

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF

Dissertação de Mestrado

**Efeitos de uma Eletrodinâmica Não-Local
na Radiação de Corpo Negro**

Guilherme Nunes Bremm

Rio de Janeiro, RJ, Brasil

Março de 2014

**Efeitos de uma Eletrodinâmica Não-Local
na Radiação de Corpo Negro**

por

Guilherme Nunes Bremm

Dissertação apresentada ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Felipe Tovar Falciano

Rio de Janeiro, RJ, Brasil

Março de 2014

Agradecimentos

São muitos aos quais sou grato, mas em especial

- ao professor Dr. Felipe Tovar Falciano, pela paciência e dedicação;
- aos professores do CBPF por partilharem de seus conhecimentos e contribuírem em minha formação acadêmica;
- aos colegas, Lucas, Carlos, Rodrigo, Max, Martha, Ana, José, Antônio, Jefferson não só pela amizade, mas também pelas inúmeras discussões que tivemos;
- à minha mãe;
- e a CAPES pelo apoio financeiro.

Quaedam sententia attrahens in sermo latinus parat.

Resumo

Apresentamos aqui a proposta de B. Mashhoon para a modificação da teoria eletrodinâmica para observadores não-inerciais. Essa nova teoria, que abre mão do postulado da localidade, generaliza o conceito de transformação entre referenciais inerciais e acelerados e influencia diretamente o comportamento dos campos físicos.

Baseado nisso, analisamos como as ondas eletromagnéticas são percebidas por observadores uniformemente acelerados e então aplicamos esse resultado a uma radiação de corpo negro homogênea e isotrópica, de onde vimos que os efeitos não-locais fazem-se (significativamente) presentes apenas no início do movimento acelerado.

Palavras-chave: Eletrodinâmica; Não-localidade; Observadores Acelerados; Corpo-negro.

Abstract

We present here B. Mashhoon's proposition for the modification in the electrodynamic theory for non-inertial observers. This new theory, which relinquishes the assumption of locality, generalizes the concept of transformation between inertial and accelerated reference systems and directly influences the behavior of the physical fields.

Based on this, we analyze how the electromagnetic waves are perceived by uniformly accelerated observers and then apply this result to an homogeneous and isotropic blackbody radiation, from where we've seen that the non-local effects are only (significantly) present at the beginning of the accelerated movement.

Keywords: Electrodynamics; Nonlocality; Accelerated Observers; Blackbody.

Conteúdo

Introdução	2
1 Revisão Teórica	3
1.1 Princípio da Relatividade de Galileu	3
1.2 Teoria Eletrodinâmica de Maxwell	4
1.2.1 Ondas Eletromagnéticas Planas	6
1.2.2 Vetor de Poynting Eletromagnético	6
1.3 Relatividade Restrita e a Transformação de Lorentz	7
1.3.1 Composição de Velocidades Relativísticas	11
1.4 Movimento Hiperbólico	12
1.5 Formalismo Covariante	14
1.6 Descrição Covariante dos Campos Eletromagnéticos	15
1.7 Transformação de Lorentz para o Campo Eletromagnético	17
1.8 Tensor Energia-Momento Eletromagnético	18
1.9 Corpo Negro	19
1.9.1 Lei de Planck	19
2 Observadores Acelerados	24
2.1 Tetradas	26
2.2 Construção de Frenet-Serret	27
2.3 Transporte Fermi-Walker	28
3 Eletrodinâmica Não-local	31
3.1 Limitações da Localidade	31
3.2 Equações Integrais	32
3.2.1 Equivalência entre Equações Diferenciais Lineares e Equações Integrais	33
3.2.2 Solução de Equações Integrais	34
3.3 Construindo a Teoria Não-local	36
3.4 Eletrodinâmica Não-local por Observadores Uniformemente Acelerados	38
4 A Radiação de Corpo Negro por Observadores Acelerados	44
4.1 Propriedades de Coerência da Radiação de Corpo Negro	46
4.2 Influência da Não-Localidade na Radiação de Corpo Negro	52
4.2.1 Não-Localidade na Densidade de Energia	52
4.2.2 Não-Localidade no Fluxo de Calor	58
4.2.3 Não-Localidade no Tensor de Tensões	60
Considerações Finais	63

Introdução

O desenvolvimento da Física não gravitacional e, em particular, da teoria eletrodinâmica, foi baseado no conceito de referenciais inerciais, proposto por Newton na sua descrição da dinâmica dos corpos rígidos. Em contrapartida, é bem sabido, que tais referenciais não passam de artifícios matemáticos, pois todos os referenciais reais são, em certo grau, acelerados. Além disso, até o momento, ao descrever a relação entre sistemas inerciais e acelerados, fez-se uso do chamado postulado da localidade, o qual é aqui posto em cheque.

Apenas abandonando esse postulado é possível uma descrição completa dos sistemas ondulatórios em referenciais acelerados. Nesse sentido, uma generalização na teoria eletrodinâmica é desejada não somente pelo caráter mais realístico a ela conferida, mas também por uma questão de princípio, cujo entendimento pode alargar nossa compreensão da natureza e apontar efeitos que, em sua ausência, não nos seriam tangíveis.

É justamente atrás da manifestação desses efeitos que aplicamos a teoria não-local na descrição da radiação de corpo negro, uma vez que este é um exemplo de amplo interesse e recorrente na Física.

Essa dissertação está organizada da seguinte maneira:

No capítulo 1, exponho a formulação teórica básica sobre radiação eletromagnética, transformação de Lorentz, relatividade restrita, movimento hiperbólico e corpo negro. Todos esses assuntos não são difíceis de serem encontrados (inclusive com abordagens mais aprofundadas) em livros textos, no entanto, é conveniente em prol da didática e estruturação das idéias apresentá-los aqui. Com isso, espero que a dissertação seja, pelo menos modestamente, auto-suficiente.

O capítulo 2 é focado na descrição de observadores acelerados dentro da relatividade restrita, onde apresento o conceito de tetradas que constitui parte fundamental do formalismo matemático em referenciais acelerados.

No capítulo 3, após uma breve explanação sobre equações integrais, apresento os argumentos que sustentam a teoria não-local e também sua construção. Ainda reproduzo, explicitando todos os cálculos, a aplicação dessa teoria para o caso de um observador uniformemente acelerado e como a onda eletromagnética se comporta de acordo com este observador.

Finalmente no capítulo 4 calculo os efeitos da teoria não-local no tensor energia-momento de uma radiação de corpo negro homogênea e isotrópica vista pelo observador constantemente acelerado.

Capítulo 1

Revisão Teórica

1.1 Princípio da Relatividade de Galileu

No século XVI, Galileu Galilei observou que o comportamento dos fenômenos mecânicos permanecia inalterado fossem estes executados em terra firme ou qualquer outro local o qual se movimentasse com velocidade constante em relação à superfície terrestre. Jazia nesse fato o pilar que fundamentaria as bases para a mecânica dos corpos desenvolvida por Isaac Newton alguns anos depois. Já na Primeira Lei de Newton, a lei da inércia, enunciada como

“Todo corpo em repouso ou com velocidade constante em relação a um referencial inercial assim permanecerá a menos que sobre ele alguma força atue.”

ele faz uso dos referenciais analisados por Galileu, chamando-os de referenciais inerciais, como pano de fundo do seu sistema descritivo.

Em boa aproximação podemos considerar localmente a superfície terrestre como um referencial inercial. Supomos então uma partícula cuja posição é caracterizada por \mathbf{r} e velocidade $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ em relação a algum determinado ponto do chão. Imaginemos agora outro sistema de referência que se movimenta com velocidade constante \mathbf{u} em relação ao referencial anterior e cuja origem coincida com a deste no instante de tempo $t = 0$, um vagão que parte do ponto mencionado, por exemplo. Nesse sistema, o vetor posição \mathbf{r}' da partícula em questão relaciona-se com as coordenadas anteriores por

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{u}t, \quad (1.1)$$

e “evidentemente” o tempo em ambos os sistemas de referência é o mesmo

$$t' = t, \quad (1.2)$$

essas duas Eqs. 1.1 e 1.2 representam a chamada **transformação de Galileu** e parecem ser intuitivas com base no ponto de vista cotidiano. Ainda delas é imediato obter a relação entre as velocidades de ambos os referenciais

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{u}, \quad (1.3)$$

de onde vemos que a velocidade em diferentes referenciais é uma soma direta com a velocidade relativa entre esses referenciais. No entanto, a variação dessas velocidades, isto é, a aceleração é invariante perante

a mudança de referencial, pois uma vez que $\mathbf{u} = \text{constante}$ temos

$$\mathbf{a}' = \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{a}. \quad (1.4)$$

Com base nisso se dá a Segunda Lei de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, onde Newton especifica a equação que governa um sistema mecânico através do conceito de força \mathbf{F} que atua em um corpo de massa inercial m e provoca neste uma aceleração \mathbf{a} . Naturalmente, o princípio da relatividade apontado por Galileu está assimilado na Segunda Lei, pois apenas a aceleração é levada em consideração na dinâmica do sistema de modo que é impossível detectar um movimento retilíneo uniforme entre referenciais inerciais pelas leis da dinâmica.

1.2 Teoria Eletrodinâmica de Maxwell

Em 1864, o físico-matemático escocês Maxwell resume o conhecimento sobre os fenômenos elétricos e magnéticos [1], adquirido devido a vários cientistas de maneira essencialmente empírica, em quatro equações que em notação diferencial são expressas pela *Lei de Gauss*

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (1.5)$$

pela forma magnética da Lei de Gauss, a qual prevê a ausência de monopólos magnéticos

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.6)$$

pela *Lei de Faraday*

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.7)$$

e pela *Lei de Ampère*

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.8)$$

para quaisquer distribuições de carga ρ e corrente elétrica \mathbf{j} . Essas quatro equações 1.5 - 1.8 são as chamadas **equações de Maxwell** e representam o conjunto de leis que dita o comportamento de toda eletrodinâmica clássica.

As equações acima além de descreverem todos os fenômenos eletromagnéticos observados até então, levam a conclusões que dificilmente seriam percebidas sem a estruturação dada por Maxwell. Isso pode ser visto mais facilmente considerando um sistema sem cargas ou correntes elétricas, isto é, $\rho = 0$ e $\mathbf{j} = 0$ de modo que ficamos com as chamadas as equações de Maxwell homogêneas

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (1.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.10)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (1.11)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0. \quad (1.12)$$

As Eqs. 1.11 e 1.12 mostram a dependência mútua entre os campos elétricos e magnéticos. Aplicando o rotacional na Eq. 1.11

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \frac{\partial(\nabla \times \mathbf{B})}{\partial t} = 0 \quad (1.13)$$

utilizando a identidade

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (1.14)$$

e as Eqs. 1.9 e 1.12 em 1.13 ficamos com

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.15)$$

e da mesma forma para \mathbf{B}

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.16)$$

da onde vemos que cada componente dos campos \mathbf{E} e \mathbf{B} obedece a equação da onda e propaga-se com velocidade

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 2,99792458 \times 10^8 \text{ m s}^{-1} \quad (1.17)$$

a qual concordava surpreendentemente bem com os valores medidos da velocidade da luz na época.

As equações de Maxwell ainda são passíveis de estudo no que diz respeito a sua estrutura matemática. A Eq. 1.6 permite a definição do campo magnético em termos de uma nova função $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$

$$\mathbf{B} \equiv \nabla \times \mathbf{A}, \quad (1.18)$$

uma vez que

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0, \quad (1.19)$$

é um identidade vetorial, ou seja, é válida para qualquer vetor \mathbf{A} .

Levando esse resultado na Eq. 1.7

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0, \quad (1.20)$$

de forma que podemos escrever

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \equiv -\nabla \phi, \quad (1.21)$$

ou ainda

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (1.22)$$

As funções $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ e $\phi(\mathbf{r}, t)$ são denominadas *potenciais vetor* e *escalar*, respectivamente. Há neles, no entanto, uma arbitrariedade a ser explorada, pois a forma através da qual os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} relacionam-se com os potenciais não é alterada ao incluirmos um função escalar arbitrária ψ

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' + \nabla \psi, \quad (1.23)$$

já que $\nabla \times \nabla \psi = 0$. E conseqüentemente

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \rightarrow -\nabla \phi' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t}, \quad (1.24)$$

onde $\phi' \equiv \phi + \frac{\partial \psi}{\partial t}$. A essa liberdade na escolha dos potenciais é dado o nome de *transformação de calibre*.

1.2.1 Ondas Eletromagnéticas Planas

Vamos agora analisar o caso mais simples, onde \mathbf{E} e \mathbf{B} são ondas planas de frequência w que se propagam na direção $\hat{\mathbf{z}}$. Podemos representá-las por

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(kz - wt) \quad (1.25)$$

e

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \cos(kz - wt) \quad (1.26)$$

onde \mathbf{E}_0 e \mathbf{B}_0 são vetores constantes que representam a amplitude das ondas elétrica e magnética, respectivamente.

Agora através das equações de Maxwell podemos expressar quatro vínculos aos quais essas ondas estão submetidas. Levando-as na Eq. 1.15 (ou 1.16) obtemos que a frequência está ligada ao número de onda k pela relação

$$k^2 + c^{-2}w^2 = 0 \rightarrow w = ck. \quad (1.27)$$

E as Eqs. 1.9 e 1.10 nos dão que

$$\hat{\mathbf{z}}\partial_z \cdot \mathbf{E} = 0 \rightarrow \hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1.28)$$

e também que

$$\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.29)$$

ou seja, ambos os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} são perpendiculares à direção de propagação da onda.

Finalmente com a Eq. 1.15 (ou 1.16) obtemos um último vínculo

$$-k\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_0 \sin(kz - kct) + kc\mathbf{B}_0 \sin(kz - kct) = 0 \quad (1.30)$$

de onde temos que os campos elétrico e magnético não são independentes e sim relacionados por

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c}\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (1.31)$$

mostrando que \mathbf{E} e \mathbf{B} são perpendiculares entre si. Devido a esse entrelaçamento dos campos se deu a definição do conceito de **onda eletromagnética**, que será reforçado, como mostraremos mais adiante, ao introduzirmos a notação covariante na descrição da eletrodinâmica.

1.2.2 Vetor de Poynting Eletromagnético

A densidade de energia (energia por unidade de volume) de um campo eletromagnético é definida por

$$u(\mathbf{r}, t) \equiv \frac{1}{2}\epsilon_0\mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2\mu_0}\mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t). \quad (1.32)$$

Consideremos agora a variação temporal dessa densidade de energia

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \epsilon_0\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.33)$$

juntamente com as Eqs. 1.7 e 1.8

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{E} \quad (1.34)$$

e usando a propriedade $\nabla \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$ teremos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} - \nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \right) \\ &= -\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} - \nabla \cdot \mathbf{S}, \end{aligned} \quad (1.35)$$

onde

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (1.36)$$

é o **vetor de Poynting**. Sua interpretação física é rapidamente obtida reparando que ao fazermos $\mathbf{j} = 0$ a Eq. 1.35 fica com a mesma estrutura da equação da continuidade e portanto se considerarmos que o campo eletromagnético está contido em um volume V que por sua vez é delimitado por uma superfície Σ de vetor normal $\hat{\mathbf{n}}$, teremos ao integrar sobre todo esse volume e usando o teorema da divergência que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V u dV &= \int_V \nabla \cdot \mathbf{S} dV \\ &= \oint_{\Sigma} \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma \end{aligned} \quad (1.37)$$

e portanto pela lei de conservação de energia, \mathbf{S} deve representar o fluxo de energia eletromagnética através de Σ .

1.3 Relatividade Restrita e a Transformação de Lorentz

Após a formulação de Maxwell, a analogia entre ondas eletromagnéticas e mecânicas parecia ser total. Daí uma grande questão fora levantada: em relação a qual referencial as ondas eletromagnéticas propagavam-se com velocidade c ?

A hipótese primeira foi justamente que da mesma forma que as ondas mecânicas propagavam-se em meio material, assim também faziam as ondas eletromagnéticas e seria em relação a ele a velocidade mostrada através das Eqs. de Maxwell. A esse meio rarefeito que deveria permear todo o espaço foi dado o nome de *éter*.

A fim de verificar a existência do éter, Michelson e Morley propuseram um experimento baseado na técnica de interferometria. Assim se houvesse um referencial privilegiado, que estivesse parado em relação ao espaço absoluto, seria válida, como argumentado na Seç. 1.1, a transformação de Galileu conectando-o a outro referencial inercial. Na prática, assumiu-se o Sol parado em relação ao éter e, num certo instante, o laboratório terrestre com velocidade constante em relação a ele. No entanto, chegaram a conclusão de que não havia éter; um *referencial absoluto não existia*.

Em 1905 Einstein deu início a uma grande revolução no pensamento humano ao chamar a atenção entre a incompatibilidade da mecânica clássica, desenvolvida em grande parte por Newton, com o eletromagnetismo consolidado por Maxwell. O problema estava nas transformações de coordenadas que

deixavam invariantes as equações de cada uma das teorias. Einstein foi levado a concluir que a transformação de Galileu, que fundamentava a teoria clássica, não concordavam com os dados experimentais os quais indicavam a constância da velocidade da luz independente do referencial. Propôs assim dois postulados que norteariam a chamada **Teoria da Relatividade Restrita** [2] (TRR)

1. *As leis físicas apresentam a mesma formulação matemática em quaisquer referenciais inerciais.*
2. *A velocidade da luz no vácuo é uma constante universal, c , independente do movimento relativo entre fonte e observador.*

Na TRR o tempo aparece apenas como mais uma coordenada juntamente com as outras três componentes espaciais e a quantidade que se mantém invariante, não é o comprimento ou intervalos temporais, mas o *intervalo entre eventos*, s , dado por

$$s^2 = (c\Delta t)^2 - \sum_{i=1}^3 \Delta x_i^2. \quad (1.38)$$

Em palavras, se um observador move-se durante um intervalo de tempo t com velocidade $v_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta t}$ em um referencial inercial S , a grandeza s como definida acima se mantém invariante, ou seja, em outro referencial inercial S' , verifica-se a igualdade

$$(c\Delta t)^2 - \sum_{i=1}^3 \Delta x_i^2 = (c\Delta t')^2 - \sum_{i=1}^3 \Delta x_i'^2. \quad (1.39)$$

Podemos reescrever 1.38 em notação diferencial como

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left[c^2 - \sum_{i=1}^3 \left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 \right] dt^2 \\ &= (c^2 - v^2) dt^2 \end{aligned} \quad (1.40)$$

e definindo o tempo próprio τ do observador por

$$d\tau \equiv \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} dt, \quad (1.41)$$

ficamos com

$$ds = cd\tau. \quad (1.42)$$

Ainda classificamos s de acordo com

- (a) $s^2 > 0$ é dito ser do *tipo-tempo* e corresponde $v < c$,
- (b) $s^2 = 0$ é dito ser *tipo-luz* (ou *nulo*) e corresponde $v = c$ ou $dt = 0$,
- (c) $s^2 < 0$ é dito ser do *tipo-espaço* e corresponde $v > c$.

Disso decore a definição do conceito de cone de luz no diagrama $\mathbf{r} \times t$, no qual eventos com velocidade inferiores a da luz ocorrem internamente ao cone definido por $v = c$ enquanto os com velocidade maiores ocorrem externamente.

Precisamos saber agora qual a transformação de coordenadas entre os referenciais S e S' que satisfaz 1.39. Vamos assumir que em $t = t' = 0$ a origem de ambos os referenciais coincidam e que o movimento se dá apenas na direção x_1 , de modo que a velocidade de S' vista por S é $\mathbf{u} = u\hat{\mathbf{x}}$ e portanto nenhuma mudança ocorrerá nas demais coordenadas, $x_2 = x'_2$ e $x_3 = x'_3$. Com essas hipóteses podemos esperar que

$$x'_1 = x'_1(x_1, t) \quad (1.43)$$

e

$$t' = t'(x_1, t). \quad (1.44)$$

A transformação mais simples possível de coordenadas é uma relação linear entre as variáveis [3], por isso vamos procurar se existem constantes A , B , C e D tais que

$$\begin{aligned} x' &= Ax_1 + Bt \\ t' &= Cx_1 + Dt \end{aligned} \quad (1.45)$$

satisfaçam 1.38. Fisicamente, a linearidade dessa transformação reflete a homogeneidade e isotropia espacial e temporal do sistema.

