

Quantização do Campo Escalar em Espaços Curvos e Criação de Partículas na Evolução do Universo

Diogo C. F. Celani

Dissertação de Conclusão do Curso de Mestrado em física

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Orientado por Nelson Pinto-Neto

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

ICRA

... À memória de Bruno Celani e Luiz Celani.

Conteúdo

| | |
|---|------------|
| Agradecimentos | iv |
| Abstract | v |
| Resumo | vi |
| Notação | vii |
| 1 Introdução | 1 |
| 2 Quantização do Campo Escalar | 4 |
| 2.1 Campo Escalar Clássico | 4 |
| 2.1.1 Princípio da Ação e Equação de Euler-Lagrange | 4 |
| 2.1.2 Teorema de Noether | 5 |
| 2.1.3 Equação de Klein-Gordon | 8 |
| 2.2 Quantização no Espaço-Tempo de Minkowski | 13 |
| 2.2.1 Formalismo de Heisenberg | 13 |
| 2.2.2 Oscilador Harmônico Unidimensional | 14 |
| 2.2.3 Quantização do Campo de Klein-Gordon | 16 |
| 2.2.4 Álgebra de Operadores e Causalidade | 19 |
| 2.2.5 Causalidade e Antipartículas | 21 |
| 2.2.6 Criação de Partículas por uma Fonte Externa | 23 |
| 2.3 Quantização em Espaços Curvos | 25 |
| 2.3.1 Equação de Klein-Gordon | 25 |
| 2.3.2 Coeficientes de Bogoliubov | 27 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 2.3.3 | Princípio da Ação em Espaço-Tempos Curvos: Um Exemplo de Cálculo Variacional | 31 |
| 3 | O Efeito Unruh | 35 |
| 3.1 | Movimento Acelerado e Referencial Co-Movente | 36 |
| 3.2 | Quantização no Espaço de Rindler | 39 |
| 3.3 | Coefficientes de Bogoliubov | 41 |
| 3.4 | Números de Ocupação e a Temperatura Unruh | 42 |
| 3.5 | Efeito Unruh com Partículas Massivas | 43 |
| 3.6 | Efeito Hawking | 47 |
| 4 | Campo Escalar em modelos de Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker | 49 |
| 4.1 | O modelo de Bernard e Duncan | 53 |
| 4.2 | Expansão Lenta | 56 |
| 5 | Cosmologia, Inflação | 59 |
| 5.1 | Inflação | 62 |
| 5.2 | Campo Escalar no Espaço de de Sitter | 66 |
| 6 | Universos Não-Singulares com Ricochete | 69 |
| 6.1 | Exemplo de Modelo com Ricochete | 71 |
| 7 | Conclusão | 78 |
| | Bibliografia | 81 |

Agradecimentos

Gostaria de agradecer em primeiro lugar ao meu orientador Nelson Pinto-Neto que demonstrou uma rara paciência e estava sempre disposto, quando possível, a ensinar. Eu sei que dei trabalho e lhe causei preocupações. Seu entusiasmo com a física e com as leis da natureza também é digno de nota.

Quero agradecer também aos meus colegas e professores do mestrado. Especialmente, Bernardo Fraga, com quem passei muito tempo quebrando a cabeça sobre as disciplinas. Desejo-lhe muita paz e prosperidade em sua vida, você merece.

Agradeço ao CNPQ, que financiou minha bolsa de mestrado e a de muitos outros alunos, contribuindo para o desenvolvimento científico e tecnológico no Brasil.

Por último, mas não menos importante, agradeço a minha família, que sempre me deu apoio, apesar de eu estar sempre ocupado. Especialmente, minha mãe, meu exemplo de vida de quem tenho muito orgulho, que sempre esteve presente, mesmo à distância algumas vezes, e sempre me incentivou. E minha namorada, Luana, que soube compreender a dedicação necessária para um projeto como esse. Passamos muito menos tempo do que eu gostaria.

Abstract

In this work we review some aspects of field quantization in curved spacetimes. We studied the quantization of a real scalar field in systems of separable coordinates, the definition of vacuum and the calculation of the Bogoliubov coefficients.

As an example we apply the formalism to a system of uniform accelerated motion. We discuss the Unruh effect and its analogy to the Hawking effect.

However the most important application concerns the evolution of the universe itself. So we discuss some cosmology and the quantization of a real scalar field in homogeneous isotropic models. At last we study particle creation in a nonsingular homogeneous isotropic model.

The goal of this work is to emphasize the importance of particle creation by evolving gravitational fields in the evolution of the universe. Its consequences certainly help to mold the universe we observe today.

Resumo

Neste trabalho, nós revemos alguns aspectos da quantização de campos em espaços curvos. Estudamos a quantização de um campo escalar real em sistemas de coordenadas separáveis, a definição de vácuo e o cálculo dos coeficientes de Bogoliubov.

Como um exemplo, aplicamos o formalismo a um sistema em movimento acelerado uniforme. Discutimos o efeito Unruh e sua analogia com o efeito Hawking.

Entretanto, a aplicação mais importante concerne à evolução do universo. Portanto, discutimos cosmologia brevemente e a quantização de um campo escalar real em modelos homogêneos e isotrópicos. Por fim, estudamos criação de partículas em um modelo homogêneo e isotrópico não-singular.

O objetivo deste trabalho é enfatizar a importância da criação de partículas em campos gravitacionais dinâmicos na evolução do universo. Suas conseqüências ajudam a moldar o universo que observamos hoje.

Notação

Antes de discutir o trabalho propriamente dito, é necessário fixar a notação. As convenções que usaremos aqui infelizmente não são de forma alguma universais.

Em primeiro lugar, exceto quando indicado, usamos um sistema de unidades em que $\hbar = c = 1$, onde \hbar é a constante de Planck e c é a velocidade da luz.

Um ponto qualquer do espaço-tempo é denotado (em coordenadas cartesianas) por $x = (t, \vec{x})$ ou $x = x^\mu$, com $\mu = 0, 1, 2$ ou 3 . Em duas dimensões, isto é, em um espaço-tempo 1+1 dimensional, o símbolo de vetor na componente espacial é omitido, e escrevemos $x^\mu = (t, x)$.

$\eta_{\mu\nu}$ e $g_{\mu\nu}$ denotam respectivamente o tensor métrico de Minkowski e um tensor métrico arbitrário, com assinatura -2 em 4 dimensões. O intervalo entre dois eventos próximos no espaço-tempo, x^μ e $x^\mu + dx^\mu$, é definido como $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$. Quando ds^2 é maior, menor ou igual a zero, dizemos que o intervalo é tipo-tempo, tipo-espaço, ou tipo-luz, respectivamente.

O operador ∂_μ representa a derivada parcial com relação a x^μ

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}.$$

1

Introdução

A teoria quântica de campos é considerada uma das mais fundamentais teorias da natureza, sendo o alicerce sobre o qual se edifica o modelo padrão de física de partículas, e provê atualmente a descrição mais precisa e confiável dos fenômenos quânticos.

A relatividade geral, por outro lado, é uma das mais bem sucedidas teorias clássicas e descreve fenômenos macroscópicos que envolvem gravitação. Um de seus principais resultados é que a matéria curva o espaço e o tempo à sua volta, o que tem profundas implicações no conceito de espaço-tempo. Em resumo, a gravitação é um efeito da geometria do espaço-tempo.

A teoria quântica e a relatividade geral encontram-se em uma área de pesquisa que é ao mesmo tempo difícil mas extremamente atrativa e fundamentalmente importante. O estudo da quantização de campos em espaços curvos é importante para a análise de fenômenos onde a natureza quântica dos campos e os efeitos da gravitação são ambos importantes, mas a natureza quântica da própria gravidade não é a princípio relevante. Ou seja, é uma aproximação de uma teoria ainda inacessível de gravitação quântica.

Considera-se o comportamento de campos, descritos no contexto da teoria quântica

onde os campos são operadores atuando em um espaço de Hilbert, que se propagam em uma arena gravitacional clássica, de modo que gravitação pode ser descrita por um espaço-tempo curvo, sujeito às equações clássicas da relatividade geral.

A importância da gravitação, mesmo em fenômenos quânticos, não pode ser subestimada. Não há campos verdadeiramente livres na natureza. Qualquer forma de energia interage com o campo gravitacional. A interação se faz presente nas equações de campo não apenas através de termos de acoplamento entre o campo físico e a curvatura do espaço-tempo, mas também através de termos com derivadas.

Evidentemente, quando a gravidade é considerada, novas dificuldades surgem, que não são encontradas na teoria quântica usual no espaço-tempo de Minkowski. Até mesmo as equações dinâmicas dos campos “livres” são em geral não-lineares com coeficientes dependentes do tempo, e nem sempre admitem soluções analíticas com interpretação física imediata. As dificuldades associadas a introdução da gravidade em fenômenos quânticos não são, portanto, meramente matemáticas, mas também conceituais ou filosóficas, como ficará evidente no trabalho.

Espera-se que esta seja uma boa aproximação, em que os efeitos quânticos da gravitação são irrelevantes, quando as escalas envolvidas são muito maiores do que os valores de Planck, $l_p \sim 10^{-33}\text{cm}$ e $t_p \sim 10^{-44}\text{s}$.¹ Mas esta aproximação certamente falhará nesse limite, e possivelmente antes. A escala de Planck marca, portanto, o limite em que uma teoria completa de gravitação quântica é necessária.

Além disso, a ocorrência de flutuações quânticas do campo gravitacional poderia, em princípio, dificultar e até mesmo impossibilitar a construção de observadores inerciais locais, o que descaracterizaria completamente a teoria da relatividade geral de Einstein. E do ponto de vista semi-clássico,² não há criação de partículas sem uma métrica bem definida.³ Portanto, a menos que o universo seja eterno, espaço-tempo e matéria devem ter surgido juntos em algum momento próximo à era de Planck. O que haveria antes,⁴ talvez alguma forma mais fundamental de geometria e de energia/matéria,⁵ pode apenas ser especulado.

¹ Birrell e Davies (1986).

² Voracek (1983).

³ Evidentemente considerando apenas a interação entre o campo quântico e o campo gravitacional, e não outros processos de criação de partículas.

⁴ Seja lá qual for o significado de “antes” neste contexto.

⁵ Misner, Thorne e Wheeler (1970).

Entretanto, nos regimes em que a aproximação semi-clássica pode ser usada com alguma confiança, há ainda uma enorme gama de aplicações. Algumas aplicações concernem a estrutura em larga escala do universo e as anisotropias da radiação cósmica de fundo,⁶ criação de partículas por campos gravitacionais e, em particular, durante a evolução do universo,⁷ buracos negros,⁸ etc.

O resultado mais importante da teoria quântica de campos em espaços curvos talvez seja a criação de partículas por fortes campos gravitacionais. O processo de criação de pares pode ter um papel importante na dinâmica do universo primordial.

Por simplicidade, vamos considerar somente o campo escalar livre. Como tem apenas um componente, o campo escalar descreve partículas de spin zero. Com isso, evitamos outras dificuldades associadas, por exemplo, à polarização dos fótons ou ao princípio da exclusão de Pauli que governa os férmions, etc.

Não há nenhuma partícula elementar estável de spin zero conhecida. Entretanto, para os nossos propósitos, partículas escalares podem ser consideradas estáveis em comparação com o tempo de Planck, $t_p \sim 10^{-44}$ s, ou seja, podemos considerar que em uma escala de tempo tão pequena não há interações. Por exemplo, o principal modo de decaimento do pión neutro é $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$, com uma meia vida de $\tau_{\pi^0} \sim 10^{-16}$ s.

Começamos no capítulo 2 com um breve estudo do campo escalar no formalismo da teoria de campos. Com isso, apresentamos o princípio da ação, que permite a determinação das equações dinâmicas dos campos, e o teorema de Noether, que permite, por exemplo, a construção do tensor-energia momento. Passamos, então, para o estudo da quantização do campo escalar no espaço de Minkowski. Os conceitos apresentados (antipartículas, criação e aniquilação, etc.) serão necessários para a generalização do formalismo em espaços curvos. Os capítulos seguintes são aplicações dessa teoria, o efeito Unruh e criação de partículas em um universo em expansão, respectivamente. O capítulo 7 constitui a conclusão do trabalho. Este trabalho tem o caráter de review, e os tópicos apresentados podem ser encontrados na literatura citada nas referências.⁹ No final do trabalho, encontra-se uma modesta bibliografia que não faz justiça a este assunto de importância fundamental, que tem sido extensivamente estudado desde a década de 1970.

⁶ Mukhanov, Feldman e Brandenberger (1992).

⁷ Parker (1968).

⁸ Hawking (1975).

⁹ A questão da criação de partículas em modelos com ricochete (sessão 6.4) é relativamente recente, entretanto, mais referências podem ser encontradas em Peter & Pinto-Neto (2002).

2

Quantização do Campo Escalar

2.1 Campo Escalar Clássico

2.1.1 Princípio da Ação e Equação de Euler-Lagrange

Um campo clássico é um sistema contínuo cujas equações dinâmicas provêm uma descrição completa de sua evolução. Em cada ponto do espaço-tempo, (\vec{x}, t) , a variável dinâmica é o próprio campo, $\phi(x)$, enquanto \vec{x} e t são apenas parâmetros.

As equações dinâmicas podem ser derivadas a partir da ação que descreve o campo, um funcional do campo na forma de uma integral no espaço-tempo da densidade lagrangiana \mathcal{L} ,¹

$$S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}[\phi].$$

O princípio da ação² afirma que a evolução de um sistema físico ocorre ao longo do

¹ A partir de agora vamos nos referir a \mathcal{L} simplesmente como a lagrangiana.

² Uma descrição mais precisa do princípio da ação pode ser encontrada por exemplo em Hill (1951).

“caminho” no espaço de configuração segundo o qual S é estacionário, $\delta S = 0$, com

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \delta \phi_{,\mu} \right\} \\ &= \int d^4x \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \right) \right] \delta \phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \delta \phi \right) \right\},\end{aligned}$$

onde assumimos que \mathcal{L} é uma função de ϕ e suas primeiras derivadas parciais apenas. Segue do teorema de Gauss que o último termo pode ser transformado em uma integral de superfície sobre o limite da região de integração. Considerando-se apenas variações que se anulem nesta fronteira, este termo de superfície pode ser descartado.³ S é estacionário em relação a variações arbitrárias em ϕ se

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0.$$

Esta é a equação de Euler-Lagrange.

2.1.2 Teorema de Noether

As equações dinâmicas não são suficientes para a descrição de um sistema físico. As características físicas (energia, momento, carga elétrica, etc.) do sistema devem ser expressas em termos das soluções destas equações. O teorema de Noether afirma que para cada simetria da ação, em relação a transformações contínuas dos campos e de suas coordenadas, há uma lei de conservação. O teorema permite a construção de invariantes dinâmicos correspondentes a estas leis.

Considere uma transformação infinitesimal das coordenadas e do campo

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu,$$

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x') = \phi(x) + \delta \phi(x).$$

As variações δx^μ e $\delta \phi$ podem ser expressas em termos de s parâmetros infinitesimais arbitrários linearmente independentes

$$\delta x^\mu = \chi_n^\mu \delta \omega^n, \quad \delta \phi = \Phi_n \delta \omega^n, \quad 1 \leq n \leq s.$$

³ Isto é, assumindo-se que as configurações iniciais e finais do campo são dadas, $\delta \phi(\vec{x}, t_i) = \delta \phi(\vec{x}, t_f) = 0$, e considerando-se somente variações que sejam nulas no limite espacial da região de integração

É importante notar que $\phi'(x')$ e $\phi(x)$ são comparados em diferentes pontos do espaço-tempo, portanto $\partial_\mu \delta\phi(x) \neq \delta\partial_\mu \phi(x)$. Então, a variação funcional em ϕ é definida por

$$\bar{\delta}\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x),$$

que, em até segunda ordem, assume a forma

$$\bar{\delta}\phi(x) = \delta\phi(x) - \phi_{,\mu}(x)\delta x^\mu = (\Phi_n - \phi_{,\mu}\chi_n^\mu)\delta\omega^n.$$

Por definição, $\partial_\mu \bar{\delta}\phi(x) = \bar{\delta}\partial_\mu \phi(x)$.

A variação resultante na ação é dada por

$$\delta S = \int d^4x' \mathcal{L}'(x') - \int d^4x \mathcal{L}(x),$$

onde

$$\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(\phi'(x'), \phi'_{,\mu}(x')) = \mathcal{L}(x) + \delta\mathcal{L}(x),$$

e

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}}\delta\phi_{,\mu} = \bar{\delta}\mathcal{L} + \frac{d\mathcal{L}}{dx^\mu}\delta x^\mu.$$

$\bar{\delta}\mathcal{L}$ é a variação em \mathcal{L} devido a variações funcionais em ϕ e $\phi_{,\mu}$

$$\bar{\delta}\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\bar{\delta}\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}}\bar{\delta}\phi_{,\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}}\bar{\delta}\phi \right),$$

onde a última igualdade segue da equação de Lagrange. O elemento de volume d^4x' é determinado pelo jacobiano da transformação $x^\mu \rightarrow x'^\mu$:

$$d^4x' = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| d^4x \approx \left(1 + \frac{\partial\delta x^\mu}{\partial x^\mu} \right) d^4x.$$

Segue finalmente que

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \left\{ \left[1 + \frac{\partial\delta x^\mu}{\partial x^\mu} \right] \left[\mathcal{L}(x) + \delta\mathcal{L}(x) \right] - \mathcal{L}(x) \right\} \\ &= \int d^4x \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}}\bar{\delta}\phi + \mathcal{L}\delta x^\mu \right\} \\ &= \int d^4x \delta\omega^n \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}} \left(\Phi_n - \phi_{,\nu}\chi_n^\nu \right) + \mathcal{L}\chi_n^\mu \right\}. \end{aligned}$$

Se a ação é invariante em relação às transformações definidas acima,

$$\frac{\partial S}{\partial\omega^n} = - \int d^4x \frac{\partial\theta_n^\mu}{\partial x^\mu} = 0,$$

onde

$$\theta_n^\mu(x) = - \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \left(\Phi_n - \phi_{,\nu} \chi_n^\nu \right) + \mathcal{L} \chi_n^\mu \right].$$

Como a região de intergração é arbitrária,

$$\frac{\partial \theta_n^\mu}{\partial x^\mu} = 0.$$

Isto é, há s leis de conservação, uma para cada parâmetro. Considere a quantidade

$$C_n = \int_\sigma d\sigma_\mu \theta_n^\mu,$$

onde $d\sigma_\mu$ é a projeção do elemento de área na superfície tridimensional perpendicular ao eixo x^μ . Assumindo que a região de integração é limitada apenas em direções tipo-tempo por superfícies tridimensionais tipo-espaço σ_1 e σ_2 e que o campo é nulo nos limites do volume espacial, segue do teorema de Gauss que

$$\int_{\sigma_1} d\sigma_\mu \theta_n^\mu - \int_{\sigma_2} d\sigma_\mu \theta_n^\mu = 0.$$

Ou seja, as integrais de superfície C_n são, na verdade, independentes de σ . No caso particular em que as superfícies são os planos $\{t = \text{constante}\}$, a integral é calculada sobre o volume espacial

$$C_n = \int d^3x \theta_n^0 = \text{independente do tempo}.$$

O teorema de Noether acaba de ser demonstrado: a cada simetria de S em relação a transformações contínuas de s parâmetros das coordenadas e do campo, correspondem s invariantes dinâmicos C_n ($n = 1, \dots, s$).

Considere como exemplo translações infinitesimais no espaço-tempo, $x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$, com $\chi_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu$ e $\Phi_\nu = 0$. Nesse caso, θ assume a forma

$$T_\nu^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \phi_{,\nu} - \mathcal{L} \delta_\nu^\mu \quad \text{ou} \quad T^{\mu\nu} = \eta^{\nu\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \phi_{,\alpha} - \mathcal{L} \eta^{\mu\nu}.$$

As integrais C^ν formam o 4-vetor $P^\nu = \int d^3x T^{0\nu}$, cujas componentes são

$$H = \int d^3x T^{00},$$

$$\vec{P} = \int d^3x T^{0i} \hat{x}_i.$$

Para compreender porque $T^{\mu\nu}$ é chamado tensor energia-momento, basta lembrar da definição de momento canonicamente conjugado segundo o formalismo hamiltoniano da mecânica clássica. O momento conjugado a ϕ é definido por

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}.$$

A densidade hamiltoniana \mathcal{H} é uma transformada de Legendre da densidade lagrangiana,

$$\mathcal{H} = \pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathcal{L},$$

e é imediato notar que esta é justamente a componente T^{00} do tensor energia-momento, isto é, que $T^{00} = \mathcal{H}$. T^{0i} é naturalmente associado ao momento⁴ uma vez que $T^{0\mu}$ é um 4-vetor assim como o vetor energia-momento.

2.1.3 Equação de Klein-Gordon

Considere um campo escalar⁵ $\phi(x)$ governado pela lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\eta^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - m^2 \phi^2 \right] = \frac{1}{2} \left[(\partial_t \phi)^2 - (\nabla \phi)^2 - m^2 \phi^2 \right].$$

A equação de Euler-Lagrange resultante do princípio da ação é dada por

$$\left(\square + m^2 \right) \phi(x) = 0,$$

onde $\square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$ é o operador de d'Alembert. Esta é a equação de Klein-Gordon.⁶ Tal equação é interpretada como a relação energia-momento,⁷ recorrente das substituições $E \rightarrow i\partial_t$ e $\vec{p} \rightarrow -i\nabla$,

$$\left[E^2 - \vec{p}^2 - m^2 \right] \phi(x) = 0.$$

⁴ Não confundir momento linear com momento canonicamente conjugado.

⁵ Isto é, $\phi(x) \rightarrow \phi'(x') = \phi(x)$ sob uma transformação de Lorentz $x \rightarrow x'$.

⁶ Note, no caso de $m = 0$, a semelhança entre a equação de Klein-Gordon e a equação do potencial eletromagnético livre, A_μ , no gauge de Lorentz. Veja, por exemplo, Griffiths (1981). Assim, a quantização do campo eletromagnético segue de forma análoga à quantização do campo escalar, exceto pela introdução de certos problemas decorrentes dos graus de liberdade adicionais, como a polarização. Veja, por exemplo, Mandl e Shaw (1984).

⁷ Isto é, todos os campos físicos conhecidos estão sujeitos a esta equação.

É fácil mostrar que a equação de Klein-Gordon é invariante em relação a transformações de Lorentz, $x \rightarrow x'$:

$$\begin{aligned} \left[\eta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} + m^2 \right] \phi(x) &= \left[\eta^{\mu\nu} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial}{\partial x'^\beta} + m^2 \right] \phi'(x') \\ &= \left[\eta^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial}{\partial x'^\beta} + m^2 \right] \phi'(x'). \end{aligned}$$

Solução Geral

A solução geral da equação de Klein-Gordon é uma sobreposição de ondas planas:

$$\phi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d^4k \tilde{\phi}(k) e^{ikx}.$$

Substituindo essa expansão na equação de Klein-Gordon, encontramos

$$\int d^4k \tilde{\phi}(k) (k^2 - m^2) e^{ikx} = 0,$$

o que mostra que $\tilde{\phi}(k)$ é da forma

$$\tilde{\phi}(k) = \varphi(k) \delta(k^2 - m^2),$$

onde $\varphi(k)$ é uma função arbitrária. A função delta simplesmente afirma que a solução de onda-plana da equação de Klein-Gordon deve obedecer à relação energia-momento, $k^2 - m^2 = 0$. Portanto, a integral em d^4k não é sobre todo o espaço 4-dimensional, mas somente sobre a superfície determinada por

$$k_0^2 - \vec{k}^2 - m^2 = 0,$$

onde escrevemos, por conveniência, $k^0 = k_0$. Assim, podemos escrever⁸

$$\begin{aligned} \phi(x) &= (2\pi)^{-3/2} \int d^4k \varphi(k) \delta(k^2 - m^2) e^{ikx} \\ &= (2\pi)^{-3/2} \int d^4k \varphi(k) \delta(k_0^2 - \omega_k^2) e^{ikx} \\ &= (2\pi)^{-3/2} \int d^4k \varphi(k) \frac{1}{2\omega_k} [\delta(k_0 - \omega_k) + \delta(k_0 + \omega_k)] e^{ikx} \\ &= (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3k}{2\omega_k} \left[\varphi^-(\omega_k, \vec{k}) e^{-i\omega_k x^0} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \varphi^+(\omega_k, \vec{k}) e^{i\omega_k x^0} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right], \end{aligned}$$

⁸ Empregamos a seguinte propriedade da função δ : seja f uma função arbitrária de raízes simples x_i ,

$$\delta(f(x)) = \sum_i \left| \frac{df}{dx}(x_i) \right|^{-1} \delta(x - x_i).$$

Para demonstrar esta relação, basta integrar ambos os lados sobre x e realizar uma mudança de variável, que gera um jacobiano, que por sua vez explica a origem de df/dx .

onde $\omega_k \equiv \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$. Considerando somente o campo escalar real, a solução pode ser reescrita:

$$\phi(x) = \int d^3k \left(a_k u_k + a_k^* u_k^* \right),$$

onde $u_k(x) = [(2\pi)^3 2\omega_k]^{-1/2} e^{-ikx}$, com $k^0 = +\omega_k$.

