Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

A Energia do Vácuo de Campos Bosônicos como Origem da Força

Dissertação de Mestrado

Frederico Eduardo Barone Rangel

Orientador: José Abdala Helayël-Neto

Rio de Janeiro, 2012

À minha família.

Agradecimentos

- Aos amigos do CBPF, pela colaboração e atenção.
- Aos funcionários do CBPF, por todo inestimável trabalho.
- À CAPES, pelo apoio financeiro.
- Ao professor Ivan dos Santos Oliveira Júnior, por seu incansável trabalho a frente da CFC.
- Aos professores Roberto Sarthour e Mucio Continentino, por tudo que me ensinaram com tamanha paciência.
- Ao professor Carlos Farina da UFRJ, pelas empolgantes e produtivas discussões.
- Ao meu orientador, professor José Abdala Helayël-Neto, por sua inesgotável capacidade de trabalho e tamanha competência. Seguramente um ser humano admirável.
- Aos meus avós José e Nair Barone, por tudo que representam.
- À Rejane Silva, por toda sua solidariedade.
- À Vera Soares, por todo seu companheirismo.
- À minha mãe Celina Maria Barone, minha sempre presente fonte de motivação, por tudo que sou.
- Ao meu professor, amigo e irmão Fabricio Augusto Barone Rangel com toda admiração. Sem seu apoio incondicional meu trabalho não teria sido possível.
- À minha filha Ludmila Soares Barone Rangel, minha maior fonte de felicidade, por ter alterado toda a escala de valores de minha vida.

Sumário

Resumo

Este trabalho investiga a energia de vácuo em campos quânticos acoplados linearmente a correntes externas, paralelas e estáticas, concentradas ao longo de *branas* D-dimensionais em codimensões arbitrárias. O campo escalar é o primeiro modelo estudado. Com este, são encontrados os potenciais entre correntes que descrevem cargas e dipolos interagindo através de um campo bosônico, de spin-0, massivo ou não. Os resultados são então estendidos para o caso de campos vetoriais, onde as interações clássicas surgem como um caso particular.

Em seguida o campo de Kalb-Ramond é considerado de forma análoga, e uma nova classe de correntes singulares é proposta. Por fim, estas novas fontes são investigadas no contexto do modelo de Cremer-Sherk-Kalb-Ramond. Apresentando um mecanismo capaz de gerar campos massivos e ainda assim consistente com simetrias de calibre, este modelo descreve o campo eletromagnético acoplado ao de Kalb-Ramond, a partir de onde surgem novas formas de interação.

Abstract

In this work it is investigated the vacuum energy of quantum fields linearly coupled to static and paralel external sources, concentrated along D-dimensional branes in arbitrary codimensions. The first model studied is the scalar field. With this one it is found the potentials between currents, describing charges and dipoles, interacting through a spin-0 bosonic field, massive or massless. The results are extended for the case of vector fields, where the classical interactions appear as a particular case.

Then the Kalb-Ramond field is considered similarly, and a new class of singular currents is proposed. Finally, these new sources are investigated in the Cremer-Sherk-Kalb-Ramond model context. Introducing a mechanism able to generate massive fields and still be consistent with gauge symmetries, this model describes the electromagnetic field coupled to the Kalb-Ramond one, from where new forms of interactions arise.

Capítulo 1

Introdução

It is inconceivable that inanimate brute matter should, without the mediation of something else which is not material, operate upon and affect other matter without mutual contact...That gravity should be innate, inherent, and essential to matter, so that one body may act upon another at a distance through a vacuum, without the mediation of anything else, by and through which their action and force may be conveyed from one to another, is to me so great an absurdity that I believe no man who has in philosophical matters a competent faculty of thinking can ever fall into it. [1]

Isaac Newton

Cenário subjacente a todos os processos que se desdobram no teatro clássico, e tomado *a priori*, o conceito de vácuo como algo desprovido de estrutura foi sendo elaborado até tornar-se um elemento central nos modelos que orientam o entendimento contemporâneo sobre a natureza das interações fundamentais. Em Relatividade, o vácuo torna-se uma entidade dinâmica através de uma geometria inerente cuja métrica se relaciona ao tensor energia-momento. Em Teoria Quântica de Campos, o vácuo passa a ser o *estado de vácuo*, um dentre os possíveis estados acessíveis às entidades elementares desta teoria; os campos. Estes, por sua vez, são sistemas contínuos, e como tais, descritos por um número infinito de graus de liberdade, cada qual comportando-se como um oscilador quântico. Um conceito introduzido originalmente em 1926 por Born, Heisenberg e Jordan [2, 3].

Em 1911, Planck [2] propôs de maneira *ad hoc* a existência de uma energia remanescente do estado fundamental de sistemas periódicos, que posteriormente pôde ser deduzida a partir dos postulados da Mecânica Quântica. Campos quânticos têm como herança imediata de sua concepção esta mesma energia de ponto zero, ou energia do estado de vácuo, que introduz na teoria uma quantidade divergente a ser normalizada.

Podemos entender uma variedade de fenômenos observáveis como manifestações dessa energia característica do estado fundamental dos campos. Destacando-se o desvio Lamb no espectro atômico, a alteração do momento magnético do elétron, e o conjunto de efeitos conhecidos de maneira geral como *Efeito Casimir*. Recentemente, uma confirmação direta da existência da energia de ponto zero foi anunciada com a observação do chamado efeito Casimir dinâmico [4].

Diferentes alterações nesta energia causadas por fontes ou sorvedouros de campo, ou ainda, condições de contorno que restringem os modos normais em certas regiões do espaço, são responsáveis por diferentes formas de interação. É um fato notável que isto nos permita não só entender a natureza quântica das interações fundamentais, como também a origem das interações clássicas entre objetos macroscópicos, dirimindo por completo o problema da ação a distância.

Ao longo deste texto, o formalismo funcional da Teoria Quântica de Campos é empregado no cálculo da energia de interação entre *branas* estáticas e paralelas em um espaço de Minkowski com dimensão arbitrária e métrica diagonal $(1, -1, -1, ..., -1)$. A única exceção encontra-se no final do último capítulo, onde nos restringimos a um espaço $(3 + 1)$. Isto resulta em uma importante generalização no que concerne a modelos com diferentes dimensionalidades. Estes são laboratórios teóricos prolíficos e têm sido aplicados a uma ampla gama de cenários na física da matéria condensada e de altas energias. O número de dimensões das *branas* é aqui representado por D, e as codimensões do espaço por d. Os vetores espaciais perpendiculares e paralelos às *branas* são representados respectivamente por,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_\perp &= (x^1, ..., x^d) \\ \mathbf{x}_\parallel &= (x^{d+1}, ..., x^{d+D}) \ . \end{aligned} \tag{1.1}$$

No primeiro capítulo é encontrada a energia de vácuo do campo escalar real em $d + D + 1$ dimensões, acoplado a N correntes externas que, dependendo de suas formas, representam cargas ou dipolos [5]. O segundo capítulo inicia com uma discussão sobre teoria de calibre onde é exposto o método de Faddeev-Popov, posteriormente aplicado à quantização do campo eletromagnético. Isto nos permite calcular a energia de vácuo para cargas e dipolos elétricos em $d+D+1$ de maneira análoga ao campo escalar, e como caso particular, obter os potenciais clássicos a partir da quantização do campo vetorial acoplado a correntes externas [5].

No terceiro capítulo são obtidos resultados originais [6] para o campo descrito por uma 2-forma, também conhecido por campo de Kalb-Ramond [7]. O procedimento adotado baseia-se nos métodos descritos nos capítulos anteriores. Devido à sua versatilidade este campo tem sido objeto de intensa pesquisa, o que se reflete na vasta literatura a seu respeito. O fato topológico bem conhecido de que uma 2-forma não pode ser acoplada a objetos pontuais é apresentado de uma perspectiva diferente, não geométrica. Todavia, além de cargas e dipolos e em contraste com o pensamento usual, este capítulo final apresenta uma nova classe de fontes pontuais, definidas com o uso de *pseudo-formas*, que acomplam-se ao campo de Kalb-Ramond.

A última parte do terceiro capítulo é dedicada à investigação das formas de interação intermediadas pelo modelo de Cremer-Scherk-Kalb-Ramond [8], formado com o acoplamento do campo eletromagnético ao campo de Kalb-Ramond. Considerado como a generalização do modelo de Chern-Simons em $(3 + 1)$ dimensões, ele contrasta com o mecanismo de Higgs por ser capaz de gerar campos massivos de maneira dinâmica [6, 9]. Sua utilidade aparece em diversos cenários, como em modelos supersimétricos [10, 11, 12], cordas cósmicas [13], cosmologia [14] e modelos em espaço-tempo não comutativos [15].

Capítulo 2

Interações Entre Correntes Escalares

Com base em seu valor teórico inestimável, o campo escalar é a escolha natural como ponto de partida para este texto. A primeira seção deste capítulo investiga o que pode ser considerado como a origem quântica para o conceito macroscópico de força. Com base nestes resultados, nas duas últimas seções são obtidas as energias de interação, intermediada por campos massivos e não massivos, entre correntes estática e paralelas que representam cargas e dipolos escalares. Os potenciais encontrados aplicam-se a espaços com dimensões arbitrárias [5]. O interessante caso do modelo $\lambda\phi^4$ pode ser encontrado em [5], e o tratamento de quadrupolos encontra-se em [16].

2.1 A Origem da Força

Em sua forma funcional, a toria Quântica de Campos tem como quantidade básica o funcional gerador $\mathcal{Z} = e^{iW} = \langle 0|0\rangle_J$, que representa a amplitude de transição do vácuo para o vácuo na presença de uma fonte externa J e no limite $T \to \infty$. Sendo o estado de vácuo normalizado, fica estabelecida a relação entre o funcional gerador e a energia,

$$\mathcal{Z} = \frac{Z[J]}{Z[0]} = e^{iW} = \langle 0|e^{-iHT}|0\rangle = e^{-iET} \ , \tag{2.1}$$

que conduz diretamente à energia de vácuo normalizada de modo conveniente:

$$\frac{Z[0]}{Z[0]} = \frac{\langle 0|0\rangle}{\langle 0|0\rangle} = 1 = e^{iW[0]} = \langle 0|e^{-iHT}|0\rangle = e^{-iET} \;\Rightarrow\; E = 0. \tag{2.2}$$

Vamos caminhar em direção à origem da força investigando detalhadamente as alterações desta energia, causadas por perturbações no campo em seu estado de vácuo. O protótipo para isto será o campo escalar livre, descrito por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}\,m^2\phi^2. \tag{2.3}$$

Nosso interesse agora é encontrar o valor esperado do campo no vácuo,

$$\langle 0|\phi(x)|0\rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi\;\phi(x)\;e^{iS[\phi]}}{\int \mathcal{D}\phi\;e^{iS[\phi]}}\;, \tag{2.4}$$

onde S é a ação associada à lagrangiana (2.3)

$$S[\phi] = \int d^4x\;\mathcal{L}. \tag{2.5}$$

É possível escrever a equação (2.4) de forma mais conveniente acrescentando impunemente à lagrangiana (2.3) um termo arbitrário de corrente externa, $J\phi$,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}\,m^2\phi^2 + J\phi\;, \tag{2.6}$$

a ação torna-se então um funcional também de J

$$S[\phi, J] = \int d^4x\;\mathcal{L}. \tag{2.7}$$

Definindo o funcional gerador como o denominador de (2.4) dependente dessa nova ação, $S[\phi, J]$,

$$Z[J] \equiv \langle 0|0\rangle_J = N\int \mathcal{D}\phi\;e^{iS[\phi,J]}, \tag{2.8}$$

o numerador é obtido por diferenciação funcional,

$$\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} = N \int \mathcal{D}\phi \; \phi(x) \; e^{iS[\phi,J]}. \tag{2.9}$$

Das equações (2.4), (2.8) e (2.9), deduz-se que

$$\langle 0|\phi(x)|0\rangle = \left(\frac{(-i)}{\delta Z[J]} \frac{Z[J]}{\delta J(x)} \right) \Bigg|_{J=0}. \tag{2.10}$$

A saber, derivadas de ordem superior resultam em funções de correlação em tempo ordenado ou funções de Green no vácuo, que compõem a matriz **S**

$$\langle 0|T[\phi(x)...\phi(y)]|0\rangle = \left(\frac{(-i)^n}{Z[J]} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x)...J(y)} \right) \Bigg|_{J=0}. \tag{2.11}$$

O ponto crucial aqui é notar que estamos calculando as funções de Green no vácuo para campos livres com um funcional Z dependente de uma fonte J introduzida *ad hoc*. A equação (2.10), por exemplo, fornece o valor esperado do campo escalar livre no vácuo, definido com a lagrangiana de Klein-Gordon (2.3) onde não há fonte externa.

O passo seguinte em direção à origem da força é perturbar o vácuo, generalizando o modelo descrito por (2.6), com a inclusão de uma fonte externa realmente física, J_f,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}\, \partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}\, m^2\phi^2 + (J_f + J)\phi \\ &= \frac{1}{2}\, \partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}\, m^2\phi^2 + J_T\phi, \end{aligned} \tag{2.12}$$

onde definimos $J_T \equiv J_f + J$. O objeto fundamental é portanto o funcional $Z[J_T]$, através do qual podemos obter as demais quantidades de interesse. Para o caso escalar, da lagrangiana (2.12) e equação (2.8), após uma simples integração por partes obtemos

$$Z[J_f, J] = N \int \mathcal{D}\phi \; e^{-i\int d^4x \; [\frac{1}{2}\phi(\partial^\mu\partial_\mu + m^2)\phi + J_T\phi]}. \tag{2.13}$$

Por causa do fator de fase oscilatório na exponencial, esta integral não é bem definida. Para contornar este problema, podemos fazer uma rotação de Wick, ou adicionar à massa um termo imaginário que assegura a convergência da integral com um declínio adequado da exponencial. Os cálculos a seguir assumem de forma implícita a soma deste termo imaginário, $i\epsilon$, à massa no propagador de Feynman

$$\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\ \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2-m^2}, \tag{2.14}$$

e com uma translação conveniente do campo,

$$\widetilde{\phi}(x) = \phi(x) + \int d^4y\ \Delta_F(x-y)J_T(y), \tag{2.15}$$

o funcional gerador toma a forma simplificada,

$$Z[J_f, J] = Z[0,0]\ e^{-\frac{i}{2}\int\int d^4x\ \ d^4y\ \ J_T(x)\Delta_F(x-y)J_T(y)}. \tag{2.16}$$

Donde podemos recuperar a equação (2.1) definindo o argumento da exponencial, a menos da constante i, como

$$W[J_f, J] \ \ \equiv \ \ -\frac{1}{2}\int\int d^4x\ d^4y\ J_T(x)\Delta_F(x-y)J_T(y)\ . \tag{2.17}$$

Substituindo (2.16) em (2.10), com $J_f = 0$, temos

$$\begin{aligned}
\langle 0|\phi(x)|0\rangle &= \left(\frac{(-i)}{Z[J]}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)}\right)\Bigg|_{J=0} \\
&= \left[\frac{-i}{Z[J]}\left(-i\int d^4y\ \Delta_F(x-y)J(y)\right)Z[J]\right]\Bigg|_{J=0} \\
&= 0. \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

Um resultado em nada surpreendente, mas que merece atenção maior. Como os campos não são nulos no vácuo, excetuando o campo identicamente nulo que é uma trivialidade sem relevância física alguma, a relação (2.18) significa que há flutuação em torno de zero. A amplitude da qual esta relacionada ao desvio quadrático médio

$$\sigma^2 = \langle 0|\phi(x)\phi(x)|0\rangle - (\langle 0|\phi(x)|0\rangle)^2, \tag{2.19}$$

por (2.18), o último termo é zero, e como

$$\begin{aligned}
\langle 0|T[\phi(x)\phi(y)]|0\rangle &= \left(\frac{(-i)^2}{Z[J]}\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x)J(y)}\right)\Bigg|_{J=0} \\
&= \left[\frac{(-i)^2}{Z[J]}\Bigg(-i\Delta_F(x-y))\Bigg)Z[J]\right]\Bigg|_{J=0} \\
&= i\Delta_F(x-y),
\end{aligned} \tag{2.20}$$

resulta que,

$$\sigma^2 = \langle 0|\phi(x)\phi(x)|0\rangle = i\Delta_F(0) = i\infty. \tag{2.21}$$

Vemos que a amplitude das flutuações do campo no vácuo é infinita, divergência esta que só pode ser sanada com métodos de renormalização [3, 18, 19].

