

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

---

# Uma discussão algébrica do oscilador bosônico

---

*Autor:*  
Nicolaus Linneu de HOLANDA

*Orientador:*  
Prof. Francesco TOPPAN

18 de março de 2013



# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>11</b>
<b>1 Grupos e álgebras de Lie</b>	<b>15</b>
1.1 Grupos de Lie . . . . .	15
1.2 Álgebras de Lie . . . . .	20
1.3 Representações . . . . .	26
<b>2 A quantização de Wigner do oscilador harmônico bosônico</b>	<b>33</b>
2.1 Construção das representações de peso mínimo e peso máximo de $sl(2)$ . . . . .	33
2.1.1 A representação de peso mínimo . . . . .	34
2.1.2 A representação de peso máximo . . . . .	36
2.1.3 Álgebra Universal Envelopante . . . . .	36
2.2 Conjugações de $sl(2)$ . . . . .	37
2.2.1 Representação de peso mínimo . . . . .	42
2.2.2 Representação de peso máximo . . . . .	44
2.2.3 Base do espaço de Hilbert . . . . .	45
2.3 A álgebra $sl(2)$ e o oscilador harmônico . . . . .	46
2.3.1 O oscilador harmônico na álgebra de Heisenberg . . . . .	46
2.3.2 Descrição da álgebra $sl(2)$ por meio da álgebra de Heisenberg . . . . .	49
2.4 Interlúdio: superálgebras de Lie . . . . .	52
2.5 Quantização de Wigner . . . . .	54
2.6 As representações de peso mínimo e peso máximo de $osp(1 2)$ . . . . .	56
2.6.1 A representação de peso mínimo . . . . .	56
2.6.2 A representação de peso máximo . . . . .	57

2.7	A superálgebra $osp(1 2)$ e a álgebra de Heisenberg . . . . .	58
2.8	A quantização de Wigner e a estatística da álgebra de Heisenberg . . . . .	60
<b>3</b>	<b>O oscilador bosônico térmico</b>	<b>65</b>
3.1	A motivação matemática da TFD . . . . .	65
3.2	Uma realização da álgebra térmica . . . . .	68
3.3	A álgebra térmica de $\{osp(1 2), I, \gamma\}$ . . . . .	72
3.4	A álgebra térmica bosônica e a representação de peso mínimo de $sl(2)$ . . . . .	76
	<b>Conclusão</b>	<b>81</b>
	<b>Referências bibliográficas</b>	<b>83</b>

# Agradecimentos

Ao meu orientador, Francesco Toppan, pelas ideias contidas neste trabalho;

aos meus pais e meus irmãos, pela atenção e carinho que me dedicam;

aos colegas do Journal Club;

aos amigos com quem compartilhei estes anos no Rio;

aos funcionários do CBPF, sempre prestativos.

O autor foi bolsista do CNPq.



# Resumo

Neste trabalho, faremos um estudo do oscilador harmônico bosônico a partir do método da quantização de Wigner. Começaremos construindo as representações de peso mínimo e peso máximo da álgebra  $sl(2)$  e mostraremos como a introdução de uma estrutura estrela nesta álgebra a divide em suas formas reais  $su(2)$ , associada ao spin, e  $su(1, 1)$ , associada ao oscilador harmônico bosônico. Esta última nos levará a introduzir a superálgebra  $osp(1|2)$  via quantização de Wigner. Para respeitar a estatística canônica dos operadores, seremos forçados a estender esta superálgebra utilizando uma variável de Clifford. A estrutura algébrica resultante, que denominamos  $\{osp(1|2), I, \gamma\}$ , será estudada também em temperaturas finitas, por meio do formalismo da Thermofield Dynamics.



# Abstract

In this work we study the bosonic oscillator from a Wigner quantization approach. After building the lowest and highest weight representations of the  $sl(2)$  algebra, we show how the introduction of a star operation splits it in the real forms  $su(2)$ , associated with spin, and  $su(1,1)$ , which is linked to the bosonic oscillator. A further exploration of this real form will lead us to introduce the  $osp(1|2)$  superalgebra via Wigner quantization. Imposing the canonical statistics to the operators will oblige us to extend this superalgebra by introducing a Clifford variable. The resulting algebraic structure, which we will denote by  $\{osp(1|2), I, \gamma\}$ , will be studied in finite temperatures through the lens of Thermofield Dynamics.



# Introdução

Na década de setenta do século XIX, visando generalizar a teoria algébrica desenvolvida por Évariste Galois (1811-1832) quatro décadas antes, Marius Sophus Lie (1842-1899) acrescentou ao arcabouço matemático uma nova estrutura: a teoria dos grupos e álgebras de Lie. Esta nova estrutura criada por Lie foi rapidamente expandida e aperfeiçoada pelos matemáticos e, nas mãos de Hermann Weyl (1885-1955) e Eugene Wigner (1902-1995), tornou-se uma poderosa ferramenta para atacar problemas físicos. A teoria matemática dos grupos e das álgebras de Lie ainda está inacabada, e o mesmo se pode dizer das suas aplicações em física: em ambos os casos, são áreas de intensa pesquisa atualmente.

O germe da teoria dos grupos de Lie foi uma ideia talvez não original: Lie, observando que Galois havia desenvolvido uma teoria de grupos discretos para estudar equações algébricas (discretas), ponderou que poderia ser possível desenvolver uma teoria de grupos contínuos para classificar e resolver equações diferenciais (contínuas). A importância da teoria dos grupos de Lie para a matemática reside, entre outros motivos, no tratamento ao mesmo tempo algébrico e geométrico que é possível dar a problemas que são atacados por ela. Para a física, poucas ferramentas matemáticas poderiam ter maior impacto do que uma estrutura capaz de descrever algebricamente as simetrias do espaço-tempo.

É possível que as álgebras de Lie clássicas, descritas por Weyl em seu trabalho seminal [1] sobre teoria de grupos publicado em 1939, tenham proliferado tão rapidamente na mecânica quântica e na teoria de campos por causa da íntima relação que guardam com a álgebra de Weyl-Heisenberg. Em 1965, Schwinger [2] apresentou sua descrição da álgebra  $su(2)$  em termos da álgebra de Heisenberg bosônica, obtendo todos os resultados relevantes ao tratamento do spin em termos desta álgebra. Um tratamento semelhante para a álgebra  $su(1,1)$  também é possível utilizando os operadores  $H$ ,  $a$ ,  $a^\dagger$  que descrevem o oscilador harmônico bosônico [3].

Como ocorre usualmente nas aplicações dos grupos de Lie em física, esses dois formalismos, o do spin e o do oscilador harmônico bosônico, estão relacionados por uma simetria maior, já que as álgebras  $su(2)$  e  $su(1, 1)$  são formas reais da álgebra  $sl(2, \mathbb{C})$ . A descrição destes fenômenos, em princípio díspares, por esta álgebra carrega ainda outra semelhança, talvez mais intrigante, com a evolução natural das álgebras de Lie na física: ela nos leva a introduzir, quase involuntariamente, as superálgebras e a supersimetria na teoria.

Em 1950, ao se questionar sobre a equivalência entre as dinâmicas clássica e quântica [4], Wigner mostrou, inadvertidamente, que o oscilador harmônico pode ser descrito pela superálgebra  $osp(1|2)$ . Esta descrição é satisfatória, no entanto, apenas enquanto desprezamos a estatística dos operadores. Do contrário, somos forçados a admitir que os operadores que aparecem na teoria do oscilador harmônico bosônico têm, na verdade, um caráter parabosônico, conforme definido por Green (1920-1999) em seu artigo que lançou a paraestatística [5]. Wigner contabiliza, portanto, estas duas descobertas acidentais.

Pouco tempo depois da publicação do artigo de Wigner, Yang [6] demonstrou que o seu princípio de quantização seria equivalente à quantização canônica, respeitadas algumas condições mais restritivas sobre o espaço de Hilbert. Mais tarde, Ohnuki e Kamefuchi [7] obtiveram as funções de onda mais gerais derivadas a partir deste princípio. Coube, no entanto, a Palev a tarefa de formalizar a quantização de Wigner de maneira mais contundente. Dentre suas contribuições, destacam-se os trabalhos em que ele descreve a quantização de Wigner como uma generalização, para a mecânica quântica, análoga à que se faz ao substituir-se a estatística pela paraestatística na teoria de campos [8][9][10][11]; e classifica as superálgebras que satisfazem às relações de compatibilidade que resultam da aplicação deste princípio [12][13][14][15]. Outros trabalhos bem interessantes e ilustrativos sobre o assunto foram publicados por Regniers, Stoilova e van der Jeugt [16][17][18][19]. Todos estes trabalhos deixam bem clara a relação siamesa entre a quantização de Wigner, a paraestatística e as superálgebras.

Neste trabalho, estudaremos o oscilador harmônico bosônico seguindo o programa de quantização sugerido por Wigner. O problema que trataremos aqui é exatamente o mesmo que Wigner abordou em seu artigo pioneiro sobre o tema, e portanto revisaremos todos os resultados obtidos por ele. A diferença entre este trabalho e os citados no parágrafo anterior surgirá, entretanto, quando

formos forçados a encarar o problema da estatística dos operadores. Ao contrário do que tem sido feito, admitiremos desde o início que a estrutura algébrica resultante da quantização de Wigner do oscilador harmônico bosônico pode ser acomodada na estatística canônica da teoria de campos. Isto nos levará forçosamente a estender esta estrutura, como veremos.

No capítulo 1, faremos uma breve revisão sobre a teoria dos grupos e das álgebras de Lie. O propósito deste capítulo, além de tornar este texto acessível àqueles com pouca familiaridade com o tema, é introduzir a álgebra  $sl(2)$  de maneira natural, assim como obter alguns resultados que poderão ser aplicados nos capítulos posteriores.

O capítulo 2 é o corpo principal deste trabalho. Aqui, desenvolveremos as representações de peso mínimo e peso máximo de  $sl(2)$  e dotaremos esta álgebra de uma estrutura estrela, o que nos permitirá estabelecer, sem dificuldade, sua relação com a álgebra do oscilador harmônico bosônico. Em seguida mostraremos como esta relação necessita da superálgebra  $osp(1|2)$  para se tornar plena, e procederemos à derivação dos resultados que mencionamos anteriormente acerca da estatística dos operadores.

Finalmente, no capítulo 3, exploraremos a possibilidade de se inserir a temperatura na estrutura descrita no capítulo 2. O método que utilizaremos para este fim é o da Thermofield Dynamics, em grande parte devido a Umezawa (1924-1995) [20][21][22][23]. Sempre tivemos em mente a possibilidade de explorar as relações entre a Thermofield Dynamics e as álgebras de Hopf [24][25]. Por este motivo, a forma como discutiremos a conjugação til deixará explícita esta possibilidade.



# Capítulo 1

## Grupos e álgebras de Lie

Neste capítulo, introduzimos alguns conceitos matemáticos relevantes para este trabalho, com o propósito de fazê-lo autoconsistente. Começamos na seção 1.1 introduzindo os grupos de Lie e o grupo  $SL(2)$ , para depois falar sobre as álgebras de Lie e a álgebra  $sl(2)$ , que terá papel destacado neste trabalho, na seção 1.2. A seção 1.3, última do capítulo, apresenta uma breve discussão sobre representações, em especial as representações adjunta e de peso mínimo/máximo.

O material aqui discutido pode ser encontrado em qualquer livro-texto para um curso introdutório aos grupos e álgebras de Lie. Os leitores familiarizados com estes temas poderão omiti-lo, portanto, sem maiores prejuízos. Exposições mais detalhadas do que as apresentadas aqui podem ser encontradas em [26], [27], [28], [29] e [30], que serviram de base para a elaboração deste capítulo.

Começemos, então, introduzindo os conceitos fundamentais de grupos e grupos de Lie.

### 1.1 Grupos de Lie

Os grupos de Lie são construídos a partir do conceito mais elementar de grupos. Embora esta noção não seja essencial para o desenvolvimento deste trabalho, ela nos permitirá construir a álgebra de Lie  $sl(2)$  a partir de princípios básicos. Apresentamos, assim, uma definição formal deste conceito.

**Definição 1.1.1** (Grupos). Um conjunto  $\{g_i, g_j, g_k, \dots\}$  no qual se define uma operação binária  $\circ$  será um grupo  $[G, \circ]$  (ou simplesmente  $G$ , caso não exista ambiguidade em torno de  $\circ$ ) se os axiomas abaixo forem satisfeitos:

- i) *Fechamento*: Se  $g_i, g_j \in G$ , então  $g_i \circ g_j \in G$ ;
- ii) *Associatividade*: Para quaisquer  $g_i, g_j, g_k \in G$  vale  $(g_i \circ g_j) \circ g_k = g_i \circ (g_j \circ g_k)$ ;
- iii) *Identidade*: Existe  $e \in G$  tal que  $g_i \circ e = e \circ g_i = g_i$  para todo  $g_i \in G$ ;

iv) *Inverso*: Para cada  $g_i \in G$  existe  $g_i^{-1} \in G$  tal que  $g_i \circ g_i^{-1} = g_i^{-1} \circ g_i = e$ .

O grupo  $G$  será ainda comutativo ou abeliano caso satisfaça

v) *Comutatividade*: Para todo  $g_i, g_j \in G$  vale  $g_i \circ g_j = g_j \circ g_i$ .

Grupos podem ser discretos ou contínuos. Como exemplo de grupo discreto, podemos considerar uma coleção de  $n$  objetos  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ . O conjunto das bijeções  $\phi : X \mapsto X$  com a operação usual de composição  $\circ$  dada por  $(\phi \circ \phi')(x_i) = \phi(\phi'(x_i))$  será, então, um grupo (no caso, o grupo simétrico  $S_n$  das permutações de  $X$ ). O conjunto  $\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \dots, \overline{n-1}\}$  com a operação de adição usual  $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$  é um exemplo de grupo cíclico, também discreto. Dentre os grupos contínuos, destacam-se os grupos de Lie, cuja definição explicitamos a seguir:

**Definição 1.1.2** (Grupos de Lie). Um grupo  $G$  será um grupo de Lie se os axiomas abaixo forem satisfeitos:

- i) *Parametrização de  $G$  por uma variedade  $M$* :  $g = g(\alpha)$ , para todo  $g \in G$ , onde  $\alpha \in M$ ;
- ii) *Mapeamento da composição  $\circ$* : Existe um mapeamento  $\phi : M \times M \mapsto M$  tal que  $\gamma = \phi(\alpha, \beta)$  se  $g(\gamma) = g(\alpha) \circ g(\beta)$ ;
- iii) *Suavidade do mapeamento da composição  $\circ$* : O mapeamento  $\gamma = \phi(\alpha, \beta)$ , definido por  $g(\gamma) = g(\alpha) \circ g(\beta)$ , é diferenciável;
- iv) *Suavidade do mapeamento inverso*: O mapeamento inverso  $\beta = \psi(\alpha)$ , definido por  $g(\beta) = g^{-1}(\alpha)$ , é diferenciável.

Caso o grupo em questão seja abeliano, teremos, ainda,

v)  $\gamma = \phi(\alpha, \beta) = \phi(\beta, \alpha)$ .

No restante deste texto, poderemos escrever  $g_\alpha$  ou  $g(\alpha)$  para denotar o mesmo elemento de um grupo  $G$ .

No geral, grupos de Lie são grupos de matrizes com a operação usual de multiplicação matricial. Nas aplicações dos grupos de Lie em física, destaca-se a importância dos grupos de Lie clássicos descritos por Hermann Weyl. Citamos alguns exemplos abaixo:

- a) O *grupo linear geral*  $GL(n, \mathbb{R})$ : Consiste das matrizes reais não-singulares de ordem  $n$ . Para caracterizar cada uma dessas matrizes, é necessário especificar  $n^2$  parâmetros reais.
- b) O *grupo linear especial*  $SL(n, \mathbb{R})$ : Obtemos este grupo a partir de  $GL(n, \mathbb{R})$  impondo a condição de que as matrizes tenham determinante igual a  $+1$ . Os elementos deste grupo são completamente determinados com a especificação de  $n^2 - 1$  parâmetros reais.
- c) O *grupo unitário*  $U(n, \mathbb{R})$ : Este é o grupo das matrizes de ordem  $n$  que mantêm invariante a forma  $\sum_{k=1}^n z_k z_k^*$  de um dado vetor  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ . Os elementos deste grupo são especificados por meio de  $n^2$  parâmetros reais. Podemos tomar em  $U(n, \mathbb{C})$  o subgrupo das matrizes de determinante igual a  $+1$ . Neste caso, obtemos o *grupo unitário especial*  $SU(n, \mathbb{R})$ , que é caracterizado por meio de  $n^2 - 1$  parâmetros reais.
- d) O *grupo ortogonal*  $O(n, \mathbb{R})$ : Este grupo é composto pelas matrizes de ordem  $n$  que preservam a forma  $\sum_{k=0}^n z_k^2$ , e seus elementos são determinados especificando-se  $\frac{n(n-1)}{2}$  parâmetros reais. O subgrupo formado pelas matrizes de  $O(n, \mathbb{R})$  com determinante  $+1$  é denominado *grupo ortogonal especial*, ou  $SO(n, \mathbb{R})$ , e caracteriza-se por meio de  $\frac{n(n-1)}{2}$  parâmetros reais.
- e) O *grupo simplético*  $Sp(2n, \mathbb{R})$ : O grupo simplético é composto pelas matrizes de ordem  $2n$  que mantêm invariante a forma  $\sum_{k=1}^n (x_k y'_k - x'_k y_k)$ , onde  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n)$  são dois vetores em  $\mathbb{R}^{2n}$ . A dimensão deste grupo é  $n(2n + 1)$ .

Nos exemplos acima, os grupos estão definidos sobre o corpo dos números reais. Evidentemente, poderíamos defini-los sem nenhum problema sobre os números complexos.

A importância dos grupos clássicos para a física se deve ao fato de estes grupos descreverem simetrias do espaço euclidiano. O grupo ortogonal, por exemplo, está associado às simetrias de rotação, enquanto o grupo unitário preserva a norma (matematicamente relacionada à noção de distância) de vetores. Como um dos objetos de estudo deste trabalho é a álgebra  $sl(2)$ , é ilustrativo tomarmos o grupo  $SL(2, \mathbb{R})$  para exemplificar a definição 1.1.2 de grupos de Lie.

O grupo  $SL(2, \mathbb{R})$  é constituído pelas matrizes reais de ordem 2 com determinante  $+1$ . Consideremos, então, uma matriz 2x2 arbitrária:

$$g_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{bmatrix}$$

Para que  $g_\alpha$  seja uma matriz em  $SL(2, \mathbb{R})$ , deve ser  $\det g_\alpha = \alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3 = 1$ . Esta igualdade pode ser usada para reescrever a matriz  $g_\alpha$  da seguinte forma:

$$g_\alpha = g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \frac{1+\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

onde estamos admitindo  $\alpha_1 \neq 0$ . Vemos portanto que cada elemento de  $SL(2, \mathbb{R})$  é determinado por três parâmetros reais:  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$ . Analisemos, agora, a transformação que mapeia a multiplicação matricial em  $SL(2, \mathbb{R})$ . Supondo que valha a igualdade  $g_\gamma = g_\alpha g_\beta$ , teremos

$$g_\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & \frac{1+\gamma_2\gamma_3}{\gamma_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_3 & \alpha_1\beta_2 + \frac{\alpha_2}{\beta_1}(1 + \beta_2\beta_3) \\ \alpha_3\beta_1 + \frac{\beta_3}{\alpha_1}(1 + \alpha_2\alpha_3) & \alpha_3\beta_2 + \frac{(1+\alpha_2\alpha_3)(1+\beta_2\beta_3)}{\alpha_1\beta_1} \end{bmatrix}$$

A equação anterior fornece então o mapeamento das variáveis  $\gamma_k$  em função de  $\alpha_k$  e  $\beta_k$ :

$$\gamma_1 = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_3 \quad (1.2a)$$

$$\gamma_2 = \alpha_1\beta_2 + \frac{\alpha_2}{\beta_1}(1 + \beta_2\beta_3) \quad (1.2b)$$

$$\gamma_3 = \alpha_3\beta_1 + \frac{\beta_3}{\alpha_1}(1 + \alpha_2\alpha_3) \quad (1.2c)$$

Tomando  $g_\beta = g_\alpha^{-1}$  e invertendo a matriz da equação (1.1), obtemos

$$g_\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_3 & \frac{1+\beta_2\beta_3}{\beta_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1+\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1} & -\alpha_2 \\ -\alpha_3 & \alpha_1 \end{bmatrix} = g_\alpha^{-1}$$

e portanto o mapeamento inverso será dado por

$$\beta_1 = \frac{1 + \alpha_2\alpha_3}{\alpha_1} \quad (1.3a)$$

$$\beta_2 = -\alpha_2 \quad (1.3b)$$

$$\beta_3 = -\alpha_3 \quad (1.3c)$$

A parametrização que acabamos de descrever para  $SL(2, \mathbb{R})$ , apesar de ser talvez a mais simples e intuitiva, apresenta alguns problemas importantes. Em primeiro lugar, esta parametrização não está definida para  $\alpha_1 = 0$ . Os casos em que  $\alpha_1 = 0$  não podem, portanto, ser tratados com ela. Ainda, ela ignora uma convenção que, apesar de não ser mandatária, é amplamente adotada devido à simplificação que se obtém ao relacionar grupos de Lie com suas álgebras de Lie. Essa convenção consiste em associar à identidade do grupo o conjunto de parâmetros nulos:

$$e = g(\mathbf{0}) \quad (1.4)$$

Como temos  $g = e \circ g = g \circ e$ , a equação (1.4) impõe mais uma condição sobre o mapeamento da composição do grupo:

$$\boldsymbol{\alpha} = \phi(\mathbf{0}, \boldsymbol{\alpha}) = \phi(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{0}) \quad (1.5)$$

Vamos, então, tentar construir uma parametrização para  $SL(2, \mathbb{R})$  que satisfaça à equação (1.4). Nossa construção começa com a observação de que precisamos de três parâmetros reais para descrever completamente o grupo  $SL(2, \mathbb{R})$ . Ora, as matrizes  $R = R(\alpha_2)$  de rotação de um ângulo  $\alpha_2$  no plano e as matrizes  $S$  simétricas de segunda ordem são, respectivamente, dadas por:

$$R = \begin{bmatrix} \cos \alpha_2 & \sin \alpha_2 \\ -\sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 \end{bmatrix} \quad (1.6a)$$

$$S = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_4 & \alpha_3 \\ \alpha_3 & \alpha_4 - \alpha_1 \end{bmatrix} \quad (1.6b)$$

As matrizes de rotação  $R$  são unimodulares. Restringimos as matrizes simétricas  $S$  também de modo a considerarmos apenas aquelas que têm determinante igual a +1. Isto significa tomar  $\alpha_4 = \pm\sqrt{1 + \alpha_1^2 + \alpha_3^2}$ , de modo que (1.6b) torna-se

$$S = S(\alpha_1, \alpha_3) = \begin{bmatrix} \pm\sqrt{1 + \alpha_1^2 + \alpha_3^2} + \alpha_1 & \alpha_3 \\ \alpha_3 & \pm\sqrt{1 + \alpha_1^2 + \alpha_3^2} - \alpha_1 \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Tomando o produto  $g_\alpha = SR$  das matrizes em (1.6a) e (1.7), obtemos matrizes na forma

$$g_\alpha = \begin{bmatrix} \left( \pm\sqrt{1 + \alpha_1^2 + \alpha_3^2} + \alpha_1 \right) \cos \alpha_2 - \alpha_3 \sin \alpha_2 & \left( \pm\sqrt{1 + \alpha_1^2 + \alpha_3^2} + \alpha_1 \right) \sin \alpha_2 + \alpha_3 \cos \alpha_2 \\ \left( \mp\sqrt{1 + \alpha_1^2 + \alpha_3^2} + \alpha_1 \right) \sin \alpha_2 + \alpha_3 \cos \alpha_2 & \left( \pm\sqrt{1 + \alpha_1^2 + \alpha_3^2} - \alpha_1 \right) \cos \alpha_2 + \alpha_3 \sin \alpha_2 \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

As matrizes  $g_\alpha$  dadas pela equação (1.8) são matrizes unimodulares 2x2 descritas por três parâmetros reais. Trata-se, portanto, de uma parametrização do grupo  $SL(2, \mathbb{R})$ . Esta parametrização é analítica em  $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ , e vemos que, para o sinal positivo,

$$g_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de modo que a equação (1.4) é satisfeita.

