Dissertação de

Mestrado

Comportamento Operatorial da Anomalia de Calibre no Modelo de Jackiw-Rajaraman

Daniel Ribeiro de Pontes

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas – CBPF

Rio de Janeiro, Agosto de 2014

Aos meus pais e avós.

Agradecimentos

À perseverança e garra de meu orientador Sebastião Alves Dias, ao me guiar pelo caminho que levou ao cenário explorado nesta dissertação e um passo mais próximo do amadurecimento científico.

Ao CNPq pelo patrocínio de meu trabalho durante os dois anos regulares do mestrado.

À ciência e seus professores por sempre mostrarem, quando reflito, novos motivos para encantar-me com a Natureza.

Resumo

Calculamos exatamente inserções do operador associado à anomalia de calibre em algumas funções de Green bosônicas e fermiônicas selecionadas, no contexto da eletrodinâmica quiral em duas dimensões. Mostramos que essas inserções conduzem a resultados nulos quando os correladores são operadores invariantes de calibre. Quando eles não são, as funções de Green com inserções da anomalia não se anulam. Tais fatos indicam a não trivialidade da teoria anômala considerada.

Abstract

We compute exactly some bosonic and fermionic Green's functions with insertions of the gauge anomaly operator, in the context of chiral electrodynamics in two dimensions. We show that these insertions give null results when the correlators are gauge invariant operators. When this is not the case, Green's functions with gauge anomaly insertions do not vanish. These facts indicate that the gauge anomalous theory under consideration is not trivial.

Conteúdo

Introdução

As interações fortes, fracas e eletromagnéticas são bem descritas, atualmente, pelo modelo padrão [1]. Esse modelo incorpora 12 férmions (dos quais se contabiliza uma metade de quarks e a outra, de léptons) interagindo através da troca de bósons vetoriais (8 para as interações fortes, 3 para as fracas e 1 para as eletromagnéticas). Os bósons relacionados às interações fracas (W^+, W^- e Z^0) possuem massa e isso representa um problema para a definição operacional da teoria. Por um lado, os dados experimentais comprovam a natureza massiva dessas partículas, bem como o seu spin 1 (o que diz que elas devem ser descritas por campos vetoriais). Por outro lado, a presença de um termo de massa para um campo vetorial destrói a simetria de calibre, simetria essa crucial para garantir a renormalizabilidade e a unitaridade do modelo.

Para resolver este viés, foi proposto o mecanismo de Higgs. A simetria de calibre está presente e explícita numa fase em que nenhuma das 24 partículas possui massa. O grupo de simetria de calibre é $SU(2) \times U(1)$ e refere-se a isospin fraco e hipercarga. Uma partícula escalar massiva adicional interage com as demais através de acoplamentos mínimos (bósons vetoriais) e de Yukawa (quarks e léptons). Nessa fase, todos os férmions são quirais, alguns aparecem nas duas quiralidades e elas se organizam em multipletes diferentes (as esquerdas, em dubletes de $SU(2)$ e as direitas em singletes de $U(1)$). A partir desse ponto, supõe-se que, por alguma transição de fase, a massa da particula escalar assume valores imaginários (através de correções quânticas) e a simetria de calibre é espontaneamente quebrada. Na nova parametrização dos graus de liberdade da teoria, todo o cenário muda: as componentes esquerda e direita dos férmions são acopladas através de termos de massa oriundos dos acoplamentos de Yukawa e os 3 bósons vetoriais das interações fracas ficam massivos.

Apesar da teoria envolver campos vetoriais massivos e da simetria de calibre não mais se apresentar manifesta na fase de simetria quebrada, o ponto crucial é que ela já foi renormalizada na fase em que a simetria estava explícita. Essa renormalização não é perturbada pela transição de fase [2] e o modelo, então, faz sentido físico. Assim, qualquer discussão do processo de renormalização do modelo padrão deve se dar *antes* da transição de fase.

Todavia um obstáculo poderia estragar a renormalizabilidade do modelo padrão na fase simétrica. Como dito previamente, nessa situação, o modelo consiste em férmions *quirais* interagindo minimamente com campos de calibre abelianos e não abelianos. Tais interações são reconhecidamente *anômalas*. Isso quer dizer que a simetria de calibre, presente formalmente no nível clássico, é aparentemente violada quanticamente. Um sinal dessa violação é a não conservação covariante das correntes de Noether, quando elas são tomadas como operadores (com os campos de calibre tidos como externos, não quantizados). Se a simetria de calibre for violada, ficamos sem resposta para a questão de como renormalizar o modelo padrão. Por essa razão, escolhemos cuidadosamente as representações onde colocamos os quarks e os léptons [3], de modo que as anomalias de calibre sejam canceladas. Uma das consequências desse procedimento é a previsão de que o número de famílias de quarks deve sempre ser igual ao de famílias de léptons.

No entanto, desde os anos 1980, vários autores se voltaram para a questão da consistência de teorias de calibre envolvendo férmions quirais [4, 5, 6, 7]. Os resultados encontrados apontaram para a possibilidade de que tais teorias poderiam vir a ser consistentes e de que a simetria de calibre, aparentemente violada pelas anomalias antes da quantização do campo de calibre, poderia vir a ser restaurada após a mesma. Mais recentemente, foi mostrado que a anomalia de calibre, enquanto operador quântico, tem valor esperado nulo no vácuo e inserções nulas em funções de correlação de operadores invariantes de calibre [8]. Isso aponta para a restauração da simetria de calibre no nível quântico, na mesma linha dos trabalhos já mencionados anteriormente.

Uma possibilidade importante, no entanto, precisa ainda ser investigada. Se a anomalia possuir inserções nulas em quaisquer funções de correlação, ela terá que se anular fortemente, enquanto operador. Isso poderia implicar na anulação do próprio campo de calibre, o que significaria a trivialidade de teorias de calibre com férmions quirais. Tal questão é muito difícil de ser investigada em 4 dimensões, por envolver necessariamente métodos não perturbativos.

Porém, em 2 dimensões, um modelo simples se mostrou extremamente útil para fornecer informações sobre acoplamentos quirais. Trata-se da eletrodinâmica quiral, ou *modelo de Jackiw-Rajaraman* [4]. O modelo é exatamente solúvel e unitário, tendo sido analisado e discutido desde diversos pontos de vista [9, 10, 11]. Ele exibe divergências não perturbativas, que podem ser tratadas e removidas [12, 13, 14]. Em função da sua solubilidade (aqui entendida como a possibilidade de calcular qualquer função de correlação exatamente), este modelo se revela um cenário ideal para investigar o comportamento da anomalia de calibre em funções de correlação arbitrárias. É nossa intenção, neste trabalho, realizar esse estudo.

Organizamos nossa exposição em dois capítulos principais. No primeiro, apresentamos uma revisão sobre as consequências clássicas e quânticas da existência de simetria de calibre, manifesta na ação clássica de um modelo em que férmions quirais interagem com campos de calibre minimamente. No segundo capítulo, particularizamos nossa análise para o modelo de Jackiw-Rajaraman, calculando diversos tipos de funções de correlação emblemáticas, que nos ajudarão a analisar a questão da anulação, ou não, da anomalia. Ao final, expomos nossas conclusões e perspectivas futuras. No Apêndice, mostramos o cálculo do propagador associado à ação efetiva.

Capítulo 1

A Anomalia de Calibre e o seu Cancelamento

Neste capítulo, vamos fazer inicialmente uma rápida revisão sobre a simetria de calibre e a conseqüente conservação de corrente em teorias clássicas. Em seguida, passamos à consideração da lei de conservação na situação quântica, onde iremos identificar o surgimento do fenômeno da anomalia e detalhar algumas de suas características.

1.1 A simetria de calibre no caso clássico

Consideremos uma ação típica de uma teoria de calibre clássica num espaço de Minkowski d-dimensional

$$S\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu\right] = S_M\left[\psi,\bar{\psi},A_\mu\right] + S_G\left[A_\mu\right] = \int dx\bar{\psi}D\psi + \int dx\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \tag{1.1}$$

onde $dx \equiv d^dx$. A ação S_M é a porção da ação associada à matéria e S_G, ao campo de calibre, definidas em termos dos campos fermiônicos ψ e $\bar{\psi}$ que carregam uma representação fundamental de $SU(N)$ e dos campos de calibre A_μ. Estes últimos tomam valores na álgebra de Lie de modo que

$$A_\mu = A^a_\mu T_a, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ie[A_\mu, A_\nu], \tag{1.2}$$

e os geradores T_a satisfazem a álgebra

$$[T_a, T_b] = if_{abc}T_c, \quad \mathrm{tr}\,(T_a T_b) = -\frac{1}{2}\delta_{ab}. \tag{1.3}$$

O operador D, também chamado de *operador de Dirac*, é dado por

$$D = i\gamma^\mu\,(\partial_\mu + ieA_\mu) \equiv i\gamma^\mu D_\mu. \tag{1.4}$$

Sob elementos de $SU\,(N)$ dependentes de x^μ,

$$g = \exp(i\theta^a(x)T_a), \tag{1.5}$$

tomamos mudanças nos campos da seguinte maneira:

$$A^g_\mu = gA_\mu g^{-1} + \frac{i}{e}(\partial_\mu g)g^{-1}, \tag{1.6}$$

$$\psi^g = g\psi, \quad \bar{\psi}^g = \bar{\psi}g^{-1}. \tag{1.7}$$

Para g associado a θ^a infinitesimais

$$A_\mu \to A_\mu - \frac{1}{e}\left(\partial_\mu\theta + ie[A_\mu, \theta]\right), \tag{1.8}$$

$$\psi \to \psi + i\theta\psi, \quad \bar{\psi} \to \bar{\psi} - i\bar{\psi}\theta, \tag{1.9}$$

(onde $\theta \equiv \theta^a T_a$). É fácil perceber que S_M e S_G são, separadamente, invariantes de calibre e temos[1]

$$S[\psi^g, \bar{\psi}^g, A_\mu^g] = S\left[\psi, \bar{\psi}, A_\mu\right]. \tag{1.10}$$

Uma vez que a ação de matéria permanece invariante sob o conjunto de transformações locais acima, ela assim continua ao se utilizar transformações globais, isto é, quando se considera $\partial_\mu \theta^a = 0$. A simetria se reduz, nesse caso particular, a:

$$A_\mu \to A_\mu - i[A_\mu, \theta] \tag{1.11}$$

$$\Rightarrow \delta A_\mu^a = f_{abc} A_\mu^b \theta^c, \tag{1.12}$$

$$\delta\psi = i\theta\psi, \tag{1.13}$$

$$\delta\bar{\psi} = -i\bar{\psi}\theta, \tag{1.14}$$

É claro que, se aplicarmos as transformações (1.12 – 1.14) aos campos, com $\partial_\mu \theta^a \neq 0$, S_M não continuará mais invariante de calibre. Entretanto, sua variação deverá ser linearmente dependente de $\partial_\mu \theta^a$, para θ^a infinitesimal, para que seja nula quando $\partial_\mu \theta^a = 0$. Desse modo,

$$\delta S_M \equiv \int dx \partial_\mu \theta^a(x) J_a^\mu(x) = -\int dx \theta^a(x) \partial_\mu J_a^\mu(x), \tag{1.15}$$

sendo J_a^μ uma função dos campos, a ser obtida. Por outro caminho, explorando a de-

[1] A equação (1.10) assume ainda outra forma (a ser utilizada posteriormente):

$$\begin{aligned} S[\psi^{g^{-1}}, \bar{\psi}^{g^{-1}}, A_\mu] &= S[\left(\psi^{g^{-1}}\right)^g, \left(\bar{\psi}^{g^{-1}}\right)^g, A_\mu^g] \\ &= S\left[\psi, \bar{\psi}, A_\mu^g\right]. \end{aligned}$$

pendência de S_M nos campos, temos:

$$\delta S_M = \int dx \theta^a(x) \left(\frac{\delta S_M}{\delta\psi(x)} iT_a \psi(x) - i\bar{\psi}(x) T_a \frac{\delta S_M}{\delta\bar{\psi}(x)} - f_{abc} A^b_\mu(x) \frac{\delta S_M}{\delta A^c_\mu(x)} \right). \tag{1.16}$$

Daí se deduz, para $\theta^a(x)$ arbitrário,

$$\partial_\mu J^\mu_a(x) + \frac{\delta S_M}{\delta\psi(x)} iT_a \psi(x) - i\bar{\psi}(x) T_a \frac{\delta S_M}{\delta\bar{\psi}(x)} - f_{abc} A^b_\mu(x) \frac{\delta S_M}{\delta A^c_\mu(x)} = 0. \tag{1.17}$$

No caso abeliano ($f_{abc} = 0$, $T_a = 1$, $J^\mu_a \equiv J^\mu$), obtemos

$$\partial_\mu J^\mu(x) = i \left(\bar{\psi}(x) \frac{\delta S_M}{\delta\bar{\psi}(x)} - \frac{\delta S_M}{\delta\psi(x)} \psi(x) \right). \tag{1.18}$$

Essa expressão nos dá a forma funcional explícita de J^μ. Ao lançarmos mão das equações de movimento para os campos fermiônicos,

$$\frac{\delta S_M}{\delta\psi(x)} = \frac{\delta S_M}{\delta\bar{\psi}(x)} = 0, \tag{1.19}$$

concluímos imediatamente que

$$\partial_\mu J^\mu(x) = 0. \tag{1.20}$$

Agora voltemos a considerar as transformações locais, dadas pelas equações (1.6) e (1.7). Valendo-nos de uma dada configuração para o campo de calibre $A'_\mu = gA_\mu g^{-1}$, rapidamente vemos que

$$S_M[\psi^g, \bar{\psi}^g, A'_\mu] = S_M[\psi, \bar{\psi}, (A'_\mu)^{g^{-1}}] = S_M[\psi, \bar{\psi}, A_\mu + \frac{i}{e}(\partial_\mu g) g^{-1}]. \tag{1.21}$$

Logo, em sua forma infinitesimal, fica-se com a variação

$$\delta S_M = \frac{1}{e} \int dx \partial_\mu \theta^a(x) \frac{\delta S_M}{\delta A^a_\mu(x)}. \tag{1.22}$$

No entanto a ação $S_M[\psi^g, \bar{\psi}^g, A'_\mu]$ é exatamente a ação original transformada pela lei de transformação modificada (1.11) em sua forma local (que não é simetria de S_M). Assim sendo, esta última variação, (1.22), tem que ser igual àquela (1.15), encontrada mais cedo. Portanto

$$\int dx\theta^a(x)\partial_\mu J_a^\mu(x) = \int dx\theta^a(x)\partial_\mu \left(\frac{1}{e}\frac{\delta S_M}{\delta A_\mu^a(x)}\right). \tag{1.23}$$

Novamente, admitindo $\theta^a(x)$ arbitrário, podemos concluir que[2]

$$J_a^\mu(x) = \frac{1}{e}\frac{\delta S_M}{\delta A_\mu^a(x)}. \tag{1.24}$$

Após inserir (1.24) em (1.17) e usar as equações de movimento para os férmions, chega-se à lei clássica de conservação covariante de corrente

$$(D_\mu)_{ab}J_b^\mu = 0, \tag{1.25}$$

onde

$$(D_\mu)_{ab} \equiv \delta_{ab}\partial_\mu + ef_{abc}A_\mu^c. \tag{1.26}$$

Em forma matricial, se $B = B^aT_a$ é um elemento da álgebra de Lie de $SU(N)$, escreve-se

$$D_\mu B = \partial_\mu B + ie[A_\mu, B]. \tag{1.27}$$

A conservação de m quantidades em função da invariância da ação perante uma simetria contínua parametrizada por m parâmetros é a expressão do *teorema de Noether*. Notamos que, tanto no caso abeliano quanto no não-abeliano, o teorema de Noether não só nos diz que há quantidades conservadas, mas fornece uma prescrição concreta para calculá-las[3].

