

Dissertação de Mestrado

# INOMOGENEIDADES LOCAIS

Josephine Nogueira Rua

Instituto de Cosmologia e Gravitação - ICRA\CBPF  
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF

Rio de Janeiro, 13 Agosto de 2010.

*À Ciência Vintage.*

*À Nádia, guerreira de todos os dias.*

*A ciência é infinita*  
*O trabalho, fragmentado*  
*Interrompido*  
*O cientista, um sonhador*  
*Prazos, pesadelos*  
*Entrega, desespero*  
*Apresentações são o fim ou o começo*  
*e ainda nem falamos sobre a natureza..*

## Agradecimentos

Ao Prof. Mário Novello. A quem eu devo a minha orientação acadêmica, profissional e pessoal. Agradeço e dedico eterno respeito e admiração.

À minha família: querida mamãe.

Aos amigos. Meu presente indo e vindo.

Ao caos permanente.

Ao imprevisível.

Ao *Franz Ferdinand*.

Ao Instituto de Cosmologia e Gravitação - ICRA\CBPF e à Coordenação de Formação Científica - CFC\CBPF.

À CAPES pela bolsa fornecida.

## Resumo

A partir da solução de Tolman (1934), Novikov propôs descrever o comportamento dos quasares através de uma coleção de eventos sucessivos de criação de matéria (1964). Neste modelo, núcleos de poeira (descrita como um fluido perfeito sem pressão) são embebidos no vácuo que, por sua vez, constituem inhomogeneidades locais dentro do universo de Friedmann. Em 1982, Regina Arcuri em sua tese de mestrado no CBPF, estudou a generalização desse processo para os três tipos de geometria possíveis: aberta, fechada e plana. Partindo desta tese, percorremos o caminho dos trabalhos históricos sobre *colagem* de métricas: o colapso gravitacional de Oppenheimer e Snyder (1939), o *queijo-suíço* de Einstein e Straus (1945) e estrelas com fonte de radiação de Vaidya (1953): todos esses trabalhos têm em comum o estudo de fluidos perfeitos, com ou sem pressão, minimalmente acoplados com a gravitação. Decidimos, assim, estudar as condições de contorno para fontes não-minimalmente acopladas, tomando como base o trabalho do universo sem singularidade de Novello e Salim (1978), um dos primeiros a tratar universos no singulares.

## Abstract

From Tolman's solution (1934), Novikov had suggested describing the behavior of quasars through a collection of successive events (1964). In this model, dust nucleus (described as a perfect fluid pressureless) are walled by empty space, creating local inhomogeneities in a Friedmann background. In 1982, Regina Arcuri in her master thesis (CBPF), generalized this process for three background geometries: open, closed and flat. At this point, we have decided to take the historical path of works about *gluing* metrics, which are: Oppenheimer and Snyder's gravitational collapse (1939), Einstein and Straus's *swiss-cheese* (1945), and Vaidya's radioactive stars (1953): all these works have in common the studied of perfect fluids, with or without pressure, minimal coupling with gravitation. We have decided, thereby, to study about matching conditions for non minimal coupling metrics, taking into account the non singular universe of Novello and Salim (1978), one of the first to investigate non singular universes.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Condições de Contorno</b>	<b>5</b>
2.1	Métrica Esfericamente Simétrica . . . . .	5
2.2	Condições de Contorno . . . . .	6
2.3	Algumas Curvaturas Extrínsecas e Métricas Intrínsecas . . . . .	9
2.3.1	Métrica de Friedmann . . . . .	9
2.3.2	Métrica de Schwarzschild . . . . .	11
2.3.3	Métrica de Vaidya . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Soluções clássicas apresentando inhomogeneidades locais</b>	<b>15</b>
3.1	Universo de Einstein e Strauss . . . . .	15
3.1.1	Universo de Friedmann . . . . .	16
3.1.2	A estrela tem a mesma densidade do universo exterior . . . . .	17
3.1.3	A solução do vazio pode ser escrita em coordenadas de Schwarzschild	18
3.2	Colapso de Oppenheimer e Snyder . . . . .	21
3.3	Universo de Tolman . . . . .	24
3.4	Universo de Novikov . . . . .	29
3.4.1	Coefficiente de Expansão e Tempo Crítico . . . . .	33
3.4.2	Vetores de Killing . . . . .	34
3.4.3	Hipersuperfícies de Separação em Novikov . . . . .	36
3.4.4	Comportamento das Geodésicas . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Universo de Novello e Salim</b>	<b>41</b>
4.1	Apresentação . . . . .	41
4.2	Uma Solução Particular . . . . .	42
4.3	Sobre Inhomogeneidades em Novello-Salim . . . . .	45
4.4	Evolução da Hipersuperfície na Região Novello-Salim . . . . .	49
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>52</b>
<b>A</b>	<b>Tensor Energia-Momento</b>	<b>56</b>
<b>B</b>	<b>Quantidades Cinemática</b>	<b>60</b>

# Lista de Figuras

3.1	O comportamento $r(t)$ do universo de Novikov . . . . .	40
4.1	Evolução temporal do fator de escala e da densidade de energia na região Novello-Salim e a taxa de expansão da hipersuperfície de separação $\Sigma$ . . . . .	51

# Capítulo 1

## Introdução

No famoso artigo sobre as equações de campo da gravitação (1915), Einstein propôs uma solução para o problema do periélio de Mercúrio usando uma aproximação em coordenadas retangulares entorno de uma métrica esfericamente simétrica sem rotação e sem carga elétrica. Pouco depois, ainda no mesmo ano, Karl Schwarzschild descreve uma solução exata em coordenadas do tipo polar para o mesmo problema. Einstein, muito entusiasmado com a notícia da primeira solução exata para a TRG, lê a carta que o conterrâneo Schwarzschild lhe escreveu ainda no *front* Russo durante a I Guerra Mundial descrevendo o seu trabalho.<sup>1</sup>

Esta solução contém um horizonte de eventos chamado raio de Schwarzschild<sup>2</sup>, que é proporcional a massa gravitacional contida na métrica esférica. Assim temos o primeiro modelo estelar estático no qual um corpo esfericamente simétrico sem rotação e sem carga

---

<sup>1</sup>Comentário do final da carta: *Como você pode ver, a guerra tem me tratado bem o bastante, apesar do intenso tiroteio, permitindo afastar-me disto tudo e percorrer este caminho na terra das tuas ideias.*[5]

<sup>2</sup>Até a década de 1960 tratava-se o raio de Schwarzschild como uma singularidade por conta da divergência da métrica neste evento. Esta singularidade, entretanto, não é real, sendo apenas uma limitação do sistema de coordenadas. Os invariantes de Debever não divergem aqui.[14]

elétrica com massa gravitacional  $M$  está envolto pela métrica de Schwarzschild.

Já em 1922, um russo que havia lutado no outro lado do *front* durante a I Guerra Mundial, descreveu a primeira solução de universo em expansão para a TRG. Alexander Friedmann teve seu trabalho *engavetado* por mais de um ano até o relutante *referee* ser pressionado por um grupo de influentes cientistas de São Petersburgo. Albert Einstein escreveu uma nota corrigindo erroneamente o trabalho de Friedmann, e posteriormente, ao retirar sua correção, ressaltou sua irrelevância.[16] Com as observações que levaram Edwin Hubble a concluir que o universo está em expansão<sup>3</sup>, o modelo homogêneo, isotrópico e singular de Friedmann ganhou notoriedade e a importância.

No início da II Guerra Mundial (1939), Oppenheimer - antes de participar do Projeto Manhattan e tornar-se o *destruidor dos mundos*<sup>4</sup> - publicou dois trabalhos pioneiros na área de colapsos gravitacionais. O primeiro sobre o limite superior para a massa de estrelas de nêutrons, cujas massas quando superiores a 0,7 massas solares não reencontram equilíbrio hidrostático, conhecido como limite de Tolman-Oppenheimer-Volkoff. Iniciando o estudo sobre soluções não-estáticas para a TRG, publica com Hartland Snyder a primeira estrela de contração eterna (para observadores externos), o embrião do buraco negro<sup>5</sup>. Nessa perspectiva a estrela é um núcleo de poeira em expansão (modelo fechado de Friedmann) embebida no vácuo (métrica externa de Schwarzschild).

A descrição de objetos astrofísicos super energéticos tais como buracos negros e quasares impulsionou, nas décadas seguintes, o estudo de condições de contorno entre métricas.

---

<sup>3</sup>O desvio para o vermelho de galáxias fora do nosso grupo local.

<sup>4</sup>Após o primeiro teste nuclear, Oppenheimer citou um verso hindu de Bhagavad Gita: *Now I am become Death, the destroyer of worlds.*

<sup>5</sup>Termo cunhado em 1967 por John Wheeler durante discurso no Instituto Goddard.

Em linhas gerais, a ideia geral era levantar hipóteses sobre como a matéria/energia curvam o espaço-tempo dentro do objeto, e então ligar esta métrica ao universo externo através de uma hipersuperfície tri-dimensional. Diversos autores escreveram sobre condições de contorno, como: Lanczos (1922), Darmois (1924), O'Brien e Synge (1952), Lichnerowicz (1955), Israel (1966), Lake (1980), Fayos et al (1991), entre outros. A escolha apropriada da métrica também leva em consideração a estrutura a qual descreve. Uma métrica esfericamente simétrica pode ser produzida por poeira (Tolman 1934), vazio (Schwarzschild 1915), expansão homogênea e isotrópica (Friedmann 1922), radiação (Vaidya 1950, Raychandhuri 1953, Bondi 1964), etc.

Na primeira metade do século XX a inspiração destes trabalhos era a descrição de objetos astrofísicos. A partir dos anos 60, os problemas enfrentados pelo modelo padrão resgataram o estudo sobre *colagem* de métricas sob outro ponto de vista. São muitas as implicações discutidas ao se descrever o universo pelo modelo isotrópico e homogêneo de Friedmann: podemos questionar a homogeneidade do mundo quando observamos a estrutura filamentosa formada por galáxias e *clusters* a escalas de 100 a 300 Mpc, ou supor escalas ainda maiores nas quais o universo restaura sua homogeneidade. Algumas das soluções propostas consistem em descrições sobre o comportamento de inhomogeneidades locais no universo de Friedmann.

Esta tese pretende abordar alguns trabalhos relevantes sobre inhomogeneidades locais e também apresentar as condições de contorno para um modelo estelar de fótons não-lineares.

## Notação

- Métrica de Minkowski:  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -)$
- Símbolo de Christoffel de segunda espécie:  

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}(g_{\lambda\mu,\nu} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda})$$
- Equação da geodésica:  $\frac{d^2x^{\alpha}}{d\lambda^2} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda} = 0$
- Tensor de Riemann:  $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} \doteq \Gamma^{\alpha}_{\beta,\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\beta,\nu\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\beta\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\beta\nu}$
- Tensor de Ricci:  $R_{\mu\nu} \doteq R^{\alpha}_{\alpha\mu\nu}$
- Escalar de curvatura:  $R \doteq R^{\alpha}_{\alpha}$
- Tensor de Einstein:  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$
- Equações de campo Einstein:  $G_{\mu\nu} = -kT_{\mu\nu}$
- $k \doteq \frac{8\pi G}{c^4}$
- Operação de simetrização (  $( )$  ):  $A_{(\mu\nu)} \doteq \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu})$
- Operação de anti-simetrização [  $]$  :  $A_{[\mu\nu]} \doteq \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu})$

# Capítulo 2

## Condições de Contorno

### 2.1 Métrica Esfericamente Simétrica

Vamos resolver as equações de Einstein para o caso da métrica estática esfericamente simétrica. Dada a métrica:

$$ds^2 = e^\lambda dt^2 - e^\mu dr^2 - e^\nu (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (2.1)$$

onde  $\lambda$ ,  $\mu$  e  $\nu$  são funções de  $t$  e  $r$ .

Para a métrica (2.1) encontraremos as seguintes expressões não nulas para  $R_{\mu\nu}$ :

$$R_{00} = \frac{1}{2}(\ddot{\mu} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\mu}}{2} + \frac{\dot{\mu}^2}{2} + 2\ddot{\nu} - \dot{\lambda}\dot{\nu} + \dot{\nu}^2) - \frac{e^{\lambda-\mu}}{2}(\lambda'' - \frac{\lambda'\mu'}{2} + \frac{\lambda'^2}{2} + \lambda'\nu'), \quad (2.2)$$

$$R_{01} = \frac{1}{2}(2\dot{\nu}' - \lambda'\dot{\nu} + \dot{\nu}\nu' - \dot{\mu}\nu'), \quad (2.3)$$

$$R_{11} = -\frac{e^{\mu-\lambda}}{2}(\ddot{\mu} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\mu}}{2} + \frac{\dot{\mu}^2}{2} + \dot{\mu}\dot{\nu}) + \frac{1}{2}(\lambda'' - \frac{\lambda'\mu'}{2} + \frac{\lambda'^2}{2} + 2\nu'' - \mu'\nu' + \nu'^2), \quad (2.4)$$

$$R_{22} = -1 - \frac{e^{\nu-\lambda}}{2}(\ddot{\nu} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{2} + \frac{\dot{\nu}^2}{2} + \dot{\nu}^2) + \frac{e^{\nu-\mu}}{2}(\frac{\lambda'\nu'}{2} - \frac{\mu'\nu'}{2} + \nu'' + \nu'^2), \quad (2.5)$$

$$R_{33} = \sin^2 \theta R_{22}, \quad (2.6)$$

tal que  $\dot{x} \doteq dx/dt$  e  $x' \doteq dx/dr$ , para qualquer  $x$ .

Finalmente, as componentes não nulas do tensor de Einstein escrevem-se:

$$G_{00} = -\frac{e^{-\lambda}}{4}(\dot{\nu}^2 + 2\dot{\mu}\dot{\nu}) + \frac{e^{-\mu+\lambda}}{4}(4\nu'' - 2\mu'\nu' + 3\nu'^2) - e^{-\nu+\lambda}, \quad (2.7)$$

$$G_{01} = \frac{1}{4}(4\dot{\nu}' - 2\lambda'\dot{\nu} + 2\dot{\nu}\nu' - 2\dot{\mu}\nu' - 2\lambda'\nu' + \nu'^2) + \frac{e^{\mu-\lambda}}{4}(4\ddot{\nu} - 2\dot{\lambda}\dot{\nu} + 3\dot{\nu}^2) + e^{\mu-\nu}, \quad (2.8)$$

$$G_{11} = -\frac{1}{4}(2\lambda'\nu' + \nu'^2) - \frac{e^{\mu-\lambda}}{4}(-4\ddot{\nu} + 2\dot{\lambda}\dot{\nu} - 3\dot{\nu}^2) + e^{\mu-\nu}, \quad (2.9)$$

$$G_{22} = \frac{e^{\nu-\mu}}{4}(2\lambda'' - \lambda'\mu' + \lambda'\nu' + 2\nu'' - \mu'\nu' + \nu'^2 + \lambda'^2) + \frac{e^{\nu-\lambda}}{4}(2\ddot{\mu} - \dot{\lambda}\dot{\mu} + \dot{\mu}^2 + \dot{\mu}\dot{\nu} + 2\ddot{\nu} - \dot{\lambda}\dot{\nu} + \dot{\nu}^2), \quad (2.10)$$

$$G_{33} = G_{22} \sin^2 \theta. \quad (2.11)$$

## 2.2 Condições de Contorno

Seção baseada nos trabalho de Arcuri [1] e Misner, Sharp [12].

