

Teoria de Campos Em Um Meio Desordenado

Juan Guillermo Dueñas Luna.

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas para à obtenção do título de Mestre em Física.

Agosto 2011

Em memória da minha avó
Maria Celestina Amado!

Resumo

Teoria de Campos Em Um Meio Desordenado

por

Juan Guillermo Dueñas Luna

Mestrado em Física

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro, 2011

Orientador: Professor Nami Fux Svaiter.

Pretende-se analisar a localização para uma teoria de campo escalar não massivo num meio não homogêneo aleatório descrito por um ruído Gaussiano. No limite de desordem fraca, a função de Green da equação de Helmholtz randômica é expandida usando a fórmula de Dyson. Na aproximação de escada ("Ladder") a equação Bethe-Salpeter é resolvida para a função de vértice, a qual descreve a propagação entre dois pontos levando em conta o processo de espalhamento múltiplo. Assumindo invariância sob reversão temporal no sistema, é calculada a função de Green de intensidade média considerando-se como bloco de construção o "loop de interferência", o qual leva em conta os efeitos coerentes. Com ele é derivado uma equação de difusão generalizada com um coeficiente de difusão renormalizado que depende da frequência e uma equação auto-consistente para a função de Green de intensidade média. Encontra-se em uma e duas dimensões que todos os estados da onda estão localizados para qualquer intensidade do ruído, enquanto em três dimensões se tem uma transição de fase a partir de um valor crítico do ruído γ_c . Acima deste valor os estados apresentam um comportamento difusivo e abaixo este valor estão localizados os estados. Perto da margem de mobilidade o expoente crítico encontrado tem o valor 1.

Abstract

|

It is intended to analyze the localization for a massless scalar field theory, in a non-homogeneous random medium described by a Gaussian disorder. In the limit of weak disorder, the Green function of random Helmholtz equation is expanded using a Dyson's formula. In the ladder approximation a Bethe-Salpeter equation is solved for the vertex function, which describes the propagation between two points taking into account the multiple scattering process. Assuming time reversal invariance in the system, it is calculated the Green function of average intensity considering as the building block the "interference loop", which takes into account the coherent effects. With it, a generalized diffusion equation is derived with a renormalized diffusion coefficient that depends on the frequency, and a self-consistent equation for the Green function of average intensity. It is found that in one and two dimensions all wave states are localized for any disorder intensity, while in three dimensions is set a phase transition from a critical value of the noise γ_c . Above this value, the states have a diffusive behavior, and states below this value are located. Near the mobility edge the critical exponent is found to have the value 1.

Agradecimentos

Agradeço, num meio desordenado pela ajuda a cada um de vocês:

Aos meus pais Luis e Maria, juntamente com meus irmãos Mario e George pelo apoio moral e financeiro e a companhia mesmo com a distância. Às minhas tias Angela, Esther, e Hermelinda por me ajudar, também, no primeiro passo que foi fazer a graduação.

Especialmente à Alexandra, pelos instantes compartilhados, as viagens, os pensamentos, e as deliciosas emoções e confusões.

Ao meu orientador, Nami Fux Svaiter, pela visão que me deu da física e as coisas que aprendi com ele.

Ao Ury e o Wilmar pela amizade e a amigos da Colômbia, Eduardo, Julian e Santiago não só pela amizade, mas por me receber quando cheguei ao Rio.

Aos colegas do Peru e do Brasil que conheci aqui, em especial ao Kim. Também ao pessoal onde morei pela sua ajuda.

Ao Professor Helayel pelas experiências compartilhadas e por me mostrar outra forma de ensinar física.

Ao Professor Herman pela amizade, as muitas conversações enriquecedoras após dos coloquios e nos lanches.

A Bete e ao Ricardo, ao pessoal da secretaría do ICRA e ao pessoal da biblioteca.

Ao CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico pela bolsa de estudos recebida.

Sumário

1	Introdução	1
2	Equação Diferencial Aleatória e Funções de Green	4
2.1	Equação Diferencial Aleatória para um Campo Escalar	4
2.2	Função de Green para Ondas num Meio Uniforme	8
2.3	Densidade de Modos	10
3	Teoria de Perturbação e Formalismo de Espalhamento Múltiplo	12
3.1	Função de Green Média	15
3.2	Densidade de Modos	18
4	Probabilidade da equação de Helmholtz	20
4.1	Aproximação de escada ("Ladder") - limite de desordem fraca	22
4.2	Aproximação difusiva	28
4.3	Efeitos de interferência e propagação coerente	30
4.4	Renormalização do coeficiente de difusão	33
4.5	Teoria diagramática auto-consistente	36
4.6	Resultados	38
5	Considerações Finais	41
6	Appendix	43
6.1	Caixa de Hikami	43
	Referências	45

Lista de Figuras

3.1	Série de Born para a função de Green num potencial aleatório antes de tomar média na desordem	13
3.2	Representação esquemática para a função de Green média	14
3.3	Diagramas irreduzíveis contribuindo para a autoenergia	14
4.1	Propagador de intensidade para a equação de Helmholtz	21
4.2	Representação diagramática do propagador de intensidade média	22
4.3	Equação Bethe-Salpeter para o propagador da intensidade	23
4.4	Contribuição incoerente à função de Green de intensidade e consequências da desordem Gaussiana	24
4.5	Interseção de trajetórias incoerentes.	25
4.6	Função de vértice irreduzível	26
4.7	Representação Bethe-Salpeter para o propagador de escada ("Ladder")	28
4.8	Efeitos de interferência em função de Green de intensidade	31
4.9	Série infinita de diagramas contribuindo para função de Green de intensidade.	33
6.1	Caixa de Hikami.	45

CAPÍTULO 1

Introdução

O conceito de localização devido à desordem surgiu no trabalho de Anderson em 1958 [1]. Nele, se investiga a dinâmica quântica de um elétron numa rede tridimensional na qual existe desordem devido às flutuações de energia entre os sítios. A partir de um sítio num tempo inicial na rede, a probabilidade de retorno P pode ser calculada para $t \rightarrow \infty$. Anderson mostrou que abaixo de um valor crítico da desordem temos $P = 0$, ou seja, a partícula se difunde através da rede e logo desaparece. Entretanto, para valores grandes da desordem temos $P > 0$, indicando que a partícula não difunde, mas em vez disso, mantém-se numa região ao redor do ponto de partida. Este estado corresponde a um estado localizado numa determinada região do espaço caracterizada por um comprimento de localização.

O fenômeno de localização é causado pelas flutuações impostas à função de onda. Qualquer efeito de aprisionamento ou de limitação local entre o elétron e os sítios de partida é responsável por este fenômeno. É a coerência da função de onda na dinâmica do elétron que tem sido relevante na compreensão da localização. Uma forma alternativa para estudar os efeitos da desordem em elétrons foi dada por Edwards no mesmo ano [2]. Neste trabalho, a desordem foi introduzida através de uma distribuição espacial aleatória dos centros de dispersão, a partir da qual os elétrons foram espalhados elasticamente.

Posteriormente, foi mostrado, que os efeitos de localização não estavam associados

apenas às partículas mecânico quânticas, mas que deve ser comum a qualquer fenômeno que apresenta uma natureza ondulatória, como a radiação eletromagnética ou perturbações acústicas [3, 4].

Devido a esta generalidade do conceito de localização, tem sido investigado em diferentes situações físicas. Em especial, estudos diversos da relatividade geral em sistemas de matéria condensada foram feitos incluindo idéias provenientes de sistemas desordenados [5–8]. A desordem, nestes casos, é introduzida como flutuações na métrica que descreve a propagação de fônons num fluido. Neste tipo de modelos analógicos gravitacionais é possível pesquisar os efeitos de gravidade quântica.

Num artigo recente, Krein, Menezes e Svaiter (2010) apresentaram um novo modelo análogo onde efeitos de gravidade quântica podem ser implementados [8]. Esses autores discutem as flutuações métricas induzidas sobre o cone de luz por um banho de *grávitons comprimidos* ("squeezed state"). Foi estudado um campo escalar quantizado definido num fluido com flutuações aleatórias clássicas. Sendo mais específico, a velocidade de propagação das ondas acústicas que flutua de forma aleatória e consequentemente o cone sonoro também. Linearizando as equações dinâmicas de fluidos em torno do estado de equilíbrio, chega-se a uma equação de onda para a perturbação acústica. Considerando essas perturbações como flutuações aleatórias sobre o campo de fônon com um ruído gaussiano colorido, foi apresentado um modelo análogo na matéria condensada, para flutuações da geometria do espaço-tempo.

O propósito desta dissertação é estudar os efeitos da localização da energia associada a um campo escalar, devido a uma flutuação na velocidade de propagação. Isto é feito analisando-se uma equação aleatória de Helmholtz onde se mostra que no regime de desordem forte se tem uma transição de fase do regime difusivo ao regime localizado.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: Uma introdução, No segundo capítulo onde é derivada a equação diferencial para um campo escalar num meio

aleatório linearizando as equações dinâmicas do campo. Este campo é assumido como flutuações de um fluido ideal, respeito a seu estado de equilíbrio. A desordem é introduzida como uma perturbação na velocidade de propagação através de um potencial aleatório Gaussiano. As funções de Green são estudadas para a equação de Helmholtz e a densidade de modos é definida em termos delas.

No terceiro capítulo é introduzido o formalismo perturbativo para a função de Green. Através dele é calculada a primeira ordem a auto-energia e, assim definido o livre caminho meio, as funções de Green médias e a densidade de modos.

No quarto capítulo é definido o propagador de intensidade média através da função de Green média de quatro pontos em termos da função de vértice, com ele é definida a probabilidade de propagação para a equação de Helmholtz. Na aproximação de escada ("Ladder") e no limite de desordem fraca foi assumida a invariância sobre reversão temporal. Mostra-se que após tomarmos as médias na desordem, processos de propagação coerentes tem uma contribuição não desprezível, sendo a origem de fenômenos como o retroespalhamento coerente e localização fraca. Encontra-se que nessa aproximação a função de vértice que satisfaz uma equação tipo Bethe-Salpether. No regime difusivo é encontrado o propagador de intensidade média e a função de vértice que satisfaz uma equação de difusão. Para levarmos em conta os efeitos de interferência são introduzidos os diagramas maximamente cruzados. Sua contribuição pode ser calculada através das caixas de Hikami e, assim, obter uma equação de difusão generalizada para a função de Green de intensidade, onde um coeficiente de difusão renormalizado é definido denotando a localização fraca. Para chegar perto da margem de mobilidade, longe do regime fraco, é introduzido o conceito de auto-consistência e mostrado que em uma e duas dimensões para qualquer modo de oscilação se tem um estado localizado da onda. Para três dimensões temos uma transição de fase a partir de um valor crítico do ruído.

Finalmente, no capítulo cinco se apresentam as conclusões e no apêndice o cálculo da caixas de Hikami.

CAPÍTULO 2

Equação Diferencial Aleatória e Funções de Green

Nesse capítulo mostramos como o problema de um campo escalar perturbado por uma disposição aleatória de centros dispersivos é transformado num problema de muitos corpos. No contexto das funções de Green a equação de onda e a de Schrodinger podem ser tratadas como semelhantes e uma teoria de perturbação global pode ser formulada para ambas equações. Portanto, muitas coisas serão feitas para uma delas e os resultados permanecerão válidos para a outra. Embora existam muitas diferenças entre as duas, as equações de Helmholtz e de Schrodinger podem ser tratadas de forma semelhante. Não estaremos interessados em estudar a equação de Fourier generalizada nesse contexto. Conseqüentemente as seguintes situações descrevem as variáveis termodinâmicas do fluido.

2.1 Equação Diferencial Aleatória para um Campo Escalar

As variáveis termodinâmicas usadas para descrever um fluido ideal são a densidade de massa $\rho(t, \mathbf{r})$, a pressão $p(t, \mathbf{r})$, a velocidade local $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ e a temperatura local $T(t, \mathbf{r})$ [9].

$$\frac{\partial \rho(t, \mathbf{r})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho(t, \mathbf{r}) \mathbf{v}(t, \mathbf{r})) = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}(t, \mathbf{r})}{\partial t} + (\mathbf{v}(t, \mathbf{r}) \cdot \nabla) \mathbf{v}(t, \mathbf{r}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p(t, \mathbf{r}). \quad (2.2)$$

Podemos assumir que as perturbações sobre os observáveis físicos são dados por

$$p(t, \mathbf{r}) = p_0 + \delta p(t, \mathbf{r}), \quad (2.3)$$

$$\rho(t, \mathbf{r}) = \rho_0 + \delta \rho(t, \mathbf{r}), \quad (2.4)$$

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{r}) = \delta \mathbf{v}(t, \mathbf{r}), \quad (2.5)$$

onde ρ_0 e p_0 são a densidade constante de equilíbrio e pressão. Para um fluido adiabático, isto é $\frac{\partial S}{\partial T} = 0$, onde S é a entropia, a entalpia é reduzida de $dA = TdS + Vdp$ a $dA = Vdp$, então $\delta p(t, \mathbf{r}) / \delta \rho(t, \mathbf{r}) = \partial p(t, \mathbf{r}) / \partial \rho_0$. A velocidade da propagação do som no fluido é dada por $c^2 = \partial p / \partial \rho_0$. Usando a Eq.(2.1) e Eq.(2.2) e levando em conta apenas termos de primeira ordem na perturbação, as equações dinâmicas linearizadas são dadas por

$$\frac{\partial \delta \rho(t, \mathbf{r})}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \delta \mathbf{v}(t, \mathbf{r}) = 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \delta \mathbf{v}(t, \mathbf{r})}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \nabla \delta p(t, \mathbf{r}) = 0. \quad (2.7)$$

Derivando a Eq.(2.6) com respeito ao tempo e substituindo a Eq.(2.7) no resultado temos a equação de onda para $\varphi(t, \mathbf{r}) = \delta p(t, \mathbf{r})$ que é a perturbação de pressão.