Inserindo 1.45 em 1.39, ficamos com

$$\begin{aligned} s^2 &= c^2(C\Delta x_1 + D\Delta t)^2 - (A\Delta x_1 + B\Delta t)^2 - \Delta x_2^2 - \Delta x_3^2 \\ &= c^2(C^2\Delta x_1^2 + 2CD\Delta x_1\Delta t + D^2\Delta t^2) - (A^2\Delta x_1^2 + 2AB\Delta x_1\Delta t + B^2\Delta t^2) - \Delta x_2^2 - \Delta x_3^2 \\ &= (c^2D^2 - B^2)\Delta t^2 - (A^2 - c^2C^2)\Delta x_1^2 + 2(c^2CD - AB)\Delta x_1\Delta t - \Delta x_2^2 - \Delta x_3^2 \end{aligned} \quad (1.46)$$

e comparando com 1.38, vemos que os coeficientes devem satisfazer

$$c^2CD - AB = 0, \quad (1.47)$$

$$c^2D^2 - B^2 = c^2, \quad (1.48)$$

$$A^2 - c^2C^2 = 1, \quad (1.49)$$

que representa um sistema de três equações para quatro incógnitas. A quarta equação é obtida observando que para $x'_1 = 0$ devemos ter $x_1 = ut$, de onde achamos que

$$B = -Au, \quad (1.50)$$

e com isso a equação 1.47 fornece

$$A^2 = -\frac{c^2}{u}CD, \quad (1.51)$$

assim as equações restantes ficam

$$D(D + uC) = 1, \quad (1.52)$$

$$-\frac{c^2}{u}C(D + uC) = 1, \quad (1.53)$$

de onde dividindo uma pela outra encontramos

$$D = -\frac{c^2}{u}C \quad (1.54)$$

e levando esse resultado em 1.53

$$C = \pm \frac{u}{c^2} \frac{1}{(1 - \frac{u^2}{c^2})^{1/2}}. \quad (1.55)$$

Aqui se faz conveniente definir as grandezas adimensionais

$$\beta \equiv \frac{u}{c} \quad (1.56)$$

e

$$\gamma \equiv (1 - \frac{u^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}, \quad (1.57)$$

de modo que

$$C = \pm \frac{\beta}{c} \gamma, \quad (1.58)$$

$$D = \mp \gamma, \quad (1.59)$$

e ainda

$$A = \pm \frac{C}{\beta} = \pm \gamma \quad (1.60)$$

e finalmente

$$B = \mp c\beta\gamma \quad (1.61)$$

e portanto vemos que 1.45 fica

$$\begin{aligned} x'_1 &= \pm \gamma(x_1 - c\beta t) \\ t' &= \pm \gamma \left(\frac{\beta}{c} x_1 - t \right). \end{aligned} \quad (1.62)$$

A ambiguidade nos sinais é resolvida exigindo que no limite de baixa velocidade, isto é, $\beta \ll 1$, recuperemos a transformação de Galileu. Como

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \dots \quad (1.63)$$

podemos, nesse limite, aproximar $\gamma \approx 1$ e portanto para reproduzir 1.1 e 1.2 devemos ter

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta x_1) \\ x'_1 &= \gamma(x_1 - c\beta t) \\ x'_2 &= x_2 \\ x'_3 &= x_3 \end{aligned} \quad (1.64)$$

que é a conhecida **transformação de Lorentz**, nesse caso também chamada de *boost* na direção x_1 . As equações acima podem ser expressas em um forma matricial

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

A inversa dessa transformação de coordenadas pode ser facilmente obtida observando que o movimento do referencial S visto de acordo com S' é $\mathbf{u}' = -u\hat{\mathbf{x}} = -\mathbf{u}$, de forma que basta trocarmos $\beta \rightarrow -\beta$ nas Eqs. 1.64

$$\begin{aligned} ct &= \gamma(ct' + \beta x'_1) \\ x_1 &= \gamma(x'_1 + c\beta t') \\ x_2 &= x'_2 \\ x_3 &= x'_3. \end{aligned} \tag{1.65}$$

A fim da transformação de Lorentz ser sempre real devemos ter que $\beta \leq 1$. Esse é o primeiro indício de que c não só é uma constante, mas também o limite superior de qualquer velocidade e portanto todos os processos físicos são condicionados a ocorrerem dentro do cone de luz mencionado anteriormente.

1.3.1 Composição de Velocidades Relativísticas

Devido a linearidade da transformação de Lorentz, podemos obter diretamente a relação entre as velocidades em ambos os referenciais S e S' , pois é válido

$$\begin{aligned} \Delta t' &= \gamma \left(\Delta t - \frac{\beta}{c} \Delta x_1 \right) \\ \Delta x'_1 &= \gamma(\Delta x_1 - c\beta \Delta t) \\ \Delta x'_2 &= \Delta x_2 \\ \Delta x'_3 &= \Delta x_3. \end{aligned} \tag{1.66}$$

Assim, tomando as equações 1.66 no limite infinitesimal podemos escrever

$$v'_i = \frac{dx'_i}{dt'} \tag{1.67}$$

com $i = 1, 2, 3$. Então para a componente paralela ao movimento

$$\begin{aligned} v'_1 &= \gamma \frac{d(x_1 - c\beta t)}{dt'} \\ &= \gamma \left(\frac{v_1}{c} - \beta \right) \frac{dct}{dt'}, \end{aligned} \tag{1.68}$$

mas como

$$dct = \frac{dct'}{\gamma} + \beta dx_1, \tag{1.69}$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{dct}{dt'} &= \frac{c}{\gamma} + \frac{\beta v_1}{c} \frac{dct}{dt'} \\ &= \frac{c}{\gamma(1 - \frac{\beta v_1}{c})} \end{aligned} \tag{1.70}$$

de maneira que chegamos a

$$v'_1 = \frac{v_1 - c\beta}{1 - \frac{\beta v_1}{c}}; \tag{1.71}$$

e para as componentes da velocidade perpendiculares a direção do movimento temos

$$\begin{aligned} v'_{2,3} &= \frac{dx_{2,3}}{dt} \frac{dt}{dt'} \\ &= \frac{v_{2,3}}{\gamma(1 - \frac{\beta v_1}{c})}. \end{aligned} \quad (1.72)$$

As Eqs. 1.71 e 1.72 representam assim a conexão entre as velocidades de dois referenciais inerciais.

É interessante notar que ao fazermos $x_1 = 0$ na primeira equação de 1.66 e $v_1 = 0$ em 1.71, corresponde a um observador parado na origem do sistema de referência S e o tempo t registrado em seu relógio relaciona-se com o tempo no referencial S' por $\Delta t = \frac{\Delta t'}{\gamma}$, de modo que não foi por acaso a definição 1.41 de tempo-próprio. Ainda como $\gamma \geq 1$ temos que $d\tau \leq dt$, ou seja, os intervalos de tempo no referencial vinculado ao observador passam mais vagarosamente e por isso esse efeito leva o nome de *dilatação temporal*.

1.4 Movimento Hiperbólico

A TRR não está limitada a descrição de fenômenos com velocidades constantes [4]. Para mostrar isso, continuemos a análise da transformação de Lorentz. Dessa vez vamos supor que a partícula, a qual nos referirmos até agora, possua, de acordo com S , uma aceleração $a = \frac{dv}{dt}$ ainda na direção x_1 . Assim no referencial S' teremos que

$$\begin{aligned} a' &\equiv \frac{dv'}{dt'} \\ &= \frac{dt}{dt'} \frac{d}{dt} \left(\frac{v - c\beta}{1 - \frac{\beta v}{c}} \right) \\ &= \frac{1}{\gamma(1 - \frac{\beta v}{c})} \left(\frac{a}{1 - \frac{\beta v}{c}} - \frac{v - c\beta}{\left(1 + \frac{\beta v}{c}\right)^2} \frac{\beta}{c} a \right) \\ &= \frac{a}{\gamma(1 - \frac{\beta v}{c})^3} (1 - \beta^2) \\ &= \frac{(1 - \beta^2)^{\frac{3}{2}}}{\left(1 - \frac{v\beta}{c}\right)^3} a. \end{aligned} \quad (1.73)$$

Um caso interessante surge ao fazermos u , que até o momento era arbitrário, igual a velocidade instantânea da partícula em S , isto é, $u = v(t)$, dessa forma S' , durante o instante t , é dito um *referencial comóvel* da partícula e portanto, nesse momento, $v' = 0$. Com isso 1.73 fica

$$a = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} a' \quad (1.74)$$

onde a' é a chamada *aceleração de repouso* da partícula. Uma vez que a aceleração de repouso é conhecida, podemos, em princípio, integrar 1.74 para obter a trajetória da partícula.

Vamos analisar o caso de uma aceleração constante $a' = g_0$ em uma única direção, portanto

$$\int_{v(0)}^{v(t)} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} dv = g_0 t, \quad (1.75)$$

essa integral pode ser resolvida fazendo a substituição de variáveis $v \equiv c \sin \theta$ e resulta fazendo $v(0) = 0$ em

$$v = \left(1 + \frac{g_0^2}{c^2} t^2\right)^{-\frac{1}{2}} g_0 t \quad (1.76)$$

e integrando mais uma vez

$$x - x_0 = g_0 \int_0^t t \left(1 + \frac{g_0^2}{c^2} t^2\right)^{-\frac{1}{2}} dt, \quad (1.77)$$

onde x_0 corresponde a posição em $t = 0$. Com a mudança de variáveis $t \equiv \frac{c}{g_0} \sinh \phi$, chegamos a

$$x = x_0 + \frac{c^2}{g_0} \left(1 + \frac{g_0^2}{c^2} t^2\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{c^2}{g_0}, \quad (1.78)$$

que podemos rearranjar como

$$\left(x - x_0 + \frac{c^2}{g_0}\right)^2 - (ct)^2 = \frac{c^4}{g_0^2}, \quad (1.79)$$

de onde vemos que a equação de movimento em questão tem a forma de uma hipérbole, e por isso leva o nome de *movimento hiperbólico*.

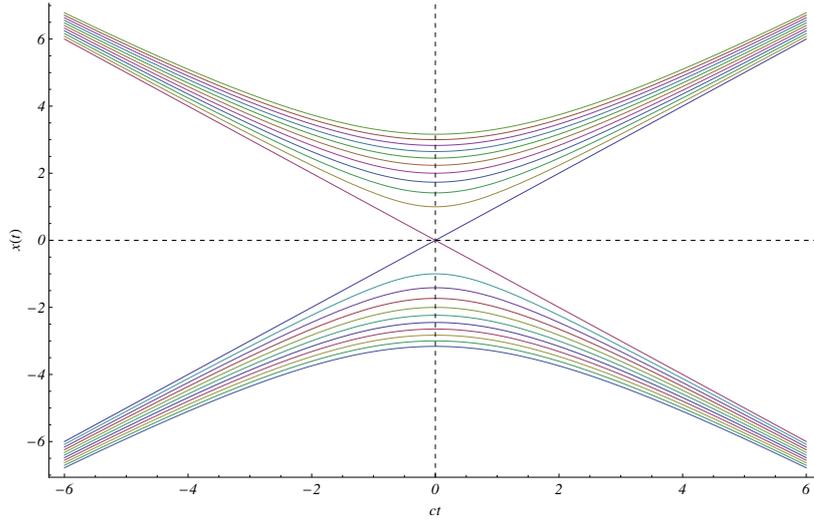


Figura 1.1: Movimento hiperbólico - x versus ct . As trajetórias hiperbólicas são confinadas ao interior do cone de luz definido por $x = ct$.

É possível reparametrizarmos essas expressões pelo tempo próprio do observador definido em 1.41, assim

$$d\tau = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} dt, \quad (1.80)$$

onde v é dada por 1.76, e então

$$\begin{aligned} d\tau &= \left[1 - \left(1 + \frac{g_0^2}{c^2} t^2\right)^{-1} \frac{g_0^2}{c^2} t^2\right]^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \left(1 + \frac{g_0^2}{c^2} t^2\right)^{-\frac{1}{2}} dt, \end{aligned} \quad (1.81)$$

que integrando vem

$$\tau = \frac{c}{g_0} \operatorname{arcsenh} \left(\frac{g_0 t}{c} \right), \quad (1.82)$$

ou ainda

$$t = \frac{c}{g_0} \operatorname{senh} \left(\frac{g_0 \tau}{c} \right), \quad (1.83)$$

e a equação de movimento se torna

$$(x - x_0)^2 + \frac{2c^2}{g_0}(x - x_0) - \frac{c^4}{g_0} \operatorname{senh} \frac{g_0 \tau}{c} = 0, \quad (1.84)$$

que é uma equação de segundo grau para $x - x_0$ e tem como solução

$$x = x_0 - \frac{c^2}{g_0} + \frac{c^2}{g_0} \operatorname{cosh} \left(\frac{g_0 \tau}{c} \right), \quad (1.85)$$

e naturalmente, as demais coordenadas seguem inalteradas $y = y_0$ e $z = z_0$.

1.5 Formalismo Covariante

Até a pouco tratamos de espaço e tempo como conceitos independentes, no entanto, na transformação de Lorentz fica evidente que essa aparente distinção nada mais é do que uma consequência da eleição (arbitrária) de um sistema de referência. Nesse sentido, vamos buscar nessa seção desenvolver um formalismo que não esteja a mercê de sistemas de referências. Para tal, comecemos assumindo uma variedade Riemanniana 4-dimensional [5]-[6] onde as coordenadas x^μ são

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3), \quad (1.86)$$

com $x^0 \equiv ct$ a componente temporal e x^1, x^2, x^3 as componentes espaciais do 4-vetor posição.

Ainda definimos o produto escalar entre os vetores \mathbf{A} e \mathbf{B} como

$$g(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \equiv g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu, \quad (1.87)$$

onde $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ é o tensor métrico da variedade e os índices gregos variam de 0 a 3 de acordo com a dimensão do espaço. Estamos usando também a convenção de soma de Einstein

$$\sum_{\mu=0}^3 A^\mu B_\mu \Rightarrow A^\mu B_\mu, \quad (1.88)$$

as componentes A^μ com o índice sobrescrito são ditos *vetores contravariantes* enquanto os subscritos A_μ são os *vetores covariantes*¹. O tensor métrico e sua inversa $g^{\mu\nu}$ definida por

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu, \quad (1.89)$$

sendo δ^μ_ν a delta de Kronecker, são usados para levantar e abaixar os índices

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu, \quad (1.90)$$

¹Em geometria diferencial os vetores contravariantes são chamados de simplesmente vetores e os vetores covariantes de 1-formas.

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu. \quad (1.91)$$

Em relação a mudança do sistema de coordenadas $x^\alpha \rightarrow x'^\alpha$, os vetores contravariantes transformam-se de acordo com a regra

$$A'^\mu(\mathbf{x}') = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} A^\alpha(\mathbf{x}), \quad (1.92)$$

enquanto os vetores covariantes

$$A'_\mu(\mathbf{x}') = \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\mu} A_\beta(\mathbf{x}), \quad (1.93)$$

essas definições se dão a fim de manter o produto escalar 1.87 invariante frente a mudança de coordenadas.

De fato,

$$\begin{aligned} g(\mathbf{A}', \mathbf{B}') &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} A^\alpha \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\mu} B_\beta \\ &= \frac{\partial x'^\beta}{\partial x'^\alpha} A^\alpha B_\beta \\ &= \delta^\beta_\alpha A^\alpha B_\beta \\ &= A^\alpha B_\alpha \\ &= g(\mathbf{A}, \mathbf{B}). \end{aligned} \quad (1.94)$$

Os operadores diferenciais também são tratados como vetores

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad (1.95)$$

de onde define-se o operador d'Alembertiano

$$\square^2 \equiv \partial_\alpha \partial^\alpha. \quad (1.96)$$

As propriedades discutidas acima não restringem-se a apenas vetores e podem ser diretamente estendidas a tensores de qualquer *rank*. Na prática podemos tratar cada índice do tensor como um vetor.

1.6 Descrição Covariante dos Campos Eletromagnéticos

Vamos aqui construir uma descrição covariante do eletromagnetismo de Maxwell no espaço-tempo plano [7], caracterizado pelo tensor métrico de Minkowski expresso em coordenadas cartesianas por

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

de onde temos, como regra geral, que para cada manipulação de um índice espacial ($i = 1, 2, 3$) ganhamos um sinal negativo enquanto que para o índice temporal nada se altera.

Baseado no final da Seç. 1.2 podemos definir o potencial 4-vetorial A^μ a partir de ϕ e \mathbf{A} como

$$A^\mu = (\phi, A^i) \quad (1.97)$$

e

$$A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu = (\phi, -A^i) \quad (1.98)$$

através do qual os campos eletromagnéticos são definidos pelo o *tensor eletromagnético*

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (1.99)$$

também chamado de *tensor de Faraday*. Da definição acima vemos que $F^{\mu\nu}$ é antissimétrico em seus índices, de onde resulta que possui apenas 6 graus de liberdade correspondentes às 3 componentes de \mathbf{B} e 3 componentes de \mathbf{E} . De fato, expresso em notação matricial, $F^{\mu\nu}$ é representado por

$$F^{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 0 & E_1/c & E_2/c & E_3/c \\ -E_1/c & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2/c & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3/c & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix},$$

e para $F_{\mu\nu} = \eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}F^{\alpha\beta}$ temos

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1/c & E_2/c & E_3/c \\ -E_1/c & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2/c & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3/c & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Agora vamos definir o 4-vetor densidade de corrente, o qual engloba a densidade de carga ρ e a corrente elétrica \mathbf{j}

$$\begin{aligned} J^\mu &\equiv \rho \frac{dx^\mu}{dt} \\ &= (c\rho, \mathbf{j}). \end{aligned} \quad (1.100)$$

Podemos então reescrever as Eqs. 1.5 e 1.8 na notação 4-vetorial como

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\mu, \quad (1.101)$$

de forma que fazendo $\mu = 0$ recuperamos a lei de Gauss e com $\mu = i$ obtemos a i -ésima componente da lei de Ampère.

Para escrever o segundo par das Eqs. de Maxwell, é conveniente definir o *tensor dual* $G^{\mu\nu}$ obtido de $F^{\mu\nu}$ através da substituição $\mathbf{E}/c \rightarrow \mathbf{B}$ e $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E}/c$

$$G^{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_1 & 0 & E_3/c & -E_2/c \\ B_2 & -E_3/c & 0 & E_1 \\ B_3 & E_2/c & -E_1/c & 0 \end{pmatrix},$$

de modo que ficamos com

$$\partial_\nu G^{\mu\nu} = 0, \quad (1.102)$$

ou seja, com $\mu = 0$ recuperamos a Eq. 1.6 e para $\mu = i$ obtemos a i -ésima componente da lei de Faraday 1.7.

1.7 Transformação de Lorentz para o Campo Eletromagnético

Das Eqs. 1.92 e 1.93 podemos escrever que um tensor de *rank* 2 como $F^{\mu\nu}$ transforma-se como

$$F'^{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} F^{\alpha\beta} \quad (1.103)$$

e

$$F'_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} F_{\alpha\beta}. \quad (1.104)$$

Para fins que ficarão claros mais adiante, vamos obter a relação das componentes do campo eletromagnético em dois referenciais inerciais. Ainda, por simplicidade, vamos continuar assumindo que o movimento relativo entre esses referenciais se dê apenas na direção x_1 . Nesse caso, a relação entre as coordenadas é dada pela transformação de Lorentz expressa por 1.66.