No caso do campo com fonte externa J_f, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle 0|\phi(x)|0\rangle &= \left(\frac{(-i)}{Z[J]}\frac{Z[J]}{\delta J(x)}\right)\Bigg|_{J=0} \\
&= \left[\frac{(-i)^2}{Z[J]}\left(\int d^4y\ \Delta_F(x-y)(J_f(y)+J(y))\right)Z[J]\right]\Bigg|_{J=0} \\
&= -\int d^4y\ \Delta_F(x-y)J_f(y)\ .
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Desta forma concluímos facilmente que a fonte J_f produz flutuações no campo, alterando seu estado fundamental. Como consequência, a energia se altera de acordo com a forma funcional de J_f. Um fato que torna-se explícito quando escrevemos a expressão para a energia a partir das relações (2.1) e (2.17), e comparamos com a equação (2.22)

$$
\begin{aligned}
E = -\frac{1}{T}\, W &= \frac{1}{2T}\int\int d^4x\; d^4y\; J_f(x)\Delta_F(x-y)J_f(y) \\
&= -\frac{1}{2T}\int d^4x\; J_f(x)\langle 0|\phi(x)|0\rangle\ .
\end{aligned} \tag{2.23}
$$

Esta é a origem da força: alterações nas flutuações do campo em torno de seu estado de vácuo, causam variações na energia conforme a equação (2.23). Tais alterações são causadas por pertubações devido a presença de fontes ou sorvedouros dessas mesmas flutuações.

Fica evidente que na expansão pertubativa, utilizada para o cálculo dos elementos da matriz de espalhamento **S**, estas fontes externas são responsáveis pelo aparecimento de partículas virtuais. Estas surgem devido a existência de fontes que alteram o campo em relação ao seu estado livre. Em termos de diagramas de Feynman, elas introduzem linhas que não são conectadas aos estados iniciais ou finais do processo [17]. Portanto, de maneira equivalente, podemos interpretar a origem da força como a transferência de momento intermediada por essas partículas.

2.2 Cargas Escalares

Existe grande liberdade na forma que a corrente J pode assumir. Distribuições tipo delta estáticas d-dimensionais acopladas linearmente ao campo escalar real, e em codimensões arbitrárias, serão o objeto desta seção. A lagrangiana

$$
\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \left(\sum_{p=1}^{N}\sigma_p\ \delta^d(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{a}_p)\right)\phi\ , \tag{2.24}
$$

define o modelo a ser estudado, onde σ_p são as constantes de acoplamento entre as distribuições delta e o campo. A corrente

$$
J(x) = \sum_{p=1}^{N}\sigma_p\ \delta^d(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{a}_p)\ , \tag{2.25}
$$

simula assim um conjunto de cargas estáticas, espacialmente distribuídas [5].

Consequentemente, a equação (2.23) nos permite escrever

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2T}\int\int d^{D+d+1}x\ d^{D+d+1}y\ \left[\sum_{p=1}^{N}\sigma_p\delta^{(d)}(\mathbf{x}_\perp-\mathbf{a}_p)\right]\Delta_F(x-y)\left[\sum_{q=1}^{N}\sigma_q\delta^{(d)}(\mathbf{y}_\perp-\mathbf{a}_q)\right] \\
&= \sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N}\sigma_p\sigma_q\frac{1}{2T}\mathcal{I}_{p,q}\ , \qquad (2.26)
\end{aligned}
$$

onde definimos

$$
\mathcal{I}_{p,q}\equiv\int\int d^{D+d+1}x\ d^{D+d+1}y\ \delta^{(d)}(\mathbf{x}_\perp-\mathbf{a}_p)\Delta_F(x-y)\delta^{(d)}(\mathbf{y}_\perp-\mathbf{a}_q)\ . \qquad (2.27)
$$

A expressão (2.26) contém termos de auto-interação quando $p=q$, eles correspondem à interação de uma delta consigo mesma e devem ser excluídos das contribuições à energia porque não contribuem para a força de interação entre as cargas. Isto pode ser feito da maneira usual com o emprego da delta de Kronecker, com a qual a energia (2.26) passa a ser

$$
E\rightarrow E=\sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N}\sigma_p\sigma_q(1-\delta_{pq})\frac{1}{2T}\ \mathcal{I}_{p,q} \qquad (2.28)
$$

Elaborando (2.14) em $(D+d+1)$ dimensões, o propagador de Feynman assume a forma

$$
\begin{aligned}
\Delta_F(x-y) &= \int\frac{d^{D+d+1}k}{(2\pi)^{D+d+1}}\ \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2-m^2} \\
&= \int\frac{dk^0}{2\pi}\int\frac{d^D\mathbf{k}_\parallel}{(2\pi)^D}\int\frac{d^d\mathbf{k}_\parallel}{(2\pi)^d}\ \exp\left[ik^0(x^0-y^0)\right]\exp\left[-i\mathbf{k}_\parallel\cdot(\mathbf{x}_\parallel-\mathbf{y}_\parallel)\right] \\
&\quad \frac{\exp\left[-i\mathbf{k}_\perp\cdot(\mathbf{x}_\perp-\mathbf{y}_\perp)\right]}{(k^0)^2-\mathbf{k}_\parallel^2-\mathbf{k}_\perp^2-m^2}\ . \qquad (2.29)
\end{aligned}
$$

Substituindo na integral (2.27), obtemos

$$
\mathcal{I}_{p,q} = \int\int dx^0\ dy^0\int\int d^D\mathbf{x}_\parallel d^D\mathbf{y}_\parallel\int\int d^d\mathbf{x}_\perp d^d\mathbf{y}_\perp\ \delta^{(d)}(\mathbf{x}_\perp-\mathbf{a}_p)\ \delta^{(d)}(\mathbf{y}_\perp-\mathbf{a}_q)
$$

$$\int \frac{dk^0}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{k}_{\|}}{(2\pi)^D} \int \frac{d\mathbf{k}_{\perp}}{(2\pi)^d} \exp\left[ik^0(x^0 - y^0)\right] \exp\left[-i\mathbf{k}_{\|} \cdot (\mathbf{x}_{\|} - \mathbf{y}_{\|})\right]$$

$$\frac{\exp\left[-i\mathbf{k}_{\perp} \cdot (\mathbf{x}_{\perp} - \mathbf{y}_{\perp})\right]}{(k^0)^2 - \mathbf{k}_{\|}^2 - \mathbf{k}_{\perp}^2 - m^2} \ . \tag{2.30}$$

As integrações em $d^d\mathbf{x}_{\perp}$ e $d^d\mathbf{y}_{\perp}$ são triviais, as em dx^0 e $d^D\mathbf{x}_{\|}$ são efetuadas com o auxílio de

$$\delta(k) = \int \frac{dx}{2\pi}\ e^{ikx} \ , \tag{2.31}$$

donde resulta que,

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{p,q} &= \int dy^0 \int d^D\mathbf{y}_{\|} \int \frac{dk^0}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{k}_{\|}}{(2\pi)^D} \int \frac{d\mathbf{k}_{\perp}}{(2\pi)^d}\ (2\pi)(\delta(k^0))\ (2\pi)^D \delta^D(\mathbf{k}_{\|}) \\
&\qquad \exp\left(-ik^0y^0\right) \exp\left(i\mathbf{k}_{\|} \cdot \mathbf{y}_{\|}\right)\ \frac{\exp\left[-i\mathbf{k}_{\perp} \cdot (\mathbf{a}_p - \mathbf{a}_q)\right]}{(k^0)^2 - \mathbf{k}_{\|}^2 - \mathbf{k}_{\perp}^2 - m^2} \\
&= -\int dy^0\ \int d^D\mathbf{y}_{\|}\ \int \frac{d^d\mathbf{k}_{\perp}}{(2\pi)^d}\ \frac{1}{\mathbf{k}_{\perp}^2 + m^2}\ \exp\left[-i\mathbf{k}_{\perp} \cdot (\mathbf{a}_p - \mathbf{a}_q)\right] \ .
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Observando que, o volume L^D da *brana* D-dimensional é a integral em $d^D\mathbf{y}_{\|}$, o tempo T corresponde a integral em dy^0, e definindo $\mathbf{a}_{pq} \equiv \mathbf{a}_p - \mathbf{a}_q$, a equação acima pode ser ainda mais simplificada,

$$\mathcal{I}_{p,q} = -T\text{Ł}^D\ \int \frac{d^d\mathbf{k}_{\perp}}{(2\pi)^d}\ \frac{1}{\mathbf{k}_{\perp}^2 + m^2}\ \exp\left(-i\mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{a}_{pq}\right) \ . \tag{2.33}$$

Com este resultado, a energia (2.28) torna-se:

$$E = -\frac{1}{2}\ \text{Ł}^D \sum_{p=1}^{N} \sum_{q=1}^{N} \sigma_p \sigma_q (1 - \delta_{pq}) \int \frac{d^d\mathbf{k}_{\perp}}{(2\pi)^d}\ \frac{1}{\mathbf{k}_{\perp}^2 + m^2}\ \exp\left(-i\mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{a}_{pq}\right) \ . \tag{2.34}$$

Para evitar divergências que ocorrem devido à extensão infinita das *branas*, fato comum também em teoria clássica de campos, façamos uso da energia por unidade de volume, ou densidade de energia, $\mathcal{E}$, em lugar da própria energia E:

$$\mathcal{E} = \frac{E}{L^D} = -\frac{1}{2} \sum_{p=1}^{N} \sum_{q=1}^{N} \sigma_p \sigma_q (1 - \delta_{pq}) \int \frac{d^d \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^d} \frac{1}{\mathbf{k}_\perp^2 + m^2} \exp\left[-i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{a}_{pq}\right] . \tag{2.35}$$

A partir deste ponto, os dois tipos de campo, massivo e sem massa, requerem tratamentos diferentes.

Passamos agora ao tratamento do campo massivo. Definindo-se

$$G_d(x) \equiv x^{1-(d/2)} \, K_{(d/2)-1}(x) \ , \tag{2.36}$$

a integral em (2.35) pode ser calculada com a relação (A.14),

$$\begin{aligned}
\int d^d\mathbf{k}_\perp \frac{1}{\mathbf{k}_\perp^2 + m^2} \exp(\pm i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{a}) &= (2\pi)^{d/2} a^{2-d} \int_0^\infty du \frac{u^{d/2} J_{(d/2)-1}(u)}{u^2 + (ma)^2} \ , \ 0 < d < 5, m > 0 \\
&= (2\pi)^{d/2} m^{d-2} (ma)^{1-(d/2)} K_{(d/2)-1}(ma) \\
&= (2\pi)^{d/2} m^{d-2} G_d(ma) \ , \qquad (2.37)
\end{aligned}$$

onde $J_\nu(x)$ é a função de Bessel de primeira espécie, e $K_\nu(x)$ a função de Bessel modificada [20].

É fato notável que, muito embora a integral do lado direito de (2.37) tenha sido obtida com a restrição de que $0 < d < 5$, e $m > 0$, a expressão final seja válida para qualquer d inteiro. Ela pode, portanto, ser considerada uma *extensão analítica* para a integral do lado esquerdo de (2.37), definindo a energia de interação entre correntes tipo delta de dimensão d qualquer.

Finalmente, basta substituir (2.37) em (2.35) para encontrar a energia de interação, por unidade de volume, entre as correntes:

$$\mathcal{E}(\sigma_p, \sigma_q, a_{pq}, m \neq 0, d, N) = -\frac{1}{2} \frac{m^{d-2}}{(2\pi)^{d/2}} \sum_{p=1}^{N} \sum_{q=1}^{N} \sigma_p \sigma_q (1 - \delta_{pq}) G_d(m a_{pq}) \ . \tag{2.38}$$

Uma certa *brana*, localizada por um vetor perpendicular $\mathbf{a}_\ell$, sofrerá então a ação de uma força por unidade de volume, ou densidade de força, que toma a forma simplificada

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{(\ell)} &= -\left(\frac{\partial}{\partial a_{\ell k}}\sum_{\substack{k=1\\k\neq\ell}}^{N}\mathcal{E}\right)\frac{\mathbf{a}_{\ell k}}{a_{\ell k}} \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{m^{d-2}}{(2\pi)^{d/2}}\sum_{\substack{k=1\\k\neq\ell}}^{N}\sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N}\sigma_p\sigma_q(1-\delta_{pq})\frac{\partial G_d}{\partial(ma_{pq})}\;\frac{\partial(ma_{pq})}{\partial a_{\ell k}}\;\frac{\mathbf{a}_{\ell k}}{a_{\ell k}} \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{m^{d-2}}{(2\pi)^{d/2}}\sum_{\substack{k=1\\k\neq\ell}}^{N}\sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N}\sigma_p\sigma_q(1-\delta_{pq})\frac{\partial G_d}{\partial(ma_{pq})}\;m(\delta_{kp}\delta_{\ell q}+\delta_{kq}\delta_{\ell p})\;\frac{\mathbf{a}_{\ell k}}{a_{\ell k}} \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{m^{d-1}}{(2\pi)^{d/2}}\sum_{\substack{k=1\\k\neq\ell}}^{N}\left[\sigma_k\sigma_\ell(1-\delta_{k\ell})+\sigma_\ell\sigma_k(1-\delta_{\ell k})\right]\;\frac{\partial G_d}{\partial(ma_{pq})}\;\frac{\mathbf{a}_{\ell k}}{a_{\ell k}} \\
&= \frac{m^{d-1}}{(2\pi)^{d/2}}\sum_{\substack{k=1\\k\neq\ell}}^{N}\;\sigma_k\sigma_\ell(1-\delta_{k\ell})\;\frac{\partial G_d}{\partial(ma_{pq})}\;\frac{\mathbf{a}_{\ell k}}{a_{\ell k}} \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\sum_{\substack{k=1\\k\neq\ell}}^{N}\;\frac{\sigma_\ell\sigma_k}{a_{\ell k}^{d-1}}\;(ma_{\ell k})^{d/2}K_{d/2}(ma_{\ell k})\;\frac{\mathbf{a}_{\ell k}}{a_{\ell k}}\;,
\end{aligned} \tag{2.39}$$

onde utilizamos a derivada de (2.36)

$$\frac{\partial G_d(x)}{\partial x} = -x^{1-(d/2)}K_{d/2}(x)\;. \tag{2.40}$$

Tomando o limite $m \to 0$, é possível obter as mesmas quantidades para o campo não massivo observando-se que quando $\xi \to 0$, a expansão da função de Bessel modificada pode ser truncada em seus primeiros termos [20],

$$\begin{aligned}
K_\nu(\xi) &\approx 2^{\nu-1}(\nu-1)!\;\xi^{-\nu}+\ldots\;,\;\;\nu\neq 0 \\
K_0(\xi) &\approx ln\;\xi-\gamma+ln\;2+\ldots\;,
\end{aligned} \tag{2.41}$$

onde γ é a constante de Euler-Mascheroni. Sendo assim, com o auxílio da função gama, a função $K_{(d/2)-1}(ma_{pq})$ pode ser escrita como

$$
\begin{aligned}
K_{(d/2)-1}(ma_{pq}) &\approx \frac{\Gamma(\frac{d}{2}-1)2^{(d/2)-2}}{(ma_{pq})^{(d/2)-1}} \ , \ d \neq 2 \ , \\
K_0(ma_{pq}) &\approx -\ln\left(\frac{ma_{pq}}{2}\right) - \gamma \ \ , \ d = 2 \ .
\end{aligned} \tag{2.42}
$$

Para o caso em que $d \neq 2$, substituindo a primeira equação em (2.42) na desnsidade de energia (2.38) obtemos

$$
\mathcal{E}(\sigma_p, \sigma_q, a_{pq}, m = 0, d \neq 2, N) = -\frac{\Gamma\Big((d/2)-1\Big)2^{(d/2)-3}}{(2\pi)^{d/2}} \sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N} \frac{\sigma_p\sigma_q}{a_{pq}^{d-2}} \ (1-\delta_{pq}) \ . \tag{2.43}
$$

Para $d = 2$, utilizando a segunda equação em (2.42) e introduzindo uma constante arbitrária a_0, com dimensão de comprimento

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(\sigma_p, \sigma_q, a_{pq}, m \to 0, d = 2, N) &= \lim_{m\to 0}\left(\frac{1}{4\pi}\sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N}\sigma_p\sigma_q(1-\delta_{pq})\ln\left(\frac{a_{pq}}{a_0}\right)\right. \\
&+ \left.\frac{1}{4\pi}\sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N}\sigma_p\sigma_q(1-\delta_{pq})\left[\ln\left(\frac{ma_0}{2}\right)+\gamma\right]\right) \ .
\end{aligned} \tag{2.44}
$$

A última parcela do lado direito é divergente no limite $m \to 0$, e irrelevante para a força por ser totalmente independente da distância entre as *branas*, podendo assim ser ignorada

$$
\mathcal{E}(\sigma_p, \sigma_q, a_{pq}, m \to 0, d = 2, N) = \frac{1}{4\pi}\sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N}\sigma_p\sigma_q(1-\delta_{pq})\ln\left(\frac{a_{pq}}{a_0}\right). \tag{2.45}
$$

A força sobre a *brana* ℓ, no caso não massivo e para qualquer valor de d, é obtida diretamente de (2.43) e (2.45)

$$
\mathcal{F}_{(\ell)} = -\frac{\Gamma(d/2)2^{(d/2)-1}}{(2\pi)^{d/2}} \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq\ell}}^{N} \frac{\sigma_\ell\sigma_k}{a_{\ell k}^{d-1}} \ \frac{\mathbf{a}_{\ell k}}{a_{\ell k}} \ , \tag{2.46}
$$

que também pode ser encontrada tomando-se o limite $m \to 0$ em (2.39).