[2]Notemos que a equação de movimento para A_μ^a não é $\delta S_M/\delta A_\mu^a(x) = 0$, e sim $\delta S/\delta A_\mu^a(x) = 0$, o que faz com que a expressão da corrente de calibre não seja nula sobre as equações de movimento.

[3]A apresentação do teorema de Noether contida nessa seção está fortemente baseada naquela contida na referência [15].

1.2 Simetria de calibre no caso quântico

A quantização de uma teoria clássica de campos envolve a integração funcional sobre todos os seus campos [16]. No caso das teorias de calibre, é comum se trabalhar com uma ação efetiva na qual apenas os campos fermiônicos são quantizados e os de calibre permanecem como campos externos clássicos. Isso permite analisar detalhes pertinentes aos problemas relativos à quantização exclusiva dos férmions. Tomemos a *ação efetiva:*

$$\exp(iW[A_\mu]) \equiv \int d\psi d\bar{\psi} \exp(iS_M[\psi, \bar{\psi}, A_\mu]). \tag{1.28}$$

e a partir dela façamos uma transformação de calibre somente nos campos A_μ

$$\exp(iW[A^g_\mu]) = \int d\psi d\bar{\psi} \exp(iS_M[\psi, \bar{\psi}, A^g_\mu]). \tag{1.29}$$

Nesta integração funcional os campos fermiônicos são apenas variáveis mudas de modo que podemos redefinir os mesmos e escrever

$$\exp(iW[A^g_\mu]) = \int d\psi^g d\bar{\psi}^g \exp(iS_M[\psi^g, \bar{\psi}^g, A^g_\mu]). \tag{1.30}$$

Como sabemos, a ação é invariante de calibre. Se somarmos a esse fato a hipótese de que a medida fermiônica seja também invariante, isto é,

$$d\psi^g d\bar{\psi}^g = d\psi d\bar{\psi}, \tag{1.31}$$

teremos, como consequência,

$$W[A^g_\mu] = W[A_\mu]. \tag{1.32}$$

Portanto, a invariância local da ação e da medida fermiônica nos conduz a uma ação efetiva invariante de calibre. Vamos mostrar que este resultado implica na lei quântica de conservação da corrente. Primeiramente, notemos que a transformação infinitesimal de A_μ pode ser escrita em termos da derivada covariante

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{e} D_\mu \theta \tag{1.33}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \exp(iW[A_\mu^g]) = &\int d\psi d\bar{\psi} \exp(iS_M[\psi, \bar{\psi}, A_\mu]) \\ &\times \left[1 - i \int dx \frac{1}{e} \left(D_\mu\right)^a{}_b \theta^b(x) \frac{\delta S_M}{\delta A_\mu^a(x)}\right]. \end{aligned} \tag{1.34}$$

Nos valendo de que a derivada covariante respeita a regra de Leibnitz

$$\partial_\mu(\alpha^a \beta_a) = (D^a_{\mu b} \alpha^b)\beta_a + \alpha_a(D^a_{\mu b}\beta^b), \tag{1.35}$$

mostra-se, a menos de um termo de superfície, que

$$\begin{aligned} \exp\left(iW[A_\mu^g]\right) - \exp\left(iW[A_\mu]\right) = i &\int dx \theta^a(x) \\ &\times \int d\psi d\bar{\psi} \left(D_\mu\right)^a{}_b J^{\mu,b}(x) \exp(iS_M[\psi, \bar{\psi}, A_\mu]). \end{aligned} \tag{1.36}$$

Mas a ação efetiva $W[A]$ é invariante e, mais uma vez, $\theta^a(x)$ são parâmetros infinitesimais arbitrários. Isso nos diz que

$$\int d\psi d\bar{\psi} \left(D_\mu\right)^a{}_b J^{\mu,b}(x) \exp(iS_M[\psi, \bar{\psi}, A_\mu]) = 0. \tag{1.37}$$

Esta é a versão quântica da lei de conservação covariante de corrente.

Iremos repetir o procedimento acima, desta vez considerando a medida fermiônica não-invariante, ou seja, introduzindo um Jacobiano por causa da transformação de calibre:

$$d\psi^g d\bar{\psi}^g = J\left[A_\mu, g\right] d\psi d\bar{\psi}. \tag{1.38}$$

Desse modo, é fácil chegar a

$$J\left[A_\mu, g\right] = \exp(i[W[A^g_\mu] - W[A_\mu]]). \tag{1.39}$$

Denotemos convenientemente o Jacobiano por

$$J[A_\mu, g] \equiv \exp(i\alpha_1[A_\mu, g]). \tag{1.40}$$

Assim,

$$\alpha_1[A_\mu, g] = W[A^g_\mu] - W[A_\mu]. \tag{1.41}$$

Nesta forma fica clara sua propriedade (cociclo) sob transformações de calibre

$$\alpha_1[A^h_\mu, g] = W[A^{hg}_\mu] - W[A^h_\mu] = \alpha_1[A_\mu, hg] - \alpha_1[A_\mu, h]. \tag{1.42}$$

Para transformações infinitesimais

$$\alpha_1[A_\mu, g] = \int dx\theta^a(x) \left.\frac{\delta\alpha_1[A_\mu, g]}{\delta\theta^a(x)}\right|_{\theta=0}. \tag{1.43}$$

já que $J[A_\mu, 1] = 1 \Rightarrow \alpha_1[A_\mu, 1] = 0$. Por sua vez

$$W[A^g_\mu] = W[A_\mu] + \int dx\theta^a(x) \left(D_\mu\right)^a{}_b \left(\frac{1}{e}\frac{\delta W[A_\mu]}{\delta A^b_\mu(x)}\right). \tag{1.44}$$

Introduzindo estas formas infinitesimais na expressão (1.41), obtemos

$$\left.\frac{\delta\alpha_1[A_\mu, g]}{\delta\theta^a(x)}\right|_{\theta=0} = \left(D_\mu\right)^a{}_b \left(\frac{1}{e}\frac{\delta W[A_\mu]}{\delta A^b_\mu(x)}\right). \tag{1.45}$$

Antes de chegarmos à expressão final, percebamos primeiro que

$$\left(\left(D_\mu\right)^a{}_b \frac{\delta F[A]}{\delta A^b_\mu}\right) e^{F[A]} = \left(D_\mu\right)^a{}_b \left(\frac{\delta}{\delta A^b_\mu} e^{F[A]}\right). \tag{1.46}$$

Inserindo esta última equação em (1.45) com $F[A] = iW[A]$, fica-se com

$$\begin{aligned} \left.\frac{\delta\alpha_1[A_\mu, g]}{\delta\theta^a(x)}\right|_{\theta=0} e^{iW[A_\mu]} &= -i\left(D_\mu\right)^a{}_b \left(\frac{1}{e}\frac{\delta}{\delta A^b_\mu(x)} e^{iW[A_\mu]}\right) \\ &= \int d\psi d\bar{\psi} \left(D_\mu\right)^a{}_b J^{\mu,b}(x)\, e^{iS_M[\psi,\bar{\psi},A_\mu]} \end{aligned} \tag{1.47}$$

$$\therefore \left.\frac{\delta\alpha_1[A_\mu, g]}{\delta\theta^a(x)}\right|_{\theta=0} = \frac{\int d\psi d\bar{\psi}\,(D_\mu)^a{}_b J^{\mu,b}(x)\, e^{iS_M[\psi,\bar{\psi},A_\mu]}}{\int d\psi d\bar{\psi} e^{iS_M[\psi,\bar{\psi},A_\mu]}} \tag{1.48}$$

A partir desse resultado se define a *anomalia de calibre*: ela é o operador cujo valor esperado no vácuo (não nulo) obstrui a conservação covariante quântica do operador associado à corrente clássica:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_a &\equiv \left.\frac{\delta\alpha_1[A_\mu, g]}{\delta\theta^a(x)}\right|_{\theta=0} \\
&= \frac{\int d\psi d\bar{\psi}\,(D_\mu)^a{}_b J^{\mu,b}(x)\, e^{iS[\psi,\bar{\psi},A_\mu]}}{\int d\psi d\bar{\psi} e^{iS[\psi,\bar{\psi},A_\mu]}} \\
&= \left\langle 0 \left| (D_\mu)^a{}_b J^{\mu,b}(x) \right| 0 \right\rangle_{A_\mu},
\end{aligned} \tag{1.49}$$

onde a marca A_μ abaixo do valor esperado indica que ele está sendo tomado sem que o campo A_μ seja considerado quantizado. Este fenômeno está ligado à parte fermiônica da integração funcional. É a não invariância deste setor por transformações de calibre que possibilita o aparecimento da anomalia. Na próxima seção abordaremos o papel dos graus de liberdade remanescentes no tratamento da anomalia de calibre.

1.3 Cancelamento da anomalia de calibre na teoria completamente quantizada

A consequência direta da definição (1.49) é a violação da conservação de corrente para uma teoria anômala. Vamos analisar a situação primeiramente desde o ponto de vista de uma teoria efetiva clássica. Para isso, consideremos a ação remanescente, após a integração sobre os férmions:

$$S'[A_\mu] = S_G[A_\mu] + W[A_\mu]\,. \tag{1.50}$$

As equações de movimento geradas por essa ação são

$$\frac{\delta S_G[A_\mu]}{\delta A^a_\mu(x)} = -\frac{\delta W[A_\mu]}{\delta A^a_\mu(x)}, \tag{1.51}$$

Tomando uma divergência covariante desta equação, introduzimos a anomalia na expressão:

$$(D_\mu)^a{}_b \frac{\delta S_G[A_\mu]}{\delta A^b_\mu(x)} = -\,(D_\mu)^a{}_b \frac{\delta W[A_\mu]}{\delta A^b_\mu(x)} = -\mathcal{A}_a. \tag{1.52}$$

Entretanto a invariância de calibre de S_G

$$S_G\left[A_\mu - \frac{1}{e} D_\mu \theta\right] = S_G\left[A_\mu\right], \tag{1.53}$$

implica na seguinte identidade:

$$-\frac{1}{e}\int dx\,(D_\mu)^a{}_b \theta^b \frac{\delta S_G[A_\mu]}{\delta A^a_\mu(x)} = \frac{1}{e}\int dx \theta^b\,(D_\mu)^a{}_b \frac{\delta S_G[A_\mu]}{\delta A^b_\mu(x)} = 0, \tag{1.54}$$

$$\Longrightarrow (D_\mu)^a{}_b \frac{\delta S_G[A_\mu]}{\delta A^b_\mu(x)} = 0. \tag{1.55}$$

Com a ação S_G definida na equação (1.1), a relação acima fornece a relação familiar $D_\mu D_\nu F^{\mu\nu} = 0$. Tal identidade implicaria, então:

$$\mathcal{A}_a = 0.$$

Esta situação contraditória nos pede uma ótica diferente. Precisamos enxergar a anulação da anomalia como uma condição subsidiária (do mesmo tipo que aparece na teoria de Proca, onde $\partial_\mu A^\mu = 0$ surge exatamente dessa forma) que os campos de calibre terão de satisfazer para que a teoria seja consistente. Isso mostra uma riqueza dinâmica adicional, associada a teorias com anomalia de calibre.