Assim sendo é direto o cálculo de $F'^{\mu\nu}$ (ou $F'_{\mu\nu}$). Devido a sua simetria, o tensor eletromagnético fica totalmente determinado ao obtermos F'^{10} , F'^{20} , F'^{30} , F'^{12} , F'^{13} e F'^{23} . Então segue que

$$\begin{aligned} F'^{10} &= \frac{\partial x^1}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^0}{\partial x'^\beta} F^{\alpha\beta} \\ &= \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} \frac{\partial x^0}{\partial x'^0} F^{10} + \frac{\partial x^1}{\partial x'^0} \frac{\partial x^0}{\partial x'^1} F^{01} \\ &= (\gamma^2 - \gamma^2 \beta^2) F^{10} \\ &= F^{10}; \end{aligned} \quad (1.105)$$

$$\begin{aligned} F'^{20} &= \frac{\partial x^2}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^0}{\partial x'^\beta} F^{\alpha\beta} \\ &= \frac{\partial x^2}{\partial x'^2} \frac{\partial x^0}{\partial x'^0} F^{20} + \frac{\partial x^2}{\partial x'^2} \frac{\partial x^0}{\partial x'^1} F^{21} \\ &= \gamma F^{20} + \beta \gamma F^{21}; \end{aligned} \quad (1.106)$$

$$\begin{aligned} F'^{30} &= \frac{\partial x^3}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^0}{\partial x'^\beta} F^{\alpha\beta} \\ &= \frac{\partial x^3}{\partial x'^3} \frac{\partial x^0}{\partial x'^0} F^{30} + \frac{\partial x^3}{\partial x'^3} \frac{\partial x^0}{\partial x'^1} F^{31} \\ &= \gamma F^{30} + \beta \gamma F^{31}; \end{aligned} \quad (1.107)$$

e a parte espacial F'^{ij}

$$\begin{aligned} F'^{12} &= \frac{\partial x^1}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^2}{\partial x'^\beta} F^{\alpha\beta} \\ &= \frac{\partial x^1}{\partial x'^0} \frac{\partial x^2}{\partial x'^2} F^{02} + \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} \frac{\partial x^2}{\partial x'^2} F^{12} \\ &= \gamma F^{12} + \beta \gamma F^{02}; \end{aligned} \quad (1.108)$$

$$\begin{aligned} F'^{13} &= \frac{\partial x^1}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^3}{\partial x'^\beta} F^{\alpha\beta} \\ &= \frac{\partial x^1}{\partial x'^0} \frac{\partial x^3}{\partial x'^3} F^{03} + \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} \frac{\partial x^3}{\partial x'^3} F^{13} \\ &= \gamma F^{13} + \beta \gamma F^{03}; \end{aligned} \quad (1.109)$$

$$\begin{aligned}
F'^{23} &= \frac{\partial x^2}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^3}{\partial x'^\beta} F^{\alpha\beta} \\
&= \frac{\partial x^2}{\partial x'^2} \frac{\partial x^3}{\partial x'^3} F^{23} \\
&= F^{23}.
\end{aligned} \tag{1.110}$$

Deixando explícito para os campos $(\mathbf{E}', \mathbf{B}')$

$$\begin{aligned}
E'_1 &= E_1 \\
E'_2 &= \gamma(E_2 - c\beta B_3) \\
E'_3 &= \gamma(E_3 + c\beta B_2)
\end{aligned} \tag{1.111}$$

e

$$\begin{aligned}
B'_1 &= B_1 \\
B'_2 &= \gamma(B_2 + \frac{\beta}{c} E_3) \\
B'_3 &= \gamma(B_3 - \frac{\beta}{c} E_2)
\end{aligned} \tag{1.112}$$

que representam a comportamento dos campos elétrico e magnético submetidos a um *boost*: as componentes misturam-se. Disso vemos que campos elétricos ou magnéticos não possuem significado absoluto [1], são de fato apenas parte de um conceito mais abrangente, o de onda eletromagnética, descrita por $F_{\mu\nu}$. É interessante notar ainda que as componentes do campo paralelas a direção do movimento não são alteradas pela transformação.

1.8 Tensor Energia-Momento Eletromagnético

Tendo em vista as vantagens de uma descrição covariante vamos introduzir mais uma grandeza tensorial que engloba os conceitos apresentados na Seç. 1.2.2 e que nos será fundamental nos capítulos que se seguem: o *tensor energia-momento eletromagnético*. Na ausência de fontes é escrito como [7]-[8]

$$T^{\mu\nu} = -\frac{1}{\mu_0} \left(F^\mu{}_\alpha F^{\nu\alpha} - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F \right), \tag{1.113}$$

onde, por cálculo direto

$$F \equiv F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = 2 \left(\mathbf{B}^2 - \frac{\mathbf{E}^2}{c^2} \right). \tag{1.114}$$

Da definição 1.113 podemos observar a simetria $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ e também que $\text{tr}(T^{\mu\nu}) \equiv T^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} = 0$.

Identificamos suas componentes como

$$\begin{aligned}
T^{00} &= -\frac{1}{\mu_0} \left(F^0{}_\alpha F^{0\alpha} - \frac{1}{4} F \right) \\
&= \frac{\epsilon_0}{2} (\mathbf{E}^2 + c^2 \mathbf{B}^2),
\end{aligned} \tag{1.115}$$

que é a densidade de energia eletromagnética definida em 1.32.

As componentes tempo-espaço representam as componentes vetor de Poynting dado em 1.36

$$\begin{aligned} T^{0i} &= -\frac{1}{\mu_0} \left(F^0{}_{\alpha} F^{i\alpha} + \frac{1}{4} F \right) \\ &= \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})^i \end{aligned} \quad (1.116)$$

e os termos espaço-espaço fazem parte do chamado *tensor de tensões de Maxwell*

$$\begin{aligned} T^{ij} &= -\frac{1}{\mu_0} \left(F^i{}_{\alpha} F^{j\alpha} + \frac{1}{4} F \right) \\ &= \epsilon_0 \left[\frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + c^2 \mathbf{B}^2) \delta^{ij} - (E^i E^j + c^2 B^i B^j) \right], \end{aligned} \quad (1.117)$$

as componentes diagonais T^{ii} independem da direção e representam a pressão, enquanto as demais estão associadas a força de cisalhamento.

Temos ainda que $T^{\mu\nu}$ obedece

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0, \quad (1.118)$$

representando a conservação do tensor energia-momento.

1.9 Corpo Negro

No início do século XX, a Física teve grandes avanços através de nomes como Einstein e Lorentz; no entanto não foi apenas em eletrodinâmica que tais avanços ocorreram. Concomitantemente com a Teoria da Relatividade, uma linha de pesquisa inteiramente nova, a Física Quântica, surgia com o estudo de Max Planck sobre a radiação emitida por corpos aquecidos [9].

Todo corpo emite e absorve radiação eletromagnética para o/do meio que o cerca. Quando esse corpo atinge o equilíbrio térmico, isto é, as taxas de absorção e emissão de radiação são iguais, o espectro de emissão (e absorção) independe da forma ou composição do corpo e sim apenas de sua temperatura absoluta. Sabia-se ainda que para um corpo que absorve toda a luz que nele incide, denominado por essa razão de *corpo negro*, o espectro de frequências possui um caráter universal. Essa distribuição espectral pode ser especificada pela *densidade de energia*, $\rho_T(\nu)$, definida de forma que $\rho_T(\nu)d\nu$ seja a energia emitida por unidade de volume no intervalo de frequências ν e $\nu + d\nu$ por um corpo negro à temperatura T . E pela densidade de energia ser independente do corpo em questão, podemos dizer que essa distribuição é uma característica do próprio campo de radiação e por isso passível de ser obtida através de uma análise estatística, como veremos a seguir.

1.9.1 Lei de Planck

A fim de reproduzir matematicamente a curva espectral do corpo negro, Planck precisou lançar mão de uma hipótese que ia diretamente contra os princípios da Física Clássica: a de que as ondas eletromagnéticas fossem compostas por partículas; a elas deu-se o nome de *fótons*. Cada fóton associado

a uma onda de frequência ν teria uma energia proporcional a essa frequência, implicando que a energia total da onda eletromagnética deveria ser *quantizada*, isto é, assumisse apenas valores inteiros de $h\nu$

$$\mathcal{E}_m(\nu) = m h \nu, \quad (1.119)$$

onde $m = 1, 2, 3, \dots$ e $h \cong 6,62 \times 10^{-34} \text{ m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$ é a famosa constante de Planck.

Agora para a dedução da lei de distribuição espectral do corpo negro [10]-[12] vamos supor uma cavidade cúbica de lado l e volume $V = l^3$ composta por paredes internas que refletem toda a radiação, de modo que as ondas eletromagnéticas dentro da caixa lá permanecerão indeterminadamente. A rigor o número de fótons não se conserva, mas sim a energia total associada as ondas eletromagnéticas. Ainda essas ondas devem ser estacionárias, isto é, as componentes do campo elétrico assumem a forma

$$E_i(x_i, t) = E_{0i} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_i} x_i\right) \sin(2\pi\nu t), \quad (1.120)$$

com $i = 1, 2, 3$ e são submetidas as condições de contorno

$$E_i(0, t) = E_i(l, t) = 0, \quad (1.121)$$

o que implica em

$$\frac{2\pi}{\lambda_i} l = n_i \pi, \quad (1.122)$$

onde n_i é um inteiro positivo. Resolvendo para λ_i

$$\lambda_i = \frac{2l}{n_i}, \quad (1.123)$$

ou ainda

$$\lambda \equiv \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} = \frac{2l}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = \frac{2l}{n}, \quad (1.124)$$

sendo que n também é um inteiro positivo. Daí vemos que apenas certos comprimentos de onda e consequentemente apenas algumas frequências são permitidos existir dentro da caixa.

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{2l} n. \quad (1.125)$$

Portanto se quisermos saber a quantidade de fótons que estão entre ν e $\nu + d\nu$ precisamos contar a quantidade dos números n contidos nesse intervalo de frequência. Podemos expressar em coordenadas esféricas para n que a quantidade de fótons nessa frequência corresponde a um oitavo do volume de uma casca esférica de raio n e espessura dn , ainda devemos levar em conta a polarização dos fótons, isto é, ondas se propagando para esquerda ou direita, teremos um fator 2 a considerar, assim

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\nu)d\nu &= 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot 4\pi n^2 dn \\ &= \frac{8\pi V}{c^3} \nu^2 d\nu. \end{aligned} \quad (1.126)$$

Uma vez sabendo a quantidade de fótons, precisamos descobrir a energia média associada a cada onda de frequência ν . Para isso utilizamos a distribuição obtida por Boltzmann na teoria cinética dos gases, a

qual diz que a probabilidade de, nesse caso um fóton, possuir energia \mathcal{E} é dada por

$$\mathcal{P}(\mathcal{E}) = \frac{e^{-\frac{\mathcal{E}}{k_B T}}}{k_B T}, \quad (1.127)$$

onde $k_B \cong 1,38 \times 10^{-23} \text{ m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ é a chamada constante de Boltzmann.

Assim, assumindo o caráter discreto da energia dado em 1.119, a energia média $\bar{\mathcal{E}}$ associada a radiação eletromagnética é, por definição, a média ponderada de \mathcal{E}

$$\bar{\mathcal{E}}(\nu) = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{E}_m \mathcal{P}(\mathcal{E}_m)}{\sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{P}(\mathcal{E}_m)} \quad (1.128)$$

que com a definição $\beta \equiv \frac{1}{k_B T}$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{E}}(\nu) &= h\nu \frac{\sum_{m=0}^{\infty} m e^{-m\beta h\nu}}{\sum_{m=0}^{\infty} e^{-m\beta h\nu}} \\ &= -\frac{d}{d\beta} \ln \sum_{m=0}^{\infty} e^{-m\beta h\nu}, \end{aligned} \quad (1.129)$$

é fácil de se obter o resultado do somatório acima, observando que $x \equiv e^{-\beta h\nu} < 1$, assim

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} x^m &= 1 + x + x^2 + \dots \\ &= 1 + x(1 + x + x^2 + \dots) \\ &= 1 + x \sum_{m=0}^{\infty} x^m \end{aligned} \quad (1.130)$$

logo

$$\sum_{m=0}^{\infty} x^m = \frac{1}{1-x} \quad (1.131)$$

e portanto 1.129 fica

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{E}}(\nu) &= -\frac{d}{d\beta} \left(\ln \frac{1}{1 - e^{-\beta h\nu}} \right) \\ &= h\nu \frac{e^{-\beta h\nu}}{1 - e^{-\beta h\nu}} \\ &= \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1} \end{aligned} \quad (1.132)$$

e finalmente a densidade de energia será o produto de 1.126 e 1.132 dividido pelo volume V

$$\rho_T(\nu) d\nu = \bar{\mathcal{E}}(\nu) \frac{\mathcal{N}(\nu)}{V} d\nu \quad (1.133)$$

de onde resulta a *distribuição de Planck* para o corpo negro

$$\rho_T(\nu) d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\beta h\nu} - 1} d\nu, \quad (1.134)$$

que ainda pode ser expressa pelo vetor de onda $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{c} \nu$

$$\rho_T(k) dk = \frac{\hbar c}{\pi^2} \frac{k^3}{e^{\alpha k} - 1} dk, \quad (1.135)$$

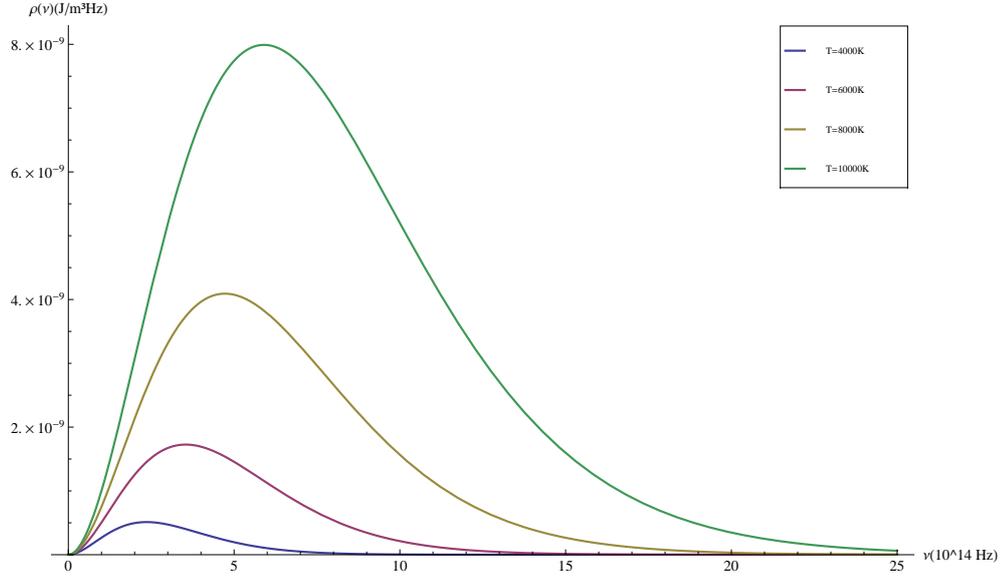


Figura 1.2: Espectro de energia do corpo negro. Quanto maior a temperatura maior a frequência com que a densidade atinge o seu máximo.

onde $\hbar \equiv \frac{h}{2\pi}$ e $\alpha \equiv \frac{\hbar c}{k_B T}$. A Fig. 1.2 ilustra o comportamento da lei de Planck.

A densidade de energia total do corpo negro é obtida integrando 1.134 em todas as frequências

$$\begin{aligned} \rho_T &= \int_0^\infty \rho_T(\nu) d\nu \\ &= \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{\beta h\nu} - 1} d\nu \\ &= \frac{8\pi h}{c^3} \frac{1}{(h\beta)^4} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx \end{aligned} \quad (1.136)$$

com a mesma manipulação que fizemos anteriormente, podemos escrever

$$\frac{1}{e^x - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$$

e assim 1.136 fica

$$\begin{aligned} \rho_T &= -\frac{8\pi k_B^4 T^4}{h^3 c^3} \int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^3}{dn^3} e^{-nx} dx \\ &= \frac{48\pi k_B^4 T^4}{h^3 c^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}, \end{aligned} \quad (1.138)$$

sabendo que o valor do somatório é $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-4} = \frac{\pi^4}{90}$, obtemos a *lei de Stefan-Boltzmann*²

$$\rho_T = \frac{4\sigma}{c} T^4, \quad (1.139)$$

onde

$$\sigma \equiv \frac{2k_B^4 \pi^5}{15c^2 h^3} \approx 5,67 \times 10^{-8} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}. \quad (1.140)$$

²A rigor a lei de Stefan-Boltzmann relaciona a radiância com a temperatura, no entanto como esta difere apenas pelo fator $\frac{4}{c}$ da densidade de energia não há grandes problemas nessa denominação.

Como esperado, vemos de 1.139 que a energia total de um corpo negro depende apenas de sua temperatura.

Ainda, como podemos ver na Fig. 1.2, há uma dependência direta do máximo da energia com a temperatura. De fato, derivando a expressão 1.134 encontramos a chamada *lei do deslocamento de Wien*, na qual a frequência onde a densidade de energia atinge seu maior valor aumenta proporcionalmente a temperatura $\nu_{max} \propto T$.

Capítulo 2

Observadores Acelerados

No capítulo anterior já abordamos a descrição de um movimento constantemente acelerado de acordo com o panorama da TRR. Vamos aqui aprofundar essa análise. Para isso continuaremos a fazer uso da notação covariante introduzida também no Cap. 1.

A posição no espaço-tempo (ou história) de um observador é representado pelo 4-vetor definido em 1.86 e apesar de suas componentes não possuírem, *a priori*, um significado absoluto, a sua norma¹ deve manter-se invariante

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = g_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = C^{\text{te}}, \quad (2.1)$$

que nada mais é do que a grandeza s para o caso em $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$, ou seja, podemos reescrever a Eq. 1.38 como

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta. \quad (2.2)$$

Agora, já que estamos interessados em descrever a evolução do observador em questão, é necessário computarmos a taxa com a qual sua posição varia, isto é, sua 4-velocidade. Há, no entanto, o problema de “qual tempo” ser usado, uma vez que, como vimos, o próprio conceito de tempo é dependente do referencial. Uma breve reflexão mostra que o candidato mais apropriado é justamente, o *tempo-próprio* 1.41, não só por ele ser o tempo medido no referencial do observador, mas também por ser um invariante. Definimos portanto

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (2.3)$$

onde $u^\alpha u_\alpha = c^2$. O 4-vetor velocidade, pela própria interpretação geométrica, é chamado de *vetor tangente* da curva $x^\mu(\tau)$.

Analogamente definimos o vetor 4-aceleração

$$a^\mu \equiv \frac{du^\mu}{d\tau}, \quad (2.4)$$

¹Definida como a raiz quadrada do produto escalar do vetor com ele próprio.

o qual é ortogonal a u^μ , pois

$$\begin{aligned}
 2g(\mathbf{u}, \mathbf{a}) &= u_\alpha a^\alpha + u^\alpha a_\alpha \\
 &= u_\alpha \frac{du^\alpha}{d\tau} + u^\alpha \frac{du_\alpha}{d\tau} \\
 &= \frac{d}{d\tau}(u_\alpha u^\alpha) \\
 &= \frac{d}{d\tau}c^2 \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Fisicamente, podemos entender esse fato, se escolhermos analisar u^μ em um referencial onde suas componentes espaciais são nulas, de modo que a 4-velocidade ficará apenas com a componente temporal diferente de zero, $u^\mu = (c, \mathbf{0})$. Em contrapartida se há uma aceleração no sistema, ela deve afetar apenas a parte espacial, pois a velocidade da luz não se altera, ou seja, $a^\mu = (0, a^i)$ e portanto $u^\mu a_\mu = 0$. Por isso a 4-velocidade é dita ser um vetor *tipo-tempo* enquanto a 4-aceleração é do *tipo-espaço*.