As aproximações acima podem ser corroboradas por cálculo direto com a equação (A.16), válida para o caso $d \neq 2$

$$\begin{aligned}\int d^d\mathbf{k}_\perp \, \frac{1}{\mathbf{k}_\perp^2}\exp(\pm i\mathbf{k}_\perp\cdot\mathbf{a}) &= (2\pi)^{d/2}a^{2-d}\int_0^\infty du\; u^{(d/2)-2}J_{(d/2)-1}(u) \\ &= (2\pi)^{d/2}\; 2^{(d/2)-2}\;\Gamma\left(\frac{d}{2}-1\right)\; a^{2-d}\;,\; 2<d<5\;. \end{aligned} \tag{2.47}$$

Substituindo (2.47) em (2.35), a energia (2.43) é obtida de maneira trivial. De forma semelhante ao caso com massa, apesar deste resultado ter sido deduzido com a restrição, $2<d<5$, o lado direito da segunda linha expressão em (2.47) é válido para todo $d \neq 2, 0, -2, -4....$

Concluímos desta forma com os seguintes casos particulares em (3+1) dimensões, para o tipo de interação intermediada por um campo escalar com correntes externas do tipo (2.25):

1. *Energia entre duas fontes pontuais*, ($d=3,\ D=0$ e $N=2$):

   - *Caso massivo (potencial de Yukawa)*

$$E=-\frac{\sigma_1\sigma_2}{4\pi}\;\frac{\exp(-ma)}{a}\;, \tag{2.48}$$

   - *Caso não massivo*

$$E=-\frac{\sigma_1\sigma_2}{4\pi}\;\frac{1}{a}\;. \tag{2.49}$$

2. *Densidade de energia entre duas linhas paralelas*, ($d=2,\ D=1$ e $N=2$):

   - *Caso massivo*

$$\mathcal{E}=-\frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi}\;K_0(ma)\;, \tag{2.50}$$

   - *Caso não massivo*

$$\mathcal{E}=\frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi}\;\ln\left(\frac{a}{a_0}\right)\;. \tag{2.51}$$

3. *Densidade de energia entre dois planos paralelos*, ($d=1,\ D=2$ e $N=2$):

- *Caso massivo*

$$\mathcal{E} = -\frac{\sigma_1\sigma_2}{2m}\ \exp\left(-ma\right)\ , \tag{2.52}$$

- *Caso não massivo*

$$\mathcal{E} = \frac{\sigma_1\sigma_2}{2}\ a\ . \tag{2.53}$$

É curioso notar que, embora exista o vínculo $l = D + d + 1$, onde l é a dimensão do espaço, a forma da energia de interação entre cargas (2.38), (2.43) e (2.45), não depende da dimensão D das *branas*. Por exemplo; se tomarmos duas fontes , ($N = 2$), em um espaço de $(4 + 1)$ dimensões, com 3-codimensões espaciais, ($d = 3$), teremos duas linhas, ($D = 1$), que interagem ainda segundo as equação (2.48) para o caso de campo com massa, ou (2.49) para o não massivo.

2.3 Dipolos Escalares

Para encontrar a interação entre uma distribuição de dipolos, acoplamos ao campo livre uma corrente externa

$$J(x) = \sum_{p=1}^{N}\ V_{\mu(p)}\ \partial^{\mu}\delta^{d}(\mathbf{x}_{\perp} - \mathbf{a}_p)\ , \tag{2.54}$$

que depende de um quadrivetor constante V^{μ}, o qual define a direção e magnitude dos dipolos,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\ \partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi - \frac{1}{2}\ m^2\phi^2 + \left(\sum_{p=1}^{N}\ V_{\mu(p)}\ \partial^{\mu}\delta^{d}(\mathbf{x}_{\perp} - \mathbf{a}_p)\right)\phi\ . \tag{2.55}$$

O cálculo da energia apresenta termos de auto-interação, também neste caso, que devem ser desconsiderados tomando-se

$$E \rightarrow E = \sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N}(1 - \delta_{pq})\frac{1}{2T}\mathcal{I}_{pq}\ , \tag{2.56}$$

onde

$$\mathcal{I}_{pq} \equiv \int\int d^{D+d+1}x \; d^{D+d+1}y \; \delta^{(d)}(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{a}_p)\Big(V_{\mu(p)}V_{\nu(q)}\partial^\mu\partial^\nu \; \Delta_F(x-y)\Big)\delta^{(d)}(\mathbf{y}_\perp - \mathbf{a}_q)$$

$$= \int\int d^{D+d+1}x \; d^{D+d+1}y \; \delta^{(d)}(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{a}_p) \; V_{\mu(p)}V_{\nu(q)} \; (-k^\mu k^\nu)$$

$$\Delta_F(x-y) \; \delta^{(d)}(\mathbf{y}_\perp - \mathbf{a}_q) \; . \tag{2.57}$$

Utilizando o propagador de Feynman em $(D+d+1)$ dimensões (2.29), a distribuição $\delta(x)$ na forma (2.31), e o operador

$$\nabla_{pq\perp} = \left(\frac{\partial}{\partial a^1_{pq}}, ..., \frac{\partial}{\partial a^d_{pq}}\right) \; , \tag{2.58}$$

a integral $\mathcal{I}_{p,q}$ toma a nova forma

$$\mathcal{I}_{p,q} = \int dy^0 \int d^D\mathbf{y}_{||} \int \frac{dk^0}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{k}_{||}}{(2\pi)^D} \int \frac{d\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^d} \; (2\pi)(\delta(k^0)) \; (2\pi)^D\delta^D(\mathbf{k}_{||})$$

$$\exp\left(-ik^0y^0\right)\exp\left(i\mathbf{k}_{||}\cdot\mathbf{y}_{||}\right) \; \frac{\exp\left[-i\mathbf{k}_\perp\cdot(\mathbf{a}_p - \mathbf{a}_q)\right]}{(k^0)^2 - \mathbf{k}_{||}^2 - \mathbf{k}_\perp^2 - m^2}$$

$$\left\{-[(\mathbf{V}_{(\mathbf{p})||}\cdot\mathbf{k}_{||}) + (\mathbf{V}_{(\mathbf{p})\perp}\cdot\mathbf{k}_\perp) + V_{0(\mathbf{p})}k^0] \; [(\mathbf{V}_{(\mathbf{q})||}\cdot\mathbf{k}_{||}) + (\mathbf{V}_{(\mathbf{q})\perp}\cdot\mathbf{k}_\perp) + V_{0(\mathbf{q})}k^0]\right\}$$

$$= TL^D\int\frac{d^d\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^d} \; \frac{1}{\mathbf{k}_\perp^2 + m^2} \; (\mathbf{V}_{(\mathbf{p})\perp}\cdot\mathbf{k}_\perp)(\mathbf{V}_{(\mathbf{q})\perp}\cdot\mathbf{k}_\perp)\exp\left[-i\mathbf{k}_\perp\cdot(\mathbf{a}_p - \mathbf{a}_q)\right]$$

$$= TL^D \; (\mathbf{V}_{(\mathbf{p})\perp}\cdot\nabla_{\mathbf{pq}\perp})(\mathbf{V}_{(\mathbf{q})\perp}\cdot\nabla_{\mathbf{pq}\perp})\int\frac{d^d\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^d} \; \frac{\exp\left[-i\mathbf{k}_\perp\cdot\mathbf{a}_{pq}\right]}{\mathbf{k}_\perp^2 + m^2}$$

$$= TL^D \; (\mathbf{V}_{(\mathbf{p})\perp}\cdot\nabla_{\mathbf{pq}\perp})(\mathbf{V}_{(\mathbf{q})\perp}\cdot\nabla_{\mathbf{pq}\perp}) \; \frac{m^{d-2}}{(2\pi)^{d/2}} \; G_d(ma) \; , \tag{2.59}$$

onde a última integral foi encontrada em (2.37).

Substituindo em (2.56) e dividindo pelo volume da *brana* L^D, encontramos a energia de interação entre dipolos para o campo escalar, localizados em N *branas* paralelas D-dimensionais,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N}\sigma_p\sigma_q(1-\delta_{pq})\Big(\mathbf{V}_{(p)\perp}\cdot\nabla_{pq\perp}\Big)\Big(\mathbf{V}_{(q)\perp}\cdot\nabla_{pq\perp}\Big)\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}m^{d-2}G(ma_{pq}) \\
&= -\frac{1}{2}\frac{m^d}{(2\pi)^{d/2}}\sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N}\sigma_p\sigma_q(1-\delta_{pq})\Bigg[(ma_{pq})^{-d/2}K_{d/2}(ma_{pq})\Big(\mathbf{V}_{(p)\perp}\cdot\mathbf{V}_{(q)\perp}\Big) \\
&\quad -(ma_{pq})^{-1-(d/2)}K_{1+(d/2)}(ma_{pq})\Big(\mathbf{V}_{(p)\perp}\cdot(m\mathbf{a}_{pq})\Big)\Big(\mathbf{V}_{(q)\perp}\cdot(m\mathbf{a}_{pq})\Big)\Bigg], \qquad (2.60)
\end{aligned}$$

A energia de interação para o caso de campo não massivo é obtida de (2.60), tomando-se o limite $m \to 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \frac{2^{(d/2)-2}}{(2\pi)^{d/2}}\Gamma(d/2)\sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N}\sigma_p\sigma_q(1-\delta_{pq})\frac{1}{a_{pq}^d} \\
&\quad \left[d\left(\frac{\mathbf{V}_{(p)\perp}\cdot\mathbf{a}_{pq}}{a_{pq}}\right)\left(\frac{\mathbf{V}_{(q)\perp}\cdot\mathbf{a}_{pq}}{a_{pq}}\right)-\mathbf{V}_{(p)\perp}\cdot\mathbf{V}_{(q)\perp}\right], \qquad (2.61)
\end{aligned}$$

válida sem restrições sobre o valor de d. Esta mesma equação também pode ser obtida diretamente de (2.59), utilizando-se o resultado (2.47), apesar deste ter sido deduzido com restrições sobre os possíveis valores de d.

Como uma ilustração interessante, podemos considerar o caso de duas *branas*, ($N = 2$), de dimensão arbitrária D, em 3-codimensões, ($d = 3$), neste caso a equação (2.60) fica

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(d=3,N=2) &= \frac{\exp(-ma_{12})}{4\pi a_{12}^3}\Bigg[\Big[(ma_{12})^2+3(ma_{12}+1)\Big]\Big(\mathbf{V}_{\perp}^{(1)}\cdot\frac{\mathbf{a_{12}}}{a_{12}}\Big)\Big(\mathbf{V}_{\perp}^{(2)}\cdot\frac{\mathbf{a_{12}}}{a_{12}}\Big) \\
&- (ma_{12}+1)\Big(\mathbf{V}_{\perp}^{(1)}\cdot\mathbf{V}_{\perp}^{(2)}\Big)\Bigg], \qquad (2.62)
\end{aligned}$$

fornecendo para o caso não massivo,

$$\mathcal{E}(d=3,N=2,m=0) = -\frac{1}{4\pi a_{12}^3}\Big[\Big(\mathbf{V}^{(1)}\cdot\mathbf{V}^{(2)}\Big)-3\Big(\mathbf{V}^{(1)}\cdot\hat{\mathbf{a}}\Big)\Big(\mathbf{V}^{(\mathbf{2})}\cdot\hat{\mathbf{a}}\Big)\Big]. \qquad (2.63)$$

Que é exatamente a energia de interação entre dois dipolos com sinal contrário à encontrada no eletromagnetismo clássico entre dois dipolos elétricos, com momentos de dipolo $\mathbf{V}^{(1)}$ e $\mathbf{V}^{(2)}$ no caso de um espaço com $(3+1)$ dimensões.

Aqui, como no caso anterior de cargas, também vale notar que a energia de interação é independente da dimensão D das *branas*. Ou seja, alterando D em conformidade com o vínculo $l = D + d + 1$, mantemos a forma da energia $\mathcal{E}$.

Todos os tipos de interação entre cargas estáticas, encontradas até agora são intermediadas por campos com um único grau de liberdade. A generalização seguinte se faz com a introdução de campos vetoriais, que podem apresentar invariância de calibre. Muito embora os procedimentos de cálculo da energia de interação entre cargas vetoriais sejam semelhantes aos apresentados aqui, veremos no próximo capítulo como o processo de quantização de tais campos torna-se mais sutil e como a natureza das interações é alterada.

Capítulo 3

Interações Entre Correntes Vetoriais

Campos vetoriais pertencem a representação $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ do grupo de Lorentz [21]. Sendo assim, descrevem partículas de spin-1 apresentando quatro graus de liberdade, que são mais do que os necessários para a descrição dos possíveis estados de polarização associados ao campo eletromagnético. Isto faz necessária a imposição de vínculos que eliminam os graus de liberdade espúrios do modelo. Para esclarecer esta idéia, na primeira seção é exposto o importante caso da eletrodinâmica massiva como exemplo de modelo que não exibe invariância de calibre. A segunda seção é dedicada ao método de Faddeev-Popov [3, 21, 22], capaz de eliminar estes estados espúrios de uma forma muito geral, com a introdução de campos fictícios denominados *ghosts*.

As duas últimas seções investigam a energia de interação entre distribuições D-dimensionais e estáticas de cargas e dipolos vetoriais, em um espaço com $(d+1)$ dimensões. Como consequência, os potenciais da eletrodinâmica clássica são recuperados a partir dos métodos funcionais da teoria quântica de campos.

3.1 Invariância de Calibre

A eletrodinâmica massiva, descrita pela lagrangiana de Proca

$$\mathcal{L} \;=\; -\frac{1}{4}\, F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\, m^2 A^\mu A_\mu$$

$$= \frac{1}{2} A_\mu[(\Box + m^2)\eta^{\mu\nu} - \partial^\mu\partial^\nu]A_\nu \ , \qquad (3.1)$$

não sofre de ambiguidade na definição da variável dinâmica A^μ, ou seja, neste modelo não há invariância de calibre. As respectivas equações de movimento,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0 \qquad (3.2)$$

conduzem naturalmente a um vínculo para a componente temporal A^0 do campo,

$$\partial_\mu F^{\mu 0} + m^2 A^0 = 0 \ \Rightarrow \ A^0 = -\frac{1}{m^2} \ \nabla \cdot \mathbf{E} \ . \qquad (3.3)$$

Tomando a quadridivergência das equações de movimento em termos dos potenciais, vemos também que o calibre de Lorenz é automaticamente satisfeito neste caso:

$$\partial_\nu\partial^\mu\partial_\mu A^\nu - \partial_\nu\partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) + m^2\partial_\nu A^\nu = 0 \ \Rightarrow \ \partial_\nu A^\nu = 0 \ . \qquad (3.4)$$

Por causa da presença do termo de massa, dados os vetores de polarização $\epsilon^{(a)}_\mu$, podemos passar ao referencial de repouso onde $k^\mu = (m, 0, 0, 0)$ para obtermos

$$k^\mu \epsilon^{(a)}_\mu = 0 \ . \qquad (3.5)$$

O que fixa todos os três estados de polarização possíveis em qualquer referencial por ser um escalar de Lorentz.