Os modos u_k e u_k^* são chamados modos de frequência positiva e negativa, respectivamente. Estes modos são autofunções do operador ∂_t :

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} = -i\omega_k u_k, \quad \frac{\partial u_k^*}{\partial t} = i\omega_k u_k^*.$$

Esta decomposição em modos de frequência positiva e negativa, básica a todos os campos relativísticos, é enraizada na natureza quadrática da relação energia-momento de Einstein. A base do espaço de soluções, $\{u_k, u_k^*\}$, é normalizada em relação ao produto escalar

$$(u_1, u_2) = -i \int d^3x \left(u_1 \overleftrightarrow{\partial}_t u_2^* \right) = -i \int d^3x \left(u_1 \frac{\partial u_2^*}{\partial t} - u_2^* \frac{\partial u_1}{\partial t} \right),$$

de forma que

$$\begin{aligned} (u_k, u_k^*) &= 0, \\ (u_k, u_{k'}) &= \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'), \\ (u_k^*, u_{k'}^*) &= -\delta^3(\vec{k} - \vec{k}'). \end{aligned}$$

Estas igualdades seguem imediatamente da definição da função delta,

$$(2\pi)^{-3} \int d^3x e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}').$$

Limite Não-Relativístico

É importante notar que a equação de Schrödinger é uma aproximação não-relativística da equação de Klein-Gordon,⁹ recorrente da relação energia-momento

$$E = \frac{p^2}{2m}.$$

Para verificar isso, considere uma solução da equação de Klein-Gordon. Vamos escrever explicitamente \hbar e c :

$$\phi(x) = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \left[(E_K + mc^2) t - \vec{k} \cdot \vec{x} \right] \right\} = \varphi(x) \exp \left(-\frac{i}{\hbar} mc^2 t \right),$$

⁹ Entretanto, $\phi(x)$ não pode ser interpretado como uma amplitude de probabilidade, como veremos logo a seguir. Este fato é uma das razões de ser da teoria quântica de campos: a possibilidade de descrever processos físicos em que o número de partículas não é conservado.

onde divimos a dependência temporal de ϕ em dois termos, com um deles contendo a massa de repouso. No limite não-relativístico, a energia cinética E_K de uma partícula é pequena em comparação com sua energia de repouso, $E_K \ll mc^2$, ou

$$\left| i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} \right| = E_K \phi \ll mc^2 \phi,$$

de forma que

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{i}{\hbar} mc^2 \phi \right) \exp \left(-\frac{i}{\hbar} mc^2 t \right) \approx -\frac{i}{\hbar} mc^2 \phi \exp \left(-\frac{i}{\hbar} mc^2 t \right),$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{i}{\hbar} mc^2 \phi \right) \exp \left(-\frac{i}{\hbar} mc^2 t \right) \right] \approx \left(-i \frac{2mc^2}{\hbar} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \phi \right) \exp \left(-\frac{i}{\hbar} mc^2 t \right).$$

A substituição de $\tilde{\phi}$ na equação de Klein-Gordon resulta em

$$-\frac{1}{c^2} \left(i \frac{2mc^2}{\hbar} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \phi \right) \exp \left(-\frac{i}{\hbar} mc^2 t \right) = \left(\nabla^2 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi \exp \left(-\frac{i}{\hbar} mc^2 t \right),$$

ou

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \phi.$$

Evidentemente, esta é a equação de Schrödinger para uma partícula escalar livre, como já era esperado.

Corrente Conservada

Assim como a equação de Schrödinger, a equação de Klein-Gordon define uma corrente conservada:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right) = \phi^* \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \phi \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial t^2} = \phi^* \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \phi^* = \nabla \cdot \left(\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^* \right),$$

o que pode ser escrito mais concisamente na forma de uma lei de conservação, $\partial_\mu j^\mu = 0$, com

$$j^k = \frac{-i}{2m} \left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial x^k} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial x^k} \right) \quad \text{e} \quad j^0 = \rho = \frac{i}{2m} \left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right).$$

A expressão para a corrente conservada é exatamente igual à expressão da corrente de probabilidade na mecânica quântica não-relativística. No entanto, ρ pode assumir valores negativos, o que significa que não pode representar uma densidade de probabilidade. Evidentemente, se ϕ é real, $j^\mu = 0$.

É possível mostrar que o campo eletromagnético se acopla naturalmente ao campo escalar complexo¹⁰ através de termos adicionais na densidade lagrangiana determinados pela invariância da ação sob transformações de gauge. Tais termos de acoplamento representam a interação entre o campo escalar complexo e o campo eletromagnético. ρ e \vec{j} são a densidade e a corrente de cargas elétricas, respectivamente. O campo escalar real por sua vez não interage com o campo eletromagnético, e descreve, portanto, partículas escalares neutras.

Energia e Momento

Conhecida a lagrangiana \mathcal{L} e a expressão de ϕ em termos de a_k e a_k^* , a energia e o momento associados ao campo podem ser calculados a partir da definição do tensor energia-momento,

$$H = \int d^3x \left[\pi \dot{\phi} - \mathcal{L} \right] = \frac{1}{2} \int d^3x \left[(\partial_t \phi)^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2 \right] = \int d^3k \frac{\omega_k}{2} \left[a_k^* a_k + a_k a_k^* \right],$$

$$\vec{P} = - \int d^3x \pi \nabla \phi = \int d^3k \frac{k^i}{2} \left[a_k^* a_k + a_k a_k^* \right].$$

Aqui, a_k e a_k^* são apenas funções e poderíamos escrever $a_k^* a_k + a_k a_k^* = 2a_k^* a_k$. Entretanto, após a quantização do campo, a_k e a_k^* serão operadores, a_k e a_k^\dagger , e não mais comutarão.

¹⁰Ryder (1985).

2.2 Quantização no Espaço-Tempo de Minkowski

2.2.1 Formalismo de Heisenberg

Até agora tratamos ϕ simplesmente como uma função definida no espaço-tempo, i. e. um campo, sujeita a equação dinâmica de Klein-Gordon. Com a quantização ϕ passa a ser um operador, na verdade um campo de operadores. Como ϕ é um operador dinâmico, o formalismo de Heisenberg é mais adequado para sua descrição. Vamos lembrar aqui como funciona este formalismo.

No formalismo de Schrödinger da mecânica quântica não-relativista, a evolução dinâmica de um sistema físico é descrita por um estado qualquer, $|\psi\rangle$, que obedece à equação de Schrödinger,

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = H|\psi\rangle,$$

onde H é o operador Hamiltoniano e gera translações infinitesimais do tempo. A solução da equação de Schrödinger é¹¹

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iH(t-t_o)}|\psi(t_o)\rangle = U(t, t_o)|\psi(t_o)\rangle.$$

$U(t, t_o)$ é o operador evolução temporal, que determina o estado $|\psi(t)\rangle$ em um instante t a partir de um estado inicial $|\psi(t_o)\rangle$ em um instante anterior t_o .

Sabemos que as previsões da mecânica quântica são expressas em termos de produtos escalares entre os estados ou em termos de elementos de matrizes dos operadores, quantidades invariantes em relação a transformações unitárias. A transformação pode ser escolhida de modo a tornar $|\psi_S(t)\rangle$ um ket independente do tempo.¹² Evidentemente, os observáveis passam a depender do tempo.

No formalismo de Heisenberg, tempo e espaço são tratados de forma mais simétrica, pois toda a dependência no espaço e no tempo, i. e. toda a dinâmica do sistema, está contida somente no operador. Isso o torna mais adequado em teorias relativistas. $U^\dagger(t, t_o)$ transforma um vetor $|\psi_S(t)\rangle$ em um vetor constante $|\psi_H\rangle$,

$$e^{iH(t-t_o)}|\psi_S(t)\rangle = |\psi_S(t_o)\rangle = |\psi_H\rangle.$$

¹¹Assumimos que H não depende explicitamente do tempo.

¹²Nesta sessão, vamos atribuir o índice S aos kets e aos operadores no formalismo Schrödinger e o índice H àqueles no formalismo de Heisenberg. Nas próximas sessões, somente o formalismo de Heisenberg será considerado, e o índice H deverá estar subentendido.

Isto é, o vetor de estado constante no formalismo de Heisenberg é igual a $|\psi_S(t)\rangle$ no instante t_0 . A transformada $Z_H(t)$ de um operador $Z_S(t)$ pode ser determinada lembrando-se que ambas as descrições devem ser equivalentes. Em particular, o valor esperado de Z deve ser o mesmo em ambos os casos,

$$\langle \psi_S(t) | Z_S(t) | \psi_S(t) \rangle = \langle \psi_H | e^{iH(t-t_0)} Z_S(t) e^{-iH(t-t_0)} | \psi_H \rangle \equiv \langle \psi_H | Z_H(t) | \psi_H \rangle,$$

de forma que

$$Z_H(t) = U^\dagger(t, t_0) Z_S(t) U(t, t_0).$$

Note que $Z_H(t)$ em geral depende do tempo ainda que $Z_S(t)$ seja constante. Entretanto, se $[Z_S, H] = 0$, então $Z_H(t) = Z_S(t)$. Em particular, o operador hamiltoniano é invariante, $H_H = H_S = H$.

Agora, os vetores de estado são constantes. A evolução é descrita por uma equação que governa a dinâmica dos operadores, a equação de Heisenberg: basta derivar a relação entre $Z_H(t)$ e $Z_S(t)$ para encontrar

$$\frac{dZ_H}{dt} = -i[Z_H, H] + \left(\frac{\partial Z_S}{\partial t} \right)_H.$$

2.2.2 Oscilador Harmônico Unidimensional

O oscilador harmônico simples é provavelmente o exemplo mais importante de um sistema físico com solução analítica exata. Seu estudo é a base da teoria quântica de campos, uma vez que a expansão em série de Fourier de um campo corresponde a uma soma infinita de osciladores harmônicos, cujas excitações são interpretadas como partículas. Já em teoria de matéria condensada, cristais podem ser descritos aproximadamente como um conjunto de osciladores harmônicos acoplados, cujas excitações correspondem aos chamados fônons, que descrevem o quantum de vibração. De fato, o oscilador harmônico descreve, pelo menos em primeira aproximação, qualquer sistema oscilatório, como átomos em um sólido, cordas, detectores de ondas gravitacionais, etc.

Na física clássica, um exemplo de oscilador harmônico é uma partícula de massa m a mover-se em uma certa direção x presa a uma mola de constante elástica k , de modo que a força exercida sobre a partícula é $F = -kx$. A função hamiltoniana é

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2,$$

onde p é o momento linear e $k = m\omega^2$.

A passagem da teoria clássica para a teoria quântica consiste na postulação das equações dinâmicas e da álgebra dos operadores, e na construção e interpretação física dos estados quânticos e observáveis. Em vez de resolver a equação de Schrödinger em termos de polinômios de Hermite, é mais conveniente trabalhar na representação de Heisenberg e definir as variáveis

$$a = x\sqrt{\frac{m\omega}{2}} + ip\sqrt{\frac{1}{2m\omega}} \quad \text{e} \quad a^\dagger = x\sqrt{\frac{m\omega}{2}} - ip\sqrt{\frac{1}{2m\omega}}.$$

x e p agora são operadores, $[x, p] = i$ e $[x, x] = [p, p] = 0$. Note que $a \neq a^\dagger$, isto é, a não é hermitiano, portanto, não representa um observável. Segue das relações de comutação de x e p que $[a, a^\dagger] = 1$ e $[a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0$. O operador hamiltoniano assume a forma

$$H = \frac{\omega}{2} (aa^\dagger + a^\dagger a) = \omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right).$$

Portanto, um autovetor de H é também um autovetor do operador hermitiano $N = a^\dagger a$, e segue da álgebra de a e a^\dagger que $[N, a^\dagger] = a^\dagger$ e $[N, a] = -a$. Agora vamos determinar o espectro de N .

Seja $|n\rangle$ um autoestado normalizado de N com autovalor n , $N|n\rangle = n|n\rangle$, temos

$$Na^\dagger|n\rangle = (a^\dagger N + a)|n\rangle = (n+1)a^\dagger|n\rangle,$$

$$Na|n\rangle = (aN - a)|n\rangle = (n-1)a|n\rangle.$$

Isto é, $a^\dagger|n\rangle$ é um autovetor de N com autovalor $n+1$; $a|n\rangle$ é um autovetor de N com autovalor $n-1$. Considere agora a norma do estado $a|n\rangle$,

$$0 \leq \|a|n\rangle\|^2 = \langle n|a^\dagger a|n\rangle = n\langle n|n\rangle,$$

segue que $n \geq 0$. n deve ser um número inteiro maior que ou igual a zero. Isto significa que a aplicação consecutiva do operador a em um estado qualquer $|n\rangle$ eventualmente produz um vetor tal $a|0\rangle = 0$. $|0\rangle$ é o chamado estado fundamental e não deve ser confundido com 0, o vetor zero no espaço de Hilbert. Todo o espectro de N (ou H) pode ser construído a partir de $|0\rangle$ com aplicações consecutivas de a^\dagger .

Se o estado $|n\rangle$ é normalizado, o quadrado da norma de $a^\dagger|n\rangle$ é

$$\langle n|aa^\dagger|n\rangle = \langle n|a^\dagger a + 1|n\rangle = n+1,$$

O primeiro estado excitado normalizado é $|1\rangle = a^\dagger|0\rangle$; o segundo estado excitado normalizado é $|2\rangle = (\sqrt{2})^{-1}a^\dagger a^\dagger|0\rangle$, e assim por indução,

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|0\rangle.$$

O estado fundamental é o estado com $n = 0$ e energia $\omega/2$. O primeiro estado excitado corresponde a $n = 1$, e assim por diante. O espectro de H é discreto e dado por $\omega(n+1/2)$. Os níveis de energia são espaçados uniformemente com separação ω , isto é, os operadores a^\dagger e a são operadores de criação e de destruição de um quantum de energia ω , respectivamente.

O hamiltoniano pode ser redefinido como $H' = H - \omega/2$, e suas excitações podem ser interpretadas como partículas de massa $m = \omega$ com velocidades desprezíveis. O estado fundamental é o estado em que não há partículas presentes, não há energia. Já o estado de n excitações, $|n\rangle$, apresenta n partículas, cada uma com energia m . a^\dagger transforma $|n\rangle$ em $|n+1\rangle$, a energia do sistema aumenta em m . a^\dagger cria uma partícula. Similarmente, a transforma $|n+1\rangle$ em $|n\rangle$. a destrói uma partícula. O operador número, $N = a^\dagger a$, conta o número de partículas. Se a atua no vácuo, $|0\rangle$, onde não há nenhuma partícula a ser destruída, o resultado deve ser zero, $a|0\rangle = 0$.

2.2.3 Quatização do Campo de Klein-Gordon

Em analogia com a mecânica quântica, são postuladas as relações de comutação entre o campo escalar e seu momento conjugado

$$[\phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}),$$

$$[\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{y}, t)] = [\pi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)] = 0.$$

Embora estas relações sejam definidas no mesmo instante de tempo, o que parece contrariar os princípios da relatividade, note que x^μ e y^μ são separados por uma distância tipo-espaço, $(x - y) < 0$, que é preservada sob transformações de Lorentz. Isso significa que a causalidade é respeitada, pois a medida de um observável não pode alterar a medida de outro em pontos do espaço-tempo separados por uma distância tipo-espaço.

Com estas relações e o operador hamiltoniano,

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x \left[(\partial_t \phi)^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2 \right],$$

são derivadas as equações de Heisenberg¹³

$$\dot{\phi}(x) = -i [\phi, H] = \pi(x),$$

¹³Para obter o operador ∇^2 , a relação de comutação entre ϕ e π foi diferenciada, $[\pi(x, t), \nabla' \phi(x', t)] = \nabla' [\pi(x, t), \phi(x', t)] = -i \nabla' \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$, seguida de uma integração por partes.

$$\dot{\pi}(x) = -i[\pi, H] = (\nabla^2 - m^2)\phi(x).$$

A primeira equação acima é simplesmente a definição do momento conjugado; a segunda é a própria equação de Klein-Gordon.

Com o objetivo de construir e interpretar os estados físicos, expandimos o campo escalar em termos das soluções clássicas da equação de Klein-Gordon,

$$\phi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}} \left(a_k e^{-ikx} + a_k^\dagger e^{ikx} \right).$$

$\phi(x)$ agora é um operador, assim como os coeficientes a_k e a_k^\dagger , e $\pi(x)$ é dado pela derivada de $\phi(x)$ com relação ao tempo,

$$\pi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}} \left(-i\omega_k a_k e^{-ikx} + i\omega_k a_k^\dagger e^{ikx} \right).$$

Agora, para escrever a_k e a_k^\dagger em termos de $\phi(x)$ e $\pi(x)$, podemos inverter a expansão em série de Fourier da solução, notando que

$$\begin{aligned} & \int d^3x e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \left[\omega_k \phi(x) + i\pi(x) \right] = \\ & \int d^3x e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3k'}{\sqrt{2\omega_{k'}}} \left\{ (\omega_k + \omega_{k'}) a_{k'} e^{-ik'x} + (\omega_k - \omega_{k'}) a_{k'}^\dagger e^{ik'x} \right\} = \\ & (2\pi)^{3/2} \int \frac{d^3k'}{\sqrt{2\omega_{k'}}} \left\{ (\omega_k + \omega_{k'}) a_{k'} e^{-i\omega_{k'}t} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') + (\omega_k - \omega_{k'}) a_{k'}^\dagger e^{i\omega_{k'}t} \delta^3(\vec{k} + \vec{k}') \right\} = \\ & (2\pi)^{3/2} (2\omega_k)^{1/2} a_k e^{-i\omega_k t}, \end{aligned}$$

portanto,

$$a_k = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3x}{\sqrt{2\omega_k}} e^{ikx} \left[\omega_k \phi(x) + i\pi(x) \right].$$

Os comutadores de ϕ e π determinam a álgebra de a_k e de a_k^\dagger :

$$\begin{aligned} [a_k, a_{k'}^\dagger] &= (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3x}{\sqrt{2\omega_k}} \int \frac{d^3y}{\sqrt{2\omega_{k'}}} e^{ikx} e^{-ik'y} \left[\omega_k \phi(\vec{x}, t) + i\pi(\vec{x}, t), \omega_{k'} \phi(\vec{y}, t) - i\pi(\vec{y}, t) \right] \\ &= \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'). \end{aligned}$$

Similarmente, $[a_k, a_{k'}] = [a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger] = 0$.

A função hamiltoniana em termos de a_k e a_k^\dagger é dada por

$$H = \int d^3k \frac{\omega_k}{2} \left[a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger \right] = \int d^3k \omega_k \left[a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right].$$

Como podemos ver, H corresponde a uma soma contínua de hamiltonianos de osciladores harmônicos, um oscilador para cada k . O campo de Klein-Gordon equivale a uma soma

de infinitos osciladores. O termo divergente, proporcional a $\int d^3k \omega_k$, é resultado da soma das energias do estado fundamental de cada oscilador em cada ponto do espaço-tempo.

Comparando os comutadores de a_k e a_k^\dagger com os comutadores do oscilador harmônico, observamos que a_k^\dagger é um operador de criação, enquanto a_k é um operador de destruição. a_k^\dagger cria uma partícula de energia ω_k e momento \vec{k} ; a_k aniquila tal partícula. O estado fundamental, $|0\rangle$, é o vetor no espaço de estados tal que $a_k|0\rangle = 0$: não há partículas presentes.¹⁴ $a_k^\dagger|0\rangle$ apresenta uma partícula com energia ω_k e momento \vec{k} , e assim por diante. Um estado normalizado arbitrário, $\langle^i n_{k_r} |^j n_{k_s}\rangle = \delta_{ij} \delta_{k_r k_s}$, com ${}^1 n$ partículas com momento k_1 , ${}^2 n$ partículas com momento k_2 , etc., tem a forma

$$|^1 n_{k_1}, {}^2 n_{k_2}, \dots\rangle = ({}^1 n! {}^2 n! \dots)^{-1/2} (a_{k_1}^\dagger)^{{}^1 n} (a_{k_2}^\dagger)^{{}^2 n} \dots |0\rangle = \prod_{i_n} (i_n!)^{-1/2} (a_{k_i}^\dagger)^{i_n} |0\rangle.$$

Esta representação do espaço de Hilbert é chamada representação de Fock.¹⁵ Como no caso do oscilador harmônico, definimos o operador número de partículas no modo k ,

$$N_k = a_k^\dagger a_k,$$

que determina a quantidade de partículas com energia ω_k e momento \vec{k} ,

$$\langle 0 | N_k | 0 \rangle = 0, \quad \forall k,$$

$$\langle {}^1 n_{k_1}, {}^2 n_{k_2}, \dots | N_{k_i} | {}^1 n_{k_1}, {}^2 n_{k_2}, \dots \rangle = i n.$$

Evidentemente, o número total de partículas, representado pelo operador

$$N_k = \int d^3k a_k^\dagger a_k,$$

¹⁴Neste estado, o valor esperado de um operador de campo é nulo, $\langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle = 0$. Entretanto, a média quadrática do operador é diferente de zero, $\langle 0 | \phi^2(x) | 0 \rangle \neq 0$. Esta média quadrática, ou flutuação quântica do vácuo, é responsável por efeitos físicos observáveis, como o efeito Casimir no caso do campo eletromagnético.

¹⁵No caso de campos de spin inteiro, as relações de comutação não determinam nenhum limite sobre os valores de n_k . Qualquer número de partículas pode ocupar o mesmo modo. Estas partículas são chamadas bósons. Já no caso de campos de spin semi-inteiro, as relações de (anti) comutação determinam que a aplicação consecutiva de dois operadores de criação correspondentes ao mesmo modo resulta em zero, $a_k^\dagger a_k^\dagger |\psi\rangle = 0$, onde $|\psi\rangle$ é um estado qualquer. Portanto, é impossível criar mais de uma partícula no mesmo modo, e n_k pode assumir apenas os valores 0 ou 1. Este é o princípio da exclusão de Pauli, válido apenas para estas partículas de spin semi-inteiro chamadas férmions. É interessante lembrar ainda que a_k^\dagger cria uma partícula com momento bem definido, portanto, sua localização, pelo princípio da incerteza, é completamente desconhecida.

é

$$\langle N \rangle = \sum_i n_i.$$

A energia associada ao estado de vácuo, $|0\rangle$, a soma das energias de ponto-zero de cada oscilador harmônico, é divergente,

$$\langle 0|H|0\rangle = \frac{1}{2} \int d^3k \omega_k.$$

Isto é, uma vez que ω não tem um limite superior, a energia do estado fundamental pode ser infinita. Essa divergência pode ser simplesmente removida, já que a energia absoluta não pode ser medida, ao subtrair-se da escala de energia a constante infinita, $H \rightarrow H - \langle 0|H|0\rangle$. A energia de ponto-zero surge quando os operadores de criação e de aniquilação são comutados na hamiltoniana. Conseqüentemente, subtrair essa constante infinita equivale a mover todos os operadores de criação a esquerda dos operadores de aniquilação. Este procedimento é chamado “ordenamento normal”, e é geralmente indicado com dois pontos em ambos os lados de qualquer produto de operadores,

$$: a_k a_k^\dagger : = : a_k^\dagger a_k : = a_k^\dagger a_k.$$

Com o ordenamento normal,

$$H \rightarrow :H: = \int d^3k \omega_k a_k^\dagger a_k,$$

e o valor esperado da energia do vácuo é igual a zero, $\langle 0|:H:|0\rangle = 0$.