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \varphi(t, \mathbf{r}) = 0. \quad (2.8)$$

Assumindo-se que a velocidade da perturbação acústica é constante, uma equação de onda para a perturbação da densidade pode ser encontrada. Para isso é tomada a divergência da Eq.(2.7) e é utilizada a definição de velocidade de propagação para substituir na Eq.(2.6) com $\psi(t, \mathbf{r}) = \delta \rho(t, \mathbf{r})$. Temos

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \psi(t, \mathbf{r}) = 0. \quad (2.9)$$

Para um fluido irrotacional temos $\nabla \times \delta \mathbf{v} = 0$. Assim, a perturbação da velocidade pode ser expressa por um gradiente de um potencial $\delta \mathbf{v}(t, \mathbf{r}) = \nabla \phi(t, \mathbf{r})$. Sob estas condições o campo $\phi(t, \mathbf{r})$ obedece a uma equação de onda como a Eq.(2.9).

A energia associada ao sistema é dada por

$$E = \int d\mathbf{r} \left(\frac{1}{2} \rho_0 |\delta \mathbf{v}(t, \mathbf{r})|^2 + \frac{c^2}{2\rho_0} \delta \rho(t, \mathbf{r})^2 \right). \quad (2.10)$$

De fato, a Eq.(2.10) mostra que $\phi(t, \mathbf{r})$ e $\psi(t, \mathbf{r})$ podem ser tomadas como variáveis canonicamente conjugadas para quantizar o sistema. Nesse caso, as relações de comutação para tempos iguais seriam:

$$[\hat{\phi}(t, \mathbf{r}), \hat{\psi}(t, \mathbf{r}')] = -i\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.11)$$

e as outras se anulam.

O operador hamiltoniano ficaria escrito em termos dos novos campos como [10]

$$\hat{H} = \int d\mathbf{r}' \left(\frac{1}{2} \rho_0 |\nabla' \hat{\phi}(t, \mathbf{r}')|^2 + \frac{c^2}{2\rho_0} |\hat{\psi}(t, \mathbf{r}')|^2 \right), \quad (2.12)$$

onde, com este hamiltoniano, os campos obedeceriam as seguintes equações canônicas

$$i \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t} = [\hat{\psi}, \hat{H}], \quad i \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} = [\hat{\phi}, \hat{H}]. \quad (2.13)$$

Das relações de comutação apenas um dos dois termos no comutador não se anula resultando respectivamente em

$$[\hat{\psi}(t, \mathbf{r}), \nabla' \hat{\phi}(t, \mathbf{r}')] = i \nabla' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (2.14)$$

$$[\hat{\phi}(t, \mathbf{r}), \hat{\psi}(t, \mathbf{r}')] = -i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (2.15)$$

Inserindo essas relações na Eq.(2.13) e integrando por partes são encontradas as equações canônicas. Neste último passo foi assumido que a integral de superfície no infinito se anula, assim, as equações se transformam em

$$i \frac{1}{\rho_0} \partial_t \hat{\psi}(t, \mathbf{r}) = -i \nabla^2 \hat{\phi}(t, \mathbf{r}), \quad i \frac{1}{\rho_0} \partial_t \hat{\phi}(t, \mathbf{r}) = -i \frac{c^2}{\rho_0} \hat{\psi}(t, \mathbf{r}) \quad (2.16)$$

Derivando uma delas com respeito ao tempo e substituindo na outra encontram-se as equações de onda para um campo quântico análogo a Eq.(2.9), agora com os campos clássicos substituídos por operadores.

Em geral, a velocidade aleatória c pode depender da posição. Vamos assumir que

$$\frac{1}{c^2(\mathbf{r})} = \frac{1}{c^2}(1 + \mu(\mathbf{r})). \quad (2.17)$$

Para caracterizar a desordem escolhemos uma distribuição aleatória Gaussiana com valor medio zero e correlações de ruído branco, isto é

$$\langle \mu(\mathbf{r}) \rangle = 0 \quad (2.18)$$

$$B(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = k_0^4 \langle \mu(\mathbf{r})\mu(\mathbf{r}') \rangle = \gamma_e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.19)$$

onde $\langle \dots \rangle$ representa a média do ensemble sobre todas as configurações de desordem. A Eq.(2.8) toma a forma

$$\left[(1 + \mu(\mathbf{r})) \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right] \varphi(t, \mathbf{r}) = 0. \quad (2.20)$$

Este potencial caracteriza a distribuição de impurezas nos meios onde a onda está se propagando e seus efeitos sobre a onda serão tratados como um problema de muitos corpos no formalismo de espalhamento múltiplo usual. A transformada de Fourier da equação de onda no domínio das frequências nos dá uma equação de Helmholtz aleatória, onde $k_0 = \omega/c$

$$[\nabla^2 + k_0^2(1 + \mu(\mathbf{r}))]\varphi(\omega, \mathbf{r}) = 0, \quad (2.21)$$

onde a relação de dispersão linear (no caso sem desordem) leva a $(-k^2/k_0^2 + 1) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') + \mu(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = 0$, a qual deveria ser considerada válida só na média[8].

A relação entre uma teoria de campo em meios aleatórios e a propagação de ondas escalares em um espaço tempo de buraco negro foi dada por Unruh [11]. Neste trabalho ele mostrou que a quantização de uma onda acústica em um sistema com um horizonte de eventos sónico levaria a que este buraco sónico emitiria ondas de som com um espectro térmico análogo à radiação Hawking para buracos negros cosmologicos.

Através da equação (2.20) pretende-se fazer uma primeira aproximação aos possíveis efeitos das flutuações da métrica por meio da analogia da propagação das ondas em meios fluidos com impurezas como é estudado na matéria condensada.

2.2 Função de Green para Ondas num Meio Uniforme

As funções de Green retardadas e avançadas associadas a Eq.(2.21) satisfazem

$$[\nabla^2 + k_0^2(1 + \mu(\mathbf{r}))]G_{k_0}^{R,A}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (2.22)$$

A função de Green livre $G_0^{R,A}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k_0)$ será a solução da Eq.(2.22) para $\mu(\mathbf{r}) = 0$, a qual é a equação de Helmholtz correspondente a um meio uniforme dada por

$$[\nabla^2 + k_0^2]G_{k_0}^{R,A}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (2.23)$$

Para resolver esta equação se substitui a transformada de Fourier de $G_0(\mathbf{r})$ e sua inversa dadas por

$$G_0(\mathbf{k}') = \int d\mathbf{r} e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} G_0(\mathbf{r}), \quad (2.24)$$

e

$$G_0(\mathbf{r}) = \int \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} G_0(\mathbf{k}'). \quad (2.25)$$

Obtendo a equação algébrica

$$\left(-k'^2 + k_0^2\right) G_0(\mathbf{k}') = 1, \quad (2.26)$$

assim, a solução é

$$G_0(\mathbf{k}') = \frac{1}{k_0^2 - k'^2}. \quad (2.27)$$

Para obter a função de onda no espaço real, se realiza a transformação inversa da Eq.(2.27) usando coordenadas esféricas com $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$

$$\begin{aligned}
 G_0^{R,A}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k_0) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k' e^{i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \frac{1}{k_0^2 - k'^2} \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk' \frac{k'^2}{ik'R} \frac{e^{ik'R} - e^{-ik'R}}{k_0^2 - k'^2 \pm i\epsilon}.
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Mudando $k' \rightarrow -k'$ na segunda integral, a Eq.(2.28) pode ser escrita como

$$G_0^{R,A}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k_0) = \frac{1}{i(2\pi)^2 R} \int_{-\infty}^\infty \frac{k'}{k_0^2 - k'^2 \pm i\epsilon} e^{ik'R} dk', \tag{2.29}$$

O integrando tem polos simples na reta real em $k' = \pm k_0$. Para fazer a integral é usada a prescrição $i\epsilon$ para deslocar os polos no plano complexo e poder usar o teorema dos resíduos. Os resíduos em $k' = k_0$ (semi-plano superior) e $k' = -k_0$ (semi-plano inferior) são dados por

$$\text{Res}(k' = k_0) = -\frac{e^{ik_0 R}}{2}; \quad \text{Res}(k' = -k_0) = -\frac{e^{-ik_0 R}}{2}. \tag{2.30}$$

Por tanto se obtém duas soluções para a Eq.(2.23) dependendo o contorno de integração. Estas duas soluções são respectivamente a função de Green retardada G_0^R e a função de Green avançada G_0^A . temos uma onda plana uma onda plana com amplitude decaindo com $1/R$. Assim, explicitamente se tem

$$\boxed{G_0^{R,A}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k_0) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm ik_0 R}}{R}}. \tag{2.31}$$

Em termos dos auto-valores e das auto-funções, a função de Green pode ser escrita como

$$G_{k_0}^{R,A}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_n \frac{\phi_n^*(\mathbf{r}) \phi_n(\mathbf{r}')}{k_0^2 - \mathbf{k}_n^2 \pm i\epsilon}. \tag{2.32}$$

Para definir a densidade de modos são verificadas algumas propriedades das funções de Green

$$G_0^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k_0) = G_0^R(\mathbf{r}', \mathbf{r}, k_0)^*, \quad G_0^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}', -t) = G_0^R(\mathbf{r}', \mathbf{r}, t)^* \tag{2.33}$$

onde * indica conjugação complexa. A parte imaginária da função de Green é definida através de

$$\text{Im}G_0^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{G_0^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G_0^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{2i} \quad (2.34)$$

2.3 Densidade de Modos

A função de Green está relacionada com a densidade de modos $\nu(k_0)$ definida por

$$\nu(\omega) = \sum_{\mathbf{k}} \delta(\omega - k_0 c) = \frac{1}{c} \sum_{\mathbf{k}} \delta(k - k_0) \quad (2.35)$$

onde $k = |\mathbf{k}|$ e $\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$ têm sido usadas. A densidade de modos por unidade de volume é dada por $\rho(\omega) = \nu(\omega)/V$. Em geral, é definida a densidade de modos não local por

$$\rho_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \sum_n \phi_n^*(\mathbf{r}) \phi_n(\mathbf{r}') \delta(\omega_n - k_0 c). \quad (2.36)$$

Para $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$, pode se definir uma densidade local por

$$\rho_\omega(\mathbf{r}) = \sum_n |\phi_n(\mathbf{r})|^2 \delta(\omega_n - k_0 v). \quad (2.37)$$

Com a ajuda do teorema de Sokhatsky-Weierstrass o qual pode ser expresado pela identidade

$$\frac{1}{x \pm i\epsilon} = PV \frac{1}{x} \mp i\pi \delta(x), \quad (2.38)$$

a transformada de Fourier da Eq.(2.34) pode-se escrever como

$$\begin{aligned} \text{Im}G_0^R(\mathbf{k}, k_0) &= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{k_0^2 - \mathbf{k}^2 + i\epsilon} - \frac{1}{k_0^2 - \mathbf{k}^2 - i\epsilon} \right) \\ &= -\pi \left(\delta(k_0^2 - \mathbf{k}^2) \right) \\ \text{Im}G_0^R(\mathbf{k}, k_0) &= -\frac{\pi}{2k_0} [\delta(k + k_0) + \delta(k - k_0)], \end{aligned} \quad (2.39)$$

Pelo tanto a densidade de modos fica dada em termos da integral

$$\rho_0(\omega) = -\frac{2k_0}{\pi c} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \text{Im} G_0^R(\mathbf{k}, k_0). \quad (2.40)$$

Inserindo a expressão da função de Green livre, pode-se mostrar que a densidade de modos livre é dada por

$$\boxed{\rho_0(\omega) = \frac{k_0^2}{2\pi^2 c}}. \quad (2.41)$$

Isso revela que a parte imaginária da função de Green deve ser negativa para ser consistente com a definição positiva da densidade de modos. Este aspecto de sinal será relevante para a análise perturbativa. A correção da função de Green será feita no próximo capítulo.

CAPÍTULO 3

Teoria de Perturbação e Formalismo de Espalhamento Múltiplo

Na presença de desordem, a função de Green $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ pode ser escrita como uma equação de Lipmann-Schwinger (LS)[12]

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \int d\mathbf{r}_1 G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) V(\mathbf{r}_1) G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'). \quad (3.1)$$

com $V(\mathbf{r}) = -k_0^2 \mu(\mathbf{r})$. Aplicando o operador de Helmholtz podemos mostrar que $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ é a função de Green para a equação de Helmholtz aleatória Eq.(2.20). Esta descreve a propagação de uma onda a partir do ponto \mathbf{r} ao ponto \mathbf{r}' na presença de um potencial $V(\mathbf{r})$. Por um processo de iteração da equação LS se chega à série perturbativa de Born, que é dada por

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \int d\mathbf{r}_1 G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) V(\mathbf{r}_1) G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') \\ &+ \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) V(\mathbf{r}_1) G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) V(\mathbf{r}_2) G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}') \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (3.2)$$

As quantidades de interesse são as médias com respeito ao potencial de desordem e não as quantidades para uma realização específica da desordem no meio. Para fazer isso, uma representação diagramática da função de Green média é útil [10, 13, 14].