Seja uma hipersuperfície  $\Sigma$  dividindo uma variedade quadridimensional em duas regiões

$M$  e  $\overline{M}$ . A variedade  $M$ , de coordenadas  $x^\alpha$ , é representada por uma base de vetores

linearmente independentes  $e_\alpha = \partial/\partial x^\alpha$ . O deslocamento infinitesimal  $d\vec{s} = e_\alpha \cdot dx^\alpha$

implica em  $ds^2 = e_\alpha \cdot e_\beta dx^\alpha dx^\beta$ . Assim, definimos o tensor métrico da variedade

$g_{\alpha\beta} = e_\alpha \cdot e_\beta$ , onde  $\alpha = \{0, 1, 2, 3\}$ . Para a hipersuperfície  $\Sigma$ , cujas coordenadas

intrínsecas são  $u_{(i)}$ , a base vetorial é  $e_{(i)} = \frac{\partial}{\partial u_{(i)}}$ . Da mesma forma a métrica intrínseca é

$\gamma_{(i)(j)} = e_{(i)} \cdot e_{(j)}$ , onde  $i = \{1, 2, 3\}$  não exclui necessariamente a coordenada temporal.

Sobre  $\Sigma$  podemos escrever as coordenadas  $x_\alpha$  como função das coordenadas intrínsecas,

dessa forma o tensor métrico pode ser escrito em função da métrica  $g_{\alpha\beta}$ :

$$\gamma_{(i)(j)} = e_{(i)}^\alpha e_{(j)}^\beta g_{\alpha\beta}, \quad (2.12)$$

onde  $e_{(i)}^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{u^{(i)}}$ .

Seja um vetor  $\vec{n}$  normal a  $\Sigma$ , tal que  $\vec{n} = n^\alpha e_\alpha$  e ainda  $\vec{n} \cdot \vec{n} = \epsilon$ , onde  $\vec{n}$  é tipo-tempo quando  $\epsilon = +1$  e tipo-espaço quando  $\epsilon = -1$ . Para sabermos como  $\vec{n}$  comporta-se quando transportado paralelamente ao longo de  $e_{(i)}$  basta

$$\nabla_{(i)} \vec{n} = K_{(i)}^{(j)} \vec{e}_{(j)}, \quad (2.13)$$

na qual a operação  $\nabla_{(i)}$  define a derivada covariante nas coordenadas de  $\Sigma$ . E ao projetarmos essa quantidade sobre a hipersuperfície obtemos a equação para o tensor curvatura extrínseca:

$$K_{(i)(j)} = e_{(j)} \cdot \nabla_{(i)} \vec{n} = n_{\alpha;\beta} e_{(i)}^\beta e_{(j)}^\alpha, \quad (2.14)$$

onde o operador  $;\alpha$  define a derivada covariante em coordenadas  $x^\alpha$ .

Quais condições de colagem devemos aplicar? Segundo Arcuri [1], depois de analisar as condições de contorno de Darmois, Lichnerowicz, O'Brien e Synge, as condições de Darmois são as mais adequadas para resolver problemas entre ligações de métricas em Relatividade Geral. Sendo assim vamos enunciá-la:

*Sejam  $x^\alpha, \bar{x}^\alpha$  as coordenadas em  $M$  e  $\bar{M}$ , e  $g_{\alpha\beta}, \bar{g}_{\alpha\beta}$  as métricas correspondentes. A equação de hipersuperfície  $\Sigma$  é dada por:*

$$f(x^\alpha) = 0 \text{ em } M, \quad \bar{f}(\bar{x}^\alpha) = 0 \text{ em } \bar{M},$$

*sendo que estas funções são de classe  $C^2$ . Os vetores normais a  $\Sigma$  serão:*

$$n_\alpha = (g_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta)^{-1/2} f, \quad \alpha \text{ em } M$$

$$\bar{n}_\alpha = (\bar{g}_{\alpha\beta} \bar{n}^\alpha \bar{n}^\beta)^{-1/2} \bar{f}, \quad \alpha \text{ em } \bar{M}$$

As duas representações paramétricas de  $\Sigma$  são dadas por:

$$x^\alpha = x^\alpha(u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}) \text{ em } M \text{ e } \bar{x}^\alpha = \bar{x}^\alpha(u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}) \text{ em } \bar{M}$$

onde agora  $x^\alpha$  e  $\bar{x}^\alpha$  são funções de classe  $C^3$ , tal que  $\Sigma$  é coberto pelo mesmo domínio de  $u^{(i)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) em ambas as representações. Logo, em  $\Sigma$ ,  $g_{\alpha\beta}(u^{(i)})$  são de classe  $C^2$ .

Então, para que  $M$  e  $\bar{M}$  possam ser ligadas através da hipersuperfície  $\Sigma$ , é preciso que  $\gamma_{(i)(j)}$  e  $K_{(i)(j)}$ , calculadas como funções de  $u^{(i)}$  através de  $g_{\alpha\beta}$  e  $\bar{g}_{\alpha\beta}$ , sejam idênticas.

A continuidade do vetor normal sobre a hipersurfície acarreta outras condições a serem satisfeitas também pelo tensor de Einstein por conta da equação  $G_{\alpha\beta} = -kT_{\alpha\beta}$ . Veja as projeções do tensor energia-momento (A.1) sobre  $\Sigma$ :

$$(\rho)_\Sigma = T_{\alpha\beta}(V^\alpha V^\beta)_\Sigma \quad (2.15)$$

$$(q_\alpha n^\alpha)_\Sigma = T_{\alpha\beta}(n^\alpha V^\beta)_\Sigma \quad (2.16)$$

$$(p + \Pi_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta)_\Sigma = T_{\alpha\beta}(n^\alpha n^\beta)_\Sigma \quad (2.17)$$

Das equações acima podemos concluir que o fluxo de calor e a pressão total que atravessam a hipersurfície de separação entre duas regiões do espaço precisam ser contínuas para satisfazer as condições de Darmois. A densidade de energia, entretanto, pode ter valores diferentes em cada região. Isto nos permite num exame imediato concluir que nenhuma métrica de radiação com equação de estado  $p = \frac{\rho}{3}$  pode ser conectada a métrica externa de Schwarzschild, por exemplo. Tal verificação pode nos poupar trabalhosos cálculos sobre uma classe de observadores inadequada para a análise pretendida.

## 2.3 Algumas Curvaturas Extrínsecas e Métricas Intrínsecas

Calculemos a curvatura extrínseca e métrica intrínseca de algumas geometrias conhecidas. As informações aqui reunidas podem servir para o estudo de *colagens* entre regiões distintas com Friedmann, Schwarzschild e Vaidya seja na formação de inomogeneidades locais ou trabalhos relacionados ao colapso gravitacional entre hipersuperfícies de separação  $\Sigma$  tipo-tempo:

$$ds_{\Sigma}^2 = d\tau^2 - \mathcal{R}^2(\tau) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) , \quad (2.18)$$

cujas coordenadas intrínsecas são  $u^{(i)} = \{\tau, \theta, \phi\}$ . O vetor tangente à hipersuperfície  $\Sigma$  é dado pela tri-velocidade do observador  $V_{\Sigma}^{(i)}$  que escolhemos para descrever o fluido, de forma que seja do tipo-tempo. O vetor normal de tipo-espaço  $n_{\Sigma}^{(i)}$  é tal que

$$\gamma^{(i)(j)} V_{\Sigma}^{(i)} n_{\Sigma}^{(j)} = 0, \text{ com}$$

$$V_{\Sigma}^{(i)} = (1, 0, 0) . \quad (2.19)$$

### 2.3.1 Métrica de Friedmann

Seja a métrica de Friedmann dada por:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) [d\chi^2 + \sigma^2(\chi) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] . \quad (2.20)$$

As coordenadas são  $x^{\alpha} = \{t, \chi, \theta, \phi\}$ , definindo a hipersuperfície como

$\Sigma : \chi = \chi_0 = \text{constante}$ . As componentes não nulas do tensor de Einstein de acordo com as equações (2.7) a (2.10) são:

$$G_{00} = \frac{1}{a^2} \left\{ \frac{2}{\sigma} \frac{d^2 \sigma}{d\chi^2} - 3 \left( \frac{da}{dt} \right)^2 + \frac{1}{\sigma^2} \left[ \left( \frac{d\sigma}{d\chi} \right)^2 - 1 \right] \right\} , \quad (2.21)$$

$$G_{11} = 2a \frac{d^2 a}{dt^2} + \left( \frac{da}{dt} \right)^2 - \frac{1}{\sigma^2} \left[ \left( \frac{d\sigma}{d\chi} \right)^2 - 1 \right], \quad (2.22)$$

$$G_{22} = \sigma^2 \left[ 2a \frac{d^2 a}{dt^2} + \left( \frac{da}{dt} \right)^2 - \frac{1}{\sigma} \frac{d^2 \sigma}{d\chi^2} \right], \quad (2.23)$$

$$G_{33} = G_{22} \sin^2 \theta. \quad (2.24)$$

Os vetores tangente e normal à hipersuperfície  $\Sigma$ , definida na eq. (2.18), dado um observador tipo-tempo:

$$V^\alpha = (\dot{t}, \dot{\chi}, 0, 0) \Rightarrow V_\alpha = (\dot{t}, -a^2 \dot{\chi}, 0, 0), \quad (2.25)$$

$$n^\alpha = \pm \left( -a \dot{\chi}, -\frac{\dot{t}}{a}, 0, 0 \right) \Rightarrow n_\alpha = \pm (-a \dot{\chi}, a \dot{t}, 0, 0), \quad (2.26)$$

onde o sinal  $+$  e  $-$  representam a normal deixando ou chegando à  $\Sigma$ , respectivamente.

Sendo  $\dot{x} \doteq dx/d\tau$ . A escolha do sinal da normal dependerá se a região está sendo considerada interna ou externa. Podemos estabelecer todas as condições para duas regiões estarem satisfatoriamente conectadas sem precisar definir qual é o sentido da normal. Uma vez que a *colagem* seja possível, a forma pela qual o sistema será modelado (direção e sentido de vetores e tensores) o descreverá fisicamente.

Usando as eq. (2.15) a (2.17), os tipos de energia gerados pela métrica de Friedmann atravessam  $\Sigma$  de tal forma que suas quantidades tocam-a como:

$$k(\rho)_{\Sigma_{\text{Friedmann}}} = -\frac{\dot{t}^2}{a^2} \left\{ \frac{2}{\sigma} \frac{d^2 \sigma}{d\chi^2} - 3 \left( \frac{\dot{a}}{\dot{t}} \right)^2 + \frac{1}{\sigma^2} \left[ \left( \frac{d\sigma}{d\chi} \right)^2 - 1 \right] \right\} + \quad (2.27)$$

$$-\dot{\chi}^2 \left\{ \frac{2a}{\dot{t}} \left( \frac{\dot{a}}{\dot{t}} \right) \cdot + \left( \frac{\dot{a}}{\dot{t}} \right)^2 - \frac{1}{\sigma^2} \left[ \left( \frac{d\sigma}{d\chi} \right)^2 - 1 \right] \right\},$$

$$k(p + \Pi_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta)_{\Sigma_{\text{Friedmann}}} = -\dot{\chi}^2 \left\{ \frac{2}{\sigma} \frac{d^2 \sigma}{d\chi^2} - 3 \left( \frac{\dot{a}}{\dot{t}} \right)^2 + \frac{1}{\sigma^2} \left[ \left( \frac{d\sigma}{d\chi} \right)^2 - 1 \right] \right\} + \quad (2.28)$$

$$-\frac{\dot{t}^2}{a^2} \left\{ \frac{2a}{\dot{t}} \left( \frac{\dot{a}}{\dot{t}} \right) \cdot + \left( \frac{\dot{a}}{\dot{t}} \right)^2 - \frac{1}{\sigma^2} \left[ \left( \frac{d\sigma}{d\chi} \right)^2 - 1 \right] \right\},$$

$$k(q_\alpha n^\alpha)_{\Sigma_{Friedmann}} = \pm \frac{2\dot{t}\dot{\chi}}{a} \left[ \frac{1}{\sigma} \frac{d^2\sigma}{d\chi^2} - \left( \frac{\dot{a}}{\dot{t}} \right)^2 + \frac{a}{\dot{t}} \left( \frac{\dot{a}}{\dot{t}} \right) \cdot \right]. \quad (2.29)$$

Por fim, as componentes não nulas da métrica intrínseca (2.12) à  $\Sigma$  quando na região de Friedmann são:

$$\gamma_{(0)(0)} = \dot{t}^2 - a^2 \dot{\chi}^2 = 1, \quad (2.30)$$

$$\gamma_{(2)(2)} = -a^2 \sigma^2, \quad (2.31)$$

$$\gamma_{(3)(3)} = \gamma_{(2)(2)} \sin^2 \theta. \quad (2.32)$$

E as componetes não nulas da curvatura extrínseca 2.14 correspondente:

$$K_{(0)(0)} = \pm \left\{ -\frac{1}{\dot{t}} [(a\dot{\chi}) \cdot (1 + 2a^2 \dot{\chi}^2) + \dot{a}\dot{\chi}] \right\}, \quad (2.33)$$

$$K_{(2)(2)} = \pm \frac{a\sigma}{\dot{t}\dot{\chi}} [a\dot{\chi}^2 (a\sigma) \cdot + \dot{\sigma}], \quad (2.34)$$

$$K_{(3)(3)} = K_{(2)(2)} \sin^2 \theta, \quad (2.35)$$

onde  $\sigma(\chi) = \chi$  para o universo plano;  $\sigma(\chi) = \sinh \chi$  implica no universo aberto e  $\sigma(\chi) = \sin \chi$ , fechado.

Quando estamos considerando um observador comovente com o fluido ( $\dot{t} = 1$  e  $\dot{\chi} = 0$ ) não há fluxo de calor, dado por (2.29), e  $K_{(0)(0)}$  é nula, dada por (2.33).

### 2.3.2 Métrica de Schwarzschild

Seja a métrica de Schwarzschild (externa) dada por:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_S}{R}\right) dT^2 - \left(1 - \frac{R_S}{R}\right)^{-1} dR^2 - R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.36)$$

onde  $R_S = \text{constante}$  é o raio de Schwarzschild. As coordenadas nessa métrica são

$\bar{x}^\alpha = \{T, R, \theta, \phi\}$ . As componentes não nulas do tensor de Einstein, de acordo com (2.7)

a (2.10), são:

$$G_{00} = - \left(1 - \frac{R_S}{R}\right) \frac{1}{R^2} \frac{dR_S}{dR} = 0, \quad (2.37)$$

$$G_{11} = \left(1 - \frac{R_S}{R}\right)^{-1} \frac{1}{R^2} \frac{dR_S}{dR} = 0, \quad (2.38)$$

$$G_{22} = R \frac{d^2 R_S}{dR^2} + \left(1 - \frac{R_S}{R}\right)^{-1} \left(\frac{R_S}{R} - \frac{dR_S}{dR}\right)^2 = \left(1 - \frac{R_S}{R}\right)^{-1} \left(\frac{R_S}{R}\right)^2, \quad (2.39)$$

$$G_{33} = G_{22} \sin^2 \theta. \quad (2.40)$$

Os vetores tangente e normal à  $\Sigma$ , definida por (2.18), são:

$$\bar{V}^\alpha = (\dot{T}, \dot{R}, 0, 0) \Rightarrow \bar{V}_\alpha = \left(F\dot{T}, -\frac{\dot{R}}{F}, 0, 0\right), \quad (2.41)$$

$$\bar{n}^\alpha = \pm \left(-\frac{\dot{R}}{F}, -F\dot{T}, 0, 0\right) \Rightarrow \bar{n}_\alpha = \pm(-\dot{R}, \dot{T}, 0, 0), \quad (2.42)$$

onde  $F \doteq \left(1 - \frac{R_S}{R}\right)$ .