2.2.4 Álgebra de Operadores e Causalidade

Na sessão anterior, as relações de comutação entre os campos de operadores foram postuladas em instantes de tempo iguais, mas com a expansão de ϕ em termos de a e a^\dagger , o cálculo de $[\phi(x), \phi(y)]$ em instantes distintos é imediato:

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi(y)] &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2\omega_p}} \int \frac{d^3q}{\sqrt{2\omega_q}} \left\{ e^{-ipx+iqy} [a_p, a_q^\dagger] + e^{+ipx-iqy} [a_p^\dagger, a_q] \right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2\omega_p} \left[e^{-ip(x-y)} - e^{+ip(x-y)} \right] \\ &= -\frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{\omega_p} \text{sen } p(x-y) \\ &\equiv i\Delta(x-y). \end{aligned}$$

Vejamos algumas propriedades da função Δ ,

$$\Delta(x) = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2\omega_p} [e^{-ipx} - e^{ipx}].$$

1. $\Delta(x)$ é claramente invariante de Lorentz, pois $px = p_\mu x^\mu$ e $\omega_p^{-1} d^3p$ são invariantes.
2. $\Delta(x)$ é uma função ímpar: $\Delta(-x) = -\Delta(x)$.
3. $\Delta(x)$ é solução da equação de Klein-Gordon, pois é uma soma de suas soluções.
4. $\Delta(x) = 0$ se x é tipo-espaço. Esta propriedade é consequência das duas primeiras. Se x é tipo-espaço, há um sistema de coordenadas em que $x^{0'} = 0$. A invariância de Lorentz exige que $\Delta(x) = \Delta(x')$. Se $x' = (0, \vec{x}')$, há uma rotação espacial que transforma \vec{x}' em $-\vec{x}'$, de forma que

$$\Delta(x) = \Delta(x') = \Delta(-x') = -\Delta(x') = 0.$$

$\phi(x)$ e $\phi(y)$ comutam quando x e y são separados por intervalos tipo-espaço. Esta propriedade, chamada microcausalidade, significa que nenhuma perturbação pode se propagar com uma velocidade maior que a velocidade da luz. Ou seja, podemos fazer medidas simultâneas precisas dos campos nestes pontos, x e y , sem que uma medida perturbe a outra. Note que isso é verdade somente porque há uma soma de ondas planas com frequências positivas e negativas. Se ignorássemos as ondas com frequências negativas, Δ não seria mais nulo em separações do tipo espaço, e seria possível propagar sinais mais velozes que a luz. A invariância de Lorentz também é importante: significa que o método da quantização canônica é covariante.

É interessante aqui definir uma nova função, que será útil em breve,

$$\Delta_R(x - y) = \theta(x^0 - y^0)\Delta(x - y), \quad \text{onde} \quad \theta(x^0 - y^0) = \begin{cases} 1, & \text{se } x^0 - y^0 > 0 \\ 0, & \text{se } x^0 - y^0 < 0 \end{cases}.$$

$\Delta_R(x)$ é igual a $\Delta(x)$ em regiões no interior do cone de luz futuro e se anula em outras regiões. Observe que

$$\begin{aligned}
\left[\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2\right]\Delta_R(x-y) &= -\left[\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2\right]i\theta(x^0 - y^0)[\phi(x), \phi(y)] \\
&= -i\theta(x^0 - y^0)\left[\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2\right][\phi(x), \phi(y)] + \\
&\quad -i[\phi(x), \phi(y)]\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\theta(x^0 - y^0) + \\
&\quad -2i\eta^{\mu\nu}\left[\partial_\mu\theta(x^0 - y^0)\right]\left[\partial_\nu[\phi(x), \phi(y)]\right] \\
&= -i[\phi(x), \phi(y)]\partial_t^2\theta(x^0 - y^0) + \\
&\quad -2i\left[\partial_t\theta(x^0 - y^0)\right]\left[\partial_t[\phi(x), \phi(y)]\right] \\
&= -i\partial_t\left[[\phi(x), \phi(y)]\delta(x^0 - y^0)\right] + \\
&\quad +i\delta(x^0 - y^0)[\pi(x), \phi(y)] - 2i\delta(x^0 - y^0)[\pi(x), \phi(y)] \\
&= -\delta^4(x-y).
\end{aligned}$$

Isto é, $\Delta_R(x-y)$ é uma função de Green do operador de Klein-Gordon, chamada função de Green retardada porque é nula para $x^0 < y^0$.

2.2.5 Causalidade e Antipartículas

A introdução da invariância de Lorentz na mecânica quântica traz consigo a noção de causalidade. Operadores locais que representam quantidades fisicamente mensuráveis devem comutar em separações tipo-espaço. As soluções de ondas com frequências negativas não podem ser ignoradas, o que, por sua vez, introduz as chamadas antipartículas e os fenômenos de criação e aniquilação de partículas.

Entretanto, precisamos interpretar o que seria uma partícula com energia negativa. Além disso, o espectro de energia não possui um limite inferior. Uma partícula poderia emitir uma quantidade infinita de energia, saltando para estados de energia cada vez mais negativa. Evidentemente, isso não acontece. Considere a onda plana de energia negativa

$$e^{i(\omega t + \vec{k}\cdot\vec{x})}.$$

Observe que se a direção do tempo for invertida, $t \rightarrow -t$, as soluções de energia negativa se tornam soluções de energia positiva. Então, para evitar o problema da energia negativa, as soluções de frequência negativa devem se propagar somente voltando no tempo. Matematicamente, é exatamente isso que acontece. O propagador de Feynman do operador de

Klein-Gordon é dado por¹⁶

$$\begin{aligned}\Delta_F(x-x') &= -i\theta(t-t')(2\pi)^{-3} \int \frac{d^3p}{2\omega_p} e^{-ip(x-x')} \\ &\quad -i\theta(t'-t)(2\pi)^{-3} \int \frac{d^3p}{2\omega_p} e^{ip(x-x')}.\end{aligned}$$

Isto é, as soluções de energia positiva se propagam avançando no tempo, mas as soluções de energia negativa se propagam voltando no tempo.

Certos atributos de uma partícula mudam quando o sentido de propagação no tempo é invertido. Por exemplo, um elétron voltando no tempo equivale a um pósitron avançando no tempo. Assim, partículas com energia negativa voltando no tempo podem ser reinterpretadas como partículas com energia positiva de mesma massa, mas carga elétrica e outros números quânticos opostos, avançando no tempo. As soluções de frequência negativa descrevem matematicamente antipartículas. Considerando o campo escalar real, que descreve partículas eletricamente neutras, partículas e antipartículas são indistinguíveis. Entretanto, a introdução do conceito de antipartículas permite uma reinterpretação da densidade conservada na equação de Klein-Gordon para o campo escalar complexo como uma densidade de carga elétrica. Obviamente, o fato de que essa densidade pode assumir valores negativos é consistente com a existência de cargas elétricas positivas e negativas.

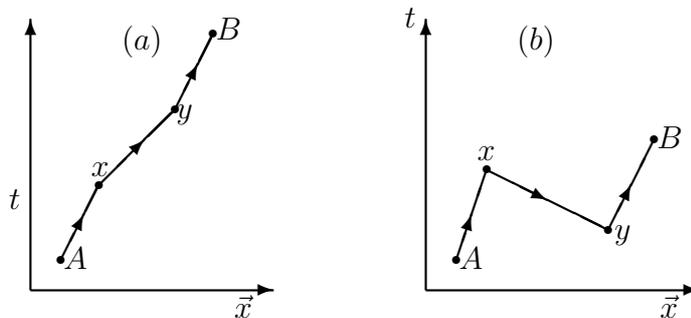


Figura 2.1: (a) Estado intermediário entre x e y envolve uma partícula. (b) Estado intermediário entre x e y envolve uma antipartícula.

Em relação a processos de criação e de destruição de partículas, considere a propagação de uma partícula, que interage duas vezes no caminho, entre os pontos A e B como ilustrado na figura 3.1. Em 3.1(a), há somente uma partícula em qualquer instante de tempo. Em 3.1(b), há inicialmente uma partícula, em y ocorre a criação de um par

¹⁶Veja, por exemplo, Kaku (1993).

partícula-antipartícula, e em x ocorre uma aniquilação: entre os instantes y^0 e x^0 há duas partículas e uma antipartícula; após o instante x^0 , há novamente apenas uma partícula. Considere especificamente a propagação da partícula com energia negativa de x a y na figura 3.1(b). Esta partícula se propaga voltando no tempo: $\phi(x)$ a emite em x , $\phi(y)$ a absorve em y . A criação de uma partícula com energia negativa reduz a energia do sistema, assim como a aniquilação de uma partícula com energia positiva. A propagação de partículas com energia negativa é, portanto, inteiramente equivalente à propagação de antipartículas com energia positiva, e nada mais é que uma descrição matemática das antipartículas. As soluções de frequência negativa estão associadas a operadores de aniquilação de partículas: ao destruir partículas, o efeito do operador de aniquilação é reduzir a energia do sistema. Evidentemente, não há partículas livres com energia negativa na natureza.¹⁷

Note que o hamiltoniano do campo de Klein-Gordon é sempre maior ou igual a zero,

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x \left[(\partial_t \phi)^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2 \right],$$

apesar das soluções de energia negativa. Diz-se que os campos são mais fundamentais que as partículas em teoria quântica de campos. De fato, o conceito de partícula, representações do Grupo de Poincaré no espaço-tempo de Minkowski, não é bem definido na presença de campos gravitacionais, como veremos nos capítulos seguintes.

2.2.6 Criação de Partículas por uma Fonte Externa

Evidentemente o efeito de criação de partículas não ocorre somente na presença de campos gravitacionais. Já é bem conhecido o fato de que o vácuo quântico é instável em relação à criação de pares de partículas na presença de campos externos.¹⁸

Até aqui, consideramos apenas o campo escalar livre. Vamos estudar agora um exemplo simples de criação de partículas por um campo externo. Considere o campo escalar, inicialmente no estado de vácuo, acoplado a uma fonte clássica $j(x)$,

$$\left[\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + m^2 \right] \phi(x) = j(x),$$

¹⁷Em teoria quântica de campos, uma interação ocorre em um único ponto do espaço-tempo. Portanto, perguntar em quanto tempo ocorre uma certa interação é tão sem sentido quanto perguntar o caminho percorrido por uma partícula em mecânica quântica não-relativística. Berestetskii, Lifshitz e Pitaevskii (1982). Neste exemplo em particular, as partículas podem ser consideradas livres exceto em x e y .

¹⁸Gavrilo e Gitman (1996). Brout et al. (1995).

onde $j(x)$ é uma função conhecida e diferente de zero somente em um intervalo finito de tempo. Essa condição faz o papel de regularização e ajuda a resolver divergências que aparecem em campos externos constantes.¹⁹ A solução geral nesse caso é dada pela solução da equação homogênea correspondente somada à solução construída a partir da função de Green retardada:

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \phi_0(x) - (2\pi)^{3/2} \int d^4y \Delta_R(x-y) j(y) \\ &= \phi_0(x) + i(2\pi)^{-3/2} \int d^4y \int \frac{d^3p}{2\omega_p} \theta(x^0 - y^0) \left[e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)} \right] j(y),\end{aligned}$$

onde a constante $(2\pi)^{3/2}$ foi inserida no segundo termo por conveniência e

$$\phi_0(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2\omega_p}} (a_p e^{-ipx} + a_p^\dagger e^{ipx}).$$

Quando a fonte $j(x)$ é desligada, $\theta = 1$ e a solução assume a forma

$$\phi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2\omega_p}} \left\{ \left[a_p + \frac{i}{\sqrt{2\omega_p}} \tilde{j}(p) \right] e^{-ipx} + \left[a_p^\dagger - \frac{i}{\sqrt{2\omega_p}} \tilde{j}^*(p) \right] e^{ipx} \right\},$$

onde $\tilde{j}(p) = \int d^4y j(y) \exp(ipy)$ é avaliado em $p^2 = m^2$.

A função hamiltoniana é dada por²⁰

$$H = \int d^3p \omega_p \left[a_p^\dagger - \frac{i}{\sqrt{2\omega_p}} \tilde{j}^*(p) \right] \left[a_p + \frac{i}{\sqrt{2\omega_p}} \tilde{j}(p) \right],$$

A energia do sistema após a fonte ser desligada é

$$\langle 0|H|0\rangle = \int \frac{d^3p}{2} |\tilde{j}(p)|^2.$$

$(2\omega_p)^{-1} |\tilde{j}(p)|^2$ pode ser interpretado como a densidade de probabilidade de criação de uma partícula com energia ω_p e momento \vec{p} . O número esperado de partículas produzidas é

$$N = \int \frac{d^3p}{2\omega_p} |\tilde{j}(p)|^2.$$

¹⁹Gavrilov e Gitman (1996).

²⁰Basta substituir a_p por $a_p + i(2\omega_p)^{-1/2} \tilde{j}(p)$ na hamiltoniana do caso livre, ou simplesmente calcular a partir da densidade lagrangiana que gera a equação de campo,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[(\partial_t \phi)^2 - (\nabla \phi)^2 - m^2 \phi^2 \right] + j(x) \phi(x).$$

É interessante notar que somente os componentes de Fourier de $j(x)$ em ressonância com as ondas de Klein-Gordon ($p^2 = m^2$) são responsáveis pela produção de partículas. Isso já era esperado, pois toda partícula real está sujeita a essa condição, $p^2 = m^2$. A produção de partículas é possível por causa da degenerescência do estado de vácuo, a conservação de energia é preservada. As flutuações quânticas do vácuo entram em ressonância com estados que contêm partículas.

2.3 Quantização em Espaços Curvos

2.3.1 Equação de Klein-Gordon

Em um espaço-tempo curvo, a generalização mais simples da lagrangiana do campo escalar é dada por²¹

$$\mathcal{L} = \frac{\sqrt{g}}{2} \left[g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - (m^2 + \xi R) \phi^2 \right]$$

onde $g = |\det g^{\mu\nu}|$, R é o escalar de curvatura e ξ é um número adimensional chamado de termo de acoplamento entre o campo escalar e o campo gravitacional. Este termo viola o princípio da equivalência forte, segundo o qual nenhum efeito local da gravidade pode ser detectado por um observador inercial. Entretanto, a curvatura não é nula em um referencial inercial²² e, portanto, influencia o comportamento dos campos acoplados. Não há como determinar o valor de ξ teoricamente, mas podemos tomar ξ simplesmente como um parâmetro que especifique nosso modelo, assim como m . Somente observações poderão determinar o valor de ξ .

A equação de Klein-Gordon resultante da lagrangiana acima é

$$\left(\square + m^2 + \xi R \right) \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{g}} (\sqrt{g} g^{\mu\nu} \phi_{,\mu})_{,\nu} + (m^2 + \xi R) \phi = 0.$$

ξ induz uma correção de massa proporcional ao escalar de curvatura. O caso particular em que $\xi = 0$ é chamado de acoplamento mínimo. Outro caso de especial importância ocorre quando

$$\xi = \frac{1}{4} \frac{n-2}{n-1},$$

onde n é a dimensão do espaço-tempo. Neste caso, dizemos que o acoplamento é conforme, pois a equação de Klein-Gordon se torna invariante²³ sob transformações con-

²¹Lembre-se que a primeira derivada covariante de um campo escalar é igual à sua derivada comum.

²²A curvatura é uma propriedade intrínseca do espaço-tempo e não depende do observador

²³Birrel e Davies (1984).

formas, quando $m = 0$. Uma transformação conforme é uma transformação do tipo $g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \bar{g}_{\mu\nu}(x) = \Omega^2(x)g_{\mu\nu}(x)$, onde Ω é uma função arbitrária contínua. Evidentemente, em modelos de duas dimensões, $n = 2$, não há diferença entre acoplamento mínimo e acoplamento conforme. A simetria conforme simplifica o estudo de campos em um espaço-tempo conformemente plano, em que a métrica pode ser escrita na forma $g_{\mu\nu}(x) = \Omega^2(x)\eta_{\mu\nu}$, como o universo de Friedmann, por exemplo.

Como no espaço de Minkowski, as soluções da equação de Klein-Gordon em um espaço curvo definem um produto escalar,

$$\begin{aligned} (u, v) &= -i \int d\Sigma^\mu \sqrt{g_\Sigma} \left(u \overleftrightarrow{\partial}_\mu v^* \right) \\ &= -i \int d\Sigma^\mu \sqrt{g_\Sigma} \left(u v^*_{,\mu} - u_{,\mu} v^* \right), \end{aligned}$$

onde $d\Sigma^\mu = \eta^\mu d\Sigma$, sendo $d\Sigma$ o elemento de volume em uma hipersuperfície tipo-espaço Σ , η^μ é um vetor unitário orientado para o futuro e ortogonal a Σ , e g_Σ é o determinante da parte espacial da métrica em Σ . O produto interno de duas soluções da equação de Klein-Gordon é conservado, isto é, não depende de Σ ,

$$(u, v)_{\Sigma_1} = (u, v)_{\Sigma_2}.$$

A demonstração dessa propriedade é imediata. Sejam u e v duas soluções que se anulem no infinito espacial (se o espaço for compacto, podemos impor fronteiras tipo-tempo em que $u = v = 0$), e seja V o volume limitado por Σ_1 e Σ_2 , podemos escrever

$$(u, v)_{\Sigma_1} - (u, v)_{\Sigma_2} = -i \oint_{\partial V} d\Sigma^\mu \sqrt{g_\Sigma} (u \overleftrightarrow{\partial}_\mu v^*) = -i \int_V dV g^{\mu\nu} (u \overleftrightarrow{\partial}_\mu v^*)_{;\nu},$$

onde o último passo segue da lei de Gauss²⁴. Como u e v são soluções da equação de campo, este integrando é nulo,

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} (u \overleftrightarrow{\partial}_\mu v^*)_{;\nu} &= g^{\mu\nu} (u v^*_{,\mu} - u_{,\mu} v^*)_{;\nu} \\ &= u g^{\mu\nu} v^*_{;\mu;\nu} - v^* g^{\mu\nu} u_{;\mu;\nu} \\ &= -u (m^2 + \xi R) v^* + v^* (m^2 + \xi R) u \\ &= 0, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração.

²⁴Veja, por exemplo, Hawking & Ellis (1973).

Uma outra propriedade importante da equação de Klein-Gordon é que o problema de Cauchy com dados iniciais (ϕ, π) em uma superfície de Cauchy Σ está bem colocado.²⁵ De fato, podemos escrever

$$\phi(t, \vec{x}) = - \int_{\Sigma} d^{n-1}y \left[G(x, y) \pi(0, \vec{y}) - \sqrt{g} g^{0\mu}(y) \frac{\partial}{\partial y^\mu} G(x, y) \phi(0, \vec{y}) \right],$$

onde G satisfaz a igualdade

$$(\square + m^2 + \xi R) G = \frac{\delta(x - y)}{\sqrt{g}}.$$

Isto é, os valores iniciais de ϕ e π arbitrariamente especificados em uma superfície Σ determinam a evolução subsequente de ϕ . As soluções dependem continuamente destes dados iniciais: pequenas variações nos dados iniciais produzem pequenas variações correspondentes na solução em qualquer região do espaço-tempo. Além disso, a causalidade é respeitada: uma variação dos dados iniciais em uma região externa a Σ não afeta a solução em $J^+(\Sigma)$, o futuro causal de Σ .²⁶

2.3.2 Coeficientes de Bogoliubov

A construção de uma teoria quântica em um espaço-tempo curvo segue analogamente o formalismo no espaço-tempo de Minkowsky: o estudo das equações dinâmicas e da álgebra dos operadores; a construção e a interpretação física dos estados e dos observáveis.

A dinâmica do campo escalar é governada pela densidade lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sqrt{g} \left[g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - (m^2 + \xi R) \phi^2 \right],$$

de forma que equação de Klein-Gordon segue do princípio da ação. O momento canonicamente conjugado a $\phi(x)$ é dado por

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\phi_{,0})} = \sqrt{g} g^{0\mu} \phi_{,\mu}.$$

²⁵Uma superfície de Cauchy é uma superfície tipo-espaço interceptada exatamente uma vez por cada curva causal inextensível em \mathcal{M} . Um espaço-tempo que possui uma superfície de Cauchy é denominado globalmente hiperbólico (Fulling, 1989). Um espaço-tempo globalmente hiperbólico de dimensão $n + 1$ pode ser folheado em subvariedades n -dimensionais descritas por um único parâmetro, que podemos chamar de tempo (Misner, Thorne and Wheeler, 1973). Isto é, podemos assumir que superfícies de Cauchy são representadas localmente por equações do tipo $t = \text{constante}$.

²⁶O futuro causal de Σ é o conjunto de todos os pontos ligados a partir de Σ por uma curva tipo-tempo ou tipo-luz apontada para o futuro.

A álgebra dos operadores agora é dada por

$$[\phi(x^0, x^i), \phi(x^0, x'^i)]_\Sigma = [\pi(x^0, x^i), \pi(x^0, x'^i)]_\Sigma = 0,$$

$$[\phi(x^0, x^i), \pi(x^0, x'^i)]_\Sigma = i\delta^{n-1}(x^i - x'^i), \quad \text{onde} \quad \int d\Sigma \delta^{n-1}(x^i - x'^i) = 1.$$

As relações de comutação não dependem da superfície tipo-espaço Σ escolhida. A construção do espaço de Fock segue como no espaço-tempo de Minkowski.

Existe, entretanto, uma ambigüidade inerente a este formalismo, referente à escolha de uma representação particular. As relações de comutação definem o conjunto de variáveis canônicas para um problema particular: são relações algébricas independentes da função hamiltoniana, isto é, da dinâmica. Estas variáveis definem completamente o sistema a cada momento, no sentido de que qualquer quantidade física pode ser expressa em termos das mesmas. Entretanto, a fim de determinar a evolução dinâmica, é necessário representar as variáveis canônicas como operadores em um espaço de Hilbert sujeitos às equações de Heisenberg.

Em mecânica quântica não relativística, isto é, para sistemas com um número finito de graus de liberdade, a escolha da representação é irrisória, uma vez que todas as representações irredutíveis das relações canônicas de comutação são unitariamente equivalentes. Este é o famoso teorema de Von Neumann. A escolha de uma representação particular se reduz a uma questão de conveniência.

Em sistemas com infinitos de graus de liberdade, como na teoria quântica de campos, o teorema de Von Neumann não se aplica, e a escolha de uma representação particular da álgebra de campos de operadores pode ter um significado físico, devido à existência de representações não equivalentes.

As transformações de Bogoliubov são transformações lineares entre bases de expansão de um campo de operadores de tal forma que as relações canônicas de comutação sejam preservadas, sendo por isso também chamadas de transformações canônicas. O cálculo dos coeficientes de Bogoliubov é um meio analítico de verificar a equivalência, ou não, entre duas representações, particularmente, entre estados de vácuo em relação a dois observadores distintos.

Considere, portanto, dois conjuntos ortonormais completos, $\{u_i(x), u_i^*(x)\}$ e $\{v_i(x), v_i^*(x)\}$, a princípio distintos, de forma que o campo $\phi(x)$ possa ser expandido em uma ou outra

base,²⁷

$$\phi(x) = \sum_i \left[a_i u_i(x) + a_i^\dagger u_i^*(x) \right] \quad \text{e} \quad \phi(x) = \sum_j \left[b_j v_j(x) + b_j^\dagger v_j^*(x) \right].$$

Cada decomposição define um estado de vácuo, $|0\rangle$ e $|\bar{0}\rangle$, isto é,

$$a_i|0\rangle = 0, \forall i \quad \text{e} \quad b_j|\bar{0}\rangle = 0, \forall j, \quad \text{e, em geral,} \quad b_j|0\rangle \neq 0 \quad \text{e} \quad a_i|\bar{0}\rangle \neq 0.$$

Assim, podemos construir dois espaços de Fock a princípio distintos. Como os conjuntos $\{u_i(x), u_i^*(x)\}$ e $\{v_j(x), v_j^*(x)\}$ são completos, podemos escrever os modos $\{v_j(x), v_j^*(x)\}$ como combinações lineares dos modos $\{u_i(x), u_i^*(x)\}$,

$$v_j(x) = \sum_i \left[\alpha_{ji} u_i(x) + \beta_{ji} u_i^*(x) \right] \quad \text{e, inversamente,} \quad u_i(x) = \sum_j \left[\alpha_{ji}^* v_j(x) - \beta_{ji} v_j^*(x) \right].$$

Estas são as transformações de Bogoliubov e os elementos das matrizes α_{ij} e β_{ij} são os coeficientes de Bogoliubov, que podem ser calculados a partir dos produtos internos entre os modos,

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= (v_i, u_j) \\ \beta_{ij} &= - (v_i, u_j^*). \end{aligned}$$

Os coeficientes de Bogoliubov têm as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} \sum_k \left(\alpha_{ik} \alpha_{jk}^* - \beta_{ik} \beta_{jk}^* \right) &= \delta_{ij} \\ \sum_k \left(\alpha_{ik} \beta_{jk} - \beta_{ik} \alpha_{jk} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Com estes coeficientes podemos escrever os operadores a_j e a_j^\dagger como combinações lineares de b_j e b_j^\dagger :

$$\begin{aligned} \sum_i \left[a_i u_i(x) + a_i^\dagger u_i^*(x) \right] &= \sum_j \left[b_j v_j(x) + b_j^\dagger v_j^*(x) \right] \\ &= \sum_j \left\{ b_j \sum_i \left[\alpha_{ji} u_i(x) + \beta_{ji} u_i^*(x) \right] + b_j^\dagger \sum_i \left[\alpha_{ji}^* u_i^*(x) + \beta_{ji}^* u_i(x) \right] \right\} \\ &= \sum_{i,j} \left[\left(\alpha_{ji} b_j + \beta_{ji}^* b_j^\dagger \right) u_i(x) + \left(\beta_{ji} b_j + \alpha_{ji}^* b_j^\dagger \right) u_i^*(x) \right], \end{aligned}$$

²⁷Evidentemente, deve estar subentendido que, no caso de índices contínuos, a soma deve ser substituída por uma integral.

de forma que

$$a_i = \sum_j \left(\alpha_{ik} b_j + \beta_{ji}^* b_j^\dagger \right) \quad \text{e, analogamente,} \quad b_j = \sum_i \left(\alpha_{ji}^* a_i - \beta_{ji}^* a_i^\dagger \right).$$

Segue imediatamente que os espaços de Fock gerados por $\{u_i(x), u_i^*(x)\}$ e $\{v_i(x), v_i^*(x)\}$ não são equivalentes se $\beta_{ji} \neq 0$. Em particular, o estado de vácuo dos modos $\{u_i(x), u_i^*(x)\}$, $|0\rangle$, não corresponde ao estado de vácuo dos modos $\{v_i(x), v_i^*(x)\}$, $|\bar{0}\rangle$,

$$a_i |\bar{0}\rangle = \sum_j \beta_{ji}^* b_j^\dagger |\bar{0}\rangle \neq 0.$$

O valor esperado do operador número de partículas associadas aos modos $\{u_i(x), u_i^*(x)\}$, $N_i = a_i^\dagger a_i$, no estado $|\bar{0}\rangle$ é

$$\langle \bar{0} | N_i | \bar{0} \rangle = \sum_j |\beta_{ji}|^2,$$

o que significa que o vácuo associado aos modos $\{v_i(x), v_i^*(x)\}$ contém $\sum_j |\beta_{ji}|^2$ partículas associadas aos modos $\{u_i(x), u_i^*(x)\}$. Quando algum $\beta_{ij} \neq 0$, $v_j(x)$ contém uma mistura dos modos de frequência positiva e negativa, $u_i(x)$ e $u_i^*(x)$, e o observador associado a base $\{v_i(x), v_i^*(x)\}$ detectará a presença de partículas onde para o observador associado a $\{u_i(x), u_i^*(x)\}$ há apenas vácuo. Naturalmente, quando os coeficientes $\beta_{ij} = 0$, os estados de vácuo $|0\rangle$ e $|\bar{0}\rangle$ são equivalentes. Neste caso, $b_i |0\rangle = 0$ da mesma forma que $a_j |\bar{0}\rangle = 0$, e ambas as representações compartilham o mesmo estado de vácuo.