Para um meio infinito após uma média sobre a desordem ser tomada, a invariância

$$\begin{array}{c} \text{G} \\ \hline \xrightarrow{\quad} \\ \text{r} \quad \text{r}' \end{array} = \begin{array}{c} \text{G}_0 \\ \xrightarrow{\quad} \\ \text{r} \quad \text{r}' \end{array} + \begin{array}{c} \times \\ \vdots \\ \xrightarrow{\quad} \\ \text{r} \quad \text{r}' \end{array} + \begin{array}{c} \times \quad \times \\ \vdots \quad \vdots \\ \xrightarrow{\quad} \\ \text{r} \quad \text{r}_1 \quad \text{r}_2 \quad \text{r}' \end{array} + \begin{array}{c} \times \quad \times \quad \times \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \xrightarrow{\quad} \\ \text{r} \quad \text{r}_1 \quad \text{r}_2 \quad \text{r}_3 \quad \text{r}' \end{array} + \dots$$

Figura 3.1: Série de Born para a função de Green num potencial aleatório antes de tomar média na desordem.

de translação e rotação de função de Green é recuperada. Como G_0 não é afetado pela média e comuta com o potencial de desordem na representação espacial, o n -ésimo termo da série de Born está associado com a função de correlação do potencial da desordem ao qual leva a

$$\begin{aligned} & \left\langle \prod_{i=1}^n \int d\mathbf{r}_i G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) V(\mathbf{r}_i) \cdots V(\mathbf{r}_n) G_0(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}') \right\rangle \\ &= \int d\mathbf{r}_1 \cdots \int d\mathbf{r}_n \langle G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) V(\mathbf{r}_1) \cdots V(\mathbf{r}_n) G_0(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}') \rangle \\ &= \int d\mathbf{r}_1 \cdots \int d\mathbf{r}_n G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \cdots G_0(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}') \langle V(\mathbf{r}_1) \cdots V(\mathbf{r}_n) \rangle. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Se é assumido que o potencial tem uma distribuição Gaussiana [15], então as funções de correlação de ordem n podem ser divididas numa soma de produtos de funções de correlação de segunda ordem, devido a $\langle V(\mathbf{r}) \rangle = 0$. As funções de correlação de quarta ordem são escritas como

$$\begin{aligned} \langle V(\mathbf{r}_1) V(\mathbf{r}_2) V(\mathbf{r}_3) V(\mathbf{r}_4) \rangle &= \langle V(\mathbf{r}_1) V(\mathbf{r}_2) \rangle \langle V(\mathbf{r}_3) V(\mathbf{r}_4) \rangle \\ &+ \langle V(\mathbf{r}_1) V(\mathbf{r}_3) \rangle \langle V(\mathbf{r}_2) V(\mathbf{r}_4) \rangle \\ &+ \langle V(\mathbf{r}_1) V(\mathbf{r}_4) \rangle \langle V(\mathbf{r}_2) V(\mathbf{r}_3) \rangle. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Numa representação diagramática, a função de Green média é representada por uma linha dupla e a função de correlação entre dois eventos de dispersão é representada por uma linha tracejada, onde as cruces querem dizer o processo de dispersão em si. A coleção de diagramas podem ser separada em duas classes. Diagramas que podem ser separados em duas partes cortando uma linha contínua associada à função de Green do vácuo serão denominados diagramas (1P)-reduzível de uma partícula e aqueles que não podem serão chamados diagramas (1P)-irreduzível de uma partícula Fig.3.2. O diagrama b da Fig.3.2 é 1P-reduzível associado ao primeiro termo do lado di-

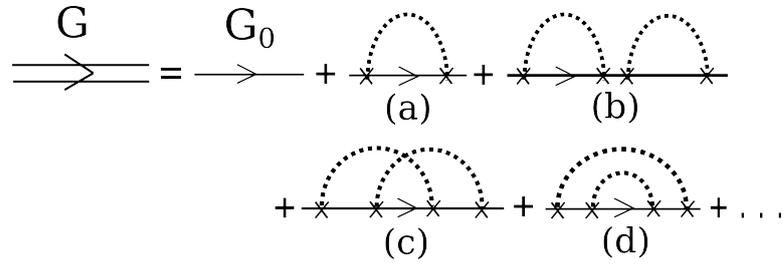


Figura 3.2: Representação esquemática para a função de Green média. A linha fina representa uma função de Green no vacuo G_0 , esta descreve a propagação de uma onda de um ponto para outro, sem dispersão. A linha de traços representa funções de correlação de desordem $B(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. A linha grossa representa a função de Green média do ensemble $\langle G \rangle$. Todos os pontos intermediários entre as linhas externas são assumidos integrados.

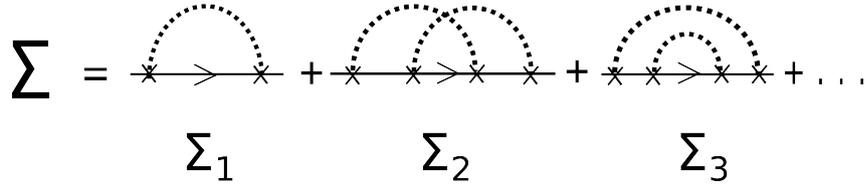


Figura 3.3: Diagramas irreduzíveis contribuindo à autoenergia. Aqui são mostrados os diagramas de ordem mais baixa semelhantes a uma teoria $\lambda\phi^4$.

reito (RHS) da Eq.(3.4). Os diagramas a, c, d são 1P-irreduzíveis onde os dois primeiros são os outros dois termos da função de correlação de desordem Eq.(3.4). Esta propriedade é geral para todas as ordens e permite fazer esta soma em termos de apenas os diagramas 1P-irreduzíveis. O operador da autoenergia (Σ) é definido como a soma de todos os diagramas 1P-irreduzíveis sem levar em conta as pernas externas (linhas externas truncadas) [14, 16]. A expressão analítica para a autoenergia pode ser escrita com a ajuda das regras de Feynman da Fig.3.3 a qual mostra os primeiros quatro termos.

$$\begin{aligned}
 \Sigma(\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= B(\mathbf{r} - \mathbf{r}')G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\
 &+ \int d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 B(\mathbf{r} - \mathbf{r}_3)B(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}')G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)G_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)G_0(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}') \\
 &+ \int d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 B(\mathbf{r} - \mathbf{r}')B(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3)G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)G_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)G_0(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}') + \dots \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

3.1 Função de Green Média

Através da autoenergia, a equação para função de Green média pode ser escrita como uma equação de Dyson [14, 16],

$$\bar{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \Sigma(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \bar{G}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'). \quad (3.6)$$

Numa notação mais compacta da série de Born pode-se ver que a equação de Dyson assume uma forma particular no espaço dos momentos

$$\begin{aligned} \bar{G}(\mathbf{k}, k_0) &= G_0(\mathbf{k}, k_0) + G_0(\mathbf{k}, k_0) \Sigma(\mathbf{k}, k_0) \bar{G}(\mathbf{k}, k_0) \\ &= G_0(\mathbf{k}, k_0) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} [\Sigma(\mathbf{k}, k_0) G_0(\mathbf{k}, k_0)]^n \right) \\ &= \frac{1}{G_0(\mathbf{k}, k_0)^{-1} - \Sigma(\mathbf{k}, k_0)}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Introduzindo o inverso da função de Green no vácuo, temos

$$\bar{G}(\mathbf{k}, k_0) = \frac{1}{k_0^2 - \mathbf{k}^2 - \Sigma(\mathbf{k}, k_0)}. \quad (3.8)$$

Como para o meio infinito a invariância rotacional da função de Green média é recuperada, então o meio pode ser assumido como isotrópico e a autoenergia só fica dependendo da magnitude dos momentos. Além disso, será mostrado que a autoenergia na primeira ordem Σ_1 depende apenas do modo de oscilação da onda, desde que esta correção para ruído branco se aproxime de uma constante proporcional ao k_0 . Portanto pode ser feita a substituição $\Sigma(\mathbf{k}, k_0) \approx \Sigma(k_0)$ e a Eq.(3.7) se torna

$$\bar{G}(|\mathbf{k}|, k_0) = \frac{1}{k_0^2 - k^2 - \Sigma(k_0)}. \quad (3.9)$$

Vê-se que a função de Green média tem um pólo dado pela raiz do denominador da Eq.(3.9)

$$k_0^2 - \Sigma(k_0) - k^2 = 0. \quad (3.10)$$

Um vetor de onda efetivo k_e pode ser definido como

$$k_e^2 = k_0^2 - \Sigma(k_0). \quad (3.11)$$

Logo é encontrado que

$$k_e = k_0 \left(1 - \frac{\Sigma(k_0)}{k_0^2} \right)^{1/2} \approx k_0 - i \frac{\text{Im}\Sigma(k_0)}{2k_0}. \quad (3.12)$$

A parte real de Σ gera uma mudança no valor de referência dos modos de oscilação da onda, esta não é considerada devido ao fato de que neste caso são as diferenças nas frequências ou modos de oscilação que são importantes.

Em termos deste vetor de onda efetivo a Eq.(3.9) pode ser escrita como

$$\bar{G}(|\mathbf{k}|, k_0) = \frac{1}{k_e^2 - k^2}, \quad (3.13)$$

a qual tem a mesma forma que a transformada de Fourier da função de Green do vácuo Eq.(2.27). Não é mais necessária a prescrição $i\epsilon$ para deslocar os pólos na metade superior do plano complexo na integração porque o vetor de onda efetivo agora é complexo. Ele permite usar a mesma solução que no vácuo apenas mudando o papel dos vetores de onda k_0 por k_e .

Tomando apenas a contribuição de primeira ordem no potencial a autoenergia é calculada para $d = 3$, e fica

$$\boxed{\Sigma_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k_0) = B(\mathbf{r} - \mathbf{r}') G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}. \quad (3.14)$$

Sob transformada de Fourier ela assume a forma

$$\Sigma_1(\mathbf{k}, k_0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k' B(\mathbf{k} - \mathbf{k}') G_0(\mathbf{k}'). \quad (3.15)$$

A parte imaginária da função de Green livre é dada pela Eq.(2.39), assim nós temos que

$$\text{Im}\Sigma_1^R(\mathbf{k}, k_0) = -\frac{\pi}{2k_0} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\Omega \int dk' k'^2 B(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(k_0 - k'). \quad (3.16)$$

A transformada de Fourier da função de correlação do potencial, Eq.(2.19), assumindo o meio isotrópico, é $B(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = B(|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|) = \gamma_e$. Desta forma a integral pode ser escrita simplesmente como

$$Im\Sigma_1^R(\mathbf{k}, k_0) = -\frac{\gamma_e}{4k_0\pi} \int k'^2 \delta(k_0 - k') dk' = -\frac{1}{4\pi} k_0 \gamma_e. \quad (3.17)$$

É definido o caminho livre médio elástico por

$$\boxed{\frac{1}{l_e} = -\frac{1}{k_0} Im\Sigma_1(\mathbf{k}, k_0) = \frac{\gamma_e}{4\pi}}. \quad (3.18)$$

No espaço real tomar apenas correções de primeira ordem significa que as colisões sucessivas assumem-se como eventos independentes, enquanto aqueles em segunda ordem envolvem termos de interferência entre colisões sucessivas. O limite de $k_0 l_e \gg 1$ corresponde ao regime em que os efeitos de interferência podem ser abandonados. Em outras palavras, isso significa que é possível reconstruir assintoticamente uma onda livre após cada colisão. Neste contexto, esta aproximação será chamada o limite de desordem fraca.

O limite $k_0 l_e \gg 1$ corresponde ao regime de desordem fraca, neste caso $k_0 l_e = \frac{4\pi k_0}{\gamma_e}$, portanto para desordem fraca é necessário que $\frac{\gamma_e}{4\pi k_0} \ll 1$. Isto permite restringir a frequência para a qual se pode assumir que estamos no regime fraco. Para ondas cujos comprimentos de onda sejam menores do que $\lambda_0 \ll 8\pi^2/\gamma_e = 2\pi l_e$ o potencial pode ser assumido como forte.

A função de Green média neste regime fraco é calculada a partir da Eq.(3.13), Eq.(2.29) e da Eq.(3.18) como foi indicado antes, com $k_e^2 = k_0^2 + \frac{ik_0}{l_e}$ ao qual aproximadamente é $k_e \approx k_0 \pm \frac{i}{2l_e}$. No domínio da frequência e do tempo estas são mostradas

$$\overline{G}^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k_0) = G_0^{R,A}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k_0) e^{-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/2l_e} \quad (3.19)$$

$$\overline{G}^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = -\theta(t) \frac{c}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} e^{-t/2\tau_e} \delta(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| - ct) \quad (3.20)$$

Estas funções são moduladas por um tempo de decaimento $\tau_e = l_e/c$, o que significa que a faixa dos potenciais é restrito a uma determinada região específica dada por l_e .

O efeito de uma parte imaginária na autoenergia é o amortecimento da amplitude de onda. Isso significa que, os estados próprios de momento, adquirem um tempo de vida finito e, assim, um comprimento característico de coerência na propagação devido ao espalhamento dos centros dispersivos fixos aleatórios.