Outra opção de análise diz respeito à quantização completa da teoria [8]. Afinal, nos focamos apenas na integração sobre os férmions e ainda nos falta integrar funcionalmente sobre os campos de calibre A_μ. Analisaremos a amplitude de transição vácuo-vácuo, que envolve tal integração:

$$\langle 0|0\rangle = Z \equiv \int dA_\mu \exp(i\,(S_G\,[A_\mu] + W[A_\mu])) \tag{1.56}$$

Sendo invariantes a medida bosônica ($dA_\mu = dA_\mu^g$) e S_G, ao redefinirmos os campos de calibre como A_μ^g poderemos escrever

$$Z = \int dA_\mu^g \exp(i\left(S_G\left[A_\mu^g\right] + W[A_\mu^g]\right)) = \int dA_\mu \exp(i\left(S_G\,[A_\mu] + W[A_\mu^g]\right)]). \tag{1.57}$$

Transformando infinitesimalmente, expandindo e mantendo apenas os termos de primeira ordem, teremos

$$Z = \int dA_\mu e^{i(S_G[A_\mu]+W[A_\mu])} \tag{1.58}$$

$$+ \int dx\theta^a(x) \int dA_\mu\,(D_\mu)^a{}_b \left(\frac{1}{e}\frac{\delta W[A_\mu]}{\delta A_\mu^b(x)}\right) e^{i(S_G[A_\mu]+W[A_\mu])} \tag{1.59}$$

$$\therefore \int dA_\mu\,(D_\mu)^a{}_b \left(\frac{1}{e}\frac{\delta W[A_\mu]}{\delta A_\mu^b(x)}\right) e^{i(S_G[A_\mu]+W[A_\mu])} = 0 \tag{1.60}$$

Logo,

$$\langle 0\,|\mathcal{A}_a|\,0\rangle = \left\langle 0\,\middle|(D_\mu)^a{}_b J^{\mu,b}\middle|\,0\right\rangle = 0, \tag{1.61}$$

ou seja, a conservação de corrente é resgatada numa teoria que contenha anomalia de calibre, caso ela seja plenamente quantizada.

Neste ponto, uma pergunta crucial é: o que significa este cancelamento da anomalia em relação à invariância de calibre da teoria, vista como operação de simetria no espaço de Hilbert? Será tal cancelamento suficiente para garantir a invariância de calibre no nível quântico? Implica ele numa anulação da anomalia enquanto operador, de maneira similar à condição subsidiária clássica que discutimos inicialmente? Se a resposta a esta última dúvida for positiva, estaremos frente a uma condição por demais restritiva da dinâmica quântica dos campos, que poderia resultar, potencialmente, na mera trivialidade da teoria ($\mathcal{A}_a = 0 \Longrightarrow A^a_\mu = 0$?).

Uma forma de investigar a anulação operatorial (ou não) da anomalia é através de inserções da anomalia em funções de correlação arbitrárias. Se tais inserções fossem sempre nulas, seríamos forçados a concluir que $\mathcal{A}_a = 0$ (no nível operatorial). Embora esta ainda seja uma questão em aberto para funções de correlação arbitrárias, é possivel respondê-la para a sua inserção em funções de correlação contendo somente operadores invariantes de calibre.

Para computar as funções de correlação descritas acima é preciso lembrar que todo operador O invariante de calibre pode ser expresso em termos de ψ, $\bar{\psi}$ e A_μ, e satisfaz a propriedade

$$O(\psi^g, \bar{\psi}^g, A^g_\mu) = O(\psi, \bar{\psi}, A_\mu). \tag{1.62}$$

Uma expressão equivalente da afirmação acima é:

$$O(\psi, \bar{\psi}, A^g_\mu) = O(\psi^{g^{-1}}, \bar{\psi}^{g^{-1}}, A_\mu). \tag{1.63}$$

Considerando o funcional gerador

$$Z[\lambda_i] = \int d\psi d\bar{\psi} dA_\mu \exp\left(iS\left[\psi, \bar{\psi}, A_\mu\right] + i\int dx \lambda_i O_i(\psi, \bar{\psi}, A_\mu) \right), \tag{1.64}$$

podemos obter funções de correlação arbitrárias

$$\langle 0 \left| T(O_{i_1}(x_1)...O_{i_n}(x_n)) \right| 0 \rangle = (-i)^n \left. \frac{\delta^n Z[\lambda_i]}{\delta\lambda_{i_1}(x_1)...\delta\lambda_{i_n}(x_n)} \right|_{\lambda=0}. \tag{1.65}$$

Façamos a redefinição usual $A_\mu \to A^g_\mu$ em (1.64) e depois usemos a invariância dos operadores O_i, assim como a da ação, para obtermos

$$Z[\lambda_i] = \int d\psi d\bar{\psi} dA_\mu \exp\left(iS[\psi^{g^{-1}}, \bar{\psi}^{g^{-1}}, A_\mu] + i \int dx \lambda_i O_i(\psi^{g^{-1}}, \bar{\psi}^{g^{-1}}, A_\mu) \right). \tag{1.66}$$

Lembrando-nos da invariância de calibre da medida bosônica e da não-invariância da medida fermiônica

$$dA_\mu = dA_\mu^g, \qquad d\psi d\bar{\psi} = \exp\left(-i\alpha_1[A_\mu, g^{-1}]\right) d\psi^{g^{-1}} d\bar{\psi}^{g^{-1}}, \tag{1.67}$$

temos

$$Z[\lambda_i] = \int d\psi d\bar{\psi} dA_\mu \exp\left(iS[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] + i \int dx \lambda_i O_i\left(\psi, \bar{\psi}, A_\mu\right) - i\alpha_1[A_\mu, g^{-1}] \right). \tag{1.68}$$

Infinitesimalmente,

$$\alpha_1[A_\mu, -\theta] = -\int dx \theta^a \mathcal{A}_a(A_\mu), \tag{1.69}$$

de modo que, após a expansão, acabamos com

$$Z[\lambda_i] = Z[\lambda_i] + i \int dx \theta^a(x) \int d\psi d\bar{\psi} dA_\mu \mathcal{A}_a(A_\mu) e^{iS[\psi,\bar{\psi},A_\mu] + i\int dx \lambda_i O_i\left(\psi,\bar{\psi},A_\mu\right)} \tag{1.70}$$

$$\Rightarrow \int d\psi d\bar{\psi} dA_\mu \mathcal{A}_a(A_\mu) e^{iS[\psi,\bar{\psi},A_\mu] + i\int dx \lambda_i O_i\left(\psi,\bar{\psi},A_\mu\right)} = 0. \tag{1.71}$$

Por fim, tomando derivadas funcionais arbitrárias com relação aos λ_i e depois levando-os a zero, conclui-se que

$$\langle 0 \left| T(\mathcal{A}_a(A_\mu) O_{i_1}(x_1) ... O_{i_n}(x_n)) \right| 0 \rangle = 0. \tag{1.72}$$

Portanto, a anomalia de calibre tem inserção nula em funções de correlação com operadores invariantes de calibre arbitrários. Esse é um resultado de suma importância, pois indica que a anomalia pode ser nula no subspaço de Hilbert definido pelos estados físicos. Infelizmente, não é possível fazer uma conta similar para operadores não invariantes de calibre. Análises nesse sentido devem envolver cálculos numéricos na rede, por exemplo, ou outros tipos de aproximações, para abordar o problema em um número arbitrário de dimensões. No próximo capítulo, no entanto, vamos nos focar num modelo em duas dimensões exatamente solúvel (a eletrodinâmica quiral), o que nos permitirá analisar a questão acima até o final.

Capítulo 2

Funções de correlação no modelo de Jackiw-Rajaraman

No capítulo anterior, vimos que o surgimento da anomalia em uma teoria de calibre não implica necessariamente num enterro prematuro da mesma. Sob outra lente, mais do que apresentar um elemento estranho às teorias normais, essa anomalia pode ser usada para se encontrar uma condição subsidiária que o campo A_μ deve satisfazer, o que expõe uma teoria anômala como sendo um modelo dinamicamente muito rico. Além disso, numa situação de quantização de todos os graus de liberdade do modelo, vimos que há evidências de que a anomalia é cancelada e a simetria de calibre é restaurada. Neste capítulo vamos nos aprofundar nesta análise, considerando a eletrodinâmica quiral em duas dimensões (o modelo de Jackiw-Rajaraman [4]), que é exatamente solúvel e onde podemos responder todas as questões relativas às inserções da anomalia em funções de Green arbitrárias.

2.1 Ação efetiva para a Eletrodinâmica Quiral em $d = 1+1$

A eletrodinâmica quiral em $(1+1)$ dimensões, ou *modelo de Jackiw-Rajaraman* (JR), é definida pela ação:

$$S\left[\psi, \bar{\psi}, A_\mu\right] = \int d^2x \left(-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}D\left[A_\mu\right]\psi\right), \tag{2.1}$$

onde $F_{\mu\nu}$ é o tensor de intensidade de campo, ψ são férmions de Dirac e $D\left[A_\mu\right]$ é o *operador de Dirac* da teoria, definido por

$$D\left[A_\mu\right] \equiv \gamma^\mu\left(i\partial_\mu^x + eA_\mu(x)P_+\right). \tag{2.2}$$

A convenção que utilizaremos para as matrizes γ, no espaço de Minkowski, é

$$\gamma^0 = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = -i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

$$\gamma^5 \equiv \gamma^0\gamma^1 = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Este conjunto de matrizes γ é escolhido de modo que a álgebra de Clifford seja respeitada,

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}1, \tag{2.5}$$

sendo que estamos usando $\eta^{00} = -\eta^{11} = 1$. As matrizes satisfazem $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$, $(\gamma^1)^\dagger = -\gamma^1$ e $(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5$. Os projetores $P_\pm$ são dados por $P_\pm \equiv \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5)$. Temos também mais duas relações importantes, *válidas apenas em duas dimensões*:

$$
\begin{aligned}
&[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = -2\varepsilon^{\mu\nu}\gamma^5, \\
&\gamma_\mu \gamma^5 = \varepsilon_{\mu\nu}\gamma^\nu, \\
&\Longrightarrow \mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu P_+) = \eta^{\mu\nu} - \varepsilon^{\mu\nu}
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

onde definimos $\varepsilon_{01} = -\varepsilon^{01} = 1$.

A presença de P_+ no operador de Dirac assegura que apenas as componentes esquerdas

$$\psi_L \equiv P_+\psi, \tag{2.7}$$

se acoplam ao campo A_μ. As componentes direitas

$$\psi_R \equiv P_-\psi, \tag{2.8}$$

representam férmions livres. Em termos dessas componentes a ação pode ser aberta como

$$
\begin{aligned}
S\left[\psi_L, \bar{\psi}_L, \psi_R, \bar{\psi}_R, A_\mu\right] = \int d^2x \Bigg(&-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}_L \left(i\gamma^\mu\partial^x_\mu + eA_\mu(x)\right)\psi_L \\
&+\bar{\psi}_R\left(i\gamma^\mu\partial^x_\mu\right)\Big)\psi_R.
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

A representação em termos de férmions de Dirac é, portanto, equivalente àquela escrita em termos de férmions quirais. No entanto, se vamos falar do determinante de $D\left[A_\mu\right]$, é preferível usarmos férmions de Dirac pois, nesse caso, o problema de autovalores de D é bem definido, ao contrário do que acontece se utilizarmos férmions quirais [17].

O interesse no estudo de teorias de calibre quirais bidimensionais se baseia em dois motivos. O primeiro é o fato da teoria ser exatamente solúvel, o que permite calcular a função de dois pontos fermiônica associada a uma configuração arbitrária de campo de calibre externo e, consequentemente, o determinante fermiônico e funções de correlação arbitrárias. O segundo é a aparição de uma anomalia na corrente acoplada ao campo de calibre. Com tais características, o modelo se mostra adequado para investigar, num caso concreto, a realização do cancelamento da anomalia de calibre, visto no capítulo anterior.

Começaremos mostrando em que sentido essa teoria se mostra exatamente solúvel. O funcional gerador das funções de Green da teoria acima é

$$Z[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] = \frac{1}{N} \int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} \exp\left(iS[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] + i \int d^2x (\bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi + J^\mu A_\mu) \right), \quad (2.10)$$

onde $N = N_{A_\mu} N_\psi$ é um fator de normalização necessário para garantir que $Z\,[0, 0, 0] = 1$. Fazendo a translação

$$\psi \to \psi' = \psi - \int d^2y G[A_\mu; x, y]\eta(y), \quad (2.11)$$

onde usamos a *função de Green* na presença de uma configuração A_μ arbitrária,

$$D\,[A_\mu]\, G(A_\mu; x, y) = G(A_\mu; x, y) D\,[A_\mu] = \delta^2(x - y), \quad (2.12)$$

a medida fermiônica é mantida invariante e a ação muda para

$$\begin{aligned} S[\psi', \bar{\psi}', A_\mu] &= \int d^2x \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \bar{\psi}' D\,[A_\mu]\, \psi' \right) \\ &= \int d^2x \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \bar{\psi} D\,[A_\mu]\, \psi - \bar{\psi}\eta - \bar{\eta}\psi \right) \\ &+ \int d^2x d^2y\, \bar{\eta} G(A_\mu; x, y)\eta. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Por sua vez, o termo com as correntes se torna

$$\begin{aligned} \int d^2x (\bar{\psi}'\eta + \bar{\eta}\psi' + J^\mu A_\mu) &= \int d^2x (\bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi + J^\mu A_\mu) \\ - 2 \int d^2x d^2y\, \bar{\eta} G(A_\mu; x, y)\eta. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Juntando tudo, obtemos

$$
\begin{aligned}
Z[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] &= \frac{1}{N} \int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} \\
&\times \exp \left(i \int d^2x \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \bar{\psi} D \left[A_\mu \right] \psi + J^\mu A_\mu \right. \right. \\
&\left. \left. -i \int d^2x d^2y \, \bar{\eta} G(A_\mu; x, y) \eta \right) \right) . \qquad (2.15)
\end{aligned}
$$

A integral acima é quadrática na parte fermiônica. Ela corresponde, formalmente, a

$$
\frac{1}{N_\psi} \int d\psi d\bar{\psi} \exp \left(i \int d^2x \, \bar{\psi} D \left[A_\mu \right] \psi \right) = \frac{1}{N_\psi} \det iD \left[A_\mu \right] \equiv \exp \left(iW \left[A_\mu \right] \right) . \qquad (2.16)
$$

O funcional $W [A_\mu]$ será a *ação efetiva*. Uma boa escolha de N_ψ, que remove as singularidades inerentes ao cálculo do determinante [18], é

$$
N_\psi = \det iD \left[0 \right] = \det i \left(i \gamma^\mu \partial_\mu \right) .
$$

Isso nos dá

$$
\exp \left(iW \left[A_\mu \right] \right) = \frac{\det D \left[A_\mu \right]}{\det \left(i \gamma^\mu \partial_\mu \right)} .
$$

Assim, o funcional gerador assume a forma

$$
\begin{aligned}
Z[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] = \frac{1}{N_{A_\mu}} \int dA_\mu \exp & \left(i \int d^2x \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) + iW \left[A_\mu \right] + J^\mu A_\mu \right. \\
& \left. -i \int d^2x d^2y \, \bar{\eta} G(A_\mu; x, y) \eta \right) . \qquad (2.17)
\end{aligned}
$$

Como se vê na fórmula acima, os efeitos dinâmicos dos férmions foram incorporados à função de Green $G(A_\mu; x, y)$ e à ação efetiva $W [A_\mu]$, que corresponde, essencialmente, ao logarítmo do determinante fermiônico. As manipulações acima poderiam ter sido feitas em qualquer dimensão d. Conforme mostraremos abaixo, se soubermos a função de Green fermiônica, poderemos conhecer a ação efetiva. O problema é que tal cálculo não é factível fora do caso de $d = 1 + 1$.