O campo deve ser decomposto em componentes de frequência positiva e negativa antes de se definir os operadores de criação e de aniquilação. Essa decomposição é diferente para observadores não equivalentes, embora sejam relacionadas por uma transformação de Bogoliubov. Isso explica porque os números de partículas, definidos em termos dos operadores de criação e de aniquilação, são diferentes em uma ou outra representação.

No espaço-tempo de Minkowski, o grupo de Poincaré permite uma escolha natural da representação da álgebra de operadores: os modos $u_k(x)$ associados aos observadores de Lorentz, isto é, autofunções do vetor de Killing $\partial/\partial t$, ortogonal a superfícies $\{t = \text{constante}\}$. Estes observadores, os observadores de Lorentz, formam uma classe de equivalência, uma vez que o estado de vácuo é invariante em relação ao grupo de Poincaré.

Em um espaço-tempo curvo, entretanto, o grupo de Poincaré não é mais um grupo de simetria do espaço-tempo. Em geral, não há sequer vetores de Killing para com os quais definir modos de frequência positiva e, mesmo quando existe uma simetria que nos permita definir estes modos, o princípio da covariância não nos permite considerar um

sistema de coordenadas particular. Sistemas de coordenadas são fisicamente irrelevantes. Conseqüentemente, o conceito de partículas torna-se impreciso, e a interpretação física dos estados quânticos torna-se mais sutil.

O conceito de partículas foi originalmente introduzido com relação a observadores inerciais e era suposto independente do estado de movimento do observador. No entanto, a noção de vácuo e, portanto, o conceito de partículas, depende da representação da álgebra de campos de operadores, em particular, depende do estado de movimento do observador e depende da geometria do espaço-tempo.

Esta imprecisão no conceito de partículas parece anti-intuitiva à primeira vista. Entretanto, o conceito de “vácuo” não é o mesmo que “espaço vazio”, uma vez que todo o espaço é preenchido por campos que constituem o universo. O vácuo é simplesmente o estado de menor energia possível destes campos. Os estados de energia são definidos pelo operador hamiltoniano, baseado em condições locais no espaço-tempo. Observadores distintos correspondem a diferentes sistemas de coordenadas, portanto, detectam diferentes estados quânticos, em particular, diferentes estados de vácuo.

2.3.3 Princípio da Ação em Espaço-Tempos Curvos: Um Exemplo de Cálculo Variacional

Aqui vamos estudar um exemplo prático de cálculo variacional para obter as equações dinâmicas em um espaço-tempo curvo a partir de uma dada densidade lagrangiana. Este tipo de cálculo é difícil de encontrar na literatura, e partir deste exemplo é possível generalizar para outros casos.

Considere um modelo em que o universo é preenchido por um campo eletromagnético acoplado ao campo gravitacional, descrito pela ação²⁸

$$S = \int d^4x \sqrt{g} \left[(1 + \lambda\Omega)R - \frac{1}{2}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \right],$$

onde $\Omega \equiv A^\mu A_\mu$, $F_{\mu\nu} = A_{\mu, \nu} - A_{\nu, \mu}$, e λ é um parâmetro constante, isto é, independente da posição no espaço-tempo. Queremos encontrar as equações dinâmicas empregando o princípio da ação, $\delta S = 0$.

²⁸Novello e Salim (1979).

Vamos começar calculando a variação no segundo termo de S:

$$\begin{aligned} & \delta \left(\int d^4x \sqrt{g} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) = \\ & \delta \left(\int d^4x \sqrt{g} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \right) = \\ & \int d^4x \left[(\delta\sqrt{g}) F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + 2\sqrt{g} F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} + 2\sqrt{g} (\delta g^{\alpha\mu}) g^{\beta\nu} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \right] = \\ & \int d^4x \left[(\delta\sqrt{g}) F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + 4\sqrt{g} F^{\mu\nu} \delta A_{\mu;\nu} + 2\sqrt{g} (\delta g^{\alpha\mu}) g^{\beta\nu} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \right]. \end{aligned}$$

Agora, com as identidades²⁹

$$\begin{aligned} \delta\sqrt{g} &= \frac{1}{2}\sqrt{g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \\ \delta g^{\mu\nu} &= -g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \delta g_{\alpha\beta} \\ \sqrt{g} (F^{\mu\nu} \delta A_{\mu})_{;\nu} &= (\sqrt{g} F^{\mu\nu} \delta A_{\mu})_{;\nu} \\ F^{\mu\nu} \delta A_{\mu;\nu} &= (F^{\mu\nu} \delta A_{\mu})_{;\nu} - F^{\mu\nu}_{;\nu} \delta A_{\mu} \end{aligned}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} & \delta \left(\int d^4x \sqrt{g} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) = \\ & \int d^4x \sqrt{g} \left\{ \frac{1}{2} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + 4 \left[(F^{\mu\nu} \delta A_{\mu})_{;\nu} - F^{\mu\nu}_{;\nu} \delta A_{\mu} \right] - 2g^{\alpha\rho} g^{\mu\sigma} g^{\beta\nu} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \delta g_{\rho\sigma} \right\} = \\ & \int d^4x \sqrt{g} \left\{ \frac{1}{2} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} - 4F^{\mu\nu}_{;\nu} \delta A_{\mu} - 2F^{\mu\alpha} F^{\nu}_{\alpha} \delta g_{\mu\nu} \right\} + 4 \int d^4x \left(\sqrt{g} F^{\mu\nu} \delta A_{\mu} \right)_{;\nu}. \end{aligned}$$

O último termo é uma integral de uma derivada total, e pode ser descartado com as condições de contorno apropriadas. Encontramos, portanto,

$$\begin{aligned} & \delta \left(\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{g} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) = \\ & \int d^4x \sqrt{g} \left[\left(\frac{1}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} g^{\mu\nu} - F^{\mu\alpha} F^{\nu}_{\alpha} \right) \delta g_{\mu\nu} - 2F^{\mu\nu}_{;\nu} \delta A_{\mu} \right]. \end{aligned}$$

O cálculo da variação no primeiro termo de S é semelhante, porém, um pouco mais

²⁹Weinberg (1972).

complicado

$$\begin{aligned}
& \delta \left[\int d^4x \sqrt{g} \left(1 + \lambda A^\mu A_\mu \right) R \right] = \\
& \int d^4x \left[(\delta \sqrt{g}) \left(1 + \lambda \Omega \right) R + 2\lambda \sqrt{g} A^\mu (\delta A_\mu) R + \lambda \sqrt{g} (\delta g^{\mu\nu}) A_\mu A_\nu R \right] + \\
& \quad + \int d^4x \left[\sqrt{g} \left(1 + \lambda \Omega \right) \delta (g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) \right] = \\
& \int d^4x \sqrt{g} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \lambda \Omega \right) R g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + 2\lambda R A^\mu \delta A_\mu - \lambda A_\mu A_\mu R g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \delta g_{\alpha\beta} \right] + \\
& \quad + \int d^4x \sqrt{g} \left[- \left(1 + \lambda \Omega \right) R_{\mu\nu} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \delta g_{\alpha\beta} + \lambda \Omega g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right] = \\
& \int d^4x \sqrt{g} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \lambda \Omega \right) R g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + 2\lambda R A^\mu \delta A_\mu - \lambda R A^\mu A^\mu \delta g_{\mu\nu} \right] + \\
& \quad + \int d^4x \sqrt{g} \left[- \left(1 + \lambda \Omega \right) R^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + \lambda \Omega g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right].
\end{aligned}$$

Para calcular os termos com $\delta R_{\mu\nu}$ use as identidades³⁰

$$\delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} (\delta g_{\mu\alpha;\nu} + \delta g_{\nu\alpha;\mu} + \delta g_{\mu\nu;\alpha}),$$

de forma que

$$\begin{aligned}
& \int d^4x \sqrt{g} \lambda \Omega g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \\
& \int d^4x \sqrt{g} \lambda \Omega g^{\mu\nu} (\delta \Gamma^\lambda_{\mu\lambda;\nu} - \delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu;\lambda}) = \\
& \int d^4x \sqrt{g} \left[(\lambda \Omega g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\lambda_{\mu\lambda})_{;\nu} - \lambda \Omega_{;\nu} g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} - (\lambda \Omega g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu})_{;\lambda} + \lambda \Omega_{;\lambda} g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \right] = \\
& \int d^4x \sqrt{g} \left[\lambda \Omega_{;\lambda} g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \lambda \Omega_{;\nu} g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} \right] = \\
& \int d^4x \sqrt{g} \left[\lambda g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \Omega_{;\alpha;\beta} \delta g_{\mu\nu} - \lambda \Omega_{;^\mu;^\nu} \delta g_{\mu\nu} \right];
\end{aligned}$$

e

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta \Gamma^\lambda_{\mu\lambda;\nu} - \delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu;\lambda},$$

de forma que

$$\sqrt{g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = (\sqrt{g} g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\lambda_{\mu\lambda})_{;\nu} - (\sqrt{g} g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu})_{;\lambda} = \text{termo de derivada total.}$$

Finalmente, somando todas as variações, encontramos

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int d^4x \sqrt{g} \left[- (1 + \lambda \Omega) G^{\mu\nu} - \lambda R A^\mu A^\nu + \lambda g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \Omega_{;\alpha;\beta} - \lambda \Omega_{;^\mu;^\nu} - E^{\mu\nu} \right] \delta g_{\mu\nu} + \\
& \quad + \int d^4x \sqrt{g} \left[2\lambda R A^\mu + 2F^{\mu\nu}_{;\nu} \right] \delta A_\mu \\
&= 0,
\end{aligned}$$

³⁰Weinberg (1972).

onde

$$E^{\mu\nu} = \frac{1}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} g^{\mu\nu} - F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha \quad \text{e} \quad G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu}.$$

A ação é, portanto, estacionária em relação a variações arbitrárias em $g_{\mu\nu}$ e A^μ se

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = -\lambda R A^\mu,$$

$$(1 + \lambda\Omega) G^{\mu\nu} + \lambda R A^\mu A^\nu - \lambda g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \Omega_{;\alpha;\beta} + \lambda \Omega^{;\mu;\nu} = -E^{\mu\nu},$$

No caso de $\lambda = 0$, estas se reduzem às equações de Maxwell e às equações de Einstein, respectivamente. Este tipo de modelo pode ser interpretado como uma espécie de “correção ultravioleta” da relatividade geral. λ pode ser, por exemplo, um parâmetro que depende da escala de energia, tal que $\lambda = 0$ em regimes de baixas energias. Neste caso, a teoria concorda com a relatividade geral nestes regimes, mas adiciona correções que se esperam necessárias em regimes de altas energias. Em particular, a equação de conservação de $F^{\mu\nu}$ pode ser interpretada de forma que o acoplamento entre os campos gravitacional e eletromagnético confere uma massa ao fóton.

3

O Efeito Unruh

Uma das conseqüências da existência de representações não equivalentes das relações canônicas de comutação é o chamado efeito Unruh segundo o qual a noção de partícula depende do estado de movimento do observador. Este problema foi estudado pela primeira vez por Unruh,¹ inspirado no famoso trabalho de Hawking² sobre criação de partículas por buracos negros.

O efeito Unruh expressa o fato de que observadores uniformemente acelerados no espaço-tempo de Minkowski, chamados observadores de Rindler, associam um banho térmico de partículas de Rindler ao estado sem partículas de observadores inerciais, chamado vácuo de Minkowski. As partículas de Rindler são associadas aos modos de energia positiva definidos por observadores de Rindler em contraste com as partículas de Minkowski, que são associadas aos modos de energia positiva definidos por observadores inerciais. Isso significa que um detector³ de partículas uniformemente acelerado no vácuo

¹ Unruh (1976).

² Hawking (1975).

³ Um detector é um sistema acoplado aos vários campos físicos de forma que seja sensível à presença de partículas.

de Minkowski, irá encontrar uma distribuição térmica de partículas, como se em contato térmico com radiação de corpo negro com uma certa temperatura, chamada “temperatura Unruh”, proporcional a sua aceleração.

Este efeito explica entre outros, a excitação de átomos acelerados, o decaimento de prótons não-inerciais e alterações nos tempos de vida de partículas instáveis aceleradas, através de colisões com partículas de Rindler.⁴

3.1 Movimento Acelerado e Referencial Co-Movente

Antes de estudar o efeito Unruh, é necessário construir o sistema de coordenadas do referencial co-movente com o observador uniformemente acelerado, chamado sistema de coordenadas de Rindler (η, ξ) . Neste referencial, vamos supor que o observador acelerado esteja em repouso em $\xi = 0$. Evidentemente, a coordenada temporal η é o tempo próprio τ ao longo da linha de mundo do observador. Por simplicidade, vamos considerar o efeito Unruh no espaço-tempo de Minkowsky 2-dimensional. Além disso, vamos assumir que a métrica no referencial co-movente é conformalmente plana,⁵

$$ds^2 = \Omega^2(\eta, \xi) [d\eta^2 - d\xi^2].$$

O parâmetro mais natural ao longo da linha de mundo de um observador é o seu tempo próprio τ , de forma que sua posição e sua velocidade são funções de τ , $x^\mu = x^\mu(\tau)$ e $v^\mu = \dot{x}^\mu(\tau)$, onde

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

é um vetor unitário tipo-tempo,

$$v^2 = \eta_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = \frac{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}{d\tau^2} = 1.$$

A aceleração

$$a^\mu = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}$$

é ortogonal à velocidade,

$$a \cdot v = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{v^2}{2} \right) = 0.$$

⁴ Um review sobre o efeito Unruh com um pouco de sua história e várias de suas aplicações pode ser encontrado em Crispino, Higuchi e Matsas (2008).

⁵ É fácil verificar que em um espaço-tempo 2-dimensional, é sempre possível realizar uma transformação de coordenadas que torne a métrica conformalmente plana.

Isso significa que $a^0 = 0$ no referencial de repouso do observador, o referencial de Lorentz em que $v = (1, 0)$ no instante em questão. Neste referencial, a parte espacial de a^μ se reduz à definição usual de aceleração

$$a^i = \frac{d^2 x^i}{dt^2}$$

cujos módulo é

$$a = |a^\mu a_\mu|^{1/2}.$$

Considere, então, um observador sujeito a uma aceleração constante a na direção x . As equações de movimento são

$$a^\mu = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}$$

com $v^\mu v_\mu = 1$, $v^\mu a_\mu = 0$ e $a^\mu a_\mu = -a^2$, donde segue que

$$\begin{aligned} a^0 &= \frac{dv^0}{d\tau} = av^1, \\ a^1 &= \frac{dv^1}{d\tau} = av^0. \end{aligned}$$

Este sistema de equações é trivial. Com as constantes de integração apropriadas, o resultado é

$$t(\tau) = \frac{1}{a} \sinh a\tau, \quad x(\tau) = \frac{1}{a} \cosh a\tau.$$

Portanto, a linha de mundo de um observador uniformemente acelerado é um ramo da hipérbole $x^2 - t^2 = a^{-2}$. Tal trajetória se aproxima do cone de luz na medida em que $|t|$ cresce (figura 3.1).

Por conveniência, vamos definir as chamadas coordenadas do cone de luz do referencial inercial

$$u \equiv t - x = -\frac{1}{a} e^{-a\tau} \quad \text{e} \quad v \equiv t + x = \frac{1}{a} e^{a\tau}.$$

Em termos de u e v , o elemento de linha do espaço-tempo de Minkowsky 2-dimensional é dado por

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 = du dv.$$

Analogamente, as coordenadas do cone de luz do referencial co-movente são

$$\tilde{u} \equiv \eta - \xi \quad \text{e} \quad \tilde{v} \equiv \eta + \xi.$$

Em termos de \tilde{u} e \tilde{v} , a métrica é dada por

$$ds^2 = \Omega^2(\tilde{u}, \tilde{v}) d\tilde{u} d\tilde{v},$$

e a linha de mundo do observador

$$\eta(\tau) = \tau, \quad \xi(\tau) = 0,$$

é dada por $v(\tau) = u(\tau) = \tau$. Como η é o tempo próprio τ na posição do observador, o fator conforme $\Omega^2(\tilde{u}, \tilde{v})$ deve ser tal que $\Omega^2(\tilde{u} = \tau, \tilde{v} = \tau) = 1$, de modo que o intervalo entre dois eventos na origem do referencial acelerado seja $ds^2 = d\eta^2$.

Comparando o elemento de linha em ambos os sistemas de coordenadas,

$$ds^2 = du dv = \Omega^2(\tilde{u}, \tilde{v}) d\tilde{u} d\tilde{v},$$

pode-se notar que as funções $u(\tilde{u}, \tilde{v})$ e $v(\tilde{u}, \tilde{v})$ na verdade dependem somente de um dos argumentos, caso contrário haveria termos $d\tilde{u}^2$ e $d\tilde{v}^2$ na igualdade acima. Vamos escolher

$$u = u(\tilde{u}), \quad v = v(\tilde{v}).$$

Para determinar as funções $u(\tilde{u})$ e $v(\tilde{v})$, considere a trajetória do observador em ambos os sistemas de coordenadas

$$\frac{du(\tau)}{d\tau} = \frac{du(\tilde{u})}{d\tilde{u}} \frac{d\tilde{u}(\tau)}{d\tau}.$$

Segue das definições de $u(\tau)$, $v(\tau)$, $\tilde{u}(\tau)$ e $\tilde{v}(\tau)$ que

$$\frac{du(\tau)}{d\tau} = e^{-a\tau} = -au(\tau), \quad \frac{d\tilde{u}(\tau)}{d\tau} = 1.$$

Assim,

$$\frac{du}{d\tilde{u}} = -au,$$

portanto,

$$u = C_1 e^{-a\tilde{u}},$$

onde C_1 é uma constante de integração. Similarmente,

$$v = C_2 e^{a\tilde{v}}.$$

A condição $\Omega^2(\tilde{u} = \tau, \tilde{v} = \tau) = 1$ fornece um vínculo entre as constantes de integração, $a^2 C_1 C_2 = -1$. Tomando $C_1 = -C_2$, encontramos

$$u = -\frac{1}{a} e^{-a\tilde{u}}, \quad v = \frac{1}{a} e^{a\tilde{v}},$$

e

$$ds^2 = du dv = e^{a(\tilde{v}-\tilde{u})} d\tilde{u} d\tilde{v}.$$

As relações entre (u, v) e (\tilde{u}, \tilde{v}) podem ser reescritas em termos de (t, x) e (η, ξ) ,

$$t(\eta, \xi) = a^{-1} e^{a\xi} \sinh a\eta, \quad x(\eta, \xi) = a^{-1} e^{a\xi} \cosh a\eta.$$

O elemento de linha no referencial acelerado,

$$ds^2 = e^{2a\xi} [d\eta^2 - d\xi^2],$$

descreve o chamado espaço-tempo de Rindler, que é localmente idêntico ao espaço-tempo de Minkowsky e, portanto, possui curvatura zero. Tal métrica é explicitamente estática como era esperado. Observe, entretanto, que a métrica é singular em $x = t = 0$. Um observador uniformemente acelerado precisaria de uma aceleração infinita para passar por este ponto. Evidentemente, esta singularidade não é física, apenas reflete a escolha deste sistema de coordenadas.

As coordenadas (η, ξ) definidas nas regiões

$$-\infty < \eta < \infty, \quad -\infty < \xi < \infty$$

cobrem somente a região $x > |t|$ do espaço-tempo de Minkowsky. O sistema de coordenadas de Rindler é, portanto, incompleto. As assíntotas \mathcal{H}^- e \mathcal{H}^+ indicadas na figura 3.1 definem horizontes de evento para o observador de Rindler, chamados horizonte passado e futuro, respectivamente.

3.2 Quantização no Espaço de Rindler

Considere por simplicidade o campo escalar real sem massa. A equação de Klein-Gordon no referencial inercial e no referencial acelerado é, respectivamente,

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \phi(t, x) = 0, \quad \left[\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right] \phi(\eta, \xi) = 0,$$

ou, em coordenadas do cone de luz,

$$\partial_u \partial_v \phi(u, v) = 0, \quad \partial_{\tilde{u}} \partial_{\tilde{v}} \phi(\tilde{u}, \tilde{v}) = 0.$$

Aqui fica evidente a importância da invariância conforme da equação de Klein-Gordon. Como a métrica é conformalmente plana em coordenadas de Rindler, a equação não precisa ser resolvida duas vezes. A partir da solução no referencial inercial, encontra-se a solução no referencial acelerado.

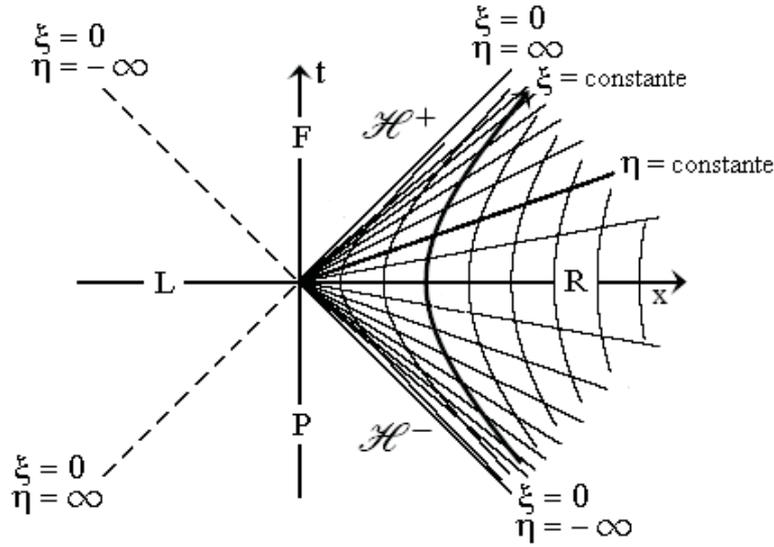


Figura 3.1: Linhas de mundo de observadores de Rindler.

As soluções $\phi \propto e^{-i\omega u} = e^{-i\omega(t-x)}$ e $\phi \propto e^{-i\Omega \tilde{u}} = e^{-i\Omega(\eta-\xi)}$ descrevem os modos de frequência positiva que se movem à direita com respeito ao tempo de Minkowski t e com respeito ao tempo de Rindler η , respectivamente. As soluções $\phi \propto e^{-i\omega v}$ e $\phi \propto e^{-i\Omega \tilde{v}}$ descrevem os modos que se movem à esquerda. Como $u = u(\tilde{u})$ e $v = v(\tilde{v})$, os modos que se movem à direita RM (right-moving mode) e os que se movem à esquerda LM (left-moving mode) não se afetam, e podem ser considerados separadamente. Nas fórmulas a seguir no restante deste capítulo, vamos escrever explicitamente apenas os modos RM .