3.2 Densidade de Modos

Da Eq.(3.9) e da Eq.(2.40) com o cálculo da autoenergia dado pela Eq.(3.18), a densidade média dos modos é dada por

$$\begin{aligned}\bar{\rho}(k_0) &= \frac{2k_0}{\pi v} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \frac{k_0/\pi l_e}{(k_0^2 - \mathbf{k}^2)^2 + \left(\frac{k_0}{l_e}\right)^2} \\ &= \frac{k_0^2}{\pi^4 l_e c} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{(k_0^2 - k^2)^2 + \left(\frac{k_0}{l_e}\right)^2}.\end{aligned}\quad (3.21)$$

Estendendo k ao plano complexo a integração na nova variável q pode ser feita pelo teorema dos resíduos onde o denominador apresenta os pólos simples dados em forma polar: $q_1 = \sqrt[4]{k_0^4 + \alpha^2} e^{i\theta}$, com $\alpha = k_0/l_e$ e $\theta = \arctan(\alpha/k_0^2)$; $q_2 = -q_1$; $q_3 = q_1^*$ e $q_4 = -q_1^*$. Escolhendo um semicírculo como contorno no sentido horário na metade superior do plano complexo, pode-se ver que a integral sobre o arco desvanece-se no limite fraco devido ao fato que

$$\frac{1}{2} \int_{arc} dq \frac{q^2}{(k_0^2 - q^2)^2 + \alpha^2} \sim \frac{q^3}{q^4} \xrightarrow{q \rightarrow \infty} 0. \quad (3.22)$$

Os pólos delimitados pelos contornos são q_1 e q_4 , portanto a integral é

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{q^2}{(k_0^2 - q^2)^2 + \alpha^2} = \pi i \left(\frac{q_1^2}{q_1(q_1 + q_4)(q_1 - q_4)} + \frac{q_4^2}{q_4(q_4 - q_1)(q_4 + q_1)} \right). \quad (3.23)$$

Simplificando temos que

$$\int_0^\infty dq \frac{q^2}{(k_0^2 - q^2)^2 + \alpha^2} = \frac{\pi i}{2 \text{Im} q_1}. \quad (3.24)$$

onde

$$\text{Im}q_1 = k_0 \left[1 + \frac{1}{(k_0 l_e)^2} \right]^{1/4} \sin \left[\frac{1}{2} \arctan \left[\frac{1}{k_0 l_e} \right] \right], \quad (3.25)$$

A parte imaginária de q_1 pode ser aproximada no regime fraco. Para fazer isso, a raiz quadrada e as funções trigonométricas são expandidas em série a segunda ordem em $1/k_0 l_e$. Então temos

$$\bar{\rho}(k_0) = \frac{2\pi k_0}{c l_e} \frac{\pi}{(2\pi)^3 \text{Im}q_1} \xrightarrow{k_0 l_e \gg 1} \rho_0(k_0) \left[1 - \frac{1}{(2k_0 l_e)^2} \right], \quad (3.26)$$

com $\rho_0(k_0)$ dada pela Eq.(2.41). Podemos ver que a densidade média dos modos de oscilação é ligeiramente alterada pela desordem, onde as correções são de ordem menor do que $1/(k_0 l_e)^2$, logo podem ser negligenciadas. Então, toma-se $\bar{\rho}(k_0) = \rho_0(k_0)$, similar ao que é feito para a densidade eletrônica média no caso quântico [17].

CAPÍTULO 4

Probabilidade da equação de Helmholtz

Pelo fato de, em muitos casos, ser mais fácil medir a intensidade da onda associada à função de Green de quatro pontos ao invés da amplitude do campo relacionado com a função de Green é definida a intensidade da onda em termos das funções de Green retardada e avançada na mesma frequência ω_0 por

$$\bar{I}_{\omega_0}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{c} \langle |\phi_{\omega_0}(\mathbf{r})|^2 \rangle = \frac{4\pi}{c} \langle G_{\omega_0}^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}') G_{\omega_0}^A(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \rangle. \quad (4.1)$$

Desta forma, a função de Green de quatro pontos pode ser associada à intensidade média da onda e, assim, pode-se definir um propagador de intensidade média como

$$\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4, \Omega) = \langle G_{\omega_1}^R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) G_{\omega_2}^A(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}_2) \rangle, \quad (4.2)$$

uma vez que cada função de Green pode ter suas frequências próprias definidas como $\omega_1 = \omega_0 + \frac{\Omega}{2}$, $\omega_2 = \omega_0 - \frac{\Omega}{2}$ (para efeitos de notação, omite-se a dependência com a frequência da onda ω_0). Sendo Ω a diferença entre as duas frequências, sua variável conjugada $T = \frac{t_1+t_2}{2}$ tem significado de tempo de viagem médio para as duas ondas, como pode ser visto escrevendo a variação da Eq.(4.2) como

$$e^{i(\omega_0+\frac{\Omega}{2})t_1} e^{-i(\omega_0-\frac{\Omega}{2})t_2} = e^{i\omega_0(t_1-t_2)} e^{i\Omega\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)}, \quad (4.3)$$

assim, para obter o comportamento do transporte da onda para tempos maiores ($T \rightarrow \infty$), precisa-se analisar o propagador de intensidade Eq.(4.2) no limite de $\Omega \rightarrow 0$ [18].

Figura 4.1: Propagador de intensidade para a equação de Helmholtz.

Relembrando a série de Born para G , o produto de $G^R G^A$ pode ser visto na Fig.4.1. As linhas superiores representam G^R e as inferiores, G^A . Entende-se que as partes superiores e inferiores são multiplicadas em cada soma.

De forma similar com a função de Green de dois pontos de uma única partícula, é possível mostrar que as interações do campo com as impurezas poderia escrever-se em termos de uma função de vértice. Todo o conjunto de diagramas poderia decompor-se entre as partes redutíveis e irreduzíveis. Diagramas redutíveis são aqueles que não estão ligados através de funções de correlação de desordem. Eles representam correções para o produto de funções de Green médias retardadas e avançadas.¹

Os outros diagramas constituem a função de vértice ou fator de forma, que também poderiam dividir-se em suas partes redutíveis e irreduzíveis Fig.4.2. É conveniente introduzir uma função de vértice completamente irreduzível, $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4, \Omega)$, em termos da qual o propagador de intensidade média assume a forma de uma equação de Bethe-Salpeter [13, 14].

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4, \Omega) &= \langle G_{\omega_1}^R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) \rangle \langle G_{\omega_2}^A(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}_2) \rangle \\ &+ \int d\mathbf{r}_5 d\mathbf{r}_6 d\mathbf{r}_7 d\mathbf{r}_8 \langle G_{\omega_1}^R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_5) \rangle \langle G_{\omega_2}^A(\mathbf{r}_6, \mathbf{r}_2) \rangle \Gamma(\mathbf{r}_5, \mathbf{r}_6, \mathbf{r}_7, \mathbf{r}_8, \Omega) \Phi(\mathbf{r}_7, \mathbf{r}_8; \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4, \Omega). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Esquemáticamente, a Eq.(4.4) pode ser lida como na Fig.4.3. Isto torna possível o cálculo da função de correlação dos campos para $\Omega = 0$ a partir de

$$\langle \phi(\mathbf{r}_1) \phi^*(\mathbf{r}_2) \rangle = \int d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 \Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4, 0) j(\mathbf{r}_3) j(\mathbf{r}_4) \quad (4.5)$$

Para uma distribuição de fontes $j(\mathbf{r})$. No caso de uma fonte tipo delta localizada no

¹As correções de produtos de funções de Green média avançadas e retardadas são levadas em conta na função de vértice. É importante não confundir estes dois tipos de contribuições para o propagador de intensidade, devido ao fato de este último gerar os efeitos coerentes.

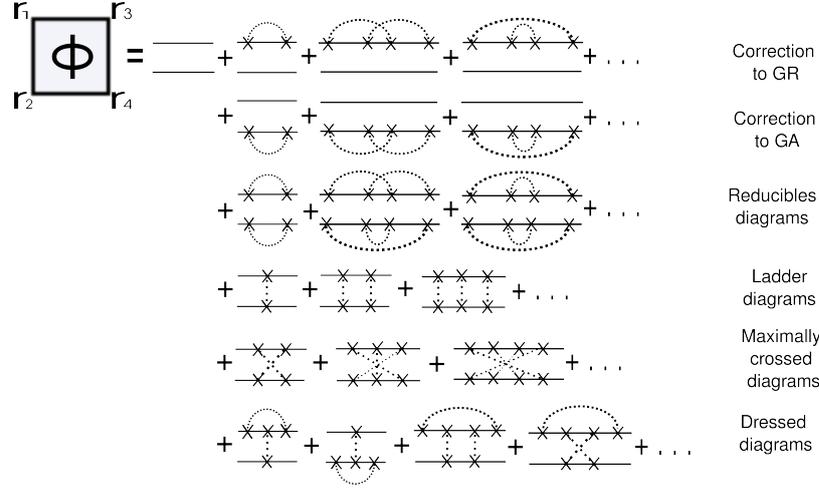


Figura 4.2: A representação diagramática do propagador de intensidade média pode ser separada numa parte livre da desordem e em outra parte dando as correções devido à desordem. As primeiras três linhas dão conta das correções nas funções de Green retardada e avançada não-conetadas. A quarta linha são os diagramas Ladder vindo da aproximação de difusão. As próximas duas linhas dão correções fornecendo a invariância da inversão temporal do propagador de intensidade média e forma, com a primeira contribuição dos diagramas escada ("Ladder"), a função de vértice irreduzível. Diagramas cruzados que estão vestidos com escada ("Ladders") tornam-se contribuições de longo alcance, se apenas os diagramas maximalmente cruzados são de curto alcance. Porém, estes têm um menor intervalo de interação que os diagramas de escada ("Ladder").

ponto \mathbf{r}' , a intensidade média é dada por (usando-se as equações Eq.(4.1) e Eq.(4.2))

$$\bar{I}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{c} \langle G_{\omega_0}^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}') G_{\omega_0}^A(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \rangle = \frac{4\pi}{c} \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \mathbf{r}', \mathbf{r}') \equiv P(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (4.6)$$

Esta equação para a intensidade pode ser usada como a definição da probabilidade para a equação de Helmholtz. No caso quântico $P(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ é chamada de probabilidade de difusão quântica. No caso geral, a função da correlação de dois campos $\phi_{\omega_1}(\mathbf{r})$ e $\phi_{\omega_2}^*(\mathbf{r})$, em duas frequências diferentes é definida por

$$\langle \phi_{\omega_1}^*(\mathbf{r}) \phi_{\omega_2}^*(\mathbf{r}') \rangle = \langle G_{\omega_1}^R(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) G_{\omega_2}^A(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0) \rangle \quad (4.7)$$

4.1 Aproximação de escada ("Ladder") - limite de desordem fraca

Para uma análise mais profunda nas características da intensidade média toma-se o limite de desordem fraca. No espaço de coordenadas, um evento de espalhamento

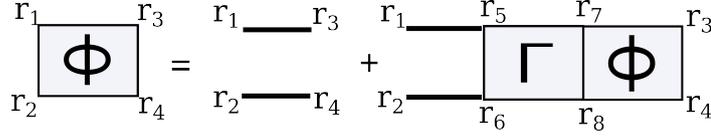


Figura 4.3: Equação Bethe-Salpeter para o propagador da intensidade.

múltiplo pode ser visto considerando a média sobre a desordem do propagador de intensidade, correspondente a todas as seqüências de espalhamento múltiplo.

Como a função de Green $G^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k_0)$ descreve uma amplitude complexa de uma onda propagando-se de \mathbf{r} a \mathbf{r}' oscilando no modo k_0 temos:

$$G^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n} |A(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathcal{C}_n)| e^{i(k\mathcal{L}_n)}, \quad (4.8)$$

onde A é a amplitude da onda, \mathcal{C}_n é a seqüência de dispersão e \mathcal{L}_n como o comprimento do n -ésimo caminho em unidades do comprimento de onda. A soma sobre n indica que se soma sobre todas as seqüências de dispersão. Então o deslocamento associado com o produto de dois caminhos \mathcal{C}_n e $\mathcal{C}_{n'}$ é proporcional à diferença de comprimento de caminhos $\mathcal{L}_n - \mathcal{L}_{n'}$.

A amplitude associada a uma onda refletida com vetor de onda \mathbf{k}' , gerada a partir de uma onda incidente com vetor de onda \mathbf{k} , por meio de um processo de espalhamento múltiplo entre os centros de dispersão localizados em \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 é dada pela função de Green $A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = G^R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, k_0)$ (ver Fig.4.4). Sua transformada de Fourier é dada por

$$A(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \sum_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2} G^R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, k_0) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1 - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}_2)} \quad (4.9)$$

A expressão para a intensidade associada é

$$|A(\mathbf{k}, \mathbf{k}')|^2 = \sum_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2} \sum_{\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4} G^R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) G^A(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1 - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}_2)} e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_3 - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}_4)} \quad (4.10)$$

Da Eq.(4.8) tem-se

$$G^R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) G^A(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) = \sum_{n, m} \sum_{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_2} \sum_{\mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_4} |A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathcal{C}_n)| |A(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4, \mathcal{C}_m)| e^{i(\delta_n - \delta_m)} \quad (4.11)$$

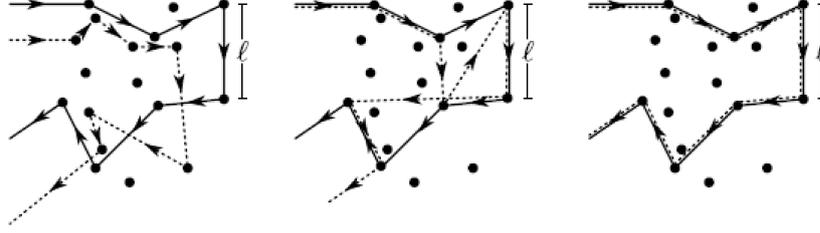


Figura 4.4: Trajetórias típicas descritas por funções de Green G^R (linhas finas) e G^A (linhas tracejadas).