É interessante observar que, para restringirmos as matrizes simétricas  $S$  em (1.6b) apenas àquelas cujo determinante é +1, foi necessário impor a condição

$$\alpha_4 = \pm\sqrt{1 + \alpha_1^2 + \alpha_3^2} \quad (1.9)$$

A equação (1.9) nos permite fazer algumas considerações topológicas a respeito do grupo  $SL(2, \mathbb{R})$ . Um grupo é chamado conexo se for possível obter a identidade  $e$  por meio de transformações contínuas a partir de qualquer elemento  $g_\alpha$  do grupo; do contrário, chamaremos o grupo desconexo. A equação (1.9) define um hiperbolóide cujos dois setores são desconexos. Uma análise ligeira nos sugere, então, que essa característica deve ser levada ao grupo  $SL(2, \mathbb{R})$ , e concluiríamos portanto ser este grupo desconexo. No entanto, este não é o caso: os sinais que aparecem na equação (1.9) são de fato transportados para a parametrização da equação (1.8), mas implicam, na verdade, numa redundância. De fato, o elemento  $g^+(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  obtido escolhendo-se o sinal positivo em (1.8) é igual ao elemento  $g^-(-\alpha_1, \alpha_2 + \pi, -\alpha_3)$  obtido escolhendo-se o sinal negativo. Podemos eliminar esta redundância facilmente tomando apenas o setor positivo do hiperbolóide descrito em (1.9). Isto nos permite escrever simplesmente

$$g_\alpha = \begin{bmatrix} \left( \sqrt{1 + \alpha_1^2 + \alpha_3^2} + \alpha_1 \right) \cos \alpha_2 - \alpha_3 \sin \alpha_2 & \left( \sqrt{1 + \alpha_1^2 + \alpha_3^2} + \alpha_1 \right) \sin \alpha_2 + \alpha_3 \cos \alpha_2 \\ \left( -\sqrt{1 + \alpha_1^2 + \alpha_3^2} + \alpha_1 \right) \sin \alpha_2 + \alpha_3 \cos \alpha_2 & \left( \sqrt{1 + \alpha_1^2 + \alpha_3^2} - \alpha_1 \right) \cos \alpha_2 + \alpha_3 \sin \alpha_2 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Outra noção topológica relevante no estudo dos grupos de Lie é a de espaços compactos. Um grupo de Lie será dito compacto se a sua parametrização consistir de um número finito de parâmetros, definidos em domínios limitados. Isto claramente não ocorre para  $SL(2, \mathbb{R})$ , e este grupo é, portanto, não-compacto.

Com a equação (1.10) em mãos, conseguimos parametrizar o grupo  $SL(2, \mathbb{R})$  em termos da variedade  $H_{(2)}^+ \times C_{(1)}$ , onde, evidentemente,  $H_{(2)}^+$  é o setor positivo do hiperbolóide bidimensional da equação (1.9) utilizado para parametrizar as matrizes simétricas unimodulares e  $C_{(1)}$  é a circunferência que parametriza as rotações no plano. Continuaremos nossa exposição introduzindo a seguir as álgebras de Lie.

## 1.2 Álgebras de Lie

Buscamos obter de forma natural o conceito de álgebras de Lie a partir da teoria dos grupos de Lie, cujas ideias básicas acabamos de esboçar. Nosso tratamento será semelhante ao da seção anterior: faremos uma breve discussão geral acerca das álgebras de Lie, aplicando, depois, os conceitos desenvolvidos ao caso particular da álgebra  $sl(2)$ . Começamos definindo o conceito de isomorfismo entre dois grupos.

**Definição 1.2.1** (Isomorfismo). Dois grupos  $[G, \circ]$ ,  $[G', \circ']$  são isomorfos entre si, ou simplesmente isomorfos, se existir uma transformação  $\phi : G \mapsto G'$  satisfazendo às seguintes propriedades:

- i) *Homomorfismo*: Dados  $g, h \in G$  e  $g', h' \in G'$  tais que  $\phi(g) = g'$ ,  $\phi(h) = h'$ , tem-se  $\phi(g \circ h) = g' \circ' h'$ ;
- ii) *Injetividade*: Para cada  $g' \in \text{Im}(\phi)$  existe um único  $g \in G$  tal que  $\phi(g) = g'$ ;
- iii) *Sobrejetividade*: Para todo  $g' \in G'$  existe  $g \in G$  tal que  $\phi(g) = g'$ .

Dois grupos isomorfos compartilham as mesmas propriedades algébricas, sendo, portanto, equivalentes entre si: qualquer estrutura que pode ser efetivamente descrita por um grupo poderá também ser descrita pelo outro. A importância do conceito de isomorfismo fica então evidente, já que nos possibilita utilizar estruturas diferentes para atacar um dado problema. Como exemplo, observamos que a transformação  $f : [\mathbb{R}, +] \mapsto [\mathbb{R}^+, \cdot]$  dada por

$$f(x) = e^x$$

é claramente um isomorfismo. Os grupos  $[\mathbb{R}, +]$  e  $[\mathbb{R}^+, \cdot]$  são, pois, isomorfos.

Dada a importância do conceito de isomorfismo, é natural perguntar-se em que circunstâncias dois grupos de Lie são isomorfos. Para que isso ocorra, devemos ter duas condições satisfeitas:

- i) As variedades que parametrizam os grupos devem ser topologicamente equivalentes;
- ii) As funções que mapeiam as composições dos grupos devem ser equivalentes.

As variedades serão topologicamente equivalentes se for possível deformar continuamente uma delas de modo a obter-se a outra. Por sua vez, os mapeamentos das composições dos dois grupos serão equivalentes se existir uma transformação de variáveis suave que transforme um mapeamento no outro. Demonstrar essas duas condições não é, em geral, uma tarefa trivial, dada a não-linearidade dos mapeamentos de composição. O estudo das álgebras de Lie tenta solucionar esse problema linearizando-os. Evidentemente, isto não pode ser feito para o grupo como um todo; passa-se, então, a analisar o grupo localmente. As álgebras de Lie são precisamente esta ferramenta matemática que nos permite linearizar a vizinhança de um elemento de um grupo de Lie. Apresentamos a seguir uma definição formal:

**Definição 1.2.2** (Álgebra de Lie). Seja  $\mathcal{G}$  um espaço vetorial sobre um corpo  $F$  onde se define uma operação  $[\cdot, \cdot] : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \mapsto \mathcal{G}$  tal que, para quaisquer  $X_i \in \mathcal{G}$ , as seguintes propriedades são satisfeitas:

i) *Bilinearidade*:

$$[\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2, X_3] = \alpha_1 [X_1, X_3] + \alpha_2 [X_2, X_3], \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in F;$$

ii) *Anti-simetria*:

$$[X_1, X_2] = -[X_2, X_1];$$

iii) *Identidade de Jacobi*:

$$[X_1, [X_2, X_3]] + [X_2, [X_3, X_1]] + [X_3, [X_1, X_2]] = 0.$$

O conjunto  $\mathcal{G}$  com estas características será uma álgebra de Lie.

A definição 1.2.2 apresenta uma motivação bastante natural quando o corpo  $F$  em questão é o conjunto dos números reais,  $\mathbb{R}$ . Com efeito, consideremos a expansão em série de Taylor dos elementos do grupo na vizinhança do ponto  $\alpha_0$ :

$$\begin{aligned} g_\alpha = g_{\alpha_0} &+ \sum_{k=1}^r \frac{\partial g}{\partial \alpha_k} \Big|_{\alpha=\alpha_0} (\alpha_k - \alpha_{0k}) + \frac{1}{2!} \sum_{k_1=1}^r \sum_{k_2=1}^r \frac{\partial^2 g}{\partial \alpha_{k_1} \partial \alpha_{k_2}} \Big|_{\alpha=\alpha_0} (\alpha_{k_1} - \alpha_{0k_1})(\alpha_{k_2} - \alpha_{0k_2}) + \dots \\ &+ \frac{1}{n!} \sum_{k_1=1}^r \sum_{k_2=1}^r \dots \sum_{k_n=1}^r \frac{\partial^n g}{\partial \alpha_{k_1} \partial \alpha_{k_2} \dots \partial \alpha_{k_n}} \Big|_{\alpha=\alpha_0} (\alpha_{k_1} - \alpha_{0k_1})(\alpha_{k_2} - \alpha_{0k_2}) \dots (\alpha_{k_n} - \alpha_{0k_n}) + \dots \end{aligned} \quad (1.11)$$

Em princípio, para linearizar uma vizinhança do grupo não deveria ser necessário impor nenhuma restrição sobre o elemento  $g_{\alpha_0}$ , já que todos os elementos do grupo são topologicamente equivalentes. Com efeito, podemos passar de um elemento  $g$  na vizinhança de  $g_{\alpha_0}$  para um elemento  $g'$  na vizinhança de  $g_{\alpha'_0}$  simplesmente multiplicando à esquerda por  $g_{\alpha'_0} g_{\alpha_0}^{-1}$  ou à direita por  $g_{\alpha_0}^{-1} g_{\alpha'_0}$ . Teríamos, nesse caso, um mapeamento biunívoco suave entre as duas vizinhanças. Analogamente, a parametrização  $g_\alpha$  não parece, à primeira vista, ter qualquer relevância no processo de linearização. Vamos mostrar, no entanto, que este não é o caso: para obtermos a estrutura de um espaço vetorial, o elemento  $g_{\alpha_0}$  deve ser identificado com a identidade do grupo  $e$ .

Linearizamos a vizinhança de  $g_{\alpha_0}$  truncando a expansão da equação (1.11) à primeira ordem:

$$g_\alpha = g_{\alpha_0} + \sum_{k=1}^r X_k (\alpha_k - \alpha_{0k}) \quad (1.12)$$

onde tomamos  $X_k = \left. \frac{\partial g}{\partial \alpha_k} \right|_{\alpha=\alpha_o}$ . Para que tenhamos a estrutura de um espaço vetorial na vizinhança de  $g_{\alpha_o}$ , a composição do grupo deve ser tal que, para quaisquer  $\epsilon, \epsilon' \in \mathbb{R}^r$  infinitesimais, tem-se

$$g_{(\alpha_o+\epsilon)}g_{(\alpha_o+\epsilon')} = g_{(\alpha_o+\epsilon+\epsilon')} \quad (1.13)$$

ou seja:

$$g_{(\alpha_o+\epsilon)}g_{(\alpha_o+\epsilon')} = g_{\alpha_o} + \sum_{k=1}^r X_k(\epsilon_k + \epsilon'_k) \quad (1.14)$$

Utilizando a equação (1.12), é fácil obter, até a primeira ordem:

$$g_{(\alpha_o+\epsilon)}g_{(\alpha_o+\epsilon')} = g_{\alpha_o}^2 + g_{\alpha_o} \sum_{k=1}^r X_k \epsilon'_k + \sum_{k=1}^r X_k \epsilon_k g_{\alpha_o} \quad (1.15)$$

Claramente, a equação (1.14) é obtida a partir de (1.15) apenas no caso em que  $g_{\alpha_o} = e$ . Admitindo ainda que valha a equação (1.4), os geradores infinitesimais de um grupo serão dados por

$$X_k = \left. \frac{\partial g_\alpha}{\partial \alpha_k} \right|_{\alpha=0} \quad (1.16)$$

e a equação (1.12) torna-se

$$g_\alpha = e + \sum_{k=1}^r X_k \alpha_k \quad (1.17)$$

Dado um elemento  $g_\alpha$  na vizinhança de  $e$ , é razoável esperarmos que seu inverso  $g_\alpha^{-1}$  também esteja próximo de  $e$ . Aliás, para que o nosso programa de linearização do grupo  $G$  em torno da identidade seja concretizado, isto deve ocorrer necessariamente. A equação (1.17) nos mostra que isto ocorre de fato. Com o auxílio desta equação, podemos expandir a expressão  $g_\alpha g_{\alpha'} = e$  da seguinte forma:

$$g_\alpha g_{\alpha'} = e + \sum_{k=1}^r X_k(\alpha_k + \alpha'_k) = e$$

e portanto vemos que deve ser

$$g_\alpha^{-1} = g_{(-\alpha)} = e - \sum_{k=1}^r X_k \alpha_k \quad (1.18)$$

Neste ponto, é importante observar que a estrutura que estamos construindo ainda não é satisfatória. De fato, a equação (1.17) parece implicar que, localmente, todo grupo de Lie é comutativo. Isto não é verdade. Podemos ver isto considerando o comutador  $[g, g']$  de dois elementos  $g, g' \in G$ :

$$[g, g'] = gg'g^{-1}g'^{-1} \quad (1.19)$$

Para um grupo abeliano, o comutador de dois elementos é sempre igual à identidade. Desse modo, ao analisarmos o comutador de dois elementos arbitrários de um grupo de Lie, podemos ter uma ideia aproximada do quanto o grupo em questão viola a comutatividade.

Queremos associar ao comutador  $[g_\alpha, g_{\alpha'}]$  de dois elementos de um grupo de Lie na vizinhança da identidade um outro elemento  $g_{\alpha''}$ , também nesta vizinhança. Matematicamente, isso significa que nossa construção deve ser tal que, para quaisquer  $g_\alpha, g_{\alpha'}$  na vizinhança de  $e$ , existe  $g_{\alpha''}$  também nesta vizinhança dado por

$$g_{\alpha''} = g_\alpha g_{\alpha'} g_\alpha^{-1} g_{\alpha'}^{-1} \quad (1.20)$$

Podemos tomar o inverso de ambos os membros da equação (1.20). A equação (1.18) nos permite escrever então

$$g_{\alpha'} g_\alpha g_{\alpha'}^{-1} g_\alpha^{-1} = g_{(-\alpha'')} \quad (1.21)$$

As equações (1.20) e (1.21) mostram que, localmente, o comutador em um grupo de Lie deve ser anti-simétrico nos parâmetros  $\alpha, \alpha'$ . Ora, expandindo a equação (1.20) em série de Taylor até segunda ordem, encontramos

$$g_\alpha g_{\alpha'} g_\alpha^{-1} g_{\alpha'}^{-1} = g_{\alpha''} = e + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^r (\alpha_k \alpha'_l - \alpha_l \alpha'_k) (X_k X_l - X_l X_k) + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^r (\alpha_k \alpha_l + \alpha'_k \alpha'_l) \left( 2 \frac{\partial^2 g}{\partial \alpha_k \partial \alpha_l} \Big|_{\alpha=0} - (X_k X_l + X_l X_k) \right) \quad (1.22)$$

Na equação (1.22), o termo no primeiro somatório é anti-simétrico em relação aos parâmetros  $\alpha, \alpha'$ ; o termo no segundo somatório, por outro lado, é simétrico nesses parâmetros. Para que o comutador de dois elementos do grupo na vizinhança da identidade respeite a construção da equação (1.17), será necessário termos satisfeitas, portanto, as duas igualdades a seguir:

$$[X_k, X_l]_- = X_k X_l - X_l X_k = \sum_{m=1}^r c_{kl}^m X_m \quad (1.23)$$

e

$$[X_k, X_l]_+ = X_k X_l + X_l X_k = 2 \frac{\partial^2 g}{\partial \alpha_k \partial \alpha_l} \Big|_{\alpha=0} \quad (1.24)$$

Nas equações (1.23) e (1.24) escrevemos o comutador e o anti-comutador de dois geradores infinitesimais de um grupo de Lie; os coeficientes  $c_{kl}^m$  são as constantes de estrutura da álgebra de Lie. Para dois elementos  $X, Y$  quaisquer numa álgebra, o comutador (-) e o anti-comutador (+) são dados por

$$[X, Y]_\pm = XY \pm YX$$

Usualmente, utilizamos a seguinte notação para o comutador e o anti-comutador:

$$[X, Y]_- = [X, Y] \quad (1.25a)$$

$$[X, Y]_+ = \{X, Y\} \quad (1.25b)$$

Como veremos posteriormente, esta notação será utilizada frequentemente quando focarmos nossa atenção nas superálgebras.

Calculemos, agora, os geradores de  $SL(2, \mathbb{R})$  aplicando a equação (1.16) à parametrização da equação (1.10):

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad X_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

As relações de comutação entre os  $X_i$ , por sua vez, são mostradas abaixo:

$$[X_1, X_2] = 2X_3; \quad [X_2, X_3] = 2X_1; \quad [X_3, X_1] = -2X_2 \quad (1.27)$$

Veremos no capítulo 2 que uma base com as relações de comutação (1.27) não é uma base canônica para a álgebra  $sl(2)$ . Na maior parte deste trabalho, utilizaremos uma base canônica. Posteriormente, no entanto, iremos analisar as conjugações de  $sl(2)$ , com o objetivo de tornar possível a manipulação de formas hermitianas nesta álgebra. Neste caso, a base em (1.27) será bastante útil, já que veremos que é a partir dela que se constroem observáveis em  $sl(2)$ . Isto nos permitirá associar às formas reais desta álgebra as descrições matemáticas do spin e do oscilador harmônico.

A forma como obtivemos a parametrização da equação (1.10) baseou-se em características particulares do grupo  $SL(2)$ , e não é a maneira mais usual de se parametrizar um grupo de Lie. Normalmente, parametriza-se um grupo de Lie aplicando o mapeamento exponencial a um elemento da álgebra de Lie correspondente. Ilustramos o procedimento fazendo o caminho inverso do que temos feito até este momento: partindo de uma vizinhança em torno da identidade de um grupo, linearizada da maneira como expusemos, tentaremos obter um elemento arbitrário do grupo. Isto pode ser feito, evidentemente, iterando-se vários deslocamentos infinitesimais a partir da identidade:

$$g_\alpha = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( e + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^r \alpha_k X_k \right)^N$$

O limite que aparece na equação acima é a expressão familiar para o mapeamento exponencial de uma álgebra de Lie no seu grupo de Lie correspondente:

$$g_\alpha = \exp \left( \sum_{k=1}^r \alpha_k X_k \right) \quad (1.28)$$

Expandindo a equação (1.28) em série de Taylor, teremos uma expressão na seguinte forma:

$$g_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k_1=1}^r \sum_{k_2=1}^r \dots \sum_{k_n=1}^r (\alpha_{k_1} \alpha_{k_2} \dots \alpha_{k_n} X_{k_1} X_{k_2} \dots X_{k_n}) \quad (1.29)$$

Tomando-se  $\alpha_{o_{k_1}} = \alpha_{o_{k_2}} = \dots = \alpha_{o_{k_n}} = 0$  na equação (1.11) e comparando termo a termo com a equação (1.29), vemos que deve ser

$$\sum_{\{k_j\}} X_{k_1} X_{k_2} \dots X_{k_n} = n! \frac{\partial^n g_\alpha}{\partial \alpha_{k_1} \partial \alpha_{k_2} \dots \partial \alpha_{k_n}} \Big|_{\alpha=0} \quad (1.30)$$

onde o somatório é calculado simetrizando-se o produto  $X_{k_1} X_{k_2} \dots X_{k_n}$ .

A equação (1.30) generaliza a equação (1.24) para termos de ordem arbitrária. Podemos ver, a partir dela, uma característica importante dos geradores de uma álgebra de Lie, que fica mais evidente no mapeamento exponencial: é sempre possível substituir derivadas parciais de qualquer ordem por uma soma de produtos de geradores. No caso do mapeamento exponencial, esta soma é obtida simplesmente simetrizando-se os geradores correspondentes aos parâmetros em relação aos quais se está derivando. Abaixo, mostramos a parametrização de  $SL(2, \mathbb{R})$  que se obtém aplicando o mapeamento exponencial aos geradores dados em (1.26).

$$g_\alpha = \begin{bmatrix} \cosh \theta + \frac{\sinh \theta}{\theta} \alpha_1 & \frac{\sinh \theta}{\theta} (\alpha_2 + \alpha_3) \\ \frac{\sinh \theta}{\theta} (\alpha_3 - \alpha_2) & \cosh \theta - \frac{\sinh \theta}{\theta} \alpha_1 \end{bmatrix}, \quad \theta^2 = \alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \quad (1.31)$$

Convém notar que, na definição 1.2.2, que trata das álgebras de Lie, não nos referimos à operação  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}$  como sendo o comutador de dois elementos da álgebra. Formalmente, isto não se faz necessário. No entanto, ao tentarmos linearizar um grupo de matrizes em torno da identidade, o comutador (1.23) aparece naturalmente. Isto ocorre sempre que estivermos lidando com representações de uma álgebra de Lie, conforme veremos na próxima seção.

### 1.3 Representações

Nesta seção, trataremos principalmente das representações de uma álgebra de Lie. O estudo da teoria das representações é de importância central para as aplicações das álgebras e grupos de Lie na física: ao contrário dos matemáticos, para quem as propriedades abstratas de uma álgebra podem ser um fim por si, os físicos precisam de estruturas matemáticas concretas para calcular as previsões de seus modelos. Neste trabalho, por exemplo, dedicaremos algum tempo a duas representações particulares da álgebra  $sl(2)$ : as representações de peso mínimo e de peso máximo. Nosso objetivo é

descrevê-las a partir de alguns princípios básicos da teoria das representações. Começemos definindo formalmente uma representação de uma álgebra de Lie.

**Definição 1.3.1** (Representação). Sejam  $\mathcal{G}$  uma álgebra de Lie e  $V$  um espaço vetorial, ambos definidos sobre um corpo  $F$ . Chamemos  $End(V)$  o conjunto dos endomorfismos em  $V$ . Satisfeitas as seguintes condições, um mapeamento  $\pi : \mathcal{G} \mapsto End(V)$  será uma representação de  $\mathcal{G}$  em  $V$ :

i) Linearidade:

$$\pi(\alpha X + \beta Y) = \alpha\pi(X) + \beta\pi(Y); \quad X, Y \in \mathcal{G}, \quad \alpha, \beta \in F$$

ii) Homomorfismo:

$$\pi[X, Y] = \pi(X)\pi(Y) - \pi(Y)\pi(X) \tag{1.32}$$

Fica claro, a partir de (1.32), por que fizemos a identificação da equação (1.25a): em geral trabalharemos com representações de uma álgebra, mas, existindo um homomorfismo entre a operação abstrata  $[\cdot, \cdot]$  na álgebra e o comutador  $[\cdot, \cdot]_-$  no espaço das representações, é justificável utilizar a mesma notação para ambos.

Caso não exista um subespaço  $S \subset V$  além de  $V$  e  $0$  que se mantenha invariante sob a ação de todos os  $\pi(X)$ , a representação em questão será irredutível; existindo tal subespaço  $S$ , ela será, evidentemente, redutível. As equações (1.26) são um exemplo de uma representação irredutível de  $sl(2, \mathbb{R})$ . Aquela representação é, de fato, a representação fundamental desta álgebra.