As quantidades de energia definidas por (2.15) a (2.17), por sua vez, são conforme esperado:

$$(\rho)_{\Sigma_{Schwarzschild}} = 0, \quad (2.43)$$

$$(p + \Pi_{\alpha\beta} \bar{n}^\alpha \bar{n}^\beta)_{\Sigma_{Schwarzschild}} = 0, \quad (2.44)$$

$$(q_\alpha \bar{n}^\alpha)_{\Sigma_{Schwarzschild}} = 0. \quad (2.45)$$

Por fim, as componentes não nulas da métrica intrínseca (2.12) à  $\Sigma$  quando na região de Schwarzschild são:

$$\gamma_{(0)(0)} = \left(1 - \frac{R_S}{R}\right) \dot{T}^2 - \left(1 - \frac{R_S}{R}\right)^{-1} \dot{R}^2 = 1, \quad (2.46)$$

$$\gamma_{(2)(2)} = -R^2, \quad (2.47)$$

$$\gamma_{(3)(3)} = \gamma_{(2)(2)} \sin^2 \theta. \quad (2.48)$$

E as componentes da curvatura extrínseca (2.14) correspondente:

$$K_{(0)(0)} = -\frac{(F\dot{T})}{\dot{R}}, \quad (2.49)$$

$$K_{(2)(2)} = \pm R F \dot{T}, \quad (2.50)$$

$$K_{(3)(3)} = K_{(2)(2)} \sin^2 \theta. \quad (2.51)$$

### 2.3.3 Métrica de Vaidya

Em 1950, Prahalad Chunnilal Vaidya [23] publicou uma solução esfericamente simétrica para as equações de Einstein com tensor energia-momento de radiação dado por

$T_{\mu\nu} = Q N_\mu N_\nu$ , onde  $N_\mu$  é um vetor radial nulo. Nesse trabalho, Vaidya analisa nove soluções possíveis para a métrica interna contendo matéria e radiação ligada a uma métrica de Schwarzschild externa. Pelas condições de continuidade para a pressão e o fluxo de calor, sabemos que nenhuma métrica de radiação pode ser *colada* a Schwarzschild [10].

Seja a métrica de Vaidya (externa) dada por:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_S}{R}\right) dU^2 + 2dUdR - R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.52)$$

onde  $R_S(U)$  é função do tempo retardado  $U$ . As coordenadas dessa métrica são

$\bar{x}^\alpha = \{U, R, \theta, \phi\}$ . A única componente não nula do tensor de Einstein, de acordo com (2.7) a (2.10), é:

$$G_{00} = \frac{1}{R^2} \frac{dR_S}{dU}. \quad (2.53)$$

Os vetores tangente e normal à  $\Sigma$ , definida por (2.18), são:

$$\bar{V}^\alpha = (\dot{U}, \dot{R}, 0, 0) \Rightarrow \bar{V}_\alpha = \frac{1}{\dot{U}} (1 - \dot{R}\dot{U}, \dot{U}^2, 0, 0), \quad (2.54)$$

$$\bar{n}^\alpha = \pm \left( -\dot{R}, \dot{U}, 0, 0 \right) \Rightarrow \bar{n}_\alpha = \pm \frac{1}{\dot{U}} (\dot{U}^2, \dot{R}\dot{U} - 1, 0, 0), \quad (2.55)$$

onde  $F \doteq \left( 1 - \frac{R_S}{R} \right)$ .

As quantidade de energia (2.15) a (2.17), por sua vez, são conforme esperado:

$$k(\rho)_{\Sigma_{Vaidya}} = -\frac{\dot{U}^2 dR_S}{R^2 dU}, \quad (2.56)$$

$$k(p + \Pi_{\alpha\beta} \bar{n}^\alpha \bar{n}^\beta)_{\Sigma_{Vaidya}} = -\frac{\dot{U}^2 dR_S}{R^2 dU}, \quad (2.57)$$

$$k(q_\alpha \bar{n}^\alpha)_{\Sigma_{Vaidya}} = \pm \left\{ -\frac{\dot{U}^2 dR_S}{R^2 dU} \right\}. \quad (2.58)$$

Por fim, as componentes não nulas da métrica intrínseca (2.12) à  $\Sigma$  quando na região de Schwarzschild são:

$$\gamma_{(0)(0)} = \left( 1 - \frac{R_S}{R} \right) \dot{U}^2 + 2\dot{U}\dot{R} = 1, \quad (2.59)$$

$$\gamma_{(2)(2)} = -R^2, \quad (2.60)$$

$$\gamma_{(3)(3)} = \gamma_{(2)(2)} \sin^2 \theta. \quad (2.61)$$

E as componentes da curvatura extrínseca (2.14) correspondente:

$$K_{(0)(0)} = \pm \left[ -\frac{1}{2\dot{U}\dot{R}} (F\dot{U}^2) \right] = \pm \left[ \ln(\dot{U}\dot{R}) \right], \quad (2.62)$$

$$K_{(2)(2)} = \pm R(\dot{R} + F\dot{U}), \quad (2.63)$$

$$K_{(3)(3)} = K_{(2)(2)} \sin^2 \theta. \quad (2.64)$$

## Capítulo 3

# Soluções clássicas apresentando inhomogeneidades locais

Neste capítulo reunimos ideias recorrentes, algumas das mais citadas na literatura sobre inhomogeneidades locais e colapsos gravitacionais. Chamamos de clássico, não em referência à natureza não quântica do material aqui exposto, mas em respeito à definição utilizada em tantas outras áreas do saber e da cultura, como referências historicamente relevantes sobre um tema.

### 3.1 Universo de Einstein e Strauss

O modelo estelar mais conhecido [19] consiste em uma estrela feita de poeira (sem pressão), cuja geometria é descrita pela métrica fechada de Friedmann , e pela métrica externa de Schwarzschild. De um outro ponto de vista, o nosso Universo tem uma densidade de energia diferente de zero e encontra-se em expansão, o que seria incompatível com a solução não dependente do tempo de Schwarzschild. Pensando nisso, Einstein e Straus [4] (1945) propuseram um modelo no qual uma massa pontual está envolta por uma casca vazia, que por fim está embebida em um universo em expansão,

de acordo com a métrica de Friedmann. Seguiremos o artigo original no qual a *colagem* de métricas é feita exigindo a continuidade da métrica  $g_{\mu\nu}$  e suas derivadas primeiras.

### 3.1.1 Universo de Friedmann

Seja a métrica de Friedmann de simetria esférica escrita como:

$$ds^2 = dt^2 - A^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right], \quad (3.1)$$

onde  $A(t)$  é o fator de escala da geometria e  $K$  tem valores iguais a  $\{-1, 0, 1\}$  cada qual representando um tipo de universo: aberto, plano e fechado, respectivamente.

As componentes não nulas do tensor de Einstein de acordo com (2.7) a (2.10) são:

$$G_0^0 = -\frac{6}{A^2} (\dot{A}^2 + K), \quad (3.2)$$

$$G_1^1 = -\frac{2}{A^2} (2\ddot{A}A + \dot{A}^2 + K). \quad (3.3)$$

Imaginando um observador comovente movendo-se em um fluido formado por matéria sem pressão, o mesmo caso descrito nas equações (3.2) e (3.3), temos as seguintes equações

$$\dot{A}^2 + K = -\frac{k}{6} \rho A^2, \quad (3.4)$$

$$2\ddot{A}A + \dot{A}^2 + K = 0. \quad (3.5)$$

Diferenciando e depois integrando (3.5), temos:

$$A^2 \ddot{A} = -\frac{m}{2}, \quad (3.6)$$

onde  $m$  é constante de integração.

Substituindo (3.6) em (3.5)

$$\dot{A}^2 = \frac{m - KA}{A}. \quad (3.7)$$

Finalmente, aplicando o resultado de (3.7) em (3.4):

$$m = -\frac{k}{6}\rho A^3. \quad (3.8)$$

Temos, assim, a interpretação de  $m$  como a função massa, a energia gravitacional contida nesse universo em expansão.

### 3.1.2 A estrela tem a mesma densidade do universo exterior

Vamos ao problema. Tomando a solução esférica mais geral possível (2.1) e escrevemos as equações de Einstein no vazio. Isso implica no tensor de Ricci nulo. Assim, já que (2.6) não acrescenta nada novo, tomamos as equações (2.2) a (2.5), .

$$\ddot{\mu} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\mu}}{2} + \frac{\dot{\mu}^2}{2} + 2\ddot{\nu} - \dot{\lambda}\dot{\nu} + \dot{\nu}^2 - e^{\lambda-\mu}(\lambda'' - \frac{\lambda'\mu'}{2}) + \frac{\lambda^2}{2} + \lambda'\nu' = 0, \quad (3.9)$$

$$2\dot{\nu}' - \lambda'\dot{\nu} + \dot{\nu}\nu' - \dot{\mu}\nu' = 0, \quad (3.10)$$

$$\lambda'' - \frac{\lambda'\mu'}{2} + \frac{\lambda'^2}{2} + 2\nu'' - \mu'\nu' + \nu'^2 - e^{\mu-\lambda}(\ddot{\mu} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\mu}}{2} + \frac{\dot{\mu}^2}{2} + \dot{\mu}\dot{\nu}) = 0, \quad (3.11)$$

$$e^{-\mu}(\frac{\lambda'\nu'}{2} - \frac{\mu'\nu'}{2} + \nu'' + \nu'^2) - e^{-\lambda}(\ddot{\nu} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{2} + \frac{\dot{\mu}\dot{\nu}}{2} + \dot{\nu}^2) - 2e^{-\nu} = 0. \quad (3.12)$$

Prosseguindo com a ideia de Einstein e Straus, nós temos que calcular as condições de contorno quando passamos para a métrica de Friedmann. Quando  $r = r_0$  temos a fronteira entre o vazio e o universo em expansão. Nessa superfície, as métricas de (2.1) e de (3.1) devem ser serem contínuas, tal que:

$$e^\lambda = 1 \quad ; \lambda' = 0, \quad (3.13)$$

$$e^\mu = \frac{A^2}{1 - Kr^2} \quad ; \mu' = \frac{2Kr}{1 - Kr^2}, \quad (3.14)$$

$$e^\nu = A^2 r^2 \quad ; \nu' = \frac{2}{r}. \quad (3.15)$$

As equações acima definem a continuidade da métrica e da derivada da mesma com respeito a  $r$  na borda  $r = r_0$ . Extraíndo delas as relações de  $\dot{\lambda}, \dot{\mu}, \dot{\nu}, \ddot{\lambda}, \ddot{\mu}, \ddot{\nu}, \dot{\lambda}', \dot{\mu}', \dot{\nu}'$ , conseguimos reescrever as equações de campo na forma:

$$\lambda'' = 3e^\mu \left( \ddot{\mu} + \frac{\dot{\mu}^2}{2} \right), \quad (3.16)$$

$$\lambda'' + 2\nu'' = e^\mu \left( \ddot{\mu} + \frac{3\dot{\mu}^2}{2} \right) + \mu'\nu' - \nu'^2, \quad (3.17)$$

$$\nu'' = e^\mu \left( \ddot{\mu} + \frac{3\dot{\mu}^2}{2} \right) + \frac{\mu'\nu'}{2} - \nu'^2. \quad (3.18)$$

Aplicando (3.16) e (3.18) em (3.15):

$$2\ddot{A}A + \dot{A}^2 + K = 0. \quad (3.19)$$

A equação (3.19) é idêntica a (3.5), ou seja, um observador comovente no universo de Friedmann vê o sistema massa pontual no vazio, dado pela equação (3.19), como uma distribuição de matéria, dada pela equação (3.5), com a mesma densidade de energia do universo externo (Friedmann).

### 3.1.3 A solução do vazio pode ser escrita em coordenadas de Schwarzschild

O próximo passo é tentar escrever a solução do vazio da métrica (2.1) em coordenadas de Schwarzschild. Seja a transformação de coordenadas de (2.1) para (2.33) tal que

$T = V(r, t)$  e  $R = U(r, t)r$ . A métrica de Schwarzschild ficará:

$$ds^2 = \left( F\dot{V}^2 - \frac{\dot{U}^2 r^2}{F} \right) dt^2 - \left[ \frac{(U'r + U)^2}{F} - FV'^2 \right] dr^2 + 2 \left[ F\dot{V}V' - \frac{[Ur(U'r + U)]}{F} \right] dt dr - U^2 r^2 d\Omega^2. \quad (3.20)$$

Lembrando que  $F \doteq 1 - \frac{R_S}{R}$ .

Obtemos a equação:

$$F\dot{V}V' - \frac{[Ur(U'r + U)]}{F} = 0. \quad (3.21)$$

Na fronteira  $r = R_0$ , repetimos o mesmo procedimento:

$$F\dot{V}^2 - \frac{\dot{U}^2 r^2}{F} = 1, \quad (3.22)$$

$$\frac{(U'r + U)^2}{F} - FV'^2 = \frac{A^2}{1 - Kr^2}, \quad (3.23)$$

$$U^2 = A^2 \Rightarrow U' = 0, \quad (3.24)$$

$$\left( F\dot{V}^2 - \frac{\dot{U}^2 r^2}{F} \right)' = 0, \quad (3.25)$$

$$\left[ \frac{(U'r + U)^2}{F} - FV'^2 \right]' = \left[ \frac{A^2}{1 - Kr^2} U^2 \right]. \quad (3.26)$$

Pela número de equações e a quantidade de incógnitas, o problema tem solução única.

Para provarmos que a existencia de  $U$  e  $V$  satisfazem as equações (3.21) a (3.26) basta chegarmos a (3.25) e (3.26) a partir de (3.21) a (3.24). Sendo assim:

$$\dot{U} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{F \left( 1 - \left( \frac{F}{1 - Kr^2} \right) \right)}{U^2 - \left( 1 - \frac{F}{1 - Kr^2} \right)}}, \quad (3.27)$$

$$\dot{V} = \frac{A}{\sqrt{F}} \sqrt{\frac{1}{U^2 - \left( 1 - \frac{F}{1 - Kr^2} \right)}}, \quad (3.28)$$

$$V' = \frac{U}{F} \sqrt{1 - \frac{F}{1 - Kr^2}}. \quad (3.29)$$

Essas três equações, adicionadas a condição de  $U' = 0$ , nos dão imediatamente (3.25) e (3.26). Todo o campo com uma massa pontual em seu interior embebida em um universo em expansão é um campo estático e tem como solução a métrica de Schwarzschild. A solução não se torna dependente do tempo, apenas a hipersfície de

separação evolui temporalmente devido ao efeito da distribuição de matéria no seu entorno.<sup>1</sup> Por fim, uma massa pontual no vazio, descrito pela métrica de Schwarzschild, embebida em um universo em expansão (métrica de Friedmann) pode ser vista como uma distribuição de matéria com densidade igual ao do universo externo.

---

<sup>1</sup>Birkoff já havia demonstrado em 1923 que *a métrica de Schwarzschild é a única solução esféricamente simétrica possível para as equações de Einstein no vazio* [11].

## 3.2 Colapso de Oppenheimer e Snyder

Quando uma estrela supermassiva esgota toda a sua fonte de energia termonuclear o equilíbrio de sua existência entra em crise. Ela não mais consegue suportar o peso produzido por si mesma. Em razão disso, jatos de matéria e radiação invadem o universo oriundos da explosão dessa estrela. O que lhe resta é uma sobrevida estática, como uma anã branca, por exemplo. Ou, quando esse equilíbrio não é encontrado, a estrela permanece em colapso.

Em 1939, Oppenheimer e Volkoff [18] publicaram que o resto de uma estrela supermassiva não pode permanecer estático se sua massa for superior a 0,7 massas solares. Começou-se a busca por soluções não estáticas. Nesse mesmo ano, Oppenheimer e Snyder [19] idealizaram uma estrela formada por poeira, que para um observador externo continuaria em colapso indefinidamente, enquanto um observador comovente veria o colapso em um tempo finito, o embrião do que conhecemos como buraco negro. O trabalho original ressalta o fato que uma estrela sem pressão foi usada somente para simplificar os cálculos. E, também, se o colapso é possível numa estrela sem pressão o será muito mais em uma situação na qual as forças internas da estrela inspirem-no. Não seguiremos o desenvolvimento do artigo original e sim o desenvolvimento do presente trabalho, satisfazendo as condições de Darmois.