Da lagrangiana (3.1) extraimos a equação que define o propagador para o campo de Proca,

$$[(\Box + m^2)\eta^{\mu\nu} - \partial^\mu\partial^\nu]D_{\nu\lambda}(x) = \delta^\mu_\lambda \ \delta^4(x) \ , \qquad (3.6)$$

que tem solução por ser inversível o operador diferencial. O modelo mostra-se diretamente quantizável com o propagador no espaço dos momenta assumindo a forma

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{-\eta_{\mu\nu} + (k_\mu k_\nu / m^2)}{k^2 - m^2} \ . \tag{3.7}$$

3.2 O Método de Faddeev-Popov

Por sua vez, o campo vetorial não massivo descrito pela lagrangiana de Maxwell,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \ F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \ , \tag{3.8}$$

possui invariância de calibre de acordo com a transformação,

$$A_\mu \ \longrightarrow \ A_\mu^{(\theta)} = U(\theta) A_\mu U^{-1}(\theta) - \frac{1}{ie} (\partial_\mu U(\theta)) U^{-1}(\theta) \ , \tag{3.9}$$

onde $U(\theta)$ pertence ao grupo de simetria $U(1)$:

$$U(\theta) = e^{-i\theta(x)} \ \Rightarrow \ A_\mu \ \longrightarrow \ A_\mu^{(\theta)} = A_\mu + \frac{1}{e} \ \partial_\mu \theta(x) \ . \tag{3.10}$$

O conjunto de todos os $A_\mu^{(\theta)}$ obtidos a partir de um determinado A_μ por uma transformação de calibre forma uma classe de equivalência, denominada a órbita do grupo de calibre, que engloba todos os modos de campo que produzem uma mesma dinâmica:

$$\begin{aligned}
S[A_\mu^{(\theta)}] &= \int d^4x \ [-\frac{1}{4} \ F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}] \\
&= \frac{1}{2} \int d^4x A_\mu^{(\theta)}(x) (\eta^{\mu\nu} \Box - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu^{(\theta)}(x) \\
&= \frac{1}{2} \int d^4x A_\mu(x) (\eta^{\mu\nu} \Box - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu(x) + \frac{1}{2e^2} \int d^4x \ \partial_\mu \theta(x) \ (\eta^{\mu\nu} \Box - \partial^\mu \partial^\nu) \ \partial_\nu \theta(x) \\
&= \frac{1}{2} \int d^4x A_\mu(x) (\eta^{\mu\nu} \Box - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu(x)
\end{aligned}$$

$$= \quad S[A_\mu] \tag{3.11}$$

Como a medida de integração no funcional gerador,

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}A_\mu \; e^{iS} \; , \tag{3.12}$$

é facilmente identificada como invariante por transformações de calibre [19],

$$\mathcal{D}A_\mu = \prod_{\mu,\theta,x} dA_\mu^{(\theta)}(x) = \prod_{\mu,\alpha,x} dA_\mu^{(\alpha)}(x) \; , \tag{3.13}$$

a integração redundante sobre todos os elementos da órbita torna o funcional $\mathcal{Z}$ proporcional ao volume das órbitas do grupo de calibre. Este volume é uma constante infinita que não representa uma dificuldade importante, podendo ser cancelada por uma normalização conveniente. O problema real surge porque simetrias de calibre locais implicam em um operador não inversível na parte quadrática da ação, como pode ser visto em (3.11). Em outras palavras o operador diferencial na expressão,

$$[\eta^{\mu\nu}\Box - \partial^\mu\partial^\nu]D_{\nu\lambda}(x) = \delta^\mu_\lambda \; \delta^4(x) \; , \tag{3.14}$$

possui autovetores na forma $\partial_\mu\theta(x)$, cujos autovalores são nulos, e portanto, o propagador para o campo de calibre não pode ser definido.

O método de Faddeev-Popov permite selecionar um único elemento representante de cada classe de equivalência. Isto é realizado definindo-se uma superfície que transpassa cada órbita uma única vez,

$$F[A_\mu^{(\theta)}] = 0 \; , \tag{3.15}$$

restrição esta conhecida como fixação do calibre. Introduzindo o chamado determinante de Faddeev-Popov, $\Delta_{FP}[A_\mu]$, que se define com a equação

$$1 = \Delta_{FP}[A_\mu] \int \mathcal{D}\theta \; \delta(F[A_\mu^{(\theta)}]) \; , \tag{3.16}$$

e notando que a medida de integração no espaço do grupo de calibre também é invariante [21, 19],

$$\mathcal{D}\theta = \prod_x d\theta(x) = \prod_x d\theta^{'}(x) \ , \tag{3.17}$$

podemos mostrar facilmente que:

$$\begin{aligned} \Delta_{FP}^{-1}[A_\mu^{(\theta^{'})}] &= \int \mathcal{D}\theta^{'} \ \delta(F[A_\mu^{(\theta^{'})}]) \\ &= \int \mathcal{D}\theta \ \delta(F[A_\mu^{(\theta)}]) \\ &= \Delta_{FP}^{-1}[A_\mu] \ . \end{aligned} \tag{3.18}$$

Ou seja, $\Delta_{FP}[A_\mu]$ é invariante sob transformações de calibre. Introduzindo a unidade na forma (3.16) no funcional gerador, obtemos

$$\begin{aligned} Z[J_\mu] &= N \int \mathcal{D}A_\mu \ \Delta_{FP}[A_\mu] \int \mathcal{D}\theta \ \delta(F[A_\mu^{(\theta)}]) \ e^{iS[A_\mu]} \\ &= N \int \mathcal{D}\theta \int \mathcal{D}A_\mu \ \Delta_{FP}[A_\mu] \ \delta(F[A_\mu^{(\theta)}]) \ e^{iS[A_\mu]} \\ &= N \int \mathcal{D}A_\mu \ \Delta_{FP}[A_\mu] \ \delta(F[A_\mu]) \ e^{iS[A_\mu]} \ , \end{aligned} \tag{3.19}$$

onde o volume do grupo de calibre foi absorvido na constante N.

A forma funcional do determinante de Faddev-Popov é obtida por uma simples transformação de variáveis,

$$\begin{aligned} \Delta_{FP}^{-1}[A_\mu] &= \int \mathcal{D}\theta \ \delta(F[A_\mu^{(\theta)}]) \\ &= \int \mathcal{D}F \ \delta(F[A_\mu^{(\theta)}]) \left(\det \frac{\delta F}{\delta \theta}\right)^{-1} \end{aligned}$$

$$= \left(\det \frac{\delta F}{\delta\theta}\right)^{-1}\Bigg|_{F=0} . \tag{3.20}$$

Sendo $\Delta_{FP}[A_\mu]$ invariante, para campos A_μ que já satisfazem o vínculo $F[A_\mu] = 0$ temos,

$$\Delta_{FP}[A_\mu] = \det \frac{\delta F[A_\mu^{(\theta)}]}{\delta\theta}\Bigg|_{\theta=0} . \tag{3.21}$$

Por isto podemos nos restringir a transformações infinitesimais para o cálculo do determinante de Faddeev-Popov. Generalizando a hiperfície que define o calibre para $F[A_\mu^{(\theta)}] - f(x) = 0$, é possível efetuar uma integração funcional de uma forma gaussiana para $f(x)$, o que tem o efeito irrelavante de multiplicar o funcional gerador Z, por uma constante. Podemos então escrever,

$$\begin{aligned} Z[J_\mu] &= N\int \mathcal{D}A_\mu\ \Delta_{FP}[A_\mu]\ \int \mathcal{D}f\ \delta(F[A_\mu^{(\theta)}] - f(x))\ e^{-\frac{i}{2\xi}\int d^4x\ [f(x)]^2} e^{iS[A_\mu]} \\ &= N\int \mathcal{D}A_\mu\ \Delta_{FP}[A_\mu]\ e^{i[S[A_\mu] - \frac{1}{2\xi}\int d^4x\ (F[A_\mu])^2]} \\ &= N\int \mathcal{D}A_\mu\ \Delta_{FP}[A_\mu]\ e^{i(S+S_{FC})} , \end{aligned} \tag{3.22}$$

onde definimos a ação de fixação de calibre,

$$S_{FC} \equiv \int d^4x\ \mathcal{L}_{FC} = -\frac{1}{2\xi}\int d^4x\ (F[A_\mu(x)])^2 . \tag{3.23}$$

Podemos ainda escrever o determinante $\Delta_{FP}[A_\mu]$ como uma integral funcional da seguinte forma,

$$\begin{aligned} \Delta_{FP}[A_\mu] &= \det \frac{\delta F[A_\mu^{(\theta)}]}{\delta\theta}\Bigg|_{\theta=0} \\ &= \int \mathcal{D}\bar{c}\ \mathcal{D}c\ e^{-i\int d^4x d^4y\ \bar{c}(x)\ (\frac{\delta F[A_\mu^{(\theta)}]}{\delta\theta})_{\theta=0}\ c(y)} \\ &= \int \mathcal{D}\bar{c}\ \mathcal{D}c\ e^{iS_{ghost}} , \end{aligned} \tag{3.24}$$

onde

$$S_{ghost} \equiv \int d^4x \; \mathcal{L}_{ghost} = -\int d^4x \; d^4y \; \overline{c}(x) \left(\frac{\delta F[A_\mu^{(\theta)}]}{\delta\theta} \right)_{\theta=0} c(y) \; . \tag{3.25}$$

Os campos $\overline{c}(x)$ e $c(y)$ são variáveis de Grassmann conhecidos como *ghosts* de Faddeev-Popov.

Substituindo (3.24) em (3.22), o funcional gerador torna-se

$$Z[J_\mu] = N \int \mathcal{D}A_\mu \; \mathcal{D}\overline{c} \; \mathcal{D}c \; e^{i(S+S_{FC}+S_{ghost})} \; . \tag{3.26}$$

Impondo agora o calibre de Lorenz,

$$F[A_\mu(x)] = \partial_\mu A^\mu - f(x) \; , \tag{3.27}$$

de (3.23) vemos que a lagrangiana de fixação de calibre assume a forma

$$\mathcal{L}_{FC} = -\frac{1}{2\xi} \; (F[A_\mu(x)])^2 = -\frac{1}{2\xi} \; (\partial_\mu A^\mu)^2 \; . \tag{3.28}$$

Para obtermos a lagrangiana de *ghost* correspondente a esta escolha de calibre, notamos que

$$F[A_\mu^{(\theta)}(x)] = \partial_\mu A^{\mu(\theta)}(x) - f(x) = \partial_\mu (A^\mu(x) + \frac{1}{e} \; \partial^\mu \theta(x)) - f(x) \; , \tag{3.29}$$

donde conclui-se,

$$\left. \frac{\delta F[A_\mu^{(\theta)(x)}]}{\delta\theta(y)} \right|_{\theta=0} = \frac{1}{e} \; \Box \; \delta^4(x-y) \; , \tag{3.30}$$

que, substituindo em (3.25) e absorvendo o fator $\frac{1}{e}$ na constante de normalização, fornece após uma integração por partes

$$\begin{aligned} S_{ghost} = \int d^4x \; \mathcal{L}_{ghost} &= -\int d^4x \; d^4y \; \overline{c}(x) \left(\frac{\delta F[A_\mu^{(\theta)}]}{\delta\theta} \right)_{\theta=0} c(y) \\ &= -\int d^4x \; d^4y \; \partial_\mu \overline{c}(x) \; \partial^\mu c(x) \; . \end{aligned} \tag{3.31}$$

Deste modo, a lagrangiana efetiva da teoria na presença de uma fonte externa J^μ, assume a forma

$$\mathcal{L}_{ef} = -\frac{1}{4}\ F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}\ (\partial_\mu A^\mu)^2 + \partial_\mu \bar{c}(x)\ \partial^\mu c(x) + J^\mu A_\mu\ . \tag{3.32}$$

Vemos que os *ghosts* não interagem com o campo dos fótons e por isto mesmo podem ser descartados, já que não contribuem para a dinâmica do sistema no caso do campo de Maxwell em um espaço de Minkowiski,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ef} \longrightarrow \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}\ F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}\ (\partial_\mu A^\mu)^2 \\ &= \frac{1}{2}\ A_\mu \left[\eta^{\mu\nu}\Box - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\ \partial^\mu\partial^\nu\right] A_\nu\ . \end{aligned} \tag{3.33}$$

Todavia estes mesmos *ghosts* acoplam-se ao campo de calibre em teoria de campos de calibre não abelianos, ou ao campo gravitacional quando o campo de Maxweell encontra-se na presença de um espaço tempo curvo. Desta lagrangiana, obtemos a relação que define o propagador como

$$\left[\eta^{\mu\nu}\Box - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\ \partial^\mu\partial^\nu\right] D_{\nu\lambda}(x) = \delta^\mu_\lambda\ \delta^4(x) \tag{3.34}$$

ou no espaço dos momenta,

$$\left[-k^2\eta^{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\ k^\mu k^\nu\right] D_{\nu\lambda}(k) = \delta^\mu_\lambda \tag{3.35}$$

onde agora o operador diferencial é inversível, e no espaço dos momenta o propagador é

$$D_{\mu\nu}(k) = -\frac{1}{k^2}\ \left[\eta^{\mu\nu} + (\xi - 1)\ \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right]\ . \tag{3.36}$$

Embora a constante ξ seja arbitrária, note que o propagador não é definido para $\xi \to \infty$, que é exatamente o caso de (3.14). Fazendo $\xi = 1$ obtemos a teoria de Maxwell no calibre de Fermi-Feynman.

3.3 Cargas Vetoriais

Adotando o calibre de Lorenz, e acoplando ao campo a corrente

$$J_\mu(x) = \left[\sum_{p=1}^{N} \sigma_p \ W_{\mu(p)} \ \delta^d(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{a}_p) \right] , \tag{3.37}$$

a lagrangiana passa a ser

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 - \left(\sum_{p=1}^{N} \sigma_p \ W_{\mu(p)} \ \delta^d(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{a}_p) \right) A^\mu , \tag{3.38}$$

onde o vetor constante W_μ, localiza-se sobre a distribuição de cargas, ou seja $\mathbf{W}_\perp = \mathbf{0}$.

Com o propagador do fóton,

$$D^{\mu\nu}(x-y) = -\int \frac{d^{D+d+1}k}{(2\pi)^{d+D+1}} \frac{1}{k^2} \left[\eta^{\mu\nu} - (1-\xi) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right] \exp[-ik(x-y)] , \tag{3.39}$$

a energia de interação entre as correntes J_μ torna-se,

$$\begin{aligned} E &= -\frac{1}{T} \ W \\ &= \frac{1}{2T} \int \int d^4x \ d^4y \ J_\mu(x) D^{\mu\nu}(x-y) J_\nu(y) \\ &= \frac{1}{2T} \int \int d^4x \ d^4y \ \left[\sum_{p=1}^{N} \sigma_p \ W_{\mu(p)} \ \delta^d(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{a}_p) \right] D^{\mu\nu}(x-y) \\ & \left[\sum_{q=1}^{N} \sigma_q \ W_{\nu(q)} \ \delta^d(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{a}_q) \right] \\ &= \sum_{p=1}^{N} \sum_{q=1}^{N} \ \sigma_p \sigma_q \frac{1}{2T} \mathcal{I}_{p,q} , \end{aligned} \tag{3.40}$$

onde definimos,

$$\mathcal{I}_{p,q} \equiv \frac{1}{2T} \int \int d^4x \ d^4y \ W_{\mu(p)} \ \delta^d(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{a}_p) D^{\mu\nu}(x-y) W_{\nu(q)} \ \delta^d(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{a}_q) . \tag{3.41}$$

Como no caso do campo escalar, aqui também devemos eliminar os termos de auto-interação, $p = q$, fazendo

$$E \to E = \sum_{p=1}^{N} \sum_{q=1}^{N} \sigma_p \sigma_q (1 - \delta_{pq}) \frac{1}{2T} \, \mathcal{I}_{p,q} \ . \tag{3.42}$$

Adotando o chamado calibre de Feynman em (3.39), ou seja $\xi = 1$, e procedendo de forma semelhante a empregada em (2.32), a integral $\mathcal{I}_{p,q}$ fica

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{p,q} &= -\int\int dx^0 \, dy^0 \int\int d^D\mathbf{x}_{\|} d^D\mathbf{y}_{\|} \int\int d^d\mathbf{x}_{\perp} d^d\mathbf{y}_{\perp} \; \delta^{(d)}(\mathbf{x}_{\perp} - \mathbf{a}_p) \; \delta^{(d)}(\mathbf{y}_{\perp} - \mathbf{a}_q) \\
& \int \frac{dk^0}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{k}_{\|}}{(2\pi)^D} \int \frac{d\mathbf{k}_{\perp}}{(2\pi)^d} \; W_{\mu(p)} W_{\nu(q)} \; \eta^{\mu\nu} \exp\left[-ik^0(x^0 - y^0)\right] \exp\left[i\mathbf{k}_{\|} \cdot (\mathbf{x}_{\|} - \mathbf{y}_{\|})\right] \\
& \exp\left[i\mathbf{k}_{\perp} \cdot (\mathbf{x}_{\perp} - \mathbf{y}_{\perp})\right] \frac{1}{(k^0)^2 - \mathbf{k}_{\|}^2 - \mathbf{k}_{\perp}^2} \\
&= -\int dx^0 \int d^D\mathbf{y}_{\|} \int \frac{dk^0}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{k}_{\|}}{(2\pi)^D} \int \frac{d\mathbf{k}_{\perp}}{(2\pi)^d} \; W_{\mu(p)} W^{\mu(q)} (2\pi)\delta(k^0)(2\pi)^D \delta^D(\mathbf{k}_{\|}) \\
& \exp\left[-ik^0 x^0\right] \; \exp\left[-i\mathbf{k}_{\|} \cdot \mathbf{y}_{\|}\right] \; \exp\left[i\mathbf{k}_{\perp} \cdot (\mathbf{a}_p - \mathbf{a}_q)\right] \; \frac{1}{(k^0)^2 - \mathbf{k}_{\|}^2 - \mathbf{k}_{\perp}^2} \\
&= TL^D W_{\mu(p)} W^{\mu(q)} \int \frac{d\mathbf{k}_{\perp}}{(2\pi)^d} \, \frac{1}{\mathbf{k}_{\perp}^2} \; \exp\left[i\mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{a}_{pq}\right] \ .
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Substituindo em (3.40), dividindo pelo volume da *brana* e com o auxílio de (A.16), encontramos a densidade de energia de interação entre as correntes J_μ,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{N} \sum_{q=1}^{N} \; \sigma_p \sigma_q W_{\mu(p)} W^{\mu(q)} (1 - \delta_{pq}) \int \frac{d^d\mathbf{k}_{\perp}}{(2\pi)^d} \, \frac{1}{\mathbf{k}_{\perp}^2} \; \exp\left[-i\mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{a}_{pq}\right] \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} 2^{(d/2)-3} \, \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \sum_{p=1}^{N} \sum_{q=1}^{N} (1 - \delta_{pq}) \sigma_p \sigma_q W_{\mu(p)} W^{\mu(q)} \; a_{pq}^{2-d} \ ,
\end{aligned} \tag{3.44}$$

válida para todo $d \neq 2$.