Figura da esquerda: Contribuição da série de Born. *Figura do centro:* Contribuição de uma mudança de fase maior na intensidade média. Estas contribuições cancelam-se na média sobre a desordem no regime fraco. *Figura da direita:* Contribuição incoerente resultando da desordem Gaussiana, onde G^R e G^A seguem os mesmos caminhos de espalhamento, mostrando a natureza de curto alcance do mesmo.

onde $\delta_n = k\mathcal{L}_n$ e $\delta_m = k'\mathcal{L}_m$. Ao tomar-se a média sobre o potencial de desordem, ou seja, as posições dos dispersores, a maioria dos termos desaparecem, devido ao fato que a diferença de fase varia aleatoriamente. Portanto, os termos que contribuem para a intensidade média são aqueles em que as fases são canceladas. Isso só acontece se os caminhos de propagação para G^R e G^A foram os mesmos, isto é, apenas para aqueles caminhos que possuem a mesma sequência de eventos de dispersão, na mesma direção ou em direções opostas. Isto implica que $\mathcal{L}_n = \mathcal{L}_m$, o que resulta nas condições $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_3$ e $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_4$ (mesmos sentidos) ou $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_4$ e $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_3$ (sentidos opostos).

Se assumirmos invariância sob reversão temporal, estes dois processos contribuem na mesma proporção. O primeiro é de caráter incoerente (clássico) e o segundo, de caráter coerente (correção), pelo fato de que uma desfasagem permanece após tomarem-se as médias.

$$\left\langle |A(\mathbf{k}, \mathbf{k}')|^2 \right\rangle = \left\langle \sum_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2} |A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2 \left(1 + e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} \right) \right\rangle \quad (4.12)$$

O fator de fase mantido depende dos pontos iniciais e finais do espalhamento múltiplo. Mais uma vez, a soma sobre eles é zero, em média, sendo diferente de zero apenas em duas condições. A primeira possibilidade é se $\mathbf{k} + \mathbf{k}' \approx 0$, ou seja, se a onda refletida vai na direção quase exatamente oposta à direção de incidência. Neste caso, a intensidade é o dobro do seu valor incoerente exibindo um pico na direção $\mathbf{k} \approx -\mathbf{k}'$. Considerando que direções opostas próximas da incidente contribuem na média, este

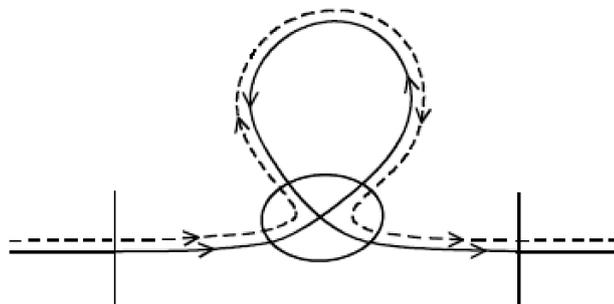


Figura 4.5: Interseção de trajetórias incoerentes gerando uma contribuição coerente na intensidade média.

segundo termo irá gerar uma dependência angular da intensidade média refletida pelo meio, o que é a origem do fenômeno de retroespalhamento coerente [19]. A outra possibilidade é $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$, que corresponderia a trajetórias fechadas de espalhamento múltiplo, que estão associadas com a probabilidade de retorno à origem. Neste caso, é impossível selecionar as direções incidente (\mathbf{k}) e refletida (\mathbf{k}').

Esta contribuição pode ser vista como a interseção de duas contribuições incoerentes, conhecida como caixa de Hikami [20]. A Fig.4.5 mostra como uma caixa de Hikami mistura quatro amplitudes complexas e as relaciona permutando-as de diferentes maneiras. Para que a defasagem não seja muito grande (diferença pequena entre comprimentos de trajetórias), é necessário que as trajetórias estejam o mais próximo possível umas das outras (mesma sequência de dispersão) e a interseção deva ser localizada no espaço, na escala da ordem do caminho livre médio. Esta noção de interseção é a origem dos efeitos coerentes, como a localização fraca.²

As implicações do modelo Gaussiano são manter apenas as trajetórias com a mesma sequência de espalhadores. Isto mostra o curto alcance do potencial. Outra consequência de se tomar a média no ensemble consiste em substituir as funções de Green por seus valores médios. No regime fraco as colisões são independentes (aproximação de primeira ordem na auto-energia) e, portanto, $l_e \gg \lambda$. Isso implica que as diferenças em comprimentos de caminhos de trajetórias de dispersão não idênticos geram uma contribuição da ordem l_e , o qual é muito maior do que o comprimento de onda λ . Contribuições destes caminhos são negligenciados quando a média sobre a desordem

²O par de trajetórias conjugadas é chamado Cooperon sob reversão temporal.

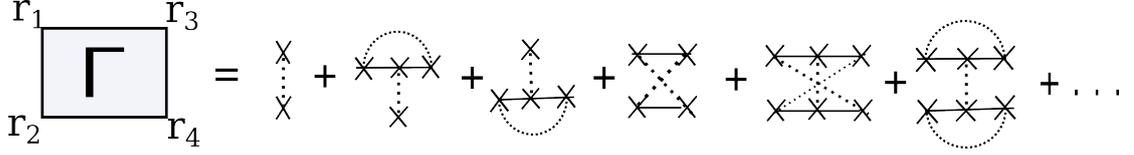


Figura 4.6: Função de vértice irreduzível. A contribuição dos diagramas maximalmente cruzados nus e vestidos fazem parte da função de vértice irreduzível.

é tomada. Isso resulta numa diferença de fase da ordem de kl_e . Assim, somente as contribuições onde os campos visitam na mesma ordem o mesmo centro dispersor são levadas em conta. Neste caso, a função de vértice pode ser escrita como uma soma de espalhamentos independentes múltiplos, representada por Γ_D .

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4, \Omega) = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3)\delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4)\Gamma_D(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \Omega) \quad (4.13)$$

A contribuição de ordem mais baixa no propagador de intensidade é dada pelo primeiro termo da Fig.4.6, onde Γ não depende da diferença de frequência entre a função de Green. No caso de ruído branco, pode ser verificado que ela toma a forma

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) = \gamma_e \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3)\delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4)\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (4.14)$$

Devido à forma dos diagramas relevantes, essa aproximação é chamada *aproximação de escada* ("Ladder") e os diagramas correspondentes são chamados *diagramas de escada* ("Ladder").³

Substituindo Γ no propagador de intensidade Eq.(4.4) obtém-se

$$\begin{aligned} \langle G_{\omega_1}^R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3)G_{\omega_2}^A(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}_2) \rangle &= \langle G_{\omega_1}^R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) \rangle \langle G_{\omega_2}^A(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}_2) \rangle + \\ &+ \gamma_e \int d\mathbf{r}_5 \langle G_{\omega_1}^R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_5) \rangle \langle G_{\omega_2}^A(\mathbf{r}_5, \mathbf{r}_2) \rangle \langle G_{\omega_1}^R(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_5)G_{\omega_2}^A(\mathbf{r}_5, \mathbf{r}_4) \rangle \end{aligned} \quad (4.15)$$

A partir da definição de intensidade média (Eq.(4.6)), se é considerado $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$, $\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_4 = \mathbf{r}'$ e $\Omega = 0$, se obtém

³Esta contribuição é chamada Diffuson porque representa a contribuição clássica que dá o comportamento (incoerente) difusivo num caso quântico.

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = P_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \frac{1}{\tau_e} \int d\mathbf{r}'' P_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') P(\mathbf{r}'', \mathbf{r}') \quad (4.16)$$

onde se definiu

$$P_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \equiv \frac{4\pi}{c} \langle G_{\omega_1}^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rangle \langle G_{\omega_2}^A(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \rangle. \quad (4.17)$$

Em termos da intensidade da onda a Eq.(4.16) pode ser escrita como

$$I(\mathbf{r}) = I_0(\mathbf{r}) + \frac{1}{\tau_e} \int d\mathbf{r}'' P_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') I(\mathbf{r}'') \quad (4.18)$$

Do ponto de vista quântico a fatoração de um produto de função de Green médias é a aproximação de Drude-Boltzmann, onde o potencial de dispersão parece gerar um tempo de vida de um estado próprio de momento.

É possível fazer uma iteração para Φ (Eq.(4.4)), de tal forma que seja possível expressá-lo em termos do propagador de escada ("Ladder") Eq.(4.13). Deste modo, o propagador de intensidade obedece à equação

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = P_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') + \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \langle G^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) \rangle \langle G^A(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}') \rangle \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) P_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') \quad (4.19)$$

A equação integral agora é satisfeita pelo propagador de escada ("Ladder") Γ , como

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \gamma_e \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + \gamma_e \int d\mathbf{r}_3 \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) P_0(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_2). \quad (4.20)$$

Introduzindo a Eq.(4.20) na Eq.(4.19), podemos verificar a validade da Eq.(4.16) e da Eq.(4.18) com a escada ("Ladder") inteiro. Esquemáticamente, esta equação pode ser representada como na Fig.4.7. Desta forma, na aproximação de escada ("Ladder"), a expressão para o propagador de intensidade média Eq.(4.16) tem uma estrutura simples. A intensidade medida no ponto \mathbf{r} de uma onda se propagando a partir da fonte pontual em \mathbf{r}' , depende da propagação da onda sem experimentar algum evento de dispersão (mudança de fase), até a primeira dispersão \mathbf{r}'' seguido por um processo de espalhamentos sucessivos independentes representados pela integração em \mathbf{r}'' . Daí, a intensidade radiada a distâncias maiores que l_e resulta dos processos de espalhamento

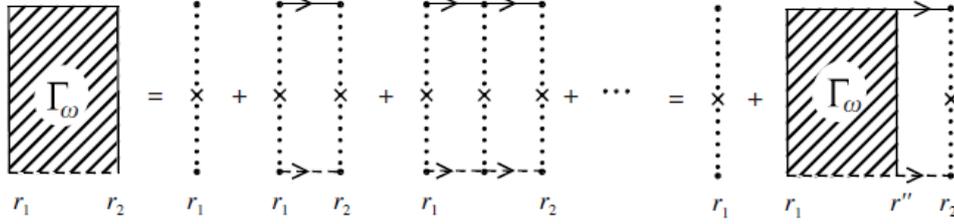


Figura 4.7: Representação diagramática da equação Bethe-Salpeter para o propagador de escada ("Ladder").

múltiplo.

4.2 Aproximação difusiva

Depois de um grande número de espalhamento a intensidade pode ser aproximada para tempos maiores do que τ_e . Isto é equivalente a assumir que a intensidade média varia mais lentamente do que \mathcal{I}_0 na escala de comprimento do caminho livre médio. Nessa escala, a intensidade média é um resultado de muitos espalhamentos onde grandes flutuações tem desaparecido. Este regime é chamado de *o limite difusivo ou hidrodinâmico* pelo fato que as soluções das equações integrais obedecem a uma equação de difusão clássica [17].

Se $t \gg \tau_e$ ou seja ($\Omega\tau_e \ll 1$) se pode expandir a função de vértice Eq.(4.20) numa série de Taylor tanto a intensidade média Eq.(4.18) como o propagador de escada ("Ladder") Eq.(4.19).

$$\Gamma_\Omega(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'') \approx \Gamma_\Omega(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + (\mathbf{r}'' - \mathbf{r}_2) \cdot \nabla_{\mathbf{r}_2} \Gamma_\Omega(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + \frac{1}{2} [(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}_2) \cdot \nabla_{\mathbf{r}_2}]^2 \Gamma_\Omega(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad (4.21)$$

A integral do termo linear e os termos com derivadas mistas desaparecem, então a expressão para $\Gamma_\Omega(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ Eq.(4.20) da

$$\begin{aligned} \Gamma_\Omega(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = & \gamma_e \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + \Gamma_\Omega(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \int \frac{P_0(\mathbf{r}'', \mathbf{r}_2, \Omega)}{\tau_e} d\mathbf{r}'' \\ & + \frac{1}{2d} \nabla_{\mathbf{r}_2}^2 \Gamma_\Omega(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \int \frac{P_0(\mathbf{r}'', \mathbf{r}_2, \Omega)}{\tau_e} (\mathbf{r}'' - \mathbf{r}_2)^2 d\mathbf{r}'' . \end{aligned} \quad (4.22)$$

Estas duas integrais se podem calcular a partir da expressão para P_0 o qual leva a

$$\int P_0(\mathbf{r}'', \mathbf{r}_2, \Omega) d\mathbf{r}'' = \tau_e(1 + i\Omega\tau_e), \quad \int P_0(\mathbf{r}', \mathbf{r}_2, \Omega)(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}_2)^2 d\mathbf{r}'' = 2l_e^2\tau_e, \quad (4.23)$$

então a função de vértice que se encontra a obedecer uma equação de difusão como a seguinte

$$\boxed{(-i\Omega - D\nabla_{\mathbf{r}_2}^2)\Gamma_{\Omega}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{\gamma_e}{\tau_e}\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}, \quad (4.24)$$

onde o coeficiente de difusão é dado por

$$\boxed{D = \frac{cl_e}{3} = \frac{c^2\tau_e}{3}}. \quad (4.25)$$

No limite difusivo de pequenas variações espaciais, $\Gamma_D(\Omega)$ varia mais lentamente do que P_0 . Portanto, da Eq.(4.19), a função de vértice pode sair da integral e, assim, se obtém a probabilidade proporcional a ela.