Vamos ainda definir o chamado *transporte paralelo* (TP) de um 4-vetor arbitrário $\mathbf{A}(\tau)$ ao longo de uma curva caracterizada por seu vetor tangente \mathbf{u} , como [5]

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\tau}A^\mu &= \frac{dx_\alpha}{d\tau} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} A^\mu \\
 &= u^\alpha \partial_\alpha A^\mu \\
 &\equiv \nabla_{\mathbf{u}} A^\mu \\
 &= 0,
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

ou seja, se a variação de cada componente de \mathbf{A} na direção de \mathbf{u} for nula, dizemos que ele é paralelamente transportado ao longo da curva.

As definições das Eqs. 1.92 e 1.93 garantem a invariância dos produtos escalares frente a *qualquer* mudança de coordenadas, no entanto até o momento tratamos aqui apenas de referenciais inerciais, onde a relação entre as coordenadas é expressa estritamente pela transformação de Lorentz

$$\begin{aligned}
 x^\mu &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha} x^\alpha \\
 &= \Lambda^\mu{}_\alpha x^\alpha,
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

onde $\Lambda^\mu{}_\alpha$ representam as componentes da matriz de Lorentz dada em 1.64. Uma vez que $\Lambda^\mu{}_\alpha$ não depende das coordenadas x^μ , a transformação de Lorentz é dita possuir um caráter *global*. Assim é possível para um único sistema de coordenadas mapear completamente o espaço. No entanto, esse tipo de transformação é um caso muito particular e, em geral, uma transformação de coordenadas envolvendo referenciais acelerados é válida apenas localmente [12]. Daí segue que a própria definição de medida de espaço e tempo para observadores não inerciais é incompatível com as obtidas em um referencial inercial ou até mesmo com outro referencial acelerado [13].

2.1 Tetradas

A abordagem prática para o problema mencionado anteriormente é feita tomando como sistema de referência uma base formada por vetores ligados ao observador (inercial ou não), isto é, um *sistema de referência local* [13]-[14]. Ao tratarmos de um observador acelerado é esperado que a região de aplicabilidade desta técnica seja inversamente proporcional a sua aceleração, de forma a recairmos num sistema de coordenadas global para o caso inercial.

Podemos representar o sistema de referência local de um observador num espaço-tempo quadrimensional por um conjunto de vetores ortonormais. O conjunto desses vetores, um tipo-tempo e três tipo-espaço, são denominados *tetradas* ou *vierbein*²

$$\mathbf{e}_{(a)} = (\mathbf{e}_{(0)}, \mathbf{e}_{(1)}, \mathbf{e}_{(2)}, \mathbf{e}_{(3)}). \quad (2.8)$$

O quadrivetor $\mathbf{e}_{(0)}$ é um vetor tipo-tempo ligado ao relógio do observador e normal à hiper-superfície formada pelos demais vetores tipo-espaço $\mathbf{e}_{(i)}$, $i = 1, 2, 3$. Cada tetrada pode ser expressa em termos dos quadrivetores do espaço-tempo \mathbf{e}_μ

$$\mathbf{e}_{(a)} = e_{(a)}^\mu \mathbf{e}_\mu, \quad (2.9)$$

com $\mu = 0, 1, 2, 3$.

As tetradas são por definição ortonormais, ou seja, satisfazem

$$\eta_{ab} = e_{(a)}^\mu e_{(b)}^\nu g_{\mu\nu} = e_{(a)}^\mu e_{(b)\mu}, \quad (2.10)$$

e possuem uma inversa $(e^{-1})_{(a)}^\mu \equiv e^{(a)}_\mu$ que obedece

$$\begin{aligned} e_{(a)}^\mu e^{(a)}_\nu &= \delta^\mu_\nu \\ e_{(a)}^\mu e^{(b)}_\mu &= \delta^a_b. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Decorre das definições acima, que podemos localmente, transmitir toda a informação, antes contida na métrica $g_{\mu\nu}$, para o campo de tetradas

$$g_{\mu\nu} = e^{(a)}_\mu e^{(b)}_\nu \eta_{ab} = e^{(a)}_\mu e_{(a)\nu}. \quad (2.12)$$

Nas Eqs. 2.10 e 2.12 usamos que índices locais, representados por letras latinas entre parênteses, são contraídos com a métrica de Minkowski η_{ab} e os índices gregos espaço-temporais com a métrica $g_{\mu\nu}$

$$e^{(a)\mu} = \eta^{ab} e_{(b)}^\mu, \quad (2.13)$$

$$e_{(a)\mu} = g_{\mu\nu} e_{(a)}^\nu. \quad (2.14)$$

O campo de tetradas possui 16 componentes e o tensor métrico, por sua simetria, apenas 10. Esses graus de liberdade excedentes são eliminados exigindo que em cada ponto x seja válida a transformação

$$e'_{(a)}{}^\mu(\mathbf{x}) = \Lambda^b_a e_{(b)}^\mu(\mathbf{x}). \quad (2.15)$$

²Do Alemão *vierbein* significa “quatro pernas” e está associado a dimensão do espaço. Para dimensões maiores são referidas como *vielbein*, “muitas pernas”.

Os seis graus de liberdade restantes correspondem então aos 3 *boosts* e às 3 rotações das transformações de Lorentz.

Temos ainda que a relação de ortonormalidade é mantida nesse novo sistema de coordenadas

$$g(\mathbf{e}'_{(a)}, \mathbf{e}'_{(b)}) = g_{\mu\nu} \Lambda^c_a e_{(c)}^\mu \Lambda^d_b e_{(d)}^\nu = \eta_{dc} \Lambda^d_a \Lambda^c_b = \eta_{ab}. \quad (2.16)$$

É importante salientar que o campo de tetradas não representa uma transformação de coordenadas 2.7, mas sim uma projeção no referencial local do observador. De fato, o que o observador irá medir é a projeção de uma grandeza tensorial A_μ no sistema de referência a ele associado, isto é,

$$A_a = e_{(a)}^\mu A_\mu, \quad (2.17)$$

sendo que tanto A_μ quanto sua projeção são expressos através das coordenadas de um sistema de referência global.

2.2 Construção de Frenet-Serret

Vamos agora mostrar como construir sistematicamente uma base de vetores com as propriedades descritas na seção anterior. Definimos primeiramente o vetor tipo-tempo do sistema de referência como o versor tangente à linha de universo do observador, isto é, sua 4-velocidade dividida pela respectiva norma

$$\mathbf{e}_{(0)} \equiv \frac{\mathbf{u}}{\sqrt{g(\mathbf{u}, \mathbf{u})}}, \quad (2.18)$$

de forma que temos automaticamente $g(\mathbf{e}_{(0)}, \mathbf{e}_{(0)}) = +1$.

O segundo vetor, este tipo-espaço, é definido na direção do 4-vetor aceleração $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} \equiv \mathbf{a}$

$$\mathbf{a} = \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{e}_{(0)} = a\mathbf{e}_{(1)}, \quad (2.19)$$

onde $a = -g(\mathbf{a}, \mathbf{e}_{(1)})$ é a própria magnitude da aceleração de modo que $g(\mathbf{e}_{(1)}, \mathbf{e}_{(1)}) = -1$. A relação de ortogonalidade entre $\mathbf{e}_{(0)}$ e $\mathbf{e}_{(1)}$ é imediatamente satisfeita uma vez que

$$g(\mathbf{e}_{(0)}, \mathbf{e}_{(1)}) = \frac{1}{a}g(\mathbf{u}, \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}) = \frac{1}{2a}\nabla_{\mathbf{u}}g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0. \quad (2.20)$$

O terceiro vetor é obtido computando a variação $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{e}_{(1)}$ que é perpendicular a $\mathbf{e}_{(1)}$, mas não necessariamente à $\mathbf{e}_{(0)}$. A projeção na direção de \mathbf{u} é

$$g(\mathbf{u}, \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{e}_{(1)}) = -g(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}, \mathbf{e}_{(1)}) = a, \quad (2.21)$$

com isso podemos expressar $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{e}_{(1)}$ em termos de \mathbf{u} e de um vetor tipo-espaço perpendicular à \mathbf{u} , $\mathbf{e}_{(2)}$

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{e}_{(1)} = a\mathbf{e}_{(0)} + b\mathbf{e}_{(2)}, \quad (2.22)$$

daí segue que $\mathbf{e}_{(2)}$ também é ortogonal à $\mathbf{e}_{(1)}$ e $g(\mathbf{e}_{(2)}, \mathbf{e}_{(2)}) = -1$ de modo que $b = g(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{e}_{(1)}, \mathbf{e}_{(2)})$. Nesse espírito, computamos a variação de $\mathbf{e}_{(2)}$, $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{e}_{(2)}$, cujas projeções nas direções \mathbf{u} e $\mathbf{e}_{(1)}$ são respectivamente

$$g(\mathbf{e}_{(0)}, \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{e}_{(2)}) = -g(a\mathbf{e}_{(1)}, \mathbf{e}_{(2)}) = 0 \quad (2.23)$$

e

$$g(\mathbf{e}_{(1)}, \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{e}_{(2)}) = -g(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{e}_{(1)}, \mathbf{e}_{(2)}) = b, \quad (2.24)$$

assim

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{e}_{(2)} = -b\mathbf{e}_{(1)} + c\mathbf{e}_{(3)}, \quad (2.25)$$

onde $c = g(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{e}_{(2)}, \mathbf{e}_{(3)})$ e $\mathbf{e}_{(3)}$ é o último vetor da tríade espacial que satisfaz

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{e}_{(3)} = -c\mathbf{e}_{(2)}. \quad (2.26)$$

As equações

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{e}_{(0)} &= a\mathbf{e}_{(1)}, \\ \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{e}_{(1)} &= a\mathbf{e}_{(0)} + b\mathbf{e}_{(2)}, \\ \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{e}_{(2)} &= -b\mathbf{e}_{(1)} + c\mathbf{e}_{(3)}, \\ \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{e}_{(3)} &= -c\mathbf{e}_{(2)} \end{aligned} \quad (2.27)$$

são chamadas equações de **Frenet-Serret** e para uma dada curva e seu vetor tangente, eis o procedimento para construir um sistema de referência ortonormal em um dado ponto.

2.3 Transporte Fermi-Walker

Uma questão que imediatamente se põe é o fato de que apesar de as tetradas serem construídas para serem ortonormais, nada garante que elas continuarão assim sendo em outro ponto caso os vetores não sejam paralelamente transportados ao longo da curva.

Na seção anterior exigimos implicitamente que o transporte de cada um dos vetores do sistema de referência satisfizesse essa propriedade ao exigir que o produto escalar entre eles permanecesse invariante ao longo da curva. Porém para observadores acelerados, pela própria definição $\nabla_{\mathbf{u}}w^\mu \equiv a^\mu$, o transporte paralelo não se aplica. Por exemplo, seja w^μ um vetor que obedece ao TP $\nabla_{\mathbf{u}}w^\mu = 0$, o produto escalar $g(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ já não se conserva. De fato

$$\nabla_{\mathbf{u}}g(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \nabla_{\mathbf{u}}w^\mu w_\mu + w^\mu \nabla_{\mathbf{u}}w_\mu = a^\mu w_\mu \neq 0. \quad (2.28)$$

Assim se faz necessário uma forma de transporte que contemple observadores não-inerciais e mantenha o sistema de referência o mais próximo da visão clássica de sistemas ortogonais e rígidos. A rigidez nesse sentido refere-se da não rotabilidade dos vetores tipo-espaço, ou seja, não há variações dos mesmos nas direções espaciais (e.g. um giroscópio).

Como as tetradas formam uma base no espaço, podemos decompor a variação dos vetores de base neles próprios [14]-[15], ou seja

$$\nabla_{\mathbf{u}}e_{(a)}^\mu = \phi_a^b e_{(b)}^\mu, \quad (2.29)$$

onde ϕ_{ab} é um tensor antissimétrico. É fácil de visualizar a propriedade de antissimetria utilizando a Eq. 2.11 na Eq. 2.29

$$\eta_{cd}e^{(c)}_\mu \nabla_{\mathbf{u}}e_{(a)}^\mu = \eta_{cd}\phi_a^b \delta^c_b \Rightarrow \phi_{ad} = e_{(d)\mu} \nabla_{\mathbf{u}}e_{(a)}^\mu, \quad (2.30)$$

assim

$$\begin{aligned}\phi_{ab} + \phi_{ba} &= e_{(b)\mu} \nabla_{\mathbf{u}} e_{(a)}^\mu + e_{(a)\mu} \nabla_{\mathbf{u}} e_{(b)}^\mu \\ &= \nabla_{\mathbf{u}} e_{(b)\mu} e_{(a)}^\mu = \nabla_{\mathbf{u}} \delta_{ab} = 0,\end{aligned}\tag{2.31}$$

logo

$$\phi_{ab} = -\phi_{ba}.\tag{2.32}$$

O tensor ϕ_{ab} relaciona-se diretamente com a aceleração do observador e é por isso denominado de *tensor aceleração*. Podemos identificar as componentes ϕ_{0i} como a i -ésima componente da aceleração $\phi_{0i} = a_i$ e ϕ_{ij} como a variação do vetor $\mathbf{e}_{(i)}$ na direção $\mathbf{e}_{(j)}$, com $i, j = 1, 2, 3$.

Queremos agora eliminar as rotações espaciais, para isso escolhemos os vetores $e_{(a)}^\mu$ tal que $\phi_i^j = 0$.

Logo

$$\nabla_{\mathbf{u}} e_{(i)}^\mu = \phi_i^0 e_{(0)}^\mu = \phi_i^0 u^\mu,\tag{2.33}$$

com $\phi_i^0 = g(\mathbf{u}, \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{e}_{(i)}) = -g(\mathbf{a}, \mathbf{e}_{(i)}) = -a_i$, portanto

$$\nabla_{\mathbf{u}} e_{(i)}^\mu = -g(\mathbf{a}, \mathbf{e}_{(i)}) u^\mu\tag{2.34}$$

é a equação que deve ser obedecida pelos vetores de base $e_{(i)}^\mu$, denominada **transporte de Fermi**.

No caso de um vetor arbitrário v^μ podemos decompô-lo em

$$v^\mu = v^a e_{(a)}^\mu,\tag{2.35}$$

então, como estamos construindo um transporte que deixe invariante o produto escalar, exigimos que

$$\nabla_{\mathbf{u}} v^a = \nabla_{\mathbf{u}} g(\mathbf{v}, \mathbf{e}^{(a)}) = 0,\tag{2.36}$$

com isso

$$\nabla_{\mathbf{u}} v^\mu = v^0 \nabla_{\mathbf{u}} e_{(0)}^\mu + v^i \nabla_{\mathbf{u}} e_{(i)}^\mu,\tag{2.37}$$

inserindo a Eq. 2.34 em 2.37

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{u}} v^\mu &= v^0 a^\mu - v^i a_i u^\mu \\ &= v^\alpha u_\alpha a^\mu - v^\alpha a_\alpha u^\mu,\end{aligned}\tag{2.38}$$

ou ainda

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} = \mathbf{a}g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \mathbf{u}g(\mathbf{a}, \mathbf{v})\tag{2.39}$$

que é chamado de transporte **Fermi-Walker** (F-W) [14] - onde os tri-vetores da base não rotacionam e o produto escalar é mantido constante mesmo para *curvas não-geodésicas*, i. e., aceleradas.

A extensão natural do transporte F-W para tensores de *rank* n , $A^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}$ é

$$\nabla_{\mathbf{u}} A^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = A^{\alpha \mu_2 \dots \mu_n} u_\alpha a^{\mu_1} - A^{\alpha \mu_2 \dots \mu_n} a_\alpha u^{\mu_1} + \dots + A^{\mu_1 \mu_2 \dots \alpha} u_\alpha a^{\mu_n} - A^{\mu_1 \mu_2 \dots \alpha} a_\alpha u^{\mu_n},\tag{2.40}$$

daí segue que a derivada covariante continua compatível com a métrica, i. e.

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{u}} g^{\mu\nu} &= g^{\alpha\nu} u_\alpha a^\mu - g^{\alpha\nu} a_\alpha u^\mu + g^{\mu\alpha} u_\alpha a^\nu - g^{\mu\alpha} a_\alpha u^\nu \\ &= u^\nu a^\mu - a^\nu u^\mu + u^\mu a^\nu - a^\mu u^\nu = 0,\end{aligned}\tag{2.41}$$

e da mesma forma o produto escalar - como fora construído para ser - permanece invariante por vetores que obedecem ao transporte F-W

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\mathbf{u}}g(\mathbf{A}, \mathbf{B}) &= B_{\alpha}\nabla_{\mathbf{u}}A^{\alpha} + A_{\alpha}\nabla_{\mathbf{u}}B^{\alpha} \\
 &= B_{\alpha}(A^{\beta}u_{\beta}a^{\alpha} - A^{\beta}a_{\beta}u^{\alpha}) + A_{\alpha}(B^{\beta}u_{\beta}a^{\alpha} - B^{\beta}a_{\beta}u^{\alpha}) \\
 &= B_{\alpha}a^{\alpha}u_{\beta}A^{\beta} - B^{\beta}a_{\beta}u^{\alpha}A_{\alpha} - A^{\beta}a_{\beta}B_{\alpha}u^{\alpha} + A_{\alpha}a^{\alpha}B^{\beta}u_{\beta} = 0.
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

Portanto, agora estamos matematicamente amparados para analisar qualquer grandeza física tanto em referenciais inerciais quanto em referenciais acelerados.

Capítulo 3

Eletrodinâmica Não-local

Um postulado que permeia toda a Física de observadores acelerados é o chamado *postulado da localidade* [16]-[18]. Ele pode ser enunciado por

“Um referencial acelerado é equivalente a uma sucessão de referenciais inerciais instantaneamente comóveis.”

Em outras palavras, podemos entender que a curva que representa a evolução do observador acelerado no espaço-tempo é, para todos os efeitos, o conjunto de retas tangentes às trajetórias dos referenciais inerciais a ele comóveis.

Esse postulado tem origem na mecânica Newtoniana, onde a trajetória de uma partícula é completamente caracterizada apenas por sua posição e velocidade e se aplica perfeitamente para os casos onde as propriedades do sistema podem ser medidas instantaneamente, porém para ondas de maneira geral, é apenas uma aproximação [19], tanto melhor quanto menor a aceleração. Assim mesmo teorias muito bem sucedidas, como a eletrodinâmica e a mecânica quântica, estão fundamentalmente incompletas uma vez que *todos* os referenciais reais são de fato acelerados. Todas essas teorias, nesse sentido, são ditas teorias locais.

3.1 Limitações da Localidade

Como dito acima, a hipótese da localidade, para a teoria ondulatória, é uma aproximação e é mantida apenas em prol da simplificação por ela fornecida. Vamos aqui estabelecer até onde pode se levar tal aproximação sem comprometer o poder de descrição da teoria.

Para esse propósito, consideremos uma onda eletromagnética plana de frequência ω analisada por um observador¹ acelerado. É de se esperar que o postulado da localidade seja bem sucedido em situações nas quais a distância necessária L para a velocidade do observador variar de maneira considerável seja muito maior que o comprimento de onda λ [20]-[21], ou seja,

$$L \gg \lambda \tag{3.1}$$

¹O termo observador aqui empregado pode referir-se tanto a um cientista quanto ao seu aparelho de medida.

e portanto, nesse regime, é possível registrar várias oscilações da onda enquanto o observador mantém-se praticamente a uma velocidade constante. Assim se considerarmos que o observador possui uma velocidade instantânea $v(t)$ em relação ao *background* global, a hipótese da localidade é válida para a descrição da onda se [22]

$$v(t) \gg \frac{1}{\omega} \frac{dv}{dt}, \quad (3.2)$$

ou seja, a velocidade instantânea do observador deve ser muito maior do que o produto da sua aceleração instantânea com (pelo menos) um período da onda $2\pi\omega^{-1}$.