De acordo com Landau e Lifshitz [?], a métrica interna à estrela pode ser dada pela de Friedmann fechada. Escolhemos ainda um observador comovente e o tensor energia-momento como sendo um fluido perfeito com equação de estado  $p = 0$ . Pelas

expressões (2.7) a (2.10), temos que

$$G_{00} = -\frac{3}{a^2}(\dot{a}^2 + 1), \quad (3.30)$$

$$G_{11} = \frac{G_{22}}{\sin^2 \chi} = 2\ddot{a}a + \dot{a}^2 + 1, \quad (3.31)$$

$$G_{33} = G_{22} \sin^2 \theta. \quad (3.32)$$

De (3.30) e (3.31), as equações de Einstein são:

$$\dot{a}^2 + 1 = \frac{k}{3}\rho a^2, \quad (3.33)$$

$$2\ddot{a}a + \dot{a}^2 + 1 = 0. \quad (3.34)$$

As componentes não nulas da métrica intrínseca à  $\Sigma$ , definida como  $\Sigma : \chi = \chi_0 = cte$  em (2.20), quando na região de Friedmann fechada, segundo (2.30) a (2.32), são:

$$\gamma_{(0)(0)} = 1, \quad (3.35)$$

$$\gamma_{(2)(2)} = -a^2(\tau) \sin^2 \chi_0, \quad (3.36)$$

$$\gamma_{(3)(3)} = \gamma_{(2)(2)} \sin^2 \theta. \quad (3.37)$$

E as componetes da curvatura extrínseca, a partir de (2.33) a (2.35), correspondem a:

$$K_{(2)(2)} = \pm a(\tau) \sin \chi_0 \cos \chi_0, \quad (3.38)$$

$$K_{(3)(3)} = K_{(2)(2)} \sin^2 \theta. \quad (3.39)$$

Supomos que a métrica externa à estrela seja Schwarzschild, conforme métrica (2.36).

Aplicando as condições de Darmois, comparamos as equações (3.35) a (3.39) com (2.46)

a (2.51), sequencialmente. Obtemos:

$$\left(1 - \frac{R_S}{R}\right) \dot{T}^2 - \left(1 - \frac{R_S}{R}\right)^{-1} \dot{R}^2 = 1, \quad (3.40)$$

$$R(\tau) = a(\tau) \sin \chi_0, \quad (3.41)$$

$$\left(F\dot{T}\right)' = 0 \Rightarrow F\dot{T} = \cos \chi_0. \quad (3.42)$$

E essas três equações caracterizam as condições de *colagem* entre as superfícies.

Substituindo (3.40) a (3.42) em (3.33) temos:

$$R_S = \frac{k}{3} \rho R^3. \quad (3.43)$$

Obtemos a relação entre a massa gravitacional da estrela colapsante com relação a sua densidade de energia e volume.

### 3.3 Universo de Tolman

[1] Observe a métrica (2.1). Para termos um análogo a tri-esfera é conveniente renomearmos a função  $\nu$  de tal forma que  $e^\nu = R^2$ , onde  $R$  também é função de  $r$  e  $t$ . Ainda podemos requer uma métrica síncrona, nos basta escolher  $e^\lambda = 1$ . Enfim,

$$ds^2 = dt^2 - e^\mu dr^2 - R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (3.44)$$

Como para cada instante de tempo teremos uma hipersuperfície espacial euclidiana e, dito isso, um campo de velocidades normal a esta definirá a evolução temporal de uma partícula, caracterizando  $t$  como tempo próprio da mesma. É natural, portanto, definirmos uma classe de observadores comoventes, assim expressa:

$$V^\alpha = \delta_0^\alpha. \quad (3.45)$$

Se quisermos analisar um universo desse tipo gerado por uma densidade de matéria sem pressão (poeira), o tensor momento energia é:

$$T_0^0 = \rho. \quad (3.46)$$

com todas as outras componentes sendo nulas.

O conjunto das equações de Einstein, de acordo com (A.55) a (A.58), é:

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{\dot{\mu}\dot{R}}{R} + \frac{1}{R^2} - e^{-\mu} \left( \frac{2R''}{R} + \frac{R'^2}{R^2} - \frac{\mu'R'}{R} \right) = k\rho, \quad (3.47)$$

$$\frac{2\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{1}{R^2} - e^{-\mu} \frac{R'^2}{R^2} = 0, \quad (3.48)$$

$$\frac{\ddot{\mu}}{2} + \frac{\dot{\mu}^2}{4} + \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{\mu}\dot{R}}{2R} - e^{-\mu} \left( \frac{R''}{R} - \frac{\mu'R'}{2R} \right) = 0, \quad (3.49)$$

$$\frac{2e^{-\mu}}{R}(\dot{R}' - \frac{\dot{\mu}R'}{2}) = 0. \quad (3.50)$$

Integrando (3.50) em relação a  $t$ :

$$\frac{R'^2}{1 + f(r)} = e^\mu. \quad (3.51)$$

Substituindo o resultado de (3.51) em (3.49) e integrando em relação  $r$ :

$$2\ddot{R}R + \dot{R}^2 = f(r) + g(t), \quad (3.52)$$

onde  $f(r)$  e  $g(t)$  são funções de integração.

Substituindo esses dois resultados em (3.48) implica que  $\mathbf{g}(\mathbf{t}) = \mathbf{0}$ . Ao integrarmos

(3.52) em função do tempo, temos:

$$\dot{R}^2 = f(r) + \frac{F(r)}{R}, \quad (3.53)$$

sendo  $F(r)$  também função de integração.

Enfim, aplicando todos os resultados em (3.47):

$$\frac{F'(r)}{R^2 R'} = k\rho. \quad (3.54)$$

Vamos procurar o significado físico para as funções  $F(r)$  e  $f(r)$ . Para isso precisamos descrever o sistema comovente de Tolman em coordenadas de Schwarzschild. Escolhemos o método de integração das geodésicas radiais para esta realização [2].

Seja a métrica de Schwarzschild dada por (2.36). Da equação da geodésica, obtemos:

$$\frac{d^2 T}{d\lambda^2} + \frac{1}{F} \frac{dF}{dR} \frac{dT}{d\lambda} \frac{dR}{d\lambda} = 0, \quad (3.55)$$

$$\frac{d^2 R}{d\lambda^2} + \frac{F}{2} \frac{dF}{dR} \left( \frac{dT}{d\lambda} \right)^2 - \frac{1}{2F} \frac{dF}{dR} \left( \frac{dR}{d\lambda} \right)^2 = 0, \quad (3.56)$$

onde  $F \doteq 1 - \frac{R_S}{R}$ .

Ao escolhermos geodésicas radiais temos que  $\frac{d\theta}{d\lambda} = 0$  e  $\frac{d\phi}{d\lambda} = 0$ . Integrando (3.55) e (3.57), respectivamente:

$$\frac{dT}{d\lambda} F = E, \quad (3.57)$$

$$E^2 - \left(\frac{dR}{d\lambda}\right)^2 = \epsilon F. \quad (3.58)$$

onde  $E$  e  $\epsilon$  são constantes de integração.

Como  $\lambda$  é o tempo próprio  $t$  da partícula, e considerando o campo de velocidades  $V_\alpha$  normalizado, segue que:

$$V_\alpha V^\alpha = 1 \Rightarrow g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = 1 \Rightarrow \epsilon = 1. \quad (3.59)$$

Substituímos em (3.59) em (3.58):

$$E^2 \left(1 - F^{-2} \left(\frac{dR}{dt}\right)^2\right) = F. \quad (3.60)$$

Aqui entra o limite imposto sobre essa transformação de coordenadas. Quando analisamos o movimento de uma partícula no infinito sua velocidade pode ser:

- nula (movimento parabólico), no caso do universo plano, implicando energia total do sistema igual a zero;
- diferente de zero (movimento hiperbólico), se a energia total do sistema for maior que zero, no caso do universo aberto;
- diferente de zero, porém a partícula tem um alcance máximo (movimento elíptico), ou seja,  $R_{max} \neq \infty$ , limitado pela energia total do sistema menor que zero, é o caso do universo fechado.

Sendo assim, para obtermos um destes tipos de universo, é preciso deixar a constante  $E$  com o vínculo da equação (3.60) para ser determinado conforme a energia do sistema em questão.<sup>2</sup> Por uma questão de simplicidade, escolhemos o universo plano. Tomamos o limite quando  $R \rightarrow \infty \Rightarrow F \rightarrow 1$ , assim  $E^2 [1 - (\frac{dR}{dt})_\infty^2] = 1$ . Conforme discutido anteriormente, a partícula atinge o infinito com velocidade nula, portanto  $E = 1$ .

Reescrevendo as equações (3.57) e (3.58) com os resultados obtidos:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \left(1 - \frac{R_S}{R}\right)^{-1}, \quad (3.61)$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = - \left(\frac{R_S}{R}\right)^{1/2}, \quad (3.62)$$

onde o sinal negativo da última equação foi escolhido para que  $R$  diminua quando  $t$  aumente.

Reescrevendo a métrica de Tolman (3.44) de acordo com o resultado (3.51):

$$ds^2 = dt^2 - \frac{R^2}{1 + f(r)} dr^2 - R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (3.63)$$

Se comparamos as métricas (2.36) com (3.63) e utilizarmos os resultados das equações (3.61) e (3.62), obtemos:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = - \left(\frac{R_S}{R}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{R_S}{R}\right)^{-1} R', \quad (3.64)$$

$$\frac{R^2}{1 + f(r)} = \left(1 - \frac{R_S}{R}\right)^{-1} R'^2 - \left[\left(1 - \frac{R_S}{R}\right) \frac{\partial T}{\partial r}\right]^2. \quad (3.65)$$

Substituindo (3.64) em (3.65) obtemos que  $f(r) = 0$ , ou seja, esse é o caso do universo plano de Tolman. Finalmente, a partir de (3.61), (3.62) e (3.64) temos o conjunto de

---

<sup>2</sup>Para uma análise detalhada do comportamento do universo de Tolman para todos os casos de energia total, consulte [1]

equações que descrevem a transformação de coordenadas do universo plano de Tolman para Schwarzschild (e a sua inversa) é:

$$dT = \left(1 - \frac{R_S}{R}\right)^{-1} \left[ dt - \left(\frac{R_S}{R}\right)^{1/2} R' dr \right], \quad (3.66)$$

$$dR = - \left(\frac{R_S}{R}\right)^{1/2} dt + R' dr, \quad (3.67)$$

$$dt = dT + \left(\frac{R_S}{R}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{R_S}{R}\right)^{-1} dR, \quad (3.68)$$

$$R' dr = \left(\frac{R_S}{R}\right)^{1/2} dT + \left(1 - \frac{R_S}{R}\right)^{-1} dR. \quad (3.69)$$

Da equação (3.67) podemos comparar  $\dot{R}$  como o da equação (3.53), assim:

$$F(r) = R_S(r). \quad (3.70)$$

Encontramos a interpretação física da equação (3.53): a energia total do sistema,  $f(r)$ , é igual a cinética  $\dot{R}^2$  menos a potencial  $F(r)/R$ . Ao integramos a equação (3.53), temos:

$$R(r, t) = (3/2)^{2/3} (R_S(r))^{1/3} (t - g(r))^{2/3}, \quad (3.71)$$

onde  $g(r)$  é função de integração. Ao derivarmos  $R$  em função de  $r$  e aplicá-la na equação (3.54) encontraremos:  $\rho(t) \neq 0 \Rightarrow g = cte$ .

$$k\rho(t) = 4/3(t - g)^{-2}. \quad (3.72)$$

Por outro lado,  $m = cte$  quando  $\rho = 0$ . Assim:

$$R'(r, t) = - \left(\frac{2R_S}{3}\right)^{1/3} g'(r)(t - g(r))^{-1/3}. \quad (3.73)$$

A métrica de Tolman, portanto representa uma solução esfericamente simétrica, inomogênea e isotrópica das equações de Einstein.

### 3.4 Universo de Novikov

O trabalho de Novikov [17] consiste numa tentativa de explicar os quasares, criando um modelo que separa três regiões concêntricas de simetria esférica, inspirado na hipótese de Ambartsumyán sobre a existência de *D-corpos*: enormes quantidades de matéria capazes de permanecerem por um longo tempo em um estado diferente da fase estelar ou do gás rarefeito. Do ponto de vista de Ambartsumyán explosões de *D-corpos* poderiam ser responsáveis pelas enormes ejeções de matéria e partículas relativísticas oriundas dos centros de galáxias, por exemplo. A mais interna (I) é um núcleo composto por poeira; a seguinte (II) uma casca vazia; a última (III) é o universo externo. Imaginando o universo plano e escrevendo a solução de Tolman para cada região tem-se:

Região I: Núcleo ( $0 < r \leq r_1$ )

$$R_I(r, t) = (3/2)^{2/3} (R_{SI}(r))^{1/3} (t - g_I)^{2/3}, \quad (3.74)$$

$$k\rho_I(t) = 4/3(t - g_I)^{-2}. \quad (3.75)$$

Região II: Vazio ( $r_1 < r \leq r_2$ )

$$R_{II}(r, t) = (3/2)^{2/3} (R_{SII})^{1/3} (t - g_{II}(r))^{2/3}, \quad (3.76)$$

$$R'_{II}(r, t) = - \left( \frac{2R_{SII}}{3} \right)^{1/3} g'_{II}(r) (t - g_{II}(r))^{-1/3}. \quad (3.77)$$

Região III: Universo Externo ( $r > r_2$ )

$$R_{III}(r, t) = (3/2)^{2/3} (R_{SIII}(r))^{1/3} (t - g_{III})^{2/3}, \quad (3.78)$$

$$k\rho_{III}(t) = 4/3(t - g_{III})^{-2}, \quad (3.79)$$

onde os índices romanos I, II, III representam as regiões a que pertencem às quantidades relacionadas.

Nosso próximo passo é discutir as condições de contorno para as hipersuperfícies de separação. As hipersuperfícies de separação entre as variedades acontecem para  $r = r_1$  e  $r = r_2$ , então definimos  $\Sigma$  como  $r = cte$ , cujas coordenadas intrínsecas  $u^{(i)} = \{t, \theta, \phi\}$ . E o vetor normal é  $n_\alpha = \frac{R'}{(1+f(r))^{1/2}} \delta_\alpha^1$ . Da equação (2.12):

$$\gamma_{(0)(0)} = 1 \quad ; \gamma_{(2)(2)} = -R^2 \quad ; \gamma_{(3)(3)} = -R^2 \sin^2 \theta. \quad (3.80)$$

Da condição que  $\gamma_{(i)(j)}$  devem ser iguais para as duas variedades:

$$R_I(r_1, t) = R_{II}(r_1, t) \quad ; R_{II}(r_2, t) = R_{III}(r_2, t). \quad (3.81)$$

Da equação (2.14):

$$K_{(2)(2)} = (1 + f(r))^{1/2} R \quad ; K_{(3)(3)} = (1 + f(r))^{1/2} R \sin^2 \theta, \quad (3.82)$$

para um valor de  $r$  constante. Impondo a continuidade de  $K_{(i)(j)}$  iguais para as duas variedades, segue:

$$f_I(r_1) = f_{II}(r_1) \quad ; f_{II}(r_2) = f_{III}(r_2). \quad (3.83)$$

Para o caso do universo plano  $f = 0$ , (3.83) é imediatamente satisfeita.

De (3.53) temos que  $\ddot{R} = -\frac{F(r)}{2R^2}$ . Como  $t$  e  $R$  são contínuas em  $\Sigma$ , então  $\ddot{R}$  também será.