Neste momento, será conveniente fazer uma observação. Até aqui, temos restringido boa parte dos exemplos ao corpo dos números reais. Isto não será problemático no nosso trabalho, já que as álgebras  $sl(n, \mathbb{C})$  são simplesmente extensões complexas de  $sl(n, \mathbb{R})$ . Deste modo, qualquer elemento de  $sl(n, \mathbb{C})$  pode ser escrito como

$$X = \sum_k (\alpha_k + i\beta_k) X_k$$

onde  $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$  e  $X_k \in sl(n, \mathbb{R})$ .

Iremos, portanto, simplesmente omitir o corpo em que estamos trabalhando, exceto em casos onde se faz necessário explicitá-lo.

Voltemos à nossa discussão sobre representações. Uma representação particularmente importante é a representação adjunta, que se beneficia do fato de ser a própria álgebra de Lie um espaço vetorial: ela mapeia elementos de uma álgebra em transformações lineares dentro da própria álgebra.

Formalmente,  $ad : \mathcal{G} \mapsto End(\mathcal{G})$  pode ser descrita da seguinte forma:

$$ad_X = [X, ] \quad (1.33)$$

Como o comutador é uma estrutura linear em seus argumentos, claramente a propriedade *i*) da definição 1.3.1 é satisfeita. A propriedade *ii*) também pode ser verificada sem dificuldade com o auxílio da identidade de Jacobi. Para todo  $Z$  em  $\mathcal{G}$ , temos

$$ad_{[X,Y]}Z = [[X, Y], Z] = -[[Y, Z], X] - [[Z, X], Y] = [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]] = ad_X ad_Y Z - ad_Y ad_X Z$$

Ou seja:

$$ad_{[X,Y]} = ad_X ad_Y - ad_Y ad_X$$

como pretendíamos.

Tomando uma base  $\{v_i\}$  para o espaço vetorial  $V$ , podemos descrever matricialmente cada elemento de uma representação. Voltemos ao caso da representação adjunta. Dada uma base  $X_i$  da álgebra de Lie, poderemos escrever

$$ad_{X_i} X_j = [X_i, X_j] = \sum_{k=1}^r c_{ij}^k X_k$$

Desse modo, para esta base, poderemos fazer uma associação entre  $ad_{X_i}$  e uma matriz  $A_i$  dada por

$$[(A_i)_j^k] = c_{ij}^k \quad (1.34)$$

onde o índice  $k$  representa as linhas e o índice  $j$ , as colunas de  $A_i$ . Para a base da equação (1.27), por exemplo, obtemos as seguintes matrizes:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}; \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

Nossa intenção é aplicar a álgebra  $sl(2)$  para resolver problemas físicos. Usualmente, a solução de um problema qualquer inicia-se pela determinação de um conjunto completo de observáveis que comutam entre si, no qual se inclui o Hamiltoniano  $H$  do sistema. Será possível, então, obter uma base de autoestados comuns destes observáveis. Este procedimento permite descrever o estado do sistema em qualquer momento, sem ambiguidades, bastando conhecer o seu estado num instante inicial. A base da equação (1.27) não deixa evidente um conjunto com estas propriedades. Podemos,

no entanto, utilizar a representação adjunta em nosso favor: a determinação de uma subálgebra comutativa corresponde à solução da equação de autovalores

$$AX = \rho X \quad (1.36)$$

nos casos em que  $\rho = 0$ . Evidentemente, na equação (1.36),  $A = \sum_{i=1}^r a_i A_i$  é um elemento da representação adjunta, e  $X = \sum_{i=1}^r \alpha_i X_i$  é um elemento da álgebra. As soluções desta equação são obtidas da forma usual, tomando-se

$$\det (A - \rho I) = 0 \quad (1.37)$$

É fácil perceber que os elementos da álgebra que solucionam (1.36) para  $\rho = 0$  comutam entre si. Cartan mostrou ainda que, se  $A$  for escolhido de modo a maximizar o número de elementos com autovalor nulo, apenas 0 será um autovalor degenerado. Sendo  $\{H_1, \dots, H_q\}$  um conjunto máximo de auto-operadores com autovalor nulo e denominando  $E_\rho$  os auto-operadores com autovalor  $\rho \neq 0$ , constrói-se naturalmente a base de Cartan-Weyl, cujos elementos satisfazem às seguintes relações de comutação:

$$[H_i, H_j] = 0 \quad (i, j = 1, \dots, q) \quad (1.38a)$$

$$[H_i, E_\rho] = \rho_i E_\rho \quad (1.38b)$$

$$[E_\rho, E_\sigma] = N_{\rho\sigma} E_{\rho+\sigma} \quad (\rho \neq -\sigma) \quad (1.38c)$$

$$[E_\rho, E_{-\rho}] = \sum_i^q \rho^i H_i \quad (1.38d)$$

Os geradores  $H_i$  determinam a subálgebra de Cartan da álgebra de Lie em questão. Na descrição que fizemos,  $q$  é a dimensão da subálgebra de Cartan. Diz-se, usualmente, que  $q$  é o rank da álgebra de Lie. A subálgebra de Cartan é a subálgebra abeliana maximal que se pode construir numa álgebra de Lie. Aos autovalores não-nulos da equação (1.36) chamaremos raízes. A equação (1.38b) sugere que podemos construir a partir delas um vetor  $\boldsymbol{\rho}$  num espaço  $q$ -dimensional, denominado vetor de raiz, da seguinte maneira:

$$\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \dots, \rho_q) \quad (1.39)$$

Voltemos nossa atenção agora para a equação (1.38a). O fato de ser a subálgebra de Cartan comutativa nos permite construir para o espaço de representação uma base de autovetores dos  $H_i$ . Desse modo, poderemos escrever

$$H_i |u_\Lambda\rangle = \Lambda_i |u_\Lambda\rangle \quad (i = 1, \dots, q) \quad (1.40)$$

onde  $\{|u_\Lambda\rangle\}$  é uma base do espaço de representação. Podemos, então, construir os pesos correspondentes a cada autovetor  $|u\rangle$ . Estes serão vetores num espaço  $q$ -dimensional, denotados por  $\Lambda$ , cujas componentes covariantes serão dadas da maneira descrita abaixo:

$$\Lambda = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_q) \quad (1.41)$$

Um peso é dito positivo se sua primeira componente não-nula for positiva. Se a diferença  $\Lambda_1 - \Lambda_2$  entre dois pesos for positiva (negativa), diremos que o peso  $\Lambda_1$  é maior (menor) que o peso  $\Lambda_2$ . Estas definições nos possibilitam falar do peso máximo e do peso mínimo de um sistema de pesos.

A teoria por trás do sistema de raízes e pesos de uma álgebra de Lie é de extrema importância na descrição de sua estrutura e suas representações. Não é nosso objetivo, neste trabalho, fazer tal descrição. Tratamentos completos deste tema são encontrados em livros-texto sobre álgebras de Lie ou teoria das representações. Os textos citados no início deste capítulo dão uma boa introdução ao assunto.

Nosso objetivo é construir, para a álgebra  $sl(2)$ , suas representações de Verma, que chamaremos representação de peso máximo e representação de peso mínimo. Os físicos têm usado este tipo de estrutura em diversos problemas (como o tratamento usual do oscilador harmônico e do spin, por exemplo). A decomposição de Borel nos permitirá construir estas representações sem dificuldade. Faz-se esta decomposição de uma álgebra de Lie escrevendo-a da maneira abaixo:

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_+ \oplus \mathcal{G}_0 \oplus \mathcal{G}_- \quad (1.42)$$

Na equação acima, o subespaço  $\mathcal{G}_0$  corresponde à subálgebra de Cartan, enquanto  $\mathcal{G}_\pm$  é o subespaço determinado pelos geradores de raízes positivas (+) ou negativas (-).

A construção das representações de Verma parte de um ponto comum na construção das representações para álgebras de Lie em geral. Consideremos a base do espaço de representação formada por autovetores dos  $H_i$ . Poderemos escrever:

$$H_i E_\rho |u_\Lambda\rangle = ([H_i, E_\rho] + E_\rho H_i) |u_\Lambda\rangle = (\rho_i + \Lambda_i) E_\rho |u_\Lambda\rangle \quad (1.43)$$

Vemos portanto que  $E_\rho |u_\Lambda\rangle$  também é autovetor de  $H_i$ , com peso  $\rho + \Lambda$ . Isto nos indica que deve ser possível construir uma base para o espaço de representação através de sucessivas aplicações dos

operadores  $E_\rho$ . Evidentemente, caso  $\rho + \Lambda$  não seja um peso, deveremos ter

$$E_\rho |u_\Lambda\rangle = 0 \quad (1.44)$$

Apresentamos, a seguir, uma definição das representações de peso mínimo e peso máximo de uma álgebra de Lie.

**Definição 1.3.2** (Representação de peso mínimo/máximo). Seja  $\pi : \mathcal{G} \mapsto \text{End}(V)$  uma representação de uma álgebra de Lie  $\mathcal{G}$  com espaço de representação  $V$ . Chamaremos  $\pi$  uma representação de peso mínimo com peso mínimo  $\Lambda$  se existir um vetor não-nulo  $|u_\Lambda\rangle$  tal que

$$\mathcal{G}_- |u_\Lambda\rangle = 0 \quad (1.45a)$$

$$\mathcal{G}_0 |u_\Lambda\rangle = \Lambda |u_\Lambda\rangle \quad (1.45b)$$

O  $\mathcal{G}$ -módulo  $V$  será denominado módulo de peso mínimo, e o autovetor  $|u_\Lambda\rangle$  será chamado vetor de peso mínimo.

Por outro lado,  $\pi$  será uma representação de peso máximo com peso máximo  $\bar{\Lambda}$  caso exista um vetor não-nulo  $|u_{\bar{\Lambda}}\rangle$  satisfazendo

$$\mathcal{G}_+ |u_{\bar{\Lambda}}\rangle = 0 \quad (1.46a)$$

$$\mathcal{G}_0 |u_{\bar{\Lambda}}\rangle = \bar{\Lambda} |u_{\bar{\Lambda}}\rangle \quad (1.46b)$$

Neste caso, o  $\mathcal{G}$ -módulo  $V$  será denominado módulo de peso máximo, e o autovetor  $|u_{\bar{\Lambda}}\rangle$  será chamado vetor de peso máximo.

Em posse destas noções básicas acerca da teoria das álgebras de Lie, iniciamos a exposição principal deste trabalho no próximo capítulo, que consistirá da construção das representações de Verma unitárias para a álgebra  $sl(2)$  e da descrição destas representações por meio da álgebra de Heisenberg.



## Capítulo 2

# A quantização de Wigner do oscilador harmônico bosônico

Este capítulo forma o corpo principal deste trabalho. Nele, descreveremos as representações de peso mínimo e peso máximo da álgebra  $sl(2)$  (seção 2.1) e mostraremos como a introdução de uma estrutura estrela nesta álgebra nos permite construir um espaço de Hilbert (seção 2.2). Na seção 2.3, exporemos a relação entre a representação de peso mínimo de  $sl(2)$  e o oscilador harmônico bosônico, o que nos levará à introdução natural da superálgebra  $osp(1|2)$  na teoria, através da quantização de Wigner (seções 2.4 a 2.7). Finalmente, terminaremos o capítulo mostrando como a estatística dos operadores nos permite recuperar a relação canônica de quantização a partir da quantização de Wigner.

Iniciemos com a análise das representações de peso mínimo e peso máximo de  $sl(2)$ .

### 2.1 Construção das representações de peso mínimo e peso máximo de $sl(2)$

Começamos esta seção obtendo a base de Cartan-Weyl da álgebra  $sl(2)$ , que será adotada em boa parte deste trabalho. Conforme descrevemos na seção anterior, isto é feito diagonalizando o operador  $A = \sum_{i=1}^3 a^i A_i$ , onde utilizamos a base da equação (1.35) para a representação adjunta de  $sl(2)$ :

$$\det \begin{bmatrix} -\rho & -2a^3 & 2a^2 \\ -2a^3 & -\rho & 2a^1 \\ -2a^2 & 2a^1 & -\rho \end{bmatrix} = 0$$

A equação de autovalores acima possui as seguintes soluções:

$$\rho = 0 \tag{2.1a}$$

$$\rho_{\pm} = \pm 2\sqrt{(a^1)^2 - (a^2)^2 + (a^3)^2} \quad (2.1b)$$

Para os autovalores da equação (2.1b), podemos tomar  $a^1 = 1$ ,  $a^2 = a^3 = 0$  e construir uma base de Cartan-Weyl com as seguintes relações de comutação:

$$[H, E_+] = 2E_+; [H, E_-] = -2E_-; [E_+, E_-] = H \quad (2.2)$$

onde  $H$  é o gerador da subálgebra de Cartan de  $sl(2)$  e  $E_{\pm}$  são os geradores de raízes. Vemos portanto que o rank de  $sl(2)$  é 1, de modo que o espaço de pesos será constituído de escalares. Na representação fundamental, os operadores  $H$ ,  $E_+$  e  $E_-$  podem ser escritos da seguinte forma:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; E_+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; E_- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

A seguir, construímos explicitamente a representação de peso mínimo de  $sl(2)$ .

### 2.1.1 A representação de peso mínimo

Escrevemos as equações (1.45a) e (1.45b) para  $sl(2)$  da seguinte forma:

$$E_- |\lambda\rangle = 0 \quad (2.4a)$$

$$H |\lambda\rangle = \lambda |\lambda\rangle \quad (2.4b)$$

Procedemos, então, como na equação (1.43) para obter o espectro de  $H$ :

$$HE_+^n |\lambda\rangle = (\lambda + 2n)E_+^n |\lambda\rangle \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.5)$$

A demonstração de (2.5) é feita trivialmente por indução. Vemos que esta equação é verdadeira para  $n = 0$ , e observamos que tem-se

$$HE_+^{n+1} |\lambda\rangle = HE_+E_+^n |\lambda\rangle = ([H, E_+] + E_+H)E_+^n |\lambda\rangle = (2E_+^{n+1} + E_+HE_+^n) |\lambda\rangle = [\lambda + 2(n+1)]E_+^{n+1} |\lambda\rangle$$

O próximo passo é descrever de que forma o operador  $E_-$  atua nesta representação. Demonstraremos, por etapas, a seguinte relação:

$$E_-^m E_+^n |\lambda\rangle = \begin{cases} (-1)^m \frac{n!}{(n-m)!} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k+\lambda)}{\prod_{k=0}^{n-1-m} (k+\lambda)} E_+^{n-m} |\lambda\rangle & \text{se } 0 \leq m < n \\ (-1)^n n! \prod_{k=0}^{n-1} (k+\lambda) |\lambda\rangle & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m > n \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.6)$$

Para  $m = 0$ , a equação (2.6) se satisfaz identicamente, como era esperado. Podemos utilizar a última das equações (2.2) para obter o seguinte resultado:

$$E_- E_+ |\lambda\rangle = (E_+ E_- - H) |\lambda\rangle = -\lambda |\lambda\rangle$$

donde vemos que (2.6) é válida para  $m = 1$ ,  $n = 1$ . Suponhamos agora que valha, para certo  $n$ ,

$$E_- E_+^n |\lambda\rangle = -n(\lambda + n - 1) E_+^{n-1} |\lambda\rangle \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Em particular, a equação acima é verdadeira para  $n = 1$ . Teremos então

$$E_- E_+^{n+1} |\lambda\rangle = -[\lambda + 2n + n(\lambda + n - 1)] E_+^n |\lambda\rangle = -(n+1)(\lambda + n) E_+^n |\lambda\rangle$$

o que prova a validade de (2.6) para  $m = 1$ . Admitamos, agora, que, para um dado  $n \geq 1$ , tenhamos, para todo  $m = 0, \dots, n-1$ ,

$$E_-^m E_+^n = (-1)^m \frac{n!}{(n-m)!} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k + \lambda)}{\prod_{k=0}^{n-1-m} (k + \lambda)} E_+^{n-m} |\lambda\rangle$$

Teremos então:

$$\begin{aligned} E_-^m E_+^{n+1} &= E_-^{m-1} E_- E_+^{n+1} = -(n+1)(\lambda + n) E_-^{m-1} E_+^n |\lambda\rangle \\ &= -(n+1)(\lambda + n) (-1)^{m-1} \frac{n!}{[n - (m-1)]!} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k + \lambda)}{\prod_{k=0}^{n-1-(m-1)} (k + \lambda)} E_+^{n-(m-1)} |\lambda\rangle \\ &= (-1)^m \frac{(n+1)!}{[(n+1) - m]!} \frac{\prod_{k=0}^n (k + \lambda)}{\prod_{k=0}^{(n+1)-1-m} (k + \lambda)} E_+^{(n+1)-m} |\lambda\rangle \end{aligned}$$

Isso mostra que, para  $n+1$ , a equação (2.6) valerá para todo  $0 \leq m \leq n-1$ . Para  $m = n$ , escrevemos simplesmente

$$\begin{aligned} E_-^n E_+^{n+1} |\lambda\rangle &= E_-^{n-1} E_- E_+^{n+1} |\lambda\rangle = -(n+1)(n + \lambda) E_-^{n-1} E_+^n |\lambda\rangle \\ &= -(n+1)(n + \lambda) (-1)^{n-1} \frac{n!}{[n - (n-1)]!} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k + \lambda)}{\prod_{k=0}^{n-1-(n-1)} (k + \lambda)} E_+^{n-(n-1)} |\lambda\rangle \\ &= (-1)^n \frac{(n+1)!}{[(n+1) - n]!} \frac{\prod_{k=0}^n (k + \lambda)}{\prod_{k=0}^{(n+1)-1-n} (k + \lambda)} E_+^{(n+1)-n} |\lambda\rangle \end{aligned}$$

de modo que o caso  $0 \leq m < n$  está demonstrado. Os casos  $m = n$  e  $m > n$  seguem então facilmente por meio de aplicações do operador  $E_-$  a  $E_-^{n-1} E_+^n |\lambda\rangle$ .

### 2.1.2 A representação de peso máximo

As equações (1.46a) e (1.46b) nos fornecem imediatamente a representação de peso máximo da álgebra  $sl(2)$ :

$$E_+ |\bar{\lambda}\rangle = 0 \quad (2.7a)$$

$$H |\bar{\lambda}\rangle = \bar{\lambda} |\bar{\lambda}\rangle \quad (2.7b)$$

onde  $|\bar{\lambda}\rangle$  é o vácuo da representação de peso máximo. Procedendo de forma análoga ao que fizemos com a representação de peso mínimo, obtemos os autoestados do operador  $H$  nesta representação:

$$HE_-^n |\bar{\lambda}\rangle = (\bar{\lambda} - 2n) E_-^n |\bar{\lambda}\rangle \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.8)$$

Uma equação similar à equação (2.6) também pode ser facilmente obtida:

$$E_+^m E_-^n |\bar{\lambda}\rangle = \begin{cases} (-1)^m \frac{n!}{(n-m)!} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (k-\bar{\lambda})}{\prod_{k=0}^{n-1-m} (k-\bar{\lambda})} E_-^{n-m} |\bar{\lambda}\rangle & \text{se } 0 \leq m < n \\ (-1)^n n! \prod_{k=0}^{n-1} (k-\bar{\lambda}) |\bar{\lambda}\rangle & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m > n \end{cases} \quad (2.9)$$

Do ponto de vista físico, as equações (2.5) e (2.8) mostram diferenças importantes entre as representações de peso mínimo e peso máximo. Tentaremos descrever o oscilador harmônico com a álgebra  $sl(2)$  de uma forma tradicional, admitindo que o vácuo é o estado de menor energia. Como é fácil ver, apenas a representação de peso mínimo pode fazê-lo, e portanto ela que será usada para este propósito. Veremos também, no capítulo 3, que esta representação nos proporcionará um tratamento do oscilador harmônico bosônico em temperaturas finitas derivado do formalismo da Thermofield Dynamics.

### 2.1.3 Álgebra Universal Envelopante

Antes de continuarmos para a próxima seção, faremos uma breve observação formal. Nas equações (2.5), (2.6), (2.8) e (2.9) introduzimos produtos do tipo  $HE_+^n$ ,  $E_-^m E_+^n$ , etc., que claramente não estão na álgebra de Lie. Isto significa que estamos trabalhando numa estrutura maior que a álgebra  $sl(2)$ . Esta estrutura é denominada álgebra universal envelopante, ou simplesmente envelope, da álgebra de Lie  $sl(2)$ . A generalização do conceito de álgebra de Lie para o conceito mais amplo de uma álgebra é feita de forma natural, como vemos na definição a seguir.

**Definição 2.1.1** (Álgebra). Uma álgebra  $\mathcal{A}$  é um espaço vetorial sobre um corpo  $F$  onde se define uma operação  $\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}$  com as seguintes propriedades:

i) *Distributividade à esquerda:*

$$X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$$

ii) *Distributividade à direita:*

$$(X + Y) \cdot Z = X \cdot Z + Y \cdot Z$$

para quaisquer  $X, Y, Z \in \mathcal{A}$ .

iii) A álgebra  $\mathcal{A}$  será chamada *associativa* caso tenhamos

$$(X \cdot Y) \cdot Z = X \cdot (Y \cdot Z)$$

iv) Finalmente, a álgebra  $\mathcal{A}$  será *abeliana* se satisfizer

$$X \cdot Y = Y \cdot X$$

Não apresentaremos, aqui, a definição formal do envelope de uma álgebra de Lie. Remetemos o leitor interessado em mais detalhes ao dicionário compilado por Frappat, Sciarrino e Sorba [30]. A sua construção, no entanto, é feita de forma trivial com o auxílio do teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt: dada uma base  $\{X_1, \dots, X_r\}$  de uma álgebra de Lie  $\mathcal{G}$ , uma base do seu envelope  $\mathcal{U}(\mathcal{G})$  será formada por todos os monômios do tipo  $X_1^{n_1} X_2^{n_2} \dots X_r^{n_r}$ . Deste modo, o envelope de  $sl(2)$  pode ser construído com os geradores abaixo:

$$X(r, s, t) = E_-^r H^s E_+^t \tag{2.10}$$

A seguir, continuamos a discussão com a construção de conjugações para  $sl(2)$ .

## 2.2 Conjugações de $sl(2)$

Tendo estabelecido os autoestados do operador  $H$ , o próximo passo natural na construção do espaço de Hilbert é definir uma norma para este espaço. Matematicamente, este problema consiste em analisar as conjugações possíveis da álgebra  $sl(2)$ , uma tarefa bastante simples, como veremos.

A forma mais comum de conjugação que conhecemos em aplicações físicas é a conjugação hermitiana. É natural, então, buscarmos uma conjugação em  $sl(2)$  que satisfaça às mesmas propriedades.

Isto pode ser feito introduzindo em  $\mathcal{U}(sl(2, \mathbb{C}))$  uma operação estrela, cuja definição formal está escrita abaixo:

**Definição 2.2.1** (Operação estrela). Dada uma álgebra  $\mathcal{A}$  qualquer definida sobre o corpo  $\mathbb{C}$ , um mapeamento  $*$  :  $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}$ , denotado por  $X \mapsto X^*$ , será uma operação estrela se satisfizer às seguintes propriedades:

i) *Anti-linearidade*:

$$(\alpha X + \alpha' X')^* = \alpha^* X^* + \alpha'^* X'^*$$

ii) *Anti-automorfismo*:

$$(XX')^* = X'^* X^*$$

iii) *Involução*

$$(X^*)^* = X$$

onde  $X, X' \in \mathcal{A}$  e  $\alpha, \alpha' \in \mathbb{C}$ .