Com isso podemos analisar dois casos para a aceleração. Primeiro para uma aceleração puramente translacional $dv/dt = g(t)$ podemos, usando que $\omega = 2\pi c/\lambda$ e $v < c$, escrever a Eq. 3.2 como

$$\lambda \ll \frac{c^2}{g}; \quad (3.3)$$

e para um observador em rotação uniforme $dv/dt = \Omega v(t)$ Eq. 3.2 fica

$$\lambda \ll \frac{c}{\Omega}. \quad (3.4)$$

Essas grandezas, por terem unidade de distância, são denominadas *comprimentos de aceleração*.

A fim de ilustração, temos que o comprimento de aceleração associado a translação da Terra em torno do Sol é

$$\frac{c^2}{g_{\oplus}} \simeq 1 \text{ a.l.}^2 \quad (3.5)$$

enquanto a rotação terrestre em torno do seu próprio eixo conduz à

$$\frac{c}{\Omega_{\oplus}} \simeq 28 \text{ u.a.}^3 \quad (3.6)$$

o que explica o sucesso do postulado na localidade na prática.

Todavia faz-se necessário, para a completeza da teoria, ir além do postulado da localidade ao lidarmos com fenômenos envolvendo $L \lesssim \lambda$.

3.2 Equações Integrais

Tendo em vista que o formalismo utilizado no desenvolvimento da formulação não-local da teoria eletrodinâmica é essencialmente expresso em termos de equações integrais, é interessante uma revisão sobre o assunto ou até mesmo uma primeira introdução do mesmo [23]-[24]. Apesar de usualmente trabalharmos com equações diferenciais, em alguns casos, as equações integrais são mais úteis e/ou permitem uma associação mais direta da simbologia matemática com os fenômenos em estudo. Naturalmente, ambas as abordagens são equivalentes como mostraremos a seguir.

²a.l. abreviatura de ano-luz e equivale a distância percorrida pela luz em um ano, $9,4605284 \times 10^{15}$ m.

³u.a. abreviatura de unidade astronômica e equivale a $1,495978707 \times 10^{11}$ m.

3.2.1 Equivalência entre Equações Diferenciais Lineares e Equações Integrais

Para mostrar como podemos obter uma equação integral, consideremos a equação diferencial linear mais geral possível para a função $u(x)$

$$\frac{d^n u}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \dots + a_n(x) u = F(x), \quad (3.7)$$

juntamente com as condições iniciais

$$u(0) = c_0, u'(0) = c_1, \dots, u^{(n-1)}(0) = c_{n-1}. \quad (3.8)$$

Definimos então

$$D^n u \equiv \frac{d^n u}{dx^n} = \phi(x), \quad (3.9)$$

e inversamente

$$D^{-1} \phi = \int_0^x \phi(y) dy, \quad (3.10)$$

integrando por partes

$$\begin{aligned} D^{-2} \phi &= D^{-1}(D^{-1} \phi) = \int_0^x \left(\int_0^z \phi(y) dy \right) dz \\ &= z \int_0^z \phi(y) dy \Big|_0^x - \int_0^x z \phi(z) dz \\ &= x \int_0^x \phi(y) dy - \int_0^x y \phi(y) dy \\ &= \int_0^x (x-y) \phi(y) dy \end{aligned} \quad (3.11)$$

e sucessivamente chegamos ao n -ésimo termo

$$D^{-n} \phi = D^{-1}(D^{1-n} \phi) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-y)^{n-1} \phi(y) dy \quad (3.12)$$

agora levando em conta as condições iniciais podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} &= c_{n-1} + D^{-1} \phi \\ \frac{d^{n-2} u}{dx^{n-2}} &= c_{n-1} x + c_{n-2} + D^{-2} \phi \\ &\vdots \\ u(x) &= c_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + c_{n-2} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + c_1 x + c_0 + D^{-n} \phi, \end{aligned} \quad (3.13)$$

voltando à Eq. 3.7

$$\phi + a_1(x) [c_{n-1} + D^{-1} \phi] + \dots + a_n(x) \left[c_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + c_{n-2} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + c_1 x + c_0 + D^{-n} \phi \right] = F(x), \quad (3.14)$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \phi + a_1 \int_0^x \phi(y) dy + \dots + a_n(x) \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-y)^{n-1} \phi(y) dy &= \\ = F(x) - a_1(x) c_{n-1} - \dots - a_n \left[c_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + c_{n-2} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + c_1 x + c_0 \right] \end{aligned} \quad (3.15)$$

e com a definição

$$K(x, y) \equiv \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{(x-y)^{i-1}}{(i-1)!}, \quad (3.16)$$

onde a função $K(x, y)$ é denominada de *kernel*⁴ da equação, ficamos com

$$f(x) \equiv F(x) - a_1(x)c_{n-1} - \dots - a_n \left[c_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + c_{n-2} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + c_1 x + c_0 \right], \quad (3.17)$$

chegando finalmente a

$$\phi(x) + \int_0^x K(x, y)\phi(y)dy = f(x). \quad (3.18)$$

A equação acima é nomeada *equação de Volterra* de 2º tipo. Esta classificação [25] é dada a partir dos limites de integração: se forem fixos (constantes) será uma equação de Fredholm, porém se ao menos um dos limites for variável leva o nome de Volterra. Ainda se a função $\phi(x)$ aparecer apenas no integrando, a equação é dita de 1º tipo, caso contrário será de 2º tipo. Ou seja,

- Eq. de Fredholm de 1º tipo: $f(x) = \int_a^b \phi(y)K(x, y)dy$
- Eq. de Fredholm de 2º tipo: $\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \phi(y)K(x, y)dy$
- Eq. de Volterra de 1º tipo: $f(x) = \int_a^x \phi(y)K(x, y)dy$
- Eq. de Volterra de 2º tipo: $\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x \phi(y)K(x, y)dy,$

com λ e $a \in \mathbb{R}$.

Apesar da equivalência entre as Eqs. 3.7 e 3.18, um diferença importante a ser notada é a de que na equação integral já estão assimiladas as condições iniciais.

3.2.2 Solução de Equações Integrais

No que diz respeito a solução de uma equação integral é intuitivo esperar que a solução $\phi(x)$ da equação deva estar diretamente associada ao *kernel*, uma vez que ele representa os coeficientes da equação diferencial original.

O método de resolução da equação é, em geral, iterativo, isto é, sucessivas aproximações $\phi_n(x)$, com $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, se identificam com a solução $\phi(x)$ no limite em que

$$\phi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x), \quad (3.19)$$

onde as $\phi_n(x)$ podem, por sua vez, serem expandidas em potências de λ

$$\phi_n(x) = \sum_{i=0}^n \lambda^i \psi_i(x), \quad (3.20)$$

assumindo, é claro, que a série convirja.

Como primeira aproximação, podemos fazer $\psi_0(x) = \phi_0(x) = f(x)$ e assim determinar $\phi_1(x)$

$$\phi_1(x) = f(x) + \lambda \int_0^x f(y)K(x, y)dy; \quad (3.21)$$

⁴“Núcleo” em Alemão.

continuando por esse caminho, chegamos a relação de recorrência

$$\phi_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x \phi_{n-1}(y)K(x, y)dy, \quad (3.22)$$

de onde, comparando com a Eq. 3.20, podemos expressar $\psi_i(x)$

$$\psi_1(x) = \int_0^x f(y)K(x, y)dy, \quad (3.23)$$

$$\psi_2(x) = \int_0^x K(x, z)dz \int_0^z f(y)K(z, y)dy, \quad (3.24)$$

aqui vamos fazer uma hipótese sobre o *kernel* em estudo

$$K(x, y) \equiv 0 \quad \text{se} \quad y > x, \quad (3.25)$$

tal hipótese é análoga a dizer que os coeficientes da matriz que representa um sistema de equações algébricas são identicamente nulos acima da diagonal principal. Esse requerimento previne a existência de múltiplas soluções associadas a equações integrais de 1º tipo. Com isso em mente e invertendo a ordem de integração ficamos com

$$\begin{aligned} \psi_2(x) &= \int_0^x f(y)dy \int_y^x K(x, z)K(z, y)dz \\ &= \int_0^x K_2(x, y)f(y)dy. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Assim em geral

$$\psi_n(x) = \int_0^x K_n(x, y)f(y)dy, \quad (3.27)$$

com os *kernels* iterativos definidos a partir da relação de recorrência

$$K_{n+1}(x, y) = \int_0^x K(x, z)K_n(z, y)dz, \quad (3.28)$$

com $n = 1, 2, 3, \dots$ e $K_1(x, y) \equiv K(x, y)$.

Assim finalmente

$$\phi_n(x) = f(x) + \int_0^x \sum_{i=1}^n \lambda^i K_i(x, y)f(y)dy \quad (3.29)$$

$$\phi_n(x) = f(x) - \int_0^x H(x, y; \lambda)f(y)dy, \quad (3.30)$$

onde chamamos $H(x, y; \lambda)$ de *kernel resolvente*

$$H(x, y; \lambda) \equiv - \sum_{i=1}^n \lambda^i K_i(x, y). \quad (3.31)$$

Portanto ao fazermos $n \rightarrow \infty$ em 3.31 a Eq. 3.30 fornece exatamente a solução para a equação integral. No entanto, o valor do somatório em 3.31 pode não ser simples de ser obtido e assim, em apenas alguns casos particulares de $K(x, y)$ teremos uma solução fechada para $H(x, y)$.

3.3 Construindo a Teoria Não-local

Vamos considerar um campo qualquer ψ o qual é expresso através de um sistema de coordenadas \mathbf{x} de um *background* global, que por sua vez podem ser parametrizadas pelo tempo próprio τ de um observador hipotético. Em um novo sistema de coordenadas \mathbf{x}' , associado a outro referencial inercial, o campo manifesta-se como

$$\hat{\psi}(\mathbf{x}'(\tau)) = \Lambda(\tau)\psi(\mathbf{x}(\tau)) \quad (3.32)$$

onde Λ é a matriz de Lorentz⁵.

Todavia ao lidarmos com um observador acelerado, o que fazemos é computar a projeção de $\psi(\tau)$ no referencial local do observador, analogamente à Eq. 2.17. Assim, denominando por Υ a matriz construída a partir das tetradas, podemos escrever

$$\hat{\psi}(\mathbf{x}(\tau)) = \Upsilon(\tau)\psi(\mathbf{x}(\tau)). \quad (3.33)$$

Agora de acordo com o postulado da localidade o campo que o observador de fato mede $\hat{\Psi}(\tau)$ é, a cada instante, equivalente ao de um referencial inercial comóvel, ou seja,

$$\hat{\Psi}(\tau) = \hat{\psi}(\tau), \quad (3.34)$$

No entanto, como argumentado anteriormente, é de se esperar que essa hipótese seja falha ao lidarmos com fenômenos onde $L \lesssim \lambda$. Assim a associação direta, ponto a ponto, entre os campos deixa de valer e no seu lugar devemos ter algo que contemple a história do observador. Nesse sentido, Mashhoon [26]-[28] propôs o *ansatz*

$$\hat{\Psi}(\tau) = \hat{\psi}(\tau) + \int_{\tau_0}^{\tau} K(\tau, \tau')\hat{\psi}(\tau')d\tau', \quad (3.35)$$

onde τ_0 é o instante no qual a aceleração tem início e o *kernel* é esperado ser diretamente proporcional a aceleração do observador, uma vez que ao fazermos $K(\tau, \tau') = 0$ devemos recair na Eq. 3.34.

O *ansatz* 3.35 é uma equação integral de Volterra do 2º tipo e representa a relação linear mais geral possível entre os campos medidos por observadores acelerados e inerciais consistente com a causalidade.

Dito isso, vamos voltar à atenção ao *kernel* da Eq. 3.35. Até o momento ele permanece completamente indeterminado, no entanto, podemos esperar que ele seja diretamente proporcional a aceleração do observador, uma vez que ao fazermos $K(\tau, \tau') = 0$ recaímos na Eq. 3.34. Vamos então empregar um novo princípio físico, ou melhor, uma generalização de um dos princípios que motivou o desenvolvimento da TRR:

“Nenhum observador - acelerado ou inercial - pode ficar em repouso em relação a uma onda eletromagnética.”

Matematicamente essa exigência implica que se $\hat{\Psi}$ for constante, ψ também deverá sê-lo. Assim tomando $\hat{\Psi} = \hat{\Psi}_0$ a Eq. 3.35 pode ser escrita como

$$\Upsilon(\tau)\psi(\tau) + \int_{\tau_0}^{\tau} K(\tau, \tau')\Upsilon(\tau')\psi(\tau')d\tau = \hat{\Psi}_0, \quad (3.36)$$

⁵Ou composta a partir da matriz de Lorentz.

devemos ter $\psi = \psi_0$

$$\left[\Upsilon(\tau) + \int_{\tau_0}^{\tau} K(\tau, \tau') \Upsilon(\tau') d\tau' \right] \psi_0 = \hat{\Psi}_0, \quad (3.37)$$

o que conduz à

$$\Upsilon(\tau) + \int_{\tau_0}^{\tau} K(\tau, \tau') \Upsilon(\tau') d\tau' \equiv \Upsilon_0, \quad (3.38)$$

onde Υ_0 é uma matriz constante.

No entanto, essa hipótese sozinha não é suficiente para determinar o *kernel* univocamente. Para isso mais uma imposição deve ser feita, a de que o *kernel* seja função de uma única variável, isto é $K(\tau, \tau') = k(\tau')$ ou $K(\tau, \tau') = k(\tau - \tau')$. O primeiro é caso mais simples, e pode ser resolvido através da diferenciação da Eq. 3.38

$$\frac{d}{d\tau} \left[\Upsilon(\tau) + \int_{\tau_0}^{\tau} k(\tau') \Upsilon(\tau') d\tau' \right] = 0, \quad (3.39)$$

resultando em

$$k(\tau) = -\frac{d\Upsilon(\tau)}{d\tau} \Upsilon^{-1}(\tau), \quad (3.40)$$

onde a existência da matriz inversa Υ^{-1} é garantida uma vez que o próprio campo de tetradas tem sua inversa definida em 2.11. O *kernel* acima possui, como esperado, uma dependência direta com a variação temporal de Υ e assim, uma vez cessada a aceleração do observador, a contribuição não-local restringe-se à um termo constante nos campos. Por esse caráter, tal *kernel* é chamado de *kernel cinético*.

Em contraste ao *kernel* cinético, $k(\tau - \tau')$ é denominado *kernel dinâmico*, pois mesmo após o observador parar de acelerar, o termo não-local continua presente, o que pode levar, e de fato leva [29]-[30], a uma divergência nos campos. Sendo, portanto, o *kernel* cinético a única solução fisicamente aceitável.

Assim, podemos nos focar um pouco mais no caso cinético. Levando o resultado 3.40 na Eq. 3.35, ficamos

$$\hat{\Psi}(\tau) = \hat{\psi}(\tau) - \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\Upsilon(\tau')}{d\tau'} \Upsilon^{-1}(\tau') \hat{\psi}(\tau') d\tau', \quad (3.41)$$

levando em conta 3.33 e integrando por partes chegamos à

$$\hat{\Psi}(\tau) = \hat{\psi}(\tau_0) + \int_{\tau_0}^{\tau} \Upsilon(\tau') \frac{d\hat{\psi}(\tau')}{d\tau'} d\tau', \quad (3.42)$$

de onde vemos que se o observador passar por uma região do espaço-tempo onde $\frac{d\psi(\tau)}{d\tau} = 0$, ele também medirá um campo constante, pois $\hat{\Psi}(\tau) = \hat{\psi}(\tau_0)$.

Até o momento, tratamos de um campo genérico, nada foi dito sobre $\psi(\tau)$. Na presente dissertação, no entanto, estamos interessados na eletrodinâmica e portanto as grandezas a serem estudadas são os campos (\mathbf{E}, \mathbf{B}) representados pelo tensor de Faraday. Faremos isso na seção seguinte. De qualquer forma é bom salientar que, por exemplo, na Mecânica Quântica o potencial vetor possui significado físico e portanto pode ser interessante uma análise baseada em A_μ .

3.4 Eletrodinâmica Não-local por Observadores Uniformemente Acelerados

Vamos agora obter o comportamento do campo eletromagnético em um referencial uniformemente acelerado. Porém antes de mais nada precisamos computar o campo de tetradas a ele associado.

De acordo com o que foi apresentado na Seç. 1.4, podemos descrever a evolução de um observador submetido a uma aceleração constante g_0 na direção crescente de z por

$$\begin{aligned} x &= x_0, \\ y &= y_0, \\ z &= z_0 + \frac{c^2}{g_0} (\cosh \theta - 1), \\ t &= \frac{c}{g_0} \sinh \theta, \end{aligned} \tag{3.43}$$

onde definimos, por conveniência, $\theta(\tau) \equiv \frac{g_0}{c} \tau$.

Dessa forma, sua quadri-velocidade v^μ é

$$\begin{aligned} v^\mu &= \frac{g_0}{c} \frac{dx^\mu}{d\theta} \\ &= \left(\frac{dct}{d\tau}, 0, 0, \frac{dz}{d\tau} \right) \\ &= c (\cosh \theta, 0, 0, \sinh \theta), \end{aligned} \tag{3.44}$$

portanto, de acordo com a descrição da Seç. 2.2, o primeiro vetor do referencial local do observador acelerado é

$$e_{(0)}^\mu \equiv \frac{v^\mu}{c} \tag{3.45}$$

e como o movimento acelerado se dá na direção z , vamos escolher $e_{(3)}^\mu$ como o vetor unitário da aceleração a^μ

$$\begin{aligned} e_{(3)}^\mu &= \frac{1}{g_0} a^\mu \\ &= \frac{1}{c} \frac{dv^\mu}{d\theta} \\ &= (\sinh \theta, 0, 0, \cosh \theta). \end{aligned} \tag{3.46}$$

Nosso terceiro vetor $\mathbf{e}_{(1)}$ é obtido tomando da derivada de $\mathbf{e}_{(3)}$, a qual é exatamente $\mathbf{e}_{(0)}$. Isto se dá pois apenas senos e cossenos hiperbólicos estão presentes em v^μ . Assim temos que $b = 0$ na Eq. 2.22, de modo que podemos escolher arbitrariamente a forma de $\mathbf{e}_{(1)}$ contanto que satisfaça as relações 2.27. Assim o caso mais simples possível é

$$e_{(1)}^\mu = (0, 1, 0, 0), \tag{3.47}$$

o mesmo ocorre para $e_{(2)}^\mu$, $c = 0$ na Eq. 2.25, de modo que podemos escolher

$$e_{(1)}^\mu = (0, 0, 1, 0). \tag{3.48}$$

Então temos que a nossa base de tetradas para o caso de aceleração constante na direção z é

$$e_{(a)}{}^\mu = \begin{pmatrix} \cosh \theta & 0 & 0 & \sinh \theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh \theta & 0 & 0 & \cosh \theta \end{pmatrix}$$

e sua inversa dada pela Eq. 2.11

$$e^{(a)}{}_\mu = \begin{pmatrix} \cosh \theta & 0 & 0 & -\sinh \theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \theta & 0 & 0 & \cosh \theta \end{pmatrix}.$$

Em posse do campo de tetradas podemos obter os campos vistos pelo observador acelerado. No entanto, antes disso, é conveniente definir o vetor coluna

$$\mathbf{F} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ c\mathbf{B} \end{pmatrix}$$

que nada mais é do que a representação do tensor de Faraday através de uma matriz 6×1 .