E como  $F(r) = R_S(r)$  temos:

$$R_{SI}(r_1) = R_{SII} = R_{SIII}(r_2). \quad (3.84)$$

Só nos falta estabelecer as condições para  $g(r)$ . De (3.72) podemos concluir que a continuidade de  $R(r, t)$  implicará na continuidade de  $g(r)$ . Enfim:

$$g_I = g_{II}(r_1) \quad ; \quad g_{II}(r_2) = g_{III} . \quad (3.85)$$

Lembrando que nas regiões I e III  $g(r)$  é constante quando a densidade de energia é diferente de zero. Observando as equações (3.74) e (3.78) vemos que  $R(r, t)$  para as regiões I e III podem ser escritos como  $R(r, t) = a(t)\sigma(r)$ . Reescrevendo a métrica:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) [\sigma'^2(r)dr^2 + \sigma^2(r)d\Omega^2] . \quad (3.86)$$

E, introduzindo uma nova coordenada  $\chi = \sigma(r) \Rightarrow d\chi = \sigma' dr$ :

$$ds^2 = dt^2 - Aa^2(t) [d\chi^2 + \chi^2 d\Omega^2] . \quad (3.87)$$

Por fim, temos que **as regiões I e III podem ser escritas como métricas de Friedmann**. Dessa forma, podemos dizer que  $\sigma(r)$  é diretamente proporcional a  $r$ , deixando  $R_S(r)$  diretamente proporcional a  $r^3$ . Aplicando as condições de contorno (3.84), temos:

$$R_{SI}(r) = R_{SII} \left( \frac{r}{r_1} \right)^3 \quad ; \quad R_{SIII}(r) = R_{SII} \left( \frac{r}{r_2} \right)^3 . \quad (3.88)$$

Pelo teorema de Birkhoff [12] e pelo trabalho de Einstein e Straus [4] sabemos que **a região II pode ser descrita na forma da métrica de Schwarzschild**. As equações (3.76) e (3.77) nos permitem:

$$R'_{II}(r, t) = \left( \frac{R_{SII}}{R} \right)^{1/2} g'_{II}(r) . \quad (3.89)$$

Substituindo essa última equação na (3.69) podemos integrar, obtendo

$$g_{II}(r) = T - \frac{2}{3} \frac{R^{3/2}}{(R_{SII})^{1/2}} - 2(R_{SII}R)^{1/2} + R_{SII} \ln \left| \frac{1 + (\frac{R_{SII}}{R})^{1/2}}{1 - (\frac{R_{SII}}{R})^{1/2}} \right|. \quad (3.90)$$

E integrando (3.68):

$$t = T - 2(2R_{SII}R)^{1/2} + R_{SII} \ln \left| \frac{1 + (\frac{R_{SII}}{R})^{1/2}}{1 - (\frac{R_{SII}}{R})^{1/2}} \right|. \quad (3.91)$$

Resultando na métrica de Schwarzschild:

$$ds_{II}^2 = \left(1 - \frac{R_{SII}}{R}\right) dT^2 - \left(1 - \frac{R_{SII}}{R}\right)^{-1} dR^2 - R^2 d\Omega^2. \quad (3.92)$$

Assumimos que o raio  $R$  das esferas crescem com  $r$ , assim  $R' > 0$ . Para a região II, a partir de (3.77), implica em  $g'_{II} < 0$ . A função mais simples que a satisfaz é  $g_{II} = a - r$ , onde  $a$  é constante. Pelas condições de contorno (3.89)  $a = g_{III} + r_2$ . Por outro lado, as densidades de energia (3.75) e (3.79) divergem quando  $t_0^I = g_I$  e  $t_0^{III} = g_{III}$ , onde o índice S indica o tempo no qual os universos emergem da singularidade. Como a região III é idealizada como sendo o universo externo é natural tomarmos  $g_{III} = 0$ . Assim:

$$g_I = r_2 - r_1 \quad ; \quad g_{II} = r_2 - r \quad g_{III} = 0. \quad (3.93)$$

Finalmente podemos escrever a forma final do universo de Novikov: Região I: Núcleo - métrica de Friedmann ( $0 < r \leq r_1$ )

$$R_I(r, t) = (3/2)^{2/3} (R_{SII})^{1/3} \frac{r}{r_1} [t - (r_2 - r_1)]^{2/3}, \quad (3.94)$$

$$k\rho_I(t) = \frac{4}{3[t - (r_2 - r_1)]^2}, \quad (3.95)$$

Região II: Vazio - métrica de Schwarzschild ( $r_1 < r \leq r_2$ )

$$R_{II}(r, t) = (3/2)^{2/3} (R_{SII})^{1/3} [t - (r_2 - r)]^{2/3}, \quad (3.96)$$

$$R'_{II}(r, t) = - \left( \frac{2R_{SII}}{3} \right)^{1/3} [t - (r_2 - r)]^{-1/3}, \quad (3.97)$$

Região III: Universo Externo - métrica de Friedmann ( $r > r_2$ )

$$R_{III}(r, t) = (3/2)^{2/3} (R_{SII})^{1/3} \frac{r}{r_2} t^{2/3}, \quad (3.98)$$

$$k\rho_{III}(t) = \frac{4}{3t^2}. \quad (3.99)$$

### 3.4.1 Coeficiente de Expansão e Tempo Crítico

No caso do universo plano de Tolman, nos interessa saber como as hipersuperfícies de separação  $r = r_1$  e  $r = r_2$  expandem em função de  $r$  e  $t$ . Já sabemos que para o caso  $\Sigma : r = cte$ ,  $n_\alpha = R'\delta_\alpha^1$ . E pela equação (B.6) temos:

$$\theta = \gamma^{(i)(j)} K_{(i)(j)} = K_{(a)}^{(a)} \Rightarrow \theta = -\frac{2}{R}. \quad (3.100)$$

Definimos como tempo crítico  $t_c$  o instante no qual o núcleo de matéria alcança o raio de Schwarzschild. Sendo assim, pela equação (3.94):

$$R_I(r_1, t_c) = R_{SII} \Rightarrow t_c^I = \frac{2}{3} (R_{SII}) + (r_2 - r_1). \quad (3.101)$$

Na discussão que precedeu a equação (B.93) o núcleo de matéria irrompeu no espaço-tempo quando  $t_0^I = r_2 - r_1$ , portanto dado o tempo crítico, o núcleo alcança o raio de Schwarzschild posteriormente ao seu nascimento<sup>3</sup>, coerentemente.

<sup>3</sup>A palavra nascimento foi usada aqui no mesmo sentido de irrompimento, apenas.

### 3.4.2 Vetores de Killing

Seção baseada das aulas de gravitação de J. M. Salim [20].

Quando efetuamos uma transformação de coordenadas do tipo  $\vec{x}' = \vec{x} + \vec{\xi}$  temos um novo tensor métrico  $g'_{\mu\nu}$ . Se quisermos saber a diferença entre as métricas transformada e original no mesmo ponto  $\vec{x}$  calculamos a derivada de Lie sobre o vetor  $\vec{\xi}$ :

$$\mathcal{L}_{\vec{\xi}}g_{\mu\nu} = g'_{\mu\nu}(\vec{x}) - g_{\mu\nu}(\vec{x}) = \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}. \quad (3.102)$$

Por sua vez, se tivermos uma métrica independente de uma coordenada, ou seja  $g_{\mu\nu}$  não dependente de  $x_K$ , certamente qualquer translação do tipo  $x'_\alpha = x_\alpha + \delta_\alpha^K$  deixará  $g_{\mu\nu}$  invariante, logo:  $\mathcal{L}_{\vec{\xi}}g_{\mu\nu} = 0$ . Denominamos vetores de Killing esta classe de  $\vec{\xi}$ <sup>4</sup>:

$$\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0. \quad (3.103)$$

Concluimos que uma métrica do tipo de Schwarzschild, não dependente do tempo, tem vetores de Killing  $\bar{\xi}^\alpha = \delta_0^\alpha$  e  $\bar{\xi}_\alpha = (1 - R_S/R)\delta_\alpha^0$ . Para sabermos os vetores de Killing da métrica plana de Tolman, basta efetuar uma transformação de coordenadas de acordo com as equações (3.68) e (3.69):

$$\xi^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\beta} \bar{\xi}^\beta \Rightarrow \xi^\alpha = (1, -1, 0, 0) \Rightarrow \xi_\alpha = (1, R^2, 0, 0). \quad (3.104)$$

Para cada uma das regiões do universo plano de Tolman:

$$\xi_1^I = \left(\frac{3}{2}\right)^{4/3} \frac{(R_{SII})^{2/3}}{r_1^2} [t - (r_2 - r_1)]^{4/3}; \quad (3.105)$$

$$\xi_1^{II} = \left\{ \frac{2}{3} (R_{SII}) [t - (r_2 - r_1)] \right\}^{2/3}; \quad (3.106)$$

---

<sup>4</sup>Quando falamos que  $g_{\mu\nu}$  não depende de  $x_K$ , estamos falando de um caso particular, bem simples, desse tipo de vetor. Qualquer vetor  $\vec{\xi}$  que obedeça (3.103) é vetor de Killing.

$$\xi_1^{III} = \left(\frac{3}{4}\right)^{4/3} (R_{SII})^{2/3} \frac{t^{4/3}}{r_2^2}. \quad (3.107)$$

Calculando a norma do vetor de Killing na região II temos:

$$\xi^\alpha \xi_\alpha = 1 - \frac{R_{SII}}{R_{II}}. \quad (3.108)$$

Se  $R_{II} > R_{SII} \Rightarrow \|\vec{\xi}\|^2 > 0$ , então o vetor de Killing é do tipo-tempo. Já se

$R_{II} < R_{SII} \Rightarrow \|\vec{\xi}\|^2 < 0$ , então vetor de Killing é do tipo-espaço. Agora, usando o

resultado de (3.96) para calcular o vetor de Killing nas hipersuperfícies de separação

$r = r_1$  e  $r = r_2$ , temos

$r = r_1$

$$\|\vec{\xi}\|^2 = 1 - \left[ \frac{2}{3} \frac{R_{SII}}{t - (r_2 - r_1)} \right]^{\frac{2}{3}}; \quad (3.109)$$

$r = r_2$

$$\|\vec{\xi}\|^2 = 1 - \left[ \frac{2}{3} \frac{R_{SII}}{t} \right]^{\frac{2}{3}}; \quad (3.110)$$

Para saber quais as coordenadas de um horizonte de eventos devemos fazer  $\|\vec{\xi}\|^2 = 0$ . De

(3.109) e (3.110) vemos que os horizontes acontecem, respectivamente, quando

$$R_I(r_1, t_c^I) = 2km_{II} \text{ e } R_{III}(r_2, t_c^{III}) = R_{SII}, \text{ onde } t_c^I \text{ é dado por (3.103) e } t_c^{III} = \frac{2}{3}R_{SII}.$$

Note-se para  $t < t_c^I$  ou  $t < t_c^{III}$  temos vetores de Killing tipo-espaço. Já se  $t > t_c^I$  ou

$t > t_c^{III}$  temos vetores de Killing tipo-tempo.

Podemos escrever a métrica da região II em coordenadas de Schwarzschild:

$$ds_{II}^2 = \left(1 - \frac{R_{SII}}{R_{II}}\right) dT^2 - \left(1 - \frac{R_{SII}}{R_{II}}\right)^{-1} dR^2 - R_{II}^2 d\Omega^2 \quad R_{II} > R_{SII}. \quad (3.111)$$

Observando essa métrica, concluímos que  $g_{\mu\nu}$  não depende de  $T$  sendo  $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(R)$ . Por

outro lado,

$$ds_{II}^2 = \left( \frac{R_{SII}}{R_{II}} - 1 \right)^{-1} dR^2 - \left( \frac{R_{SII}}{R_{II}} - 1 \right) d\tau^2 - R_{II}^2 d\Omega^2 \quad R_{II} < R_{SII}. \quad (3.112)$$

Essa última pode sofrer uma transformação de coordenadas  $R_{II} = \bar{x}^0$  e  $\tau = \bar{x}^1$ :

$$ds_{II}^2 = \left( \frac{R_{SII}}{\bar{x}^0} - 1 \right)^{-1} d\bar{x}^{02} - \left( \frac{R_{SII}}{\bar{x}^0} - 1 \right) d\bar{x}^{12} - \bar{x}^{02} d\Omega^2 \quad \bar{x}^0 < R_{SII}. \quad (3.113)$$

Nessa forma  $g_{\mu\nu}$  não depende de  $\bar{x}^1$ , a métrica pode ser escrita como  $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(\bar{x}^0)$ . Na definição de Novikov-Zel'dovich, métricas escritas na forma (3.113) são chamadas de Regiões-R e as da forma (3.112), de Regiões-T.

### 3.4.3 Hipersuperfícies de Separação em Novikov

Vamos calcular sistematicamente algumas hipersuperfícies especiais.

a)  $R$  constante

$$\vec{n} = \nabla R \Rightarrow n_0 = \dot{R} \quad n_1 = R' \Rightarrow n^0 = \dot{R} \quad n^1 = -\frac{1}{R'}, \quad (3.114)$$

cuja norma é  $\|\vec{n}\|^2 = \dot{R}^2 - 1$ . Para cada região do universo de Novikov:

$$\|\vec{n}\|_I^2 = \frac{2^{2/3}}{3} (R_{SII})^{2/3} \left( \frac{r}{r_1} \right)^2 [t - (r_2 - r_1)]^{-2/3} - 1; \quad (3.115)$$

$$\|\vec{n}\|_{II}^2 = \frac{2^{2/3}}{3} (R_{SII})^{2/3} [t - (r_2 - r)]^{-2/3} - 1 = \frac{R_{SII}}{R_{II}} - 1; \quad (3.116)$$

$$\|\vec{n}\|_{III}^2 = \frac{2^{2/3}}{3} (R_{SII})^{2/3} \left( \frac{r}{r_2} \right)^2 t^{-2/3} - 1. \quad (3.117)$$

Resultando  $R_{II} > R_{SII}$  o vetor normal  $\vec{n}_{II}$  é do tipo-espaço em Regiões-R. E, quando

$R_{II} < R_{SII}$  o vetor normal  $\vec{n}_{II}$  é do tipo-tempo em Regiões-T.

b)  $r$  constante

Conhecendo o vetor unitário normal podemos calcular um vetor normal não unitário:

$$n_\alpha = \delta_\alpha^1 \Rightarrow n^\alpha = -\frac{1}{R'} \delta_1^\alpha, \quad (3.118)$$

cujas norma é  $\|\vec{n}\|^2 = -\frac{1}{R'^2}$ . Para cada região do universo de Novikov:

$$\|\vec{n}\|_I^2 = -\frac{r^2}{R_I^2}; \quad (3.119)$$

$$\|\vec{n}\|_{II}^2 = -\frac{R_{II}}{R_{SII}}; \quad (3.120)$$

$$\|\vec{n}\|_{III}^2 = -\frac{r^2}{R_{III}^2}. \quad (3.121)$$

Em todos os casos os vetores são tipo-espaço.

c)  $t$  constante

Entre as hipersuperfícies mais simples de toda a geometria de Novikov os vetores são ortonormais, tais que sempre definem tri-espaços Euclidianos:

$$n_\alpha = \delta_\alpha^0 \Rightarrow n^\alpha = \delta_0^\alpha. \quad (3.122)$$

### 3.4.4 Comportamento das Geodésicas

A métrica da região II é:

$$ds_{II}^2 = dt^2 - \frac{R_{SII}}{R_{II}} dr^2 - R_{II}^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2], \quad (3.123)$$

de acordo com (3.63) e (3.89) definindo que  $f(r) = 0$  quando tratamos do universo plano de Tolman a equação da geodésica para a coordenada  $t$  é:

$$\frac{dt}{dr} = \pm \sqrt{\frac{R_{SII}}{R_{II}}}. \quad (3.124)$$

A partir de (3.124) e (3.96) segue:

$$R_{II} = 0 \Rightarrow \frac{dt}{dr} \rightarrow \infty \Rightarrow t = r_2 - r; \quad (3.125)$$

$$R_{II} = R_{SII} \Rightarrow \frac{dt}{dr} = \pm 1 \Rightarrow t = r_2 - r + \frac{2}{3}R_{SII}; \quad (3.126)$$

$$R_{II} \gg R_{SII} \Rightarrow \frac{dt}{dr} \rightarrow 0 \Rightarrow t \gg r_2 - r + \frac{2}{3}R_{SII}. \quad (3.127)$$

As singularidades, caracterizadas pela densidade de energia infinita, acontecem nos instantes  $t_0^I = r_2 - r_1$  para a região I e  $t_0^{III} = 0$  para a região III. Sendo as funções  $R_I$  e  $R_{III}$  nulas nestes instantes temos pelas equações (3.94) e (3.98):

$$R_I = 0 \Rightarrow t = r_2 - r_1; \quad (3.128)$$

$$R_{III} = 0 \Rightarrow t = 0. \quad (3.129)$$

Os horizontes de eventos, definidos por  $R(t, r) = R_S$ , ocorrem nos instantes  $t_c^I = t_0^I + \frac{2}{3}R_{SII}$  e  $t_c^{III} = \frac{2}{3}R_{SII}$ , respectivamente para as regiões I e III. Segue de (3.94) e (3.98):

$$R_I = R_{SII} \Rightarrow t = t_0^I + \frac{2}{3}R_{SII} \left( \frac{r_1}{r} \right)^{\frac{3}{2}}; \quad (3.130)$$

$$R_{III} = R_{SII} \Rightarrow t = \frac{2}{3}R_{SII} \left( \frac{r_2}{r} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (3.131)$$

Assintoticamente, a equação (3.130) nos dá:

$$r \Rightarrow 0 \Rightarrow t \Rightarrow \infty$$

$$r \Rightarrow \infty \Rightarrow t = t_0^I$$

Por sua vez, a equação (3.131):

$$r \Rightarrow 0 \Rightarrow t \Rightarrow \infty$$

$$r \Rightarrow \infty \Rightarrow t = 0$$

Para analisarmos o comportamento das geodésicas no universo de Novikov, observe o gráfico (3.1). Os fótons que passam pelo evento 1 são criados na singularidade e podem sair para o universo externo, tendendo ao infinito, ou ficarem presos no horizonte de

eventos. Já os fótons no evento 2 podem ter sido criados na singularidade e tenderem ao infinito, ou estarem confinados no raio de Schwarzschild. Por sua vez, fótons no evento 3 ou foram criados no infinito e não se aproximam do horizonte de eventos, como podem ter sido gerados na singularidade. Os fótons no evento 4 têm a mesma história dos fótons no evento 1. Quando fótons criados na singularidade de um modelo podem sair para o universo externo e, por outro lado, fótons criados no universo externo nunca alcançam o horizonte de eventos, chamamo-o de buraco branco.