Uma álgebra associativa com uma operação estrela é denominada álgebra estrela. Queremos construir uma operação estrela em  $\mathcal{U}(sl(2, \mathbb{C}))$ , de modo a transformar esta estrutura numa álgebra estrela. Conforme veremos a seguir, isto se consegue explorando as propriedades da estrutura estrela. Mostramos abaixo esta construção explicitamente. Começamos escrevendo os conjugados de cada elemento da base de Cartan-Weyl como combinações lineares destes elementos:

$$H^* = \delta_{11}H + \delta_{12}E_+ + \delta_{13}E_- \quad (2.11a)$$

$$E_+^* = \delta_{21}H + \delta_{22}E_+ + \delta_{23}E_- \quad (2.11b)$$

$$E_-^* = \delta_{31}H + \delta_{32}E_+ + \delta_{33}E_- \quad (2.11c)$$

As propriedades da operação estrela nos permitem escrever para os conjugados as seguintes relações de comutação:

$$[H^*, E_+^*] = -2E_+^*; [H^*, E_-^*] = 2E_-^*; [E_-^*, E_+^*] = H^* \quad (2.12)$$

Estas relações de comutação nos fornecem o sistema de equações abaixo nas variáveis  $\delta_{ij}$ :

$$2\delta_{21} - \delta_{13}\delta_{22} + \delta_{12}\delta_{23} = 0 \quad (2.13a)$$

$$\delta_{12}\delta_{21} - (1 + \delta_{11})\delta_{22} = 0 \quad (2.13b)$$

$$\delta_{13}\delta_{21} + (1 - \delta_{11})\delta_{23} = 0 \quad (2.13c)$$

$$2\delta_{31} + \delta_{13}\delta_{32} - \delta_{12}\delta_{33} = 0 \quad (2.14a)$$

$$\delta_{12}\delta_{31} + (1 - \delta_{11})\delta_{32} = 0 \quad (2.14b)$$

$$-\delta_{13}\delta_{31} + (1 + \delta_{11})\delta_{33} = 0 \quad (2.14c)$$

$$\delta_{23}\delta_{32} - \delta_{22}\delta_{33} = \delta_{11} \quad (2.15a)$$

$$\delta_{22}\delta_{31} - \delta_{21}\delta_{32} = \frac{1}{2}\delta_{12} \quad (2.15b)$$

$$\delta_{21}\delta_{33} - \delta_{23}\delta_{31} = \frac{1}{2}\delta_{13} \quad (2.15c)$$

Podemos encarar as equações (2.13) como um sistema de equações lineares em que as incógnitas são os  $\delta_{2j}$  e os coeficientes são os  $\delta_{1i}$ . Esse sistema de equações é homogêneo e admite, portanto, pelo menos uma solução (a solução trivial  $\delta_{21} = \delta_{22} = \delta_{23} = 0$ ). Para que existam outras soluções além da solução trivial, o determinante deve ser nulo:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -\delta_{13} & \delta_{12} \\ \delta_{12} & -(1 + \delta_{11}) & 0 \\ \delta_{13} & 0 & (1 - \delta_{11}) \end{pmatrix} = 0 \quad (2.16)$$

O cálculo direto do determinante da equação (2.16) nos fornece

$$\delta_{11}^2 + \delta_{12}\delta_{13} = 1 \quad (2.17)$$

As equações (2.14) e (2.15) fornecem, analogamente,

$$\delta_{21}^2 + \delta_{22}\delta_{23} = 0 \quad (2.18a)$$

$$\delta_{31}^2 + \delta_{32}\delta_{33} = 0 \quad (2.18b)$$

Calculando explicitamente o determinante da matriz  $\delta = [\delta_{ij}]$ , obtemos

$$\det \delta = \delta_{11}\delta_{22}\delta_{33} + \delta_{12}\delta_{23}\delta_{31} + \delta_{13}\delta_{21}\delta_{32} - \delta_{13}\delta_{22}\delta_{31} - \delta_{11}\delta_{23}\delta_{32} - \delta_{12}\delta_{21}\delta_{33}$$

Substituindo as equações (2.15) e (2.17) na equação anterior, vemos que deve ser

$$\det \delta = -1$$

Podemos, então, inverter as equações (2.11) para escrever  $H$ ,  $E_+$ ,  $E_-$  em termos de  $H^*$ ,  $E_+^*$  e  $E_-^*$ :

$$H = \delta_{11}H^* + 2\delta_{31}E_+^* + 2\delta_{21}E_-^* \quad (2.19a)$$

$$E_+ = \frac{\delta_{13}}{2}H^* + \delta_{33}E_+^* + \delta_{23}E_-^* \quad (2.19b)$$

$$E_- = \frac{\delta_{12}}{2}H^* + \delta_{32}E_+^* + \delta_{22}E_-^* \quad (2.19c)$$

Observemos, agora, as equações (2.12). Vemos que os conjugados dos elementos da base de Cartan-Weyl têm a mesma estrutura desta base, quando levado em conta o seguinte mapeamento:

$$H^* \mapsto H; \quad E_+^* \mapsto E_-; \quad E_-^* \mapsto E_+ \quad (2.20)$$

Dado que a operação estrela é uma involução, tomando o conjugado da base estrela obtemos novamente a base original. Isto nos permite escrever, portanto, o sistema de equações abaixo:

$$(H^*)^* = H = \delta_{11}H^* + \delta_{13}E_+^* + \delta_{12}E_-^* \quad (2.21a)$$

$$(E_+^*)^* = E_+ = \delta_{31}H^* + \delta_{33}E_+^* + \delta_{32}E_-^* \quad (2.21b)$$

$$(E_-^*)^* = E_- = \delta_{21}H^* + \delta_{23}E_+^* + \delta_{22}E_-^* \quad (2.21c)$$

Finalmente, podemos tomar os conjugados de ambos os membros de (2.11). Isto nos fornecerá as equações a seguir:

$$H = \delta_{11}^*H^* + \delta_{12}^*E_+^* + \delta_{13}^*E_-^* \quad (2.22a)$$

$$E_+ = \delta_{21}^*H^* + \delta_{22}^*E_+^* + \delta_{23}^*E_-^* \quad (2.22b)$$

$$E_- = \delta_{31}^*H^* + \delta_{32}^*E_+^* + \delta_{33}^*E_-^* \quad (2.22c)$$

É claro que as equações (2.19), (2.21) e (2.22) devem ser idênticas. Podemos concluir então que deve ser

$$\delta_{11} = \delta_{11}^*; \quad \delta_{12} = 2\delta_{21}; \quad \delta_{13} = 2\delta_{31}; \quad \delta_{12}^* = \delta_{13}; \quad \delta_{23} = \delta_{32}; \quad \delta_{22}^* = \delta_{33} \quad (2.23)$$

A partir das equações (2.23), é trivial obtermos a seguinte expressão geral para os conjugados dos elementos da base de Cartan-Weyl em  $sl(2, \mathbb{C})$ :

$$H^* = \delta_{11}H + \sqrt{1 - \delta_{11}^2}e^{i\theta}E_+ + \sqrt{1 - \delta_{11}^2}e^{-i\theta}E_- \quad (2.24a)$$

$$E_+^* = \frac{1}{2}\sqrt{1 - \delta_{11}^2}e^{i\theta}H + \frac{1}{2}(1 - \delta_{11})e^{2i\theta}E_+ - \frac{1}{2}(1 + \delta_{11})E_- \quad (2.24b)$$

$$E_-^* = \frac{1}{2}\sqrt{1 - \delta_{11}^2}e^{-i\theta}H - \frac{1}{2}(1 + \delta_{11})E_+ + \frac{1}{2}(1 - \delta_{11})e^{-2i\theta}E_- \quad (2.24c)$$

onde  $\delta_{11}$  é um parâmetro real.

Nas aplicações da álgebra  $sl(2)$  a problemas físicos, iremos, usualmente, identificar o gerador  $H$  da subálgebra de Cartan com o hamiltoniano do sistema. Desse modo, estaremos interessados principalmente nas conjugações em que  $H$  é hermitiano. Como é fácil ver a partir das equações (2.24), para que isto ocorra deve ser  $\delta_{11} = 1$ . As equações (2.13), (2.14) e (2.23) fornecerão imediatamente  $\delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{21} = \delta_{31} = \delta_{22} = \delta_{33} = 0$ . Vamos chamar  $\delta$  os únicos elementos não-nulos restantes:

$$\delta = \delta_{23} = \delta_{32}$$

A equação (2.15a) nos dá  $\delta^2 = 1$ , de modo que podemos definir duas conjugações distintas em  $sl(2)$ :

i)  $\delta = -1$ :

$$H^* = H; E_+^* = -E_-; E_-^* = -E_+ \quad (2.25)$$

Esta conjugação está associada à forma real não-compacta  $su(1, 1)$  de  $sl(2, \mathbb{C})$  e, portanto, é a conjugação apropriada para o tratamento do oscilador harmônico. Com efeito, seja  $\{w_1, w_2, w_3\}$  uma base do subespaço dos operadores autoadjuntos nesta conjugação. Podemos tomar, por exemplo,

$$w_1 = \frac{H}{2}; w_2 = \frac{E_+ - E_-}{2}; w_3 = \frac{i(E_+ + E_-)}{2} \quad (2.26)$$

Um operador autoadjunto nesta conjugação será, portanto,

$$w = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3 \quad (2.27)$$

onde  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ . Na representação fundamental, o operador  $w$  se escreve como

$$w = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 + i\alpha_3 \\ -\alpha_2 + i\alpha_3 & -\alpha_1 \end{bmatrix}$$

que é exatamente a representação fundamental de  $su(1, 1)$  sobre os números reais. Como esperado, as relações de comutação entre os  $w_i$  são as mesmas que se obtêm em  $su(1, 1)$ :

$$[w_1, w_2] = -iw_3; [w_2, w_3] = iw_1; [w_3, w_1] = -iw_2; \quad (2.28)$$

ii)  $\delta = 1$ :

$$H^* = H; E_+^* = E_-; E_-^* = E_+ \quad (2.29)$$

Esta conjugação, por sua vez, está associada à forma real compacta  $su(2)$  de  $sl(2, \mathbb{C})$ . Deste modo, esta é a conjugação adequada ao formalismo do spin. Tomemos, novamente, uma base do subespaço dos operadores autoadjuntos para esta conjugação. Neste caso, escrevemos

$$w_1 = \frac{H}{2}; w_2 = \frac{i(E_+ - E_-)}{2}; w_3 = \frac{E_+ + E_-}{2} \quad (2.30)$$

e novamente podemos usar a equação (2.27) para descrever um operador autoadjunto arbitrário nesta conjugação da seguinte forma:

$$w = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \alpha_1 & i\alpha_2 + \alpha_3 \\ -i\alpha_2 + \alpha_3 & -\alpha_1 \end{bmatrix}$$

Esta é a representação fundamental de  $su(2)$ . As relações de comutação entre os  $w_i$ , são, evidentemente, as mesmas que se observa nesta álgebra:

$$[w_1, w_2] = iw_3; [w_2, w_3] = iw_1; [w_3, w_1] = iw_2 \quad (2.31)$$

É interessante notar que a conjugação  $\delta = -1$  pode ser obtida a partir das equações (2.24), enquanto a conjugação  $\delta = 1$  não pertence àquele conjunto de soluções. Isto se deve às equações (2.20): caso tivéssemos tomado, no lugar delas, as equações abaixo,

$$H^* \mapsto H; E_+^* \mapsto -E_-; E_-^* \mapsto -E_+$$

encontraríamos um conjunto de soluções para a conjugação  $\delta = 1$  similar ao obtido em (2.24).

Para que seja possível efetivamente descrever o oscilador harmônico em termos de  $sl(2)$ , a representação que estivermos utilizando deve ser unitária. Tendo à nossa disposição as conjugações que acabamos de descrever, a construção de representações deste tipo faz-se sem maiores dificuldades com o auxílio da forma hermitiana usual. A seguir, tratamos cada caso separadamente.

### 2.2.1 Representação de peso mínimo

Com as conjugações em mãos, podemos escrever

$$\langle \lambda | \lambda \rangle = 1 \quad (2.32a)$$

$$\|E_+^n |\lambda\rangle\|^2 = \delta^n \langle \lambda | E_-^n E_+^n | \lambda \rangle \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.32b)$$

onde  $\delta = \pm 1$ . Da equação (2.6), temos

$$\langle \lambda | E_-^n E_+^n | \lambda \rangle = (-1)^n n! \prod_{k=0}^{n-1} (k + \lambda) \quad (2.33)$$

Como a norma deve ser positiva e definida, a seguinte condição deve então ser satisfeita:

$$\|E_+^n |\lambda\rangle\|^2 = (-\delta)^n n! \prod_{k=0}^{n-1} (k + \lambda) \geq 0 \quad (2.34)$$

Devemos distinguir os seguintes casos:

1.  $\lambda > 0$

Nesse caso,  $\prod_{k=0}^{n-1} (k + \lambda) > 0$  para todo  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Para que a condição (2.34) seja satisfeita, deveremos ter, portanto,  $(-\delta)^n > 0$  para todo  $n$ . Concluimos então que será  $\delta = -1$ .

2.  $\lambda = 0$

Para  $\lambda = 0$ , a equação (2.33) mostra que teremos sempre  $\langle \lambda | E_-^n E_+^n | \lambda \rangle = 0$ , de modo que será  $\|E_+^n |\lambda\rangle\| = 0$ . Assim, o único autoestado não-nulo de  $H$  será o vácuo  $|\lambda\rangle$ , com autovalor  $\lambda = 0$ .

3.  $\lambda < 0$

Temos, neste caso, duas situações:

i)  $\lambda \in \mathbb{Z}$

Aqui, será  $\langle \lambda | E_-^n E_+^n | \lambda \rangle = 0$  para  $n = -\lambda + 1, -\lambda + 2, \dots$ . Por outro lado, para  $n = 1, 2, \dots, -\lambda$  será  $\langle \lambda | E_-^n E_+^n | \lambda \rangle > 0$ . A equação (2.32b) nos dá, então,  $\delta = 1$ . Os autoestados não-nulos de  $H$  serão  $|\lambda\rangle, E_+ |\lambda\rangle, \dots, E_+^{-\lambda} |\lambda\rangle$ .

ii)  $\lambda \notin \mathbb{Z}$

Esse caso não fornece uma norma positiva para todos os valores de  $n$  em nenhuma das conjugações. Para ver isso, primeiro observamos que, como  $\lambda \notin \mathbb{Z}$ , será  $\langle \lambda | E_-^n E_+^n | \lambda \rangle \neq 0$  sempre. Tomemos  $m \in \mathbb{Z}$  tal que  $m < -\lambda < m + 1$ . Supondo que seja  $\|E_+^m |\lambda\rangle\|^2 > 0$ , teremos  $\|E_+^{m+1} |\lambda\rangle\|^2 = -\delta(m + \lambda)(m + 1)\|E_+^m |\lambda\rangle\|^2$ , o que mostra que não podemos ter  $\delta = -1$ . Da mesma forma, caso seja  $\delta = 1$ ,  $\|E_+^{m+1} |\lambda\rangle\|^2 = -(m + 1)(m + \lambda)\|E_+^m |\lambda\rangle\|^2$ . Assim, tomando  $n > -\lambda$ , caso tenhamos  $\|E_+^n |\lambda\rangle\|^2 > 0$ , será  $\|E_+^{n+1} |\lambda\rangle\|^2 < 0$ .

A discussão acima mostra que, para a conjugação  $\delta = -1$ ,  $\lambda$  deve ser real e positivo. Na próxima seção descreveremos a álgebra  $sl(2)$  em termos da álgebra de Heisenberg, e será possível ver explicitamente que esta conjugação está relacionada ao oscilador harmônico. A conjugação  $\delta = 1$ , por sua vez, está matematicamente relacionada ao spin, e implica em valores inteiros e negativos de  $\lambda$ . A construção de todos os autoestados possíveis de spin se faz por meio do grupo de Weyl. O caso  $\lambda = 0$  implica que o único autoestado não-nulo de  $H$  é o vácuo  $|\lambda\rangle$ , o que é de pouco interesse para o nosso trabalho.

### 2.2.2 Representação de peso máximo

Na representação de peso máximo, temos:

$$\langle \bar{\lambda} | \bar{\lambda} \rangle = 1 \quad (2.35a)$$

$$\|E_-^n |\bar{\lambda}\rangle\|^2 = \delta^n \langle \bar{\lambda} | E_+^n E_-^n |\bar{\lambda}\rangle \quad (2.35b)$$

A equação (2.9) nos fornece também

$$\langle \bar{\lambda} | E_+^n E_-^n |\bar{\lambda}\rangle = (-1)^n n! \prod_{k=0}^{n-1} (k - \bar{\lambda}) \quad (2.36)$$

e portanto deveremos ter

$$\|E_-^n |\bar{\lambda}\rangle\|^2 = (-\delta)^n n! \prod_{k=0}^{n-1} (k - \bar{\lambda}) > 0 \quad (2.37)$$

Como anteriormente, há três casos a se considerar:

1.  $\bar{\lambda} < 0$

Nesse caso teremos  $\prod_{k=0}^{n-1} (k - \bar{\lambda}) > 0$  para todo  $n = 1, 2, 3, \dots$ . A condição (2.37) nos leva então a concluir que deve ser  $\delta = -1$ .

2.  $\bar{\lambda} = 0$

Vemos da equação (2.36) que esse caso implicará  $\langle \bar{\lambda} | E_+^n E_-^n |\bar{\lambda}\rangle = 0$  e portanto  $\|E_-^n |\bar{\lambda}\rangle\| = 0$  para todo  $n$ . Como na representação de peso mínimo, o único autoestado não-degenerado de  $H$  será o vácuo  $|\bar{\lambda}\rangle$ .

3.  $\bar{\lambda} > 0$

Temos, como para a representação de peso mínimo, duas situações:

i)  $\bar{\lambda} \in \mathbb{Z}$

A equação (2.36) mostra que será  $\langle \bar{\lambda} | E_+^n E_-^n | \bar{\lambda} \rangle = 0$  para todo  $n = \bar{\lambda} + 1, \bar{\lambda} + 2, \dots$ . Para  $n = 1, 2, \dots, \bar{\lambda}$  teremos  $\langle \bar{\lambda} | E_+^n E_-^n | \bar{\lambda} \rangle > 0$ , de modo que a equação (2.35b) nos obriga a concluir que deve ser  $\delta = 1$ . Os autoestados não-nulos de  $H$  serão portanto  $| \bar{\lambda} \rangle, E_- | \bar{\lambda} \rangle, \dots, E_-^{\bar{\lambda}} | \bar{\lambda} \rangle$ .

ii)  $\bar{\lambda} \notin \mathbb{Z}$

Nenhuma das conjugações fornecerá uma norma positiva e definida nesse caso. De fato, para a conjugação  $\delta = 1$ , suponhamos que exista  $n > \bar{\lambda}$  tal que  $\| E_-^n | \bar{\lambda} \rangle \|^2 > 0$ . Então será  $\| E_-^{n+1} | \bar{\lambda} \rangle \|^2 = -(n+1)(n-\bar{\lambda}) \| E_-^n | \bar{\lambda} \rangle \|^2 < 0$ . Por outro lado, para a conjugação  $\delta = -1$  teríamos  $\| E_- | \bar{\lambda} \rangle \|^2 = -\bar{\lambda} < 0$ .

Os resultados obtidos para a representação de peso máximo são bastante similares aos obtidos no caso da representação de peso mínimo: novamente temos um espectro infinito para a conjugação  $\delta = -1$ , associada ao oscilador harmônico, e um espectro finito para a conjugação  $\delta = 1$  de spin. A construção de uma base de autoestados de  $H$  é feita a seguir para cada representação.

### 2.2.3 Base do espaço de Hilbert

As considerações anteriores nos permitem estabelecer uma base para o espaço de Hilbert gerado pelos autoestados de  $H$ . Aqui, consideramos novamente as representações de peso mínimo e peso máximo separadamente.

#### Representação de peso mínimo

Na representação de peso mínimo, um elemento da base é definido da seguinte forma:

$$|\lambda + 2n\rangle = \frac{E_+^n |\lambda\rangle}{\|E_+^n |\lambda\rangle\|} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.38)$$

Com essa definição, a base estará ortonormalizada:

$$\langle \lambda + 2m | \lambda + 2n \rangle = \delta_{mn} \quad (2.39)$$

onde  $\delta_{mn}$  é a delta de Kronecker. Podemos demonstrar a equação (2.39) sem dificuldade. Com efeito, temos

$$\langle \lambda + 2m | \lambda + 2n \rangle = \frac{\delta^m \langle \lambda | E_-^m E_+^n | \lambda \rangle}{\|E_+^m |\lambda\rangle\| \|E_+^n |\lambda\rangle\|} \quad (2.40)$$

A equação (2.6) nos permite concluir imediatamente que a equação (2.39) é válida quando  $m > n$ . Quando  $m = n$ , a substituição de (2.32b) em (2.40) garante que a equação (2.39) também vale nesse caso. Resta-nos apenas demonstrar que (2.39) funciona também para  $m < n$ . Da equação (2.6), vemos que isso será verdade se tivermos

$$\langle \lambda | E_+^p | \lambda \rangle = 0 \quad (p = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.41)$$

Ora, podemos escrever

$$\langle \lambda | E_+^p | \lambda \rangle^* = \delta^p \langle \lambda | E_-^p | \lambda \rangle = 0$$

de modo que (2.41) se verifica. Isto conclui a demonstração da equação (2.39).

### Representação de peso máximo

Na representação de peso máximo, procedemos de forma completamente análoga ao que fizemos com a representação de peso mínimo. Desse modo, os elementos da base serão

$$|\bar{\lambda} - 2n\rangle = \frac{E_-^n |\bar{\lambda}\rangle}{\|E_-^n |\bar{\lambda}\rangle\|} \quad (2.42)$$

e teremos novamente uma base ortonormalizada:

$$\langle \bar{\lambda} - 2m | \bar{\lambda} - 2n \rangle = \delta_{mn} \quad (2.43)$$

Temos agora à nossa disposição um espaço de Hilbert com todas as propriedades necessárias para a descrição de sistemas físicos. Estamos aptos, portanto, a descrever o oscilador harmônico com a base que construímos para a representação de peso mínimo. Faremos isto na seção a seguir.

## 2.3 A álgebra $sl(2)$ e o oscilador harmônico

Nesta seção, faremos uma breve revisão da teoria do oscilador harmônico, com o foco usual que se dedica aos operadores de aniquilação e construção,  $a$  e  $a^\dagger$ . Depois, mostraremos como a álgebra de Heisenberg bosônica se relaciona com a álgebra  $sl(2)$ , obtendo descrições explícitas dos operadores desta em termos dos operadores daquela álgebra.

### 2.3.1 O oscilador harmônico na álgebra de Heisenberg

Esta parte desta seção, dedicada a uma revisão da teoria do oscilador harmônico quântico, pode ser encontrada em maiores detalhes em qualquer livro introdutório de mecânica quântica, como [31].