Mais além veremos que, graças às peculiaridades de $d = 1+1$, podemos escrever

$$\int d^2x \left(-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right) + W\left[A_\mu\right] = \int d^2x \frac{1}{2}A_\mu \Omega^{\mu\nu} A_\nu, \tag{2.18}$$

com $\Omega^{\mu\nu}$ sendo um operador inversível. Desse modo,

$$\begin{aligned} Z[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] = \frac{1}{N_{A_\mu}} \int dA_\mu \exp\left(i \int d^2x \left(\frac{1}{2}A_\mu \Omega^{\mu\nu} A_\nu\right) + J^\mu A_\mu \right. \\ \left. -i \int d^2x d^2y\, \bar{\eta} G(A_\mu; x, y)\eta\right). \end{aligned} \tag{2.19}$$

O fato da parte da ação que não depende de η e $\bar{\eta}$ ser quadrática nos leva a redefinir o campo de calibre A_μ como

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \int d^2y (\Omega^{-1})_{\mu\nu}(x,y) J^\nu(y), \tag{2.20}$$

onde $(\Omega^{-1})_{\mu\nu}(x,y)$ é a inversa do operador $\Omega^{\mu\nu}(x,y) = \Omega^{\mu\nu}\delta^2(x-y)$. Logo,

$$\begin{aligned} Z[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] = \frac{1}{N_{A_\mu}} \int dA_\mu \exp\left(i \int d^2x \left(\frac{1}{2}A_\mu \Omega^{\mu\nu} A_\nu\right) \right. \\ - \frac{i}{2} \int d^2x d^2y J_\mu(x) (\Omega^{-1})^{\mu\nu}(x-y) J_\nu(y) \\ \left. -i \int d^2x d^2y\, \bar{\eta} G(A_\mu - (\Omega^{-1})_{\mu\nu} J^\nu; x, y)\eta\right), \end{aligned} \tag{2.21}$$

o que nos faz selecionar N_{A_μ} de maneira a garantir que $Z[0,0,0] = 1$,

$$N_{A_\mu} = \int dA_\mu \exp\left(i \int d^2x \left(\frac{1}{2}A_\mu \Omega^{\mu\nu} A_\nu\right)\right). \tag{2.22}$$

2.2 Função de dois pontos fermiônica e ação efetiva

Nos concentraremos, primeiramente, no cálculo da função de Green fermiônica. Notando que ela satisfaz,

$$\gamma^{\mu}\left(i\partial_{\mu}^{x}+eA_{\mu}(x)P_{+}\right)G(A_{\mu};x,y)=\delta^{2}(x-y), \tag{2.23}$$

propomos um *ansatz* apropriado como

$$G(A_{\mu};x,y)=\exp[i(\phi(x)-\phi(y))P_{+}]G_{F}(x-y), \tag{2.24}$$

onde $G_F(x-y)$ é a inversa do operador de Dirac quando $A_\mu=0$,

$$i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}^{x}G_{F}(x-y)=\delta^{2}(x-y), \tag{2.25}$$

e $\phi\left(x\right)$ deve ser determinado pela equação (2.23). Substituindo (2.24) em (2.23),

$$\begin{aligned}
&\gamma^{\mu}\left(i\partial_{\mu}^{x}+eA_{\mu}(x)P_{+}\right)\exp[i(\phi(x)-\phi(y))P_{+}]G_{F}(x-y)\\
&=-\gamma^{\mu}\partial_{\mu}^{x}\phi\left(x\right)P_{+}G(A_{\mu};x,y)+\exp[i(\phi(x)-\phi(y))P_{-}]i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}^{x}G_{F}(x-y)\\
&+e\gamma^{\mu}A_{\mu}(x)P_{+}G(A_{\mu};x,y)\\
&=\left(-\gamma^{\mu}\partial_{\mu}^{x}\phi(x)+e\gamma^{\mu}A_{\mu}(x)\right)P_{+}G(A_{\mu};x,y)+\delta^{2}(x-y)=\delta^{2}(x-y).
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Isso implica

$$\left(\gamma^{\mu}\partial_{\mu}^{x}\phi(x)-e\gamma^{\mu}A_{\mu}(x)\right)P_{+}=0\Rightarrow\left(\Box\phi-e\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\partial_{\mu}A_{\nu}\right)P_{+}=0. \tag{2.27}$$

A partir daí, usando

$$\begin{aligned}
\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}&=\frac{1}{2}\left\{\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}\right\}+\frac{1}{2}\left[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}\right]\\
&=\eta^{\mu\nu}-\varepsilon^{\mu\nu}\gamma^{5},
\end{aligned} \tag{2.28}$$

e notando que $\gamma^5P_+=P_+$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\left(\Box\phi-e\left(\eta^{\mu\nu}-\varepsilon^{\mu\nu}\right)\partial_{\mu}A_{\nu}\right)P_{+}=0\\
&\Longrightarrow\Box\phi-e\left(\eta^{\mu\nu}-\varepsilon^{\mu\nu}\right)\partial_{\mu}A_{\nu}=0.
\end{aligned}$$

A introdução da função de Green para o d'Alembertiano livre, D_F,

$$\Box D_F(x-y) = \delta^2(x-y), \tag{2.29}$$

permite escrever ϕ como:

$$\phi(x) = e\int d^2z D_F(x-z)(\partial_\mu^z + \tilde{\partial}_\mu^z)A^\mu(z), \tag{2.30}$$

onde definimos $\tilde{\partial}_\mu = \varepsilon_{\mu\nu}\partial^\nu$.

Para prosseguir, precisamos de expressões mais explícitas para $D_F(x-y)$ e $G_F(x-y)$. De (2.29) temos

$$D_F(x-y) = -\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{e^{ik(x-y)}}{k^2+i\varepsilon} \tag{2.31}$$

Introduzindo a seguinte integral na equação acima

$$\frac{1}{k^2+i\varepsilon} = -i\int_0^\infty dt e^{it(k^2+i\varepsilon)} \tag{2.32}$$

$$\Rightarrow D_F(x-y) = \frac{i}{(2\pi)^2}\int_0^\infty dt e^{-t\varepsilon}\int d^2k e^{i[k(x-y)+tk^2]}. \tag{2.33}$$

Após completar o quadrado na exponencial, realizar a integração em k e fazer $\varepsilon \to 0$ ficamos com

$$D_F(x-y) = \frac{i}{4\pi}\int_0^\infty \frac{dt}{t}e^{-\frac{i(x-y)^2}{4t}}.$$

O integrando possui uma singularidade em $t=0$, que torna o propagador mal definido. É possível remediar o problema através da introdução de um parâmetro de corte (violando alguns dos axiomas de Wightman [19]). Felizmente, tais problemas não afetam derivadas do propagador. O propagador livre fermiônico pode ser escrito como

$$G_F(x-y) = -i\gamma^\mu\partial_\mu^x D_F(x-y). \tag{2.34}$$

Nessa forma, é óbvio que ele satisfaz (2.25). Daí,

$$\begin{aligned} G_F(x-y) &= \frac{1}{4\pi}\gamma^\mu \int_0^\infty \frac{dt}{t}\partial_\mu^x e^{-\frac{i(x-y)^2}{4t}} \\ &= -\frac{i}{8\pi}\gamma^\mu (x-y)_\mu \int_0^\infty \frac{dt}{t^2} e^{-\frac{i(x-y)^2}{4t}} \\ &= \frac{i}{8\pi}\gamma^\mu (x-y)_\mu \int_\infty^0 ds e^{-\frac{is(x-y)^2}{4}} \\ &= -\frac{\gamma^\mu (x-y)_\mu}{2\pi (x-y)^2}, \end{aligned}$$

onde foi feita a mudança de variáveis $s = 1/t$. Substituindo em (2.24), temos

$$G(A_\mu; x, y) = \exp\left[ieP_+ \int d^2z S_\mu(z; x, y) A^\mu(z)\right] \times \left(-\frac{\gamma^\mu (x-y)_\mu}{2\pi(x-y)^2}\right), \tag{2.35}$$

sendo

$$S_\mu(z; x, y) = \left[D_F(x-z) - D_F(y-z)\right](\partial_\mu^z + \tilde{\partial}_\mu^z). \tag{2.36}$$

Como dissemos, se conhecemos a função de Green fermiônica, podemos calcular o determinante de $D\left[A_\mu\right]$. Ele pode ser definido em termos da função de Green, de modo formal, com o uso da identidade $\ln(\det D) = \mathrm{tr}\ (\ln D)$. Calculando a sua derivada em relação à constante de acoplamento [20],

$$\frac{d}{de}\ln(\det D) = \frac{d}{de}\mathrm{tr}\,(\ln D) = \mathrm{tr}\left(\frac{d}{de}\ln D\right) = \mathrm{tr}\left(D^{-1}\frac{dD}{de}\right). \tag{2.37}$$

Lembrando que a inversa do operador de Dirac $D^{-1} = G(A_\mu; x, y)$, obtemos

$$\frac{d}{de}\ln\det D = \int d^2x\ \mathrm{tr}\left[G(A_\mu; x, x)\gamma_\mu P_+\right] A^\mu(x), \tag{2.38}$$

onde o traço remanescente é sobre os índices espinoriais. A função de Green $G\left(A_\mu; x, y\right)$ é singular na diagonal, como é bem sabido. Uma prescrição encontrada comumente na literatura é a regularização via separação de pontos [21]:

$$\mathrm{tr}[G(A_\mu; x, x)\gamma_\mu P_+] = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}\mathrm{tr}[G(A_\mu; x+\frac{\varepsilon}{2}, x-\frac{\varepsilon}{2})\gamma_\mu P_+] + (\varepsilon \longleftrightarrow -\varepsilon)\,. \tag{2.39}$$

Nesta regularização, há uma ambiguidade na definição do traço: ele pode ser definido a menos de um operador que tenda à identidade quando $x \to y$:

$$\mathrm{tr}\left[G(A_\mu; x, y)\gamma_\mu P_+\right] \to \mathrm{tr}\left[G(A_\mu; x, y)\gamma_\mu P_+ \exp\left(ieaP_+ \int_x^y A^\nu dz_\nu\right)\right].$$

Dessa forma, o traço passa a ser formalmente invariante de calibre quando $a = 1$, uma vez que, por uma transformação de calibre $A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + e^{-1}\partial_\mu \Lambda$ (que implica $\phi \to \phi' = \phi + \Lambda$) as contribuições vindas da função de Green cancelam com as oriundas da exponencial. Logo,

$$\begin{aligned}\frac{d}{de}\ln\det D = \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int d^2x\,\mathrm{tr}\Big[G\left(A_\mu; x + \frac{\varepsilon}{2}, x - \frac{\varepsilon}{2}\right)\gamma_\mu P_+ \\ \times \exp\left(ieaP_+ \int_{x+\frac{\varepsilon}{2}}^{x-\frac{\varepsilon}{2}} A^\nu dz_\nu\right)\Big] A^\mu(x) + (\varepsilon \longleftrightarrow -\varepsilon)\,. \end{aligned} \tag{2.40}$$

No entanto, o processo de subtração das divergências, implícito na adoção do limite simétrico acima, irá culminar num resultado que não é invariante de calibre. Vejamos a contribuição de cada parte:

$$D_F(x + \frac{\varepsilon}{2} - z) - D_F(x - \frac{\varepsilon}{2} - z) \approx \varepsilon^\mu \partial_\mu^x D_F(x - z); \tag{2.41}$$

$$e^{i[\phi(x)-\phi(y)]} \approx 1 + ieP_+ \int d^2z \left[\varepsilon^\mu \partial_\mu^x D_F(x - z)\right]\left[(\partial_\nu^z + \tilde{\partial}_\nu^z)A^\nu(z)\right]; \tag{2.42}$$

$$G_F(\varepsilon) \simeq -\frac{\gamma^\mu \varepsilon_\mu}{2\pi\varepsilon^2}; \tag{2.43}$$

$$\exp\left(ieaP_+ \int_{x+\frac{\varepsilon}{2}}^{x-\frac{\varepsilon}{2}} A^\nu dz_\nu\right) \simeq 1 - ieaP_+\varepsilon_\mu A^\mu(x). \tag{2.44}$$