O campo de operadores ϕ é então dado por

$$\begin{aligned} \phi &= (2\pi)^{-1/2} \int_0^\infty \frac{d\omega}{(2\omega)^{1/2}} [e^{-i\omega u} a_\omega^- + e^{i\omega u} a_\omega^+] + LM \\ &= (2\pi)^{-1/2} \int_0^\infty \frac{d\Omega}{(2\Omega)^{1/2}} [e^{-i\Omega \tilde{u}} b_\Omega^- + e^{i\Omega \tilde{u}} b_\Omega^+] + LM, \end{aligned}$$

onde os operadores a_ω^\pm e b_Ω^\pm obedecem as relações usuais de comutação

$$\begin{aligned} [a_\omega^-, a_{\omega'}^+] &= \delta(\omega - \omega'), \\ [b_\Omega^-, b_{\Omega'}^+] &= \delta(\Omega - \Omega'), \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Os operadores de aniquilação a_ω^- e b_Ω^- definem o vácuo de Minkowski $|0\rangle_M$ e o vácuo de

Rindler $|0\rangle_R$, respectivamente,

$$a_\omega^-|0\rangle_M = 0 \quad \text{e} \quad b_\Omega^-|0\rangle_R = 0.$$

O espaço de estados correspondente a cada um dos referenciais pode ser construído a partir do estado fundamental utilizando-se os operadores de criação.

3.3 Coeficientes de Bogoliubov

a^\pm e b^\pm se relacionam através dos chamados coeficientes de Bogoliubov,⁶

$$b_\Omega^- = \int_0^\infty d\omega \left(\alpha_{\Omega\omega} a_\omega^- - \beta_{\Omega\omega} a_\omega^+ \right), \quad b_\Omega^+ = (b_\Omega^-)^\dagger = \int_0^\infty d\omega \left(\alpha_{\Omega\omega}^* a_\omega^+ - \beta_{\Omega\omega}^* a_\omega^- \right).$$

A condição de normalização para estes coeficientes segue das relações de comutação entre os operadores de criação e aniquilação,

$$\int_0^\infty d\omega \left(\alpha_{\Omega\omega} \alpha_{\Omega'\omega}^* - \beta_{\Omega\omega} \beta_{\Omega'\omega}^* \right) = \delta(\Omega - \Omega').$$

A partir das transformações de Bogolyubov, pode-se escrever

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{d\omega}{(2\omega)^{1/2}} \left[e^{-i\omega u} a_\omega^- + e^{i\omega u} a_\omega^+ \right] &= \int_0^\infty \frac{d\Omega}{(2\Omega)^{1/2}} \left[e^{-i\Omega\tilde{u}} b_\Omega^- + e^{i\Omega\tilde{u}} b_\Omega^+ \right] \\ &= \int_0^\infty \frac{d\Omega}{(2\Omega)^{1/2}} \left[e^{-i\Omega\tilde{u}} \int_0^\infty d\omega \left(\alpha_{\Omega\omega} a_\omega^- - \beta_{\Omega\omega} a_\omega^+ \right) \right] + \\ &\quad + \int_0^\infty \frac{d\Omega}{(2\Omega)^{1/2}} \left[e^{i\Omega\tilde{u}} \int_0^\infty d\omega \left(\alpha_{\Omega\omega}^* a_\omega^+ - \beta_{\Omega\omega}^* a_\omega^- \right) \right], \end{aligned}$$

donde segue que

$$\frac{e^{-i\omega u}}{\sqrt{\omega}} = \int_0^\infty \frac{d\Omega}{\sqrt{\Omega}} \left(\alpha_{\Omega\omega} e^{-i\Omega\tilde{u}} - \beta_{\Omega\omega}^* e^{i\Omega\tilde{u}} \right).$$

A integral em \tilde{u} da equação acima multiplicada por $\exp(\pm i\Omega\tilde{u})$ resulta em

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\omega}} \int_{-\infty}^\infty d\tilde{u} e^{-i\omega u \pm i\Omega\tilde{u}} &= \int_{-\infty}^\infty d\tilde{u} \int_0^\infty \frac{d\Omega'}{\sqrt{\Omega'}} \left[\alpha_{\Omega'\omega} e^{i(-\Omega' \pm \Omega)\tilde{u}} - \beta_{\Omega'\omega}^* e^{i(\Omega' \pm \Omega)\tilde{u}} \right] \\ &= 2\pi \int_0^\infty \frac{d\Omega'}{\sqrt{\Omega'}} \left[\alpha_{\Omega'\omega} \delta(\pm\Omega - \Omega') - \beta_{\Omega'\omega}^* \delta(\pm\Omega + \Omega') \right], \end{aligned}$$

ou seja,

$$\alpha_{\Omega\omega} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^\infty d\tilde{u} e^{i\Omega\tilde{u} - i\omega u} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^0 du (-au)^{-\frac{i\Omega}{a} - 1} e^{-i\omega u},$$

⁶ A transformação inversa não é definida porque as coordenadas de Rindler não cobrem todo o espaço de Minkowski.

$$\beta_{\Omega\omega} = -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{u} e^{i\Omega\tilde{u}+i\omega u} = -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^0 du (-au)^{-\frac{i\Omega}{a}-1} e^{i\omega u}.$$

As integrais acima podem ser reescritas em termos de funções gamma notando-se que

$$\int_0^{\infty} dx x^{s-1} e^{-bx} = b^{-s} \int_0^{\infty} dy y^{s-1} e^{-y} = b^{-s} \Gamma(s).$$

Segue que

$$\begin{aligned} \alpha_{\Omega\omega} &= \frac{1}{2\pi a} \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^{1/2} e^{\frac{\pi\Omega}{2a}} \exp\left(\frac{i\Omega}{a} \ln\frac{\omega}{a}\right) \Gamma\left(-\frac{i\Omega}{a}\right), \\ \beta_{\Omega\omega} &= -\frac{1}{2\pi a} \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^{1/2} e^{-\frac{\pi\Omega}{2a}} \exp\left(\frac{i\Omega}{a} \ln\frac{\omega}{a}\right) \Gamma\left(-\frac{i\Omega}{a}\right), \end{aligned}$$

portanto, $|\alpha_{\Omega\omega}|^2 = \exp(2\pi\Omega a^{-1}) |\beta_{\Omega\omega}|^2$.

3.4 Números de Ocupação e a Temperatura Unruh

O valor esperado do operador número de partículas com frequência Ω para o observador de Rindler, $N_{\Omega} = b_{\Omega}^{+} b_{\Omega}^{-}$, no vácuo de Minkowski é

$$\begin{aligned} \langle N_{\Omega} \rangle &= \langle 0_M | b_{\Omega}^{+} b_{\Omega}^{-} | 0_M \rangle \\ &= \langle 0_M | \int d\omega \left(\alpha_{\Omega\omega}^{*} a_{\omega}^{+} - \beta_{\Omega\omega}^{*} a_{\omega}^{-} \right) \int d\omega' \left(\alpha_{\Omega\omega'} a_{\omega'}^{-} - \beta_{\Omega\omega'} a_{\omega'}^{+} \right) | 0_M \rangle \\ &= \int d\omega |\beta_{\Omega\omega}|^2. \end{aligned}$$

A condição de normalização para $\Omega' = \Omega$ diz que

$$\int_0^{\infty} d\omega \left(|\alpha_{\Omega\omega}|^2 - |\beta_{\Omega\omega}|^2 \right) = \delta(0) = \int d\omega |\beta_{\Omega\omega}|^2 \left[\exp\left(\frac{2\pi\Omega}{a}\right) - 1 \right].$$

Portanto,

$$\langle N_{\Omega} \rangle = \left[\exp\left(\frac{2\pi\Omega}{a}\right) - 1 \right]^{-1} \delta(0).$$

O fator divergente $\delta(0)$ corresponde a um volume espacial infinito. A densidade média de partículas com frequência Ω é simplesmente

$$n_{\Omega} = \left[\exp\left(\frac{2\pi\Omega}{a}\right) - 1 \right]^{-1}.$$

Isto é, um observador acelerado no vácuo de Minkowski detecta partículas com a distribuição térmica acima com uma temperatura proporcional a sua aceleração, a temperatura Unruh

$$T = \frac{a}{2\pi}.$$

As partículas podem apresentar qualquer momento linear, embora seja menos provável encontrar partículas com energia mais elevada. O observador acelerado “sente-se” imerso em um banho térmico de partículas. Este é o chamado efeito Unruh.

Em unidades usuais, a temperatura Unruh é da ordem de $T \sim 10^{-20} \times a/ms^{-2}$ Kelvin, portanto, o efeito é extremamente pequeno para acelerações acessíveis em laboratórios.

Nós estudamos o efeito Unruh considerando um observador eternamente acelerado, desde o infinito passado até o infinito futuro. Evidentemente, este tipo de movimento não é fisicamente realista. A pergunta importante que surge é se um observador com aceleração constante por um período de tempo finito irá detectar partículas. Akhmedov e Singleton (2007) argumentam que sim, e que, no caso de o detector ser um elétron em movimento circular uniforme sob ação de um campo magnético constante, o efeito Unruh nada mais é que o efeito Sokolov-Ternov, que descreve a despolarização de elétrons em um campo magnético e que já foi verificado experimentalmente.

3.5 Efeito Unruh com Partículas Massivas

Até então, estudamos o efeito Unruh considerando somente partículas com massas desprezíveis, $m = 0$. Agora vamos estudar o caso mais geral com partículas massivas. O termo de massa na equação de Klein-Gordon quebra a invariância conforme da teoria tornando o problema mais complicado.

Como vimos, as coordenadas de Rindler, (η, ξ) , se relacionam com as de Minkowski, (t, x) , através das transformações

$$\begin{aligned} t &= \xi' \sinh \eta', & 0 < \xi < \infty \\ x &= \xi' \cosh \eta', & -\infty < \eta < \infty \end{aligned}$$

definidas na região $x > |t|$, onde definimos por conveniência $\eta' = a\eta$ e $\xi' = a^{-1} \exp a\xi$ (de agora em diante, vamos omitir o apóstrofo em η' e em ξ').⁷

Agora, o elemento de linha no espaço-tempo de Minkowski é dado por

$$d\tau^2 = \xi^2 d\eta^2 - d\xi^2.$$

⁷ As coordenadas (η, ξ) cobrem somente a região R em forma de cunha mostrada na figura 5.1. Esta região é conhecida como cunha de Rindler. Uma segunda região, representada por L na figura, poderia ser obtida, com $t = -\xi \sinh \eta$ e $x = -\xi \cosh \eta$, e representaria observadores com aceleração negativa.

Como se pode ver, esta métrica é singular em $\xi = 0$. As curvas $\{\xi = \text{constante}\}$, representadas pelas hipérbolas $x^2 - t^2 = \xi^2$, correspondem a linhas de mundo de observadores com aceleração uniforme ξ^{-1} , de fato

$$\begin{aligned} a^\mu &= v^\mu_{;\nu} v^\nu \Big|_{\xi=\text{const.}} \\ &= (v^\mu_{;\nu} + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} v^\lambda) v^\nu \Big|_{\xi=\text{const.}} \\ &= [(\xi^{-1} \delta_0^\mu)_{;\nu} + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} \xi^{-1} \delta_0^\lambda] \xi^{-1} \delta_0^\nu \\ &= \xi^{-1} \delta_1^\mu, \end{aligned}$$

portanto, $\alpha \equiv |a^\mu a_\mu|^{1/2} = \xi^{-1}$, como era esperado. A singularidade ocorre porque $\xi = 0$ representaria um observador com aceleração infinita.

Apesar de baseado em um espaço-tempo plano, o universo de Rindler apresenta algumas características semelhantes às de um buraco negro, além da singularidade. As duas assíntotas \mathcal{H}^- e \mathcal{H}^+ indicadas na figura 3.1 definem horizontes de evento para o observador de Rindler, chamados horizonte passado e futuro, respectivamente. Um observador em R não pode receber sinais luminosos originados em F ou L, e não pode enviar sinais a observadores em P ou L, pois haveria violação de causalidade. Além disso, a métrica de Rindler coincide com a de Schwarzschild na região do espaço-tempo próxima ao horizonte de eventos de um buraco negro estático. Considere a métrica do buraco negro de Schwarzschild (1+1 dimensional),

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2.$$

Sejam $r - 2M = x^2/8M$ e $\kappa = 1/4M$, de forma que

$$dr^2 = (\kappa x)^2 dx^2 \quad \text{e} \quad 1 - \frac{2M}{r} = \frac{(\kappa x)^2}{1 + (\kappa x)^2} \simeq (\kappa x)^2, \quad \text{quando } x \rightarrow 0,$$

segue que, perto do horizonte em $r = 2M$, a métrica de Schwarzschild é

$$d\tau^2 = (\kappa x)^2 dt^2 - dx^2,$$

que é justamente a métrica de Rindler. A singularidade em $\xi = 0$ no sistema de coordenadas de Rindler corresponde à singularidade no horizonte de eventos de um buraco negro nas coordenadas de Schwarzschild. Em ambos os casos, a singularidade pode ser removida com uma escolha apropriada de sistema de coordenadas.

Em coordenadas de Rindler, a equação de Klein-Gordon assume a forma

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + m^2 \phi = 0,$$

que pode ser resolvida por separação de variáveis

$$\frac{1}{\varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = \frac{\xi^2}{\chi} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi^2} + \frac{\xi}{\chi} \frac{\partial \chi}{\partial \xi} - m^2 \xi^2 = -\mu^2, \quad \mu = \text{constante},$$

onde definimos $\phi = \varphi(\eta)\chi(\xi)$. A parte temporal da equação acima é a equação trivial de um oscilador harmônico simples, enquanto a parte espacial é uma equação de Bessel⁸

$$\left[\frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} - \left(m^2 - \frac{\nu^2}{\xi^2} \right) \right] \chi_\nu(\xi) = 0,$$

com $0 < \nu < \infty$, de forma que os modos normais, com frequência positiva e negativa respectivamente, relativa ao tempo de Rindler η , são

$$\begin{aligned} \phi_\mu(\eta, \xi) &= \frac{1}{\pi} (\sinh \pi\mu)^{1/2} e^{-i\mu\eta} K_{i\mu}(m\xi) \\ \phi_\mu^*(\eta, \xi) &= \frac{1}{\pi} (\sinh \pi\mu)^{1/2} e^{i\mu\eta} K_{i\mu}(m\xi), \end{aligned}$$

onde $K_{i\mu}$ são as funções de Bessel modificadas do segundo tipo, também conhecidas como funções de Macdonald. Segue da relação de ortogonalidade⁹ entre as funções $K_{i\mu}$,

$$\int_0^\infty dx \frac{K_{i\mu}(x) K_{i\nu}(x)}{x} = \frac{\pi^2}{2\mu \sinh \pi\mu} \delta(\mu - \nu),$$

que os modos ϕ_μ estão normalizados em relação ao produto escalar

$$(\phi_\mu, \phi_\nu) = -i \int d\Sigma^\lambda \sqrt{g_\Sigma} (\phi_\mu \overleftrightarrow{\partial}_\lambda \phi_\nu^*) = -i \int \frac{d\xi}{\xi} (\phi_\mu \overleftrightarrow{\partial}_\eta \phi_\nu^*),$$

isto é,

$$\begin{aligned} (\phi_\mu, \phi_\nu) &= -\frac{i}{\pi^2} (\sinh \pi\mu)^{1/2} (\sinh \pi\nu)^{1/2} (e^{-i\mu\eta} \overleftrightarrow{\partial}_\eta e^{i\nu\eta}) \int \frac{d\xi}{\xi} K_{i\mu}(m\xi) K_{i\nu}(m\xi) \\ &= -\frac{i}{\pi^2} (\sinh \pi\mu)^{1/2} (\sinh \pi\nu)^{1/2} [i(\mu + \nu)] e^{-i\eta(\mu - \nu)} \frac{\pi^2}{2\mu \sinh \pi\mu} \delta(\mu - \nu) \\ &= \delta(\mu - \nu), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\phi_\mu^*, \phi_\nu^*) &= -\frac{i}{\pi^2} (\sinh \pi\mu)^{1/2} (\sinh \pi\nu)^{1/2} (e^{i\mu\eta} \overleftrightarrow{\partial}_\eta e^{-i\nu\eta}) \int \frac{d\xi}{\xi} K_{i\mu}(m\xi) K_{i\nu}(m\xi) \\ &= -\frac{i}{\pi^2} (\sinh \pi\mu)^{1/2} (\sinh \pi\nu)^{1/2} [-i(\mu + \nu)] e^{i\eta(\mu - \nu)} \frac{\pi^2}{2\mu \sinh \pi\mu} \delta(\mu - \nu) \\ &= -\delta(\mu - \nu), \end{aligned}$$

⁸ Gradshteyn e Ryzhik (2007).

⁹ Passian et al. (2003).

$$\begin{aligned}
(\phi_\mu, \phi_\nu^*) &= -\frac{i}{\pi^2} (\sinh \pi\mu)^{1/2} (\sinh \pi\nu)^{1/2} (e^{-i\mu\eta} \overleftrightarrow{\partial}_\eta e^{-i\nu\eta}) \int \frac{d\xi}{\xi} K_{i\mu}(m\xi) K_{i\nu}(m\xi) \\
&= -\frac{i}{\pi^2} (\sinh \pi\mu)^{1/2} (\sinh \pi\nu)^{1/2} (e^{-i\mu\eta} \overleftrightarrow{\partial}_\eta e^{-i\nu\eta}) \frac{\pi^2}{2\mu \sinh \pi\mu} \delta(\mu - \nu) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Seguindo o formalismo da teoria quântica de campos, postulamos que $\phi(x)$ e $\pi(x)$ são operadores, obedecendo a relações de comutação e agindo num espaço de Hilbert a ser construído, e expandimos o campo de operadores $\phi(x)$

$$\phi(\eta, \xi) = \int_0^\infty d\nu \left[a_R(\nu) \phi_\nu + a_R^\dagger(\nu) \phi_\nu^* \right],$$

onde R em a_R^\dagger e em a_R indica que os operadores de criação e de aniquilação de partículas atua no espaço de estados relacionado ao observador de Rindler. A álgebra de $\phi(x)$ e $\pi(x)$ determina as relações de comutação entre $a_R^\dagger(\mu)$ e $a_R(\mu)$,

$$\begin{aligned}
[a_R(\mu), a_R^\dagger(\nu)] &= \delta(\mu - \nu) \\
[a_R(\mu), a_R(\nu)] &= [a_R^\dagger(\mu), a_R^\dagger(\nu)] = 0.
\end{aligned}$$

Os vetores do espaço de estados segundo o observador de Rindler são obtidos com a aplicação consecutiva de $a_R^\dagger(\mu)$ no estado de vácuo, $|0_R\rangle$, tal que

$$a_R(\mu)|0_R\rangle = 0, \quad \forall \mu.$$

Acontece que o espaço de Fock gerado a partir de $|0_R\rangle$ não é equivalente ao espaço de Fock gerado a partir de $|0_M\rangle$, o vácuo para o observador de Minkowski, como pode ser verificado pelo cálculo dos coeficientes de Bogoliubov¹⁰

$$\begin{aligned}
\beta_{\mu k} &= -(\phi_\mu, u_k^*) \\
&= \left(\frac{\sinh \pi\mu}{4\pi\omega} \right)^{1/2} \left[\frac{\omega}{\pi} \int_0^\infty dz K_{i\mu}(mz) e^{ikz} - \frac{\mu}{\pi} \int_0^\infty \frac{dz}{z} K_{i\mu}(mz) e^{ikz} \right] \\
&= [2\pi\omega(e^{2\pi\mu} - 1)]^{-1/2} \left(\frac{\omega - k}{\omega + k} \right)^{i\mu/2},
\end{aligned}$$

de forma que

$$|\beta_{\mu k}|^2 = [2\pi\omega(e^{2\pi\mu} - 1)]^{-1}.$$

¹⁰ u_k^* denota, evidentemente, a solução segundo o observador inercial. Esta conta é bem extensa e envolve propriedades de funções hipergeométricas. Gradshteyn e Ryzhik (2007).

Segue então que

$$\langle 0_M | a_R^\dagger(\mu) a_R(\mu) | 0_M \rangle \propto \frac{1}{e^{2\pi\mu} - 1}.$$

Com a relação de Tolman, $T = g_{00}^{-1/2} T_0$,¹¹ podemos observar que a distribuição planckiana $|\beta_{\mu k}|^2$ corresponde a um espectro de temperatura

$$T = \frac{\alpha}{2\pi}.$$

3.6 Efeito Hawking

Buracos negros são normalmente descritos como objetos massivos com campos gravitacionais tão intensos que nem mesmo a luz pode escapar de suas superfícies, chamadas horizontes de eventos. Entretanto, devido a efeitos quânticos, um buraco negro pode emitir uma fraca radiação, produzida a partir de flutuações quânticas do vácuo em torno do horizonte.¹² Este resultado foi surpreendente, pois acreditava-se que somente campos não-estáticos poderiam produzir partículas. É interessante lembrar que o observador de Rindler é equivalente a um observador inercial em um campo gravitacional uniforme, daí segue a analogia entre o efeito Unruh e o efeito Hawking.

Considere a métrica de Schwarzschild (em duas dimensões, por simplicidade)

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2.$$

O valor $r = 2M$ é uma singularidade da métrica nas coordenadas (t, r) , referente ao horizonte de eventos. Tal singularidade não é física: um observador em queda livre encontrará somente o espaço vazio usual no horizonte. Ainda, a expressão acima mostra que quando $r < 2M$, t passa a ser uma coordenada tipo-espaço, e r passa a ser uma coordenada tipo-tempo. Portanto, t e r admitem a interpretação usual de tempo e espaço somente na região exterior ao horizonte de eventos, $r > 2M$.

A radiação Hawking pode ser compreendida fisicamente em termos de criação de pares partícula-antipartícula virtuais próximas ao horizonte de eventos. Segundo o princípio de Heisenberg, a incerteza ΔE na energia de uma partícula em um dado estado quântico por um momento Δt é tal que $\Delta E \times \Delta t > \hbar$. Acontece que o espaço é preenchido por flutuações quânticas do vácuo, pares de partículas são criados e aniquilados o tempo todo.

¹¹Tolman (1934).

¹²Hawking (1975).

Se essas partículas existem somente por um intervalo de tempo menor do que Δt , não há violação da lei de conservação de energia.

Considere, portanto, a criação de uma partícula e de uma antipartícula, cada uma com energia E . Em um espaço-tempo plano, as partículas produzidas não poderiam se propagar indefinidamente, o par deve ser aniquilado dentro de um instante \hbar/E . Entretanto, na vizinhança do horizonte de eventos de um buraco negro, uma partícula pode eventualmente cruzar o horizonte antes de ser absorvida, onde poderia propagar-se livremente. A energia desta partícula com respeito a observadores distantes é negativa porque o vetor de Killing $\partial/\partial t$, que corresponde à energia longe do buraco negro, se transforma em um vetor tipo-espaço dentro do horizonte. Conseqüentemente, a massa do buraco negro diminui no decorrer deste processo. Enquanto uma partícula é absorvida pelo horizonte de eventos, a outra pode se propagar indefinidamente.

Mukhanov (2005) mostra que o cálculo da temperatura Hawking é idêntico ao da temperatura Unruh (no caso bi-dimensional) e identifica os observadores inercial e uniformemente acelerado no espaço-tempo de Minkowsky com um observador distante em queda livre e um observador a uma distância fixa do buraco negro, respectivamente. A temperatura da radiação Hawking é então obtida fazendo-se a substituição $\alpha = (4M)^{-1}$, onde α é a aceleração do observador de Rindler, e M é a massa do buraco negro. Se o campo $\phi(x)$ estiver no estado de vácuo $|0_k\rangle$, observadores afastados do buraco negro a uma distância fixa detectarão um espectro térmico de partículas com uma temperatura

$$T_H = \frac{1}{8\pi M},$$

a chamada temperatura Hawking. Conseqüentemente, a densidade de partículas observadas com energia E é

$$n_E = \frac{1}{e^{E/T_H} - 1}.$$

Segue que somente partículas com massa muito pequena, $m \lesssim T_H$, são produzidas significativamente. Evidentemente, em 4 dimensões o problema é mais complicado. Nesse caso, as ondas se propagando para longe do buraco negro devem atravessar uma barreira de potencial, o que reduz ainda mais a intensidade da radiação.¹³

¹³Mukhanov (2005).