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = P_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \Gamma_{\Omega}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \langle G^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) \rangle \langle G^A(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}') \rangle P_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') \quad (4.26)$$

Com isso, a contribuição clássica para a probabilidade tem a forma

$$P_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\tau_e}{\gamma_e}\Gamma_{\Omega}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{l_e^2}{4\pi c}\Gamma_{\Omega}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (4.27)$$

e obedece também uma equação de difusão dada por

$$\boxed{(-i\Omega - D\nabla_{\mathbf{r}}^2)P_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \Omega) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}, \quad (4.28)$$

Esta equação define o propagador de difusão, que, no espaço de Fourier, mostra claramente uma divergência para um dado valor do momento

$$P_D(\mathbf{q}, \Omega) = \frac{1}{-i\Omega + Dq^2} \quad (4.29)$$

Para a intensidade média se vê que ela satisfaz uma equação de difusão estacionária

$$\frac{l_e^2}{3}\nabla^2\mathcal{I}(\mathbf{r}) + \mathcal{I}_0(\mathbf{r}) = 0. \quad (4.30)$$

4.3 Efeitos de interferência e propagação coerente

Na última seção, um dos pressupostos para obter colisões independentes foi que só as trajetórias que visitam os mesmos dispersadores da mesma ordem contribuem na intensidade média. Foi dito que, neste caso, as fases de G^R e G^A cancelam-se sempre e a propagação de uma onda é, neste sentido, incoerente. O propósito desta seção é mostrar como efeitos de interferência devidos a invariância sob inversão temporal da função de Green de intensidade que desempenham um papel principal nos fenômenos de transporte. Estes efeitos fornecem uma contribuição coerente no regime fraco [21].

Formalmente a Eq.(4.4) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
 P(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \gamma_e \langle G^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega_1) \rangle \langle G^A(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega_2) \rangle \\
 &+ \gamma_e \int d\mathbf{r}_1 \cdots d\mathbf{r}_4 \langle G^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \omega_1) \rangle \langle G^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}_3, \omega_2) \rangle \times \\
 &\times \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4, \Omega) \langle G^R(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}', \omega_1) \rangle \langle G^A(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}', \omega_2) \rangle.
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

O primeiro termo do RHS da Eq.(4.31) será desprezado a seguir. No regime desordenado, Γ é assumido como na Eq.(4.13). Devido à invariância sob reversão temporal, devemos levar em conta os diagramas maximamente cruzados, que consistem em inverter uma direção de propagação de uma das trajetórias das funções de Green retardadas ou avançadas. A soma de todos esses diagramas estão resumidos na função $\Gamma_C(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \Omega)$ e representados na Fig.(4.2). Sem o primeiro termo de Γ_D na Fig.4.7, Γ_C pode ser obtido formalmente girando a linha de propagação inferior na Fig.(4.7) 180 graus. A invariância sob reversão temporal implica que $\Gamma_C = \Gamma_D$ se $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \gg \gamma_e/k_0^4$ i.e se excede o comprimento de correlação de desordem ($\mathbf{r}_1 \neq \mathbf{r}_2$) para desordem com ruído branco considerado aqui, devido o primeiro termo pode se desprezar nesse caso.

Os efeitos de interferência durante a propagação são considerados num diagrama vestido máximamente cruzado $X(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \Omega)$. Este diagrama consiste de um diagrama quadrado conhecido como caixa de Hikami de quatro pontos $H(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}', \mathbf{r}_2)$ e um diagrama maximamente cruzado $\Gamma_C(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \Omega)$ o qual pode ser trocado por $\Gamma_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \Omega)$ devido à invariância sob reversão temporal. Assim, se tem o diagrama na Fig.4.8 que pode

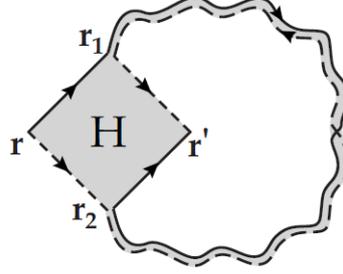


Figura 4.8: Introdução de efeitos de interferência no cálculo da função de Green de intensidade.

ser escrito como:

$$X(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \Omega) = \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 H(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}', \mathbf{r}_2) \Gamma_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \Omega). \quad (4.32)$$

Considerando que H é um objeto local com um valor diferente de zero, somente quando todos os quatro pontos ($\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}'$ e \mathbf{r}_2) estão a uma distância da ordem de l_e uns dos outros, pode-se assumir pequenas variações espaciais de Γ_D em relação as variações de H . Então, Γ pode ser colocado para fora da integral. Logo, a probabilidade devido aos efeitos de interferência torna-se proporcional à função de vértice, o que produz

$$X(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \Omega) = H(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Gamma_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \Omega), \quad (4.33)$$

com

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 H(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}', \mathbf{r}_2). \quad (4.34)$$

Por conveniência, introduzimos uma variável diferença, $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, de tal forma que $H(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ torna-se $H(\Delta\mathbf{r})$ e não depende de \mathbf{r} . Usando o novo conjunto de variáveis na Eq.(4.33) toma a forma

$$X(\mathbf{r}, \Delta\mathbf{r}, \Omega) = H(\Delta\mathbf{r}) \Gamma_D(\mathbf{r}, \mathbf{0}, \Omega). \quad (4.35)$$

Tomando, agora, a transformada de Fourier da Eq.(4.35) em relação a $\Delta\mathbf{r}$ e considerando o limite $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{0}$, se obtém

$$H(\mathbf{q}) = \int d(\Delta\mathbf{r}) e^{i\mathbf{q} \cdot \Delta\mathbf{r}} H(\Delta\mathbf{r}) = \frac{1}{\gamma_e^2} \left(a(q) - \frac{1}{2\gamma_e \tau_e^2} a(q)^2 \right), \quad (4.36)$$

com

$$a(q) = \frac{\pi}{k^2 q} (\arctan(2k - q)l_e + 2 \arctan(q)l_e - \arctan(2k + q)l_e). \quad (4.37)$$

Para $q \rightarrow 0$

$$a(q) \approx 2\gamma_e \tau_e^2 \left(1 - \frac{q^2 l_e^2}{3}\right) \quad (4.38)$$

então, $a(0)$ seria a contribuição de $H_A(0)$, portanto neste limite se tem que

$$H(q) \approx \frac{1}{\gamma_e^2} (a(0) - a(q)), \quad (4.39)$$

o qual pode ser expandido como

$$H(q) \approx \frac{l_e^5}{24\pi k^2} q^2 + \mathcal{O}(q^4). \quad (4.40)$$

Finalmente, a contribuição dos efeitos de interferência é dada por

$$X(\mathbf{r}, q, \Omega) = -\frac{l_e^4 D_B}{8\pi c k^2} (iq)^2 \Gamma_D(\mathbf{r}, \Omega). \quad (4.41)$$

Uma expressão aproximada para $X(\mathbf{r}, \Delta\mathbf{r}, \Omega)$ pode ser obtida através da transformada inversa de Fourier da Eq.(4.41) respeito a \mathbf{q} , a qual é:

$$\begin{aligned} X(\mathbf{r}, \Delta\mathbf{r}, \Omega) &= \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} X(\mathbf{r}, \mathbf{q}, \Omega) e^{-i\mathbf{q} \cdot \Delta\mathbf{r}}, \\ &= -\frac{l_e^4 D_B}{8\pi c k^2} \Gamma_D \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} (iq)^2 e^{-i\mathbf{q} \cdot \Delta\mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

A integral pode ser colocada em termos das derivadas de uma função delta de Dirac em relação a $\Delta\mathbf{r}$ produzindo

$$X(\mathbf{r}, \Delta\mathbf{r}, \Omega) = -\frac{l_e^4 D_B}{8\pi c k^2} \Gamma_D \nabla_{\Delta\mathbf{r}}^2 \delta(\Delta\mathbf{r}), \quad (4.43)$$

Pelo fato de que $\nabla_{\Delta\mathbf{r}}^2 \delta(\Delta\mathbf{r}) = \nabla_{\mathbf{r}}^2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, a Eq.(4.43) pode ser escrita em termos das variáveis originais, \mathbf{r} e \mathbf{r}' . Finalmente, a contribuição coerente é dada por

$$X(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \Omega) = -\frac{l_e^4 D_B}{8\pi c k^2} \Gamma_D \nabla_{\mathbf{r}}^2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (4.44)$$

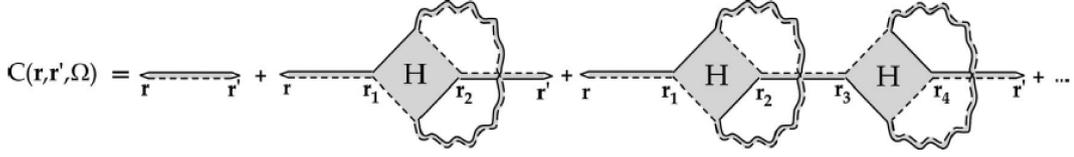


Figura 4.9: Laços consecutivos de interferência contribuindo à função de Green de intensidade.

4.4 Renormalização do coeficiente de difusão

Esta seção é baseada no trabalho de Cherroret et al [22] para encontrar o coeficiente de difusão renormalizado e as equações auto-consistentes (EAC). Eles encontraram as EAC para uma meio finito a partir de primeiros princípios, onde os argumentos de Wollhardt e Wolfe [23] não são mais válidos. Isto ocorre devido à quebra da invariância translacional onde este tratamento falha se se está interessado em detalhes mais perto da beira de mobilidade e no regime de localização, ou seja, no cone de retroespalhamento coerente [24].

Para derivar as equações auto-consistentes, tomamos as possíveis contribuições dos diagramas maximamente cruzados somados aos propagadores de escada ("Ladder") através das caixas de Hikami na função de Green de intensidade $P(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \Omega)$. Esta é construída inserindo a contribuição X da Fig.4.8 na soma dos diagramas Ladder e levando em conta a contribuição de vários loops de interferência consecutivos. Isto leva a uma série mostrada na Fig.4.9, a qual pode ser escrita em termos do propagador de escada ("Ladder"), com $g = 4\pi c/l_e^2$, como

$$\begin{aligned}
 P(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \Omega) &= P_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \Omega) + g \int P_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \Omega) X(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \Omega) P_D(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}', \Omega) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \\
 &+ g^2 \int P_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \Omega) X(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \Omega) P_D(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \Omega) \times \\
 &\times X(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4, \Omega) P_D(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}', \Omega) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 + \dots
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

Aplicando o operador $[-i\Omega - D_B \nabla_{\mathbf{r}}^2]$ na Eq.(4.45) e usando a Eq.(4.28) para $P_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \Omega)$ e Eq.(4.44) para $X(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \Omega)$, temos

$$\begin{aligned}
 [-i\Omega - D_B \nabla^2]P(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \Omega) &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + g \int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) X(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \Omega) P_D(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}', \Omega) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \\
 &+ g^2 \int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) X(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \Omega) P_D(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \Omega) X(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4, \Omega) P_D(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}', \Omega) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 + \dots
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

Realizando as integrações em \mathbf{r}_1 , obtemos

$$\begin{aligned}
 [-i\Omega - D_B \nabla^2]P(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \Omega) &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + g \int X(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2, \Omega) P_D(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}', \Omega) d\mathbf{r}_2 \\
 &+ g^2 \int X(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2, \Omega) P_D(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \Omega) X(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4, \Omega) P_D(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}', \Omega) d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 + \dots
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

Se deve calcular integrais infinitas da forma

$$I = g \int X(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2, \Omega) P_D(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \Omega) d\mathbf{r}_2 \tag{4.48}$$

Para a primeira integral no RHS da Eq.(4.47) basta substituir $\mathbf{r}_3 \rightarrow \mathbf{r}'$. Substituindo a Eq.(4.44) para $X(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2, \Omega)$ chegamos a

$$\begin{aligned}
 I &= -g \frac{l_e^4 D_B}{8\pi c k^2} \Gamma_D(\Omega) \int \nabla_{\mathbf{r}}^2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) P_D(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \Omega) d\mathbf{r}_2 \\
 &= -g \frac{l_e^4 D_B}{8\pi c k^2} \Gamma_D(\Omega) \nabla_{\mathbf{r}}^2 P_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}_3, \Omega)
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

Dessa forma, voltando à Eq.(4.47) e substituindo cada integração em \mathbf{r}_2 obtemos

$$\begin{aligned}
 [-i\Omega - D_B \nabla^2]P(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \Omega) &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - g \frac{l_e^4 D_B}{8\pi c k^2} \Gamma_D(\Omega) \nabla_{\mathbf{r}}^2 P_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \Omega) \\
 &- g \frac{l_e^4 D_B}{8\pi c k^2} \Gamma_D(\Omega) \left(g \int \nabla_{\mathbf{r}}^2 P_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}_3, \Omega) X(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4, \Omega) P_D(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}', \Omega) d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 \right) - \dots -
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

Este resultado pode ser colocado em termos da função de Green de intensidade, $P(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \Omega)$, colocando-se em evidência, fora das integrais, os termos constantes e o laplaciano. Isto deve ser feito para todos os termos da série, com exceção dos dois primeiros. Neste caso, a série fatorada é a função de Green de intensidade. Com isso, substituindo o valor de g , temos

$$[-i\Omega - D_B \nabla^2]P(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \Omega) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \frac{l_e^2 D_B}{2k_0^2} \Gamma_D(\Omega) \nabla_{\mathbf{r}}^2 P(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \Omega) \quad (4.51)$$

A última equação pode ser reorganizada como uma equação de difusão generalizada na qual podemos definir um coeficiente de difusão renormalizado dependendo da frequência através da função de vértice

$$\boxed{[-i\Omega - D(\Omega) \nabla^2] P(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \Omega) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \quad (4.52)$$

onde se definiu o coeficiente de difusão renormalizado como

$$\boxed{D(\Omega) = D_B - \frac{l_e^2 D_B}{2k_0^2} \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \Omega)}. \quad (4.53)$$

Se pode ver que no limite $\Omega \rightarrow 0$, ou seja, $\omega_1 \approx \omega_2$, e $l_e \rightarrow \infty$ (ou $\gamma_e \rightarrow 0$) a função de vértice se anula obtendo uma equação de difusão estacionária clássica para a função de Green de intensidade Eq.(4.30).