Tendo em mãos os traços relevantes (2.6), chegamos a:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{de}\ln\det D \\
&= \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int d^2x\,\mathrm{tr}\left[\left(1 + ieP_+\int d^2z\,[\varepsilon^\alpha\partial^x_\alpha D_F(x-z)]\left[(\partial^z_\nu + \tilde{\partial}^z_\nu)A^\nu(z)\right]\right)\right. \\
&\times\left.\left(-\frac{\gamma^\beta\varepsilon_\beta}{2\pi\varepsilon^2}\right)\gamma_\mu P_+ A^\mu(x)\,(1 - ieaP_+\varepsilon_\gamma A^\gamma(x))\right] + (\varepsilon \longleftrightarrow -\varepsilon) \\
&= -\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int d^2x\frac{\varepsilon_\beta}{2\pi\varepsilon^2}\,\left(\eta^{\beta\mu} - \varepsilon^{\beta\mu}\right)A_\mu(x) \\
&+ \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int d^2x\frac{iea\varepsilon_\beta\varepsilon_\gamma}{2\pi\varepsilon^2}\,\left(\eta^{\beta\mu} - \varepsilon^{\beta\mu}\right)A^\gamma(x)A_\mu(x) \\
&- \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int d^2xe\frac{i\varepsilon^\alpha\varepsilon_\beta}{2\pi\varepsilon^2}\left(\eta^{\beta\mu} - \varepsilon^{\beta\mu}\right) \\
&\times\int d^2z\,[\partial^x_\alpha D_F(x-z)]\left[(\partial^z_\nu + \tilde{\partial}^z_\nu)A^\nu(z)\right]A_\mu(x) \\
&+ (\varepsilon \longleftrightarrow -\varepsilon)
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Os termos ímpares em ε^μ são cancelados pela natureza simétrica do limite. De modo a preservar a invariância de Lorentz, tomamos também

$$\varepsilon^\mu\varepsilon^\nu = \frac{1}{2}\varepsilon^2\eta^{\mu\nu}. \tag{2.46}$$

Obtemos assim,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{de}\ln\det D &= i\int d^2x\frac{ea}{4\pi}\,A^\mu(x)A_\mu(x) \\
&- i\frac{e}{4\pi}\int d^2xd^2zA^\mu(x)\left(\partial^x_\mu + \tilde{\partial}^x_\mu\right)D_F(x-z)\left[(\partial^z_\nu + \tilde{\partial}^z_\nu)A^\nu(z)\right] \\
&= i\frac{e}{4\pi}\int d^2xA^\mu\left(a\eta^{\mu\nu} - \left(\partial_\mu + \tilde{\partial}_\mu\right)\frac{1}{\Box}(\partial_\nu + \tilde{\partial}_\nu)\right)A^\nu.
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Integrando em e,

$$\begin{aligned}
&\int_0^e de\left(\frac{d}{de}\ln\det D\right) = \ln\frac{\det D}{\det i\gamma^\mu\partial_\mu} \\
&\equiv iW[A] = i\frac{e^2}{8\pi}\int d^2xA^\mu\left(a\eta^{\mu\nu} - \left(\partial_\mu + \tilde{\partial}_\mu\right)\frac{1}{\Box}(\partial_\nu + \tilde{\partial}_\nu)\right)A^\nu.
\end{aligned} \tag{2.48}$$

O termo $\det i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}$ não depende nem de campos, nem de correntes e é esperado, como fator de normalização, para definir adequadamente o funcional gerador. Conforme observado anteriormente, a razão dos determinantes é bem definida, embora cada um deles, isoladamente, não o seja.

2.3 A anomalia de calibre e seu valor esperado

Tendo calculado a ação efetiva $W\left[A_{\mu}\right]$, podemos, agora, nos concentrar em encontrar a anomalia. Para tanto, vamos usar os resultados do capítulo anterior para calcular o *termo de Wess-Zumino*, $\alpha_1\left[A_{\mu}, g\right]$:

$$\alpha_1[A_{\mu}, g] = W[A_{\mu}^{g}] - W[A_{\mu}]. \tag{2.49}$$

Lembramos que, no caso abeliano em questão, se $g = \exp\left(i\theta\right)$,

$$A_{\mu}^{g} = A_{\mu} - \frac{1}{e}\partial_{\mu}\theta, \tag{2.50}$$

e então

$$\begin{aligned}
W\left[A_{\mu}^{g}\right] = \frac{e^2}{8\pi}\int d^2x A^{\mu,g}\left(a\eta^{\mu\nu} - \left(\partial_{\mu} + \tilde{\partial}_{\mu}\right)\frac{1}{\Box}(\partial_{\nu} + \tilde{\partial}_{\nu})\right)A^{\nu,g} \\
= W\left[A_{\mu}\right] - \frac{e}{8\pi}\int d^2x A^{\mu}\left(a\eta^{\mu\nu} - \left(\partial_{\mu} + \tilde{\partial}_{\mu}\right)\frac{1}{\Box}(\partial_{\nu} + \tilde{\partial}_{\nu})\right)\partial^{\nu}\theta \\
- \frac{e}{8\pi}\int d^2x \partial^{\mu}\theta\left(a\eta^{\mu\nu} - \left(\partial_{\mu} + \tilde{\partial}_{\mu}\right)\frac{1}{\Box}(\partial_{\nu} + \tilde{\partial}_{\nu})\right)A^{\nu} \\
+ \frac{1}{8\pi}\int d^2x\, \partial^{\mu}\theta\left(a\eta^{\mu\nu} - \left(\partial_{\mu} + \tilde{\partial}_{\mu}\right)\frac{1}{\Box}(\partial_{\nu} + \tilde{\partial}_{\nu})\right)\partial^{\nu}\theta.
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Fazemos algumas integrações por partes na fórmula acima, tendo em mente as propriedades:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\partial}_\mu \partial^\mu = \varepsilon_{\mu\nu}\partial^\nu\partial^\mu = 0 = \partial_\mu \tilde{\partial}^\mu, \\
\frac{1}{\Box}\Box f(x) &\equiv \int d^2z D_F(x-z)\,\Box^z f(z) = \int d^2z\left(\Box^z D_F(x-z)\right) f(z) = f(x), \\
\Box\frac{1}{\Box} f(x) &\equiv \int d^2z \Box^x D_F(x-z) f(z) = f(x),
\end{aligned} \tag{2.52}
$$

e obtemos

$$
\begin{aligned}
&W\left[A_\mu^g\right] = W\left[A_\mu\right] \\
&-\frac{e}{4\pi}\int d^2x A^\mu\left((a-1)\,\partial_\mu\theta - \tilde{\partial}_\mu\theta\right) + \frac{a-1}{8\pi}\int d^2x\,\partial^\mu\theta\partial_\mu\theta \\
&\Longrightarrow \alpha_1[A_\mu, g] = \int d^2x\left(\frac{a-1}{8\pi}\partial^\mu\theta\partial_\mu\theta - \frac{e}{4\pi}A^\mu\left((a-1)\,\partial_\mu\theta - \tilde{\partial}_\mu\theta\right)\right).
\end{aligned} \tag{2.53}
$$

A anomalia de calibre é calculada como visto no capítulo anterior:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}(x) &\equiv \left.\frac{\delta\alpha_1[A_\mu, g]}{\delta\theta(x)}\right|_{\theta=0} \\
&= \frac{e}{4\pi}\left((a-1)\,\partial_\mu - \tilde{\partial}_\mu\right) A^\mu(x) \equiv h_\mu A^\mu(x),
\end{aligned} \tag{2.54}
$$

com

$$
h_\mu = \frac{e}{4\pi}\left((a-1)\,\partial_\mu - \tilde{\partial}_\mu\right). \tag{2.55}
$$

Essa anomalia é a que aparece violando a conservação da corrente de calibre, definida no capítulo 1:

$$
\begin{aligned}
J^\mu(x) &= \frac{1}{e}\frac{\delta S_M}{\delta A_\mu(x)} = \bar{\psi}\gamma^\mu P_+\psi, \\
\langle 0\,|\partial_\mu J^\mu(x)|\,0\rangle_{A_\mu} &= \mathcal{A}(x).
\end{aligned} \tag{2.56}
$$

É nossa intenção aproveitar o fato de que o modelo JR é exatamente solúvel para calcular explicitamente inserções de $\mathcal{A}$ em funções de Green arbitrárias.

Vamos começar com o próprio valor esperado de $\mathcal{A}$:

$$K(x) = \langle 0 \left| \mathcal{A}(x) \right| 0 \rangle . \tag{2.57}$$

Este objeto é facilmente calculável a partir do funcional gerador (2.17) como

$$K(x) = \frac{1}{N_{A_\mu}} h_\mu(x) \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} \right) Z\left[J_\mu, 0, 0\right] \bigg|_{J^\mu=0} , \tag{2.58}$$

onde lembramos que o funcional gerador com as correntes fermiônicas nulas é dado por

$$\begin{aligned} Z[J_\mu, 0, 0] &= \frac{1}{N_{A_\mu}} \\ &\times \int dA_\mu \exp\left(i \int d^2x \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) + iW\left[A_\mu\right] + i \int d^2x J^\mu A_\mu \right). \end{aligned} \tag{2.59}$$

Como mencionamos anteriormente, observamos agora que a parte da ação independente de J^μ é quadrática em A^μ:

$$\begin{aligned} &\int d^2x \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) + W\left[A_\mu\right] \\ &= \int d^2x \left(\frac{1}{2} A_\mu \left(\Box \eta^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{e^2}{4\pi} \left(a\eta^{\mu\nu} - \left(\partial^\mu + \tilde{\partial}^\mu \right) \frac{1}{\Box} (\partial^\nu + \tilde{\partial}^\nu) \right) \right) A_\nu \right) \\ &\equiv \int d^2x \frac{1}{2} A_\mu \Omega^{\mu\nu} A_\nu . \end{aligned} \tag{2.60}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} K\left(x\right) &= \frac{1}{N_{A_\mu}} h_\mu(x) \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} \right) \\ &\times \int dA \exp\left(i \int d^2x \left(\frac{1}{2} A_\mu \Omega^{\mu\nu} A_\nu + J^\mu A_\mu \right) \right) \bigg|_{J_\mu=0} . \end{aligned} \tag{2.61}$$

Redefinimos o campo de calibre A_μ como

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \int d^2y(\Omega^{-1})_{\mu\nu}(x,y)J^\nu(y), \tag{2.62}$$

onde

$$\int d^2z\Omega^{\mu\alpha}(x,z)(\Omega^{-1})_{\alpha\nu}(z,y) = \delta^\mu_\nu\delta^2(x-y), \tag{2.63}$$

com $\Omega^{\mu\alpha}(x,z) = \Omega^{\mu\alpha}\delta^2(x-z)$. Isso nos dá

$$\begin{aligned}
K(x) &= \langle 0 |\mathcal{A}(x)| 0\rangle \\
&= h_\mu(x)\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_\mu(x)}\right) \\
&\times \exp\left(-\frac{i}{2}\int d^2xd^2yJ_\mu(x)(\Omega^{-1})^{\mu\nu}(x-y)J_\nu(y)\right)\Bigg|_{J_\mu=0} \qquad (2.64)\\
&= 0, \qquad (2.65)
\end{aligned}$$

onde lembramos que escolhemos o fator de normalização que faltava como

$$N_{A_\mu} = \int dA_\mu \exp\left(i\int d^2x\left(\frac{1}{2}A_\mu\Omega^{\mu\nu}A_\nu\right)\right). \tag{2.66}$$

O resultado nulo para o valor esperado da anomalia era esperado pela argumentação do capítulo anterior. O mérito de nosso cálculo é precisamente o da verificação explícita dessa propriedade no exemplo em questão, o que mostra, no mínimo, a consistência interna do método de integração funcional. Na verdade, como a anomalia é linear no campo de calibre, devemos supor que a anulação do seu valor esperado no vácuo seja compulsória, desde que se queira preservar a simetria de Poincaré da teoria ([8]).

2.4 Inserções da anomalia de calibre em funções de correlação

O resultado obtido acima (anulação do valor esperado no vácuo da anomalia de calibre) pode se dar em função do próprio operador de campo ser nulo (por alguma questão de consistência desconhecida). Uma indicação de que isso esteja ocorrendo seria a obtenção de um resultado nulo para a inserção do operador que representa a anomalia em funções de correlação arbitrárias. Se isso for verdade, o fato do valor esperado da anomalia de calibre ser nulo não possui nenhum valor, pois a teoria teria uma grande possibilidade de revelar-se trivial ou inconsistente. Para verificar se é esse o caso, precisamos calcular inserções da anomalia em funções de correlação quaisquer. Caso o resultado seja sempre nulo, isso poderá requerer que $A_\mu = 0$, no sentido operatorial, o que implicaria na trivialidade da teoria. Dando sequência a este raciocínio, nesta seção, iremos calcular algumas funções de correlação representativas, para testar as conclusões gerais obtidas no capítulo anterior.