Começamos escrevendo o hamiltoniano do oscilador harmônico unidimensional:

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}x^2 \quad (2.44)$$

onde  $x$  e  $p$  são os operadores de posição e momento linear, respectivamente. As relações de comutação entre os operadores  $x$ ,  $p$  e  $H$  estão escritas abaixo:

$$[x, p] = i \quad (2.45a)$$

$$[H, x] = -ip \quad (2.45b)$$

$$[H, p] = ix \quad (2.45c)$$

A equação (2.45a) caracteriza a álgebra de Heisenberg bosônica em uma dimensão. As equações (2.45a), (2.45b) e (2.45c) constituem a álgebra do oscilador bosônico. Um aspecto interessante desta álgebra é a simplificação que se obtém em sua descrição ao se utilizarem os operadores de destruição e criação,  $a$  e  $a^\dagger$ :

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + ip) \quad (2.46a)$$

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - ip) \quad (2.46b)$$

Com os operadores  $a$  e  $a^\dagger$  das equações acima, podemos descrever o oscilador harmônico através das seguintes expressões:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^\dagger + a) \quad (2.47a)$$

$$p = \frac{i}{\sqrt{2}}(a^\dagger - a) \quad (2.47b)$$

$$H = \frac{1}{2}(aa^\dagger + a^\dagger a) \quad (2.47c)$$

Utilizando as relações de comutação em (2.45), obtemos uma maneira mais conveniente de descrever a álgebra do oscilador bosônico:

$$[a, a^\dagger] = 1 \quad (2.48a)$$

$$[H, a] = -a \quad (2.48b)$$

$$[H, a^\dagger] = a^\dagger \quad (2.48c)$$

A equação (2.48a) pode ser tomada como a relação de comutação que define a álgebra de Heisenberg bosônica em uma dimensão, no lugar de (2.45a). Com essas definições em mãos, a determinação

dos autoestados e autovalores de  $H$  simplifica-se bastante. Com efeito, poderemos escrever

$$H = N + \frac{1}{2} \quad (2.49)$$

onde o operador  $N$  é dado por

$$N = a^\dagger a$$

Claramente, os operadores  $H$  e  $N$  possuem todos os seus autoestados em comum. Desse modo, podemos, alternativamente, buscar pelos autoestados de  $N$  para determinar o espectro de  $H$ . Seja, então,  $|\phi\rangle$  um autoestado do operador  $N$ , com autovalor  $\phi$ :

$$N |\phi\rangle = \phi |\phi\rangle$$

A equação (2.49) mostra então que  $|\phi\rangle$  será um autoestado de  $H$  com autovalor  $\phi + \frac{1}{2}$ :

$$H |\phi\rangle = \left( \phi + \frac{1}{2} \right) |\phi\rangle \quad (2.50)$$

Consideremos, agora, a ação do operador  $N$  nos estados  $(a^\dagger)^n |\phi\rangle$  e  $a^n |\phi\rangle$ . Obtemos facilmente por indução as seguintes relações:

$$N(a^\dagger)^n |\phi\rangle = (\phi + n)(a^\dagger)^n |\phi\rangle; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.51a)$$

$$N a^n |\phi\rangle = (\phi - n) a^n |\phi\rangle; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.51b)$$

Assim como fizemos com as representações de peso mínimo e peso máximo de  $sl(2)$ , o próximo passo é analisar a norma dos autoestados  $a^n |\phi\rangle$ . As equações (2.51) fornecem:

$$\|a^{n+1} |\phi\rangle\|^2 = \langle \phi | (a^\dagger)^{n+1} a^{n+1} |\phi\rangle = \langle \phi | (a^\dagger)^n N a^n |\phi\rangle$$

Utilizando a equação (2.51b), a expressão acima torna-se

$$\|a^{n+1} |\phi\rangle\|^2 = (\phi - n) \|a^n |\phi\rangle\|^2 \geq 0$$

Para que esta última expressão seja válida para todo  $n = 0, 1, 2, \dots$ , vemos que deve ser  $\|a^n |\phi\rangle\| = 0$ , para algum  $n$ . Podemos, então, tomar um estado  $|0\rangle$  tal que  $a |0\rangle = 0$ . Aplicando o operador  $N$  neste estado encontramos

$$N |0\rangle = a^\dagger a |0\rangle = 0 = 0 |0\rangle$$

Desse modo, a equação (2.51a) torna-se

$$N(a^\dagger)^n |0\rangle = n(a^\dagger)^n |0\rangle; \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

e a equação (2.49) nos dá, então,

$$H(a^\dagger)^n |0\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right)(a^\dagger)^n |0\rangle; \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.52)$$

Assim, o vácuo  $|0\rangle$  do *espaço de Fock* do oscilador harmônico satisfaz às seguintes propriedades:

$$a |0\rangle = 0 \quad (2.53a)$$

$$H |0\rangle = \frac{1}{2} |0\rangle \quad (2.53b)$$

$$\langle 0 | 0 \rangle = 1 \quad (2.53c)$$

Por indução, prova-se facilmente a expressão

$$a^m (a^\dagger)^n |0\rangle = \begin{cases} \frac{n!}{(n-m)!} (a^\dagger)^{(n-m)} |0\rangle, & \text{se } 0 \leq m \leq n; \\ 0, & \text{se } m > n \end{cases} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.54)$$

As equações (2.53c) e (2.54) nos dão, para a norma dos autoestados  $(a^\dagger)^n |0\rangle$ , o seguinte resultado:

$$\|(a^\dagger)^n |0\rangle\| = \sqrt{n!} \quad (2.55)$$

Como os autoestados não são degenerados, uma base ortonormal  $\{|n\rangle\}$  é então obtida definindo-se

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |0\rangle \quad (2.56)$$

Tendo revisado os resultados do tratamento tradicional que se dá ao oscilador harmônico via álgebra de Heisenberg, passaremos a analisar o mesmo problema sob a ótica da álgebra  $sl(2)$ . No restante deste texto, tomaremos  $a = a_-$  e  $a^\dagger = a_+$  a fim de simplificar a notação.

### 2.3.2 Descrição da álgebra $sl(2)$ por meio da álgebra de Heisenberg

Sabe-se que é possível realizar a álgebra  $su(1, 1)$  utilizando-se uma construção quadrática de um, dois ou três modos da álgebra de Heisenberg bosônica [3][32][33]. Esboçemos a construção de um modo.

Tomamos uma base de Cartan-Weyl para  $su(1, 1)$  dada, em termos da base em (2.26), da seguinte maneira:

$$K = w_1; \quad K_+ = w_2 - iw_3; \quad K_- = w_2 + iw_3 \quad (2.57)$$

Os operadores da equação (2.57) satisfazem às seguintes relações de comutação:

$$[K, K_+] = K_+; \quad [K, K_-] = -K_-; \quad [K_+, K_-] = -2K \quad (2.58)$$

Por outro lado, consideremos agora as formas quadráticas  $\frac{1}{2}a_-^2$ ,  $\frac{1}{2}a_+^2$  e  $\frac{1}{4}(a_-a_+ + a_+a_-) = \frac{1}{2}H$ .

Obtêm-se rapidamente as seguintes relações de comutação:

$$\left[\frac{1}{2}H, \frac{1}{2}a_+^2\right] = \frac{1}{2}a_+^2; \quad \left[\frac{1}{2}H, \frac{1}{2}a_-^2\right] = -\frac{1}{2}a_-^2; \quad \left[\frac{1}{2}a_+^2, \frac{1}{2}a_-^2\right] = -H = -2\left(\frac{1}{2}H\right) \quad (2.59)$$

Vemos que as relações de comutação em (2.58) e (2.59) são idênticas. É natural identificarmos, portanto,

$$K = \frac{1}{2}H; \quad K_+ = \frac{1}{2}a_+^2; \quad K_- = \frac{1}{2}a_-^2 \quad (2.60)$$

As equações (2.60) descrevem a álgebra  $su(1,1)$  em termos da álgebra de Heisenberg. Nas equações (2.26) mostramos como descrever  $su(1,1)$  em termos de  $sl(2)$ . Com o auxílio da equação (2.57), obtemos então a álgebra  $sl(2)$  descrita em termos da álgebra de Heisenberg:

$$H = \frac{1}{2}(a_+a_- + a_-a_+); \quad E_+ = \frac{1}{2}a_+^2; \quad E_- = -\frac{1}{2}a_-^2 \quad (2.61)$$

Uma outra forma usual de se obter a álgebra  $sl(2)$  em termos da álgebra de Heisenberg se dá por meio dos operadores  $D$ ,  $F$  e  $G$  abaixo:

$$D = \frac{1}{2}(xp + px); \quad F = \frac{1}{2}x^2; \quad G = \frac{1}{2}p^2 \quad (2.62)$$

Estes operadores satisfazem à seguinte álgebra:

$$[D, G] = 2iG; \quad [D, F] = -2iF; \quad [G, F] = -iD$$

Neste caso a construção é um pouco mais trabalhosa: tomam-se os geradores  $H$ ,  $E_+$  e  $E_-$  como combinações lineares dos operadores em (2.62), impondo a seguir as relações de comutação (2.2). Conforme discutimos em 2.2.1, o fato de ser a energia do estado fundamental do oscilador harmônico  $\lambda = \frac{1}{2} > 0$  nos obriga a impor a conjugação  $\delta = -1$  para obter uma representação unitária. O resultado dos cálculos é mostrado abaixo.

$$H = G + F; \quad E_+ = \frac{1}{2}e^{i\psi}(D - iG + iF); \quad E_- = -\frac{1}{2}e^{-i\psi}(D + iG - iF)$$

A equação (2.61) é reproduzida com a escolha de fase  $\psi = -\frac{\pi}{2}$ . O operador  $D$  em (2.62) é o operador de dilatações do espaço de Fock do oscilador harmônico.

Podemos ver que a álgebra  $sl(2)$  divide o espaço de Fock  $\mathcal{F}$  do oscilador harmônico em dois subespaços:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_e \oplus \mathcal{F}_o \quad (2.63)$$

onde  $\mathcal{F}_e$  é gerado pelos estados pares  $|\frac{1}{2} + 2n\rangle$ , e  $\mathcal{F}_o$  é gerado pelos estados ímpares  $|\frac{1}{2} + 2n + 1\rangle$ . Cada um destes subespaços é, separadamente, uma representação de peso mínimo de  $sl(2)$ , de modo que a descrição do espaço de Fock pela representação de peso mínimo da álgebra  $sl(2)$  é completamente redutível.

Dados os resultados das equações (2.61), podemos investigar que subconjunto do envelope da álgebra de Heisenberg pode ser construído por elementos no envelope de  $sl(2)$ . O envelope da álgebra de Heisenberg é formado por combinações lineares de operadores da seguinte forma:

$$A(m, n) = a_-^m a_+^n \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.64)$$

Tomando  $s = 0$  em (2.10) e substituindo (2.61) nesta equação, vemos que é possível construir elementos da forma

$$X(r, 0, t) = a_-^{2r} a_+^{2t} \quad (2.65)$$

Ora, utilizando a equação (2.48a) em (2.10) com  $s = 1$  e substituindo em (2.61), obtemos elementos da forma

$$X(r, 1, t) = 2a_-^{(2r+1)} a_+^{(2t+1)} + a_-^{2r} a_+^{2t} \quad (2.66)$$

As equações (2.65) e (2.66) nos permitem afirmar que uma base do envelope de  $sl(2)$  será o seguinte subconjunto do envelope da álgebra de Heisenberg:

$$\{a_-^m a_+^n \in \mathcal{U}(\mathcal{H}) | m + n \text{ é par}\} \quad (2.67)$$

Neste momento, é interessante notar que os resultados em (2.61) e (2.67) foram obtidos a partir das equações (2.48), utilizando a forma de Jordan-Schwinger de um modo para a álgebra  $su(1, 1)$ . O fato de termos utilizado a equação (2.48a), a equação fundamental da álgebra de Heisenberg bosônica, merece especial atenção: isto nos levou a fixar, involuntariamente, a energia do vácuo no ponto  $\lambda = \frac{1}{2}$  para o subespaço par em (2.63). Até esta seção, vínhamos trabalhando com valores arbitrários para a energia do vácuo. Outra limitação importante que encontramos foi discutida acima: observáveis como  $x$ ,  $p$ ,  $x^3$ ,  $p^3$ ,... não podem ser construídos no envelope de  $sl(2)$ .

Nas seções a seguir, mostramos que estes problemas levam a uma introdução natural das superálgebras no estudo do oscilador harmônico. Faremos, pois, uma breve digressão formal para apresentar estas estruturas.

## 2.4 Interlúdio: superálgebras de Lie

Nesta seção tomaremos um pequeno desvio no fluxo natural da discussão para introduzir as superálgebras e as superálgebras de Lie. Começamos definindo as superálgebras.

**Definição 2.4.1** (Superálgebra). Seja  $\mathcal{A}$  uma álgebra sobre um corpo  $F$  de característica zero, e tomemos  $\mathbb{Z}_2 = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ . A álgebra  $\mathcal{A}$  será uma superálgebra, ou ainda, uma álgebra  $\mathbb{Z}_2$ -graduada, se for possível decompô-la como soma direta de dois subespaços

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{A}_{\bar{1}}$$

tais que valem as seguintes regras de multiplicação:

$$\mathcal{A}_{\bar{0}} \cdot \mathcal{A}_{\bar{0}} \subset \mathcal{A}_{\bar{0}}; \quad \mathcal{A}_{\bar{0}} \cdot \mathcal{A}_{\bar{1}} \subset \mathcal{A}_{\bar{1}}; \quad \mathcal{A}_{\bar{1}} \cdot \mathcal{A}_{\bar{1}} \subset \mathcal{A}_{\bar{0}}$$

Os elementos  $X_{\bar{0}} \in \mathcal{A}_{\bar{0}}$  serão chamados pares, e a eles associaremos um grau par:

$$\deg X_{\bar{0}} = \bar{0}$$

Por sua vez, os elementos  $X_{\bar{1}} \in \mathcal{A}_{\bar{1}}$  são chamados ímpares e seu grau será, naturalmente, ímpar:

$$\deg X_{\bar{1}} = \bar{1}$$

Diremos que a superálgebra  $\mathcal{A}$  é associativa se a regra usual de associatividade para a multiplicação for válida para seus elementos,

$$(X \cdot Y) \cdot Z = X \cdot (Y \cdot Z)$$

e comutativa se a multiplicação satisfizer a regra usual de comutatividade,

$$X \cdot Y = Y \cdot X$$

O subespaço par  $\mathcal{A}_{\bar{0}}$  é fechado para a multiplicação e, portanto, é uma álgebra; o subespaço ímpar não forma uma álgebra, já que o produto de dois elementos ímpares é par.

Da mesma forma que generalizamos a ideia de álgebra para obter as superálgebras, podemos introduzir sem dificuldade o conceito de superálgebra de Lie.

**Definição 2.4.2** (Superálgebra de Lie). Seja  $\mathcal{G}$  um espaço vetorial sobre um corpo  $F$ , e sejam  $X, Y, Z$  elementos quaisquer de  $\mathcal{G}$ . Diremos que  $\mathcal{G}$  é uma superálgebra de Lie se existir um mapeamento  $\langle, \rangle : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \mapsto \mathcal{G}$  com as seguintes propriedades:

i) *Bilinearidade*:

$$\langle \alpha X + \beta Y, Z \rangle = \alpha \langle X, Z \rangle + \beta \langle Y, Z \rangle; \quad \alpha, \beta \in F$$

ii) *Graduação em  $\mathbb{Z}_2$* :

$$\langle \mathcal{G}_i, \mathcal{G}_j \rangle \in \mathcal{G}_{i+j} \text{ onde } i, j \in \mathbb{Z}_2$$

iii) *Anti-simetria graduada*:

$$\langle X, Y \rangle = -(-1)^{\deg X \cdot \deg Y} \langle Y, X \rangle$$

iv) *Identidade de Jacobi generalizada*:

$$(-1)^{\deg X \cdot \deg Z} \langle X, \langle Y, Z \rangle \rangle + (-1)^{\deg Y \cdot \deg X} \langle Y, \langle Z, X \rangle \rangle + (-1)^{\deg Z \cdot \deg Y} \langle Z, \langle X, Y \rangle \rangle = 0$$

O subespaço par  $\mathcal{G}_{\bar{0}}$ , que poderá ser também denominado subespaço bosônico, tem a estrutura de uma álgebra de Lie; a parte ímpar ou fermiônica  $\mathcal{G}_{\bar{1}}$ , por sua vez, não é fechada para a operação  $\langle, \rangle$  e, portanto, não será uma álgebra.

Dada uma superálgebra associativa  $\mathcal{A}$ , pode-se equipá-la com uma estrutura de superálgebra de Lie definindo-se o supercomutador  $\langle, \rangle$  da maneira a seguir:

$$\langle X, Y \rangle = X \cdot Y - (-1)^{\deg X \cdot \deg Y} Y \cdot X \quad (2.68)$$

A equação acima pode ser escrita em termos do comutador  $[, ]$  ou do anti-comutador  $\{, \}$  usuais, já que teremos

$$\langle X, Y \rangle = \begin{cases} [X, Y] & \text{se } X \in \mathcal{A}_{\bar{0}} \text{ ou } Y \in \mathcal{A}_{\bar{0}} \\ \{X, Y\} & \text{se } X \in \mathcal{A}_{\bar{1}} \text{ e } Y \in \mathcal{A}_{\bar{1}} \end{cases} \quad (2.69)$$

Muitos dos conceitos que discutimos no capítulo 1 para a teoria dos grupos e álgebras de Lie têm versões análogas na teoria das superálgebras. Por exemplo, é possível, em geral, construir um supergrupo de Lie associado a uma superálgebra de Lie. Esta foi, aliás, uma das motivações iniciais para o estudo das superálgebras pelos físicos, já que este problema está intimamente ligado à segunda quantização de sistemas fermiônicos. O procedimento, para a álgebra  $osp(1|2)$ , é discutido em detalhes por Berezin em [34]. Não iremos, neste trabalho, nos alongar em discussões formais acerca da teoria das superálgebras de Lie; os conceitos discutidos no capítulo 1 (especialmente no que concerne às representações de peso mínimo e peso máximo) serão aplicados ao estudo da

superálgebra  $osp(1|2)$  sem nenhuma modificação. Os trabalhos de Kac [35][36] e Corwin, Ne'eman e Sternberg [37] dão uma boa introdução ao assunto, inclusive com o tratamento dos problemas clássicos que fizeram físicos e matemáticos se debruçarem sobre as superálgebras. Continuaremos a seguir o estudo do oscilador harmônico, agora a partir do método da quantização de Wigner, que nos permitirá enxergá-lo de um ponto de vista supersimétrico.

## 2.5 Quantização de Wigner

Em um artigo publicado em 1950 [4], Wigner introduziu, acidentalmente, as superálgebras na física. Sua motivação à época não era, no entanto, expandir o maquinário matemático utilizado para resolver problemas físicos. Ao contrário, Wigner questionou se existiriam princípios de quantização mais fundamentais que a relação canônica (2.48a). Para entendermos a idéia de Wigner, comecemos considerando a relação entre os formalismos de Schrödinger e Heisenberg na mecânica quântica. No formalismo de Schrödinger, em geral, os operadores são estacionários e os estados dos sistemas evoluem com o tempo; no formalismo de Heisenberg, por outro lado, os operadores evoluem com o tempo, ao passo que os estados são estacionários. Os dois formalismos, que inicialmente pareciam incompatíveis, são matematicamente equivalentes e se reconciliam através do cálculo dos valores esperados dos observáveis (sendo a mecânica quântica uma teoria probabilística, o cálculo de valores esperados é, efetivamente, a única forma de testar a teoria). Dado um observável  $A$ , os operadores  $A_S$  (Schrödinger) e  $A_H$  (Heisenberg) correspondentes estão relacionados por

$$A_H = e^{iHt} A_S e^{-iHt} \quad (2.70)$$

Como vamos utilizar primariamente o formalismo de Heisenberg, escreveremos simplesmente  $A_H = A$ . A equação de Heisenberg para a evolução temporal de um operador é obtida diferenciando-se ambos os membros de (2.70) em relação ao tempo, com  $H$  e  $A_S$  independentes do tempo:

$$\frac{dA}{dt} = i[H, A] \quad (2.71)$$

Em 1927, Paul Ehrenfest [38] mostrou que a equação (2.71), ao mesmo tempo em que concilia os dois formalismos e introduz uma dinâmica na mecânica quântica, possui uma outra virtude: ela pode ser utilizada para obter equações de movimento essencialmente idênticas às do formalismo

Hamiltoniano clássico. Ehrenfest tomou um Hamiltoniano simples na forma

$$H = \frac{p^2}{2} + V(x) \quad (2.72)$$

e, utilizando a quantização canônica (2.45a), obteve

$$\dot{x} = p \quad (2.73a)$$

$$\dot{p} = -\frac{dV}{dx} \quad (2.73b)$$

Da mesma maneira, a aceitação da equação (2.45a) e a utilização das equações da dinâmica clássica (2.73) acarretam o surgimento da dinâmica de Heisenberg na mecânica quântica, para um hamiltoniano da forma (2.72):

$$[H, x] = -ip \quad (2.74a)$$

$$[H, p] = i\frac{dV}{dx} \quad (2.74b)$$

Vemos portanto que a relação canônica de comutação pode ser encarada como um elo entre as dinâmicas clássica e quântica. Wigner observou, no entanto, que a quantização canônica é uma condição *suficiente* para o encontro das duas dinâmicas. Ele se perguntou, então, se ela seria também uma condição *necessária*, isto é, se seria a única maneira possível de conciliá-las. A resposta é negativa: partindo das equações (2.74), é possível determinar um conjunto infinito de relações de comutação  $[x, p]$  (ou, alternativamente,  $[a_-, a_+]$ ), dentre as quais está a relação canônica de comutação. Os dois métodos de quantização não são, portanto, equivalentes; do ponto de vista da harmonização das dinâmicas clássica e quântica, o procedimento de Wigner é mais geral.

Consideremos o procedimento de quantização de Wigner para o caso do oscilador harmônico unidimensional. Partindo das equações (2.74) e utilizando as igualdades (2.47), obtemos as seguintes relações de comutação/anti-comutação:

$$\{a_-, a_+\} = 2H \quad (2.75a)$$

$$[H, a_+] = a_+ \quad (2.75b)$$

$$[H, a_-] = -a_- \quad (2.75c)$$

Consideremos, agora, as relações de comutação/anti-comutação não-nulas que definem a superálgebra  $osp(1|2)$ :

$$[H, E_{\pm}] = \pm 2E_{\pm}; [E_+, E_-] = H \quad (2.76a)$$

$$[E_{\pm}, F_{\mp}] = -F_{\pm}; \quad \{F_{\pm}, F_{\pm}\} = \pm 2E_{\pm} \quad (2.76b)$$

$$\{F_{-}, F_{+}\} = H; \quad [H, F_{\pm}] = \pm F_{\pm} \quad (2.76c)$$

Comparando as equações (2.75) e (2.76c), vemos que o princípio de quantização criado por Wigner equivale à descrição do oscilador harmônico através da superálgebra  $osp(1|2)$ , com as seguintes identificações:

$$a_{-} = \sqrt{2}F_{-}; \quad a_{+} = \sqrt{2}F_{+} \quad (2.77)$$

Feitas estas identificações, é fácil utilizar as equações (2.76) para verificar que as expressões (2.61) continuam valendo. A descrição do oscilador harmônico pelo método da quantização de Wigner se reduz, portanto, ao estudo das representações de peso mínimo da superálgebra  $osp(1|2)$ . Faremos este estudo na próxima seção.

## 2.6 As representações de peso mínimo e peso máximo de $osp(1|2)$

A superálgebra ortossimplética  $osp(1|2)$  é, talvez, a mais simples das superálgebras. Sua parte bosônica  $\{H, E_{+}, E_{-}\}$  é uma cópia da álgebra  $sl(2)$ , e sua parte fermiônica  $\{F_{-}, F_{+}\}$  pode ser vista como uma versão supersimétrica desta. Nesta seção, desenvolveremos suas representações de peso mínimo e peso máximo, de maneira perfeitamente análoga ao que fizemos na seção 2.1 para a álgebra  $sl(2)$ .