4

Campo Escalar em modelos de Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker

Aqui vamos estudar a criação de partículas por um campo gravitacional variável, cujo efeito é particularmente interessante em cosmologia no estudo de formação de matéria no universo. Ao contrário do efeito Unruh, este processo não envolve observadores distintos, mas um mesmo observador em diferentes instantes de tempo. As partículas são produzidas devido à mistura entre os estados de frequência positiva e negativa quando a métrica se torna dinâmica. Uma maneira simples de compreender isso consiste em supor que a métrica é estática no passado assintótico. Então, o campo de operadores pode ser escrito em termos das soluções da equação de Klein-Gordon nesta região:

$$\phi = \int d^3k \left[a_k f_k + a_k^\dagger f_k^* \right].$$

f_k é uma solução de frequência positiva, mas com a evolução do tempo, as soluções não serão mais de frequência puramente positiva neste sistema coordenado. a_k aniquila o estado de vácuo inicial, $|0\rangle_{in}$,

$$a_k |0\rangle_{in} = 0,$$

mas uma vez que a métrica evolui este não será mais o estado de vácuo. Se o espaço-tempo também é assintoticamente plano no futuro, pode-se escrever

$$\phi = \int d^3k \left[b_k g_k + b_k^\dagger g_k^* \right],$$

$$b_k |0\rangle_{out} = 0.$$

Como antes, as soluções podem ser relacionadas através dos coeficientes de Bogoliubov,

$$b_k = \int_{k'} \alpha_{kk'} a_k + \beta_{kk'} a_k^\dagger,$$

e o número de partículas criadas é

$$\langle N_{k,out} \rangle = {}_{in} \langle 0 | b_k^\dagger b_k | 0 \rangle_{in} = \int d^3k' |\beta_{kk'}|^2.$$

Considere, por simplicidade, um modelo de universo homogêneo e isotrópico com sessão espacial plana, descrito pela métrica de Friedman-Robertson-Walker com elemento de linha

$$d\tau^2 = dt^2 - a^2(t) d\vec{x}^2 = a^2(\eta) (d\eta^2 - \delta_{ij} dx^i dx^j),$$

onde (t, \vec{x}) representa um observador comovente com o fluido de matéria no universo. A fim de encontrar soluções particulares das equações dinâmicas, é conveniente substituir o tempo cósmico, t , pelo tempo conforme, η , definido (a menos de uma constante) por $d\eta = a^{-1} dt$. Evidentemente, em termos do tempo conforme, a geometria se torna conformalmente plana.

Com este tipo de métrica, a equação de campo clássica pode ser resolvida por separação de variáveis, $\phi(x) = \chi(\vec{x})\varphi(t)$, onde $\varphi(t)$ obedece uma equação diferencial ordinária com os coeficientes dependentes do tempo, ou seja, não é da forma $\exp(\pm i\omega t)$, como no caso de ondas planas. A consequência física da dependência temporal dos coeficientes é a produção de partículas devido a evolução do campo gravitacional.

Com a definição

$$\phi_k(x) = a^{-1}(\eta) \varphi_k(\eta) \chi_k(\vec{x}),$$

a parte espacial da equação de Klein-Gordon é a equação trivial de um oscilador harmônico,¹ e as autofunções $\chi(\vec{x})$ têm a forma familiar $\exp(\pm i\vec{k} \cdot \vec{x})$. As funções $\varphi_k(\eta)$, por sua vez,

¹ As variáveis dependentes do tempo e do espaço podem ser separadas na equação de Klein-Gordon sempre que a métrica for conformalmente estática. No caso mais geral de um modelo de Friedmann-Robertson-Walker com sessão espacial hiperbólica ou esférica, $\chi_k(\vec{x})$ são as autofunções do operador de Laplace-Beltrami correspondentes. Veja, por exemplo, Svaiter (1989).

satisfazem a equação

$$\left[\frac{d^2}{d\eta^2} + k^2 + m^2 a^2(\eta) - \frac{a''}{a}(\eta) + \xi R a^2(\eta) \right] \varphi_k(\eta) = 0,$$

onde $a'' = d^2 a / d\eta^2$. O escalar de curvatura neste modelo, escrito em termos do tempo conforme, é ${}^2 R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = 6a''/a^3$. No caso particular em que a constante de acoplamento possui o valor $\xi = 1/6$, os dois últimos coeficientes se anulam. Se além disso $m = 0$, o caso conformemente invariante, a equação de Klein-Gordon admite soluções de ondas planas como no caso do espaço-tempo de Mikowski e, portanto, não há produção de partículas.

Considere o caso de acoplamento conforme, $\xi = 1/6$, com $m \neq 0$. Neste caso, uma relação de dispersão pode ser obtida a partir da expansão

$$\varphi_k = \exp \left[-i\omega_k(\eta)\eta + i\vec{k} \cdot \vec{x} \right],$$

cuja substituição em

$$\left[\frac{d^2}{d\eta^2} + k^2 + m^2 a^2(\eta) \right] \varphi_k(\eta) = 0,$$

dá

$$\omega^2 + \mathcal{O} \left(\frac{d\omega}{d\eta} \right) = k^2 + m^2 a^2(\eta)$$

Portanto, a variação da métrica altera a relação de dispersão.

Como um exemplo simples, considere um modelo em que o universo explode e logo a seguir se contrai em um intervalo de tempo infinitesimal,

$$a^2(\eta) = 1 + i\tau\delta(\eta),$$

onde τ pode ser considerado uma escala de tempo característica. Com esta métrica, a equação dinâmica é

$$-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = [k^2 + m^2 (1 + i\tau\delta(\eta))] \varphi.$$

As soluções para $\eta \neq 0$ são meramente ondas planas com a relação de dispersão usual. A fim de encontrar a relação entre os estados “in” e os estados “out”, basta integrar sobre uma região infinitesimal em torno de $\eta = 0$,

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \Big|_{-\epsilon}^{\epsilon} = im^2 \tau \varphi.$$

² Este cálculo envolve apenas álgebra tensorial elementar, e é trivial, apesar de cansativo. Uma alternativa mais elegante e sofisticada para este cálculo envolve propriedades de espaços maximalmente simétricos. Veja, por exemplo, Weinberg (1972).

Agora, com as soluções de ondas planas, tem-se que

$$i(\omega_+ - \omega_-)\varphi = im^2\tau\varphi.$$

Portanto, há uma descontinuidade na frequência, $\Delta\omega = m^2\tau$. Ou seja, uma onda plana pura é espalhada em uma coleção de ondas planas arbitrárias, de forma a não mais satisfazer a relação de dispersão. Este modelo, apesar de simples e artificial, mostra como a variação da geometria pode ser importante. O fator de escala varia apenas por um instante infinitesimal de tempo e mesmo assim pode alterar de forma significativa as soluções. O que se pode pensar então sobre um modelo cosmológico mais realista em que o universo está em constante evolução?

Na verdade, este exercício simples tem uma característica mais geral do que se pode imaginar a princípio: o que importa não é a variação da métrica em si, mas a intensidade com que essa variação ocorre. Como podemos ver neste exemplo, a métrica é a mesma antes e depois de $\eta = 0$.

De volta ao caso mais geral, com ξ e m arbitrários, a solução geral da equação de campo é

$$\phi(\eta, \vec{x}) = (2\pi)^{-3/2}a^{-1}(\eta) \int d^3k \left[a_k \varphi_k(\eta) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a_k^\dagger \varphi_k^*(\eta) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right].$$

a_k e a_k^\dagger , serão, como antes, interpretados como operadores de aniquilação e de criação, dando a solução da equação de Heisenberg. Como resultado da dependência temporal dos coeficientes, as soluções não podem, em geral, ser escritas em termos de funções elementares. Uma outra consequência é que não há uma escolha natural da base do espaço de soluções, análoga as ondas planas de frequência positiva e negativa no exemplo conformemente invariante. Em geral, isso torna impossível uma analogia formal com o campo livre para uma interpretação em termos de partículas.

φ_k pode ser normalizado de forma que as relações canônicas de comutação de ϕ e π se traduzam nas relações entre os operadores de aniquilação e criação

$$[a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta(k - k'),$$

$$[a_k, a_{k'}] = [a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger] = 0.$$

Entretanto, esta condição não torna φ_k único, apenas nos dá uma classe de representações de Fock. A normalização $(\phi_k, \phi_{k'}) = \delta(k - k')$ é equivalente à condição³

$$W[\varphi_k, \varphi_k^*] = \varphi_k \frac{\partial \varphi_k^*}{\partial \eta} - \varphi_k^* \frac{\partial \varphi_k}{\partial \eta} = i,$$

³ Compare com a definição de produto interno entre as soluções no capítulo 4.

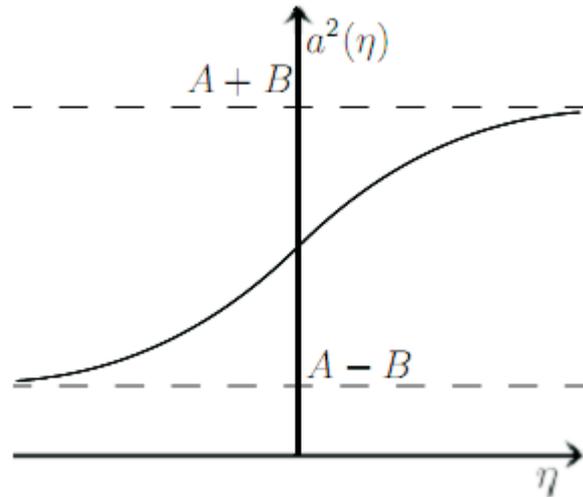


Figura 6.1: $a(\eta)$ segundo o modelo de Bernard e Duncan (1977).

onde W é o chamado Wronskiano das funções φ_k e φ_k^* .

4.1 O modelo de Bernard e Duncan

Para o cálculo dos coeficientes de Bogoliubov, considere o caso de acoplamento conforme, $\xi = 1/6$, com $m \neq 0$, com fator de escala⁴

$$a^2(\eta) = A + B \tanh \rho \eta, \quad \text{onde } A, B \text{ e } \rho \text{ são constantes.}$$

$a^2(\eta) \rightarrow A \pm B$ quando $\eta \rightarrow \pm\infty$, portanto, o espaço-tempo se torna minkowskiano no passado e no futuro distantes, e a equação de Klein-Gordon admite soluções de ondas planas nestas regiões. Apesar de artificial, este modelo ilustra bem o assunto deste trabalho.

A parte temporal da equação de Klein-Gordon assume a forma

$$\left[\frac{d^2}{d\eta^2} + k^2 + m^2 (A + B \tanh \rho \eta) \right] \varphi_k(\eta) = 0.$$

Introduzindo a notação

$$\begin{aligned} \omega_{in} &= [k^2 + m^2 (A - B)]^{1/2} \\ \omega_{out} &= [k^2 + m^2 (A + B)]^{1/2} \\ \omega_{\pm} &= \frac{1}{2} (\omega_{in} \pm \omega_{out}), \end{aligned}$$

⁴ Este modelo foi inventado pela primeira vez por Bernard e Duncan (1977).

os modos normalizados que se comportam como modos de frequência positiva no espaço de Minkowski no passado remoto ($\eta \rightarrow -\infty$) são

$$\begin{aligned} {}^{in}\varphi_k &= (2\omega_{in})^{-1/2} \exp \left[-i\omega_+\eta - \frac{i\omega_-}{\rho} \ln \left(2 \cosh \rho\eta \right) \right] \times \\ &{}_2F_1 \left(1 + \frac{i\omega_-}{\rho}, \frac{i\omega_-}{\rho}; 1 - \frac{i\omega_{in}}{\rho}; \frac{1}{2}(1 + \tanh \rho\eta) \right), \end{aligned}$$

enquanto os modos normalizados que se comportam como modos de frequência positiva no espaço de Minkowski no futuro distante ($\eta \rightarrow \infty$) são

$$\begin{aligned} {}^{out}\varphi_k &= (2\omega_{out})^{-1/2} \exp \left[-i\omega_+\eta - \frac{i\omega_-}{\rho} \ln \left(2 \cosh \rho\eta \right) \right] \times \\ &{}_2F_1 \left(1 + \frac{i\omega_-}{\rho}, \frac{i\omega_-}{\rho}; 1 + \frac{i\omega_{out}}{\rho}; \frac{1}{2}(1 - \tanh \rho\eta) \right), \end{aligned}$$

onde a função ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z)$, conhecida como função hipergeométrica, é solução de⁵

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]\frac{du}{dz} - \alpha\beta u = 0.$$

Uma propriedade importante da função hipergeométrica é

$$\lim_{z \rightarrow 0} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = 1,$$

de modo que

$$\lim_{\eta \rightarrow -\infty} {}^{in}\phi_k = [(2\pi)^3 2\omega_{in}]^{-1/2} \exp \left(i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega_{in}\eta \right),$$

e

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} {}^{out}\phi_k = [(2\pi)^3 2\omega_{out}]^{-1/2} \exp \left(i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega_{out}\eta \right).$$

Para o cálculo dos coeficientes de Bogoliubov, podemos usar as seguintes propriedades de transformações entre funções hipergeométricas

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} {}_2F_1(\gamma-\alpha, \gamma-\beta; \gamma; z),$$

e

$$\begin{aligned} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} {}_2F_1(\alpha, \beta; \alpha+\beta-\gamma; 1-z) + \\ &+(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} {}_2F_1(\gamma-\alpha, \gamma-\beta; \gamma-\alpha-\beta+1; 1-z), \end{aligned}$$

⁵ Veja, por exemplo, Gradshteyn & Ryzhik (2007).

que podem ser combinadas em

$$\begin{aligned} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)} {}_2F_1(\alpha, \beta; \alpha + \beta - \gamma; 1 - z) + \\ &+ z^{1-\gamma}(1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta} \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} {}_2F_1(1 - \beta, 1 - \alpha; \gamma - \alpha - \beta + 1; 1 - z), \end{aligned}$$

com

$$\alpha = 1 + \frac{i\omega_-}{\rho}, \quad \beta = \frac{i\omega_-}{\rho}, \quad \gamma = 1 - \frac{i\omega_{in}}{\rho} \quad \text{e} \quad z = \frac{1}{2}(1 + \tanh \rho\eta),$$

de forma que

$$\begin{aligned} z^{1-\gamma}(1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta} &= \left(\frac{e^{\rho\eta}}{2\cosh \rho\eta} \right)^{i\omega_{in}/\rho} \left(\frac{e^{-\rho\eta}}{2\cosh \rho\eta} \right)^{-i\omega_{out}/\rho} \\ &= \exp \left[i(\omega_{in} + \omega_{out})\eta + \frac{i(\omega_{out} - \omega_{in})}{\rho} \ln(2\cosh \rho\eta) \right] \\ &= \exp \left[2i\omega_+\eta + \frac{2i\omega_-}{\rho} \ln(2\cosh \rho\eta) \right]. \end{aligned}$$

Assim, podemos escrever os modos ${}^{in}\varphi_k$ em termos dos modos ${}^{out}\varphi_k$:

$$\begin{aligned} {}^{in}\varphi_k &= (2\omega_{in})^{-1/2} \exp \left[-i\omega_+\eta - \frac{i\omega_-}{\rho} \ln(2\cosh \rho\eta) \right] \times \\ &{}_2F_1 \left(1 + \frac{i\omega_-}{\rho}, \frac{i\omega_-}{\rho}; 1 - \frac{i\omega_{in}}{\rho}; \frac{1}{2}(1 + \tanh \rho\eta) \right) \\ &= (2\omega_{in})^{-1/2} \exp \left[-i\omega_+\eta - \frac{i\omega_-}{\rho} \ln(2\cosh \rho\eta) \right] \frac{\Gamma(1 - i\omega_{in}/\rho)\Gamma(-i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(-i\omega_+/\rho)\Gamma(1 - i\omega_+/\rho)} \times \\ &{}_2F_1 \left(1 + \frac{i\omega_-}{\rho}, \frac{i\omega_-}{\rho}; 1 + \frac{i\omega_{out}}{\rho}; \frac{1}{2}(1 - \tanh \rho\eta) \right) + \\ &(2\omega_{in})^{-1/2} \exp \left[i\omega_+\eta + \frac{i\omega_-}{\rho} \ln(2\cosh \rho\eta) \right] \frac{\Gamma(1 - i\omega_{in}/\rho)\Gamma(i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(1 + i\omega_-/\rho)\Gamma(i\omega_-/\rho)} \times \\ &{}_2F_1 \left(1 - \frac{i\omega_-}{\rho}, -\frac{i\omega_-}{\rho}; 1 - \frac{i\omega_{out}}{\rho}; \frac{1}{2}(1 - \tanh \rho\eta) \right) \\ &= \alpha_k {}^{out}\varphi_k + \beta_k {}^{out}\varphi_k^*, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \left(\frac{\omega_{out}}{\omega_{in}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(1 - i\omega_{in}/\rho)\Gamma(-i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(-i\omega_+/\rho)\Gamma(1 - i\omega_+/\rho)}, \\ \beta_k &= \left(\frac{\omega_{out}}{\omega_{in}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(1 - i\omega_{in}/\rho)\Gamma(i\omega_{out}/\rho)}{\Gamma(1 + i\omega_-/\rho)\Gamma(i\omega_-/\rho)}. \end{aligned}$$

Finalmente, com as seguintes propriedades da função Gamma,

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x) \quad \text{e} \quad |\Gamma(iy)|^2 = \frac{\pi}{y \sinh \pi y}, \quad y \in \mathbb{R},$$

encontramos

$$|\beta_k|^2 = \frac{\sinh^2(\pi\omega_-/p)}{\sinh(\pi\omega_{out}/\rho) \sinh(\pi\omega_{in}/p)}.$$

Assumindo que o campo escalar estava inicialmente no estado de vácuo, $|0\rangle_{in}$, no passado distante, quando o espaço-tempo era minkowskiano, observadores inerciais não detectariam a presença de partículas. O universo evolui, e o espaço-tempo volta a ser minkowskiano no futuro distante. O campo ainda encontra-se no estado $|0\rangle_{in}$, de acordo com o formalismo de Heisenberg, no entanto, observadores inerciais nesta região ($\eta \rightarrow \infty$) não registram mais este estado como sendo o estado de vácuo. O número esperado de partículas no modo k é $|\beta_k|^2$. Note, entretanto, que se $m = 0$, $|\beta_k|^2 = 0$ e não há criação de partículas como já era esperado pela invariância conforme.

4.2 Expansão Lenta

Considerando o modelo de Bernard e Duncan, notamos que no limite sem massa, $\omega_- \rightarrow 0 \Rightarrow |\beta_k|^2 = 0$, não há produção de partículas. Esta situação é mais geral que o exemplo sugere: um campo conformalmente invariante se propaga em um espaço-tempo conforme ao espaço de Minkowski. A criação de partículas ocorre quando a simetria conforme é quebrada pela presença de massa. O processo de criação pode ser considerado resultado do acoplamento do fator de expansão do espaço-tempo ao campo escalar através da massa, resultando em uma massa efetiva variável. O campo gravitacional variável fornece energia aos modos do campo escalar.

Como já discutimos, quando o espaço-tempo é curvo, não há geralmente uma definição natural do conceito partícula. Apesar disto, devido a simetria especial do espaço-tempo de FRLW, pode-se identificar uma classe privilegiada de observadores, os observadores comoventes com o fluido de matéria no universo, para os quais o universo se expande de forma isotrópica. E é possível então identificar partículas com as excitações de detectores comoventes.⁶

De qualquer forma, o número de partículas não é constante, o que torna sua medida imprecisa. Isto é, pode haver criação de partículas durante o processo de medida. Há ainda uma incerteza no número de partículas devido à relação de incerteza de Heisenberg. Apesar disto, deve haver algum tipo de aproximação no caso de um espaço curvo tal que o número de partículas tem algum significado. Os argumentos acima sugerem que se a taxa

⁶ Birrell e Davies (1982)

da criação de partículas é baixa, ou se a massa das partículas é grande, então a noção de um número de partículas bem definido torna-se um conceito útil.

A produção de partícula depende obviamente da taxa de expansão do universo. No limite de uma expansão muito fraca, esperamos que a taxa de criação deve cair a zero, desse modo recuperando a teoria do espaço de Minkowski. No caso do modelo de Bernard e Duncan, $|\beta_k|^2 \propto B^2 \rightarrow 0$ enquanto a quantidade total de expansão se aproxima de zero, e o limite do espaço de Minkowski é obtido. Entretanto, a criação de partículas cai muito mais rapidamente a zero se a própria taxa de expansão se aproxima de zero. Esta taxa é parametrizada por ρ , e para $\rho \rightarrow 0$ obtemos um declínio exponencial

$$|\beta_k|^2 \rightarrow \exp\left(-\frac{2\pi\omega_{in}}{\rho}\right) \rightarrow 0.$$

O parâmetro ρ/ω_{in} é pequeno se $\rho \ll k$ ou m . Fisicamente, espera-se que o movimento de expansão excite os modos do campo para os quais ω é menor que a taxa da expansão. Se ω for muito maior que esta, a produção de partículas é exponencialmente suprimida. Assim, os modos de grande k são pouco excitados. Similarmente, a produção de partículas de grande massa é exponencialmente pequena por causa da grande quantidade de energia que deve emergir do campo gravitacional para fornecer massa de repouso às partículas.

As observações acima são válidas para qualquer espaço-tempo de FLRW. Em particular, o declínio da taxa de criação de quanta para m ou $k \rightarrow \infty$ é uma característica completamente geral.

No caso de um universo de FLRW com regiões in e out estáticas, se o vácuo in ou o vácuo out é escolhido como o estado quântico do campo, um detector de partículas comovente provavelmente não registrará quanta nos modos de alta energia em toda a sua linha de mundo. Contudo que a frequência dos modos seja muito maior do que a taxa da expansão, a probabilidade de nenhuma resposta do detector permanecerá muito próxima da unidade. Entretanto, para modos de energias mais baixas, haverá partículas registadas, sinalizando que o estado de vácuo não é mais uma boa aproximação. Se não há regiões estáticas in ou out, uma definição aproximada de partículas não pode ser baseada na construção acima, e um outro método deve ser encontrado.⁷

Uma descrição matemática mais precisa das idéias acima pode ser encontrada em Birrell e Davies (1982), onde o conceito de vácuo adiabático é explicado. A importância deste conceito reside no fato de o número de partículas ser um invariante adiabático,

⁷ Birrell e Davies (1982), e referências lá encontradas.

independente do aumento total no fator de escala, desde que a taxa de expansão do universo no momento considerado seja suficientemente lenta.

5

Cosmologia, Inflação

Observações mostram que, em escalas suficientemente grandes (a partir de 100 Mpc), o universo é aproximadamente homogêneo e isotrópico.¹ Em escalas menores, evidentemente, existem galáxias, aglomerados, etc. Este princípio cosmológico, apesar de não ser exato, é uma das características mais importantes do universo pois permite descrevê-lo em boa aproximação a partir de poucos dados observacionais. A questão se o universo deixa de ser homogêneo novamente em escalas além do observável pode apenas ser especulada.

O princípio cosmológico, além de ser interessante por si só, simplifica enormemente as equações dinâmicas e permite a determinação da métrica que descreve a evolução do universo apenas em termos do fator de escala $a(t)$ e da constante de curvatura k . Evidentemente, deve ser adotado um sistema referencial relativo ao grupo de observadores comoventes com o fluido de matéria do universo, para o qual a simetria é explícita. $a(t)$ e k podem ser tomados como parâmetros a comparar com observações.

As equações fundamentais da cosmologia são as equações de Einstein, a equação de conservação de energia, e a equação de estado, que formam um sistema completo que deter-

¹ Mukhanov (2005).

mina as duas funções desconhecidas $a(t)$ e $\rho(t)$, onde $\rho(t)$ é a densidade de matéria/energia. A história do universo depende, portanto, da geometria e da distribuição de matéria e energia.

A métrica de Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW) é uma solução exata das equações de Einstein da relatividade geral que descreve um universo dinâmico, homogêneo e isotrópico:

$$d\tau^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta d\phi^2 \right],$$

onde $a(t)$ é uma função desconhecida do tempo, e k é uma constante que pode ser escolhida de forma a ter o valor $+1$, 0 , ou -1 , caso a curvatura seja positiva, nula ou negativa, respectivamente.

É possível mostrar² que o conteúdo de matéria do universo está em média em repouso no sistema de coordenadas r , θ , ϕ , como era esperado para um observador comovente. Além disso, o tensor energia-momento toma necessariamente a forma de um fluido perfeito.

Um importante avanço em cosmologia foi a descoberta que o universo está em expansão. Na década de 1920, Edwin Hubble notou que a luz de galáxias distantes sofre redshift em relação à luz de galáxias próximas e interpretou o redshift como um efeito Doppler concluindo que as galáxias estão se afastando. Hubble observou ainda as galáxias estão se afastando radialmente, com uma velocidade v proporcional à sua distância r ,

$$v = H_0 r.$$

H_0 é o valor atual do chamado parâmetro de Hubble. De fato, a lei de Hubble é a única lei de expansão compatível com um universo homogêneo.³ Por causa de incertezas, a medida do parâmetro de Hubble atual é conhecida com uma precisão modesta e vale $65 - 85 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.