2.4.1 Exemplos de funções de correlação bosônicas

Começamos pela inserção da anomalia na função de 1 ponto bosônica:

$$\begin{aligned}
K^{\nu}(x,y) &= \langle 0\,|T[\mathcal{A}(x)A^{\nu}(y)]|\,0\rangle = \langle 0\,|T[h_{\mu}(x)\,A^{\mu}(x)A^{\nu}(y)]|\,0\rangle \\
&= h_{\mu}(x)\left(\left(\frac{1}{i}\right)^{2}\frac{\delta^{2}}{\delta J_{\mu}(x)\delta J_{\nu}(y)}\right)Z[J_{\mu},0,0]\Big|_{J_{\mu}=0} \\
&= h_{\mu}(x)\left(\left(\frac{1}{i}\right)^{2}\frac{\delta^{2}}{\delta J_{\mu}(x)\delta J_{\nu}(y)}\right) \\
&\times \exp\left(-\frac{i}{2}\int d^{2}x'd^{2}y'J_{\alpha}(x')\left(\Omega^{-1}\right)^{\alpha\beta}(x'-y')\,J_{\beta}(y')\right)\Big|_{J_{\mu}=0} \\
&= ih_{\mu}(x)\,(\Omega^{-1})^{\mu\nu}(x-y).
\end{aligned} \tag{2.67}$$

O operador $\Omega^{-1}(x-y)$ foi calculado no apêndice. Ele é dado por

$$(\Omega^{-1})^{\mu\nu}(x-y) = \int\frac{d^{2}k}{(2\pi)^{2}}(\Omega^{-1})^{\mu\nu}(k)e^{ik(x-y)}, \tag{2.68}$$

onde

$$\begin{aligned}
\left(\Omega^{-1}\right)^{\mu\nu}(k) &= \frac{1}{\lambda\,(a-1)\left(k^{2}-\lambda\frac{a^{2}}{a-1}\right)} \\
&\times\left(\left(k^{2}-\lambda a\right)\eta^{\mu\nu}+\tilde{k}^{\mu}\tilde{k}^{\nu}-\lambda\frac{\left(k^{\mu}+\tilde{k}^{\mu}\right)\left(k^{\nu}+\tilde{k}^{\nu}\right)}{k^{2}}\right),
\end{aligned} \tag{2.69}$$

com $\lambda = e^{2}/4\pi$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
ih_{\mu}(x)\,(\Omega^{-1})^{\mu\nu}(x-y) &= \frac{i\lambda}{e}\left((a-1)\,\partial_{\mu}-\tilde{\partial}_{\mu}\right)(\Omega^{-1})^{\mu\nu}(x-y) \\
&= -\frac{\lambda}{e}\int\frac{d^{2}k}{(2\pi)^{2}}\left((a-1)\,k_{\mu}-\tilde{k}_{\mu}\right)\left(\Omega^{-1}\right)^{\mu\nu}(k)\,e^{ik(x-y)} \\
&= -\frac{1}{e}\int\frac{d^{2}k}{(2\pi)^{2}}k^{\nu}e^{ik(x-y)} \\
&= \frac{i}{e}\partial^{\nu}\delta^{2}(x-y).
\end{aligned} \tag{2.70}$$

O resultado acima pode ser imediatamente generalizado para o cálculo de

$$K^{\mu_1 \cdots \mu_n}(x, x_1, ..., x_n) = \langle 0 \left| T[\mathcal{A}(x) A^{\mu_1}(x_1) A^{\mu_2}(x_2) ... A^{\mu_n}(x_n)] \right| 0 \rangle .$$

Se n for par, em todos os termos possíveis sempre teremos um J sobressalente que cairá da exponencial, tornando impossível o pareamento de todas as derivadas funcionais[1]. Nesse caso,

$$K^{\mu_1 \cdots \mu_n}(x, x_1 ... x_n) = 0, \quad n \text{ par.} \tag{2.71}$$

Se n for ímpar, poderemos ter uma contribuição não nula à função de correlação. Consideremos, como exemplo, $n = 3$:

$$\begin{aligned}
&K^{\mu_1\mu_2\mu_3}(x, x_1, x_2, x_3) \\
&= \langle 0 \left| T[\mathcal{A}(x) A^{\mu_1}(x_1) A^{\mu_2}(x_2) A^{\mu_3}(x_3)] \right| 0 \rangle \\
&= \langle 0 \left| T[h_\mu(x) A^{\mu}(x) A^{\mu_1}(x_1) A^{\mu_2}(x_2) A^{\mu_3}(x_3)] \right| 0 \rangle \\
&= h_\mu(x) \left(i(\Omega^{-1})^{\mu\mu_1}(x - x_1) \right) \left(i(\Omega^{-1})^{\mu_2\mu_3}(x_2 - x_3) \right) \\
&+ h_\mu(x) \left(i(\Omega^{-1})^{\mu\mu_2}(x - x_2) \right) \left(i(\Omega^{-1})^{\mu_1\mu_3}(x_1 - x_3) \right) \\
&+ h_\mu(x) \left(i(\Omega^{-1})^{\mu\mu_3}(x - x_3) \right) \left(i(\Omega^{-1})^{\mu_1\mu_2}(x_1 - x_2) \right) \\
&= \frac{i}{e} \partial^{\mu_1} \delta^2(x - x_1) \left(i(\Omega^{-1})^{\mu_2\mu_3}(x_2 - x_3) \right) \\
&+ \frac{i}{e} \partial^{\mu_2} \delta^2(x - x_2) \left(i(\Omega^{-1})^{\mu_1\mu_3}(x_1 - x_3) \right) \\
&+ \frac{i}{e} \partial^{\mu_3} \delta^2(x - x_1) \left(i(\Omega^{-1})^{\mu_1\mu_2}(x_1 - x_2) \right) .
\end{aligned} \tag{2.72}$$

[1]Para produzir um resultado não nulo, o número total de derivadas funcionais agindo num termo do tipo

$$\exp\left(-\frac{i}{2} \int d^2x d^2y J_\mu(x) (\Omega^{-1})^{\mu\nu}(x - y) J_\nu(y) \right)$$

deve ser par. Dessa forma, quando tomamos $J_\mu = 0$ ao final da conta, haverá contribuições não nulas.

O resultado pode ser facilmente generalizado para n ímpar qualquer. O importante, para nosso estudo, é o fato de que tais funções de correlação, não invariantes de calibre, *não são nulas.*

Vamos agora calcular a inserção da anomalia de calibre em funções de Green de campos invariantes de calibre. Exemplificamos com

$$\begin{aligned}
K^{\mu\nu}(x,y) &= \langle 0\,|T[\mathcal{A}(x)F^{\mu\nu}(y)]|\,0\rangle \\
&= h_\rho\,(x)\left(\left(\frac{1}{i}\right)\frac{\delta}{\delta J_\rho(x)}\left(\partial_y^\mu\left(\frac{1}{i}\right)\frac{\delta}{\delta J_v(y)} - \partial_y^\nu\left(\frac{1}{i}\right)\frac{\delta}{\delta J_\mu(y)}\right)\right) \\
&\times\,\exp\left(-\frac{i}{2}\int d^2x'd^2y'J_\alpha\,(x')\,(\Omega^{-1})^{\alpha\beta}\,(x'-y')\,J_\beta\,(y')\right)\Big|_{J_\mu=0} \\
&= ih_\rho\,(x)\,\partial_y^\mu(\Omega^{-1})^{\rho\nu}\,(x-y) - ih_\rho\,(x)\,\partial_y^\nu(\Omega^{-1})^{\rho\mu}\,(x-y)\,. \qquad (2.73)
\end{aligned}$$

Calculando os termos parciais:

$$\begin{aligned}
&ih_\rho\,(x)\,\partial_y^\mu(\Omega^{-1})^{\rho\nu}(x-y) = \frac{i\lambda}{e}\left((a-1)\,\partial_\rho^x - \tilde{\partial}_\rho^x\right)\partial_y^\mu(\Omega^{-1})^{\rho\nu}(x-y) \\
&= \frac{i\lambda}{e}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\left((a-1)\,k_\rho - \tilde{k}_\rho\right)k^\mu\left(\Omega^{-1}\right)^{\rho\nu}(k)\,e^{ik(x-y)} \\
&= \frac{i}{e}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}k^\mu k^\nu e^{ik(x-y)} \\
&= -\frac{i}{e}\partial^\mu\partial^\nu\delta^2\,(x-y)\,; \qquad (2.74)
\end{aligned}$$

$$ih_\rho\,(x)\,\partial_y^\nu(\Omega^{-1})^{\rho\mu}(x-y) = -\frac{i}{e}\partial^\nu\partial^\mu\delta^2\,(x-y)\,. \qquad (2.75)$$

Portanto,

$$K^{\mu\nu}(x,y) = 0.$$

Tal anulação se repetirá para cada pareamento entre $\mathcal{A}(x)$ e $F^{\mu_k\nu_k}(x_k)$, fornecendo um resultado nulo para a função de Green genérica

$$K^{\mu_1\nu_1...\mu_n\nu_n}(x,y) = \langle 0\,|T[\mathcal{A}(x)F^{\mu_1\nu_1}(x_1)...F^{\mu_n\nu_n}(x_n)]|\,0\rangle = 0, \qquad (2.76)$$

com n arbitrário. Mais uma vez, esse cálculo confirma as conclusões mais gerais do capítulo 1.

2.4.2 Exemplos de funções de correlação fermiônicas

Vamos analisar inserções da anomalia em funções de correlação com operadores que contenham campos fermiônicos. Antes de passar a essa conta, no entanto, vamos calcular

$$K(\bar{x},x) = \left\langle 0 \left| T\left[\bar{\psi}(\bar{x})\psi(x)\right]\right| 0 \right\rangle . \tag{2.77}$$

O resultado para $K(\bar{x},x)$ será utilizado nos cálculos das funções de Green com inserções. Utilizando a expressão para $Z[J_\mu,\eta,\bar{\eta}]$ dada pela equação (2.21):

$$\begin{aligned}
K(\bar{x},x) &= \left\langle 0 \left| T[\bar{\psi}(\bar{x})\psi(x)\right| 0 \right\rangle \\
&= \left(\frac{1}{i}\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\eta}(x)}\right) Z[0,\eta,\bar{\eta}] \left(\frac{1}{i}\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\eta(\bar{x})}\right)\Bigg|_{\eta=\bar{\eta}=0} \\
&= \frac{1}{N_{A_\mu}}\left(\frac{1}{i}\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\eta}(x)}\right)\int dA_\mu \exp\left(i\int d^2x'\frac{1}{2}A_\mu\Omega^{\mu\nu}A_\nu\right. \\
&\left. -i\int d^2x' d^2\bar{x}'\,\bar{\eta}\,(x')\,G(A_\mu;x',\bar{x}')\eta\,(\bar{x})\right)\left(\frac{1}{i}\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\eta(\bar{x})}\right) \\
&= \frac{i}{N_{A_\mu}}\int dA_\mu G(A_\mu;x,\bar{x})\exp\left(i\int d^2x'\frac{1}{2}A_\mu\Omega^{\mu\nu}A_\nu\right).
\end{aligned} \tag{2.78}$$

Inserindo a forma explicíta de G, eq. (2.35), temos

$$\begin{aligned}
K(\bar{x},x) = \frac{i}{N_{A_\mu}}\int dA_\mu \exp\left(i\int d^2x'\frac{1}{2}A_\mu\Omega^{\mu\nu}A_\nu + eP_+S^\mu(x';x,\bar{x})A_\mu\,(x')\right) \\
\times G_F(x-\bar{x}).
\end{aligned} \tag{2.79}$$

Observamos agora que, se α é uma função escalar qualquer,

$$\begin{aligned}\exp\left(P_+\alpha\right) &= 1 + P_+\alpha + \frac{1}{2!}\left(P_+\alpha\right)^2 + ... \\ &= P_- + P_+\left(1 + \alpha + \frac{1}{2!}\alpha^2 + ...\right) \\ &= P_- + P_+\exp\left(\alpha\right). \end{aligned} \tag{2.80}$$

Levando isso em conta, escrevemos

$$\begin{aligned} &K(\bar{x}, x) = \frac{i}{N_{A_\mu}}\int dA_\mu \exp\left(i\int d^2x'\frac{1}{2}A_\mu\Omega^{\mu\nu}A_\nu\right)P_- G_F(x-\bar{x}) \\ &+ \frac{i}{N_{A_\mu}}\int dA_\mu \exp\left(i\int d^2x'\frac{1}{2}A_\mu\Omega^{\mu\nu}A_\nu + eS^\mu(x';x,\bar{x})A_\mu\left(x'\right)\right)P_+ G_F(x-\bar{x}) \\ &= \left[P_- + P_+\exp\left(ie^2\int d^2x'd^2x'' S_\mu(x';x,\bar{x})\left(\Omega^{-1}\right)^{\mu\nu}\left(x'-x''\right)S_\nu(x'';x,\bar{x})\right)\right] \\ &\times iG_F(x-\bar{x}). \end{aligned} \tag{2.81}$$

Vamos calcular em detalhe o termo dentro da exponencial, na equação anterior:

$$\begin{aligned} &\int d^2x'd^2x'' S_\mu(x';x,\bar{x})\left(\Omega^{-1}\right)^{\mu\nu}\left(x'-x''\right)S_\nu(x'';x,\bar{x}) \\ &= -\int d^2x'd^2x''\left[D_F(x-x') - D_F(\bar{x}-x')\right](\partial_\mu^{x'} + \tilde{\partial}_\mu^{x'}) \\ &\times \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\left(\Omega^{-1}\right)^{\mu\nu}(k)\, e^{ik(x'-x'')} \\ &\times (\partial_\nu^{x''} + \tilde{\partial}_\nu^{x''})\left[D_F(x-x'') - D_F(\bar{x}-x'')\right] \\ &= \int d^2x'd^2x''\left[D_F(x-x') - D_F(\bar{x}-x')\right] \\ &\times \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\left(k_\mu + \tilde{k}_\mu\right)\left(k_\nu + \tilde{k}_\nu\right)\left(\Omega^{-1}\right)^{\mu\nu}(k)\, e^{ik(x'-x'')} \\ &\times \left[D_F(x-x'') - D_F(\bar{x}-x'')\right]. \end{aligned} \tag{2.82}$$

Observamos que

$$\left(k_\mu + \tilde{k}_\mu\right)\left(k_\nu + \tilde{k}_\nu\right)\left(\Omega^{-1}\right)^{\mu\nu}(k) = \frac{k^4}{\lambda\left(a-1\right)\left(k^2 - \lambda\frac{a^2}{a-1}\right)}. \tag{2.83}$$

Um termo típico da soma acima é:

$$\begin{aligned}
&\int d^2x'd^2x''D_F(x-x')D_F(x-x'')\frac{k^4}{\lambda\left(a-1\right)\left(k^2-\lambda\frac{a^2}{a-1}\right)}e^{ik(x'-x'')} \\
&=\int d^2x'd^2x''\int\frac{d^2k_1}{\left(2\pi\right)^2}\int\frac{d^2k_2}{\left(2\pi\right)^2}\int\frac{d^2k}{\left(2\pi\right)^2}\frac{1}{k_1^2}\frac{1}{k_2^2}\frac{k^4e^{ik(x'-x'')}e^{ik_1(x-x')}e^{ik_2(x-x'')}}{\lambda\left(a-1\right)\left(k^2-\lambda\frac{a^2}{a-1}\right)} \\
&=\int\frac{d^2k}{\left(2\pi\right)^2}\frac{1}{\lambda\left(a-1\right)\left(k^2-\lambda\frac{a^2}{a-1}\right)}.
\end{aligned} \tag{2.84}$$

O outro termo típico é:

$$\begin{aligned}
&\int d^2x'd^2x''D_F(x-x')D_F(\bar{x}-x'')\frac{k^4}{\lambda\left(a-1\right)\left(k^2-\lambda\frac{a^2}{a-1}\right)}e^{ik(x'-x'')} \\
&=\int d^2x'd^2x''\int\frac{d^2k_1}{\left(2\pi\right)^2}\int\frac{d^2k_2}{\left(2\pi\right)^2}\int\frac{d^2k}{\left(2\pi\right)^2}\frac{1}{k_1^2}\frac{1}{k_2^2}\frac{k^4e^{ik(x'-x'')}e^{ik_1(x-x')}e^{ik_2(\bar{x}-x'')}}{\lambda\left(a-1\right)\left(k^2-\lambda\frac{a^2}{a-1}\right)} \\
&=\int\frac{d^2k}{\left(2\pi\right)^2}\frac{e^{ik(x-\bar{x})}}{\lambda\left(a-1\right)\left(k^2-\lambda\frac{a^2}{a-1}\right)}.
\end{aligned} \tag{2.85}$$

Dessa forma, temos

$$\begin{aligned}
&\int d^2x'd^2x''S_\mu(x';x,\bar{x})\left(\Omega^{-1}\right)^{\mu\nu}\left(x'-x''\right)S_\nu(x'';x,\bar{x}) \\
&=\frac{1}{\lambda\left(a-1\right)}\int\frac{d^2k}{\left(2\pi\right)^2}\frac{\left(2-e^{ik(x-\bar{x})}-e^{-ik(x-\bar{x})}\right)}{k^2-\lambda\frac{a^2}{a-1}}.
\end{aligned} \tag{2.86}$$

Este termo tende a zero quando $x\to\bar{x}$, fazendo com que a estrutura de singularidades na diagonal de $K(\bar{x},x)$ seja exatamente a mesma daquela do propagador livre, $G_F(x-\bar{x})$.