### 2.6.1 A representação de peso mínimo

Utilizando as equações (1.45), obtemos as expressões que definem a representação de peso mínimo de  $osp(1|2)$ :

$$F_{-} |\lambda\rangle = 0 \quad (2.78a)$$

$$H |\lambda\rangle = \lambda |\lambda\rangle \quad (2.78b)$$

Procedendo da mesma maneira que fizemos para a álgebra  $sl(2)$ , podemos provar sem dificuldade a equação abaixo:

$$HF_{+}^n |\lambda\rangle = (\lambda + n)F_{+}^n |\lambda\rangle \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.79)$$

A equação (2.79) nos fornece os autoestados do Hamiltoniano  $H$ , e terá a mesma forma da equação (2.52), com  $\lambda = \frac{1}{2}$ . Podemos também derivar uma equação análoga a (2.54):

$$F_-^m F_+^n |\lambda\rangle = \begin{cases} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\left(\frac{n}{2}\right)!}{\left(\frac{n-m}{2}\right)!} \frac{\prod_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} (k+\lambda)}{\prod_{k=0}^{\frac{n-m}{2}-1} (k+\lambda)} F_+^{n-m} |\lambda\rangle & m \text{ par, } n \text{ par} \\ \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{\left(\frac{n-m-1}{2}\right)!} \frac{\prod_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (k+\lambda)}{\prod_{k=0}^{\frac{n-m-1}{2}} (k+\lambda)} F_+^{n-m} |\lambda\rangle & m \text{ par, } n \text{ ímpar} \\ \frac{\left(\frac{n}{2}\right)!}{\left(\frac{n-m-1}{2}\right)!} \frac{\prod_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} (k+\lambda)}{\prod_{k=0}^{\frac{n-m-1}{2}} (k+\lambda)} F_+^{n-m} |\lambda\rangle & m \text{ ímpar, } n \text{ par} \\ \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{\left(\frac{n-m}{2}\right)!} \frac{\prod_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (k+\lambda)}{\prod_{k=0}^{\frac{n-m}{2}-1} (k+\lambda)} F_+^{n-m} |\lambda\rangle & m \text{ ímpar, } n \text{ ímpar} \end{array} \right. & \text{se } 0 \leq m < n \\ \left\{ \begin{array}{ll} \left(\frac{n-1}{2}\right)! \prod_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (k+\lambda) |\lambda\rangle & n \text{ ímpar} \\ \left(\frac{n}{2}\right)! \prod_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} (k+\lambda) |\lambda\rangle & n \text{ par} \end{array} \right. & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m > n \end{cases} \quad (2.80)$$

A equação (2.80) pode ser obtida sem dificuldade com o auxílio de (2.6). Ilustraremos a derivação apenas para o caso em que  $m, n$  são ambos pares, com  $m < n$ . Começamos observando que a última equação em (2.76b) nos permite escrever

$$E_+ = F_+^2 \quad (2.81a)$$

$$E_- = -F_-^2 \quad (2.81b)$$

Sendo  $m, n$  pares, tomamos  $m = 2a$ ,  $n = 2b$  e teremos, utilizando a equação (2.6):

$$F_-^m F_+^n |\lambda\rangle = (-1)^a E_-^a E_+^b |\lambda\rangle = \frac{b!}{(b-a)!} \frac{\prod_{k=0}^{b-1} (k+\lambda)}{\prod_{k=0}^{b-a-1} (k+\lambda)} E_+^{b-a} |\lambda\rangle$$

O resultado obtido segue então substituindo novamente  $E_+ = F_+^2$ . Convidamos o leitor a verificar que a equação (2.80), com  $\lambda = \frac{1}{2}$ , se reduz à equação (2.54) quando utilizamos as identidades (2.77).

### 2.6.2 A representação de peso máximo

Definimos a representação de peso máximo de  $osp(1|2)$  com o auxílio das equações (1.46). Mostraremos aqui apenas os resultados das equações relevantes, já que os procedimentos são os mesmos das seções anteriores.

$$F_+ |\bar{\lambda}\rangle = 0 \quad (2.82a)$$

$$H|\bar{\lambda}\rangle = \bar{\lambda}|\bar{\lambda}\rangle \quad (2.82b)$$

Abaixo mostramos as equações relevantes para esta representação.

$$HF_-^n|\bar{\lambda}\rangle = (\bar{\lambda} - n)F_-^n|\bar{\lambda}\rangle \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.83)$$

$$F_+^m F_-^n |\bar{\lambda}\rangle = \begin{cases} \begin{cases} (-1)^m \frac{\left(\frac{n}{2}\right)!}{\left(\frac{n-m}{2}\right)!} \frac{\prod_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} (k-\bar{\lambda})}{\prod_{k=0}^{\frac{n-m}{2}-1} (k-\bar{\lambda})} F_-^{n-m} |\bar{\lambda}\rangle & m \text{ par, } n \text{ par} \\ (-1)^m \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{\left(\frac{n-m-1}{2}\right)!} \frac{\prod_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (k-\bar{\lambda})}{\prod_{k=0}^{\frac{n-m-1}{2}} (k-\bar{\lambda})} F_-^{n-m} |\bar{\lambda}\rangle & m \text{ par, } n \text{ ímpar} \\ (-1)^m \frac{\left(\frac{n}{2}\right)!}{\left(\frac{n-m-1}{2}\right)!} \frac{\prod_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} (k-\bar{\lambda})}{\prod_{k=0}^{\frac{n-m-1}{2}} (k-\bar{\lambda})} F_-^{n-m} |\bar{\lambda}\rangle & m \text{ ímpar, } n \text{ par} \\ (-1)^m \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{\left(\frac{n-m}{2}\right)!} \frac{\prod_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (k-\bar{\lambda})}{\prod_{k=0}^{\frac{n-m}{2}-1} (k-\bar{\lambda})} F_-^{n-m} |\bar{\lambda}\rangle & m \text{ ímpar, } n \text{ ímpar} \end{cases} & \text{se } 0 \leq m < n \\ \begin{cases} (-1)^n \left(\frac{n-1}{2}\right)! \prod_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (k-\bar{\lambda}) |\bar{\lambda}\rangle & n \text{ ímpar} \\ (-1)^n \left(\frac{n}{2}\right)! \prod_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} (k-\bar{\lambda}) |\bar{\lambda}\rangle & n \text{ par} \end{cases} & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m > n \end{cases} \quad (2.84)$$

Tendo estabelecido as equações essenciais que caracterizam as representações de peso mínimo e peso máximo de  $osp(1|2)$ , voltaremos na próxima seção a discutir a quantização de Wigner e a descrição da física do oscilador harmônico por meio das superálgebras de Lie.

## 2.7 A superálgebra $osp(1|2)$ e a álgebra de Heisenberg

Na seção 2.5, mostramos que o procedimento delineado por Wigner para quantizar sistemas físicos nos leva a um conjunto de equações distinto do que é usualmente adotado no estudo do oscilador harmônico. Compare as equações (2.48), que resultam da descrição canônica do oscilador harmônico, com as equações (2.75), derivadas a partir do método de Wigner. Vemos que as duas abordagens se caracterizam pelas seguintes equações:

$$\{a_-, a_+\} = 2H; \quad [H, a_{\pm}] = \pm a_{\pm} \quad (\text{Descrição canônica/Quantização de Wigner}) \quad (2.85)$$

Adicionalmente, a quantização canônica impõe sobre os operadores  $a_-$  e  $a_+$  a relação canônica

de comutação, enquanto a quantização de Wigner deixa esta relação em aberto:

$$[a_-, a_+] = 1 \text{ (Descrição canônica)} \quad (2.86a)$$

$$[a_-, a_+] = ? \text{ (Quantização de Wigner)} \quad (2.86b)$$

As equações (2.85) e (2.86) nos mostram que a quantização de Wigner pode ser encarada como um processo de engenharia reversa da descrição canônica, obtido pela omissão da equação (2.86a). Sabemos que (2.86a) é uma solução possível para (2.86b). Qual é, no entanto, a solução mais geral para esta equação? Podemos responder esta pergunta utilizando o formalismo da representação de peso mínimo que desenvolvemos para a superálgebra  $osp(1|2)$ . Começamos notando que as equações (2.77) nos permitem estabelecer uma forma hermitiana em  $osp(1|2)$  desde que tenhamos

$$F_-^* = F_+ \quad (2.87)$$

Construímos então trivialmente uma base ortonormalizada para a representação de peso mínimo:

$$|\lambda + n\rangle = \frac{F_+^n |\lambda\rangle}{\|F_+^n |\lambda + n\rangle\|} \quad (2.88a)$$

$$\langle \lambda + m | \lambda + n \rangle = \delta_{mn} \quad (2.88b)$$

O próximo passo é determinar como o operador  $[F_-, F_+]$  atua nos elementos desta base. Temos:

$$[F_-, F_+] |\lambda + n\rangle = \frac{1}{\|F_+^n |\lambda\rangle\|} (F_- F_+^{n+1} - F_+ F_- F_+^n) |\lambda\rangle$$

A equação (2.80) nos mostra que

$$F_- F_+^n |\lambda\rangle = \begin{cases} \left(\lambda + \frac{n-1}{2}\right) F_+^{n-1} |\lambda\rangle, & (n = 1, 3, 5, \dots) \\ \frac{n}{2} F_+^{n-1} |\lambda\rangle, & (n = 2, 4, 6, \dots) \end{cases}$$

Desse modo, obtemos o seguinte resultado:

$$[F_-, F_+] = \lambda I_e + (1 - \lambda) I_o \quad (2.89)$$

Na equação (2.89), introduzimos os operadores  $I_e$  e  $I_o$ , que são, respectivamente, o setor par e o setor ímpar da identidade:

$$I_e |\lambda + n\rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ |\lambda + n\rangle & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}; \quad I_o |\lambda + n\rangle = \begin{cases} |\lambda + n\rangle & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 0 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases} \quad (2.90)$$

A equação (2.89) pode ser escrita de uma maneira mais intuitiva definindo-se o operador  $\gamma$ :

$$\gamma = I_e - I_o \quad (2.91)$$

Sendo a identidade  $I = I_e + I_o$ , obtemos

$$[F_-, F_+] = \frac{1}{2}I + \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\gamma \quad (2.92)$$

e, portanto,

$$[a_-, a_+] = I + (2\lambda - 1)\gamma \quad (2.93a)$$

$$[x, p] = iI + i(2\lambda - 1)\gamma \quad (2.93b)$$

As equações (2.93), obtidas por Wigner, descrevem a álgebra de Wigner-Heisenberg. Elas nos esclarecem que a energia do vácuo do oscilador harmônico está intimamente ligada às especificações da álgebra de Heisenberg: quantizando-se o sistema à maneira de Wigner, vemos que a arbitrariedade da energia do vácuo causa um desvio desta álgebra, introduzido pelo operador  $\gamma$ . Este procedimento nos dá uma flexibilidade matemática de que não dispúnhamos, além de aventar a possibilidade de existir uma estrutura algébrica maior que  $osp(1|2)$  por trás da descrição do oscilador harmônico. Estes benefícios parecem acarretar, no entanto, uma perda indesejada: ao usarmos as equações (2.77) como ponte entre a superálgebra  $osp(1|2)$  e o oscilador harmônico, abrimos mão da estatística dos operadores. Com efeito, igualamos, em (2.77), operadores que deveriam ser bosônicos a operadores fermiônicos. Este é, no entanto, mais um aspecto interessante que surge da receita de Wigner para a quantização: o aparecimento espontâneo da álgebra parabosônica. Na próxima seção discutiremos como é possível harmonizar a estatística da álgebra de Heisenberg com a da superálgebra  $osp(1|2)$ .

## 2.8 A quantização de Wigner e a estatística da álgebra de Heisenberg

A primeira pessoa a notar a relação entre a quantização de Wigner e a paraestatística foi Herbert S. Green, que introduziu o conceito de paraestatística formalmente em 1953 [5]. Os trabalhos de Palev citados na introdução deste texto dão um bom panorama da relação entre paraestatística, superálgebras e quantização de Wigner.

Neste trabalho não investigaremos estas relações. Tentaremos, na verdade, conciliar este método de quantização com a estatística usual. Mostraremos evidências de que a única maneira de a quantização de Wigner respeitá-la será impondo as relações canônicas de comutação.

A ideia que seguiremos é bastante simples: vamos supor que existe uma estrutura maior, da qual a superálgebra  $osp(1|2)$  é um subconjunto, que descreve o oscilador harmônico de forma satisfatória, respeitando a estatística usual da álgebra de Heisenberg. É natural, nessas condições, admitirmos que os operadores  $a_-$ ,  $a_+$  também façam parte desta estrutura. Queremos ainda que a forma de Jordan-Schwinger utilizada para descrever a álgebra  $sl(2)$  em termos da álgebra de Heisenberg seja preservada:

$$H = \frac{1}{2}(a_+a_- + a_-a_+) = \{F_-, F_+\} \quad (2.94a)$$

$$E_+ = \frac{1}{2}a_+^2 = F_+^2 \quad (2.94b)$$

$$E_- = -\frac{1}{2}a_-^2 = -F_-^2 \quad (2.94c)$$

A fim de simplificar o desenvolvimento, adotaremos a notação abaixo:

$$F_+ |\lambda + n\rangle = \alpha_{n+1} |\lambda + n + 1\rangle; \quad (n = 0, 2, \dots) \quad (2.95a)$$

$$F_- |\lambda + n\rangle = \beta_n |\lambda + n - 1\rangle; \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.95b)$$

A partir das equações (2.95), conseguimos mostrar sem dificuldade que existem coeficientes  $t_n$  tais que

$$a_+ |\lambda + n\rangle = t_{n+1} F_+ |\lambda + n + 1\rangle; \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.96a)$$

$$a_- |\lambda + n\rangle = t_n^* F_- |\lambda + n - 1\rangle; \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.96b)$$

As equações (2.96) podem ser escritas matricialmente de forma equivalente como

$$a_+ = T F_+; \quad a_- = F_- T^*$$

onde  $T$  é um operador diagonal:

$$T_{mn} = \delta_{mn} t_m$$

Para obtermos uma relação entre os coeficientes  $t_n$ , igualamos  $a_+^2 |\lambda + n\rangle = 2F_+^2 |\lambda + n\rangle$ . Isto nos fornecerá a seguinte igualdade:

$$t_n t_{n+1} = 2; \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Esta última equação, por sua vez, mostra claramente que deveremos ter

$$t_1 = t_3 = \dots = t_{2m+1} = \dots \quad (2.97a)$$

$$t_2 = t_4 = \dots = t_{2m} = \dots \quad (2.97b)$$

Agora, aplicamos  $H$  ao vácuo  $|\lambda\rangle$  de duas maneiras: primeiro calculamos  $H|\lambda\rangle$  tomando  $H = \{F_-, F_+\}$ . Obtemos:

$$H|\lambda\rangle = \alpha_1\beta_1|\lambda\rangle$$

Por outro lado, tomando  $H = \frac{1}{2}\{a_-, a_+\}$ , encontramos também:

$$H|\lambda\rangle = \frac{|t_1|^2}{2}\alpha_1\beta_1|\lambda\rangle$$

Estas duas últimas equações, juntamente com (2.97), nos permitem concluir que deve ser

$$t_{2m+1} = \sqrt{2}e^{-i\phi}; \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.98a)$$

$$t_{2m} = \sqrt{2}e^{i\phi}; \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (2.98b)$$

Desse modo, deve existir um operador fermiônico da seguinte forma:

$$T = \sqrt{2} \begin{bmatrix} t_0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & e^{-i\phi} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & e^{i\phi} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

A equação (2.99) não determina, ainda, a forma definitiva do operador  $T$ . Averiguemos qual será a forma de  $\{T, F_+\}$  utilizando as equações (2.98). É trivial mostrar que teremos:

$$\{T, F_+\}|\lambda + n\rangle = \begin{cases} (t_0 + \sqrt{2}e^{-i\phi})F_+|\lambda\rangle & n = 0; \\ 2\sqrt{2}\cos\phi F_+|\lambda + n\rangle & n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.100)$$

Ora, pela nossa construção, o operador  $\{T, F_+\}$  deve ser bosônico. Os operadores bosônicos à nossa disposição para fechar a álgebra são  $H$ ,  $E_+$ ,  $E_-$  e a identidade  $I$ . Para que a álgebra seja fechada, vemos que o segundo membro de (2.100) deve ser nulo, o que se consegue fazendo  $t_0 = t_2 = \dots = \sqrt{2}e^{i\phi}$ , com  $\phi = \frac{\pi}{2}$ . Teremos então, simplesmente,

$$T = i\sqrt{2}\gamma \quad (2.101)$$

Com o resultado da equação (2.101), podemos utilizar o fato de que  $\gamma$  anticomuta com  $F_+$  e  $F_-$  para escrever

$$a_- = i\sqrt{2}\gamma F_-; \quad a_+ = i\sqrt{2}\gamma F_+ \quad (2.102)$$

Podemos ver, finalmente, que esta construção impõe uma restrição sobre o valor da energia do vácuo. De fato, ao considerarmos o operador  $\gamma$  fermiônico, as equações (2.93) nos obrigam a tomar  $\lambda = \frac{1}{2}$ .

A estrutura que acabamos de construir é formada, portanto, pelos elementos  $H, E_{\pm}, F_{\pm}$  da superálgebra  $osp(1|2)$ , mais a identidade  $I$  e o operador  $\gamma$ . A identidade  $I$ , evidentemente, será um operador bosônico; o operador  $\gamma$ , por sua vez, será fermiônico. É fácil verificar que esta estrutura  $\{osp(1|2), I, \gamma\}$  satisfaz aos critérios da definição 2.4.2 de uma superálgebra de Lie. Os operadores  $a_{\pm}$  estão no envelope desta superálgebra. As relações de (anti)comutação entre os operadores  $I$  e  $\gamma$  e os operadores de  $osp(1|2)$  são nulas. Isto pode ser postulado ou simplesmente verificado na representação de peso mínimo de  $osp(1|2)$ . Temos portanto:

$$[I, osp(1|2)] = 0 \quad (2.103a)$$

$$[\gamma, osp(1|2)]_{\pm} = 0 \quad (2.103b)$$

$$[I, \gamma] = 0 \quad (2.103c)$$

É interessante observarmos que o operador  $\gamma$ , que surgiu naturalmente ao se quantizar o oscilador harmônico pelo método de Wigner, tem as características de uma variável de Clifford. Uma álgebra de Clifford é formada por elementos  $\gamma_i$  que satisfazem à seguinte relação:

$$\{\gamma_i, \gamma_j\} = 2\eta_{ij}$$

onde  $\eta_{ij}$  dá a assinatura da álgebra. As álgebras de Clifford são a base para o estudo da supersimetria e, como as superálgebras, são  $\mathbb{Z}_2$  graduadas. É natural, então, o aparecimento espontâneo de uma variável de Clifford numa estrutura superalgébrica.

A discussão que acabamos de apresentar nos sugere que a relação canônica de comutação está relacionada não apenas a uma equivalência entre as dinâmicas clássica e quântica; na construção algébrica que mostramos, a estatística usual dos operadores da álgebra de Heisenberg só se respeita com a imposição desta relação. Este resultado ficará evidente também no próximo capítulo, onde vamos tentar reproduzir, utilizando a superálgebra  $\{osp(1|2), I, \gamma\}$ , alguns resultados básicos da teoria de campos a temperaturas finitas para osciladores bosônicos.



## Capítulo 3

# O oscilador bosônico térmico

O propósito deste capítulo é propor uma aplicação simples da teoria do oscilador harmônico bosônico que construímos no capítulo anterior e, ao mesmo tempo, complementar esta teoria. Começamos, na seção 3.1, fazendo uma breve introdução à Thermofield Dynamics, que chamaremos neste capítulo simplesmente "TFD", também para evitar estrangeirismos neste texto. Na seção 3.2, mostramos uma maneira natural de se realizar a estrutura matemática da TFD, que nos permite descrever a teoria em termos do coproduto. O formalismo desenvolvido nestas duas seções é então aplicado na seção 3.3 à superálgebra  $\{osp(1|2), I, \gamma\}$  descrita no capítulo anterior, e novamente ficará clara a conexão entre a relação canônica de quantização, a quantização de Wigner e a estatística dos operadores. Por último, na seção 3.4, usamos a representação de peso mínimo da álgebra  $sl(2)$  para reproduzir os resultados obtidos pelo formalismo padrão da TFD.

Começemos, então, introduzindo as ideias básicas por trás da TFD.

### 3.1 A motivação matemática da TFD

Consideremos um sistema em equilíbrio térmico, cujo Hamiltoniano é denotado pelo operador  $H$ . O valor médio de um observável no ensemble canônico é obtido por meio da seguinte fórmula básica da mecânica estatística:

$$\langle A \rangle = \frac{1}{Z(\beta)} \text{Tr}(\exp(-\beta H) A) \quad (3.1)$$

onde  $Z = Z(\beta)$  é a função de partição do sistema:

$$Z = \text{Tr}(\exp(-\beta H))$$

Vamos admitir que uma base do espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  é formada pelos autoestados  $|n\rangle$  do Hamiltoniano, onde temos  $H|n\rangle = E_n|n\rangle$ . Estamos desconsiderando o caso em que há degenerescências nos

autovalores de  $H$ , já que nossa atenção se voltará para o oscilador harmônico. Poderemos escrever a equação (3.1) da seguinte forma:

$$\langle A \rangle = \frac{1}{Z(\beta)} \sum_n e^{-\beta E_n} \langle n | A | n \rangle \quad (3.2)$$

A ideia fundamental da TFD é investigar a possibilidade de existência de um estado  $|0(\beta)\rangle$ , denominado vácuo térmico, tal que

$$\langle A \rangle = \langle 0(\beta) | A | 0(\beta) \rangle \quad (3.3)$$

Podemos ver rapidamente que  $|0(\beta)\rangle$  não pode ser um estado do espaço de Hilbert que descreve o sistema. Com efeito, suponhamos que isto seja possível, e tomemos

$$|0(\beta)\rangle = \sum_n c_n(\beta) |n\rangle \quad (3.4)$$

Igualando as equações (3.2) e (3.3), teremos então

$$\sum_{m,n} c_m^*(\beta) c_n(\beta) \langle m | A | n \rangle = \frac{1}{Z(\beta)} \sum_n e^{-\beta E_n} \langle n | A | n \rangle$$

A equação acima nos daria portanto

$$c_m^*(\beta) c_n(\beta) = \frac{1}{Z(\beta)} e^{-\beta E_n} \delta_{mn} \quad (3.5)$$

É claro que a equação (3.5) não pode ser satisfeita por números complexos. No entanto, ela nos sugere uma condição de ortogonalidade entre os coeficientes  $c_n(\beta)$ . A forma mais razoável de se satisfazer esta condição é efetuar uma duplicação dos graus de liberdade do sistema. De fato, tomamos

$$|0(\beta)\rangle = \sum_n c_n(\beta) |n, \tilde{n}\rangle, \quad |n, \tilde{n}\rangle = |n\rangle \otimes |\tilde{n}\rangle$$

e, restringindo a atuação do operador  $A$  apenas aos estados sem  $\sim$ , teremos:

$$\langle 0(\beta) | A | 0(\beta) \rangle = \sum_{m,n} c_m^*(\beta) c_n(\beta) \langle \tilde{m}, m | A | n, \tilde{n} \rangle = \sum_n c_n^*(\beta) c_n(\beta) \langle n | A | n \rangle$$

Igualando a equação acima à (3.2), vemos que o vácuo térmico será dado por

$$|0(\beta)\rangle = \frac{1}{\sqrt{Z(\beta)}} \sum_n e^{\left(-\frac{\beta E_n}{2}\right)} |n, \tilde{n}\rangle \quad (3.6)$$

Portanto, o cálculo do valor médio de um operador no ensemble canônico pode ser realizado computando-se o seu valor esperado no vácuo térmico dado pela equação (3.6). Isto torna possível usar um estado puro no espaço de Hilbert duplicado para o cálculo de valores médios num

sistema composto de uma mistura estatística de estados. A vantagem desta transformação reside na possibilidade de aplicar as técnicas usuais da teoria de campos aos problemas em temperaturas finitas.