# Capítulo 4

## Universo de Novello e Salim

### 4.1 Apresentação

Não há, ainda, um entendimento claro sobre o comportamento dos fótons nas proximidades de um campo gravitacional muito intenso. A Teoria da Relatividade Geral (TRG) nos mostrou o efeito da gravitação sobre os grãos de luz: malgrado a ausência de massa, os mesmos curvam-se atraídos pela energia do campo gravitacional. Para descrever um efeito mais forte podemos, por exemplo, considerar auto interações descartadas pela teoria de Einstein. Pensando nisso, Novello e Salim [15] começaram um estudo sistemático de teorias não-minimalmente acopladas com a gravitação que geram naturalmente não-linearidades. À Lagrangiana da TRG adicionada à de Maxwell acrescentam um termo proporcional ao escalar de curvatura e ao potencial vetor eletromagnético resultando em fótons com massa proporcional àquele escalar. Dos vários aspectos tratados nessa teoria, como a quebra da invariância de calibre, vamos nos deter numa solução particular, caracterizada por um universo homogêneo e isotrópico preenchido com fótons não-lineares. Como veremos, o modelo cosmológico que descreve

esta teoria não possui singularidade.

Seja a Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left\{ R - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \beta R W_\mu W^\mu \right\} \quad (4.1)$$

onde  $R$  é o escalar de curvatura,  $F_{\mu\nu}$  é o tensor eletromagnético,  $W_\mu$  é o potencial vetor eletromagnético e  $\beta$  é uma constante.

Tomando a variação da Lagrangiana (4.1) com respeito à métrica obtemos:

$$\left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) (1 + \beta W^2) - \beta g_{\mu\nu} \square W^2 + \beta W_{;\mu;\nu}^2 + \beta R W_\mu W_\nu + \frac{1}{2} \left( F_{\mu\alpha} F_\nu^\alpha + \frac{1}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \right) = 0, \quad (4.2)$$

sendo  $W^2 \doteq W^\mu W_\mu$ .

Por outro lado, se tomarmos a variação com respeito ao potencial vetor  $W_\mu$ :

$$F_{;\beta}^{\alpha\beta} = -2\beta R W^\alpha. \quad (4.3)$$

Aqui temos explicitamente a não linearidade da teoria, uma vez que no eletromagnetismo de Maxwell  $F_{;\beta}^{\alpha\beta} = 0$ . Do traço da equação (4.2) temos:

$$R = -3\beta \square W^2. \quad (4.4)$$

Substituindo-se esta última em (4.3):

$$F_{;\beta}^{\alpha\beta} = 6\beta^2 W^\alpha \square W^2. \quad (4.5)$$

## 4.2 Uma Solução Particular

Uma possível solução cósmica para o universo preenchido com estes fótons não-lineares é

$F_{\mu\nu} = 0$ , visto que, mesmo os vetores elétricos e magnéticos sendo nulos, temos  $W_\nu \neq 0$

como campo real, por conta da quebra da invariância de calibre da teoria. Da equação

(4.3) temos  $R = 0$  e com (4.4) obtemos a equação de onda para  $W^2$ :  $\square W^2 = 0$ .

Definindo uma nova função  $\Omega(t) \doteq 1 + \beta W^2$ , e ainda  $W_\mu = W(t)\delta_\mu^0$ , reescrevemos a equação (4.2) como

$$R_{\mu\nu} = -\frac{\Omega_{,\mu;\nu}}{\Omega}. \quad (4.6)$$

Supondo que a métrica desse universo seja dada por Friedmann:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) [d\chi^2 + \sigma^2(\chi) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)], \quad (4.7)$$

obtemos três equações para o modelo, usando as expressões para  $R_{\mu\nu}$  de acordo com as equações (2.2) a (2.6):

$$\frac{3}{a} \frac{d^2 a}{dt^2} = -\frac{1}{\Omega} \frac{d^2 \Omega}{dt^2}, \quad (4.8)$$

$$\frac{1}{a} \frac{d^2 a}{dt^2} - 2 \frac{1}{a^2 \sigma} \frac{d^2 \sigma}{d\chi^2} + 2 \left( \frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right)^2 = -\frac{1}{a\Omega} \frac{da}{dt} \frac{d\Omega}{dt}, \quad (4.9)$$

$$\frac{1}{a} \frac{d^2 a}{dt^2} - \frac{1}{a^2 \sigma} \frac{d^2 \sigma}{d\chi^2} - \left( \frac{1}{a\sigma} \frac{d\sigma}{d\chi} \right)^2 + \frac{1}{a^2 \sigma^2} + 2 \left( \frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right)^2 = -\frac{1}{a\Omega} \frac{da}{dt} \frac{d\Omega}{dt}. \quad (4.10)$$

Das equações (4.9) e (4.10) obtemos as três soluções possíveis para  $\sigma(\chi)$  resolvendo a equação:

$$\frac{d^2 \sigma}{d\chi^2} - \left( \frac{d\sigma}{d\chi} \right)^2 + 1 = 0, \quad (4.11)$$

onde  $\sigma(\chi) = \chi$  para o universo plano;  $\sigma(\chi) = \sinh \chi$  implica no universo aberto e

$\sigma(\chi) = \sin \chi$ , fechado. As equações resultantes são:

$$\frac{3}{a} \frac{d^2 a}{dt^2} = -\frac{1}{\Omega} \frac{d^2 \Omega}{dt^2}, \quad (4.12)$$

$$\frac{1}{a} \frac{d^2 a}{dt^2} + 2 \frac{\epsilon}{a^2} + 2 \left( \frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right)^2 = -\frac{1}{a\Omega} \frac{da}{dt} \frac{d\Omega}{dt}, \quad (4.13)$$

$$\square \Omega = 0, \quad (4.14)$$

onde  $\epsilon = \{-1, 0, +1\}$  para os universos aberto, plano e fechado, respectivamente.

Conforme veremos a seguir, o universo aberto nos provêm uma solução cujo fator de escala  $a(t)$  não possui singularidade. Os outros dois casos não serão estudados nesse trabalho. Da (4.14) temos que  $a^3 \frac{d\Omega}{dt} = C_0$ . Substituindo este resultado em (4.12) encontramos  $a^3 \frac{d^2 a}{dt^2} = \frac{C_0}{C_1}$ . De posse desses resultados integramos (4.13) e obtemos:

$$a(t) = \sqrt{(t - t_0)^2 + C_2}, \quad (4.15)$$

onde  $t_0$ ,  $C_0$ ,  $C_1$  e  $C_2 \doteq C_0/C_1$  são constantes de integração.

Para que o fator de escala  $a(t)$  não tenha singularidade, teremos um mínimo em

$\alpha_0 \doteq a(t = t_0) \Rightarrow \alpha_0^2 = C_2$ , ou seja,  $C_2 > 0$ . Da definição de  $\Omega$ :

$\beta W^2 = [C_1(t - t_0)/a] - 1$ . Se  $\beta < 0$ , logo  $C_1 < 0$  e  $t_0 < 0$ . Donde  $C_0 < 0$ , e

reescrevendo (4.15):

$$a(t) = \sqrt{(t - t_0)^2 + \alpha_0^2}. \quad (4.16)$$

Pela equação 4.5 escrevemos o tensor energia-momento correspondente como:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -kT_{\mu\nu} \Rightarrow kT_{\mu\nu} = \frac{\Omega_{,\mu;\nu}}{\Omega}. \quad (4.17)$$

Para calcularmos as partes irreduzíveis desse tensor energia momento utilizaremos a definição da eq. (A.1) e uma classe de observadores comoventes com o fluido tais que

$V^\mu = \delta_0^\mu$ . Pelas equações (A.3) a (A.6) temos:

$$k\rho = \frac{1}{\Omega} \frac{d^2\Omega}{dt^2} < 0, \quad (4.18)$$

$$p = \frac{\rho}{3}. \quad (4.19)$$

Se o fluxo de calor e a pressão anisotrópica nulas temos o caso correspondente a um fluido perfeito com equação de estado correspondente à radiação. A densidade de energia é negativa uma vez que na (4.12) temos  $\frac{C_0}{C_1} > 0$ .

### 4.3 Sobre Inomogeneidades em Novello-Salim

Queremos determinar as condições de contorno para ligar a métrica Novello-Salim com um universo externo. Primeiramente deve-se notar que do fato do tensor energia momento da teoria não possuir traço, a equação de estado (4.19) nos dá um fluido de radiação, ou seja, com pressão proporcional a densidade de energia. Não podemos *colar* nenhuma métrica de radiação com Schwarzschild, pois para satisfazer a condição de continuidade da pressão, a densidade de energia da métrica de radiação também deve ser nula. Procuramos, então, por uma métrica que permita uma solução com radiação. Das opções estudadas [3] e [23], escolhemos a métrica de Vaidya por simplicidade.

Reescrevemos as equações (2.27) a (2.29) para o universo aberto de Friedmann:

$$k(\rho)_{\Sigma_{\text{Novello-Salim}}} = \frac{1}{a^2} \left[ \left( \frac{\dot{a}}{\dot{t}} \right)^2 - 1 \right] (2a^2 \dot{\chi}^2 + 3) - \frac{2a \dot{\chi}^2}{\dot{t}} \left( \frac{\dot{a}}{\dot{t}} \right) \dot{\chi}. \quad (4.20)$$

$$k(p + \Pi_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta)_{\Sigma_{\text{Novello-Salim}}} = \frac{1}{a^2} \left[ \left( \frac{\dot{a}}{\dot{t}} \right)^2 - 1 \right] (2a^2 \dot{\chi}^2 - 1) - \frac{2\dot{t}}{a} \left( \frac{\dot{a}}{\dot{t}} \right) \dot{\chi}, \quad (4.21)$$

$$k(q_\alpha n^\alpha)_{\Sigma_{\text{Novello-Salim}}} = \pm \frac{2\dot{t}\dot{\chi}}{a} \left[ 1 - \left( \frac{\dot{a}}{\dot{t}} \right)^2 + \frac{a}{\dot{t}} \left( \frac{\dot{a}}{\dot{t}} \right) \dot{\chi} \right], \quad (4.22)$$

onde  $\dot{\phantom{x}} \doteq d/d\tau$ .

Não podemos ter um observador comovente em um universo de Friedmann conectado a métrica de Vaidya [6]. O fluxo de calor, dado pela eq. (4.22), é nulo para um observador comovente, e pela condição de continuidade o fluxo de calor em Vaidya, veja eq. (2.58)

também deve ser nulo. Ocorre que pelas equações (2.56) a (2.58) as quantidades de energia em Vaidya são proporcionais umas as outras, de maneira que a densidade de energia e a pressão seriam igualmente nulas.

As equações (4.20) a (4.22) podem ser escritas em função da densidade de energia e pressão vistas pelo observador comovente e dadas pelas eq. (4.18) e (4.19). As equações de Einsteins são reescritas como:

$$\frac{3}{a} \frac{d^2 a}{dt^2} = -k\rho, \quad (4.23)$$

$$-a^2 \left[ \frac{1}{a} \frac{d^2 a}{dt^2} + 2 \frac{\epsilon}{a^2} + 2 \left( \frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right)^2 \right] = -kpa^2. \quad (4.24)$$

De (4.23) e (4.24) reescrevemos (4.20) a (4.22):

$$(\rho)_{\Sigma_{Novello-Salim}} = \rho \left( \dot{t}^2 + \frac{a^2 \dot{\chi}^2}{3} \right), \quad (4.25)$$

$$(p + \Pi_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta)_{\Sigma_{Novello-Salim}} = \rho \left( \frac{\dot{t}^2}{3} + a^2 \dot{\chi}^2 \right), \quad (4.26)$$

$$(q_\alpha n^\alpha)_{\Sigma_{Novello-Salim}} = \pm \left( -\frac{4}{3} \rho a \dot{t} \dot{\chi} \right). \quad (4.27)$$

Se o fluxo de calor e a pressão devem ser contínuas ao longo da hipersuperfície de separação, e para a métrica de Vaidya essas quantidades são iguais (observando as equações (2.57) e (2.58) e os sinais correspondentes à direção do vetor normal), temos que os mesmos devem ser iguais na métrica de Friedmann. Corrigindo os sinais apropriadamente, temos para as equações (4.26) e (4.27):

$$-k\rho \left( \frac{\dot{t}^2}{3} + a^2 \dot{\chi}^2 \right) = -\frac{4}{3} k\rho a \dot{t} \dot{\chi}, \quad (4.28)$$

da qual obtemos:

$$\dot{t}^2 - 4a\dot{\chi}\dot{t} + 3a^2\dot{\chi}^2 = 0. \quad (4.29)$$

Resolvendo a equação (4.29) temos duas soluções para  $\dot{t}$ :  $\dot{t} = 3a\dot{\chi}$  ou  $\dot{t} = a\dot{\chi}$ .

Substituindo estes resultados na condição tipo-tempo (2.30), concluímos que a única possível é:

$$\dot{t} = 3a\dot{\chi}. \quad (4.30)$$

A eq. (2.30):

$$\dot{\chi}^2 = \frac{1}{8a^2}.$$

Finalmente, substituindo (2.30) em (4.30) a integração resulta em:

$$\dot{t}^2 = \frac{9}{8} \Rightarrow t(\tau) = \frac{3}{2\sqrt{2}}(\tau - \tau_0), \quad (4.31)$$

onde  $\tau_0$  é constante de integração.