Quando $d = 2$, introduzimos no propagador do fóton um parâmetro de massa m que regulariza a integral em (3.44),

$$D^{\mu\nu}(x-y;m) = -\int \frac{d^{D+d+1}k}{(2\pi)^{d+D+1}} \frac{1}{k^2-m^2}\left[\eta^{\mu\nu}-(1-\xi)\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right]\exp[-ik(x-y)] \ , \tag{3.45}$$

e calculamos novamente a integral $\mathcal{I}_{p,q}$ no calibre de Feynman, para obtermos

$$\mathcal{I}_{p,q} = TL^D W_{\mu(p)}W^{\mu(q)} \int \frac{d\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^d} \frac{1}{\mathbf{k}_\perp^2+m^2} \exp\left[i\mathbf{k}_\perp\cdot\mathbf{a}_{pq}\right] \ . \tag{3.46}$$

Utilizando a fórmula (A.14), e a expansão (2.58), obtemos para a densidade de energia com $d=2$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N} \sigma_p\sigma_q W_{\mu(p)}W^{\mu(q)}(1-\delta_{pq})\int \frac{d^d\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^d}\frac{1}{\mathbf{k}_\perp^2+m^2}\exp\left[-i\mathbf{k}_\perp\cdot\mathbf{a}_{pq}\right] \\
&= \frac{1}{4\pi}\sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N}(1-\delta_{pq})\sigma_p\sigma_q W_{\mu(p)}W^{\mu(q)} \lim_{m\to 0} K_0(ma_{pq}) \\
&= -\frac{1}{4\pi}\sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N}(1-\delta_{pq})\sigma_p\sigma_q W_{\mu(p)}W^{\mu(q)} \lim_{m\to 0}\left[\ln\left(\frac{a_{pq}}{a_0}\right)+\ln\left(\frac{ma_0}{2}\right)+\gamma\right] \\
&= -\frac{1}{4\pi}\sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N}(1-\delta_{pq})\sigma_p\sigma_q W_{\mu(p)}W^{\mu(q)}\left[\ln\left(\frac{a_{pq}}{a_0}\right)\right] \ ,
\end{aligned} \tag{3.47}$$

onde descartamos, aqui também, os termos independentes da distância a_{pq}, por serem irrelevantes para a dinâmica do sistema.

As equações (3.44) e (3.47) conduzem naturalmente aos potenciais da eletrodinâmica clássica, quando os possíveis valores das dimensões d para as correntes são considerados de maneira adequada em um espaço de dimensão (3+1):

1. *Energia entre duas fontes pontuais*, ($d=3$, $D=0$ *e* $N=2$):

$$E = \frac{\sigma_1\sigma_2}{4\pi}\ \frac{1}{a} \ . \tag{3.48}$$

2. *Densidade de energia entre duas linhas paralelas*, ($d=2$, $D=1$ *e* $N=2$):

$$\mathcal{E} = -\frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi}\ \ln\left(\frac{a}{a_0}\right)\ . \tag{3.49}$$

3. *Densidade de energia entre dois planos paralelos*, ($d = 1$, $D = 2$ e $N = 2$):

$$\mathcal{E} = -\frac{\sigma_1\sigma_2}{2}\ a\ . \tag{3.50}$$

3.4 Dipolos Vetoriais

Em analogia ao caso escalar, correntes vetoriais que descrevem distribuições de dipolos são caracterizadas por um quadrivetor constante V^α, que define a magnitude e direção dos dipolos, no lugar de uma simples constante de acoplamento σ,

$$J_\mu(x) = \sum_{p=1}^{N} W^{\mu(p)}\ V^\alpha_{(p)}\ \partial_\alpha\left[\delta^d(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{a}_p)\right]\ . \tag{3.51}$$

Ainda no calibre de Lorenz, a lagrangiana com esta corrente torna-se

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 + \sum_{p=1}^{N}\ W^{\mu(p)}\ V^\alpha_{(p)}\ \partial_\alpha\left[\delta^d(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{a}_p)\right]\ . \tag{3.52}$$

Basta, portanto, eliminar os termos de auto-interação

$$E \to E = \sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N}(1-\delta_{pq})\frac{1}{2T}\mathcal{I}_{pq}\ , \tag{3.53}$$

e calcular a integral

$$\mathcal{I}_{pq} \ \equiv\ \int\int d^{D+d+1}x\ d^{D+d+1}y\ \delta^{(d)}(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{a}_p)\ \delta^{(d)}(\mathbf{y}_\perp - \mathbf{a}_q)$$

$$W^{\mu(p)}W^{\nu(q)}\ V^\alpha_{(p)}V^\beta_{(q)}\left(\partial_\alpha\partial_\beta\ D^{\mu\nu}(x-y)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int\int d^{D+d+1}x \; d^{D+d+1}y \; \delta^{(d)}(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{a}_p)\delta^{(d)}(\mathbf{y}_\perp - \mathbf{a}_q) \\
&\quad W^{\mu(p)}W^{\nu(q)} \; V^\alpha_{(p)}V^\beta_{(q)} \; (k_\alpha k_\beta)D^{\mu\nu}(x-y) \; . \qquad (3.54)
\end{aligned}
$$

Para isto, utilizamos o propagador do fóton (3.45) no calibre de Feynman, e o operador (2.58) como segue,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_{p,q} &= \int dy^0 \int d^D\mathbf{y}_\parallel \int \frac{dk^0}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{k}_\parallel}{(2\pi)^D} \int \frac{d\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^d} \; (2\pi)(\delta(k^0)) \; (2\pi)^D \delta^D(\mathbf{k}_\parallel) \\
&\quad \exp\left(ik^0y^0\right)\exp\left(-i\mathbf{k}_\parallel \cdot \mathbf{y}_\parallel\right) \left(-\frac{\exp\left[i\mathbf{k}_\perp \cdot (\mathbf{a}_p - \mathbf{a}_q)\right]}{(k^0)^2 - \mathbf{k}_\parallel^2 - \mathbf{k}_\perp^2}\right) W^{\mu(p)}W_{\mu(q)} \\
&\quad \left\{\left[(\mathbf{V}_{(\mathbf{p})\parallel}\cdot\mathbf{k}_\parallel) + (\mathbf{V}_{(\mathbf{p})\perp}\cdot\mathbf{k}_\perp) + V_{0(\mathbf{p})}k^0\right]\left[(\mathbf{V}_{(\mathbf{q})\parallel}\cdot\mathbf{k}_\parallel) + (\mathbf{V}_{(\mathbf{q})\perp}\cdot\mathbf{k}_\perp) + V_{0(\mathbf{q})}k^0\right]\right\} \\
&= TL^D \; W^{\mu(p)}W_{\mu(q)} \int \frac{d^d\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^d} \; \frac{1}{\mathbf{k}_\perp^2} \; (\mathbf{V}_{(\mathbf{p})\perp}\cdot\mathbf{k}_\perp)(\mathbf{V}_{(\mathbf{q})\perp}\cdot\mathbf{k}_\perp)\exp\left[i\mathbf{k}_\perp \cdot (\mathbf{a}_p - \mathbf{a}_q)\right] \\
&= -TL^D \; W^{\mu(p)}W_{\mu(q)} \; (\mathbf{V}_{(\mathbf{p})\perp}\cdot\nabla_{\mathbf{pq}\perp})(\mathbf{V}_{(\mathbf{q})\perp}\cdot\nabla_{\mathbf{pq}\perp}) \int \frac{d^d\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^d} \; \frac{\exp\left[i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{a}_{pq}\right]}{\mathbf{k}_\perp^2} \; . \qquad (3.55)
\end{aligned}
$$

Substituindo em (3.53), dividindo pelo volume da *brana* L^D, e utilizando (A.16), a densidade de energia torna-se,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E} &= -\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N}(1-\delta_{pq}) \; W^{\mu(p)}W_{\mu(q)} \; (\mathbf{V}_{(p)\perp}\cdot\nabla_{pq\perp})(\mathbf{V}_{(q)\perp}\cdot\nabla_{pq\perp}) \int \frac{d^d\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^d} \; \frac{\exp\left[i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{a}_{pq}\right]}{\mathbf{k}_\perp^2} \\
&= -\frac{2^{(d/2)-3}}{(2\pi)^{d/2}} \; \Gamma\left(\frac{d}{2}-1\right)\sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N}(1-\delta_{pq})W^{\mu(p)}W_{\mu(q)}\Big(\mathbf{V}_{(p)\perp}\cdot\nabla_{pq\perp}\Big)\Big(\mathbf{V}_{(q)\perp}\cdot\nabla_{pq\perp}\Big) \; a_{pq}^{2-d} \\
&= -\frac{2^{(d/2)-3}}{(2\pi)^{d/2}} \; \Gamma\left(\frac{d}{2}-1\right)\sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N}(1-\delta_{pq})(2-d) \; W^{\mu(p)}W_{\mu(q)} \; a_{pq}^{-d} \\
&\quad \left(\mathbf{V}_{(p)\perp}\cdot\mathbf{V}_{(q)\perp} - d \; \frac{\mathbf{V}_{(p)\perp}\cdot\mathbf{a}_{pq}}{a_{pq}} \; \frac{\mathbf{V}_{(p)\perp}\cdot\mathbf{a}_{pq}}{a_{pq}}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \frac{2^{(d/2)-2}}{(2\pi)^{d/2}}\, \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N}(1-\delta_{pq})\; W^{\mu(p)}W_{\mu(q)}\; a_{pq}^{-d} \\
& \left(\mathbf{V}_{(p)\perp}\cdot\mathbf{V}_{(q)\perp} - d\;\frac{\mathbf{V}_{(p)\perp}\cdot\mathbf{a}_{pq}}{a_{pq}}\;\frac{\mathbf{V}_{(p)\perp}\cdot\mathbf{a}_{pq}}{a_{pq}}\right)\,, \qquad (3.56)
\end{aligned}
$$

expressão esta válida para todo d, muito embora o resultado para a integral em (A.16) tenha sido deduzido com a restrição $d \neq 2$.

É possível verificar a validade de (3.56), também para $d = 2$, adotando-se o mesmo procedimento que leva à (3.47), neste caso

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E} \quad &= \quad \frac{1}{4\pi}\sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N}(1-\delta_{pq})\; W^{\mu(p)}W_{\mu(q)}\; (\mathbf{V}_{(p)\perp}\cdot\nabla_{pq\perp})(\mathbf{V}_{(q)\perp}\cdot\nabla_{pq\perp})\left[ln\left(\frac{a_{pq}}{a_0}\right)\right] \\
&= \quad \frac{1}{4\pi}\;\sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N}(1-\delta_{pq})\; W^{\mu(p)}W_{\mu(q)}\;\frac{1}{a_{pq}^2} \\
& \qquad \left(\mathbf{V}_{(p)\perp}\cdot\mathbf{V}_{(q)\perp} - 2\;\frac{\mathbf{V}_{(p)\perp}\cdot\mathbf{a}_{pq}}{a_{pq}}\;\frac{\mathbf{V}_{(p)\perp}\cdot\mathbf{a}_{pq}}{a_{pq}}\right)\;,\;\; d = 2\;. \qquad (3.57)
\end{aligned}
$$

O que confirma a generalidade de (3.56) como a expressão que descreve a interação entre dipolos elétricos, estáticos e uniformes, distribuidos ao longo de *branas* paralelas D-dimensionais. O resultado clássico pode ser obtido fazendo, $D = 0$, $d = 3$, $N = 2$ e $W^{\mu(p)} = W^{\mu(q)} = \eta^{\mu 0}$, implicando em

$$
\mathcal{E} = \frac{1}{4\pi a^3}\left[\left(\mathbf{V}_{(1)}\cdot\mathbf{V}_{(2)}\right) - 3\left(\mathbf{V}_{(1)}\cdot\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{12}}\right)\left(\mathbf{V}_{(2)}\cdot\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{12}}\right)\right]\;. \qquad (3.58)
$$

A generalização para o caso de quadrupolos pode ser encontrada em [16].

Capítulo 4

Interações Entre Correntes Tensoriais

O campo tensorial anti-simétrico, descrito por uma lagrangeana que apresenta invariância por transformações de calibre, também pode ser considerado uma generalização natural do campo escalar. Ambos apresentam um único grau de liberdade. Neste capítulo observaremos diversas peculiaridades originais [6] deste campo.

Na primeira seção é apresentada a sutil quantização do campo de Kalb-Ramond [23], através do método de Faddeev-Popov. Outras formas podem ser encontradas na literatura [21]. Na segunda seção estudamos a interação entre cargas tensoriais, e na terceira entre dipolos. A quarta seção expõe um novo tipo de corrente singular para este campo, e calcula a energia de interação entre estas fontes. A última seção investiga o interessante modelo de Cremer-Sherk-Kalb-Ramond com fontes deste novo tipo.

4.1 A Quantização do Campo de Kalb-Ramond

Vamos aqui analisar a quantização da teoria de calibre do campo tensorial anti-simétrico $H_{\mu\nu}$ descrita por,

$$\mathcal{L} \;=\; \frac{1}{12}\, G_{\alpha\beta\gamma} G^{\alpha\beta\gamma} \;, \tag{4.1}$$

onde o tensor, totalmente anti-simétrico, de intensidade de campo

$$G_{\alpha\beta\gamma} = \partial_\alpha H_{\beta\gamma} + \partial_\beta H_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma H_{\alpha\beta} \ , \tag{4.2}$$

pode ser representado pela contração da derivada de um campo escalar, $\phi(x)$, com o tensor de Levi-Civita,

$$G_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ \epsilon_{\alpha\beta\gamma}{}^{\sigma} \ \partial_\sigma \phi \ . \tag{4.3}$$

Portanto, a teoria apresenta um único grau de liberdade.

De (4.2) conclui-se que a lagrangiana apresenta invariância por transformações de calibre na forma

$$H^{\alpha\beta} \to H^{\alpha\beta} + \partial^\alpha \xi^\beta - \partial^\beta \xi^\alpha \ , \tag{4.4}$$

onde ξ^α é um quadrivetor qualquer que também é invariante por transformações de calibre, o que introduz *ghosts* de ordem superior no processo de quantização através do método de Faddeev-Popov [21].

Como no caso do campo eletromagnético, podemos assumir uma condição de calibre covariante

$$F^\rho[H_{\alpha\beta}(x)] = \partial_\alpha H^{\alpha\rho}(x) - f^\rho(x) \ , \tag{4.5}$$

que acrescenta à lagrangiana um termo de fixação na forma,

$$\mathcal{L}_{FC} = -\frac{1}{\alpha_G} \ (\partial_\beta H^{\beta\gamma})^2 \ , \tag{4.6}$$

onde α_G é o parâmetro de calibre.