A inserção da anomalia na função de correlação fermiônica calculada acima é dada por

$$
\begin{aligned}
K(x,\bar{x}_1,x_1) &= \left\langle 0 \left| T[\mathcal{A}(x)\bar{\psi}(\bar{x}_1)\psi(x_1) \right| 0 \right\rangle \\
&= h_\mu(x)\left(\frac{1}{i}\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta J_\mu(x)}\right)\left(\frac{1}{i}\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \bar{\eta}(x_1)}\right) \\
&\times Z[J_\mu,\eta,\bar{\eta}]\left(\frac{1}{i}\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \eta(\bar{x}_1)}\right)\Bigg|_{J_\mu=\eta=\bar{\eta}=0} \\
&= h_\mu(x)\left(\frac{1}{i}\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta J_\mu(x)}\right) \\
&\times \left[\exp\left(-\frac{i}{2}\int d^2x'd^2y'J_{\mu'}(x')\left(\Omega^{-1}\right)^{\mu'\nu'}(x'-y')J_{\nu'}(y')\right)\right. \\
&\times \frac{i}{N_{A_\mu}}\int dA_\mu \exp\left(i\int d^2x'\frac{1}{2}A_\mu\Omega^{\mu\nu}A_\nu\right) \\
&\times \left. G(A_\mu-(\Omega^{-1})_{\mu\nu}J^\nu;x_1,\bar{x}_1)\right]_{J_\mu=0}.
\end{aligned}
\tag{2.87}
$$

Lembrando que

$$
G(A_\mu;x,y) = \exp\left[ieP_+\int d^2z S_\mu(z;x,y)A^\mu(z)\right]G_F(x-y),
$$

onde

$$
S_\mu(z;x,y) = \left[D_F(x-z)-D_F(y-z)\right](\partial_\mu^z+\tilde{\partial}_\mu^z),
$$

vemos que

$$
\begin{aligned}
&G(A_\mu-(\Omega^{-1})_{\mu\nu}J^\nu;x_1,\bar{x}_1) \\
&= \exp\left[-ieP_+\int d^2zd^2yS_\mu(z;x_1,\bar{x}_1)(\Omega^{-1})_{\mu\nu}(z,y)J^\nu(y)\right] \\
&\times G(A_\mu;x_1,\bar{x}_1).
\end{aligned}
\tag{2.88}
$$

O fator na exponencial é independente de A_μ e sai da integral funcional (no entanto, ele tem que ser levado em consideração na conta, pois temos que tomar ainda uma derivada funcional em relação a $J_\mu(x)$). Com isso, vemos que o resultado é

$$\begin{aligned}
K(x,\bar{x}_1,x_1) &= h_\mu(x)\left(\frac{1}{i}\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta J_\mu(x)}\right) \\
&\times \left[\exp\left(-\frac{i}{2}\int d^2x'd^2y' J_{\mu'}(x')\,(\Omega^{-1})^{\mu'\nu'}(x'-y')\,J_{\nu'}(y')\right)\right. \\
&\times \exp\left[-ieP_+\int d^2z d^2y S_\alpha(z;x_1,\bar{x}_1)(\Omega^{-1})^{\alpha\beta}(z,y)J_\beta(y)\right]\Bigg|_{J_\mu=0} \\
&\times \underbrace{\frac{i}{N_{A_\mu}}\int dA_\mu \exp\left(i\int d^2x'\frac{1}{2}A_\mu\Omega^{\mu\nu}A_\nu\right)G(A_\mu;x_1,\bar{x}_1)}_{K(x_1,\bar{x}_1)} \\
&= -ieh_\mu(x)\left(\int d^2z S_\alpha(z;x_1,\bar{x}_1)(\Omega^{-1})^{\alpha\mu}(z,x)\right)P_+K(x_1,\bar{x}_1). \qquad (2.89)
\end{aligned}$$

Outras funções de correlação do tipo

$$\left\langle 0\left|T[\mathcal{A}(x)\bar{\psi}(\bar{x}_1)\psi(x_1)\bar{\psi}(\bar{x}_2)\psi(x_2)...\bar{\psi}(\bar{x}_n)\psi(x_n)\right|0\right\rangle$$

vão essencialmente envolver produtos de fatores como o calculado acima. Vamos analisar em maior detalhe o fator anterior a $P_+K(x_1,\bar{x}_1)$ em (2.89):

$$\begin{aligned}
&\int d^2z h_\mu\left(x\right) S_\alpha(z;x_1,\bar{x}_1)(\Omega^{-1})^{\alpha\mu}(z,x) \\
&= \frac{\lambda}{e}\Big(\left(a-1\right)\partial^x_\mu - \tilde{\partial}^x_\mu\Big)\int d^2z D_F(x_1-z)(\partial^z_\alpha+\tilde{\partial}^z_\alpha) \\
&\times \int \frac{d^2k}{\left(2\pi\right)^2}(\Omega^{-1})^{\alpha\mu}(k)e^{ik(z-x)} - (x_1 \longleftrightarrow \bar{x}_1) \\
&= \frac{\lambda}{e}\int d^2z D_F(x_1-z) \\
&\times \int \frac{d^2k}{\left(2\pi\right)^2}\Big(\left(a-1\right)k_\mu - \tilde{k}_\mu\Big)(k_\alpha+\tilde{k}_\alpha)(\Omega^{-1})^{\alpha\mu}(k)e^{ik(z-x)} \\
&- (x_1 \longleftrightarrow \bar{x}_1) \\
&= -\frac{\lambda}{e}\int d^2z\int \frac{d^2p}{\left(2\pi\right)^2}\frac{e^{ip(x_1-z)}}{p^2+i\varepsilon} \\
&\times \int \frac{d^2k}{\left(2\pi\right)^2}\Big(\left(a-1\right)k_\mu - \tilde{k}_\mu\Big)(k_\alpha+\tilde{k}_\alpha)(\Omega^{-1})^{\alpha\mu}(k)e^{ik(z-x)} \\
&- (x_1 \longleftrightarrow \bar{x}_1) \\
&= -\frac{\lambda}{e}\int \frac{d^2k}{\left(2\pi\right)^2}\Big(\left(a-1\right)k_\mu - \tilde{k}_\mu\Big)(k_\alpha+\tilde{k}_\alpha)(\Omega^{-1})^{\alpha\mu}(k)\frac{e^{ik(x_1-x)}}{k^2+i\varepsilon} \\
&- (x_1 \longleftrightarrow \bar{x}_1) \\
&= -\frac{1}{e}\left(\delta\left(x_1-x\right)-\delta\left(\bar{x}_1-x\right)\right). \qquad (2.90)
\end{aligned}$$

Portanto,

$$K(x,\bar{x}_1,x_1) = i\left(\delta\left(x_1-x\right)-\delta\left(\bar{x}_1-x\right)\right)P_+K(x_1,\bar{x}_1). \qquad (2.91)$$

Vemos, então, que a estrutura de singularidades de $K(x,\bar{x}_1,x_1)$ quando $x_1 \to \bar{x}_1$ é a mesma de $K(\bar{x}_1,x_1)$. A função de Green nesse limite

$$K(x_1,x_1) = \left\langle 0\left|T[\bar{\psi}(x_1)\psi(x_1)\right|0\right\rangle$$

demanda renormalização extra (renormalização de operador composto [22]), com regularização e subsequente subtração de divergências. No entanto, o termo $\delta\left(x_1-x\right)-$

$\delta\left(\bar{x}_1 - x\right)$ não é divergente, nem necessita de regularização. Quando $x_1 \rightarrow \bar{x}_1$ ele simplesmente vai a zero, o que nos diz que, independente da renormalização a ser feita sobre $K(\bar{x}_1, x_1)$,

$$K(x, x_1, x_1) = \left\langle 0 \left| T[\mathcal{A}(x)\bar{\psi}(x_1)\psi(x_1) \right| 0 \right\rangle = 0. \tag{2.92}$$

Isso confirma, mais uma vez, o que encontramos no capítulo anterior, de maneira geral e independente da dimensão do espaço-tempo.

Conclusão

A questão da consistência e/ou não trivialidade de uma teoria com anomalia de calibre permanece não respondida em geral. No entanto, no caso específico de duas dimensões, o exemplo oferecido pelo modelo de Jackiw-Rajaraman fornece boas razões para que esperemos por progressos rumo à solução dessa questão. O modelo é intensamente estudado desde a sua formulação e solução, em 1985. Mais recentemente, com o advento do resultado geral de anulação da anomalia de calibre no subespaço de Hilbert associado aos estados físicos, ele voltou a ser relevante como laboratório, devido a podermos calcular explicitamente todas as funções de Green que necessitamos.

Com isso em mente, vários cálculos foram desenvolvidos explicitamente no presente trabalho. Verificamos a anulação direta do valor esperado no vácuo da anomalia. Também calculamos inserções da anomalia em funções de Green puramente bosônicas e puramente fermiônicas com correlatores invariantes e não invariantes de calibre. Nossos resultados confirmam as expectativas formuladas com base na análise mais geral (em d dimensões): a anomalia de calibre, inserida em funções de Green com correlatores invariantes de calibre fornece resultado nulo. No entanto, quando os correlatores não são invariantes de calibre, o resultado é definitivamente não nulo. Isso significa que a anomalia de calibre é um operador não nulo no espaço de Hilbert, o que nos afasta da hipótese da trivialidade da teoria.

A sequência natural deste trabalho é a análise do caso não abeliano, também em duas dimensões. Também neste caso os efeitos dinâmicos associados aos férmions foram calculados. A ação efetiva resultante é a ação de Wess-Zumino-Witten [19]. No entanto, dado o fato dela não ser quadrática no campo de calibre, a teoria efetiva não é exatamente solúvel e o cálculo de funções de correlação arbitrárias só pode ser feito de maneira aproximada. Dada a sua natureza não perturbativa, tal estudo requer o emprego de métodos numéricos, sobre os quais pretendemos nos debruçar a partir de agora.