A duplicação dos graus de liberdade de um sistema é um procedimento comum em física, e particularmente frequente no tratamento de teorias térmicas. Porém, ao contrário de outros exemplos usuais em que isto ocorre, onde as razões físicas para a duplicação são bastante intuitivas (a adição de momento angular vem à nossa mente aqui), a duplicação dos graus de liberdade na TFD parece um procedimento matemático artificial, cujo propósito seria apenas ajustar a mecânica estatística aos moldes da teoria de campos. Esta discussão acompanha a TFD desde o seu surgimento [20], especialmente no que concerne ao significado físico do vácuo térmico. Neste trabalho, nossa atenção será dirigida à descrição matemática do formalismo algébrico básico da TFD. Não entraremos, pois, em detalhes nessas questões.

A resolução de qualquer problema por meio das técnicas da TFD parte da determinação do vácuo térmico, que, quando conhecido, determina imediatamente a temperatura na teoria. Faz-se necessário, no entanto, definir sem ambiguidades o espaço de Hilbert térmico [39],  $\mathcal{H}_T$ , obtido ao duplicar-se o sistema original:

$$\mathcal{H}_T = \mathcal{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}}$$

Os operadores  $\tilde{X}$  que atuam no espaço  $\tilde{\mathcal{H}}$  são obtidos a partir dos operadores  $X$  que atuam no espaço  $\mathcal{H}$  com o auxílio da conjugação til ( $\widetilde{\phantom{x}}$ ). Esta conjugação será caracterizada pelas seguintes propriedades:

$$\widetilde{(XY)} = \tilde{X}\tilde{Y} \quad (3.7a)$$

$$\widetilde{(\alpha X + \gamma Y)} = \alpha^* \tilde{X} + \gamma^* \tilde{Y} \quad (3.7b)$$

$$\widetilde{(X^*)} = (\tilde{X})^* \quad (3.7c)$$

$$\widetilde{(\tilde{X})} = X \quad (3.7d)$$

$$[X_i, \tilde{Y}]_{\pm} = 0 \quad (3.7e)$$

Conhecendo uma álgebra de operadores  $X_i$  que atuam em  $\mathcal{H}$ , as regras de conjugação das equações (3.7) nos permitem obter a álgebra correspondente dos operadores  $\tilde{X}_i$  em  $\tilde{\mathcal{H}}$ . A álgebra térmica

dos operadores que atuam em  $\mathcal{H}_T$  será caracterizada, então, pelas seguintes relações:

$$[X_i, X_j]_{\pm} = \sum_k c_{ij}^k X_k \quad (3.8a)$$

$$[\tilde{X}_i, \tilde{X}_j]_{\pm} = \sum_k (c_{ij}^k)^* \tilde{X}_k \quad (3.8b)$$

$$[X_i, \tilde{X}_j]_{\pm} = 0 \quad (3.8c)$$

Antes de desenvolvermos a TFD para a superálgebra  $\{osp(1|2), I, \gamma\}$ , cabe uma breve observação a respeito da conjugação til. As equações (3.7), que definem as propriedades desta conjugação, podem ser vistas como postulados matemáticos da TFD, que levam ao surgimento da álgebra térmica. Uma motivação física interessante para a implementação da álgebra térmica pode ser obtida de outra maneira, ao se considerar separadamente os observáveis dos geradores de simetria. As teorias físicas, sejam clássicas ou quânticas, tratam matematicamente estes entes distintos como se fossem um único. Dentre as razões que se pode citar para esta indistinguibilidade entre observáveis e geradores de simetria, talvez a principal seja a mais prosaica de todas: este tratamento tem se mostrado eficaz ao longo da história da física. No entanto, dado um observável  $L_i$  (que pode ser, por exemplo, uma componente do momento angular) e o gerador de simetria correspondente  $\hat{L}_i$  (no caso, o gerador de rotações infinitesimais em torno do  $i$ -ésimo eixo), não existe nenhuma razão para considerarmos que sejam o mesmo objeto matemático *a priori*. Conforme é discutido em [40], considerações físicas a respeito das relações entre estes objetos nos levam a definir os operadores til como

$$\tilde{X} = X - \hat{X}$$

e as equações (3.7) e (3.8) surgem como consequência desta definição.

Seguimos, pois, para a próxima seção, onde mostraremos como a estrutura do coproduto permite realizar a conjugação til e, portanto, a álgebra térmica que descrevemos neste capítulo.

## 3.2 Uma realização da álgebra térmica

Nesta seção, abordaremos novamente as propriedades da conjugação til, mas agora no caminho inverso: mostraremos como as propriedades desta conjugação podem ser deduzidas matematicamente, em vez de postuladas. Conforme veremos, esta abordagem culminará numa descrição da TFD em termos do coproduto, que é o nosso objetivo. A fim de introduzir a estrutura do coproduto

na descrição da conjugação til, consideremos os operadores anti-lineares  $J : \mathcal{H} \mapsto \tilde{\mathcal{H}}$  e  $\tilde{J} : \tilde{\mathcal{H}} \mapsto \mathcal{H}$  dados por

$$J(c_m |m\rangle) = c_m^* |\tilde{m}\rangle \quad (3.9a)$$

$$\tilde{J}(\tilde{c}_m |\tilde{m}\rangle) = \tilde{c}_m^* |m\rangle \quad (3.9b)$$

onde  $m = \tilde{m}$  e  $c_m, \tilde{c}_m \in \mathbb{C}$ . Estas transformações são, claramente, inversas uma da outra:

$$J\tilde{J} = \tilde{I} \quad (3.10a)$$

$$\tilde{J}J = I \quad (3.10b)$$

As equações (3.10) nos permitem determinar como os operadores  $J, \tilde{J}$  atuam nos espaços duais  $\tilde{\mathcal{H}}^*$ ,  $\mathcal{H}^*$ , respectivamente. De fato, podemos escrever, por exemplo:

$$\langle m | m \rangle = \langle m | I | m \rangle = \langle m | \tilde{J}J | m \rangle$$

A equação acima nos indica que  $J : \tilde{\mathcal{H}}^* \mapsto \mathcal{H}^*$ ,  $\tilde{J} : \mathcal{H}^* \mapsto \tilde{\mathcal{H}}^*$  serão dadas por

$$\left( \langle m | c_m \right) \tilde{J} = \langle \tilde{m} | c_m^* \quad (3.11a)$$

$$\left( \langle \tilde{m} | \tilde{c}_m \right) J = \langle m | \tilde{c}_m^* \quad (3.11b)$$

Seja  $\mathcal{V}$  ( $\tilde{\mathcal{V}}$ ) o espaço vetorial dos operadores que atuam em  $\mathcal{H}$  ( $\tilde{\mathcal{H}}$ ). Dado  $X \in \mathcal{V}$ , definimos seu conjugado til  $\tilde{X} \in \tilde{\mathcal{V}}$  da seguinte maneira:

$$\tilde{X} = JX\tilde{J} \quad (3.12)$$

Evidentemente, dado  $\tilde{X} \in \tilde{\mathcal{V}}$ , seu conjugado til  $\widetilde{(\tilde{X})} \in \mathcal{V}$  será

$$\widetilde{(\tilde{X})} = \tilde{J}\tilde{X}J = \tilde{J}(JX\tilde{J})J = X$$

Além disso, temos, para quaisquer  $X_i, X_j \in \mathcal{V}$ :

$$\widetilde{(X_i X_j)} = J(X_i X_j)\tilde{J} = (JX_i\tilde{J})(JX_j\tilde{J}) = \tilde{X}_i \tilde{X}_j$$

A conjugação que acabamos de definir satisfaz às propriedades (3.7a) e (3.7d). No entanto, os operadores  $J, \tilde{J}$  atuam em espaços distintos. A generalização desta conjugação para o espaço térmico  $\mathcal{H}_T = \mathcal{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}}$  pode ser feita definindo-se o operador  $J_T : \mathcal{H}_T \mapsto \mathcal{H}_T$  abaixo:

$$J_T(|m\rangle \otimes |\tilde{n}\rangle) = |n\rangle \otimes |\tilde{m}\rangle = (\tilde{J}|\tilde{n}\rangle) \otimes (J|m\rangle) \quad (3.13)$$

O operador  $J_T$  que acabamos de definir é uma involução e, ainda, hermitiano:

$$J_T = J_T^{-1} = J_T^* \quad (3.14)$$

A relação acima pode ser demonstrada sem nenhuma dificuldade aplicando-se a definição do operador  $J_T$ , equação (3.13). De fato, temos

$$J_T^2(|m\rangle \otimes |\tilde{n}\rangle) = J_T(|n\rangle \otimes |\tilde{m}\rangle) = |m\rangle \otimes |\tilde{n}\rangle$$

A hermiticidade de  $J_T$  também é provada sem maiores complicações tomando o conjugado hermitiano de  $J_T(|m\rangle \otimes |\tilde{n}\rangle)$ :

$$\left[ J_T(|m\rangle \otimes |\tilde{n}\rangle) \right]^* = (\langle \tilde{n}| \otimes \langle m|) J_T^* = \langle \tilde{m}| \otimes \langle n|$$

Teremos então

$$\langle \tilde{n}'| \otimes \langle m'| J_T^* J_T |m\rangle \otimes |\tilde{n}\rangle = \langle \tilde{m}'| \otimes \langle n'| n\rangle \otimes |\tilde{m}\rangle = \delta_{m,m'} \delta_{n,n'}$$

o que conclui a demonstração de (3.14).

A ação dos operadores  $X \in \mathcal{V}$  e  $\tilde{X} \in \tilde{\mathcal{V}}$  é definida no espaço de Hilbert térmico  $\mathcal{H}_T$  da maneira usual:

$$X \mapsto X_T = X \otimes \tilde{I} \quad (3.15a)$$

$$\tilde{X} \mapsto \tilde{X}_T = I \otimes \tilde{X} \quad (3.15b)$$

É fácil ver que os operadores  $X_T$  e  $\tilde{X}_T$  estão relacionados por uma conjugação do operador  $J_T$ .

De fato, temos:

$$\begin{aligned} (J_T X_T J_T) |m\rangle \otimes |\tilde{n}\rangle &= (J_T X_T) |n\rangle \otimes |\tilde{m}\rangle = J_T (X |n\rangle \otimes |\tilde{m}\rangle) = |m\rangle \otimes J(X |n\rangle) = |m\rangle \otimes (JX\tilde{J})(J|n\rangle) \\ &= |m\rangle \otimes \tilde{X} |\tilde{n}\rangle = (I \otimes \tilde{X})(|m\rangle \otimes |\tilde{n}\rangle) = \tilde{X}_T(|m\rangle \otimes |\tilde{n}\rangle) \end{aligned}$$

Isto nos leva a definir a conjugação til no espaço de Hilbert térmico como:

$$\tilde{X}_T = J_T X_T J_T \quad (3.16)$$

Para que a conjugação til definida na equação (3.16) seja satisfatória, ela deve preencher, no espaço de Hilbert térmico, os requisitos das equações (3.7). Explicitamente, devemos ter:

$$\widetilde{(X_T Y_T)} = \tilde{X}_T \tilde{Y}_T \quad (3.17a)$$

$$(\widetilde{xX_T + yY_T}) = x^* \tilde{X}_T + y^* \tilde{Y}_T \quad (3.17b)$$

$$(\widetilde{X_T^*}) = (\tilde{X}_T)^* \quad (3.17c)$$

$$(\widetilde{\tilde{X}_T}) = X_T \quad (3.17d)$$

$$[X_T, \tilde{Y}_T] = 0 \quad (3.17e)$$

As equações (3.17) são bem fáceis de demonstrar. Para a equação (3.17a), escrevemos:

$$\widetilde{X_T Y_T} = J_T(X_T Y_T) J_T = (J_T X_T J_T)(J_T Y_T J_T) = \tilde{X}_T \tilde{Y}_T$$

onde utilizamos a propriedade de involução de  $J_T$ . Esta mesma propriedade é capaz de demonstrar (3.17d):

$$(\widetilde{\tilde{X}_T}) = J_T \tilde{X}_T J_T = J_T(J_T X_T J_T) J_T = X_T$$

A anti-linearidade da propriedade (3.17b) é consequência da equação (3.13). Esta equação define o operador  $J_T$  em termos de  $J$  e  $\tilde{J}$ ; estes, por sua vez, são operadores anti-lineares, como se pode ver explicitamente em (3.9). Com efeito, temos:

$$\begin{aligned} (\widetilde{xX_T}) |m\rangle \otimes |\tilde{n}\rangle &= J_T(xX_T) J_T |m\rangle \otimes |\tilde{n}\rangle = J_T(xX_T) |n\rangle \otimes |\tilde{m}\rangle = J_T(xX |n\rangle) \otimes |\tilde{m}\rangle \\ &= \tilde{J} |\tilde{m}\rangle \otimes J(xX |n\rangle) = |m\rangle \otimes x^*(JX\tilde{J})J |n\rangle = x^* |m\rangle \otimes \tilde{X} |\tilde{n}\rangle \\ &= x^*(I \otimes \tilde{X}) |m\rangle \otimes |\tilde{n}\rangle = x^* \tilde{X}_T |m\rangle \otimes |\tilde{n}\rangle \end{aligned}$$

A propriedade (3.17c) é demonstrada calculando o conjugado hermitiano de  $\tilde{X}_T$ , e observando que  $J_T$  é hermitiano:

$$(\tilde{X}_T)^* = (J_T X_T J_T)^* = J_T^* X_T^* J_T^* = J_T X_T^* J_T = (\widetilde{X_T^*})$$

Finalmente, é fácil ver que a conjugação  $\sim$  definida desta forma efetivamente introduz uma nova cópia da álgebra, independente da original, de modo que (3.17e) se satisfaz:

$$[X_T, \tilde{Y}_T] = (X \otimes \tilde{I})(I \otimes \tilde{Y}) - (I \otimes \tilde{Y})(X \otimes \tilde{I}) = X \otimes \tilde{Y} - X \otimes \tilde{Y} = 0$$

Tendo estabelecido uma realização viável da conjugação til, o próximo passo é aplicar o que se desenvolveu nesta seção à superálgebra  $\{osp(1|2), I, \gamma\}$  que discutimos no capítulo anterior. Antes disso, no entanto, mostraremos como o coproduto se relaciona com o cálculo de valores médios neste formalismo.

Começemos observando o seguinte resultado:

$$\langle \tilde{n} | \tilde{X} | \tilde{n} \rangle = \left( \langle n | \tilde{J} \right) J X \tilde{J} \left( J | n \rangle \right) = \langle n | X | n \rangle$$

onde utilizamos as equações (3.11) e (3.12). Desse modo, vemos que o valor médio de um operador  $X$ , dado pela equação (3.3), poderá ser escrito de forma equivalente como

$$\langle X \rangle = \frac{1}{2} \langle 0(\beta) | (X \otimes \tilde{I} + I \otimes \tilde{X}) | 0(\beta) \rangle \quad (3.18)$$

Dada uma álgebra  $\mathcal{G}$  e um seu elemento  $X$ , o coproduto  $\Delta : \mathcal{G} \mapsto \mathcal{G} \times \mathcal{G}$  é definido da seguinte maneira:

$$\Delta X = X \otimes \tilde{I} + \tilde{I} \otimes X \quad (3.19)$$

As equações (3.18) e (3.19) nos dão uma expressão para o valor médio dos operadores em termos do coproduto:

$$\langle X \rangle = \frac{1}{2} \langle 0(\beta) | \Delta X | 0(\beta) \rangle \quad (3.20)$$

A razão por que desejamos introduzir o coproduto na estrutura da TFD é que isto nos possibilitará, em trabalhos futuros, estudá-la utilizando as ferramentas das álgebras de Hopf. A relação entre a TFD e as álgebras de Hopf está bem descrita, por exemplo, em [41] e [42]. Nossa abordagem aqui, aliás, foi inspirada nestes trabalhos. Entretanto, sendo o nosso ponto de partida para a descrição do oscilador harmônico bosônico a quantização de Wigner, o nosso tratamento para a TFD envolve a superálgebra  $\{osp(1|2), I, \gamma\}$ , que discutimos no capítulo anterior. Na seção a seguir, mostramos que esta superálgebra nos força a encarar os mapeamentos  $X \mapsto X \otimes \tilde{I}$ ,  $\tilde{X} \mapsto I \otimes \tilde{X}$  de outra maneira.

### 3.3 A álgebra térmica de $\{osp(1|2), I, \gamma\}$

Iremos agora aplicar os resultados que obtivemos na seção anterior à superálgebra  $\{osp(1|2), I, \gamma\}$  para obter sua versão térmica. Em princípio, poderíamos simplesmente reproduzir o que foi feito anteriormente, substituindo o operador arbitrário  $X$  da seção anterior pelos operadores deste conjunto. É importante observarmos, porém, uma pequena anomalia que surge ao tentarmos usar o formalismo da seção anterior em operadores fermiônicos.

Mostramos que a duplicação dos graus de liberdade de um sistema na TFD por meio da conjugação til é efetivada com as identificações da equação (3.15):

$$X_T = X \otimes \tilde{I}$$

$$\tilde{X}_T = I \otimes \tilde{X}$$

Com estas identificações, vemos que a propriedade (3.7e) será satisfeita definindo-se

$$(X \otimes \tilde{I})(I \otimes \tilde{Y}) = \sigma(I \otimes \tilde{Y})(X \otimes \tilde{I}) \quad (3.21)$$

onde  $\sigma$  é um índice de paridade:

$$\sigma = \begin{cases} 1 & \text{se um dos operadores for bosônico} \\ -1 & \text{se ambos os operadores forem fermiônicos} \end{cases}$$

A equação (3.21) fornece a receita para tratar osciladores bosônicos e fermiônicos. Ela é, de fato, o ponto de partida para a análise da TFD feita em termos do coproduto em [41],[42]. Neste trabalho, estamos lidando com o oscilador bosônico. A quantização de Wigner introduz, conforme vimos no capítulo anterior, operadores fermiônicos na teoria do oscilador harmônico bosônico. Para que uma descrição completamente bosônica seja possível, devemos portanto modificar a forma como os conjugados til dos operadores fermiônicos são calculados. No caso da superálgebra  $\{osp(1|2), I, \gamma\}$ , isto é conseguido, sem alterar a forma dos conjugados til dos operadores bosônicos, de maneira bastante simples: dado  $X \in \{osp(1|2), I, \gamma\}$  bosônico ou fermiônico, definimos sua versão térmica e a de seu conjugado til da seguinte maneira:

$$X_T = X \otimes \tilde{\gamma}^{deg X} \quad (3.22a)$$

$$\tilde{X}_T = \gamma^{deg X} \otimes \tilde{X} \quad (3.22b)$$

A definição que apresentamos acima garante que todos os operadores da versão térmica de  $\{osp(1|2), I, \gamma\}$  são bosônicos. Ela é, ainda, consistente com as propriedades gerais da conjugação til, equações (3.17). Não demonstraremos novamente aqui a validade destas propriedades neste caso, já que o procedimento é inteiramente análogo ao que fizemos na seção anterior.

Passemos, agora, à análise do vácuo térmico do oscilador harmônico. Começamos definindo, da maneira usual, a base  $|m, \tilde{n}\rangle = |m\rangle \otimes |\tilde{n}\rangle$ :

$$|m, \tilde{n}\rangle = \frac{1}{\|F_+^m |0\rangle\| \|\tilde{F}_+^{\tilde{n}} |\tilde{0}\rangle\|} (F_+^m |0\rangle) \otimes (\tilde{F}_+^{\tilde{n}} |\tilde{0}\rangle) \quad (3.23)$$

É interessante notarmos que os elementos de base dados em (3.23) podem ser obtidos a partir de  $|0, \tilde{0}\rangle$  utilizando os operadores térmicos. De fato, poderíamos ter escrito

$$|m, \tilde{n}\rangle = \frac{(-1)^{mn}}{\|F_+^m |0\rangle\| \|\tilde{F}_+^n |\tilde{0}\rangle\|} (F_+ \otimes \tilde{\gamma})^m (\gamma \otimes \tilde{F}_+)^n (|0\rangle \otimes |\tilde{0}\rangle)$$

No capítulo anterior, mostramos que o valor da energia do vácuo  $\lambda = \frac{1}{2}$  restabelece a estatística usual dos operadores  $a_-$  e  $a_+$  no oscilador harmônico bosônico. Para esse valor de  $\lambda$ , a equação (2.80) nos dá

$$\|F_+^n |0\rangle\| = \sqrt{\frac{n!}{2^n}} \quad \left(\lambda = \frac{1}{2}\right) \quad (3.24)$$

Esta última equação, substituída em (3.23), nos leva à seguinte expressão para os estados  $|m, \tilde{n}\rangle$ :

$$|m, \tilde{n}\rangle = \sqrt{\frac{2^{m+n}}{(m!)(n!)}} (F_+^m \otimes \tilde{F}_+^n) |0, \tilde{0}\rangle \quad (3.25)$$

Em termos dos operadores térmicos  $a_+ \otimes \tilde{I}$  e  $I \otimes \tilde{a}_+$ , um procedimento um pouco mais laborioso nos fornece, por outro lado,

$$|m, \tilde{n}\rangle = (-1)^{n_i(m^2+n^2)} \frac{1}{\sqrt{(m!)(n!)}} (a_+^m \otimes \tilde{a}_+^n) |0, \tilde{0}\rangle \quad (3.26)$$

Podemos, agora, fazer uso de (3.25) na equação (3.6) para escrever o vácuo térmico como

$$|0(\beta)\rangle = \frac{1}{\sqrt{Z(\beta)}} \sum_n \frac{2^n}{n!} \left(e^{\frac{-\beta E_n}{2}}\right) F_+^n \otimes \tilde{F}_+^n |0, \tilde{0}\rangle \quad (3.27)$$

Equivalentemente, a equação (3.26) nos daria

$$|0(\beta)\rangle = \frac{1}{\sqrt{Z(\beta)}} \sum_n \frac{1}{n!} \left(e^{\frac{-\beta E_n}{2}}\right) a_+^n \otimes \tilde{a}_+^n |0, \tilde{0}\rangle \quad (3.28)$$

A equação (3.28) nos mostra que a álgebra térmica que construímos para  $\{osp(1|2), I, \gamma\}$  a partir das equações (3.22) permite reproduzir o vácuo térmico do oscilador harmônico bosônico. Assim, deste ponto em diante, poderemos aplicar o formalismo convencional da TFD. Fazemos isso a seguir, com o objetivo de ilustrar alguns aspectos importantes da teoria.