Impondo a transformação (4.4) na condição (4.5) encontramos

$$\begin{aligned} F^\rho[H^{(\xi)}_{\alpha\beta}(x)] &= \partial_\alpha H^{(\xi)\alpha\rho}(x) - f^\rho(x) \\ &= \partial_\alpha (H^{\alpha\rho}(x) + \partial^\alpha \xi^\rho(x) - \partial^\rho \xi^\alpha(x)) - f^\rho(x), \end{aligned} \tag{4.7}$$

o que implica em,

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\delta F^{\rho}[H^{(\xi)}_{\alpha\beta}]}{\delta\xi^{\gamma}}\right|_{\xi=0} &= \partial_{\alpha}(\delta^{\rho}_{\gamma}\ \partial^{\alpha} - \delta^{\alpha}_{\gamma}\ \partial^{\rho})\ \delta^{4}(x-y) \\
&= (\delta^{\rho}_{\gamma}\ \Box - \partial_{\gamma}\partial^{\rho})\ \delta^{4}(x-y)\ . \qquad (4.8)
\end{aligned}
$$

Reescrevendo a ação em termos de *ghosts*

$$
\begin{aligned}
S_{ghost} = \int d^{4}x\ \mathcal{L}_{ghost} &= -\int d^{4}x\ d^{4}y\ \bar{c}_{\rho}(x)\ \left(\frac{\delta F^{\rho}[H^{(\xi)}_{\alpha\beta}]}{\delta\xi^{\gamma}}\right)_{\xi=0} c^{\gamma}(y) \\
&= -\int d^{4}x\ d^{4}y\ \bar{c}_{\rho}(x)(\delta^{\rho}_{\gamma}\ \Box - \partial_{\gamma}\partial^{\rho})\ \delta^{4}(x-y)c(y)^{\gamma} \\
&= \frac{1}{2}\int d^{4}x\ (\partial_{\alpha}\bar{c}_{\rho}(x) - \partial_{\rho}\bar{c}_{\alpha}(x))(\partial^{\alpha}c^{\rho}(x) - \partial^{\rho}c^{\alpha}(x))\ . \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

a lagrangiana efetiva da teoria assume a forma,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{efetiva} &= \mathcal{L} + \mathcal{L}_{FC} + \mathcal{L}_{ghost} \\
&= \frac{1}{12}\ G_{\alpha\beta\gamma}G^{\alpha\beta\gamma} - \frac{1}{\alpha_{G}}\ (\partial_{\beta}H^{\beta\gamma})^{2} \\
&\quad + \frac{1}{2}\ (\bar{c}_{\rho}(x) - \partial_{\rho}\bar{c}_{\alpha}(x))(\partial^{\alpha}c^{\rho}(x) - \partial^{\rho}c^{\alpha}(x))\ . \qquad (4.10)
\end{aligned}
$$

Esta lagrangiana de *ghosts* também apresenta invariância por transformações de calibre, o que dá origem a *ghosts* de *ghosts*, ou *ghosts* de segunda ordem, do tipo *ghosts* de Nielsen, que novamente apresentam invariância de calibre. Podemos continuar este processo para verificar que a teoria exige campos de *ghosts* até a quarta ordem. Porém, como nenhum deles acopla-se ao campo $H_{\mu\nu}$, a lagrangiana de interesse para o modelo a ser estudado fica,

$$
\mathcal{L} = \frac{1}{12}\ G_{\alpha\beta\gamma}G^{\alpha\beta\gamma} - \frac{1}{\alpha_{G}}\ (\partial_{\beta}H^{\beta\gamma})^{2}\ . \qquad (4.11)
$$

4.2 Cargas Tensoriais

Acrescentando à lagrangiana (4.11) um termo de corrente externa com quadri-divergência nula, $\partial_\mu J^{\mu\nu} = 0$, podemos reescrevê-la na forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{12}\, G_{\alpha\beta\gamma}G^{\alpha\beta\gamma} - \frac{1}{\alpha_G}\,(\partial_\beta H^{\beta\gamma})^2 + J_{\mu\nu}H^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}\,[H^{\alpha\beta}(-\frac{1}{2})(\eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu} - \eta_{\alpha\nu}\eta_{\beta\mu})\partial_\gamma\partial^\gamma H^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\,\left(1 + \frac{1}{\alpha_G}\right) \\
&\quad H^{\alpha\beta}(\eta_{\alpha\mu}\partial_\beta\partial_\nu + \eta_{\beta\nu}\partial_\alpha\partial_\mu - \eta_{\alpha\nu}\partial_\beta\partial_\mu - \eta_{\beta\mu}\partial_\alpha\partial_\nu)H^{\mu\nu}] + J_{\mu\nu}H^{\mu\nu}\ . \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

A priori não há restrição alguma sobre a simetria do tensor $J_{\mu\nu}$, que poderá sempre ser decomposto em uma soma com um termo simétrico e um anti-simétrico. Contudo $J_{\mu\nu}$ será necessariamente sempre contraído com o campo anti-simétrico $H_{\mu\nu}$, e como a contração de um tensor simétrico com um anti-simétrico é nula, fica fácil observar que a única parte da corrente relevante para o sistema é a parte anti-simétrica de $J_{\mu\nu}$. Portanto é possível tomar de agora em diante a fonte externa de campo como um tensor sempre anti-simétrico, por simplicidade e sem perda de generalidade.

Com isto, e adotando-se o calibre $\alpha_G = -1$, obtemos o propagador para o campo $H_{\mu\nu}$ como

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta,\mu\nu}(x,y) = \int \frac{d^{D+d+1}k}{(2\pi)^{D+d+1}}\frac{1}{k^2}(\eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu} - \eta_{\alpha\nu}\eta_{\beta\mu})\exp[-ik(x-y)]\ , \qquad (4.13)$$

donde conclui-se que o funcional gerador para o campo de Kalb-Ramond neste calibre é,

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_{KR} &= \int \mathcal{D}H \exp\left[i\int d^{D+d+1}x\ \left(\mathcal{L} - \frac{1}{2\alpha_G}(\partial_\mu H^{\mu\nu})(\partial_\alpha H^{\alpha\beta}) + \frac{1}{2}J_{\mu\nu}H^{\mu\nu}\right)\right] \\
&= \exp\left[-\frac{i}{2}\int\ d^{D+d+1}x\ d^{D+d+1}y\ \frac{1}{2}J_{\alpha\beta}(x)\mathcal{G}^{\alpha\beta,\mu\nu}(x,y)\frac{1}{2}J_{\mu\nu}(y)\right]\ . \qquad (4.14)
\end{aligned}$$

Da mesma maneira que nos casos anteriormente estudados, estamos considerando somente correntes que não exibem dependência temporal explícita, ou seja $J_{\mu\nu}(\mathbf{x})$. Podemos então comparar a equação (4.14) com

$$\mathcal{Z}_{KR} = \lim_{T\to\infty} \exp(-iET) \ , \tag{4.15}$$

para obtermos a energia total do sistema como,

$$E = \frac{1}{2T}\int \ d^{D+d+1}x \ d^{D+d+1}y \ \frac{1}{2}J_{\alpha\beta}(\mathbf{x})\mathcal{G}^{\alpha\beta,\mu\nu}(x,y)\frac{1}{2}J_{\mu\nu}(\mathbf{y}) \ . \tag{4.16}$$

É um fato bem conhecido que o campo com o qual estamos lidando, descrito por uma 2-forma, não pode acoplar-se a um objeto pontual. Sobre este fato, vamos expor aqui um argumento adequado aos nossos propósitos.

Considerando a mais simples corrente externa, capaz de descrever a interação entre duas distribuições de cargas D-dimensionais, em um espaço-tempo com dimensão espacial arbitrária, temos

$$J^{\mu\nu}(\mathbf{x}_\perp) = V^{\mu\nu}\delta^d(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{a}_1) + W^{\mu\nu}\delta^d(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{a}_2) \ . \tag{4.17}$$

Devido às propriedades da corrente, os tensores $V^{\mu\nu}$ e $W^{\mu\nu}$ são antissimétricos, constantes e uniformes. A única maneira de assegurar a nulidade da quadridivergência,

$$\partial_\mu J^{\mu\nu}(\mathbf{x}_\perp) = V^{\mu\nu}\partial_\mu\delta^d(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{a}_1) + W^{\mu\nu}\partial_\mu\delta^d(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{a}_2) = 0 \ , \tag{4.18}$$

é tomar $V^{\mu\nu} = W^{\mu\nu} = 0$ para $\mu = 1, ..., d$ (ou $\nu = 1, ..., d$). O que ocorre porque, embora a relação (4.18) deva ser satisfeita em todo ponto do espaço paralelo à *brana*, as derivadas das deltas são dependentes da posição. Quando $D = 0$ as branas tornam-se pontos e o espaço d-dimensional, neste caso $V^{\mu\nu} = W^{\mu\nu} = 0$ para $\mu, \nu \neq 0$. E sendo $V^{\mu\nu}$ e $W^{\mu\nu}$ antissimétricos, todas as suas componentes serão nulas. Ou seja, não há corrente para $D = 0$.

O cálculo da densidade de energia de interação para a corrente (4.17) assemelha-se ao caso eletromagnético. Substituindo (4.13) e (4.17) em (4.16), e desprezando os termos de auto-interação do tipo $V^{\mu\nu}V_{\mu\nu}$ e $W^{\mu\nu}W_{\mu\nu}$, obtemos

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2T}\int d^{D+d+1}x\; d^{D+d+1}y \int \frac{d^{D+d+1}k}{(2\pi)^{D+d+1}}\frac{1}{k^2}\;(\eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu}-\eta_{\alpha\nu}\eta_{\beta\mu})\exp[-ik(x-y)] \\
&\quad V^{\alpha\beta}W^{\mu\nu}\;\delta^d(\mathbf{x}_\perp-\mathbf{a}_1)\;\delta^d(\mathbf{y}_\perp-\mathbf{a}_2) \\
&= \frac{1}{2T}\int\int dx^0\;dy^0\int\int d^D\mathbf{x}_\parallel d^D\mathbf{y}_\parallel\int\int d^d\mathbf{x}_\perp d^d\mathbf{y}_\perp\;\delta^{(d)}(\mathbf{x}_\perp-\mathbf{a}_1)\;\delta^{(d)}(\mathbf{y}_\perp-\mathbf{a}_2) \\
&\quad \int\frac{dk^0}{2\pi}\int\frac{d\mathbf{k}_\parallel}{(2\pi)^D}\int\frac{d\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^d}\;\exp\left[-ik^0(x^0-y^0)\right]\;\exp\left[i\mathbf{k}_\parallel\cdot(\mathbf{x}_\parallel-\mathbf{y}_\parallel)\right] \\
&\quad \exp\left[i\mathbf{k}_\perp\cdot(\mathbf{x}_\perp-\mathbf{y}_\perp)\right]\;\frac{V^{\alpha\beta}W_{\alpha\beta}-V^{\alpha\beta}W_{\beta\alpha}}{(k^0)^2-\mathbf{k}_\parallel^2-\mathbf{k}_\perp^2} \\
&= -L^DV^{\alpha\beta}W_{\alpha\beta}\int\frac{d\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^d}\;\frac{1}{\mathbf{k}_\perp^2}\;\exp\left[i\mathbf{k}_\perp\cdot\mathbf{a}_{12}\right]\;, \qquad (4.19)
\end{aligned}
$$

onde $\mathbf{a}_{12}\equiv\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2$. Utilizando (A.16) e dividindo pelo volume da *brana*, L^D, encontramos a desnsidade de energia de interação para a corrente (4.17) como,

$$
\mathcal{E} \;=\; -\frac{V^{\mu\nu}W_{\mu\nu}}{2}\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}2^{(d/2)-2}\Gamma\Big((d/2)-1\Big)a^{2-d}\;, \qquad (4.20)
$$

quando $d\neq 2$.

Para $d=2$ procedemos de maneira inteiramente análoga ao caso eletromagnético (3.47), introduzindo um parâmetro de massa m que regulariza a última integral em (4.19), uma constante positiva a_0, com dimensão de comprimento, e descartando o termo divergente que não contribui para a força entre as *branas*. Obtemos assim a seguinte expressão para a densidade de energia de interação,

$$
\mathcal{E} \;=\; V^{\mu\nu}W_{\mu\nu}\frac{1}{4\pi}\ln\frac{a}{a_0}\;, \qquad (4.21)
$$

quando $d=2$.

4.3 Dipolos Tensoriais

Nos capítulos anteriores foram encontradas as energias de interação entre correntes caracterizadas por constantes de acoplamento e por vetores. Este último tipo mostrou-se capaz de descrever a interação entre dipolos. Inspirados por estes resultados, podemos tomar a corrente

$$J^{\mu\nu}(\mathbf{x}_\perp) = V^{\mu\nu} v^\rho \partial_\rho \delta^d(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{a}_1) + W^{\mu\nu} w^\gamma \partial_\gamma \delta^d(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{a}_2) \ , \tag{4.22}$$

como fonte do campo tensorial anti-simétrico, descrito por (4.12). Temos que, v^ρ e w^γ são quadrivetores quaisquer que definem a magnitude e direção dos dipolos, e $D \geq 1$ para assegurar a quadridivergência nula da corrente, como em (4.18). De maneira que fontes de dipolos, descritas por (4.22), não podem ser pontuais. Neste caso, o cálculo da energia de interação nos leva a concluir que,

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} 2^{(d/2)-1} \Gamma(d/2) \frac{1}{a^d} \Big[(\mathbf{V}_\perp \cdot \mathbf{W}_\perp) - d(\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{a}})(\mathbf{W} \cdot \hat{\mathbf{a}}) \Big] \ . \tag{4.23}$$

Que tem a forma da interação eletromagnética entre dipolos, a menos de um sinal global que atribui um caráter oposto à interação.

4.4 Fontes Singulares para Dipolos Tensoriais

A simetria do campo de 2-forma nos permite considerar um novo tipo de fonte peculiar a este,

$$J^{\mu\nu}(\mathbf{x}_\perp) = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} V_\beta \partial_\alpha \delta^d(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{a}) \ , \tag{4.24}$$

onde o tensor de Levi-Civita está definido como $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = 1$. Sendo $J^{\mu\nu}$ um tensor anti-simétrico que se contrai com o campo $H_{\mu\nu}$, também anti-simétrico, para formar um escalar de Lorentz, V_β tem de ser um pseudovetor, porque ϵ é um pseudotensor.

A corrente (4.24) está concentrada ao longo de uma *brana* D-dimensional, localizada em $\mathbf{a}$. Em contraste com a corrente (4.17), não há necessidade de restringir a dimensão D da *brana* para assegurar uma quadri-divergência nula. A única imposição é ditada pelo tensor de Levi-Civita, que nos restringe a um espaço-tempo de (3+1) dimensões. Logo, d pode assumir somente os valores 3, 2 ou 1. Valores estes com os quais as *branas* tornam-se pontos, linhas ou planos respectivamente.

Para entender melhor a corrente (4.24) note que suas componentes $0i$, onde $i = 1, 2, 3$, formam um vetor polar com quadridivergência nula

$$J^{0i}(\mathbf{x}_\perp) \;=\; \epsilon^{0i\alpha\beta}V_\beta\partial_\alpha\delta^d(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{a}) = \Big[\mathbf{V}\times\Big(\nabla\delta^d(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{a})\Big)\Big]^i\,. \tag{4.25}$$

E com a parte espacial,

$$J^{ij}(\mathbf{x}_\perp) = V^0\epsilon^{ijk}\Big(\partial_k\delta^d(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{a})\Big)\,, \tag{4.26}$$

é possível construir o seguinte vetor axial:

$$\epsilon^{ijk}J^{ij}(\mathbf{x}_\perp) = 2V^0\Big(\nabla\delta^d(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{a})\Big)^k\,. \tag{4.27}$$

Tomando a corrente externa como composição de duas fontes localizadas em diferentes *branas* paralelas,

$$J^{\mu\nu}(\mathbf{x}_\perp) = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha\Big[V_\beta\delta^d(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{a}_1) + W_\beta\delta^d(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{a}_2)\Big]\,, \tag{4.28}$$

a energia de interação pode ser obtida substituindo (4.28) em (4.16), efetuando duas integrações por partes e descartando os termos de auto-interação, donde encontramos

$$E = -\frac{1}{2T}\int d^{d+D+1}x\int d^{d+D+1}y\int\frac{d^{d+D+1}k}{(2\pi)^{d+D+1}}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon^{\lambda\rho\sigma\tau}\Big(\partial_{\alpha(x)}\partial_{\sigma(x)}\mathcal{G}_{\mu\nu,\lambda\rho}(x,y)\Big)$$
$$\Big[\frac{1}{4}V_\beta W_\tau\delta^d(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{a}_1)\delta^d(\mathbf{y}_\perp - \mathbf{a}_2) + \frac{1}{4}V_\tau W_\beta\delta^d(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{a}_2)\delta^d(\mathbf{y}_\perp - \mathbf{a}_1)\Big]\,. \tag{4.29}$$

Utilizando a representação de Fourier (4.13) para a função de Green, $\mathcal{G}_{\mu\nu,\lambda\rho}(x,y)$, na equação acima, conclui-se que

$$E = -\frac{1}{4} L^D \int \frac{d^d\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^d}\, \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon^{\lambda\rho\sigma\tau}(V_\beta W_\tau + V_\tau W_\beta)(\eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\rho} - \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\lambda})\frac{k_\alpha k_\sigma}{\mathbf{k}_\perp} \exp(i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{a}_{12}) \ . \quad (4.30)$$

Onde os índices α e σ estão restritos ao intervalo $0 < \alpha, \sigma \leq d$, porque só resta a integração na componente perpendicular do vetor $\mathbf{k}$.