Da mesma forma que um observador acelerado mede a projeção de $F^{\mu\nu}$ no seu campo de tetradas, isto é

$$F'^{(a)(b)} = e^{(a)}{}_\mu e^{(b)}{}_\nu F^{\mu\nu}, \quad (3.49)$$

a projeção de \mathbf{F} será

$$\mathbf{F}'(\tau) = \Upsilon(\tau)\mathbf{F}(\tau), \quad (3.50)$$

onde Υ é uma matriz 6×6 formada a partir das tetradas e que determinaremos a seguir. Voltando à Sec 1.6 observamos que as componentes do campo elétrico podem ser escritas como

$$E^i = -cF_{0i} \quad (3.51)$$

e o campo magnético pode ser expresso por

$$B^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}F_{jk}, \quad (3.52)$$

onde os índices representam as componentes espaciais e ϵ^{ijk} é o símbolo de Levi-Civita, definido por

$$\epsilon^{ijk} \equiv \begin{cases} +1 & \text{se } (ijk) = (123) \text{ ou permutações pares dos índices} \\ -1 & \text{para permutações ímpares dos índices} \\ 0 & \text{nos demais casos.} \end{cases}$$

Assim para o observador acelerado o campo elétrico \mathbf{E}' será

$$\begin{aligned} E'^i &= -cF'_{0i} \\ &= -ce_{(0)}{}^\mu e_{(i)}{}^\nu F_{\mu\nu} \\ &= -c(e_{(0)}{}^0 e_{(i)}{}^\nu F_{0\nu} + e_{(0)}{}^j e_{(i)}{}^\nu F_{j\nu}) \\ &= -c(e_{(0)}{}^0 e_{(i)}{}^0 F_{00} + e_{(0)}{}^0 e_{(i)}{}^k F_{0k} + e_{(0)}{}^j e_{(i)}{}^0 F_{j0} + e_{(0)}{}^j e_{(i)}{}^l F_{jl}) \\ &= E^j (e_{(0)}{}^0 e_{(i)}{}^j - e_{(0)}{}^j e_{(i)}{}^0) - cB^m \epsilon_{jlm} e_{(0)}{}^j e_{(i)}{}^l, \end{aligned} \quad (3.53)$$

analisando componente a componente, temos para $i = 1$

$$\begin{aligned}
E'^1 &= E^j (e_{(0)}^0 e_{(1)}^j - e_{(0)}^j e_{(1)}^0) - cB^m \epsilon_{jlm} e_{(0)}^j e_{(1)}^l \\
&= E^j \cosh \theta e_{(1)}^j - cB^m \epsilon_{j1m} e_{(0)}^j \\
&= E^1 \cosh \theta - cB^2 \epsilon_{312} e_{(0)}^3 \\
&= E^1 \cosh \theta - cB^2 \sinh \theta,
\end{aligned} \tag{3.54}$$

logo

$$\Upsilon_{1i} = (\cosh \theta, 0, 0, 0, -\sinh \theta, 0), \tag{3.55}$$

a componente 2 fica

$$\begin{aligned}
E'^2 &= E^j (e_{(0)}^0 e_{(2)}^j - e_{(0)}^j e_{(2)}^0) - cB^m \epsilon_{jlm} e_{(0)}^j e_{(2)}^l \\
&= E^j \cosh \theta e_{(2)}^j - cB^m \epsilon_{jlm} e_{(0)}^j e_{(2)}^l \\
&= E^2 \cosh \theta - cB^1 \epsilon_{321} e_{(0)}^3 e_{(2)}^2 \\
&= E^2 \cosh \theta + cB^1 \sinh \theta,
\end{aligned} \tag{3.56}$$

assim

$$\Upsilon_{2i} = (0, \cosh \theta, 0, \sinh \theta, 0, 0), \tag{3.57}$$

e a componente 3

$$\begin{aligned}
E'^3 &= E^j (e_{(0)}^0 e_{(3)}^j - e_{(0)}^j e_{(3)}^0) - cB^m \epsilon_{jlm} e_{(0)}^j e_{(3)}^l \\
&= E^3 (\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta) \\
&= E^3,
\end{aligned} \tag{3.58}$$

então

$$\Upsilon_{3i} = (0, 0, 1, 0, 0, 0). \tag{3.59}$$

Agora para a parte magnética de \mathbf{F}' temos

$$\begin{aligned}
B'^i &= \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F'_{jk} \\
&= \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} e_{(j)}^\mu e_{(k)}^\nu F_{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} (e_{(j)}^0 e_{(k)}^\nu F_{0\nu} + e_{(j)}^l e_{(k)}^\nu F_{l\nu}) \\
&= \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} (e_{(j)}^0 e_{(k)}^m F_{0m} + e_{(j)}^l e_{(k)}^0 F_{l0} + e_{(j)}^l e_{(k)}^n F_{ln}) \\
&= \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} e_{(j)}^0 e_{(k)}^m F_{0m} - \frac{1}{2} \epsilon^{ikj} e_{(k)}^l e_{(j)}^0 F_{0l} + \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} e_{(j)}^l e_{(k)}^n \epsilon_{lnp} B^p \\
&= \epsilon^{ijk} \left(\frac{1}{2} e_{(j)}^l e_{(k)}^n \epsilon_{lnp} B^p - e_{(j)}^0 e_{(k)}^l \frac{E_l}{c} \right),
\end{aligned} \tag{3.60}$$

a quarta componente de \mathbf{F}' que corresponde a B'_1 fica

$$\begin{aligned}
B'^1 &= \epsilon^{1jk} \left(\frac{1}{2} e_{(j)}^l e_{(k)}^n \epsilon_{lnp} B^p - e_{(j)}^0 e_{(k)}^l \frac{E_l}{c} \right) \\
&= \epsilon^{123} \left(\frac{1}{2} e_{(2)}^l e_{(3)}^n \epsilon_{lnp} B^p - e_{(2)}^0 e_{(3)}^l \frac{E_l}{c} \right) + \epsilon^{132} \left(\frac{1}{2} e_{(3)}^l e_{(2)}^n \epsilon_{lnp} B^p - e_{(3)}^0 e_{(2)}^l \frac{E_l}{c} \right) \\
&= \frac{1}{2} \epsilon_{lnp} B^p (e_{(2)}^l e_{(3)}^n - e_{(3)}^l e_{(2)}^n) + (e_{(2)}^0 e_{(3)}^l - e_{(3)}^0 e_{(2)}^l) \frac{E_l}{c} \\
&= \epsilon_{123} B^3 (e_{(2)}^1 e_{(3)}^2 - e_{(3)}^1 e_{(2)}^2) + \epsilon_{132} B^2 (e_{(2)}^1 e_{(3)}^3 - e_{(3)}^1 e_{(2)}^3) + \\
&\quad + \epsilon_{231} B^1 (e_{(2)}^2 e_{(3)}^3 - e_{(3)}^2 e_{(2)}^3) - e_{(3)}^0 e_{(2)}^l \frac{E_l}{c} \\
&= B^1 \cosh \theta + \frac{E_2}{c} \sinh \theta,
\end{aligned} \tag{3.61}$$

com isso

$$\Upsilon_{4i} = (0, \sinh \theta, 0, \cosh \theta, 0, 0), \tag{3.62}$$

prossequindo

$$\begin{aligned}
B'^2 &= \epsilon^{2jk} \left(\frac{1}{2} e_{(j)}^l e_{(k)}^n \epsilon_{lnp} B^p - e_{(j)}^0 e_{(k)}^l \frac{E_l}{c} \right) \\
&= \epsilon^{213} \left(\frac{1}{2} e_{(1)}^l e_{(3)}^n \epsilon_{lnp} B^p - e_{(1)}^0 e_{(3)}^l \frac{E_l}{c} \right) + \epsilon^{231} \left(\frac{1}{2} e_{(3)}^l e_{(1)}^n \epsilon_{lnp} B^p - e_{(3)}^0 e_{(1)}^l \frac{E_l}{c} \right) \\
&= \frac{1}{2} \epsilon_{lnp} B^p (e_{(3)}^l e_{(1)}^n - e_{(1)}^l e_{(3)}^n) + (e_{(1)}^0 e_{(3)}^l - e_{(3)}^0 e_{(1)}^l) \frac{E_l}{c} \\
&= \epsilon_{123} B^3 (e_{(3)}^1 e_{(1)}^2 - e_{(1)}^1 e_{(3)}^2) + \epsilon_{132} B^2 (e_{(3)}^1 e_{(1)}^3 - e_{(1)}^1 e_{(3)}^3) + \\
&\quad + \epsilon_{231} B^1 (e_{(3)}^2 e_{(1)}^3 - e_{(1)}^2 e_{(3)}^3) - \frac{E_1}{c} \sinh \theta \\
&= B^2 \cosh \theta - \frac{E_1}{c} \sinh \theta,
\end{aligned} \tag{3.63}$$

assim

$$\Upsilon_{5i} = (-\sinh \theta, 0, 0, 0, \cosh \theta, 0), \tag{3.64}$$

e a última componente

$$\begin{aligned}
B'^3 &= \epsilon^{3jk} \left(\frac{1}{2} e_{(j)}^l e_{(k)}^n \epsilon_{lnp} B^p - e_{(j)}^0 e_{(k)}^l \frac{E_l}{c} \right) \\
&= \epsilon^{312} \left(\frac{1}{2} e_{(1)}^l e_{(2)}^n \epsilon_{lnp} B^p - e_{(1)}^0 e_{(2)}^l \frac{E_l}{c} \right) + \epsilon^{321} \left(\frac{1}{2} e_{(2)}^l e_{(1)}^n \epsilon_{lnp} B^p - e_{(2)}^0 e_{(1)}^l \frac{E_l}{c} \right) \\
&= \frac{1}{2} \epsilon_{lnp} B^p (e_{(1)}^l e_{(2)}^n - e_{(2)}^l e_{(1)}^n) + (e_{(2)}^0 e_{(1)}^l - e_{(1)}^0 e_{(2)}^l) \frac{E_l}{c} \\
&= \epsilon_{123} B^3 (e_{(1)}^1 e_{(2)}^2 - e_{(2)}^1 e_{(1)}^2) + \epsilon_{132} B^2 (e_{(1)}^1 e_{(2)}^3 - e_{(2)}^1 e_{(1)}^3) + \\
&\quad + \epsilon_{321} B^1 (e_{(1)}^3 e_{(2)}^2 - e_{(2)}^3 e_{(1)}^2) \\
&= B^3,
\end{aligned} \tag{3.65}$$

então

$$\Upsilon_{5i} = (0, 0, 0, 0, 0, 1). \tag{3.66}$$

Agrupando todas as linhas, Υ toma a forma de

$$\Upsilon = \begin{pmatrix} \cosh \theta & 0 & 0 & 0 & -\sinh \theta & 0 \\ 0 & \cosh \theta & 0 & \sinh \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh \theta & 0 & \cosh \theta & 0 & 0 \\ -\sinh \theta & 0 & 0 & 0 & \cosh \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e portanto os campos no referencial não-inercial serão dados por

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}' \\ c\mathbf{B}' \end{pmatrix} = \Upsilon \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ c\mathbf{B} \end{pmatrix}$$

ou em componentes

$$\begin{aligned} E'_1 &= E_1 \cosh \theta - cB_2 \sinh \theta, \\ E'_2 &= E_2 \cosh \theta + cB_1 \sinh \theta, \\ E'_3 &= E_3 \end{aligned} \tag{3.67}$$

e

$$\begin{aligned} B'_1 &= B_1 \cosh \theta + \frac{E_2}{c} \sinh \theta, \\ B'_2 &= B_2 \cosh \theta - \frac{E_1}{c} \sinh \theta, \\ B'_3 &= B_3. \end{aligned} \tag{3.68}$$

O resultado acima mostra como se entrelaçam as componentes do campo eletromagnético em um referencial acelerado, porém até agora não levamos em conta os efeitos da não-localidade.

De acordo com a Eq. 3.35, podemos escrever os campos não-locais $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ na forma

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E} \\ c\mathcal{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}' \\ c\mathbf{B}' \end{pmatrix} + \int_0^\tau \mathbf{K}(\tau, \tau') \begin{pmatrix} \mathbf{E}' \\ c\mathbf{B}' \end{pmatrix} d\tau'$$

como o *kernel* é dado pela Eq. 3.40, a expressão acima torna-se

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E} \\ c\mathcal{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}' \\ c\mathbf{B}' \end{pmatrix} - \int_0^\tau \frac{d\Upsilon}{d\tau'} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ c\mathbf{B} \end{pmatrix} d\tau',$$

onde

$$\frac{d\Upsilon}{d\tau} = \frac{g_0}{c} \begin{pmatrix} \sinh \theta & 0 & 0 & 0 & -\cosh \theta & 0 \\ 0 & \sinh \theta & 0 & \cosh \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \theta & 0 & \sinh \theta & 0 & 0 \\ -\cosh \theta & 0 & 0 & 0 & \sinh \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

resultando em

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= E_1 \cosh \theta - cB_2 \sinh \theta + \frac{g_0}{c} \int_0^\tau (cB_2 \cosh \theta' - E_1 \sinh \theta') d\tau' \\ \mathcal{E}_2 &= E_2 \cosh \theta + cB_1 \sinh \theta - \frac{g_0}{c} \int_0^\tau (cB_1 \cosh \theta' + E_2 \sinh \theta') d\tau' \\ \mathcal{E}_3 &= E_3 \end{aligned} \tag{3.69}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_1 &= B_1 \cosh \theta + \frac{E_2}{c} \sinh \theta - \frac{g_0}{c} \int_0^\tau \left(\frac{E_2}{c} \cosh \theta' + B_1 \sinh \theta' \right) d\tau' \\
\mathcal{B}_2 &= B_2 \cosh \theta - \frac{E_1}{c} \sinh \theta + \frac{g_0}{c} \int_0^\tau \left(\frac{E_1}{c} \cosh \theta' - B_2 \sinh \theta' \right) d\tau' \\
\mathcal{B}_3 &= B_3,
\end{aligned} \tag{3.70}$$

ou ainda

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_1(\tau) &= E'_1(\tau) + c \frac{g_0}{c} \int_0^\tau B'_2(\tau') d\tau', \\
\mathcal{E}_2(\tau) &= E'_2(\tau) - c \frac{g_0}{c} \int_0^\tau B'_1(\tau') d\tau', \\
\mathcal{E}_3(\tau) &= E'_3(\tau)
\end{aligned} \tag{3.71}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_1(\tau) &= B'_1(\tau) - \frac{g_0}{c} \int_0^\tau \frac{E'_2(\tau')}{c} d\tau', \\
\mathcal{B}_2(\tau) &= B'_2(\tau) + \frac{g_0}{c} \int_0^\tau \frac{E'_1(\tau')}{c} d\tau', \\
\mathcal{B}_3(\tau) &= B'_3(\tau).
\end{aligned} \tag{3.72}$$

De imediato vemos que as componentes paralelas a direção de movimento permanecem inalteradas de maneira análoga ao que ocorre aos campos (\mathbf{E}, \mathbf{B}) através de um *boost* na direção z , como mostrado na Seq. 2.7.

Em posse dos campos não-locais estamos habilitados a investigar, entre outras coisas, a influência da não-localidade em uma radiação homogênea e isotrópica, como veremos a seguir.

Capítulo 4

A Radiação de Corpo Negro por Observadores Acelerados

Nesse capítulo iremos descrever de que maneira a não-localidade afeta a radiação vista por um observador inercial como homogênea e isotrópica.

Vamos inicialmente obter as características de uma radiação eletromagnética para um observador com aceleração constante a fim de deixar claro quais os efeitos devidos puramente a não-localidade. Já calculamos no Cap. 3 como os campos elétrico e magnético no referencial acelerado relacionam-se com os campos no referencial inercial, 3.67 e 3.68. Assim podemos representar o tensor de Faraday F'_{ab} no referencial não-inercial por

$$F'_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E'_1/c & E'_2/c & E'_3/c \\ -E'_1/c & 0 & B'_3 & -B'_2 \\ -E'_2/c & -B'_3 & 0 & B'_1 \\ -E'_3/c & B'_2 & -B'_1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde segue que o tensor energia-momento T'_{ab} é então

$$\begin{aligned} T'_{ab} &= e_{(a)}{}^\mu e_{(b)}{}^\nu T_{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{\mu_0} e_{(a)}{}^\mu e_{(b)}{}^\nu \left(F_{\mu\alpha} F_\nu{}^\alpha - \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \left(F'_{ac} F'^c{}_b - \frac{1}{4} \eta_{ab} F'^{cd} F'_{cd} \right). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Assim vemos que T'_{ab} e $T_{\mu\nu}$ são estruturalmente idênticos e podemos portanto representar o tensor energia-momento não-inercial apenas modificando $(\mathbf{E}, \mathbf{B}) \rightarrow (\mathbf{E}', \mathbf{B}')$. Suas componentes são a densidade de energia

$$T'_{00} = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\mathbf{E}'^2 + c^2 \mathbf{B}'^2 \right), \quad (4.2)$$

o vetor de Poynting

$$T'_{0i} = \frac{1}{\mu_0} \epsilon_{ijk} E'^j B'^k \quad (4.3)$$

e o tensor de tensões de Maxwell

$$T'_{ij} = T'_{ji} = \epsilon_0 \left[\frac{1}{2} \left(\mathbf{E}'^2 + c^2 \mathbf{B}'^2 \right) \delta_{ij} - (E'_i E'_j + c^2 B'_i B'_j) \right]. \quad (4.4)$$

Queremos agora expressar essas grandezas através dos campos do referencial inercial (\mathbf{E}, \mathbf{B}) , pois como veremos mais adiante, as propriedades da radiação que estudaremos são definidas em função desses campos. Isso pode ser feito por substituição direta das Eqs. 3.67 e 3.68 em T'_{ab} ou então calculando componente a componente da projeção de $T_{\mu\nu}$ no referencial local do observador acelerado. A última alternativa é a mais simples.

Comecemos então com a componente tempo-tempo do tensor energia-momento

$$\begin{aligned} T'_{00} &= e_{(0)}{}^\mu e_{(0)}{}^\nu T_{\mu\nu} \\ &= e_{(0)}{}^0 e_{(0)}{}^0 T_{00} + e_{(0)}{}^3 e_{(0)}{}^0 T_{30} + e_{(0)}{}^0 e_{(0)}{}^3 T_{03} + e_{(0)}{}^3 e_{(0)}{}^3 T_{33} \\ &= T_{00} \cosh^2 \theta + 2T_{03} \cosh \theta \sinh \theta + T_{33} \sinh^2 \theta, \end{aligned} \quad (4.5)$$

ou seja, além da densidade de energia não-inercial aumentar rapidamente com θ ela depende diretamente da componente do fluxo de calor paralela à direção de movimento e também da pressão.

As componentes do vetor de Poynting não-inercial serão

$$\begin{aligned} T'_{01} &= e_{(0)}{}^\mu e_{(1)}{}^\nu T_{\mu\nu} \\ &= e_{(0)}{}^0 e_{(1)}{}^1 T_{01} + e_{(0)}{}^3 e_{(1)}{}^1 T_{31} \\ &= T_{01} \cosh \theta + T_{31} \sinh \theta, \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} T'_{02} &= e_{(0)}{}^\mu e_{(2)}{}^\nu T_{\mu\nu} \\ &= e_{(0)}{}^0 e_{(2)}{}^2 T_{02} + e_{(0)}{}^3 e_{(2)}{}^2 T_{32} \\ &= T_{02} \cosh \theta + T_{32} \sinh \theta \end{aligned} \quad (4.7)$$

e

$$\begin{aligned} T'_{03} &= e_{(0)}{}^\mu e_{(3)}{}^\nu T_{\mu\nu} \\ &= e_{(0)}{}^0 e_{(3)}{}^0 T_{00} + e_{(0)}{}^3 e_{(3)}{}^0 T_{30} + e_{(0)}{}^0 e_{(3)}{}^3 T_{03} + e_{(0)}{}^3 e_{(3)}{}^3 T_{33} \\ &= T_{00} \cosh \theta \sinh \theta + T_{03} (\sinh^2 \theta + \cosh^2 \theta) + T_{33} \cosh \theta \sinh \theta. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Aqui ocorre uma mescla entre as componentes do vetor de Poynting com o tensor de tensões. Para a componente 3 há ainda a influência da densidade de energia: mesmo que não haja fluxo de calor no referencial inercial, haverá no referencial acelerado, pois $T_{00} \neq 0$.