Começamos impondo que o vácuo térmico em (3.6) seja normalizado, o que nos fornecerá a função de partição  $Z(\beta)$ :

$$Z(\beta) = \frac{e^{-\lambda\beta}}{1 - e^{-\beta}} \quad (3.29)$$

A equação acima é válida para qualquer  $\lambda$ ; neste caso em particular, estamos tomando  $\lambda = \frac{1}{2}$ . Substituindo a equação (3.29) em (3.28), vemos, após algum algebrismo, que o vácuo térmico pode

ser escrito da seguinte maneira:

$$|0(\beta)\rangle = \sqrt{1 - e^{-\beta}} \exp(e^{-\frac{\beta}{2}} a_+ \otimes \tilde{a}_+) |0, \tilde{0}\rangle \quad (3.30)$$

É possível escrever a equação (3.30) como uma exponencial de maneira simples. Isto é feito definindo-se a variável  $\theta = \theta(\beta)$  da forma abaixo:

$$\cosh \theta = \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-\beta}}} \quad (3.31a)$$

$$\sinh \theta = \frac{e^{-\frac{\beta}{2}}}{\sqrt{1 - e^{-\beta}}} \quad (3.31b)$$

$$\tanh \theta = e^{-\frac{\beta}{2}} \quad (3.31c)$$

Com as definições acima, o vácuo térmico em (3.31) torna-se

$$|0(\beta)\rangle = \frac{1}{\cosh \theta} \exp(\tanh \theta a_+ \otimes \tilde{a}_+) |0, \tilde{0}\rangle \quad (3.32)$$

$$= \exp \left[ \tanh \theta a_+ \otimes \tilde{a}_+ \right] \exp \left[ \ln(\cosh \theta)(-I \otimes \tilde{I}) \right] \exp \left[ -\tanh \theta a_- \otimes \tilde{a}_- \right] |0, \tilde{0}\rangle \quad (3.33)$$

Podemos, agora, utilizar em (3.33) a relação

$$\exp \left[ \theta(A + B) \right] = \exp \left[ \tanh \theta B \right] \exp \left[ \ln(\cosh \theta)[A, B] \right] \exp \left[ \tanh \theta A \right] \quad (3.34)$$

com  $A = -a_- \otimes \tilde{a}_-$ ,  $B = a_+ \otimes \tilde{a}_+$  e  $C = [-a_- \otimes \tilde{a}_-, a_+ \otimes \tilde{a}_+] = -I \otimes \tilde{I}$  para obter, finalmente,

$$|0(\beta)\rangle = \exp \left[ -iG(\beta) \right] |0, \tilde{0}\rangle = U(\beta) |0, \tilde{0}\rangle \quad (3.35)$$

onde temos

$$G(\beta) = i\theta(a_+ \otimes \tilde{a}_+ - a_- \otimes \tilde{a}_-) \quad (3.36)$$

As equações (3.35) e (3.36) nos mostram uma característica importante da TFD: sendo o operador  $G(\beta)$  hermitiano, o vácuo térmico é obtido a partir de transformações unitárias  $U(\beta)$  aplicadas em  $|0, \tilde{0}\rangle$ . Isto permite o desenvolvimento de uma teoria térmica baseada no vácuo térmico que preserva as propriedades da teoria original, não-térmica. Esta teoria consiste em construir, a partir dos operadores  $X_T$  e  $\tilde{X}_T$  do espaço de Hilbert térmico, os operadores  $X(\beta)$  e  $\tilde{X}(\beta)$  por meio de automorfismos internos da álgebra. Matematicamente, isto se escreve simplesmente como

$$X(\beta) = U(\beta)X_TU^*(\beta) \quad (3.37a)$$

$$\tilde{X}(\beta) = U(\beta)\tilde{X}_TU^*(\beta) \quad (3.37b)$$

O fato de terem sido os operadores  $X(\beta)$  e  $\tilde{X}(\beta)$  construídos a partir de  $X_T$  e  $\tilde{X}_T$  através de automorfismos internos garante que também eles obedecerão à álgebra térmica satisfeita por estes operadores. Tais transformações, no caso particular da álgebra de Heisenberg, são denominadas transformações de Bogoliubov. Os operadores  $a_-(\beta)$  e  $\tilde{a}_-(\beta)$  obtidos por meio destas transformações aniquilam o vácuo térmico, o que mostra haver uma perfeita analogia entre a descrição térmica e a descrição não-térmica.

Os operadores  $a_-(\beta)$ ,  $a_+(\beta)$ ,  $\tilde{a}_-(\beta)$  e  $\tilde{a}_+(\beta)$  podem ser obtidos por meio da fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff abaixo:

$$\exp(X)Y \exp(-X) = Y + [X, Y] + \frac{1}{2!}[X, [X, Y]] + \dots + \frac{1}{n!} \underbrace{[X, [X, \dots, [X, Y] \dots]]}_{n \text{ comutadores}} + \dots$$

Obtemos as seguintes expressões:

$$a_-(\beta) = \cosh \theta a_- \otimes \tilde{I} - \sinh \theta I \otimes \tilde{a}_+ \quad (3.38a)$$

$$a_+(\beta) = \cosh \theta a_+ \otimes \tilde{I} - \sinh \theta I \otimes \tilde{a}_- \quad (3.38b)$$

$$\tilde{a}_-(\beta) = \cosh \theta I \otimes \tilde{a}_- - \sinh \theta a_+ \otimes \tilde{I} \quad (3.38c)$$

$$\tilde{a}_+(\beta) = \cosh \theta I \otimes \tilde{a}_+ - \sinh \theta a_- \otimes \tilde{I} \quad (3.38d)$$

Na próxima seção, mostramos uma outra maneira de se realizar o formalismo da TFD, usando a representação de peso mínimo da álgebra  $sl(2)$ .

### 3.4 A álgebra térmica bosônica e a representação de peso mínimo de $sl(2)$

Nesta seção, analisamos a possibilidade de se estudar a álgebra térmica bosônica em termos apenas da álgebra  $sl(2)$ . Esta análise se baseia em um fato amplamente conhecido [40] acerca da TFD: às estruturas bosônicas e fermiônicas desta teoria, estão associadas, respectivamente, as álgebras  $su(1,1)$  e  $su(2)$ . Estas são, conforme vimos na seção 2 do capítulo 2, as formas reais de  $sl(2)$  correspondentes às conjugações  $\delta = -1$  e  $\delta = 1$ . Este fato nos sugere, também, ser possível obter uma descrição da álgebra térmica fermiônica em termos de  $sl(2)$ . Como temos feito, neste trabalho, uma descrição do oscilador harmônico bosônico, focaremos nossa atenção apenas neste caso.

Constrói-se uma realização de dois modos da álgebra  $su(1, 1)$  a partir da álgebra de Heisenberg da seguinte maneira [3]:

$$w'_1 = \frac{1}{2}(a_+a_- + \tilde{a}_+\tilde{a}_- + 1); \quad w'_2 = \frac{1}{2}(a_+\tilde{a}_+ + a_-\tilde{a}_-); \quad w'_3 = \frac{i}{2}(a_+\tilde{a}_+ - a_-\tilde{a}_-) \quad (3.39)$$

onde colocamos "til" para distinguir da realização de um modo que descrevemos anteriormente. Os operadores acima satisfazem, de fato, às relações de comutação em (2.28). A partir das equações (2.26), obtemos portanto

$$H' = a_+a_- + \tilde{a}_+\tilde{a}_- + 1; \quad E'_+ = a_+\tilde{a}_+; \quad E'_- = -a_-\tilde{a}_- \quad (3.40)$$

Temos, assim, uma base canônica de  $sl(2)$  realizada com dois modos da álgebra de Heisenberg. Evidentemente, identificaremos os dois modos com os operadores do espaço de Hilbert térmico que descrevemos ao longo deste capítulo. Notamos aqui uma mudança na notação, que será bastante conveniente: omitimos o símbolo de produto tensorial, " $\otimes$ ". Frisamos, no entanto, que os produtos de operadores sem e com til devem ser encarados como produtos tensoriais.

Consideremos, agora, as equações abaixo:

$$-a_-\tilde{a}_- |0, \tilde{0}\rangle = 0 \quad (3.41a)$$

$$(a_+a_- + \tilde{a}_+\tilde{a}_- + 1) |n, \tilde{n}\rangle = (2n + 1) |n, \tilde{n}\rangle \quad (3.41b)$$

Usando as relações em (3.40) e comparando as equações acima com (2.4) e (2.5), vemos que é possível estabelecer uma representação de peso mínimo de  $sl(2)$  a partir das seguintes igualdades:

$$\lambda' = 1 \quad (3.42a)$$

$$|\lambda' + 2n\rangle = |n, \tilde{n}\rangle \quad (3.42b)$$

A equação (3.42b) nos mostra que os estados de base da representação de peso mínimo são identificados com os estados condensados do espaço de Hilbert térmico, obtidos fazendo-se  $m = n$  em  $|m, \tilde{n}\rangle$ .

Voltemos nossa atenção para o vácuo térmico, dado em (3.35). Dada a relação  $G(\beta) = 2\theta w'_3$ , podemos reescrevê-lo como

$$|0(\beta)\rangle = \exp(-i\tau w'_3) |\lambda'\rangle \quad (3.43)$$

onde tomamos  $\tau = 2\theta$ .

Esta última equação nos lança à tarefa de determinar a possibilidade de se formular a TFD da álgebra de Heisenberg bosônica em termos da representação de peso mínimo da álgebra  $sl(2)$ . Dito de forma mais direta, o problema que se coloca aqui é como se representam os observáveis construídos na álgebra de Heisenberg bosônica, nesta descrição da TFD, em termos de  $sl(2)$ . Essa construção não é possível para todos os observáveis. No entanto, apenas aqueles que possuem valor médio nulo no ensemble canônico não são construtíveis, de modo que o conjunto destes observáveis pode ser representado simplesmente pelo operador nulo em  $sl(2)$ . Analisemos estas afirmações em maior detalhe.

No capítulo 2, quando discutimos a álgebra universal envelopante  $\mathcal{U}(sl(2))$ , vimos que o teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt nos permite construir os elementos desta álgebra como combinações lineares de operadores na seguinte forma:

$$X(r, s, t) = E_-^r H^s E_+^t \quad (3.44)$$

Ainda no capítulo 2, mostramos ser possível escrever as seguintes equações, que nos fornecem a álgebra  $sl(2)$  em termos da álgebra de Heisenberg:

$$H = \frac{1}{2}(a_- a_+ + a_+ a_-) \quad (3.45a)$$

$$E_+ = \frac{1}{2}a_+^2 \quad (3.45b)$$

$$E_- = -\frac{1}{2}a_-^2 \quad (3.45c)$$

As equações (3.45) são válidas, conforme vimos ao discutir a quantização de Wigner do oscilador harmônico, para quaisquer valores da energia do vácuo  $\lambda$ . Na seção 2.3, por outro lado, foi dito que, para  $\lambda = \frac{1}{2}$ ,  $\mathcal{U}(sl(2))$  é uma subálgebra de  $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ , o envelope da álgebra de Heisenberg:

$$\mathcal{U}(sl(2)) = \{a_-^m a_+^n \in \mathcal{U}(\mathcal{H}) | m + n \text{ é par}\} \quad (3.46)$$

Até aquele ponto, não havíamos discutido a quantização de Wigner, de modo que a equação (2.93a) nos era desconhecida. Esta equação deixa claro por que é necessário impor a condição  $\lambda = \frac{1}{2}$  para a obtenção da equação (3.46). De fato, tomando

$$H = a_- a_+ - \frac{1}{2}[a_-, a_+]$$

vemos que é impossível reduzir (3.44) a (3.46) quando  $\lambda \neq \frac{1}{2}$ .

Dentre os operadores de  $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ , interessam-nos principalmente os observáveis  $O$  desta álgebra. Estes podem ser construídos como combinações lineares de observáveis  $O(m, n)$  da seguinte forma:

$$O(m, n) = a_-^m a_+^n + a_-^n a_+^m \quad (3.47)$$

Comparando as equações (3.46) e (3.47), vemos claramente que o conjunto dos observáveis  $O$  em  $\mathcal{U}(\mathcal{H})$  não está contido em  $\mathcal{U}(sl(2))$ . Podemos, porém, considerar apenas os observáveis cujo valor médio é não-nulo. Na equação (3.47), isto implicará tomarmos  $m = n$ , de modo que obteremos observáveis na forma

$$O(n, n) = a_-^n a_+^n \quad (3.48)$$

que são elementos de  $\mathcal{U}(sl(2))$ . Assim, todos os observáveis com valores médios não-nulos de  $\mathcal{U}(\mathcal{H})$  estão em  $\mathcal{U}(sl(2))$ .

A fim de obtermos uma descrição mais simples da relação entre a álgebra de Heisenberg bosônica térmica e  $sl(2)$ , não utilizaremos a forma dada na equação (3.48). Em vez disso, escreveremos estes observáveis como polinômios do operador  $N$ , o que é sempre possível quando  $\lambda = \frac{1}{2}$ :

$$O(n, n) = \sum_{k=0}^n c_k N^k \quad (3.49)$$

Feita esta digressão, tornemos a focar nossa atenção no operador  $H'$  da equação (3.40). Este operador pode ser escrito, também, da seguinte maneira:

$$H' = H + \tilde{H} = \Delta H \quad (3.50)$$

ou, ainda,

$$H' - I' = N' = N + \tilde{N} = \Delta N \quad (3.51)$$

As equações (3.50) e (3.51) relacionam elementos no envelope de  $sl(2)$  com coprodutos de elementos no envelope da álgebra de Heisenberg. Esta relação pode ser explorada, juntamente com as equações (3.18) e (3.43), para nos fornecer uma nova maneira de calcular os valores médios:

$$\langle N^r \rangle = \frac{1}{2^r} \langle 0(\beta) | (N + \tilde{N})^r | 0(\beta) \rangle = \frac{1}{2^r} \langle \lambda' | \left[ \exp(i\tau w'_3) N' \exp(-i\tau w'_3) \right]^r | \lambda' \rangle$$

Abaixo, escrevemos este resultado em separado, assim como o resultado correspondente para o hamiltoniano  $H$ :

$$\langle N^r \rangle = \frac{1}{2^r} \langle \lambda' | \left[ \exp(i\tau w'_3) N' \exp(-i\tau w'_3) \right]^r | \lambda' \rangle \quad (3.52a)$$

$$\langle H^r \rangle = \frac{1}{2^r} \langle \lambda' | \left[ \exp(i\tau w'_3) H' \exp(-i\tau w'_3) \right]^r | \lambda' \rangle \quad (3.52b)$$

Antes de encerrarmos esta exposição, será interessante ver como as equações (3.52) nos permitem introduzir a temperatura na teoria de uma maneira bastante simples. Calculemos, por exemplo, o valor médio do operador  $N$ . O formalismo padrão do ensemble canônico nos fornece, via equação (3.1), o seguinte resultado:

$$\langle N \rangle = \frac{e^{-\beta}}{1 - e^{-\beta}}$$

Por outro lado, a equação (3.52a) nos dá

$$\langle N \rangle = \frac{\cosh \tau - 1}{2}$$

onde tomamos  $\lambda' = 1$ . Igualando as duas equações acima, obtemos uma relação entre o parâmetro  $\tau$  e o parâmetro de temperatura  $\beta$ :

$$\cosh \tau = 1 + \frac{2e^{-\beta}}{1 - e^{-\beta}} = \frac{1}{\tanh\left(\frac{\beta}{2}\right)} \quad (3.53)$$

A equação (3.53) associa a temperatura aos automorfismos internos de  $sl(2)$  utilizados para obter o vácuo térmico. Ela nos possibilita o tratamento térmico do oscilador harmônico bosônico por meio da representação de peso mínimo de  $sl(2)$ .

# Conclusão

Apesar de o nosso trabalho não estar completo, achamos razoável terminá-lo neste ponto. Seguir adiante nos obrigaria a acrescentar, neste texto, discussões sobre álgebras de Hopf e q-deformações, além de introduzir outras estruturas superalgébricas, o que achamos ser mais apropriado para trabalhos futuros. Vamos, no entanto, delinear o caminho natural que pode ser traçado a partir do conteúdo aqui exposto.

No capítulo 2, fizemos uma discussão sobre as representações de peso mínimo e peso máximo da álgebra  $sl(2)$ . Naquela ocasião, nossa exposição enveredou pelo caminho mais natural: determinar as relações entre estas representações e os aparatos teóricos do spin e do oscilador harmônico e, em seguida, explorar esta última em maior detalhe. Dada a variedade de situações físicas em que encontramos estes dois formalismos, podemos esperar que os resultados obtidos neste trabalho sejam ferramentas úteis no ataque a uma ampla classe de problemas.

Ainda no capítulo 2, um outro ponto que não analisamos com a dedicação necessária foi o estudo das conjugações da superálgebra  $osp(1|2)$ . Os cálculos preliminares que fizemos, e que não incluímos neste trabalho por não termos analisado a questão mais a fundo, indicaram que a conjugação  $\delta = 1$  da álgebra  $sl(2)$  não é compatível com a superálgebra  $osp(1|2)$ . Aqui, nos referimos à impossibilidade de se construírem representações unitárias da superálgebra  $osp(1|2)$  em conjunto com esta conjugação. Devemos observar, no entanto, que, para nós, a palavra "conjugação" tem se referido a uma estrutura estrela. Sabemos que a superálgebra  $osp(1|2)$  admite um outro tipo de conjugação. O seu comportamento nos é desconhecido, e tampouco sabemos se é possível relacioná-la à álgebra  $sl(2)$  de modo a produzir representações unitárias. De qualquer modo, pretendemos eventualmente construir uma estrutura superalgébrica para a conjugação  $\delta = 1$  semelhante à que obtivemos para  $\delta = -1$ .

Também a superálgebra  $\{osp(1|2), I, \gamma\}$  nos aponta alguns problemas relacionados à quantiza-

ção de Wigner. Obtivemos esta superálgebra ao impor a estatística canônica aos operadores que emergem da quantização de Wigner do oscilador harmônico. Podemos nos perguntar, então, se uma construção deste tipo é possível para a quantização de Wigner de outros sistemas físicos. Para o caso de osciladores desacoplados, por exemplo, esperamos que isto seja prontamente factível. A questão torna-se mais complicada, entretanto, quando encaramos hamiltonianos de outras formas.

Outro problema relacionado à quantização de Wigner que tem sido negligenciado é a sua aplicação a sistemas relativísticos. A estreita relação entre este método de quantização e a paraestatística, assim como o relativo sucesso na introdução desta na teoria de campos, são boas razões para especularmos sobre a viabilidade da aplicação da quantização de Wigner a estes sistemas.

O capítulo 3 reserva outras questões que merecem ser escrutinadas. A sequencia natural deste capítulo seria uma análise das  $q$ -deformações das estruturas algébricas térmicas apresentadas nele, o que nos permitiria inserir definitivamente as álgebras de Hopf na teoria. Este capítulo é, aliás, um estudo preliminar neste sentido. Durante seu desenvolvimento, no entanto, surgiram outras indagações não-relacionadas ao seu propósito original. Uma delas diz respeito à possibilidade de se introduzirem operadores térmicos fermiônicos na teoria do oscilador bosônico térmico. Conforme vimos neste capítulo, a versão térmica da superálgebra  $\{osp(1|2), I, \gamma\}$  possui apenas operadores bosônicos. A construção que fizemos não exclui, no entanto, a possibilidade de existir uma descrição com operadores fermiônicos. A análise deste problema, assim como um estudo do oscilador fermiônico semelhante ao que fizemos neste capítulo, são questões que pretendemos investigar no futuro.

# Referências Bibliográficas

- [1] H. Weyl, *Classical Groups*, Princeton, Princeton University Press (1939).
- [2] J. Schwinger, *Quantum Theory of Angular Momentum*, Academic Press, 229-279 (1965).
- [3] M. Novaes, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 26, n. 4, p. 351-357, (2004).
- [4] E.P. Wigner, *Phys. Rev* 77, 711-712 (1950).
- [5] H.S. Green, *Phys. Rev.* 90, 270–273 (1953).
- [6] L.M. Yang, *Phys. Rev.* 84, 788–790 (1951).
- [7] Y. Ohnuki, S. Kamefuchi, *J. Math. Phys.* 19, 67 (1978).
- [8] T.D. Palev, *Czech. J. Phys. B* 29 (1979).
- [9] A.Ch. Ganchev, T.D. Palev, *J. Math. Phys.* 21, 797 (1980).
- [10] T.D. Palev, *J. Math. Phys.* 23, 1778 (1982).
- [11] T.D. Palev, *Rep. Math. Phys.* 31, 241-262 (1992)
- [12] A.H. Kamupingene, T.D. Palev, S. P. Tsaneva, *J. Math. Phys.* 27, 2067 (1986)
- [13] T.D. Palev, *J. Phys. A* 27 977-983 (1994).
- [14] T.D. Palev, N.I. Stoilova, *J. Phys. A* 27, 7387-7401 (1994).
- [15] T.D. Palev, N.I. Stoilova *J. Math. Phys.* 38, 2506 (1997).
- [16] G. Regniers, J. van der Jeugt, *J. Math. Phys.* 51, 123515 (2010), arXiv:1011.2305 [math-ph].
- [17] N.I. Stoilova, J. van der Jeugt, *J. Phys. A* 38, 9681–9687 (2005), arXiv:math-ph/0506054.
- [18] G. Regniers, J. van der Jeugt, arXiv:0909.3697v2 [quant-ph].

- [19] S. Lievens, N.I. Stoilova, J. van der Jeugt *J. Math. Phys.* 47, 113504 (2006), arXiv:hep-th/0606192.
- [20] H. Umezawa, Y. Takahashi, *Int. J. Mod Phys. B* 10, 1755 (1996).
- [21] H. Umezawa *Advanced Field Theory: Micro, Macro and Thermal Physics*, New York, American Institute of Physics (1993).
- [22] H. Umezawa, H. Matsumoto, M. Tachiki, *Thermofield Dynamics and Condensed States*, North-Holland Publishing Company (1982).
- [23] H. Umezawa, H. Matsumoto, Y. Nakano, *Phys. Rev. D* 31, 429–432 (1985).
- [24] P.G. Castro, B. Chakraborty, F. Toppan, *J. Math. Phys.* 49, 082106 (2008), arXiv:0804.2936 [hep-th].
- [25] P. Aschieri, arXiv:hep-th/0703013.
- [26] B.G. Wybourne, *Classical Groups for Physicists*, New York, John Wiley and Sons Inc. (1974).
- [27] R. Gilmore, *Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications*, Dover Publications (2005).
- [28] R. Gilmore, *Lie Groups, Physics, and Geometry*, Cambridge University Press (2008).
- [29] R.N. Cahn *Semi-Simple Lie Algebras and Their Representations*, The Benjamin/Cummings Publishing Company (1984).
- [30] L. Frappat, A. Sciarrino, P. Sorba *Dictionary on Lie Algebras and Superalgebras*, Academic Press (2000).
- [31] C.Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë *Quantum Mechanics*, New York, John Wiley and Sons Inc. (2005).
- [32] G. Chiribella, G.M. D’Ariano, P. Perinotti, arXiv:quant-ph/0610142.
- [33] V.S. Kumar, B.A. Bambah, R. Jagannathan, arXiv:math-ph/0010017.
- [34] F.A. Berezin, V.N. Tolstoy *Commun. Math. Phys.* 78, 409–428 (1981).

- [35] V.G. Kac, Commun. Math. Phys. 53, 31-64 (1977).
- [36] V.G. Kac, Advances in Mathematics 26, 8-96 (1977).
- [37] L. Corwin, Y. Ne'eman, S. Sternberg, Rev. Mod. Phys. 47, 573–603 (1975).
- [38] P. Ehrenfest, Zeits. f. Physik 45 (1927) 455.
- [39] A.E. Santana, F.C. Khanna, Phys Lett. A 203, 68-72 (1995)
- [40] F. C. Khanna, A.P.C. Malbouisson, J.M.C. Malbouisson, A.E. Santana, *Thermal Quantum Field Theory*, World Scientific Publishing Co. (2009).
- [41] S. De Martino, S. De Siena, G. Vitiello, Int. J. Mod. Phys. B 10, 1615 (1996).
- [42] E. Celeghini, S. de Martino, S. de Siena, A. Iorio, M. Rasetti, G. Vitiello, Phys. Lett. A 244, 455-461 (1998), arXiv:hep-th/9801031.