Com o auxílio da identidade

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon_{\mu\nu}{}^{\sigma\tau} = -2(\eta^{\alpha\sigma}\eta^{\beta\tau} - \eta^{\alpha\tau}\eta^{\beta\sigma}) \ , \quad (4.31)$$

a equação (4.30) nos leva à densidade de energia

$$\mathcal{E} = \frac{E}{L^D} = -\int \frac{d^d\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^d}[(V^\tau W_\tau)\mathbf{k}_\perp^2 + (\mathbf{V}\cdot\mathbf{k}_\perp)(\mathbf{W}\cdot\mathbf{k}_\perp)]\frac{1}{\mathbf{k}_\perp^2} \exp(i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{a}_{12}) \ , \quad (4.32)$$

que pode ser reescrita, com o operador $\nabla_a = (\partial/\partial a_{12}^1, ..., \partial/\partial a_{12}^d)$, como

$$\mathcal{E} = [(V^\tau W_\tau)\nabla_a^2 + (\mathbf{V}\cdot\nabla_a)(\mathbf{W}\cdot\nabla_a)] \int \frac{d^d\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^d}\frac{1}{\mathbf{k}_\perp^2} \exp(i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{a}_{12}) \ . \quad (4.33)$$

De maneira usual, devemos calcular a integral acima separadamente para os casos em que $d = 2$ com (A.14) e $d \neq 2$ com (A.16), encontrados no Apêndice A. Ambos os resultados levam à mesma energia quando substituidos na equação anterior,

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} 2^{(d/2)-1}\Gamma(d/2)\frac{1}{a^d}\Big[(\mathbf{V}_\perp \cdot \mathbf{W}_\perp) - d(\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{a}})(\mathbf{W}\cdot\hat{\mathbf{a}})\Big] \ , \quad (4.34)$$

que difere de (4.23) somente no fato de serem V e W pseudovetores.

Conclui-se de (4.23) e (4.34) que as correntes (4.22) e (4.24) dão origem ao mesmo tipo de interação. Analisando o caso de duas *branas* pontuais em um espaço de $(3 + 1)$ dimensões temos que, $D = 0$, $d = 3$, $\mathcal{E} = E$, $\mathbf{V}_\perp = \mathbf{V}$ e $\mathbf{W}_\perp = \mathbf{W}$. Com isso, as energias (4.22) e (4.24) assumem a forma,

$$E(d=3) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{a^3}\Big[(\mathbf{V}\cdot\mathbf{W}) - 3(\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{a}})(\mathbf{W}\cdot\hat{\mathbf{a}})\Big]\ . \tag{4.35}$$

Que é igual a interação entre dois dipolos, intermediada pelo campo escalar (2.63).

4.5 Aplicações ao Modelo de Cremer-Sherk-Kalb-Ramond

O chamado modelo de Cremer-Sherk-Kalb-Ramond pode ser entendido como uma generalização do modelo de Chern-Simons em (3 + 1) dimensões. Ele descreve o campo eletromagnético acoplado ao campo descrito por uma 2-forma através da densidade de lagrangiana,

$$\mathcal{L}_{CSKR} = \frac{1}{12}G^{\alpha\beta\gamma}G_{\alpha\beta\gamma} - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{\mu}{4}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}H_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}J^{\mu\nu}H_{\mu\nu} + J^{\mu}A_{\nu}\ . \tag{4.36}$$

Onde A_μ é o campo dos fótons, $H_{\mu\nu}$ o campo de Kalb-Ramond, e suas respectivas intensidades de campo são $F_{\mu\nu}$ e $G_{\alpha\beta\gamma}$. Note que a lagrangiana acima apresenta invariância por transformações de calibre tanto para o campo eletromagnético (3.9), como para o campo de Kalb-Ramond (4.4). As correntes externas $J^{\mu\nu}$ e J^μ devem ter quadridivergência nula, como ditado por suas respectivas simetrias de calibre.

Utilizando o método de Faddeev-Popov para a quantização de campos de calibre, e desprezando os *ghosts* que não acoplam-se aos campos, encontramos o funcional gerador na forma

$$\mathcal{Z}_{CSKR} = \int \mathcal{D}H\mathcal{D}A \exp\Bigg[i\int d^4x\ \frac{1}{12}G^{\alpha\beta\gamma}G_{\alpha\beta\gamma} - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{\mu}{4}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}H_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}$$
$$-\frac{1}{2\alpha_G}(\partial_\mu H^{\mu\nu})(\partial_\alpha H^{\alpha}{}_{\nu}) - \frac{1}{2\beta_G}(\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu A^\nu) + \frac{1}{2}J^{\mu\nu}H_{\mu\nu} + J^\mu A_\mu\Bigg]\ . \tag{4.37}$$

Fixando os parâmetros de calibre com $\alpha_G = -1$ e $\beta_G = 1$, e integrando por partes, o funcional

(4.37) fica sendo,

$$\mathcal{Z}_{CSKR} = \int \mathcal{D}H\mathcal{D}A \exp\Bigg[i \int d^4x H^{\alpha\beta}\left(-\frac{1}{8}(\eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu} - \eta_{\alpha\nu}\eta_{\beta\mu})\partial_\tau\partial^\tau \right) H^{\mu\nu} + \frac{1}{2}J^{\mu\nu}H_{\mu\nu}$$
$$+\frac{1}{2}A^\gamma(\eta_{\gamma\lambda}\partial_\tau\partial^\tau)A^\lambda + J^\mu A_\mu - \frac{\mu}{4}H^{\alpha\beta}\epsilon_{\alpha\beta\tau\lambda}\partial^\tau A^\lambda - \frac{\mu}{4}A^\gamma\epsilon_{\gamma\tau\mu\nu}\partial^\tau H^{\mu\nu}\Bigg] . \quad (4.38)$$

Definindo uma estrutura matricial para campos $\mathcal{X}^{\mu\nu,\lambda}$ e correntes $J^{\mu\nu,\lambda}$, de maneira que

$$\mathcal{X}^{\mu\nu,\lambda} = \begin{pmatrix} H^{\mu\nu} \\ A^\lambda \end{pmatrix}, \quad J^{\mu\nu,\lambda} = \begin{pmatrix} \frac{J^{\mu\nu}}{2} \\ J^\lambda \end{pmatrix} , \quad (4.39)$$

e um operador diferencial na forma

$$K_{\alpha\beta,\gamma;\mu\nu,\lambda}(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}(\eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu} - \eta_{\alpha\nu}\eta_{\beta\mu})\partial_\tau\partial^\tau & -\frac{\mu}{2}\epsilon_{\alpha\beta\tau\lambda}\partial^\tau \\ -\frac{\mu}{2}\epsilon_{\gamma\tau\mu\nu}\partial^\tau & \eta_{\gamma\lambda}\partial_\tau\partial^\tau \end{pmatrix} , \quad (4.40)$$

o funcional gerador (4.38) pode ser escrito como

$$\mathcal{Z}_{CSKR} = \int \mathcal{D}\mathcal{X} \exp\left[\frac{i}{2}\int d^4x \ \mathcal{X}^{\dagger \ \alpha\beta,\gamma} K_{\alpha\beta,\gamma;\mu\nu,\lambda}(x)\mathcal{X}^{\mu\nu,\lambda} + J^{\mu\nu,\lambda}\mathcal{X}_{\mu\nu,\lambda} \right] . \quad (4.41)$$

O termo quadrático nos campos $\mathcal{X}^{\mu\nu,\lambda}$ nos permitem calcular a integral gaussiana em (4.41) da maneira usual, com a qual obtemos

$$\mathcal{Z}_{CSKR} = \exp\left[-\frac{i}{2}\int d^4x d^4y J^{\dagger \ \alpha\beta,\gamma}(x) K^{-1}_{\alpha\beta,\gamma;\mu\nu,\lambda}(x,y) J^{\mu\nu,\lambda}(y) \right] , \quad (4.42)$$

onde $K^{-1}_{\alpha\beta,\gamma;\mu\nu,\lambda}(x,y)$ é o inverso do operador (4.40), definido por

$$K_{\alpha\beta,\gamma;\mu\nu,\lambda}(x)K^{-1 \ \mu\nu,\lambda}{}_{\sigma\rho,\theta}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\eta_{\alpha\sigma}\eta_{\beta\rho} - \eta_{\alpha\rho}\eta_{\beta\sigma}) & 0 \\ 0 & \eta_{\gamma\theta} \end{pmatrix} \delta^4(x-y) . \quad (4.43)$$

Reescrevendo a função de Green no espaço dos momenta, o propagador torna-se

$$K^{-1\ \mu\nu,\lambda}{}_{\sigma\rho,\theta}(x,y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{A}}^{\mu\nu}{}_{\sigma\rho}(k) & \tilde{\mathcal{B}}^{\mu\nu}{}_{\theta}(k) \\ \\ \tilde{\mathcal{C}}^{\lambda}{}_{\sigma\rho}(k) & \tilde{\mathcal{D}}^{\lambda}{}_{\theta}(k) \end{pmatrix} \exp[-i(x-y)] \ , \tag{4.44}$$

onde os elementos de matriz são,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{A}}^{\mu\nu}{}_{\sigma\rho}(p) &= \frac{2}{p^2-\mu^2}\left[\eta^{\mu}{}_{[\sigma}\eta^{\nu}{}_{\rho]} - \frac{2\mu^2}{p^2}\eta^{[\mu}{}_{[\sigma}\frac{p^{\nu]}p_{\rho]}}{p^2}\right] , \\ \tilde{\mathcal{B}}^{\mu\nu}{}_{\theta}(p) &= i\mu\frac{1}{p^2}\frac{1}{p^2-\mu^2}\epsilon^{\mu\nu}{}_{\tau\theta}p^{\tau} \ , \\ \tilde{\mathcal{C}}^{\lambda}{}_{\sigma\rho}(p) &= i\mu\frac{1}{p^2}\frac{1}{p^2-\mu^2}\epsilon^{\lambda\tau}{}_{\sigma\rho}p^{\tau} \ , \\ \tilde{\mathcal{D}}^{\lambda}{}_{\theta}(p) &= -\frac{1}{p^2-\mu^2}\left[\eta^{\lambda;}{}_{\theta} - \frac{\mu^2}{p^2}\frac{p^{\lambda}p_{\theta}}{p^2}\right] . \end{aligned} \tag{4.45}$$

Utilizando o funcional gerador na forma,

$$\mathcal{Z}_{CSKR} = \lim_{T\to\infty} \exp(-iET) \tag{4.46}$$

e a equação (4.42), podemos escrever a energia como

$$E = \frac{1}{2T}\int d^4x d^4y J^{\dagger\ \alpha\beta,\gamma}(\mathbf{x}) K^{-1}_{\alpha\beta,\gamma;\mu\nu,\lambda}(x,y) J^{\mu\nu,\lambda}(\mathbf{y}) \ . \tag{4.47}$$

Esta é a soma de quatro termos, $E = E1 + E2 + E3 + E4$, tal que

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{2}\int d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{y}\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{J^{\alpha\beta}(\mathbf{x})}{2}\tilde{\mathcal{A}}_{\alpha\beta;\mu\nu}(p)\frac{J^{\mu\nu}(\mathbf{y})}{2}\exp[i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})] \ , \\ E_2 &= \frac{1}{2}\int d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{y}\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{J^{\alpha\beta}(\mathbf{x})}{2}\tilde{\mathcal{B}}_{\alpha\beta;\lambda}(p)J^{\lambda}(\mathbf{y})\exp[i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})] \ , \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E_3 &= \frac{1}{2}\int d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{y}\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}J^{\gamma}(\mathbf{x})\tilde{\mathcal{C}}_{\gamma;\mu\nu}(p)\frac{J^{\mu\nu}(\mathbf{y})}{2}\exp[i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})]\ , \\
E_4 &= \frac{1}{2}\int d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{y}\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}J^{\gamma}(\mathbf{x})\tilde{\mathcal{D}}_{\gamma;\lambda}(p)J^{\lambda}(\mathbf{y})\exp[i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})].
\end{aligned} \tag{4.48}
$$

Vamos considerar no modelo (4.36) especificamente uma corrente tensorial composta por duas fontes localizadas em $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$, capaz de descrever a interação tipo dipolo intermediada pelo campo de Kalb-Ramond, como em (4.28)

$$
J^{\mu\nu}(\mathbf{x}) = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_{\alpha}\Big[V_{\beta}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{a}_1)+W_{\beta}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{a}_2)\Big]\ , \tag{4.49}
$$

e uma corrente vetorial que descreve a interação entre duas carga elétricas, como em (3.37), localizadas também em $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$,

$$
J^{\mu}(\mathbf{x}_{\perp}) = v^{\mu}\delta^{d}(\mathbf{x}_{\perp}-\mathbf{a}_1)+w^{\mu}\delta^{d}(\mathbf{x}_{\perp}-\mathbf{a}_2)\ . \tag{4.50}
$$

Desta forma, a corrente externa total concentra-se em apenas dois pontos.

Utilizando a expressão(A.14),obtemos

$$
\int \frac{d^d\mathbf{p}}{(2\pi)^d}\frac{1}{p^2+\mu^2}\exp(i\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\mu^{d-2}(\mu a)^{1-(d/2)}K_{(d/2)-1}(\mu a) \tag{4.51}
$$

e procedendo de maneira similar à que nos levou à (4.33), encontramos a energia E_1 de (4.33) como

$$
\begin{aligned}
E_1 &= L^D[(V_{\lambda}W^{\lambda}\nabla_a^2+(\mathbf{V}\cdot\nabla_a)(\mathbf{W}\cdot\nabla_a)]\int \frac{d^d\mathbf{p}_{\perp}}{(2\pi)^d}\frac{1}{p_{\perp}^2+\mu^2}\exp(i\mathbf{p}_{\perp}\cdot\mathbf{a}) \\
&= L^D[(V_{\lambda}W^{\lambda}\nabla_a^2+(\mathbf{V}\cdot\nabla_a)(\mathbf{W}\cdot\nabla_a)]\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\mu^{d-2}(\mu a)^{1-(d/2)}K_{(d/2)-1}(\mu a)\ ,
\end{aligned} \tag{4.52}
$$

onde os termos independentes da distância entre as fontes foram descartados. Esta é a contribuição à energia devido somente à interação entre as duas partes da corrente tensorial $J^{\mu\nu}$, e não depende da corrente vetorial J^μ. A contribuição E_4 obtida de (4.48),

$$E_4 = L^D \frac{v_\lambda w^\lambda}{(2\pi)^{d/2}} \mu^{d-2} (\mu a)^{1-d/2} K_{(d/2)-1}(\mu a) \ , \tag{4.53}$$

é devida às duas partes da corrente vetorial J^μ e independente de $J^{\mu\nu}$.

As contribuições E_2 e E_3 têm origem na interação entre as correntes J^μ e $J^{\mu\nu}$, e substituindo (4.49) e (4.50) em (4.48) encontramos

$$E_2 = E_3 = L^D \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \frac{\mu}{2} (w_\lambda V^\lambda + v_\lambda W^\lambda) \mu^{d-2} (\mu a)^{1-d/2} K_{(d/2)-1}(\mu a) \ . \tag{4.54}$$

Tomando as derivadas em (4.52) e somando com (4.53) e (4.54), a densidade de energia total de interação entre as correntes (4.49) e (4.50) resulta em,

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \frac{E}{L^D} &= \frac{1}{L^D}(E_1 + E_2 + E_3 + E_4) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \Big[v_\lambda w^\lambda + \mu (w_\lambda V^\lambda + v_\lambda W^\lambda) + \mu^2 V_\lambda W^\lambda \Big] \mu^{d-2} (\mu a)^{1-d/2} K_{(d/2)-1}(\mu a) \\ &- \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \Big[(\mathbf{V}_\perp \cdot \mathbf{W}_\perp) K_{d/2}(\mu a) - (\mathbf{V} \cdot \hat{a})(\mathbf{W} \cdot \hat{a}) \mu a K_{(d/2)+1}(\mu a) \Big] \mu^d (\mu a)^{-d/2} \end{aligned} \tag{4.55}$$

Considerando o caso particular de duas *branas* estáticas e pontuais em um espaço de $(3+1)$ dimensões, devemos ter $D = 0$, $d = 3$, $v^\mu = v\eta^{\mu 0}$ e $w^\mu = w\eta^{\mu 0}$. Desta forma a energia (4.55) torna-se,

$$\begin{aligned} E &= \frac{vw}{4\pi} \frac{\exp(-\mu a)}{a} + \frac{\mu}{4\pi} (wV^0 + vW^0) \frac{\exp(-\mu a)}{a} + \frac{\mu^2 V^\lambda W_\lambda}{4\pi} \frac{\exp(-\mu a)}{a} \\ &- \frac{\exp(-\mu a)}{4\pi a^3} \Big[\Big(1 + \mu a\Big)(\mathbf{V} \cdot \mathbf{W}) - \Big(3 + 3\mu a + \mu^2 a^2\Big)(\mathbf{V} \cdot \hat{a})(\mathbf{W} \cdot \hat{a}) \Big] \ . \end{aligned} \tag{4.56}$$

Vemos que o parâmetro de acoplamento μ, responsável pela interação entre os setores vetoriais e tensoriais do campo $\mathcal{X}^{\mu\nu,\lambda}$, produz um decaimento exponencial na energia de interação entre as fontes externas.

