) = \bar{v}_+(p) = (\lambda^\alpha \ 0) \equiv \langle p|. \quad (\text{B.34})$$

Juntando a (B.26) e (B.34), temos

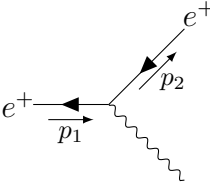
$$\langle k | \gamma^\mu | p \rangle = 0, \quad [k | \gamma^\mu | p] = 0 \quad (\text{B.35})$$

$$\langle k | \gamma^\mu | p \rangle = \lambda^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \tilde{\lambda}^{\dot{\alpha}} = 2p^\mu, \quad [p | \gamma^\mu | p] = 2p^\mu. \quad (\text{B.36})$$

Os graus de liberdade de férmions externos não massivos são expressos pelos espinores de helicidade λ e $\tilde{\lambda}$. Como todos os momentos externos são emergentes, podemos relacionar $|p\rangle$ e $\langle p|$ com estados de helicidade $-1/2$ e $|p]$ e $[p|$ com estados de helicidade $1/2$. Logo, férmions que saem de um diagrama são representados por $|p]$ e $[p|$, enquanto anti-férmions que saem de um diagrama são representados por $|p\rangle$ e $\langle p|$. Vamos enunciar uma última identidade que é relevante, a identidade de Fierz

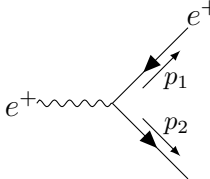
$$[i | \gamma^\mu | j \rangle \langle l | \gamma^\mu | k] = 2[ik] \langle lj \rangle. \quad (\text{B.37})$$

- Espalhamento de partículas - aniquilar e^+ e criar e^+



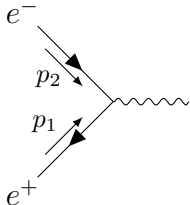
$$= ie(p_1^\mu + p_2^\mu). \quad (\text{C.8})$$

- Criação de partículas - criar e^- e criar e^+



$$= ie(-p_1^\mu + p_2^\mu). \quad (\text{C.9})$$

- Aniquilação de partículas - aniquilar e^- e aniquilar e^+

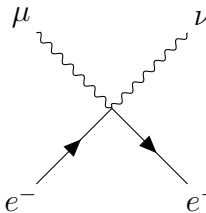


$$= ie(-p_1^\mu + p_2^\mu). \quad (\text{C.10})$$

E por fim temos o vértice quádruplo, devido ao termo

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = e^2 A_\mu^2 |\phi|^2. \quad (\text{C.11})$$

A regra de Feynman para esse vértice é



$$= 2ie^2 g_{\mu\nu} \quad (\text{C.12})$$