O valor do parâmetro de Hubble, pode dar uma estimativa para a idade do universo, o tempo decorrido desde que o universo era algo próximo de uma singularidade. Se seu valor fosse constante, a idade seria de

$$H_0^{-1} = \frac{1}{h} \times 10^{10} \text{anos},$$

onde $h = 0,65 - 0,85$. Este valor seria de aproximadamente 13 bilhões de anos. Em todo caso, mesmo que o parâmetro de Hubble seja variável, seu inverso certamente tem alguma relação com a idade do universo.

² Weinberg (1972).

³ Mukhanov (2005).

A expansão observada por Hubble não deve ser interpretada como o movimento de galáxias sobre um espaço estático. É o próprio espaço que está em expansão, levando consigo as galáxias. Assim, na escala cosmológica, de acordo com a relatividade geral de Einstein, é a expansão do espaço que está se manifestando.

Como a gravidade exerce atração sobre as galáxias, espera-se que o movimento de expansão seja retardado. No entanto, ao final dos anos de 1990, foi descoberto através de observações de supernovas tipo Ia que a expansão do universo está acelerando. Alguma forma ainda desconhecida de energia domina o universo, e o faz acelerar. Estas observações foram confirmadas por diversas outras fontes independentes: radiação cósmica de fundo e estrutura em larga escala, a idade do universo, assim como medidas melhoradas de supernovas, e propriedades de raio-X de aglomerados de galáxias.

O resquício mais proeminente do jovem e quente universo é a radiação cósmica de fundo a 2,7K. A radiação apresenta um espectro de corpo negro e é quase isotrópica com variações em intensidade de apenas 0,01%.⁴ Sabendo a temperatura atual da radiação, é possível determinar a história térmica do universo desde os primeiros minutos, e calcular a produção de núcleos.⁵

Segundo o modelo padrão de cosmologia, o universo (incluindo o próprio espaço-tempo) surgiu há cerca de 13 bilhões de anos quando começou a expandir a partir de um estado inconcebivelmente quente e denso. Desde então, o universo continuou seu longo processo de expansão e de resfriamento, alcançando eventualmente o estado frio, escasso observado atualmente.

O universo primordial era um caos de matéria e energia, em que pares de partícula e antipartícula eram copiosamente criados e aniquilados. Enquanto o universo expande, torna-se eventualmente frio demais para produzir determinados tipos de partículas.

Cerca de 3 minutos após o Big Bang, as reações nucleares tornam-se ineficientes a uma temperatura de aproximadamente 0,05MeV. Como resultado, prótons e nêutrons livres formam hélio e outros elementos leves. As abundâncias dos elementos leves resultantes da nucleossíntese primordial estão em bom acordo com dados observacionais.

Após algumas centenas de milhares de anos, o universo esfria o suficiente para que núcleos e elétrons livres formem átomos. Este período é chamado de era da recombinação. A aproximadamente 1000K o plasma se condensa em átomos eletricamente neutros, de

⁴ Mukhanov (2005).

⁵ Weinberg (1972).

modo que as forças eletromagnéticas não terão mais efeito em larga escala e a gravidade passa a dominar, permitindo a condensação galáctica, e, no curso devido, a condensação nas estrelas, em que as reações de fusão nuclear ocorrem, produzindo mais elementos químicos. O universo torna-se transparente para a radiação eletromagnética, pois quase não há mais elétrons livres para espalhar a luz. A radiação cósmica de fundo propaga-se livremente desacoplada da matéria. A matéria escura já estava formando halos.

Em alguns bilhões de anos, galáxias e aglomerados se formam com a matéria bariônica nos centros dos halos pré-existentes de matéria escura. As estruturas são formadas a partir de perturbações de densidade como resultado da instabilidade gravitacional.

5.1 Inflação

Apesar do sucesso do modelo padrão de cosmologia, há ainda muitas questões abertas. A história da evolução do universo já é mais ou menos bem estabelecida desde a época da aniquilação de pósitrons e elétrons até o presente momento com alguma confiança de acordo com observações. O que acontece antes deste período, entretanto, ainda é tópico de grandes debates.

Segundo o paradigma da inflação, em algum momento próximo ao da escala de energia da grande unificação⁶ das interações eletro-fracas e a força forte (10^{14}GeV ou 10^{-34}s), o universo passou por um período de expansão acelerada. A idéia é que antes do período de dominação da radiação, houve um período em que a densidade de energia do universo foi dominada pela energia do vácuo, e o fator de escala cresceu exponencialmente.

Alan Guth observou, em um modelo de unificação que estava considerando, que um campo escalar poderia se encontrar em um estado de potencial mínimo local, que correspondia a um estado sem quebra de simetria.⁷ A energia do vácuo permaneceria constante enquanto o universo crescia. A inflação seria eventualmente interrompida por uma barreira quântica. Com a quebra de simetria, o campo escalar migra para o estado de potencial mínimo global, correspondendo ao universo atual.

O modelo inflacionário não atraiu muita atenção inicialmente, até ficar evidente que este explicava de forma simples e elegante alguns dos problemas do modelo padrão. O próprio Guth notou, entretanto, que seu modelo conduzia a algumas conseqüências ina-

⁶ Mukhanov (2005).

⁷ Guth (1981). Weinberg (2008).

ceitáveis, pois tornaria o universo extremamente heterogêneo ou extremamente rarefeito. Ao contrário a inflação deveria preparar as condições iniciais para o modelo padrão subsequente. Desde então, novos modelos inflacionários são propostos e aprimorados.

Alguns Problemas do Modelo Padrão

Singularidade

O modelo padrão tem uma singularidade inicial em $t = 0$, e a temperatura diverge neste limite, $T \rightarrow \infty$. Assim, nenhuma condição inicial pode ser definida em $t = 0$ e, de fato, nenhuma lei da física. Além disso, quando T é da ordem da massa de Planck ($M_p \sim 10^{19}$ GeV) ou maior, as equações do modelo padrão não são confiáveis, pois efeitos de gravitação quântica tornam-se dominantes. Assim, é mais seguro estudar o cenário do modelo padrão a partir de temperaturas abaixo desta escala de energia. As condições iniciais podem ser tomadas como a descrição do universo no momento correspondente, e as equações dinâmicas descrevem a evolução subsequente.

A questão da singularidade inicial, talvez a mais grave do modelo padrão, onde não há qualquer lei da física em geral não é tocada pelo paradigma da inflação.

Horizonte

O conceito de horizonte cosmológico é importante em cosmologia pois está diretamente ligado ao conceito de causalidade.

Imagine um fóton que se move em direção à nossa galáxia. Pode ser que o universo cresça a uma taxa tal que este fóton nunca nos alcance, dependendo de sua distância. Há o caso limite em que o fóton nos alcançaria após um intervalo de tempo infinito. Tracejando um círculo de raio igual a distância deste fóton, o limite determina uma fronteira chamada horizonte de eventos, além da qual qualquer evento estará sempre inacessível a observação.

Há ainda um outro tipo de horizonte. Se o universo tem uma idade finita, a luz emitida em qualquer evento percorreu desde então somente uma distância finita e a região do espaço de onde podemos receber informação em um dado momento de tempo é limitada. A fronteira deste volume é chamada de horizonte de partículas, e representa a linha de frente dos primeiros fótons emitidos. Hoje, o universo tem aproximadamente 13 bilhões de anos, assim uma estimativa para o horizonte de partículas é de 13 bilhões de anos-luz.

O problema é que o universo é altamente homogêneo, apesar de haver regiões causalmente desconectadas, segundo o modelo padrão.

Planeza

Sabe-se que a densidade de energia do universo atualmente é próxima ao valor crítico ρ_{cr} que separa um universo aberto de um fechado,

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_{cr}} \approx 1, \quad \text{onde} \quad \rho_{cr}(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G} \quad \text{e} \quad H = \frac{\dot{a}}{a}.$$

O ponto é que a condição $\Omega \approx 1$ é instável. Condições iniciais típicas levariam a um universo fechado que recolapsa quase imediatamente, ou a um universo aberto que esfria abaixo de 3K nos primeiros segundos de sua existência chegando a um valor de ρ muito menor do que ρ_{cr} . Como nosso universo conseguiu ficar tão velho? Os valores iniciais de ρ e de H devem ter um ajuste fino com uma precisão extraordinária para produzir o universo plano como é observado hoje.

Resolvendo os Problemas

Uma era em que a densidade de energia foi dominada pela energia do vácuo, antes da era da radiação, permite uma expansão a uma taxa necessária para que mesmo áreas diametralmente opostas no céu estejam conectadas. Como consequência desta expansão, todo o universo observável expandiu-se a partir de uma pequena região causalmente conectada em equilíbrio termodinâmico.

Após a inflação, uma região com as dimensões da escala de Planck ($l_p \sim 10^{-33}$ cm), cresce a um valor muitas ordens de grandeza maior do que o universo observável hoje ($\sim 10^{28}$ cm). O campo escalar responsável pela inflação começa a oscilar em torno do mínimo de seu potencial e perde sua energia, enquanto pares de partículas são criados. Isto é, a expansão faz o universo muito grande e muito plano, então o falso vácuo decai aquecendo o universo. As partículas criadas interagem umas com as outras até atingir um estado de equilíbrio térmico.

O universo é quase exatamente homogêneo em larga escala porque as perturbações de densidade foram esticadas exponencialmente durante a inflação. Além disso, a densidade de monopólos primordiais e de outros defeitos indesejáveis é diluída. O universo torna-se incrivelmente grande. Entretanto, estas idéias precisam de uma análise mais cuidadosa

levando em conta as equações de Einstein exatas, o que é um trabalho bastante complexo ainda não realizado.⁸

Criação de Matéria após a Inflação

A teoria do reaquecimento do universo depois da inflação cósmica talvez seja a aplicação mais importante da teoria quântica de criação de partículas, uma vez que quase toda a matéria que constitui o universo pode ter sido criada neste processo, onde o universo é reaquecido e sua simetria bariônica é quebrada.⁹ O reaquecimento é a conexão entre o universo inflacionário dominado pela energia do vácuo e o universo quente de Friedmann dominado por radiação. Os detalhes dependem do modelo particular de inflação.

Durante a inflação, a energia é concentrada em um campo clássico lentamente variável chamado inflaton, ϕ . Logo após a inflação, o campo começa a oscilar em torno do mínimo de seu potencial efetivo, e eventualmente produz partículas, que interagem umas com as outras até atingir um estado de equilíbrio térmico a uma temperatura T_r , chamada temperatura de reaquecimento.

O campo homogêneo ϕ pode ser representado como uma coleção de partículas, cada uma das quais decai independentemente. Se a criação de partículas é suficientemente lenta (por exemplo, se o inflaton é acoplado aos campos de matéria apenas gravitacionalmente), os produtos do decaimento interagem simultaneamente uns com os outros e chegam a um estado de equilíbrio térmico. Este reaquecimento gradual pode ser tratado no âmbito da teoria perturbativa de criação e termalização de partículas.¹⁰

Entretanto, em geral, a produção de partículas ocorre em regimes não-perturbativos, em mecanismos que podem acelerar o decaimento do campo, como ressonância paramétrica¹¹ e instabilidade tachyônica¹². Uma característica da criação de partículas em regimes não-perturbativos é que o processo ocorre longe do equilíbrio térmico. Como consequência, estes efeitos produzem flutuações não-térmicas de alta energia que podem ter importância para certos fenômenos no estudo do universo primordial, tal como transições de fase e ba-

⁸ Goldwirth e Piran (1992).

⁹ Linde (1990).

¹⁰ Linde (1990).

¹¹ Kofman, Linde e Starobinsky (1994).

¹² Felder et al. (2001)

riogenesis.¹³

Esta fase inicial de decaimento rápido, chamada pré-aquecimento, é seguida por uma fase de interações turbulentas entre os diferentes modos. Segue, finalmente, o decaimento mais lento usual do inflaton, acabando eventualmente em equilíbrio.

É importante lembrar que este processo de criação de partículas ocorre como efeito do decaimento do campo inflaton e não como efeito da evolução do campo gravitacional.

5.2 Campo Escalar no Espaço de de Sitter

O espaço de de Sitter é um caso particular de um universo homogêneo e isotrópico com uma constante cosmológica positiva, Λ , que pode ser descrito como um fluido hidrodinâmico ideal com equação de estado $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$. O tensor energia-momento, nesse caso, é $T_\nu^\mu = (p + \rho)u^\mu u_\nu - p\delta_\nu^\mu = \rho\delta_\nu^\mu$, e segue da lei de conservação, $T_{\nu;\mu}^\mu = 0$, que $\rho = \text{const.}$ Para um universo isotrópico plano, a equação de Friedmann se reduz a

$$H_\lambda = \frac{\dot{a}}{a} = \left(\frac{8\pi G}{3} \rho_\lambda \right)^{1/2},$$

cuja solução é

$$a(t) = a_0 e^{H_\lambda t},$$

que descreve um universo de de Sitter plano com parâmetro de Hubble constante, H_λ . A métrica é dada por

$$ds^2 = dt^2 - H_\lambda^{-2} \exp(2H_\lambda t) \delta_{ij} dx^i dx^j,$$

onde, por conveniência, escrevemos $a_0 = H_\lambda^{-1}$; e descreve um espaço-tempo maximamente simétrico. A métrica de de Sitter pode ser escrita em termos das coordenadas esféricas e do tempo conforme

$$\eta = - \int_t^\infty \frac{dt}{a} = -\exp(-H_\lambda t),$$

$$ds^2 = \frac{1}{H_\lambda^2 \eta^2} (d\eta^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2),$$

onde $-\infty < \eta < 0$ e $0 \leq r < \infty$. As coordenadas (η, r, θ, ϕ) cobrem apenas metade do espaço-tempo de de Sitter, portanto, são coordenadas incompletas.¹⁴ Entretanto, em aplicações cosmológicas, apenas uma pequena região do espaço de de Sitter é usada para

¹³Lemoine et al. (2007).

¹⁴Mukhanov (2005).

descrever aproximadamente o período inflacionário da história do universo, e a incompletude das coordenadas não é um problema.

Vamos estudar um campo escalar massivo minimamente acoplado no espaço de de Sitter. O fator de escala em função do tempo conforme é dado por

$$a(\eta) = -\frac{1}{H_\lambda \eta}, \quad -\infty < \eta < 0.$$

Nesse caso, a parte temporal da equação de Klein-Gordon é dada por

$$\frac{d^2 \varphi_k}{d\eta^2} + \left[k^2 - \left(2 - \frac{m^2}{H_\lambda^2} \right) \frac{1}{\eta^2} \right] \varphi_k = 0.$$

A solução geral desta equação é conhecida em termos das funções de Bessel, J_n e Y_n .¹⁵

O comportamento assintótico das soluções pode ser obtido direto da equação. Dado um número de onda k , considere o limite $k|\eta| \gg 1$, que corresponde a η muito negativo. Nesse caso, o comprimento de onda físico,

$$l_p \sim a(\eta)k^{-1} \simeq \frac{H_\lambda^{-1}}{k|\eta|},$$

é muito menor do que a escala de curvatura H_λ^{-1} . Portanto, o modo não é afetado pela gravidade e se comporta como no espaço de Minkowski. O termo de η^{-2} pode ser ignorado donde segue que $\omega_k \approx k$. As soluções são, portanto, as soluções conhecidas de um oscilador harmônico, $\exp(\pm ik\eta)$, e podemos definir o estado de vácuo a partir dos modos de frequência negativa

$$\varphi_k \sim \frac{1}{\sqrt{k}} e^{ik\eta}.$$

Enquanto o universo se expande, o valor de $|\eta|$ decresce. A escala física de um dado modo k é da ordem da escala de curvatura em um instante $\eta = \eta_k$ quando $k|\eta_k| \sim 1$. Este momento é chamado de cruzamento do horizonte. Os modos $k|\eta| \gg 1$ são eventualmente alongados pela expansão e passam a sentir a curvatura do universo. Após o cruzamento do horizonte, quando $k|\eta| \ll 1$, o termo k^2 pode ser desprezado e segue que

$$\frac{d^2 \varphi_k}{d\eta^2} - \left(2 - \frac{m^2}{H_\lambda^2} \right) \frac{1}{\eta^2} \varphi_k = 0.$$

A solução geral, simples de verificar, é

$$\varphi_k(\eta) = A_k |\eta|^{n^+} + B_k |\eta|^{n^-},$$

¹⁵Gradshteyn e Ryzhik (2007).

onde

$$n_{\pm} = \frac{1}{2} \pm \left(\frac{9}{4} - \frac{m^2}{H_{\lambda}^2} \right)^{1/2}.$$

Quando $\eta \rightarrow 0$, o termo proporcional a $B|\eta|^{n^-}$ domina. Como esta solução não oscila a noção de partícula não é muito bem definida para $k|\eta| \ll 1$. Além disso, para $m^2 < 2H_{\lambda}^2$, a massa efetiva é negativa e não existe um estado de energia mínimo.

Entretanto, existe um estado quântico chamado vácuo de Bunch-Davies que é invariante em relação as isometrias da métrica de de Sitter, e não depende do tempo. Este estado pode ser construído a partir da solução exata da equação de Klein-Gordon com a condição de excitação mínima no passado remoto, $\eta \rightarrow -\infty$, quando $\varphi_k \sim \omega_k^{-1/2} \exp(i\omega_k \eta)$.¹⁶ Podemos também calcular como a amplitude de flutuações do campo depende do número de onda físico $k_p = k/a$ a partir dos limites assintóticos das soluções,¹⁷

$$\delta_{\phi} = \frac{k^3 |\varphi_k|}{2\pi a} \sim \begin{cases} \frac{k_p}{2\pi} & , k_p \gg H_{\lambda} \\ L_p^{-m^2/3H_{\lambda}^2} & , k_p \ll H_{\lambda} \end{cases}.$$

Onde

$$n = \left(\frac{9}{4} - \frac{m^2}{H_{\lambda}^2} \right)^{1/2}.$$

e consideramos $m^2 \ll H_{\lambda}^2$, por simplicidade. Para comprimentos de onda curtos, $L_p = 2\pi/k_p$, o espectro de Bunch-Davies concorda com o espectro de flutuações no espaço de Minkowski, como era esperado pois a gravitação não exerce muita influência nesse caso. Para comprimentos de onda longos, a amplitude de flutuações decai fracamente, e no caso de um campo sem massa, $m = 0$, a amplitude é invariante de escala.

¹⁶Mukhanov (2007).

¹⁷Mukhanov (2007).

6

Universos Não-Singulares com Ricochete

A inflação cósmica tornou-se o paradigma mais aceito em cosmologia, e alguns já a consideram parte do modelo padrão de cosmologia. Além de resolver alguns dos problemas do modelo padrão de cosmologia, os modelos mais simples prevêem um espectro quase-invariante de escala de perturbações escalares de grande comprimento de onda, como observado, com perturbações tensoriais de baixa amplitude.

Este paradigma sofre, entretanto, de algumas questões e omissões. A existência de uma singularidade inicial (onde nenhuma física é possível, pois leis físicas pressupõe espaço-tempo) no modelo cosmológico padrão não é mencionada pela inflação. Segundo a relatividade geral, o estado inicial do universo era uma singularidade causal. Neste ponto, as geodésicas tipo-tempo são cortadas e não admitem extensão para o passado. Este comportamento peculiar corresponde à divergência da curvatura R e da densidade de energia ρ no modelo padrão do Big-Bang.

Acredita-se que tais singularidades não são estados reais, mas resultados do fato de que a teoria clássica não é suficiente neste regime. Nas proximidades da singularidade inicial, quando o universo alcança a escala de energia de Planck, efeitos quânticos da gravitação

podem de alguma forma regularizar este comportamento singular.

Não há ainda consenso se a inflação realmente resolve o problema da homogeneidade contanto que sejam necessárias condições iniciais especiais em uma região relativamente grande para iniciar a inflação. Os modelos inflacionários mais modernos (inflação caótica), não apresentam o problema de condições iniciais.¹ Nestes modelos, somente certas regiões sofrem inflação e crescem a proporções além do observável. Além destas regiões, o universo seria altamente não homogêneo como um crescente fractal. A objeção que se faz a este cenário é que há aqui uma espécie de princípio antropológico, segundo o qual o homem se encontra justamente em uma das regiões que sofreu inflação. A visão mais cética é que o paradigma da inflação ameniza mas não resolve completamente o problema.² No fim das contas pode ser necessário conhecer o estado do universo quando este deixa a escala de Planck.

Além disso, alguns comprimentos de onda cosmologicamente relevantes devem, em alguma fase inicial, ter sido trans-planckianos; o que pode gerar dúvidas sobre a validade das predições das perturbações cosmológicas da inflação. Finalmente, os modelos mais simples e comuns da inflação precisam de um campo escalar, cujas propriedades teóricas exigidas para o estabelecimento da fase inflacionária não são obviamente compatíveis com aquelas obtidas da teoria fundamental de física de partículas.

Em virtude destas dificuldades, a pergunta pode ser feita se a solução inflacionária é única. Cosmologias com ricochete, em que a fase atual de expansão é precedida por uma fase de contração, vem sendo estudadas como potenciais alternativas à inflação para resolver os problemas do modelo padrão de Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker. Neste paradigma, a história do universo é continuada ao passado infinito, de modo que os problemas relacionados a condições iniciais finamente ajustadas no regime de grande curvatura sejam evitados.

Modelos com ricochete têm sido propostos desde a década de 1970, no entanto, devido aos sucessos do paradigma da inflação cósmica, estes modelos não chamaram muita atenção.³ Entretanto, a descoberta de que o universo está em expansão acelerada no fim dos anos 1990 trouxe de volta a idéia de que $\rho + 3p$ pode ser negativo,⁴ que é uma das

¹ Lemoine et al. (2007).

² Goldwirth e Piran (1992).

³ Um review extenso sobre modelos com ricochete e um pouco de sua história pode ser encontrado em Novello e Bergliaffa (2008).

⁴ Onde ρ é a densidade e p é a pressão do fluido de matéria do universo.

condições necessárias para um ricochete cosmológico na relatividade geral,⁵ e contribuiu para o renascimento dos modelos de universos não singulares.

Uma das principais motivações para universos com ricochete é a ausência de uma singularidade inicial. Como consequência, quantidades divergentes são evitadas e o problema de Cauchy é bem colocado. Uma outra motivação importante é que uma fase de contração pode resolver alguns dos problemas do modelo cosmológico padrão de forma similar à inflação.⁶

6.1 Exemplo de Modelo com Ricochete

Considere o modelo de Friedmann-Robertson-Walker com fator de escala dado por

$$a(\eta) = a_0 \left[1 + \left(\frac{\eta}{\eta_0} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Quando $\eta \rightarrow \pm\infty$, no passado e no futuro distantes, o fator de escala diverge, portanto, este modelo é assintoticamente plano. Este modelo, proposto por Peter e Pinto-Neto (2002), é uma solução das equações de Einstein para um universo preenchido homogeneamente por um fluido de radiação e por um campo escalar com energia negativa descritos pela ação

$$S = \int d^4x \sqrt{g} \left(-\frac{R}{16\pi} - \epsilon - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \phi_{;\mu} \phi_{;\nu} \right).$$

onde ϵ é a densidade de energia do fluido de radiação. A solução deste sistema é a métrica $a(\eta)$ de forma que o atual estado de expansão foi precedido por uma fase de contração, de forma que não há singularidade.

A parte temporal da equação de Klein-Gordon é dada por

$$\left[\frac{d^2}{d\eta^2} + k^2 + m^2 a^2 - \frac{a''}{a} + \xi R a^2 \right] \varphi_k(\eta) = 0, \quad \text{onde} \quad \frac{a''}{a} = \frac{\eta_0^2}{(\eta^2 + \eta_0^2)^2}.$$

a''/a pode ser interpretado como um termo de interação entre o campo gravitacional e o campo escalar.

Considere, por simplicidade, o caso de partículas relativísticas, $m = 0$, com acoplamento mínimo, $\xi = 0$:

$$\left[\frac{d^2}{d\eta^2} + k^2 - \frac{a''}{a} \right] \varphi_k(\eta) = 0.$$

⁵ Molina-Paris e Visser (1999).

⁶ Peter e Pinto-Neto (2008).

Nas regiões em que $\eta \rightarrow \pm\infty$, o fator de escala diverge, portanto, o espaço-tempo é minkowskiano. Nestas regiões, φ_k se propaga como ondas livres. Entretanto, para valores finitos de $|\eta|$, φ_k encontra uma barreira de potencial como indicado na figura.