Quando $\mu = 0$, a energia (4.55) se reduz à interação mediada pelos campos eletromagnético e de Kalb-Ramond desacoplados, ou seja

$$E = \frac{vw}{4\pi a} - \frac{1}{2\pi a^3}\left[\mathbf{V}\cdot\mathbf{W} - 3(\mathbf{V}\cdot\hat{a})(\mathbf{W}\cdot\hat{a})\right] , \tag{4.57}$$

como não poderia deixar de ser.

Uma outra situação interessante ocorre quando há somente fontes para o campo de Kalb-Ramond em (4.55), ou seja, quando fazemos $v = w = 0$. Neste caso a energia é a mesma que a obtida para a interação entre dois dipolos pontuais, mediada por um campo bosônico massivo, mais uma interação tipo Yukawa.

Um outro resultado interessante é obtido fazendo-se $\mathbf{V} = \mathbf{W} = 0$ e $v = w = 0$, donde conclui-se que

$$E = \frac{(\mu V^0)(\mu W^0)}{4\pi}\frac{\exp(-|\mu|a)}{a} . \tag{4.58}$$

Isto revela a possibilidade de haver uma interação tipo Yukawa entre cargas, μV^0 e μW^0, do campo de Kalb-Ramond neste modelo.

Note que se tomarmos $V^\mu = W^\mu = 0$ em (4.56), embora a energia seja influenciada somente pelas cargas elétricas v e w, a interação será do tipo Yukawa, intermediada por uma campo vetorial massivo. Este é um exemplo de mecanismo capaz de gerar campos massivos e ainda ser consistente com simetrias de calibre, sem a necessidade de quebra de simetria, contrastanto nesse sentido com o mecanismo de Higgs. Portanto a equação (4.55) corrobora a equivalência entre o modelo (4.56) e o campo vetorial massivo exposta em [9].

Capítulo 5

Considerações Finais

Correntes externas não representam somente funções clássicas arbitrárias, elas também são estados particulares de acoplamento entre diferentes tipos de campos. No caso da Eletrodinâmica Quântica, temos que

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi - \frac{1}{4}\, F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - e\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi A_{\mu} \ , \tag{5.1}$$

onde o termo de interação entre o campo vetorial e espinorial é dado pela corrente fermiônica $J^{\mu} = e\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$.

Se o campo fermiônico estiver em um estado no qual

$$J^{\mu}(x) = e\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi = \sum_{p=1}^{N} \sigma_p \ W^{\mu(p)} \ \delta^{d}(\mathbf{x}_{\perp} - \mathbf{a}_p) \ , \tag{5.2}$$

podemos estudar o sistema (5.1) como na seção (3.3).

Uma vez que estamos interessados na interação entre as distintas partes da fonte (5.2), mesmo com esta restrição, a energia da parte espinorial da lagrangeana (5.1) pode ser desconsiderado. O modelo torna-se então equivalente à lagrangiana,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \left(\sum_{p=1}^{N} \sigma_p \ W_{\mu(p)} \ \delta^{d}(\mathbf{x}_{\perp} - \mathbf{a}_p)\right)A^{\mu} \quad ,$$

que caracteriza as interações elétricas entre férmions estáticos, na abstração teórica de estados com posições bem definidas. Da mesma forma a expansão dos campos em ondas planas, para o cálculo de amplitudes de espalhamento, é apenas uma abstração teórica para estados de momento bem definido. O potencial coulombiano é encontrado em qualquer dos casos partindo-se de (5.1).

Os métodos de cálculo expostos aqui, originalmente encontrados em [5], nos permitiram calcular a energia de interação, intermediada por campos bosônicos, entre fontes estáticas de dimensões arbitrárias e em codimensões também arbitrárias. Os mesmos métodos podem ser empregados para o estudo de campos fermiônicos [5]. A importância das expressões encontradas, de forma exata, para a análise de modelos em diferentes dimensionalidades é evidente. O tratamento de multipolos manifesta-se de forma direta em todos os casos, com o emprego das derivadas das distribuições tipo δ para as correntes externas.

Ficou demonstrado que a dependência funcional dos potenciais com a distância, a^{2-d} para $d \neq 2$, tem um caráter puramente geométrico, sendo determinada exclusivamente pelo número de codimensões do espaço onde encontram-se a *branas*. Como exemplo, podemos ver de (3.44) que duas distribuições lineares de cargas elétricas em um espaço de $(4+1)$ dimensões, interagem da mesma forma que duas cargas pontuais em um espaço $(3+1)$, ou seja, a interação é coulombiana nos dois casos.

Como regra geral, aplicável a qualquer modelo, quando há duas codimensões devemos introduzir um parâmetro de massa para regularizar a integral do propagador conforme (A.14). Isto decorre da divergência da função gama , $\Gamma(x)$, na origem.

Estes resultados foram utilizados para o estudo do campo de Kalb-Ramond, que é o campo de calibre em Teoria de Cordas Heteróticas [7]. Foi proposta uma nova classe de correntes localizadas pontualmente e ainda assim capazes de serem acopladas a uma 2-forma [6]. Verifica-se que a mais simples forma de interação que este campo pode intermediar é a mesma interação entre dipolos escalares.

O cálculo direto da energia de interação entre fontes no modelo de Cremmer-Schrek-Kalb-Ramond, que acopla o campo vetorial ao de Kalb-Ramond, revelou de maneira explícita um mecanismo capaz de criar campos massivos de forma dinâmica, sem a necessidade de quebra de simetria e com invariância de calibre. A simples existência deste acoplamento, mesmo que não haja fontes para o campo de Kalb-Ramond, tornaria o fóton uma partícula massiva [6].

Dentre a ampla gama de aplicações possíveis para as técnicas empregadas aqui, destaca-se o estudo das interações a 4-férmions, como no modelo de Nambu-Jona-Lasinio [25]. Também é possível investigar desta forma a fenomenologia de partículas em setores escondidos. Este é o caso do setor $U(1)$ dos parafótons e de suas influências nas interações eletromagnéticas [26]. Outro ponto de interesse a ser abordado é a análise do comportamento das interações intermediadas por campos de Yang-Mills. Neste caso as propostas de propagadores para o glúon podem ser estudadas de maneira analítica.

Apêndice A

Integrais Úteis para o Cálculo de Propagadores

O objetivo deste apêndice é expor de forma explícita o cálculo da integral d-dimensional

$$I_d(a) = \int d^d\mathbf{p}\ f(p)\exp(\pm i\mathbf{p}\cdot\mathbf{a})\ , \tag{A.1}$$

onde $f(p)$ é qualquer função par do módulo de $\mathbf{p}$. Em um espaço com $d > 2$ dimensões, p pode ser escrito em coordenadas esféricas como,

$$\begin{aligned}
p^1 &= p\ \cos(\theta_1) \\
p^2 &= p\ \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) \\
p^3 &= p\ \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\cos(\theta_3) \\
&\vdots \\
p^{d-1} &= p\ \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\cdots\sin(\theta_{d-2})\cos(\theta_{d-1}) \\
p^d &= p\ \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\cdots\sin(\theta_{d-2})\sin(\theta_{d-1})\ ,
\end{aligned}$$

onde $0 \leq \theta_1 \leq \pi$, $0 \leq \theta_2 \leq \pi$, ..., $0 \leq \theta_{d-2} \leq \pi$ e $0 \leq \theta_{d-1} \leq 2\pi$. Com isto, o elemento de volume passa a ser

$$d^d\mathbf{p} = (p)^{d-1}\ dp\ \prod_{i=1}^{d-1} \sin^{d-(i+1)}(\theta_i)\ d\theta_i\ . \tag{A.2}$$

Por simplicidade, e sem perda de generalidade, adotemos um sistema de coordenadas no qual $\mathbf{a} = (a, 0, \cdots, 0)$. Neste caso, a integral (A.1) torna-se

$$\begin{aligned} I_d(a) \;=\; & \left[\int_0^\infty dp\ (p)^{d-1} f(p) \left(\int_0^\pi d\theta_1\ \sin^{d-2}(\theta_1)\ \exp\Big[\pm ipa\cos(\theta_1)\Big]\right)\right] \\ & \left(\int_0^\pi d\theta_2\ \sin^{d-3}(\theta_2)\right)\left(\int_0^\pi d\theta_3\ \sin^{d-4}(\theta_3)\right)\cdots\left(\int_0^\pi d\theta_{d-2}\ \sin^{d-3}(\theta_{d-2})\right) \\ & \left(\int_0^{2\pi} d\theta_{d-1}\right) . \end{aligned} \tag{A.3}$$

Substituindo as fórmulas [20],

$$\begin{aligned} \int_0^\pi d\theta \sin^{2\nu}(\theta)\ \exp\Big[\pm ix\cos(\theta)\Big] &= \pi^{1/2}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} J_\nu(x)\ \ ,\ \ \nu > -\frac{1}{2} \\ \int_0^\pi d\theta\ \sin^m(\theta) &= \pi^{1/2}\frac{\Gamma[(1/2)(m+1)]}{\Gamma[(1/2)(m+2)]} \quad ,\quad m = 1, 2, 3, ... \end{aligned} \tag{A.4}$$

em (A.4), e efetuando a mudança de variáveis $u = ap$, obtemos

$$I_d = (2\pi)^{d/2}\frac{1}{a^d}\int_0^\infty du\ u^{d/2} J_{(d/2)-1}(u) f\left(\frac{u}{a}\right) \quad ,\quad d > 2\ . \tag{A.5}$$

Quando $d = 2$, a integral (A.1) fica

$$I_2 = \int_0^\infty dp\ p\ f(p)\ \int_0^{2\pi} d\theta\ \exp\Big[\pm ipa\cos(\theta_1)\Big]\ , \tag{A.6}$$

em coordenadas esféricas, e a primeira expressão em (A.4) fornece

$$\int_0^{2\pi} d\theta \exp\Big[\pm ix\cos(\theta_1)\Big] = 2\pi J_0(x)\ . \tag{A.7}$$

Efetuando novamente a mudança de variáveis de integração $u = ap$, obtemos

$$I_2 = \frac{2\pi}{a^2} \int_0^\infty du \; uJ_0(u) f\left(\frac{u}{a}\right) . \tag{A.8}$$

Para $d = 1$, basta utilizar a paridade de $f(p)$, e efetuar a mesma mudnça de variáveis, para obter

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} dp \; f(p) \exp(\pm ipa) \\ &= \frac{2}{a} \int_0^\infty du \; f\left(\frac{u}{a}\right) \cos(u) . \end{aligned} \tag{A.9}$$

Substituindo o cosseno na forma,

$$\cos(u) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{u} J_{-1/2}(u) \tag{A.10}$$

em (A.9), encontramos

$$I_1 = \frac{(2\pi)^{1/2}}{a} \int_0^\infty du \; u^{1/2} J_{-1/2}(u) f\left(\frac{u}{a}\right) \tag{A.11}$$

Combinando (A.5), (A.8) e (A.11), a expressão geral para (A.1) toma a forma

$$\begin{aligned} I_d &= \int d^d\mathbf{p} \; f(p) \exp(\pm i\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}) \\ &= (2\pi)^{d/2} \frac{1}{a^d} \int_0^\infty du \; u^{d/2} J_{(d/2)-1}(u) f\left(\frac{u}{a}\right) . \end{aligned} \tag{A.12}$$

Para o caso em que $f(p) = (p^2 + m^2)^{-1}$, podemos utilizar [24]

$$\int_0^\infty du \; \frac{u^{\nu+1} J_\nu(u)}{u^2 + x^2} = x^\nu K_\nu(x) , \tag{A.13}$$

válida para $x > 0$ and $-1 < \nu < 3/2$, donde obtemos

$$\int d^d\mathbf{p}_\perp \; \frac{1}{\mathbf{p}_\perp^2 + m^2} \exp(\pm i\mathbf{p}_\perp \cdot \mathbf{a}) \;=\; (2\pi)^{d/2} a^{2-d} \int_0^\infty du \frac{u^{d/2} J_{(d/2)-1}(u)}{u^2 + (ma)^2}$$
$$= (2\pi)^{d/2} m^{d-2} (ma)^{1-(d/2)} K_{(d/2)-1}(ma) \; , \qquad \text{(A.14)}$$

válida para $0 < d < 5$ e $m > 0$.

Com [24]

$$\int_0^\infty du \; u^\mu J_\nu(u) = 2^\mu \; \frac{\Gamma\big(1/2 + \nu/2 + \mu/2\big)}{\Gamma\big(1/2 + \nu/2 - \mu/2\big)} \; , \qquad \text{(A.15)}$$

e fazendo $f(p) = p^{-2}$ em (A.12), obtemos

$$\int d^d\mathbf{k}_\perp \; \frac{1}{\mathbf{k}_\perp^2} \exp(\pm i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{a}) \;=\; (2\pi)^{d/2} a^{2-d} \int_0^\infty du \; u^{(d/2)-2} J_{(d/2)-1}(u)$$
$$= (2\pi)^{d/2} \; 2^{(d/2)-2} \; \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \; a^{2-d} \; , \qquad \text{(A.16)}$$

válida para $2 < d < 5$.

Referências Bibliográficas

[1] A. Janiak, (ed.), : Philosophical Writings, Cambridge University Press (2008).

[2] J. Mehra, *The Golden Age of Theoretical Physics*, Volumes 1 e 2, World Scientific Publishing (2001).

[3] S. Weinberg, *The quantum theory of Fields*, Volume 1, Cambridge: Cambridge University Press (1995).

[4] C. M. Wilson, G. Johansson, A. Pourkabirian, M. Simoen, J. R. Johansson, T. Duty, F. Nori and P. Delsing, Nature **479**, 376379 (2011).

[5] F.A. Barone and G. Flores-Hidalgo, Phy. Rev. D **78**, 125003 (2008).

[6] F.A. Barone, F. E. Barone, J. A. Helayël-Neto, Phys. Rev. D **84**, 065026 (2011).

[7] M. Kalb and P. Ramond, Phys. Rev. D **9**, 2273 (1974).

[8] E. Cremmer and J. Scherk, Nucl. Phys. B **72**, 117 (1974).

[9] T.J. Allen, M.J. Bowick and A. Lahiri, Mod. Phys. Lett. A **6**, 559 (1991).

[10] S.J. Gates, M. Grisaru, M. Rocek and W. Siegel, Superspace, W.A. Benjamin, New York (1983).

[11] A. Vilenkin, Phys. Rev. D **23**, 852 (1981); W.A. Hiscock, Phys. Rev. D **31**, 3288 (1985); J.R. Gott III, Astrophys. Jour. **288**, 422 (1985); D. Garfinkle, Phys. Rev. D **32** 1323 (1985).

[12] L. Baulieu, M. Bellon and A. Tanzini, Phys. Lett. B **565**, 211 (2003).

[13] C.N. Ferreira, J.A. Helayël-Neto and M.B.D.S.M. Porto, Nucl. Phys. B **620**, 181 (2002).

[14] M. Gasperini and G. Veneziano, Phys. Rev. D **59**, 043503 (1999).

[15] R. Amorim, C.N. Ferreira and C.F.L. Godinho Phys. Lett. B **593**, 203 (2004).

[16] F.A. Barone and G. Flores-Hidalgo, Braz. Jour. Phys. **40**, 188 (2010).

[17] M. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction To Quantum Field Theory*, Perseus (1995).

[18] T. Cheng and L. Li, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*, Oxford University Press (1988).

[19] S. Pokorski, *Gauge Field Theories*, Cambridge University Press (2000).

[20] G.B. Arfken and H.J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press (1995).

[21] A. Das, *Lectures on Quantum Field Theory*, World Scientifc (2008).

[22] U. Mosel, *Path Integrals in Field Theory: An Introduction*, Springer (2003).

[23] F.A. Barone, L. M. De Moraes, and J.A. Helayël-Neto, Phys. Rev. D **72** 105012 (2005). Erratum-ibid. D **73**, 089901 (2006);

[24] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press (2000).

[25] S. P. Klevansky, Rev. Mod. Phys. **64** 649708 (1992).

[26] S. A. Abel, M. D. Goodsell, J. Jaeckel, V. V. Khoze, A. Ringwald, JHEP **124** 0807 (2008)