Com o auxílio da (4.31), reescrevemos a equação (4.16) em função de  $\tau$ :

$$a(\tau) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{[3(\tau - \tau_0) - 2\sqrt{2}t_0]^2 + 8(\alpha_0)^2}. \quad (4.32)$$

Substituindo (4.32) em (4.31) a integração nos dá  $\chi$  em função de  $\tau$ :

$$\chi(\tau) = \chi_0 + \ln \left\{ 3(\tau - \tau_0) - 2\sqrt{2}t_0 + \sqrt{[3(\tau - \tau_0) - 2\sqrt{2}t_0]^2 + 8(\alpha_0)^2} \right\}^{\frac{1}{3}}. \quad (4.33)$$

Usando as equações (4.30) e (4.31) reescrevemos as quantidades de energia sobre  $\Sigma$  na região correspondente à métrica Novello-Salim:

$$(\rho)_{\Sigma_{\text{Novello-Salim}}} = \frac{7}{6}\rho, \quad (4.34)$$

$$(p + \Pi_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta)_{\Sigma_{\text{Novello-Salim}}} = \frac{\rho}{2}, \quad (4.35)$$

$$(q_\alpha n^\alpha)_{\Sigma_{\text{Novello-Salim}}} = \pm \left( -\frac{\rho}{2} \right), \quad (4.36)$$

onde  $\rho$  é dada por (4.18) e (4.12):

$$\rho(t) = -\frac{3}{k} \left[ \frac{\alpha_0}{(t-t_0)^2 + \alpha_0^2} \right]^2. \quad (4.37)$$

Podemos reescrever as componentes da curvatura extrínseca (2.33) a (2.35), segundo as equações (4.30) e (4.31):

$$K_{(0)(0)} = \pm \left[ \ln \left( a^{-\frac{1}{3}} \right) \right]^\cdot, \quad (4.38)$$

$$K_{(2)(2)} = \pm a\sigma \left[ 3(a\sigma)^\cdot - 2\sqrt{2} \sigma \frac{da}{dt} \right], \quad (4.39)$$

$$K_{(3)(3)} = K_{(2)(2)} \sin^2 \theta. \quad (4.40)$$

Das condições de contorno de Darmois, a continuidade da métrica intrínseca impõem para as equações (2.30) a (2.32) e (2.59) a (2.61):

$$\left( 1 - \frac{R_S}{R} \right) \dot{U}^2 + 2\dot{U}\dot{R} = \dot{t}^2 - a^2 \dot{\chi}^2 = 1, \quad (4.41)$$

$$R = a\sigma. \quad (4.42)$$

Das condições de contorno de Darmois, a continuidade da curvatura extrínseca impõem para as equações (4.38) a (4.40) e (2.62) a (2.64):

$$\left[ \ln(\dot{U}\dot{R}) \right]^\cdot = \left[ \ln \left( a^{-\frac{1}{3}} \right) \right]^\cdot, \quad (4.43)$$

$$R(\dot{R} + F\dot{U}) = a\sigma \left[ 3(a\sigma)^\cdot - 2\sigma \frac{da}{dt} \right]. \quad (4.44)$$

Integrando a equação (4.43):

$$\dot{R}\dot{U} = \frac{C_3}{a^{\frac{1}{3}}}, \quad (4.45)$$

onde  $C_3$  é constante de integração.

Substituindo 4.42 em 4.44 obtemos:

$$F\dot{U} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{d\sigma}{d\chi} - \sigma \frac{da}{dt} \right). \quad (4.46)$$

Dividindo a eq. (4.46) pela (4.45), e usando a (4.42):

$$F = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{4C_3} \left( \frac{d\sigma}{d\chi} - \sigma \frac{da}{dt} \right) \left( \frac{d\sigma}{d\chi} + 3\sigma \frac{da}{dt} \right). \quad (4.47)$$

E, por fim, aplicando (4.47) em (4.46):

$$\dot{U} = \frac{\sqrt{2} C_3}{2 a^{\frac{1}{3}}} \left( \frac{d\sigma}{d\chi} + 3\sigma \frac{da}{dt} \right)^{-1} \quad (4.48)$$

Com as equações (4.45) a (4.48) tem a evolução temporal de todas as coordenadas da métrica de Vaidya em função das coordenadas de Friedmann e o tempo próprio  $\tau$ . Se a integração dessas quantidades for possível, obtemos as condições de *colagem* entre as métricas de Vaidya e de Friedmann.

## 4.4 Evolução da Hipersuperfície na Região Novello-Salim

Pelos resultados das eqs. (4.31) e (4.31), podemos reescrever a velocidade do observador na região Novello-Salim sobre a hipersuperfície  $\Sigma$ , dada pela eq. (2.25):

$$V^\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4} \left( 3, \frac{1}{a}, 0, 0 \right) \Rightarrow V_\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4} (3, -a, 0, 0). \quad (4.49)$$

Da eq. (B.6) podemos calcular a taxa de expansão da hipersuperfície:

$$\theta = \frac{3\sqrt{2}}{4} \frac{t - t_0}{a^2}. \quad (4.50)$$

Note que para  $t < t_0$  temos  $\theta < 0$  correspondendo a fase de contração e quando  $t > t_0$  temos  $\theta > 0$  caracterizando a expansão da região.

A aceleração  $a_\mu = V_{\mu;\nu}V^\nu$  da classe de observadores sobre a hipersuperfície de separação:

$$a_\mu = \frac{1}{8}(t - t_0)(1/a^2, -3/a, 0, 0). \quad (4.51)$$

A evolução da taxa de expansão (4.50):

$$\theta_{,\alpha}V^\alpha = \frac{9}{8a^2} \left[ 1 - 2\frac{(t - t_0)^2}{a^2} \right]. \quad (4.52)$$

Da eq. (4.52) calculamos os extremos de  $\theta$  fazendo  $\theta_{,\alpha}V^\alpha = 0$ . Encontramos

$\theta(t - t_0 = \pm\alpha_0) = \pm\frac{3\sqrt{2}}{8\alpha_0}$ . Ainda pela equação (4.50) temos  $\theta(t - t_0 = 0) = 0$  e

$\theta(t - t_0 \rightarrow \infty) \rightarrow \infty$ . Usando a equação (4.16) calculamos o valor do fator de escala

quando  $a(t - t_0 = \pm\alpha_0) = \sqrt{2}\alpha_0$ , e conforme definição anterior,  $a(t - t_0 = 0) = \alpha_0$ .

Da eq. (4.37) temos  $\rho(t - t_0 = 0) = -\frac{3}{\alpha_0^2}$  e  $\rho(t - t_0 = \pm\alpha_0) = -\frac{3}{4\alpha_0^2}$ . Lembre-se que a

densidade de energia vista por um observador movendo-se sobre a hipersuperfície  $\Sigma$  é

dada por (4.34). Com estas informações construímos o gráfico 4.1.

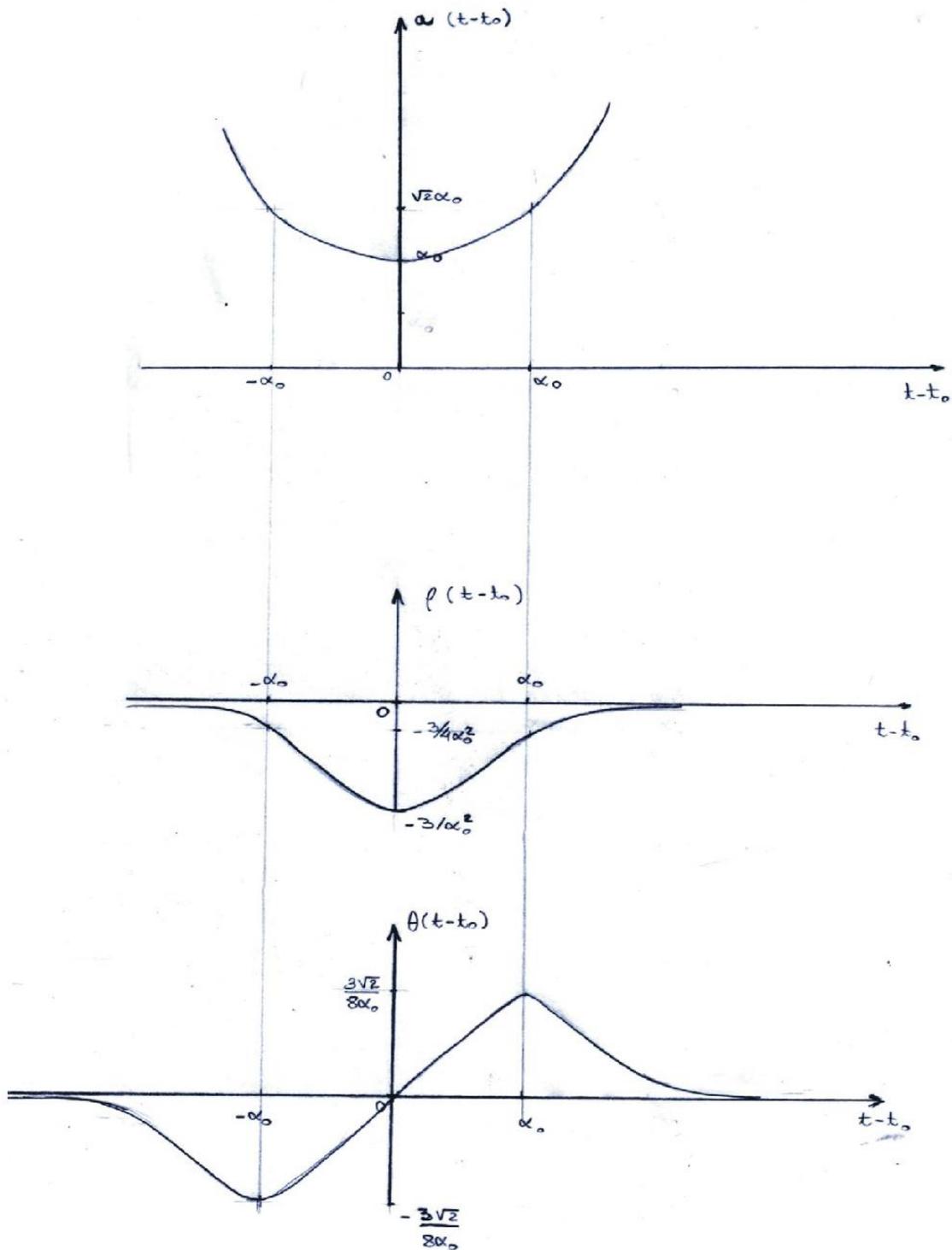


Figura 4.1: Evolução temporal do fator de escala e da densidade de energia na região Novello-Salim e a taxa de expansão da hipersuperfície de separação  $\Sigma$ .

# Capítulo 5

## Conclusões

No capítulo 2, apresentamos as condições de contorno de Darmois para a *colagem* de métricas. Essas condições se estabelecem através da continuidade da métrica intrínseca e curvatura extrínseca que definem a tri-superfície de separação  $\Sigma$  entre as geometrias. Ao supor que a relação entre a curvatura do espaço-tempo e a distribuição de energia da métrica é dada pelas equações de Einstein, as condições de Darmois também implicam na conservação da pressão total e fluxo de calor que atravessam  $\Sigma$  permitindo, entretanto, a densidade de energia não ser necessariamente igual nas duas variedades. Definimos, a seguir, uma hipersuperfície de separação tipo-tempo e calculamos as projeções do tensor energia-momento de acordo com a equação (A.1) correspondentes a estes observadores e a métrica intrínseca e curvatura extrínseca para as geometrias esfericamente simétricas de Friedmann (homogêneo, isotrópico em expansão), Schwarzschild (vazio) e Vaidya (fluxo de calor direcionado radialmente). Todos os tensores de Ricci e Einstein foram calculados segundo o formalismo de tetradas (ver [21]).

No capítulo seguinte, narramos algumas soluções clássicas na literatura de inhomogeneidades locais. Começamos com o trabalho de Einstein e Straus [4] no qual uma massa pontual e centrada numa região esfericamente simétrica vazia que, por sua vez está conectada a uma métrica em expansão dada por Friedmann. A solução deste problema mostra que um observador comovente na métrica de Friedmann pode representar a massa pontual como uma distribuição de poeira com densidade igual ao universo externo. Também é demonstrado que a região do vazio pode ser escrita em coordenadas de Schwarzschild. Ainda no terceiro capítulo, seguimos o trabalho de Oppenheimer e Snyder [19] sobre colapso gravitacional. Neste trabalho o campo da estrela é descrito pela métrica fechada de Friedmann tendo como fonte um fluido perfeito sem pressão envolto no vazio de Schwarzschild.

O capítulo 3 descreve ainda o *buraco branco* de Novikov ([17] e [1]) motivado originalmente para explicar o comportamento dos quasares. Aqui temos um núcleo de poeira cercado pelo vazio e embebido numa métrica em expansão. Estas três regiões são descritas pela métrica esfericamente simétrica em coordenadas comoventes desenvolvida por Tolman [22]. Aplicamos as condições de contorno de Darmois e concluímos que as métricas em expansão podem ser escritas como Friedmann e a região vazia como Schwarzschild. A análise das geodésicas nos indicou que os fótons criados na singularidade desse modelo podem ultrapassar o horizonte de eventos e penetrar o universo externo, e que de forma contrária, nenhuma informação oriunda de fora pode cruzar o raio de Schwarzschild. Nesta dissertação consideramos apenas o caso do

universo plano<sup>1</sup>.

Os trabalhos descritos até aqui trataram de *colagens* entre as geometrias de Schwarzschild e Friedmann, na qual a matéria é descrita como um fluido perfeito sem pressão por observadores comoventes. No capítulo 4 descrevemos as condições de ligação entre uma métrica homogênea e isotrópica sem singularidade desenvolvida por Novello e Salim (N-S) [15] e a solução externa de Vaidya [23]. A Lagrangiana de N-S contém um termo de acoplamento não-mínimo com a gravitação gerando fótons não-lineares com equação de estado  $p = \rho/3$ . A quebra da invariância de calibre desta teoria permite uma solução nula para o tensor eletromagnético, uma vez que o potencial vetor é um campo real. A métrica de Friedmann usada para descrever a geometria provêm uma solução sem singularidade no caso do universo aberto. A nossa ideia era descrever a geometria usando o formalismo de Tolman [22] e a métrica dada pela eq. (3.44), abordagem que será retomada em estudos posteriores, uma vez que a projeção do tensor energia-momento sobre observadores comoventes resulta em pressão anisotrópica diferente de zero aumentando a dificuldade na resolução das equações, não sendo adequado a uma abordagem inicial. Assim, focamos no estudo da *colagem* da métrica Novello-Salim tipo Friedmann. A tentativa seguinte consistiu em realizar a ligação com a métrica de Schwarzschild, que como vimos não preserva a continuidade da pressão através da hipersuperfície. Passamos, então a procurar métricas que descrevessem radiação como as de Vaidya [23] e Bondi [3]. Após escolhermos a métrica de Vaidya, concluímos que os observadores sobre a hipersuperfície de separação entre as métricas

---

<sup>1</sup>Outros casos e a generalização deste modelo pode ser encontrada em [1].

não podem ser comoventes com o fluido ([6] e [7]): observadores comoventes medem fluxo de calor nulo na métrica Novello-Salim, e em Vaidya o fluxo de calor não pode ser nulo ou recairemos no caso de Schwarzschild, sem realizar a ligação entre as métricas. Conseguimos estabelecer as condições para a colagem entre a métrica de Novello-Salim e Vaidya e ainda analisar a evolução das quantidades cinemáticas sobre  $\Sigma$  na região interna<sup>2</sup>. O próximo passo será analisar o comportamento das geodésicas em Vaidya, ou seja, as trajetórias dos fótons não-lineares no universo externo, começando pelo trabalho de Lindquist, Schwartz e Misner [10].

---

<sup>2</sup>As condições de *colagem* independem de definir qual métrica é interna ou externa. No nosso caso, entretanto, estamos interessados em descrever um modelo estelar com fonte de fótons não-lineares. Assim, consideramos a métrica interna como Novello-Salim e a externa como Vaidya.

# Apêndice A

## Tensor Energia-Momento

Seção baseada na monografia de M. Novello [13].