Encontramos a partir da aproximação de difusão uma relação entre a função de vértice e a função de Green de intensidade, levando em conta apenas a contribuição dos diagramas de escada ("Ladder") Eq.(4.27), $\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \Omega) = (4\pi c/l^2)P_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \Omega)$. Pode-se pensar que essa relação dá um coeficiente de difusão renormalizado dependendo da posição, no entanto, para um meio infinito $\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \Omega)$ não depende da posição, o qual pode ser visto iterando a Eq.(4.20), ao contrário do caso de meio finito em que esta nova dependência é a chave para obter as EAC e um coeficiente de difusão renormalizado dependendo da posição [22]. A partir da Eq.(4.53) poderia escrever-se a seguinte expressão para o coeficiente renormalizado em termos da probabilidade de retorno

$$\boxed{D(\Omega) = D_B - \frac{2\pi c}{k_0^2} D_B P_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \Omega)}. \quad (4.54)$$

Este fenômeno de renormalização do coeficiente de difusão, devido aos diagramas de interferência (maximamente cruzados), é chamado localização fraca.

4.5 Teoria diagramática auto-consistente

Para ir além do regime fraco $k_0 l_e \gg 1$, o qual pode ser feito incrementando a quantidade de desordem, se precisa introduzir o conceito de auto-consistência (AC). Neste caso, o caminho livre médio torna-se da ordem do comprimento de onda $k_0 l_e \lesssim 1$ e uma beira de mobilidade se cria. É conhecido que esta transição ocorre em sistemas tri-dimensionais. No entanto, para todos os modos próprios de oscilação da onda em uma e duas dimensões esta fica fortemente localizada.

O conceito de auto-consistência foi introduzido por Götze (1978) [25] e desenvolvido por Vollhardt e Wölfle (1980) para descrever esta transição no estudo da condutividade elétrica em um metal [26]. Ele definiu um princípio de auto-consistência no qual expressa $D(\Omega)$ em termos de uma equação dependendo de $D(\Omega)$ mesmo como

$$D(\Omega) = \mathcal{F}[D(\Omega)], \quad (4.55)$$

com \mathcal{F} sendo um funcional. A solução AC da Eq.(4.55) deveria ter como resultado $D(\Omega)$ para todos os valores de Ω e γ_e . Esta solução deve ser compatível com os limites conhecidos, de acordo com a teoria de perturbação para $\gamma_e \ll 1$ (limite fraco). Daí, que o conceito de AC, seja usado para estender a teoria além do limite de validade da teoria de perturbação[27].

De acordo com Cherroret [22], isto pode ser feito usando $D(\Omega)$ em vez de D_B , para calcular o segundo termo da Eq.(4.54). O que é equivalente a levar em conta "laços secundários" nas linhas onduladas (Cooperons) na Fig.4.9, e, depois, executar uma iteração de laços nos seguintes "laços secundários" e assim por diante. Ou seja, olhar as correções de laço de ordem n a partir de um processo iterativo conseguindo uma soma infinita de laços, um dentro do outro. Na prática, implica tomar o coeficiente de difusão renormalizado para calcular a função de Green de intensidade e a soma dos diagramas maximamente cruzados Γ_C , isto é, substituir $D_B \rightarrow D(\Omega)$ na caixa de Hikami Eq.(4.34) ou na sua transformada de Fourier Eq.(4.41). Isto implica fazer essa mudança no segundo termo do cálculo do coeficiente de difusão renormalizado Eq.(4.54). No 'laço de

interferência' esta mesma substituição é feita, o que implica modificar $\Gamma_D(\mathbf{r}, \Omega)$ e assim, permitir substituir $P_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \Omega)$ por $P(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \Omega)$ na Eq.(4.54). Assim, finalmente temos uma equação auto-consistente para o coeficiente de difusão renormalizado, dada por

$$\boxed{D(\Omega) = D_B - \frac{2\pi c}{k_0^2} D(\Omega) P(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \Omega)}. \quad (4.56)$$

Em três dimensões, para $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$, a solução da Eq.(4.56) diverge devido ao fato que $P(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \Omega)$ obedece uma equação de difusão generalizada que, em torno da origem, comporta-se como $P(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \Omega) \propto 1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. Para ultrapassar esta divergência não física, se toma a transformada de Fourier de $P(\mathbf{q}, \Omega)$, onde \mathbf{q} é assumida como variável conjugada a $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ na equação de difusão generalizada Eq.(4.52), assim se obtém que o propagador de difusão Eq.(4.29) é modificado por⁴

$$P(\mathbf{q}, \Omega) = \frac{1}{-i\Omega + D(\Omega)\mathbf{q}^2}. \quad (4.57)$$

Daí se pode escrever a função de Green de intensidade de retorno à origem através da Eq.(4.57) como

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \Omega) = \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} P(\mathbf{q}, \Omega) e^{-i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r})} = \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{-i\Omega + D(\Omega)\mathbf{q}^2}. \quad (4.58)$$

lembramos da Sec.(4.1), que no caso de retorno à origem o vetor de onda no propagador de intensidade média é uma soma do vetor de onda incidente e o refletido, ou seja $\mathbf{q} = \mathbf{k} + \mathbf{k}'$, por tanto no limite $\mathbf{q} \approx 0$ se pode assumir um cut-off superior⁵ na integração da ordem $q_0 = l_e^{-1}$. Isto é devido a que o comportamento difusivo é só válido numa escala espacial maior que l_e [17]. Substituindo e resolvendo $D(\Omega)$ em geral para d dimensões temos o coeficiente de difusão renormalizado em termos da intensidade de retorno com $D_B = cl_e/d$. Esta generalização pode ser feita já que os resultados obtidos são os mesmos se se trabalha desde o começo em d dimensões [4, 28, 29].

$$\boxed{\frac{D(\Omega)}{D_B} = 1 + \frac{2\pi c}{k_0^2 D_B} \int_{q < q_0} \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{\mathbf{q}^2 - i\Omega/D(\Omega)}}. \quad (4.59)$$

⁴O último passo da Eq.(4.54) à Eq.(4.56) envolve uma resumação de diagramas, dos quais na teoria AC não se tem mais controle.

⁵Se o limite inferior para q é tomado como L^{-1} , com L o tamanho da mostra, então o coeficiente de difusão renormalizado não será mais uma quantidade intensiva [4].

4.6 Resultados

No limite $\Omega \rightarrow 0$ é dizer no regime difusivo a integral na Eq.(4.59) diverge mais fortemente na condição de retroespalhamento onde $\mathbf{k}' = -\mathbf{k} + \mathbf{q}$ mostrando, assim, a contribuição dos diagramas inseridos na Fig.4.9. Para $d = 1, 2, 3$ se pode mostrar que da Eq.(4.59) se obtém os seguintes resultados para os coeficientes de difusão renormalizados:

$$\boxed{d = 1}$$

$$\frac{D(\Omega)}{D_B} = 1 - \frac{c}{k_0^2 D_B} \left(\frac{D(\Omega)}{-i\Omega} \right)^{\frac{1}{2}} \arctan \left(\left(\frac{D(\Omega)}{-i\Omega} \right)^{\frac{1}{2}} q_0 \right), \quad (4.60)$$

$$\boxed{d = 2}$$

$$\frac{D(\Omega)}{D_B} = 1 - \frac{2\pi^2 c}{k_0^2 D_B} \ln \left(\frac{q_0^2 D(\Omega)}{-i\Omega} - 1 \right), \quad (4.61)$$

$$\boxed{d = 3}$$

$$\frac{D(\Omega)}{D_B} = 1 - \frac{c q_0}{\pi k_0^2 D_B} + \frac{c}{\pi k_0^2 D_B} \left(\frac{-i\Omega}{D(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \arctan \left(\left(\frac{D(\Omega)}{-i\Omega} \right)^{\frac{1}{2}} q_0 \right). \quad (4.62)$$

O termo $-i\Omega/D(\omega_0, \Omega)$ apresenta dos limites quando $\Omega \rightarrow 0$. No caso difusivo $D(\Omega)$ é finito e constante assim

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{-i\Omega}{D(\Omega)} = 0. \quad (4.63)$$

No regime localizado, a difusão é zero, pelo tanto o limite não fica bem definido. Numa analogia com a condutividade, onde para uma frequência de modulação Ω finita pode ser considerada complexa⁶, se define o comprimento de localização $\zeta(\omega_0)$

⁶Das equações de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (4.64)$$

com $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ e $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$. Onde c é a velocidade da luz, \mathbf{E} o campo elétrico, \mathbf{j} a densidade de corrente e \mathbf{H} o campo magnético. Para uma variação temporal dos campos tipo $\exp(-i\Omega T)$, a Eq.(4.64) se torna

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \left(\sigma - \frac{i\Omega}{4\pi} \epsilon \right) \mathbf{E} = \frac{4\pi}{c} \sigma^* \mathbf{E}. \quad (4.65)$$

Denotando Ω como a frequência de modulação, se tem que $\sigma^* \mathbf{E}$ é uma densidade de corrente complexa onde sua parte imaginária representa uma corrente de polarização dielétrica gerada dos eletrons ligados (localizados).

como [30]⁷

$$\tilde{\zeta}(\omega_0) \equiv \lim_{\Omega \rightarrow 0} \left(\frac{D(\omega_0, \Omega)}{-i\Omega} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.66)$$

Substituindo o coeficiente renormalizado em termos do comprimento de localização na Eq.(4.60) e na Eq.(4.61), encontram-se as equações que devem satisfazer $\tilde{\zeta}(\omega_0)$ em cada caso

$$\boxed{d = 1} \quad k_0^2 = q_0 \tilde{\zeta}(\omega_0) \arctan(\tilde{\zeta}(\omega_0) q_0), \quad (4.67)$$

$$\boxed{d = 2} \quad \tilde{\zeta}(\omega_0) = \frac{1}{q_0} \left\{ \exp \left(\left(\frac{\omega_0^2 l_e}{4\pi^2 c^3} + 1 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \right\}, \quad (4.68)$$

tomando o limite de desordem zero, o qual implica $\gamma_e \rightarrow 0$ ou $q_0 \rightarrow 0$, $l_e \rightarrow \infty$ se tem que nos dois casos $\tilde{\zeta}(\omega_0) \rightarrow \infty$. No caso $d = 1$ isto garante que o produto do termo linear e da arcotangente sejam igual a uma constante finita; no segundo caso $d = 2$ é evidente a divergência de $\tilde{\zeta}(\omega_0)$. Isto quer dizer que para $d = 1, 2$, as ondas estão sempre localizadas sem importar a magnitude da desordem, nem o modo de oscilação da onda [31].

Para $d = 3$ a substituição da Eq.(4.66) na Eq.(4.62) leva à seguinte equação para $\tilde{\zeta}(\omega_0)$

$$\frac{1}{q_0 \tilde{\zeta}(\omega_0)} \arctan q_0 \tilde{\zeta}(\omega_0) = 1 - \frac{l^2}{l_c^2}, \quad (4.69)$$

onde se definiu um comprimento crítico como $l_c^2 = \frac{3}{\pi k_0^2}$. Das definições, $\tilde{\zeta}(\omega_0)$ e q_0 são sempre positivos, portanto a parte esquerda da Eq.(4.69) é maior ou igual a zero. Assim, se tem uma restrição sobre o caminho livre médio dada por

$$1 - \frac{\pi}{3} (k_0^2 l_e^2) \geq 0, \quad (4.70)$$

onde a igualdade se tem para o valor crítico definido acima. Isto pode-se constatar também do atenuamento de $D(\omega_0, \Omega)$ no limite $\Omega \rightarrow 0$, o qual não é mais a condição

⁷Devido as unidades de $[-i\Omega/D(\omega_0, \Omega)] = \frac{T^{-1}}{VL} = L^{-2}$ são de inverso de comprimento ao quadrado se pode definir um comprimento de localização por Eq.(4.66).

para localização da energia da onda. Esta condição é satisfeita da Eq.(4.62) somente se $l_e \leq l_c \approx k_0^{-1}$. Perto da beira de mobilidade a Eq.(4.69) pode ser reescrita como

$$\tilde{\xi}(\omega_0) = \frac{1}{q_0} \arctan \left(\frac{\tilde{\xi}(\omega_0)}{l_e} \right) \frac{l_c^2}{(l_c + l_e)(l_c - l_e)}, \quad (4.71)$$

ao qual mostra que abaixo da beira de transição, $\tilde{\xi}(\omega_0)$ se comporta para $l_e < l_c$ como

$$\tilde{\xi}(\omega_0) \approx |l_e - l_c|^{-1}. \quad (4.72)$$

Acima da beira de transição a Eq.(4.62) pode ser escrita como

$$\frac{D(\Omega)}{D_B} = \frac{l_e + l_c}{l_e} \frac{l_e - l_c}{l_e}, \quad (4.73)$$

ao qual mostra que acima da beira de transição, $D(\omega_0, 0)$ se comporta para $l_e > l_c$ como

$$D(\omega_0, 0) \approx |l_e - l_c|^1. \quad (4.74)$$

Portanto, a divergência do comprimento de localização na transição permite identificar o valor do expoente crítico igual a 1 [32].