O potencial $V = a''/a$, que dá a escala de curvatura do fundo com ricochete $l_C \equiv aV^{-1/2}$ é insignificante longe do ricochete, quando $|\eta| \rightarrow \infty$, e tem seu máximo no próprio ricochete, em torno de $\eta = 0$. Portanto, o potencial é muito menor do que a escala de curvatura no passado distante ($k^2 \gg V$), onde pode-se assumir que o campo escalar oscila livremente no estado de vácuo quântico. Quando o ricochete se aproxima, o potencial cresce em relação à escala de curvatura e o campo escalar eventualmente penetra no potencial ($k^2 \ll V$), onde suas oscilações são amplificadas. Finalmente, o potencial torna-se outra vez menor do que a escala de curvatura no futuro distante, onde o campo deixa o potencial e oscila livremente outra vez, agora amplificado. Como as oscilações são amplificadas no ricochete, pode haver criação de partículas, cuja densidade deve ser avaliada.

No caso em que $k \gg 1$, o termo a''/a pode ser desprezado, isto é, não há interação com o campo gravitacional; e a equação de φ_k se reduz à equação de um oscilador harmônico simples, portanto, não há produção de partículas. Portanto, vamos apenas considerar o caso $k \ll 1$, de forma que $k \sim a''/a \approx 0$ quando $\eta < \eta^-$ ou $\eta > \eta^+$, onde

$$k^2 = \frac{a''}{a}(\eta^\pm) = \frac{\eta_0^2}{[(\eta^\pm)^2 + \eta_0^2]^2} \approx \frac{\eta_0^2}{(\eta^\pm)^4} \Rightarrow \eta^\pm = \pm \sqrt{\frac{\eta_0}{k}}.$$

Para o cálculo de produção de partículas, pode-se impor que o campo escalar estava inicialmente no estado de vácuo. Este modelo não possui regiões assintoticamente estáticas, mas evolui suficientemente devagar no passado/futuro distante, portanto, podemos invocar a noção de vácuo adiabático.⁷ A solução da parte temporal da equação de Klein-Gordon para $\eta < \eta^-$ é

$${}^{in}\varphi_k = k^{-1/2} e^{ik(\eta-\eta^-)},$$

e para $\eta > \eta^+$ é

$$\begin{aligned} \varphi_k &= k^{-1/2} \left[\alpha_k^+ e^{ik(\eta-\eta^+)} + \alpha_k^- e^{-ik(\eta-\eta^+)} \right] \\ &= k^{-1/2} \left[\alpha_k^+ e^{ik(\eta^--\eta^+)} e^{ik(\eta-\eta^-)} + \alpha_k^- e^{-ik(\eta^--\eta^+)} e^{-ik(\eta-\eta^-)} \right] \\ &= \alpha_k^+ e^{ik(\eta^--\eta^+)in} \varphi_k + \alpha_k^- e^{-ik(\eta^--\eta^+)in} \varphi_k^*. \end{aligned}$$

⁷ Birrel e Davies (1982).

Os coeficientes α_k^+ e α_k^- obedecem a condição de normalização, $|\alpha_k^+|^2 - |\alpha_k^-|^2 = 1$, e podem ser escritos em termos de φ_k e φ_k' :

$$\alpha_k^\pm = \frac{1}{2ik^{1/2}} [\pm\varphi_k'(\eta^+) + ik\varphi_k(\eta^+)].$$

Para o cálculo de $\varphi_k(\eta^+)$ e $\varphi_k'(\eta^+)$, escrevemos a equação de φ_k em sua forma integral⁸

$$\varphi_k(\eta) = a(\eta) \left[\frac{-\varphi_k}{a_-} + (-\varphi_k' a_- - \varphi_k a_-') \int_{\eta^-}^{\eta} \frac{d\eta}{a^2} - k^2 \int_{\eta^-}^{\eta} \frac{d\eta'}{a^2} \int_{\eta^-}^{\eta'} a \varphi_k d\eta \right],$$

onde ${}^\pm\varphi_k = \varphi_k(\eta^\pm)$ e $a_\pm = a(\eta^\pm)$. Substituindo esta na equação anterior com $k \ll 1$, encontramos

$$\alpha_k^\pm = \frac{1}{2ik} [\pm C + ikD^\pm + O(k^2)],$$

onde

$$C = a'_- a'_+ \int_{\eta^-}^{\eta^+} \frac{d\eta}{a^2} + \frac{a'_-}{a_+} - \frac{a'_+}{a_-} = a'_- a'_+ \int_{\eta^-}^{\eta^+} d\eta \frac{a''}{a'^2 a},$$

e

$$D^\pm = \frac{a'_-}{a'_+} \pm \frac{a'_+}{a'_-} + \left(\frac{a_+}{a'_+} \mp \frac{a_-}{a'_-} \right) C.$$

Inserindo os valores $a'_\pm = \pm a^0/\eta^0$, encontramos

$$\begin{aligned} C &= a'_- a'_+ \int_{\eta^-}^{\eta^+} d\eta \frac{a''}{a'^2 a} \\ &= - \int_{\eta^-}^{\eta^+} d\eta \frac{1}{\eta^2 (\eta^2 + \eta_0^2)} \\ &= - \int_{\eta^-}^{\eta^+} d\eta \left[\frac{1}{\eta_0^2 \eta^2} - \frac{1}{\eta_0^2 (\eta^2 + \eta_0^2)} \right] \\ &= -\frac{1}{\eta_0^2} \left[-\frac{1}{\eta} - \frac{1}{\eta_0} \operatorname{arctg} \left(\frac{\eta}{\eta_0} \right) \right]_{\eta^-}^{\eta^+} \\ &= \frac{2}{\eta_0^2} \left[\sqrt{\frac{k}{\eta_0}} + \frac{1}{\eta_0} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1}{k\eta_0}} \right) \right] \\ &\approx \frac{\pi}{\eta_0^3}, \quad k \ll 1 \end{aligned}$$

Comparando as soluções nos intervalos $\eta < \eta^-$ e $\eta > \eta^+$, vemos imediatamente que os coeficientes de Bogoliubov são

$$\beta_k = \alpha_k^- e^{-ik(\eta^- - \eta^+)},$$

⁸ Mukhanov et al. (1992).

portanto, o número de partículas produzidas no modo k é

$$N_k = |\beta_k|^2 = |\alpha_k^-|^2 = \frac{C^2}{4k^2},$$

onde a última igualdade decorre de $D^- = 0$. O universo evolui, e o número esperado de partículas criadas no modo k é $|\beta_k|^2$. A densidade total de partículas criadas é aproximadamente

$$n = \int dk k^2 |\beta_k|^2 \approx \frac{\pi^2}{4\eta_0^6} \int_0^\epsilon dk = \frac{\pi^2}{4\eta_0^6} \epsilon, \quad \epsilon \ll \frac{1}{\eta_\pm},$$

já que $k \ll 1$ e que não há produção para $k \gg 1$ como discutimos. Observe que para $\eta_0 \rightarrow 0$, o que representaria um bouncing bastante intenso, o número de partículas criadas diverge, enquanto que para $\eta_0 \rightarrow \infty$, que representaria um bouncing bastante suave, não há criação.

Considere agora o caso de partículas não-relativísticas, $m \neq 0$, com acoplamento mínimo, $\xi = 0$:

$$\left[\frac{d^2}{d\eta^2} + k^2 + m^2 a^2 - \frac{a''}{a} \right] \varphi_k(\eta) = 0.$$

Neste caso, o potencial é dado por

$$V = \frac{\eta_0^2}{(\eta^2 + \eta_0^2)^2} - m^2 a_0^2 \left[1 + \left(\frac{\eta}{\eta_0} \right)^2 \right].$$

Para estudar o comportamento de V próximo ao bounce, expandimo-lo em torno de $\eta = 0$ e encontramos

$$V \approx \frac{1}{\eta_0^2} - m^2 a_0^2 - \left(\frac{\eta}{\eta_0} \right)^2 \left(\frac{2}{\eta_0^2} + m^2 a_0^2 \right)$$

Aqui vamos considerar 3 casos: $\eta_0^{-2} \ll m^2 a_0^2$, $\eta_0^{-2} \sim m^2 a_0^2$, ou $\eta_0^{-2} \gg m^2 a_0^2$.

$$V = \begin{cases} \frac{1}{\eta_0^2} - \frac{2}{\eta_0^2} \left(\frac{\eta}{\eta_0} \right)^2, & \eta_0^{-2} \gg m^2 a_0^2 \\ -m^2 a_0^2 - m^2 a_0^2 \left(\frac{\eta}{\eta_0} \right)^2, & \eta_0^{-2} \ll m^2 a_0^2 \\ -3m^2 a_0^2 \left(\frac{\eta}{\eta_0} \right)^2, & \eta_0^{-2} \sim m^2 a_0^2 \end{cases}.$$

Considerando primeiro o caso $\eta_0^{-2} \ll m^2 a_0^2$, a equação diferencial é dada por

$$\left[\frac{d^2}{d\eta^2} + k_{eff}^2 + \frac{m^2 a_0^2}{\eta_0^2} \eta^2 \right] \varphi_k(\eta) = 0, \quad \text{onde } k_{eff}^2 = k^2 + m^2 a_0^2.$$

Esta equação foi encontrada por Audretsch e Schäfer (1978), no caso de um universo dominado por radiação com termo de acoplamento conforme, onde a métrica $a(\eta) = b\eta$

foi substituída por $a^2(\eta) = b^2\eta^2 + a_0^2$, com a e b constantes, para evitar a singularidade. As soluções são

$$\begin{aligned} {}^{in}\varphi_k(\eta) &= \left(2\frac{ma_0}{\eta_0}\right)^{-1/4} \exp\left(-\frac{\pi}{8}\lambda\right) D_{(i\lambda-1)/2} \left[(i-1) \left(\frac{ma_0}{\eta_0}\right)^{1/2} \eta \right], \quad \eta < 0 \\ {}^{out}\varphi_k(\eta) &= {}^{in}\varphi_k^*(-\eta), \quad \eta > 0 \end{aligned}$$

onde

$$\lambda = \frac{\eta_0}{ma_0}(k^2 + m^2a_0^2),$$

$D_p(z)$ é a função cilindro parabólico. Sabendo que⁹

$$D_p(z) = e^{p\pi i} D_p(-z) + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-p)} e^{\pi(p+1)i/2} D_{-p-1}(-iz),$$

pode-se mostrar que

$${}^{in}\varphi_k = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma((1-i\lambda)/2)} e^{i\pi/4} e^{-\pi\lambda/4} {}^{out}\varphi_k - i e^{-\pi\lambda/2} {}^{out}\varphi_k^*.$$

Segue imediatamente que

$$|\beta_k|^2 = \exp\left[-\pi\left(\frac{\eta_0}{ma_0}(k^2 + m^2a_0^2)\right)\right].$$

A densidade total de partículas criadas é

$$n = \int dk k^2 |\beta_k|^2 = \int_0^\infty dk k^2 \exp\left[-\pi\left(\frac{\eta_0}{ma_0}(k^2 + m^2a_0^2)\right)\right] = \frac{1}{4\pi} e^{-\pi\eta_0 ma_0} \left(\frac{ma_0}{\eta_0}\right)^3.$$

Se o valor máximo de k não fosse truncado, $\epsilon \rightarrow \infty$, o resultado seria

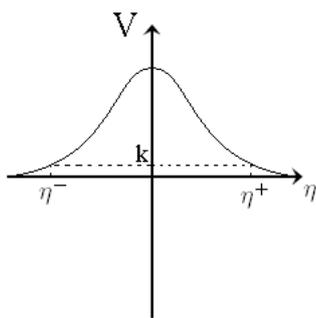
$$n = \frac{1}{4\pi} e^{-\pi\eta_0 ma_0} \left(\frac{ma_0}{\eta_0}\right)^3.$$

Podemos notar como era esperado, que a criação de partículas é tanto mais suprimida quanto maior for a massa das partículas. Novamente, o número de partículas criadas depende da intensidade do bouncing através de η_0 .

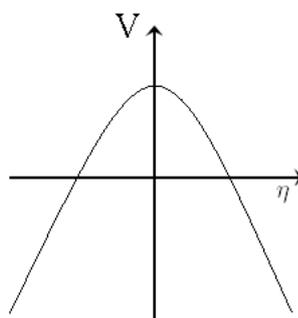
No caso $\eta_0^{-2} \sim m^2 a_0^2$, a equação diferencial é dada por

$$\left[\frac{d^2}{d\eta^2} + k^2 + \frac{3m^2 a_0^2}{\eta_0^2} \eta^2 \right] \varphi_k(\eta) = 0.$$

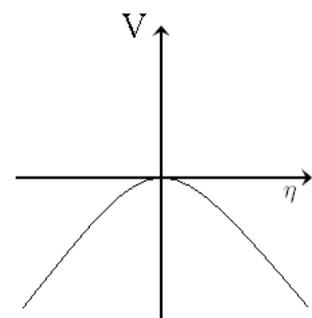
⁹ Gradshteyn e Ryzhik (1965).



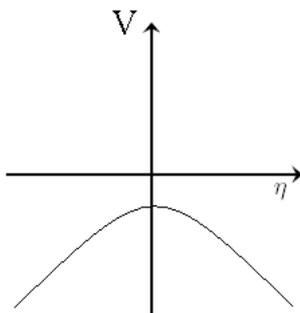
a



b



c



d

Evolução do potencial de interação entre o campo gravitacional e o campo escalar. a) $m = 0$, b) $\eta_0^{-2} > m^2 a_0^2$, c) $\eta_0^{-2} \sim m^2 a_0^2$, d) $\eta_0^{-2} < m^2 a_0^2$

Esta equação é quase idêntica ao caso anterior, portanto, o resultado é análogo.

No caso $\eta_0^{-2} \gg m^2 a_0^2$, a equação diferencial é dada por

$$\left[\frac{d^2}{d\eta^2} + k_{eff}^2 + \frac{2}{\eta_0^2} \left(\frac{\eta}{\eta_0} \right)^2 \right] \varphi_k(\eta) = 0, \quad \text{onde } k_{eff}^2 = k^2 - \frac{1}{\eta_0^2}.$$

Note que neste caso, k_{eff}^2 pode ser negativo, portanto a interpretação física é mais sutil. As soluções também são funções do tipo cilindro parabólico, $D_p(z)$, entretanto o pico de V é mais elevado, portanto, para $k^2 < \eta_0^{-2}$ há penetração na barreira de potencial. Este fenômeno aumenta a produção de partículas de forma semelhante ao caso com $m = 0$. Note que nos dois casos anteriores, $\eta_0^{-2} \ll m^2 a_0^2$ e $\eta_0^{-2} \sim m^2 a_0^2$, não há criação de partículas no limite de massa zero, $m \rightarrow 0$.

7

Conclusão

A lição mais importante que aprendemos em teoria quântica de campos em espaços curvos é provavelmente o fato de que campos gravitacionais (mesmo estáticos) podem criar partículas. Neste trabalho, consideramos por simplicidade somente o campo escalar real e estudamos o efeito de criação de partículas como consequência da expansão do universo. A importância deste processo na evolução do universo em relação a outros mecanismos de criação depende, é claro, do modelo proposto, fator de escala, termos de acoplamento, etc.

Finalmente, estudamos o efeito de criação de partículas em um modelo de universo não singular que sofre um bounce antes de sua fase de expansão. Como foi dito, este modelo é uma solução exata das equações de Einstein para um universo preenchido homogeneamente por radiação e um campo escalar com energia negativa. Como não consideramos o efeito de back reaction, a métrica usada deve ser substituída por uma descrição mais realista.

Evidentemente, generalizações podem ser feitas para incluir outros campos. Por exemplo, Ford e Parker (1977) estudaram perturbações gravitacionais quânticas em universos de Friedmann. Em um calibre análogo ao de Coulomb na eletrodinâmica foi possível iden-

tificar e quantizar os graus de liberdade independentes das ondas gravitacionais. Cada componente da perturbação da métrica obedece a mesma equação que o campo escalar sem massa minimamente acoplado no mesmo espaço-tempo. Por este motivo, o problema de calcular a produção de grávitons é análogo ao da produção de partículas escalares. Entretanto, como o gráviton é uma partícula sem massa de spin 2, há dois estados de polarização para cada modo do campo escalar. Outros exemplos podem ser encontrados na literatura.

É importante ressaltar também que as equações de Maxwell no vácuo e a equação de Dirac para partículas com massas desprezíveis em suas formas minimamente covariantes são conformemente invariantes.¹ Ou seja, estas equações em um universo homogêneo e isotrópico com seção espacial plana têm a mesma forma que no espaço-tempo de Minkowski, uma vez que em ambos as métricas se relacionam por uma transformação conforme. Portanto, não há, em princípio, produção de fótons ou neutrinos como consequência da evolução do campo gravitacional nestes modelos. Entretanto, perturbações do estado de isotropia e homogeneidade do universo quebram a invariância conforme e podem, portanto, causar criação de partículas.

Além disso, consideramos regimes em que o campo escalar não é suficiente para perturbar o campo gravitacional. E não consideramos o efeito de reação que o fenômeno de criação de partículas pode exercer na métrica do espaço-tempo. Este efeito está relacionado com o valor esperado do operador quântico energia-momento nas equações semi-clássicas de Einstein, $G_{\mu\nu} = \kappa \langle T_{\mu\nu} \rangle$. Por exemplo, Spindel (1988) estuda um modelo com solução exata.

Outro método para o estudo de quantização de campos em espaços curvos é através de uma abordagem algébrica, mais rigorosa matematicamente.² Esta abordagem, entretanto, é focada no rigor matemático e pode-se facilmente perder de vista seu conteúdo físico. Mas como disse algum filósofo, onde a imaginação não chega, alcançamos com matemática.

Por fim, estudamos somente os regimes em que a teoria semi-clássica pode ser aplicada. Exemplos de problemas além deste limite são: determinar o estado final da evaporação de um buraco negro, compreender a natureza da singularidade e a natureza quântica do espaço-tempo, e muitos outros. E eu gostaria de encerrar com uma citação de Carlo Rovelli em seu livro *Quantum Gravity*:

¹ Parker (1972).

² Wald (1994).

“The landscape is magic, the trip is far from being over.”

Bibliografia

- [1] Abramovitz, M. e Stegun, I. A. (1972). Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, U. S. Department of Commerce.
 - [2] Akhmedov, E. T. e Singleton, D. (2007). On the Physical Meaning of the Unruh Effect, *Pis'ma v ZhETF* 86, 702.
 - [3] Audretsch, J. e Schafer, G. (1978). Thermal Particle Production in a Radiation Dominated FRW Universe, *J. Phys. A.: Math. Gen.* 11, 1583.
 - [4] Berestetskii, V. B. et al. (1982). Quantum Electrodynamics, Volume 4 of Course of Theoretical Physics, Second Edition, Pergamon Press.
 - [5] Bernard, C., e Duncan, A. (1977). Regularization and Renormalization of Quantum Field Theory in Curved Space-Time, *Annal of phys.*, 107, 201.
 - [6] Birrel, N. D. e Davies, P. C. W. (1982). Quantum Fields in Curved Space, Cambridge University Press.
 - [7] Bogoliubov, N. N., e Shirkov, D. V. (1980). Introduction to the Theory of Quantized Fields, Third Edition, John Wiley & Sons.
 - [8] Brout, R. et al. (1995). A primer for Black Hole Quantum Physics, *Phys. Rep.* 260, 329.
 - [9] Crispino, L. C. B., Higuchi, A., e Matsas, G. E. (2008). The Unruh Effect and its Applications, *Rev. Mod. Phys.* 80, 787.
 - [10] Davies, P. C. W. (1975). Scalar Particle Production in Schwarzschild and Rindler Metrics, *J. Phys. A: Math. Gen.*, Vol. 8, No. 4, 609.
-

-
- [11] DeWitt, B. S. (1975). Quantum Field Theory in Curved Spacetime, *Phys. Rep.* 19, no. 6, 295.
- [12] Dirac, P. A. M. (1927). The Quantum Theory of the Emission and Absorption of Radiation, *Proc. Roy. Soc.*, All4, 243.
- [13] Dirac, P. A. M. (1975). *General Theory of Relativity*, John Wiley & Sons.
- [14] Ellis, G. F. R. e Williams, R. M. (1988). *Flat and Curved Space-Times*, Oxford University Press.
- [15] Ford, L. H. e Parker, L. (1977). Quantized Gravitational Wave Perturbations in Robertson-Walker Universes, *Phys. Rev. D* 16, 1601.
- [16] Fulling, S. A., (1989). *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time*, Cambridge University Press.
- [17] Gavrilov, S. P. e Gitman, D. M. (1996). Vacuum Instability in External Fields, *Phys. Rev. D.* 53, 7162.
- [18] Gradshteyn, I. S., & Ryzhik, I. M., 2007, *Table of Integrals, Series and Products*, Seventh Edition, Elsevier.
- [19] Greiner, W., e Reinhardt, J. (1996). *Field Quantization*, Springer.
- [20] Griffiths, D. J., 1981, *Introduction to Electrodynamics*, Third Edition, Prentice-Hall.
- [21] Han, M. Y. (2004). *A Story of Light, an Introduction to Quantum Field Theory of Quarks and Leptons*, World Scientific.
- [22] Hatfield, B. (1992). *Quantum Field Theory of Particles and Strings* (Perseus Books).
- [23] Hawking, S. W. (1975). Particle Creation by Black Holes, *Commun. Math. Phys.* 43, 199.
- [24] Hawking, S. W. e Ellis, G. F. R. (1973). *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press.
- [25] Hill, E. L. (1951). Hamilton's Principle and the Conservation Theorems of Mathematical Physics, *Rev. Mod. Phys.* 23, 253.
-

-
- [26] Kaku, M. (1993). Quantum Field Theory, a modern introduction, Oxford University Press.
- [27] Lemoine, M. et al. editores (2007). Inflationary Cosmology (Lecture Notes in Physics), Springer.
- [28] Mandl, F. e Shaw, G., 1984, Quantum Field Theory, John Wiley & Sons.
- [29] Misner, C. W., Thorne, K. S. e Wheeler, J. A. (1973). Gravitation, W. H. Freeman.
- [30] Molina-Paris, C. e Visser, M. (1999). Minimal Conditions for the Creation of a Friedman-Robertson-Walker Universe from a Bounce, Phys. Lett. B 455, 90.
- [31] Müller, R. (1997). Decay of Accelerated Particles, hep-th/9706016v1.
- [32] Mukhanov, V. F. et al. (1992). Theory of Cosmological Perturbations, Phys. Rep. 215, Nos. 5 & 6, 203.
- [33] Mukhanov, V. (2005). Physical Foundations of Cosmology, Cambridge University Press.
- [34] Mukhanov, V. F. e Winitzki, S. (2007). Introduction to Quantum Effects in Gravity, Cambridge University Press.
- [35] Nishijima, K. (1969). Fields and Particles: field theory and dispersion relations, W. A. Benjamin.
- [36] Novello, M. e Bergliaffa, S. E. P. (2008). Bouncing Cosmologies, Phys. Rep. 463, 127.
- [37] Parker, L. (1972). Particle Creation in Isotropic Cosmologies, Phys. Rev. Letters, 28, No. 11, 705.
- [38] Passian, A., Simpson, H., Kouchekian, S., Yakubovich, S. B., On the Orthogonality of the MacDonaldis's Functions.
- [39] Peskin, M. E. e Schroeder, D. V. (1995). An Introduction to Quantum Field Theory, Perseus Books
- [40] Peter, P. e Pinto-Neto, N. (2002). Primordial Perturbations in a Non-Singular Bouncing Universe Model, Phys. Rev. D 66, 063509.
-

-
- [41] Peter, P. e Pinto-Neto, N. (2008). Cosmology Without Inflation, *Phys. Rev. D.* 78, 063506.
- [42] Ryder, L. H. (1996). *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press.
- [43] Ryder, L. (2009). *Introduction to General Relativity*, Cambridge University Press.
- [44] Schutz, B. F. (1985). *A first course in General Relativity*, Cambridge University Press.
- [45] Spindel, Ph. (1988). Back-Reaction of a Scalar Quantum Field on Curved Space: an exact solution of the semiclassical equations, *Phys. Rev. D* 37, 2092.
- [46] Svaiter, N. F. (1989). *Teoria Quântica de Campos em Sistemas de Coordenadas Curvilíneas no Espaço-Tempo de Minkowski e em Espaços Curvos*, Tese de Doutorado, CBPF.
- [47] Tolman, R. C. (1934). *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*, Clarendon Press.
- [48] Unruh, W. G. (1976). Notes on black-hole evaporation, *Phys. Rev. D* 14, No. 4, 870.
- [49] Voracek, P. (1987). From beyond the Big Bang to the end of the Planck ERA of the Universe, *Astrophysics and Space Science* 129, 131.
- [50] Wald, R. M. (1984). *General Relativity*, University of Chicago Press.
- [51] Wald, R. M. (1994). *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics*, The University of Chicago Press.
- [52] Weinberg, S. (1972). *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, John Wiley & Sons.
- [53] Weinberg, S. (2008). *Cosmology*, Oxford University Press.
-