Apêndice: Cálculo de $\Omega^{-1}{}_{\mu\nu}$

Vamos calcular explicitamente $(\Omega^{-1})^{\mu\nu}(x-y)$. Para isso, utilizamos a sua representação de Fourier:

$$(\Omega^{-1})_{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}(\Omega^{-1})_{\mu\nu}(k)e^{ik(x-y)}. \tag{1}$$

O requerimento de que a expressão acima seja a inversa de $\Omega^{\mu\nu}$ nos dá

$$\begin{aligned}
&\int d^2z\Omega^{\mu\alpha}(x-z)(\Omega^{-1})_{\alpha\nu}(z-y) = \delta^{\mu}_{\nu}\delta^2(x-y) = \delta^{\mu}_{\nu}\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}e^{ik(x-y)} \\
&= \int d^2z \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}(\Omega^{-1})_{\alpha\nu}(k) \\
&\times \left(\left[\Box\eta^{\mu\alpha} - \partial^{\mu}\partial^{\alpha} + \frac{e^2}{4\pi}a\eta^{\mu\alpha}\right]_x \delta^2(x-z)\right. \\
&\left.- \left(\partial^{\mu}_x + \tilde{\partial}^{\mu}_x\right) D_F(x-z)\left(\partial^{\alpha}_z + \tilde{\partial}^{\alpha}_z\right)\right) e^{ik(z-y)} \\
&= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}(\Omega^{-1})_{\alpha\nu}(k)\left(-k^2\eta^{\mu\alpha} + k^{\mu}k^{\alpha} + \frac{e^2}{4\pi}a\eta^{\mu\alpha}\right)e^{ik(x-y)} \\
&- \int d^2z \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}(\Omega^{-1})_{\alpha\nu}(k)\frac{e^2}{4\pi}\left(\left(\partial^{\mu}_x + \tilde{\partial}^{\mu}_x\right) D_F(x-z)\left(\partial^{\alpha}_z + \tilde{\partial}^{\alpha}_z\right)\right)e^{ik(z-y)}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Vamos trabalhar mais detalhadamente o último termo. Para isso, notamos que

$$
\begin{aligned}
&\int d^2z \left(\left(\partial_x^\mu + \tilde{\partial}_x^\mu\right) D_F\left(x-z\right)\left(\partial_z^\alpha + \tilde{\partial}_z^\alpha\right)\right) e^{ik(z-y)} \\
&= -\int d^2z \left(\left(\partial_z^\mu + \tilde{\partial}_z^\mu\right) D_F\left(x-z\right)\left(\partial_z^\alpha + \tilde{\partial}_z^\alpha\right)\right) e^{ik(z-y)} \\
&= \int d^2z \left(D_F\left(x-z\right)\left(\partial_z^\mu + \tilde{\partial}_z^\mu\right)\left(\partial_z^\alpha + \tilde{\partial}_z^\alpha\right)\right) e^{ik(z-y)} \\
&= -\int d^2z \left(D_F\left(x-z\right)\left(k^\mu + \tilde{k}^\mu\right)\left(k^\alpha + \tilde{k}^\alpha\right)\right) e^{ik(z-y)} \\
&= \int d^2z \left(\int \frac{d^2p}{\left(2\pi\right)^2}\frac{e^{ip(x-z)}}{p^2+i\varepsilon}\left(k^\mu + \tilde{k}^\mu\right)\left(k^\alpha + \tilde{k}^\alpha\right)\right) e^{ik(z-y)} \\
&= \int d^2z \int \frac{d^2p}{\left(2\pi\right)^2} e^{i(k-p)z} e^{i(px-ky)} \frac{\left(k^\mu + \tilde{k}^\mu\right)\left(k^\alpha + \tilde{k}^\alpha\right)}{p^2+i\varepsilon} \\
&= \frac{\left(k^\mu + \tilde{k}^\mu\right)\left(k^\alpha + \tilde{k}^\alpha\right)}{k^2+i\varepsilon} e^{ik(x-y)}.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Com isso,

$$
\begin{aligned}
&\int d^2z \Omega^{\mu\alpha}\left(x-z\right)\left(\Omega^{-1}\right)_{\alpha\nu}\left(z-y\right) \\
&= \int \frac{d^2k}{\left(2\pi\right)^2} e^{ik(x-y)} \left(\Omega^{-1}\right)_{\alpha\nu}\left(k\right) \\
&\times \left(-k^2\eta^{\mu\alpha} + k^\mu k^\alpha + \frac{e^2}{4\pi} a \eta^{\mu\alpha} - \frac{e^2}{4\pi}\frac{\left(k^\mu + \tilde{k}^\mu\right)\left(k^\alpha + \tilde{k}^\alpha\right)}{k^2+i\varepsilon}\right) \\
&= \int \frac{d^2k}{\left(2\pi\right)^2} \delta_\nu^\mu e^{ik(x-y)}, \\
&\Longrightarrow \left(-k^2\eta^{\mu\alpha} + k^\mu k^\alpha + \frac{e^2}{4\pi} a \eta^{\mu\alpha} - \frac{e^2}{4\pi}\frac{\left(k^\mu + \tilde{k}^\mu\right)\left(k^\alpha + \tilde{k}^\alpha\right)}{k^2+i\varepsilon}\right)\left(\Omega^{-1}\right)_{\alpha\nu}\left(k\right) \\
&= \delta_\nu^\mu.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Notamos que $\left(\Omega^{-1}\right)_{\alpha\nu}$ tem que ser simétrico em relação a α e ν (pois ele aparece contraído com duas correntes J_α e J_ν). Como ele só pode depender de k^μ, $\tilde{k}^\mu$ e k^2, sua estrutura tensorial tem que ser do tipo

$$(\Omega^{-1})_{\mu\nu}(k) = \alpha\left(k^2\right)\eta_{\mu\nu} + \beta\left(k^2\right)\tilde{k}_\mu\tilde{k}_\nu + \gamma\left(k^2\right)(k_\mu\widetilde{k}_\nu + \widetilde{k}_\mu k_\nu), \tag{5}$$

com α, β e γ sendo funções a serem determinadas através da equação (4). Definimos

$$\lambda = \frac{e^2}{4\pi}. \tag{6}$$

Vamos optar pela inversão direta da matriz Ω, dado que ela é bidimensional e sua inversão é simples. De fato, se

$$\Omega = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \tag{7}$$

e $\det\Omega = ab - c^2 \neq 0$, então

$$\Omega^{-1} = \frac{1}{ab - c^2}\begin{pmatrix} b & -c \\ -c & a \end{pmatrix}. \tag{8}$$

A matriz $\Omega\,(k)$ é dada por

$$\Omega^{\mu\alpha}\,(k) = \left(-k^2 + \lambda a\right)\eta^{\mu\alpha} + k^\mu k^\alpha - \lambda\frac{\left(k^\mu + \tilde{k}^\mu\right)(k^\alpha + \tilde{k}^\alpha)}{k^2}. \tag{9}$$

Explicitamente,

$$\begin{aligned}
\Omega_{00} &= \left(k^1\right)^2 + \lambda a - \lambda\frac{\left(k^0 + k^1\right)^2}{k^2}, \\
\Omega_{11} &= \left(k^0\right)^2 - \lambda a - \lambda\frac{\left(k^0 + k^1\right)^2}{k^2}, \\
\Omega_{01} &= k^0 k^1 - \lambda\frac{\left(k^0 + k^1\right)^2}{k^2}, \\
\Omega_{10} &= k^0 k^1 - \lambda\frac{\left(k^0 + k^1\right)^2}{k^2}.
\end{aligned}$$

Lembramos que $\varepsilon^{\alpha\mu}\varepsilon_{\alpha\nu} = -\delta^\mu_\nu$ e que, portanto, $\tilde{k}^\mu\tilde{k}_\mu = -k^2$. Além disso, $k^\mu\tilde{k}_\mu = 0$ e

$$k^\mu k^\nu - \tilde{k}^\mu\tilde{k}^\nu = k^2\eta^{\mu\nu}, \tag{10}$$

o que mostra que os tensores $k^\mu k^\nu$ e $\tilde{k}^\mu \tilde{k}^\nu$ não são independentes. Componente a componente do vetor k^μ temos

$$\tilde{k}^0 = \varepsilon^{01} k_1 = -k_1 = k^1; \quad \tilde{k}_0 = \varepsilon_{01} k^1 = -k_1, \tag{11}$$

$$\tilde{k}^1 = \varepsilon^{10} k_0 = k_0 = k^0; \quad \tilde{k}_1 = \varepsilon_{10} k^0 = -k_0. \tag{12}$$

Com isso, podemos calcular o determinante de Ω:

$$\begin{aligned}
\det \Omega &= \left(\left(k^1\right)^2 + \lambda a - \lambda \frac{\left(k^0 + k^1\right)^2}{k^2} \right) \left(\left(k^0\right)^2 - \lambda a - \lambda \frac{\left(k^0 + k^1\right)^2}{k^2} \right) \\
&- \left(k^0 k^1 - \lambda \frac{\left(k^0 + k^1\right)^2}{k^2} \right)^2 \\
&= \left(\left(k^1\right)^2 + \lambda a \right) \left(\left(k^0\right)^2 - \lambda a \right) - \left(\left(k^1\right)^2 + \lambda a \right) \lambda \frac{\left(k^0 + k^1\right)^2}{k^2} \\
&- \left(\left(k^0\right)^2 - \lambda a \right) \lambda \frac{\left(k^0 + k^1\right)^2}{k^2} + \left(\lambda \frac{\left(k^0 + k^1\right)^2}{k^2} \right)^2 \\
&- \left(k^0 k^1\right)^2 + 2 k^0 k^1 \lambda \frac{\left(k^0 + k^1\right)^2}{k^2} - \left(\lambda \frac{\left(k^0 + k^1\right)^2}{k^2} \right)^2 \\
&= \lambda a \left(\left(k^0\right)^2 - \left(k^1\right)^2 \right) - (\lambda a)^2 - \left(\left(k^0\right)^2 + \left(k^1\right)^2 - 2 k^0 k^1 \right) \lambda \frac{\left(k^0 + k^1\right)^2}{k^2} \\
&= \lambda a k^2 - (\lambda a)^2 - \left(k^0 - k^1\right)^2 \lambda \frac{\left(k^0 + k^1\right)^2}{k^2} \\
&= \lambda (a-1) k^2 - (\lambda a)^2 = \lambda (a-1) \left(k^2 - \lambda \frac{a^2}{a-1} \right).
\end{aligned}$$

Ele é diferente de zero, o que nos leva a escrever diretamente a matriz Ω^{-1}:

$$\begin{aligned}
\Omega^{-1}_{00} &: \frac{1}{\lambda (a-1) \left(k^2 - \lambda \frac{a^2}{a-1} \right)} \left(\left(k^0\right)^2 - \lambda a - \lambda \frac{\left(k^0 + k^1\right)^2}{k^2} \right) \\
&= \frac{1}{\lambda (a-1) \left(k^2 - \lambda \frac{a^2}{a-1} \right)} \left(\left(k_0\right)^2 - \lambda a - \lambda \frac{\left(k_0 - k_1\right)^2}{k^2} \right),
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
\Omega^{-1}_{11} &: \frac{1}{\lambda (a-1) \left(k^2 - \lambda \frac{a^2}{a-1} \right)} \left(\left(k^1\right)^2 + \lambda a - \lambda \frac{\left(k^0 + k^1\right)^2}{k^2} \right) \\
&= \frac{1}{\lambda (a-1) \left(k^2 - \lambda \frac{a^2}{a-1} \right)} \left(\left(k_1\right)^2 + \lambda a - \lambda \frac{\left(k_0 - k_1\right)^2}{k^2} \right),
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\Omega_{01}^{-1} : \frac{1}{\lambda\left(a-1\right)\left(k^2-\lambda\frac{a^2}{a-1}\right)}\left(-k^0k^1+\lambda\frac{\left(k^0+k^1\right)^2}{k^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\lambda\left(a-1\right)\left(k^2-\lambda\frac{a^2}{a-1}\right)}\left(k_0k_1+\lambda\frac{\left(k_0-k_1\right)^2}{k^2}\right), \tag{15}$$

$$\Omega_{10}^{-1} : \frac{1}{\lambda\left(a-1\right)\left(k^2-\lambda\frac{a^2}{a-1}\right)}\left(-k^0k^1+\lambda\frac{\left(k^0+k^1\right)^2}{k^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\lambda\left(a-1\right)\left(k^2-\lambda\frac{a^2}{a-1}\right)}\left(k_0k_1+\lambda\frac{\left(k_0-k_1\right)^2}{k^2}\right). \tag{16}$$

Essas fórmulas podem ser resumidas em notação explicitamente covariante:

$$\left(\Omega^{-1}\right)_{\mu\nu}\left(k\right) = \frac{1}{\lambda\left(a-1\right)\left(k^2-\lambda\frac{a^2}{a-1}\right)}$$

$$\times\left(\left(k^2-\lambda a\right)\eta_{\mu\nu}+\tilde{k}_\mu\tilde{k}_\nu-\lambda\frac{\left(k_\mu+\tilde{k}_\mu\right)\left(k_\nu+\tilde{k}_\nu\right)}{k^2}\right). \tag{17}$$

Bibliografia

[1] T.-P. Cheng e L.-F. Li, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*, Oxford at Clarendon Press, 2006.

[2] S. Coleman, *Aspects of Symmetry: Selected Erice Lectures*, Cambridge University Press, 1988.

[3] K. Fujikawa e H. Suzuki, *Path Integrals and Quantum Anomalies*, The International Series of Monographs on Physics, Oxford University Press, 2004.

[4] R. Jackiw e R. Rajaraman, *Phys. Rev. Lett.* **54** (1985) 1219.

[5] L. D. Faddeev e S. L. Shatashvili, *Phys. Lett. B* **167** (1986) 225.

[6] K. Harada e I. Tsutsui, *Phys. Lett. B* **183**, 311 (1987) 311.

[7] O. Babelon, F. Shaposnik e C. Viallet, *Phys. Lett. B* **177** (1986) 385.

[8] G. L. S. Lima, R. Chaves e S. A. Dias, *Annals of Physics* **327** (2012) 1435.

[9] C. A. Linhares, H. J. Rothe e K. D. Rothe, *Phys. Rev. D* **35** (1987) 2501.

[10] H. O. Girotti, H. J. Rothe e K. D. Rothe, *Phys. Rev. D* **33** (1986) 514; H. O. Girotti, H. J. Rothe e K. D. Rothe, *Phys. Rev. D* **34** (1986) 592.

[11] D. Boyanovsky, *Nucl. Phys. B* **294** (1987) 223.

[12] R. Casana e S. A. Dias, *Jour. Phys. G* **27** (2001) 1501.

[13] R. Casana e S. A. Dias, *Int. Jour. Mod. Phys. A* **15** (2000) 4603.

[14] R. Casana e S. A. Dias, *Int. Jour. Mod. Phys. A* **17** (2002) 4601.

[15] G. L. S. Lima, *Uma abordagem alternativa da relação entre simetria de calibre e conservação da corrente*, tese de doutorado, CBPF, 2011.

[16] R. J. Rivers, *Path Integral Methods in Quantum Field Theory,* Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 1988.

[17] L. Alvarez-Gaumé e P. Ginsparg, *Annals of Physics* **161** (1985) 423.

[18] B. Hatfield, *Quantum Field Theory of Point Particles and Strings*, Frontiers in Physics, Perseus Books, 1992.

[19] E. Abdalla, M. C. Abdalla e K. D. Rothe, *Non-Perturbative Methods in Two-Dimensional Quantum Field Theory*, 2nd edition, World Scientific, 2001

[20] S. A. Dias e C. A. Linhares, *Phys. Rev. D* **45** (1992) 2162.

[21] R. Jackiw e K. Johnson, *Phys. Rev.* **182** (1969) 1459.

[22] J. C. Collins, *Renormalization: An Introduction to Renormalization, the Renormalization Group and the Operator-Product Expansion*, Cambridge University Press, 1986.