Seja o tensor energia momento escrito em função das suas parte irreduzíveis

$$T_{\alpha\beta} = \rho V_\alpha V_\beta - p h_{\alpha\beta} + q_{(\alpha} V_{\beta)} + \Pi_{\alpha\beta}, \quad (\text{A.1})$$

onde  $\rho$  é a densidade de energia;  $p$  é a pressão;  $q_\alpha$  é o fluxo de calor;  $\Pi_{\alpha\beta}$  é a pressão anisotrópica;  $V_\alpha$  é o campo de velocidades e, finalmente,  $h_{\alpha\beta}$  é o tensor projeção (sem traço e cuja projeção sobre si resulta nele próprio) tal que

$$h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - V_\alpha V_\beta, \quad (\text{A.2})$$

sendo  $g_{\alpha\beta}$  a métrica.

Sabendo que o fluxo de calor e a pressão anisotrópica tem projeções nulas sobre o campo de velocidades, e que a pressão anisotrópica tem traço nulo, podemos escrever os seguintes resultados:

$$\rho = T_{\alpha\beta} V^\alpha V^\beta, \quad (\text{A.3})$$

$$p = -\frac{1}{3} T_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta}, \quad (\text{A.4})$$

$$q_\lambda = T_{\alpha\beta} V^\beta h_\lambda^\alpha, \quad (\text{A.5})$$

$$\Pi_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} - \rho V_\alpha V_\beta + p h_{\alpha\beta} - q_{(\alpha} V_{\beta)}. \quad (\text{A.6})$$

Quando mudamos de observador, ou seja, o campo de velocidades  $V_\alpha$  pelo campo  $\bar{V}_\alpha$ , o tensor energia momento resulta em:

$$T_{\alpha\beta} = \rho' \bar{V}_\alpha \bar{V}_\beta - p' h'_{\alpha\beta} + q'_{(\alpha} \bar{V}_{\beta)} + \Pi'_{\alpha\beta}, \quad (\text{A.7})$$

de tal maneira que as variáveis linha são as correspondentes às quantidades de energia vistas pelo novo observador. Rescrevendo as quantidades anteriores em função das primeiras encontramos:

$$\rho' = \alpha^2(\rho + p) - p + 2\alpha\beta + \gamma, \quad (\text{A.8})$$

$$p' = p - \frac{1}{3} [(p + \rho)(1 - \alpha^2) - (2\alpha\beta + \gamma)], \quad (\text{A.9})$$

$$q'_\lambda = \alpha q_\lambda + [\alpha(\rho + p) + \beta] V_\lambda - [\alpha^2(\rho + p) + \gamma] \bar{V}_\lambda + \Pi_{\lambda\beta} \bar{V}^\beta, \quad (\text{A.10})$$

$$\Pi'_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} - \rho' \bar{V}_\alpha \bar{V}_\beta + p' h'_{\alpha\beta} - q'_{(\alpha} \bar{V}_{\beta)}, \quad (\text{A.11})$$

assim definidas:  $\alpha = V_\alpha \bar{V}^\alpha$ ;  $\beta = q_\alpha \bar{V}^\alpha$ ;  $\gamma = \Pi_{\alpha\beta} \bar{V}^\alpha \bar{V}^\beta$ .

Considerando as equações de estado  $p = \lambda\rho$  e  $p' = \lambda'\rho'$  e rescrevendo as equações (A.8) e (A.9), obtemos:

$$\rho'(3\lambda' - 1) = \rho(3\lambda - 1), \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{3\lambda - 1}{3\lambda' - 1} = [\alpha^2(\lambda + 1) - \lambda] + \frac{2\alpha\beta + \gamma}{\rho}. \quad (\text{A.13})$$

Considerando essas duas últimas equações, as quantidades irreduzíveis do tensor energia momento permanecem invariantes sob duas classes de observadores distintos sendo o único caso possível é  $\lambda = \lambda' = -1$ , com o fluxo de calor e a pressão anisotrópica nulas,

ou seja, um **fluido perfeito no vácuo**. Este resultado será de extrema importância na *colagem* de métricas que não permitem observadores comoventes.

Estudando o caso de dois observadores para um caso particular quando a Lagrangiana de um campo escalar sob a ação de um potencial  $V(\varphi)$  obtemos:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} \varphi_{,\lambda} \varphi^{,\lambda} - V(\varphi) \right\}. \quad (\text{A.14})$$

O tensor energia momento pode ser calculado através da variação da Lagrangiana:

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (\text{A.15})$$

Sendo assim

$$T_{\mu\nu} = \varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} [\varphi_{,\lambda} \varphi^{,\lambda} - V(\varphi)], \quad (\text{A.16})$$

e o traço

$$T = 4V - \varphi_{,\lambda} \varphi^{,\lambda}. \quad (\text{A.17})$$

Calculando as quantidades irreduzíveis do tensor momento energia a partir da equações (A.3) a (A.6) e (A.1), obtemos:

$$\rho = \sigma^2 - \frac{1}{2} \varphi_{,\lambda} \varphi^{,\lambda} + V, \quad (\text{A.18})$$

$$p = \frac{1}{3} (\sigma^2 + \frac{1}{2} \varphi_{,\lambda} \varphi^{,\lambda}) - V, \quad (\text{A.19})$$

$$q_\beta = \sigma \varphi_{,\beta} - \sigma^2 V_{,\beta}, \quad (\text{A.20})$$

$$\Pi_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} - \rho V_\alpha V_\beta + p h_{\alpha\beta} - q_{(\alpha} V_{\beta)}, \quad (\text{A.21})$$

onde  $\sigma \doteq \varphi_{,\mu} V^\mu$ .

Sendo o campo de velocidades  $V_\mu = \frac{\varphi_{,\mu}}{\sqrt{\varphi_{,\lambda}\varphi^{,\lambda}}}$ , obtem-se um fluido perfeito com

$$\rho = \frac{\varphi_{,\lambda}\varphi^{,\lambda}}{2} + V, \quad (\text{A.22})$$

$$p = \frac{\varphi_{,\lambda}\varphi^{,\lambda}}{2} - V. \quad (\text{A.23})$$

Das equações (A.8) a (A.11), obtemos para o campo de observadores  $\bar{V}_\alpha$ :

$$\rho' = \varphi_{,\lambda}\varphi^{,\lambda}\left(\alpha^2 - \frac{1}{2}\right) + V, \quad (\text{A.24})$$

$$p' = \frac{\varphi_{,\lambda}\varphi^{,\lambda}}{3}\left(\alpha^2 + \frac{1}{2}\right) - V, \quad (\text{A.25})$$

$$q'_\beta = \alpha\varphi_{,\beta}\sqrt{\varphi_{,\lambda}\varphi^{,\lambda}} - \alpha^2\bar{V}_\beta\varphi_{,\lambda}\varphi^{,\lambda}, \quad (\text{A.26})$$

$$\Pi'_{\alpha\beta} = \varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta} + \frac{\varphi_{,\lambda}\varphi^{,\lambda}}{3} [g_{\alpha\beta}(\alpha^2 - 1) + \bar{V}_\alpha\bar{V}_\beta(2\alpha^2 + 1)] - \alpha\varphi_{,(\alpha}\bar{V}_{\beta)}\sqrt{\varphi_{,\lambda}\varphi^{,\lambda}}. \quad (\text{A.27})$$

Para os casos especiais:

a) No vácuo, como dito anteriormente, teremos um fluido perfeito, tal que  $\varphi_{,\alpha} = 0$  sendo:

$$\rho = \rho' = V, \quad (\text{A.28})$$

$$p = p' = -V. \quad (\text{A.29})$$

b) Com o observador  $V_\mu$  inserido num meio material com pressão nula (poeira), tal que

$\varphi_{,\lambda}\varphi^{,\lambda} = 2V$ :

$$\rho = 2V, \quad (\text{A.30})$$

$$\rho' = 2V\alpha^2, \quad (\text{A.31})$$

$$p' = \frac{2V}{3}(\alpha^2 - 1), \quad (\text{A.32})$$

$$q'_\beta = \alpha\varphi_{,\beta}\sqrt{2V} - 2V\alpha^2\bar{V}_\beta, \quad (\text{A.33})$$

$$\Pi'_{\alpha\beta} = \varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta} + \frac{2V}{3} [g_{\alpha\beta}(\alpha^2 - 1) + \bar{V}_\alpha\bar{V}_\beta(2\alpha^2 + 1)] - \alpha\varphi_{,(\alpha}\bar{V}_{\beta)}\sqrt{2V}. \quad (\text{A.34})$$

# Apêndice B

## Quantidades Cinemática

Seção baseada na monografia de M. Novello [13].

Neste tópico trataremos do estudo das quantidades cinemáticas em quatro dimensões, explicitando como se forma o movimento de um observador com velocidade  $V^\mu$ . Para isso decompomos a derivada covariante deste vetor em suas partes irreduzíveis: expansão, vorticidade e cisalhamento. Primeiramente, escrevemos  $V_{\mu;\nu}$  em uma parte ortogonal e outra paralela a  $V_\mu$ :

$$V_{\mu;\nu} = N_{\mu\nu} + \overbrace{V_{\mu;\lambda} V^\lambda}^{a_\mu} V_\nu, \quad (\text{B.1})$$

onde  $a_\mu = V_{\mu;\lambda} V^\lambda$  é a aceleração.

Separando o tensor  $N_{\alpha\beta}$  em uma parte simétrica

$\theta_{\alpha\beta}$  e anti-simétrica  $\omega_{\alpha\beta}$  ( $N_{\alpha\beta} = \theta_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta}$ ), tais que:

$$\theta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (N_{\alpha\beta} + N_{\beta\alpha}), \quad (\text{B.2})$$

$$\omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (N_{\alpha\beta} - N_{\beta\alpha}). \quad (\text{B.3})$$

Note que  $\omega^\alpha{}_\alpha = 0$ .

Podemos, então separar  $\omega_{\alpha\beta}$  em duas partes:

$$\theta_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{3}\theta h_{\alpha\beta}, \quad (\text{B.4})$$

sendo  $h_{\alpha\beta}$  é o tensor projeção definido em (A.2). A parte sem traço corresponde a  $\sigma_{\alpha\beta}$ .

Reescrevemos o tensor  $N_{\alpha\beta}$ :

$$V_{\alpha;\beta} = \sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{3}\theta h_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta} - a_{\alpha}V_{\beta}. \quad (\text{B.5})$$

Tomando o traço de (B.5), obtem-se:

$$\theta = V^{\alpha}_{;\alpha}, \quad (\text{B.6})$$

onde  $\theta$  é a taxa de expansão.

Projetamos a derivada covariante do vetor velocidade duas vezes no espaço ortogonal a

$V^{\mu}$ :

$$h^{\alpha}_{\mu}h^{\beta}_{\nu}V_{\alpha;\beta} = \sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{3}\theta h_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}. \quad (\text{B.7})$$

Das eq. (B.6) e (B.7) obtemos

$$\omega_{\mu\nu} = h^{\alpha}_{[\mu}h^{\beta}_{\nu]}V_{\alpha;\beta}, \quad (\text{B.8})$$

$$\sigma_{\mu\nu} = h^{\alpha}_{(\mu}h^{\beta}_{\nu)}V_{\alpha;\beta} - \frac{1}{3}V^{\alpha}_{;\alpha}h_{\mu\nu}, \quad (\text{B.9})$$

sendo  $\omega_{\mu\nu}$  o tensor vorticidade e  $\sigma_{\mu\nu}$  o tensor cisalhamento.

Conforme a definição do tensor de Riemann:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}V^{\beta} \doteq V_{\alpha;\mu;\nu} - V_{\alpha;\nu;\mu} \quad (\text{B.10})$$

e aplicando-se  $g^{\alpha\mu}$  à equação anterior teremos:

$$\theta_{;\alpha}V^{\alpha} - a^{\alpha}_{;\alpha} + V^{\alpha}_{;\nu}V^{\nu}_{;\alpha} = R_{\alpha\beta}V^{\alpha}V^{\beta}. \quad (\text{B.11})$$

Da equação (B.5) pode-se desenvolver o terceiro termo do lado esquerdo da última equação como:

$$V^{\alpha}_{;\nu} V^{\nu}_{;\alpha} = 2(\sigma^2 - \omega^2) + \frac{\theta^2}{3} - (a^{\alpha} V_{\alpha})^2, \quad (\text{B.12})$$

sendo as definições  $\omega^2 \doteq 1/2\omega_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}$  e  $\sigma^2 \doteq 1/2\sigma_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}$ .

Se o observador é do tipo-tempo, obtém-se:

$$g_{\alpha\beta} V^{\alpha} V^{\beta} = 1 \Rightarrow a^{\alpha} V_{\alpha} = 0. \quad (\text{B.13})$$

Substituindo (B.12) e (B.13) em (B.11), temos:

$$\theta_{;\alpha} V^{\alpha} - a^{\alpha}_{;\alpha} + 2(\sigma^2 - \omega^2) + \frac{\theta^2}{3} = R_{\alpha\beta} V^{\alpha} V^{\beta}. \quad (\text{B.14})$$

Quando escrevemos  $R_{\mu\nu}$  de acordo com a teoria da relatividade geral a equação (B.14) é conhecida como equação de Raychandhuri.

# Bibliografia

- [1] Regina C. Arcuri, *Núcleos Atrasados no Universo de Friedman*, Tese de Mestrado - CBPF, Rio de Janeiro (1982).
- [2] E. Bittencourt, *Sistema Gaussiano de Coordenadas para as Métricas de Schwarzschild e Kerr*, Dissertação de Mestrado - CBPF, Rio de Janeiro (2009).
- [3] H. Bondi, Proc. R. Soc. Lond. A **281**, 39 (1964).
- [4] A. Einstein e E. G. Straus, Rev. Mod. Phys. **17**, 120 (1945).
- [5] Carta de Schwarzschild para Einstein de 22 Dezembro de 1915, em *The Collected Papers of Albert Einstein*, vol.8a, doc. 169.
- [6] F. Fayos, X. Jaen, E. Llanta and J. M. M. Senovilla, Class. Quantum Grav. **8**, 2057 (1991).
- [7] F. Fayos, X. Jaen, E. Llanta and J. M. M. Senovilla, Phys. Rev. D **45**, 2732 (1991).
- [8] K. Lake, Astr. Journal **240**, 744 (1980).

- [9] L. D. Landau e E. M. Lifshitz, , em *The Classical Fields Theory*, Pergamon Press, New York (1975).
- [10] R. W. Lindquist, R. A. Schwartz e C. W. Misner, Phys. Rev. **137**, B1364 (1965).
- [11] C. W. Misner, K. S. Thorne e J. A. Wheeler, , em *Gravitation*, W. H. Freeman and Com., San Francisco (1973).
- [12] C. W. Misner e D. H. Sharp, Phys. Rev. **136**, B571 (1964).
- [13] M. Novello, *Monografia XXIV - Tópicos de Cosmologia Relativística*, Publ. CBPF, Rio de Janeiro (1974).
- [14] M. Novello, *Cosmologia*, Coleção CBPF - Tópicos de Física, Edt. Livraria da Física (2010).
- [15] M. Novello e J. M. Salim, Phys. Rev. D **20**, 377 (1979).
- [16] M. Novello, *Do Big Bang ao Universo Eterno*, Edt. Zahar (2010).
- [17] I. D. Novikov, Sov. Astr. AJ **8**, 857 (1965).
- [18] J. R. Oppenheimer e G. M. Volkoff, Phys. Rev. **55**, 374 (1939).
- [19] J. R. Oppenheimer e H. Snyder, Phys. Rev. **56**, 455 (1939).
- [20] J. M. Salim, *Notas de Aula*, CBPF, Rio de Janeiro (2009).

- [21] I. D. Soares, *O Cálculo de Formas Diferenciais e a Equação de Dirac em Espaços Curvos*, em *II Escola de Cosmologia e Gravitação* **2**, 479 (1980).
- [22] R. C. Tolman, Proc. Nat. Acad. Sci. **20**, 3 (1934).
- [23] P. C. Vaidya, Phys. Rev. **83**, 10 (1950).
- [24] P. C. Vaidya, Phys. Rev. **144**, 943 (1966).
- [25] P. C. Vaidya, Phys. Rev. **174**, 1615 (1968).