E para o tensor de tensões de Maxwell temos que seus termos cruzados são

$$\begin{aligned} T'_{12} &= e_{(1)}{}^\mu e_{(2)}{}^\nu T_{\mu\nu} \\ &= e_{(1)}{}^1 e_{(2)}{}^2 T_{12} \\ &= T_{12}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} T'_{13} &= e_{(1)}{}^\mu e_{(3)}{}^\nu T_{\mu\nu} \\ &= e_{(1)}{}^1 e_{(3)}{}^3 T_{13} + e_{(1)}{}^1 e_{(3)}{}^0 T_{10} \\ &= T_{13} \cosh \theta + T_{10} \sinh \theta \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned}
T'_{23} &= e_{(2)}{}^\mu e_{(3)}{}^\nu T_{\mu\nu} \\
&= e_{(2)}{}^2 e_{(3)}{}^3 T_{23} + e_{(2)}{}^2 e_{(3)}{}^0 T_{20} \\
&= T_{23} \cosh \theta + T_{20} \sinh \theta,
\end{aligned} \tag{4.11}$$

onde ocorre novamente a mistura das componentes do tensor de tensões com o vetor de Poynting. Finalmente os termos diagonais

$$\begin{aligned}
T'_{11} &= e_{(1)}{}^\mu e_{(1)}{}^\nu T_{\mu\nu} \\
&= e_{(1)}{}^1 e_{(1)}{}^1 T_{11} \\
&= T_{11},
\end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}
T'_{22} &= e_{(2)}{}^\mu e_{(2)}{}^\nu T_{\mu\nu} \\
&= e_{(2)}{}^2 e_{(2)}{}^2 T_{22} \\
&= T_{22}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}
T'_{33} &= e_{(3)}{}^\mu e_{(3)}{}^\nu T_{\mu\nu} \\
&= e_{(3)}{}^3 e_{(3)}{}^3 T_{33} + e_{(3)}{}^3 e_{(3)}{}^0 T_{30} + e_{(3)}{}^0 e_{(3)}{}^3 T_{03} + e_{(3)}{}^0 e_{(3)}{}^0 T_{00} \\
&= T_{33} \cosh^2 \theta + 2 \cosh \theta \sinh \theta T_{30} + T_{00} \sinh^2 \theta.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Assim, dos termos T'_{ii} , que representam a pressão da radiação, apenas a componente associada à direção de movimento sofre modificação, enquanto as demais permanecem inalteradas.

Como teste de consistência, notemos que ao tomar $\theta \rightarrow 0$ nas expressões acima, todas as grandezas em ambos os referenciais são exatamente iguais. Podemos ainda verificar que a relação $T'_{ab} \eta^{ab} = T_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu} = 0$ é mantida, como esperado.

4.1 Propriedades de Coerência da Radiação de Corpo Negro

Nessa seção, baseada em [31], vamos definir o que se entende por radiação homogênea e isotrópica e investigar de que maneira estão associadas as componentes eletromagnéticas de uma radiação de corpo negro em diferentes instantes de tempo.

Supomos aqui inúmeras cavidades idênticas, sem cargas ou correntes elétricas, que encerrem a radiação em questão, analogamente ao que fizemos na Seç. 1.9. Associada a cada ponto (\mathbf{r}, t) dentro destas cavidades há uma densidade energia eletromagnética dada pela componente tempo-tempo do tensor energia-momento $T_{00} = \rho(\mathbf{r}, t)$.

Consideremos agora uma radiação homogênea, a qual é definida [32] de forma que, em média, a densidade de energia não dependa de posição ou instante de tempo

$$\begin{aligned}
\rho_0 &\equiv \langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle \\
&= \frac{\epsilon_0}{2} \left(\sum_{i=1}^3 \langle E_i^2 \rangle + c^2 \sum_{i=1}^3 \langle B_i^2 \rangle \right)
\end{aligned} \tag{4.15}$$

e assumimos também a isotropia do campo de radiação, isto é, as contribuições para a densidade de energia devidas a cada componente E_i e B_i são, em média, iguais

$$\begin{aligned}\langle E_i^2 \rangle &= \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \\ c^2 \langle B_i^2 \rangle &= \frac{\rho_0}{3\epsilon_0}\end{aligned}\quad (4.16)$$

onde $\langle \dots \rangle$ representa uma média de *ensembles*¹. Esse tipo de média baseia-se em inúmeros (à rigor infinitos) sistemas idênticos. Assim uma grandeza $g(x)$ tem sua média definida por

$$\langle g(x) \rangle \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g_i(x), \quad (4.17)$$

se essa grandeza é dita constante, então ela deve ser de tal forma que elimine a dependência em x . Isso dar-se-á se $g(x)$ for *descoerente*, como é o caso dos campos eletromagnéticos que estamos analisando. Então para o i -ésimo *ensemble* temos que além da dependência em x haverá uma constante de fase $\phi \in [0, 2\pi]$ que caracterizará g_i

$$g_i = g(x, \phi_i), \quad (4.18)$$

então

$$\langle g(x) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(x, \phi_i) \quad (4.19)$$

e para um grande número de ensembles ($N \rightarrow \infty$) podemos tornar essa média um grandeza contínua

$$\langle g(x) \rangle = \int_0^{2\pi} f(\phi) g(x, \phi) d\phi, \quad (4.20)$$

onde $f(\phi)$ é a função de distribuição de ϕ . Para o caso de uma distribuição homogênea, onde todos os ângulos são igualmente prováveis temos $f(\phi) = \frac{1}{2\pi}$. É fácil de ver ainda que, para essa distribuição, no caso de grandeza oscilatórias, $g(x) \propto \sin(x)$, $\cos(x)$, $\sin^2(x)$, $\cos^2(x)$, ... a média em ensembles corresponde exatamente à média em x .

Dito isso, a terceira condição sobre a radiação é a de descoerência dos campos, isto é, o produto $E_i B_j$ em pontos quaisquer é, em média, zero

$$\langle E_i(\mathbf{r}_1, t_1) B_j(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle = 0, \quad (4.21)$$

se $(\mathbf{r}_1, t_1) = (\mathbf{r}_2, t_2)$ a condição 4.21 implica que não há fluxo de calor associado a essa radiação.

Podemos assim sintetizar as características de uma radiação homogênea e isotrópica em um referencial inercial por

$$\begin{aligned}\langle E_i(\mathbf{r}, t) E_j(\mathbf{r}, t) \rangle &= \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \delta_{ij} \\ \langle B_i(\mathbf{r}, t) B_j(\mathbf{r}, t) \rangle &= \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \delta_{ij}\end{aligned}\quad (4.22)$$

para $i, j = 1, 2, 3$.

¹Conjuntos, em Francês.

Contudo, desconhecemos ainda a correlação entre as mesmas componentes do campo eletromagnético em diferentes instantes de tempo e posição. Para tal, assumimos a estacionaridade no espaço e no tempo de modo que a correlação entre os campos dependam apenas das suas diferenças espacial $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ e temporal $t = t_2 - t_1$, assim convém definir

$$\mathcal{C}_{ij}(\mathbf{r}, t) \equiv \langle E_i(\mathbf{r}_1, t_1) E_j(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle = c^2 \langle B_i(\mathbf{r}_1, t_1) B_j(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle, \quad (4.23)$$

Ainda se as componentes individuais E_i , B_j satisfazem a equação da onda então \mathcal{C}_{ij} também o fará

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) \mathcal{C}_{ij}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (4.24)$$

Daí segue que se pode construir as funções de coerência como um combinação linear de funções periódicas no tempo e espaço. De maneira geral

$$\mathcal{C}_{ij}(\mathbf{r}, t) = \int f_{ij}(\mathbf{k}) \cos(kct) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d^3k, \quad (4.25)$$

dado que $f_{ij}(\mathbf{k}) = f_{ij}(-\mathbf{k})$.

Ainda a correlação entre as componentes eletromagnéticas é análoga a das componentes do campo de velocidade \mathbf{v} de um fluido desenvolvida na teoria de turbulência homogênea. Além disso, para fluidos incompressíveis $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ é equivalente a condição de vácuo $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. Sob essas condições um tensor de segunda ordem como $f_{ij}(\mathbf{k})$ tem sua forma mais geral dada por [33]

$$f_{ij}(\mathbf{k}) = A(k)k_i k_j + B(k)\delta_{ij}, \quad (4.26)$$

onde A e B são, em princípio, funções arbitrárias de k . No entanto a condição de continuidade, expressa por

$$k^i f_{ij}(\mathbf{k}) = k^j f_{ij}(\mathbf{k}) = 0, \quad (4.27)$$

impõe um vínculo adicional, de modo que

$$B(k) = -A(k)k^2, \quad (4.28)$$

e então

$$f_{ij}(\mathbf{k}) = A(k)(k^2 \delta_{ij} - k_i k_j). \quad (4.29)$$

Substituindo 4.29 em 4.25 para o caso em que $\mathbf{r} = 0$ e utilizando coordenadas esféricas

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{ij}(t) &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi A(k)(k^2 \delta_{ij} - k_i k_j) \cos(kct) k^2 \sin\theta d\theta d\phi dk \\ &= 4\pi \delta_{ij} \int_0^\infty A(k) k^4 \cos(kct) dk - \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi A(k) k_i k_j \cos(kct) k^2 \sin\theta d\theta d\phi dk. \end{aligned} \quad (4.30)$$

A segunda integral de 4.30 não é tão imediata quanto a primeira. Primeiramente convém definir

$$\psi_{ij} \equiv \int_0^{2\pi} \int_0^\pi k_i k_j \sin\theta d\theta d\phi, \quad (4.31)$$

para então analisar cada par (i, j) , lembrando que

$$\begin{aligned} k_1 &= k \operatorname{sen} \theta \cos \phi, \\ k_2 &= k \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, \\ k_3 &= k \cos \theta, \end{aligned} \tag{4.32}$$

assim teremos que cada termo vale

$$\begin{aligned} \psi_{11} &= k^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \operatorname{sen}^3 \theta \cos^2 \phi d\theta d\phi \\ &= k^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos^3 \theta}{3} - \cos \theta \right) \Big|_0^\pi \cos^2 \phi d\phi \\ &= \frac{4}{3} k^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi \\ &= \frac{4}{3} k^2 \left(\frac{\phi}{2} + \frac{2\phi}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{4\pi}{3} k^2, \end{aligned} \tag{4.33}$$

$$\begin{aligned} \psi_{22} &= k^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \operatorname{sen}^3 \theta \operatorname{sen}^2 \phi d\theta d\phi \\ &= \frac{4}{3} k^2 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \phi d\phi \\ &= \frac{4}{3} k^2 \left(\frac{\phi}{2} - \frac{2\phi}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{4\pi}{3} k^2, \end{aligned} \tag{4.34}$$

$$\begin{aligned} \psi_{33} &= k^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \operatorname{sen} \theta \cos^2 \theta d\theta d\phi \\ &= 2\pi k^2 \int_0^\pi \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta d\theta \\ &= 2\pi k^2 \left(\frac{-\cos^3 \theta}{3} \right) \Big|_0^\pi \\ &= \frac{4\pi}{3} k^2, \end{aligned} \tag{4.35}$$

$$\begin{aligned} \psi_{12} &= \psi_{21} \\ &= k^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \operatorname{sen}^3 \theta \cos \phi \operatorname{sen} \phi d\theta d\phi \\ &= \frac{4}{3} k^2 \int_0^{2\pi} \cos \phi \operatorname{sen} \phi d\phi \\ &= \frac{4}{3} k^2 \left(\frac{\operatorname{sen}^2 \phi}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= 0, \end{aligned} \tag{4.36}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{13} &= \psi_{31} \\
&= k^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \text{sen}^2 \theta \cos \theta \cos \phi d\theta d\phi \\
&= 2\pi k^2 \int_0^\pi \text{sen}^2 \theta \cos \theta d\theta \\
&= \frac{4}{3} k^2 \left(\frac{\text{sen}^3 \theta}{3} \right) \Big|_0^\pi \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{4.37}$$

e

$$\begin{aligned}
\psi_{23} &= \psi_{32} \\
&= k^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \text{sen}^2 \theta \cos \theta \text{sen} \phi d\theta d\phi \\
&= k^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{\text{sen}^3 \theta}{3} \right) \Big|_0^\pi \text{sen} \phi d\phi \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Portanto temos que

$$\psi_{ij} = \frac{4\pi}{3} k^2 \delta_{ij}, \tag{4.39}$$

e a expressão 4.30 fica

$$\mathcal{C}_{ij}(t) = \frac{8\pi}{3} \delta_{ij} \int_0^\infty A(k) k^4 \cos(kct) dk. \tag{4.40}$$

Comparando 4.40 à expressão 4.22 vemos que

$$\frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \delta_{ij} = \mathcal{C}_{ij}(0), \tag{4.41}$$

ou ainda

$$\frac{\rho_0}{3\epsilon_0} = \frac{8\pi}{3} \int_0^\infty A(k) k^4 dk, \tag{4.42}$$

mas para um corpo negro sabemos que a densidade de energia total é dada pela integral da Eq. 1.135, logo

$$\frac{\hbar c}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^3}{\exp(\alpha k) - 1} dk = 8\pi \epsilon_0 \int_0^\infty A(k) k^4 dk, \tag{4.43}$$

de onde determinamos $A(k)$

$$kA(k) = \frac{\hbar c}{8\pi^3 \epsilon_0} \frac{1}{\exp(\alpha k) - 1} \tag{4.44}$$

e por conseguinte

$$\mathcal{C}_{ij}(t) = \frac{\hbar c}{3\pi^2 \epsilon_0} \delta_{ij} \int_0^\infty \frac{k^3}{\exp(\alpha k) - 1} \cos(kct) dk, \tag{4.45}$$

que pode ser reescrita como

$$\mathcal{C}_{ij}(t) = -\frac{\hbar}{3\pi^2 \epsilon_0} \delta_{ij} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \int_0^\infty \frac{\text{sen}(kct)}{\exp(\alpha k) - 1} dk, \tag{4.46}$$

ainda sabendo que

$$\int_0^\infty \frac{\text{sen}(ax)}{\exp(bx) - 1} dx = \frac{\pi}{2b} \coth\left(\frac{a\pi}{b}\right) - \frac{1}{2a}, \tag{4.47}$$

temos

$$\mathcal{C}_{ij}(t) = -\frac{\hbar}{3\pi^2\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \left[\frac{\pi}{2\alpha} \coth\left(\frac{\pi ct}{\alpha}\right) - \frac{1}{2ct} \right] \delta_{ij}, \quad (4.48)$$

fazendo agora seguinte mudança de variável

$$\xi \equiv \frac{\pi ct}{\alpha} \quad (4.49)$$

a expressão 4.48, torna-se

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{ij}(t) &= -\frac{\hbar\pi^2}{6\alpha\epsilon_0} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \left(\frac{1}{\xi} - \coth \xi \right) \delta_{ij} \\ &= -\frac{\hbar c\pi^2}{6\epsilon_0\alpha^4} \mathcal{L}'''(\xi) \delta_{ij}, \end{aligned} \quad (4.50)$$

onde $\mathcal{L}(x)$ é a *função de Langevin*, definida por

$$\mathcal{L}(x) \equiv \coth x - \frac{1}{x}. \quad (4.51)$$

Uma análise do comportamento dessa função se mostrará útil mais adiante, por isso graficamos $\mathcal{L}(x)$ e suas três primeiras derivadas na Fig 4.1. Dela fica visível que tais funções não só são suaves e bem comportadas como também são limitadas ao intervalo $[-1, 1]$, de fato, $\mathcal{L}(x \rightarrow \infty) = 1$ e nesse limite suas derivadas são nulas, o que faz com que a correlação 4.50 seja perdida pra diferenças temporais de medida muito longas. Outra característica interessante é a simetria dessas funções, temos que

$$\mathcal{L}^{(i)}(-x) = (-1)^{i+1} \mathcal{L}^{(i)}(x), \quad (4.52)$$

para $i = 0, 1, 2, \dots$

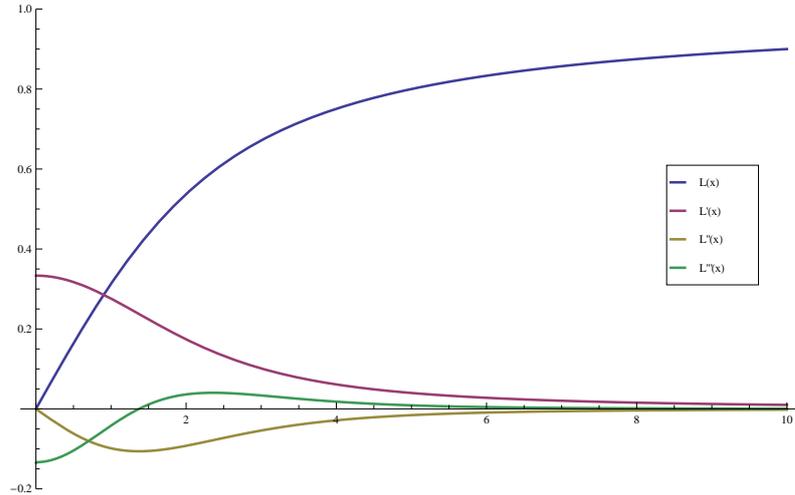


Figura 4.1: Função de Langevin e suas derivadas.

Com isso está completamente determinada a função de coerência entre as componentes eletromagnéticas para quaisquer diferenças temporais entre os campos. Para a correlação espacial, a dedução é análoga, porém um pouco mais sutil, no entanto não precisaremos desses resultados.

4.2 Influência da Não-Localidade na Radiação de Corpo Negro

Já vimos quais são as diferenças que surgem ao compararmos os campos no referencial inercial a outro com aceleração constante. No entanto, a descrição dessa radiação ainda não está completa. Vamos agora reproduzir os cálculos feitos no início do capítulo para o tensor energia-momento não-local.

De antemão, alguns pontos já podem ser ressaltados no que diz respeito às definições de homogeneidade e isotropia da radiação. Tais conceitos foram estabelecidos a partir de um referencial inercial e não há, portanto, nenhuma razão, *a priori*, para supor que eles se mantenham em um referencial acelerado. De fato, o tensor energia-momento associado a essa mesma radiação em um referencial acelerado é

$$\langle T'_{\mu\nu} \rangle = \begin{pmatrix} \langle T_{00} \rangle \cosh^2 \theta + \langle T_{33} \rangle \sinh^2 \theta & 0 & 0 & \langle T_{00} \rangle \cosh \theta \sinh \theta + \langle T_{33} \rangle \cosh \theta \sinh \theta \\ 0 & \langle T_{11} \rangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \langle T_{22} \rangle & 0 \\ \langle T_{00} \rangle \cosh \theta \sinh \theta + \langle T_{33} \rangle \cosh \theta \sinh \theta & 0 & 0 & \langle T_{33} \rangle \cosh^2 \theta + \langle T_{00} \rangle \sinh^2 \theta \end{pmatrix},$$

ou seja, o observador acelerado percebe um fluxo de calor na direção do seu movimento, o que mostra a quebra das propriedades que definem homogeneidade e isotropia.

De todo modo, analisaremos os efeitos que surgem ao introduzirmos os campos não-locais. Essencialmente o que faremos é a substituição $(\mathbf{E}', \mathbf{B}') \rightarrow (\mathcal{E}, \mathcal{B})$ no tensor energia-momento 4.1, assim

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} = -\frac{1}{\mu_0} \left(\mathcal{F}_{\mu\alpha} \mathcal{F}_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\alpha\beta} \mathcal{F}_{\alpha\beta} \right), \quad (4.53)$$

onde $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ é o tensor de Faraday não-local.

Vamos então analisar a média de cada componente de $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ fazendo uso das propriedades de homogeneidade e isotropia (no referencial inercial) para uma radiação de corpo negro definida através da Eq. 1.135.