Assim, pode ser visto como em três dimensões existe uma transição de fase chamada transição de Anderson, onde para uma quantidade crítica de desordem ($\gamma_e = 4\pi/l_c$) pode-se ter ou não a propagação da onda através do meio.

CAPÍTULO 5

Considerações Finais

Nesse trabalho foi estudado a localização de Anderson para um campo escalar sem massa, que obedece uma equação de Helmholtz randômica. Através de um formalismo perturbativo se obteve, no limite de desordem fraca, a renormalização do coeficiente de difusão, o qual é uma mostra de localização fraca. Isto foi possível devido ao levar em conta efeitos coerentes na função de Green de intensidade, provenientes de assumir invarianza sob reversão temporal da função de vértice. Eles foram representados pelos diagramas maximamente cruzados e calculados através das caixas de Hikami.

Como uma teoria de perturbação não é suficiente para descrever a propagação de uma onda seguindo um processo de retroespalhamento múltiplo num meio desordenado, usou-se uma aproximação auto-consistente para estudar a localização da energia da onda no regime de desordem forte. Nesse caso se encontrou que a função de Green de intensidade satisfaz uma equação generalizada de difusão onde um novo coeficiente renormalizado é definido dependendo da frequência. Se encontrou, no limite $\Omega \rightarrow 0$, que em uma e duas dimensões os estados da onda encontram-se localizados para qualquer intensidade da desordem. Para três dimensões existe um limite de mobilidade, levando a uma transição de fase a partir de uma desordem crítica dada por $\gamma_c = 4\pi/l_c$, onde $l_c = \sqrt{\frac{3}{4\pi^3}}\lambda_0$. Através da teoria auto-consistente foi possível obter o coeficiente crítico que caracteriza a transição perto do limite de mobilidade, obtendo um valor de 1.

A análise feita através do formalismo perturbativo e a teoria auto-consistente assumiu a existência de centros dispersores reais, como impurezas. A localização da radiação de Hawking num regime que vai além da aproximação semi-clássica é uma possível continuação natural desse trabalho.

CAPÍTULO 6

Appendix

6.1 Caixa de Hikami

Neste apêndice a transformada de Fourier $H(\mathbf{q})$ da caixa de Hikami $H(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ respeito a $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$, introduzida na Eq.(4.32), é calculada. Para isto se define a função de correlação $g(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ por

$$g(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \gamma_e \int d\mathbf{r}_1 \bar{G}^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \bar{G}^A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'). \quad (6.1)$$

Inserindo a transformada de Fourier das funções de Green

$$\bar{G}^{R,A}(\mathbf{r}) = \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} e^{\pm i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \bar{G}^{R,A}(\mathbf{q}) \quad (6.2)$$

dentro da integral do lado direito se tem

$$g(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \gamma_e \int d\mathbf{r}_1 \int \frac{d\mathbf{q}d\mathbf{q}'}{(2\pi)^6} e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) - i\mathbf{q}'\cdot(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}')} \bar{G}^R(\mathbf{q}) \bar{G}^A(\mathbf{q}'), \quad (6.3)$$

fazendo a integração em \mathbf{r}_1

$$g(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \gamma_e \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \bar{G}^R(\mathbf{q}) \bar{G}^A(\mathbf{q}') e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}. \quad (6.4)$$

Como da Eq.(3.13) $\bar{G}^{R,A}(\mathbf{q})$ se podem escrever a primeira ordem como

$$\bar{G}^{R,A}(\mathbf{q}) = \frac{1}{k_0^2 - \mathbf{q}^2 \pm i\frac{k_0'}{l_e}}, \quad (6.5)$$

se tem que o produto das duas funções de Green médias (retardada e avançada) é dado por

$$\bar{G}^R(\mathbf{q})\bar{G}^A(\mathbf{q}) = \frac{1}{(k_0^2 - q^2)^2 + \left(\frac{k_0}{l_e}\right)^2}. \quad (6.6)$$

Da Eq.(2.34) para a parte imaginária da função de Green se tem que

$$Im\bar{G}^R(\mathbf{q}) = \frac{\bar{G}^R(\mathbf{q}) - \bar{G}^A(\mathbf{q})}{2i} = -\frac{k_0}{l_e} \frac{1}{(k_0^2 - q^2)^2 + \left(\frac{k_0}{l_e}\right)^2} = -\frac{k_0}{l_e} \bar{G}^R(\mathbf{q})\bar{G}^A(\mathbf{q}), \quad (6.7)$$

portanto se tem que a função $g(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned} g(\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= -\frac{\gamma_e l_e}{k_0} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \left(\frac{\bar{G}^R(\mathbf{q}) - \bar{G}^A(\mathbf{q})}{2i} \right) e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}, \\ &= -\frac{4\pi}{k_0} \frac{\bar{G}^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \bar{G}^A(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{2i}, \\ &= -\frac{4\pi}{k_0} Im\bar{G}^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Assim, inserindo as funções de Green médias dadas por Eq.(3.20) e usando a Eq.(2.31) se tem

$$\boxed{g(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{\sin(k_0 R)}{k_0 R} e^{-R/2l_e}} \quad (6.9)$$

onde de novo $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. Com este resultado já é possível calcular as caixas de Hikami. Em geral, para qualquer uma delas é válido

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 H(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}', \mathbf{r}_2), \quad (6.10)$$

onde $H(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}', \mathbf{r}_2)$ é a caixa de Hikami mostrada na Fig.6.1. Este diagrama é uma soma de três contribuições $H^{(A)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}', \mathbf{r}_2)$, $H^{(B)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}', \mathbf{r}_2)$ e $H^{(C)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}', \mathbf{r}_2)$. A contribuição de $H^{(A)}$ é dada por

$$H^{(A)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \bar{G}^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \bar{G}^A(\mathbf{r}', \mathbf{r}_1) \bar{G}^A(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}) \bar{G}^R(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}'). \quad (6.11)$$

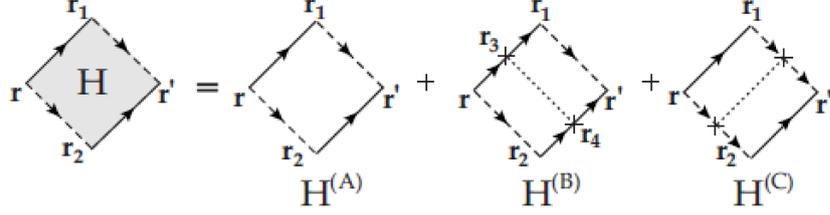


Figura 6.1: Caixa de Hikami revestida. A função $H(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ é obtida quando é integrada sobre dois pontos opostos. As linhas finas e as linhas tracejadas representam uma função de Green retardada e avançada. A linha pontilhada é uma função de correlação de desordem. O primeiro termo é dado pela contribuição dos diagramas maximamente cruzados nus (cooperon).

As duas integrais podem ser feitas independentemente com o resultado da Eq.(6.9), lembrando que $\gamma_e = 4\pi/l_e$ o resultado é

$$H^{(A)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{\gamma_e^2} \frac{\sin^2(k_0 R)}{(k_0 R)^2} e^{-R/l_e}. \quad (6.12)$$

Sua transformada de Fouier é dada por

$$H^{(A)}(\mathbf{q}) = \int d\mathbf{R} H^{(A)}(\mathbf{R}) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}}, \quad (6.13)$$

escolhendo coordenadas esféricas e integrando no ângulo sólido similar à Eq.(2.28), tem-se

$$H^{(A)}(\mathbf{q}) = \frac{4\pi}{k_0^2} \int_0^\infty dR \frac{\sin(qR) \sin^2(k_0 R)}{qR} e^{-R/l_e} \quad (6.14)$$

Esta integral pode ser avaliada com ajuda de Mathematica dando assim

$$H^{(A)}(\mathbf{q}) = \frac{1}{\gamma_e^2} \frac{\pi}{k_0^2 q} (\arctan(2k_0 - q)l_e + 2 \arctan ql_e - \arctan(2k_0 + q)l_e). \quad (6.15)$$

A partir de este resultado pode-se reconhecer a transformada de Fourier de $g^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, a qual é igual a $a(\mathbf{q}) = \gamma_e^2 H^{(A)}(\mathbf{q})$. As outras caixas podem ser calculadas de maneira similar.

Referências Bibliográficas

- [1] P. W. Anderson. Absence of diffusion in certain random lattices. *Phys. Rev.*, 109(5):1492–1505, 1958.
- [2] S. F. Edwards. A new method for the evaluation of electric conductivity in metals. *Philosophical Magazine*, 3(33):1020–1031, 1958.
- [3] Dieter Vollhardt. Localization effects in disordered systems festkiirperprobleme 27 (1 987), 1987.
- [4] Sheng. P, editor. *Scattering and Localization of Classical Waves in Random Media*. World Scientific, 1990.
- [5] Matt Visser Carlos Barceló, Stefano Liberati. Analogue gravity. *Living Reviews in Relativity*, 14(3), 2011.
- [6] B. L. Hu. Cosmology as condensed matter physics. *arXiv:gr-qc/9511076v1*, 1995.
- [7] R. Holman D. Boyanovsky, H.J. de Vega. Non-equilibrium phase transitions in condensed matter and cosmology: Spinodal decomposition, condensates and defects. *arXiv:hep-ph/9903534v1*, 1999.
- [8] G. Krein, G. Menezes, and N. F. Svaiter. Analog model for quantum gravity effects: Phonons in random fluids. *Phys. Rev. Lett.*, 105(13):131301, 2010.
- [9] E.M. Lifshitz L.d. Landau. *Fluid Mechanics*. Pergamon Press, 1987.
- [10] I. Ye. Dzyaloshinkii A.A. Abrikosov, L.P. Gor'kov. *Quantum Fields Theoretical Methods in Statistical Physics*. Pergamon Press, 1965.
- [11] W. G. Unruh. Experimental black-hole evaporation? *Phys. Rev. Lett.*, 46:1351–1353, May 1981.

- [12] Sakurai. J. J. *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley, 1994.
- [13] L.P. Pitaevskii E.M. Lifshitz. *Statistical Physics*. Pergamon Press, 1980.
- [14] J.D. Walecka A.L. Fetter. *Quantum Theory of Many-Particle System*. McGraw Hill, 1971.
- [15] E. Wolf L. Mandel. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1995.
- [16] M. Le Bellac. *Quantum And Statistical Field Theory*. Oxford University Press, 1991.
- [17] G. Montambaux E. Akkermans. *Mesoscopic Physics of Electrons and Photons*. Cambridge University Press, 2007.
- [18] Sheng. P Quing. Z. *Scattering and Localization of Classical Waves in Random Media*. World Scientific, 1990. Wave Difussion and Localization in Random Composites.
- [19] E. Akkermans, P. E. Wolf, and R. Maynard. Coherent backscattering of light by disordered media: Analysis of the peak line shape. *Phys. Rev. Lett.*, 56(14):1471–1474, 1986.
- [20] Shinobu Hikami. Anderson localization in a nonlinear- σ -model representation. *Phys. Rev. B*, 24(5):2671–2679, 1981.
- [21] J. S. Langer and T. Neal. Breakdown of the concentration expansion for the impurity resistivity of metals. *Phys. Rev. Lett.*, 16(22):984–986, 1966.
- [22] N. Cherroret and S. E. Skipetrov. Microscopic derivation of self-consistent equations of anderson localization in a disordered medium of finite size. *Phys. Rev. E*, 77(4):046608, 2008.
- [23] D. Vollhardt and P. Wölfle. Scaling equations from a self-consistent theory of anderson localization. *Phys. Rev. Lett.*, 48(10):699–702, 1982.
- [24] S. E. Skipetrov and B. A. van Tiggelen. Dynamics of anderson localization in open 3d media. *Phys. Rev. Lett.*, 96(4):043902, 2006.
- [25] W. Götze. An elementary approach towards the anderson transition. *Solid State Communications*, 27(12):1393 – 1395, 1978.

- [26] D. Vollhardt and P. Wölfle. Diagrammatic, self-consistent treatment of the anderson localization problem in $d \leq 2$ dimensions. *Phys. Rev. B*, 22(10):4666–4679, 1980.
- [27] Alba Theumann. Second-quantized theory of anderson localization in $d = 2 + \epsilon$. *Phys. Rev. B*, 28(11):6453–6462, 1983.
- [28] T. R. Kirkpatrick. Localization of acoustic waves. *Phys. Rev. B*, 31(9):5746–5755, 1985.
- [29] E. Akkermans and R. Maynard. Weak localization and anharmonicity of phonons. *Phys. Rev. B*, 32(12):7850–7862, 1985.
- [30] Sheng. P, editor. *Introduction to Wave Scattering, Localization and Wave Phenomena*. World Scientific, Singapore, 1995.
- [31] Kirkpatrick. T Condat. C. *Scattering and Localization of Classical Waves in Random Media*. World Scientific, 1990. Localization of Acoustic Waves.
- [32] Patrick A. Lee and T. V. Ramakrishnan. Disordered electronic systems. *Rev. Mod. Phys.*, 57(2):287–337, 1985.
- [33] Wellens. T Eckert. F, Buchleitner. A. Weak localisation with short loops. *arXiv:1101.0995v1*, 2011.