4.2.1 Não-Localidade na Densidade de Energia

A densidade de energia média ρ_{nl} , que de fato é medida pelo observador acelerado, é dada por

$$\rho_{nl} = \frac{\epsilon_0}{2} \sum_{i=1}^3 (\langle \mathcal{E}_i^2 \rangle + c^2 \langle \mathcal{B}_i^2 \rangle). \quad (4.54)$$

Precisamos, portanto, computar cada termo de 4.54. O primeiro será

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_1 \rangle &= \left\langle \left[E_1 \cosh \theta - cB_2 \sinh \theta + \frac{g_0}{c} \int_0^\tau (cB_2 \cosh \theta' - E_1 \sinh \theta') d\tau' \right]^2 \right\rangle \\ &= \langle (E_1 \cosh \theta - cB_2 \sinh \theta)^2 \rangle + \\ &+ \langle 2 \frac{g_0}{c} (E_1 \cosh \theta - cB_2 \sinh \theta) \int_0^\tau (cB_2 \cosh \theta' - E_1 \sinh \theta') d\tau' \rangle + \\ &+ \left\langle \left[\frac{g_0}{c} \int_0^\tau (cB_2 \cosh \theta' - E_1 \sinh \theta') d\tau' \right]^2 \right\rangle, \end{aligned} \quad (4.55)$$

onde apenas os termos envolvendo as integrais estão associados a não-localidade. Levando em conta as

propriedades 4.22, ficamos com

$$\begin{aligned} \langle (E_1 \cosh \theta - cB_2 \sinh \theta)^2 \rangle &= \langle E_1^2 \rangle \cosh^2 \theta + c^2 \langle B_2^2 \rangle \sinh^2 \theta \\ &= \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} (\cosh^2 \theta + \sinh^2 \theta) \end{aligned} \quad (4.56)$$

e o segundo termo

$$\begin{aligned} 2\frac{g_0}{c} \langle (E_1 \cosh \theta - cB_2 \sinh \theta) \int_0^\tau (cB_2 \cosh \theta' - E_1 \sinh \theta') d\tau' \rangle &= \\ = -2\frac{g_0}{c} \left[\cosh \theta \int_0^\tau \langle E_1(\tau') E_1(\tau) \rangle \sinh \theta' d\tau' + \sinh \theta \int_0^\tau c^2 \langle B_2(\tau') B_2(\tau) \rangle \cosh \theta' d\tau' \right], \end{aligned} \quad (4.57)$$

sendo que $\langle E_i(\tau') E_j(\tau) \rangle$ e $\langle B_i(\tau') B_j(\tau) \rangle$ representam a função de correlação, dada pela Eq. 4.50, em diferentes instantes de tempo (próprio). Assim fazendo uso da associação entre as coordenadas 1.82, podemos escrever

$$\begin{aligned} \langle E_i(\tau') E_j(\tau) \rangle &= \langle E_i(t(\tau')) E_j(t(\tau)) \rangle \\ &= C_{ij}(t'(\tau') - t(\tau)) \\ &= C(\tau', \tau) \delta_{ij}, \end{aligned} \quad (4.58)$$

onde

$$C(\tau', \tau) \equiv -\frac{\hbar c \pi^2}{6\epsilon_0 \alpha^4} \mathcal{L}''' \left[\frac{\pi c}{\alpha} \frac{c}{g_0} \left(\sinh \left(\frac{g_0}{c} \tau' \right) - \sinh \left(\frac{g_0}{c} \tau \right) \right) \right], \quad (4.59)$$

então a expressão 4.57 fica

$$\begin{aligned} 2\frac{g_0}{c} \langle (E_1 \cosh \theta - cB_2 \sinh \theta) \int_0^\tau (cB_2 \cosh \theta' - E_1 \sinh \theta') d\tau' \rangle &= \\ = -2\frac{g_0}{c} \left[\cosh \theta \int_0^\tau C(\tau', \tau) \sinh \theta' d\tau' + \sinh \theta \int_0^\tau C(\tau', \tau) \cosh \theta' d\tau' \right] \end{aligned} \quad (4.60)$$

e o terceiro termo de 4.55

$$\begin{aligned} \left\langle \left[\frac{g_0}{c} \int_0^\tau (cB_2 \cosh \theta' - E_1 \sinh \theta') d\tau' \right]^2 \right\rangle &= \\ = \left(\frac{g_0}{c} \right)^2 \left[\int_0^\tau \int_0^\tau c^2 \langle B_2(\tau') B_2(\tau'') \rangle \cosh \theta' \cosh \theta'' d\tau' d\tau'' + \int_0^\tau \int_0^\tau \langle E_1(\tau') E_1(\tau'') \rangle \sinh \theta' \sinh \theta'' d\tau' d\tau'' \right] \\ = \left(\frac{g_0}{c} \right)^2 \int_0^\tau \int_0^\tau C(\tau'', \tau') (\sinh \theta' \sinh \theta'' + \cosh \theta' \cosh \theta'') d\tau' d\tau''. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Reagrupando-os, obtemos

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_1 \rangle &= \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} (\cosh^2 \theta + \sinh^2 \theta) - 2\frac{g_0}{c} \left[\cosh \theta \int_0^\tau C(\tau', \tau) \sinh \theta' d\tau' + \sinh \theta \int_0^\tau C(\tau', \tau) \cosh \theta' d\tau' \right] + \\ &+ \left(\frac{g_0}{c} \right)^2 \int_0^\tau \int_0^\tau C(\tau'', \tau') (\sinh \theta' \sinh \theta'' + \cosh \theta' \cosh \theta'') d\tau' d\tau''. \end{aligned} \quad (4.62)$$

O próximo termo é

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{E}_2 \mathcal{E}_2 \rangle &= \left\langle \left[E_2 \cosh \theta + cB_1 \sinh \theta - \frac{g_0}{c} \int_0^\tau (cB_1 \cosh \theta' + E_2 \sinh \theta') d\tau' \right]^2 \right\rangle \\
&= \langle (E_2 \cosh \theta + cB_1 \sinh \theta)^2 \rangle - 2 \frac{g_0}{c} \langle (E_2 \cosh \theta + cB_1 \sinh \theta) \int_0^\tau (cB_1 \cosh \theta' + E_2 \sinh \theta') d\tau' \rangle + \\
&+ \left\langle \left[\frac{g_0}{c} \int_0^\tau (cB_1 \cosh \theta' + E_2 \sinh \theta') d\tau' \right]^2 \right\rangle \\
&= \langle E_2 E_2 \rangle \cosh^2 \theta + c^2 \langle B_1 B_1 \rangle \sinh^2 \theta + \\
&- 2 \frac{g_0}{c} \left[\sinh \theta \int_0^\tau c^2 \langle B_1(\tau) B_1(\tau') \rangle \cosh \theta' d\tau' + \cosh \theta \int_0^\tau \langle E_2(\tau) E_2(\tau') \rangle \sinh \theta' d\tau' \right] + \\
&+ \left(\frac{g_0}{c} \right)^2 \int_0^\tau \int_0^\tau [c^2 \langle B_1(\tau') B_1(\tau'') \rangle \cosh \theta' \cosh \theta'' + \langle E_2(\tau') E_2(\tau'') \rangle \sinh \theta' \sinh \theta''] d\tau' d\tau'' \\
&= \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} (\cosh^2 \theta + \sinh^2 \theta) - 2 \frac{g_0}{c} \left[\sinh \theta \int_0^\tau \mathcal{C}(\tau, \tau') \cosh \theta' d\tau' + \cosh \theta \int_0^\tau \mathcal{C}(\tau, \tau') \sinh \theta' d\tau' \right] + \\
&+ \left(\frac{g_0}{c} \right)^2 \int_0^\tau \int_0^\tau \mathcal{C}(\tau', \tau'') (\cosh \theta' \cosh \theta'' + \sinh \theta' \sinh \theta'') d\tau' d\tau'' \\
&= \langle \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_1 \rangle
\end{aligned} \tag{4.63}$$

e a contribuição associada à componente do campo paralela à direção do movimento não sofre nenhuma alteração

$$\langle \mathcal{E}_3 \mathcal{E}_3 \rangle = \langle E_3 E_3 \rangle = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0}. \tag{4.64}$$

As contribuições devido ao campo magnético são

$$\begin{aligned}
c^2 \langle B_1 B_1 \rangle &= \left\langle \left[cB_1 \cosh \theta + E_2 \sinh \theta - \frac{g_0}{c} \int_0^\tau (E_2 \cosh \theta' + cB_1 \sinh \theta') d\tau' \right]^2 \right\rangle \\
&= \langle (cB_1 \cosh \theta + E_2 \sinh \theta)^2 \rangle - 2 \frac{g_0}{c} \langle (cB_1 \cosh \theta + E_2 \sinh \theta) \int_0^\tau (E_2 \cosh \theta' + cB_1 \sinh \theta') d\tau' \rangle + \\
&+ \left\langle \left[\frac{g_0}{c} \int_0^\tau (E_2 \cosh \theta' + cB_1 \sinh \theta') d\tau' \right]^2 \right\rangle \\
&= c^2 \langle B_1 B_1 \rangle \cosh^2 \theta + \langle E_2 E_2 \rangle \sinh^2 \theta + \\
&- 2 \frac{g_0}{c} \left[\cosh \theta \int_0^\tau c^2 \langle B_1(\tau) B_1(\tau') \rangle \cosh \theta' d\tau' + \sinh \theta \int_0^\tau \langle E_2(\tau) E_2(\tau') \rangle \sinh \theta' d\tau' \right] + \\
&+ \left(\frac{g_0}{c} \right)^2 \int_0^\tau \int_0^\tau [c^2 \langle B_1(\tau') B_1(\tau'') \rangle \cosh \theta' \cosh \theta'' + \langle E_2(\tau') E_2(\tau'') \rangle \sinh \theta' \sinh \theta''] d\tau' d\tau'' \\
&= \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} (\cosh^2 \theta + \sinh^2 \theta) - 2 \frac{g_0}{c} \left[\cosh \theta \int_0^\tau \mathcal{C}(\tau, \tau') \cosh \theta' d\tau' + \sinh \theta \int_0^\tau \mathcal{C}(\tau, \tau') \sinh \theta' d\tau' \right] + \\
&+ \left(\frac{g_0}{c} \right)^2 \int_0^\tau \int_0^\tau \mathcal{C}(\tau', \tau'') (\cosh \theta' \cosh \theta'' + \sinh \theta' \sinh \theta'') d\tau' d\tau'' \\
&= \langle \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_1 \rangle
\end{aligned} \tag{4.65}$$

e

$$\begin{aligned}
c^2 \langle \mathcal{B}_2 \mathcal{B}_2 \rangle &= \left\langle \left[cB_2 \cosh \theta - E_1 \sinh \theta + \frac{g_0}{c} \int_0^\tau (E_1 \cosh \theta' - cB_2 \sinh \theta') d\tau' \right]^2 \right\rangle \\
&= \langle (cB_2 \cosh \theta - E_1 \sinh \theta)^2 \rangle - 2 \frac{g_0}{c} \langle (cB_2 \cosh \theta - E_1 \sinh \theta) \int_0^\tau (E_1 \cosh \theta' - cB_2 \sinh \theta') d\tau' \rangle + \\
&+ \left\langle \left[\frac{g_0}{c} \int_0^\tau (cB_2 \cosh \theta - E_1 \sinh \theta) d\tau' \right]^2 \right\rangle \\
&= c^2 \langle B_2 B_2 \rangle \cosh^2 \theta + \langle E_1 E_1 \rangle \sinh^2 \theta + \\
&- 2 \frac{g_0}{c} \left[\cosh \theta \int_0^\tau c^2 \langle B_2(\tau) B_2(\tau') \rangle \cosh \theta' d\tau' + \sinh \theta \int_0^\tau \langle E_1(\tau) E_1(\tau') \rangle \sinh \theta' d\tau' \right] + \\
&+ \left(\frac{g_0}{c} \right)^2 \int_0^\tau \int_0^\tau [\langle E_1(\tau') E_1(\tau'') \rangle \cosh \theta' \cosh \theta'' + \langle c^2 B_2(\tau') B_2(\tau'') \rangle \sinh \theta' \sinh \theta''] d\tau' d\tau'' \\
&= \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} (\cosh^2 \theta + \sinh^2 \theta) - 2 \frac{g_0}{c} \left[\sinh \theta \int_0^\tau \mathcal{C}(\tau, \tau') \cosh \theta' d\tau' + \cosh \theta \int_0^\tau \mathcal{C}(\tau, \tau') \sinh \theta' d\tau' \right] + \\
&+ \left(\frac{g_0}{c} \right)^2 \int_0^\tau \int_0^\tau \mathcal{C}(\tau', \tau'') (\cosh \theta' \cosh \theta'' + \sinh \theta' \sinh \theta'') d\tau' d\tau'' \\
&= \langle \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_1 \rangle
\end{aligned} \tag{4.66}$$

e como esperado

$$c^2 \langle \mathcal{B}_3 \mathcal{B}_3 \rangle = c^2 \langle B_3 B_3 \rangle = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0}. \tag{4.67}$$

Assim para obtermos a densidade de energia não-local precisamos resolver as integrais que aparecem na Eq. 4.62, onde a contribuição não-local aparece associada diretamente com a aceleração, como se suporia.

Podemos perceber ainda que essa contribuição se dá em termos de $\frac{g_0}{c}$ e $\left(\frac{g_0}{c}\right)^2$ e portanto se as integrais que acompanham os termos quadráticos em g_0 forem finitas para todo τ teremos que $\frac{g_0}{c} \int f(\tau) d\tau \ll 1$ podemos, em boa aproximação, considerar apenas as contribuições de primeira ordem em $\frac{g_0}{c}$. Nesse intuito vamos analisar as integrais

$$I_{CC}(\tau) \equiv \int_0^\tau \int_0^\tau \mathcal{C}(\tau'', \tau') \cosh \theta' \cosh \theta'' d\tau' d\tau'' \tag{4.68}$$

e

$$I_{SS}(\tau) \equiv \int_0^\tau \int_0^\tau \mathcal{C}(\tau'', \tau') \sinh \theta' \sinh \theta'' d\tau' d\tau''. \tag{4.69}$$

Explicitando I_{CC} para τ ela torna-se

$$I_{CC}(\tau) = -\frac{\hbar c \pi^2}{6\epsilon_0 \alpha^4} \int_0^\tau \int_0^\tau \mathcal{L}''' \left[\frac{\pi c}{\alpha} \frac{c}{g_0} \left(\sinh \left(\frac{g_0}{c} \tau'' \right) - \sinh \left(\frac{g_0}{c} \tau' \right) \right) \right] \cosh \left(\frac{g_0}{c} \tau' \right) \cosh \left(\frac{g_0}{c} \tau'' \right) d\tau' d\tau'', \tag{4.70}$$

agora com a mudança de variáveis

$$x(\tau) \equiv \frac{\pi c}{\alpha} \frac{c}{g_0} \sinh \left(\frac{g_0}{c} \tau \right) \Rightarrow dx = \frac{\pi c}{\alpha} \cosh \left(\frac{g_0}{c} \tau \right) d\tau, \tag{4.71}$$

a expressão 4.70 fica

$$\begin{aligned} I_{CC}(\tau) &= -\frac{\hbar}{6\epsilon_0 c \alpha^2} \int_0^x \int_0^x \mathcal{L}'''(x'' - x') dx'' dx' \\ &= -\frac{\hbar}{6\epsilon_0 c \alpha^2} \int_0^x [\mathcal{L}''(x - x') - \mathcal{L}''(-x')] dx' \\ &= -\frac{\hbar}{6\epsilon_0 c \alpha^2} [-\mathcal{L}'(x - x) + \mathcal{L}'(x) + \mathcal{L}'(-x) - \mathcal{L}'(0)], \end{aligned} \quad (4.72)$$

voltando às variáveis originais e utilizando o fato de que $\mathcal{L}'(-x) = \mathcal{L}'(x)$ obtemos

$$I_{CC}(\tau) = \frac{\hbar}{3\epsilon_0 c \alpha^2} \left[\mathcal{L}'(0) - \mathcal{L}'\left(\frac{\pi c}{\alpha} \frac{c}{g_0} \sinh\left(\frac{g_0}{c} \tau\right)\right) \right], \quad (4.73)$$

de onde é fácil de ver que o apenas o primeiro termo de I_1 contribui quando $\tau \rightarrow \infty$.

Prosseguindo para a análise de I_{SS}

$$I_{SS}(\tau) = -\frac{\hbar c \pi^2}{6\epsilon_0 \alpha^4} \int_0^\tau \int_0^\tau \mathcal{L}''' \left[\frac{\pi c}{\alpha} \frac{c}{g_0} \left(\sinh\left(\frac{g_0}{c} \tau''\right) - \sinh\left(\frac{g_0}{c} \tau'\right) \right) \right] \sinh\left(\frac{g_0}{c} \tau'\right) \sinh\left(\frac{g_0}{c} \tau''\right) d\tau' d\tau'', \quad (4.74)$$

com a mesma mudança de variáveis 4.71, ficamos com

$$I_{SS}(\tau) = -\frac{\hbar}{6\epsilon_0 c \alpha^2} \int_0^x \int_0^x \frac{\mathcal{L}'''(x'' - x') x'' x'}{\sqrt{a^2 + x''^2} \sqrt{a^2 + x'^2}} dx'' dx', \quad (4.75)$$

onde $a \equiv \frac{\pi c}{\alpha} \frac{c}{g_0}$.

Não conseguimos resolver analiticamente essa expressão, porém podemos aproximar

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \cong \begin{cases} \frac{x}{a} & \text{se } x \leq a \\ 1 & \text{se } x > a, \end{cases}$$

a comparação gráfica entre essas funções está na representada na Fig. 4.2. Nela fica evidente que, no domínio considerado, essa aproximação é sempre maior que a função original e portanto se sua integral convergir, a integral original também o fará.

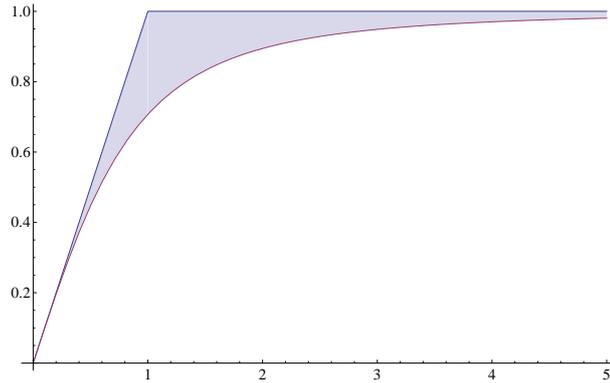


Figura 4.2: Diferença entre a função analítica e sua aproximação. Aqui fizemos $a = 1$.

Com isso, I_{SS} reescreve-se como

$$\begin{aligned} I_{SS}(\tau) &\cong -\frac{\hbar}{6\epsilon_0 c \alpha^2} \int_0^x \frac{x'}{\sqrt{a^2 + x'^2}} dx' \left[\int_0^a \mathcal{L}'''(x'' - x') \frac{x''}{a} dx'' + \int_a^x \mathcal{L}'''(x'' - x') dx'' \right] \\ &= -\frac{\hbar}{6\epsilon_0 c \alpha^2} \int_0^x \frac{x'}{\sqrt{a^2 + x'^2}} dx' \left\{ \mathcal{L}''(a - x') - \frac{1}{a} [\mathcal{L}'(a - x') - \mathcal{L}'(-x')] + \mathcal{L}''(x - x') - \mathcal{L}''(a - x') \right\}. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Aqui cabe voltarmos a atenção aos termos proporcionais a a^{-1} . Vemos da definição de a que este parâmetro depende da aceleração do observador e da temperatura associada à radiação, de fato $a \approx 2 \times 10^{19} \frac{T}{g_0}$. Então, a menos que estejamos tratando de temperaturas realmente próximas a zero, ou altíssimas acelerações, teremos que $a \gg 1$, e como a função de Langevin e suas derivadas são sempre finitas, podemos desprezar tais termos. Dessa forma ficamos com

$$\begin{aligned} I_{SS}(\tau) &\cong -\frac{\hbar}{6\epsilon_0 c \alpha^2} \int_0^x \mathcal{L}''(x-x') \frac{x'}{\sqrt{a^2+x'^2}} dx' \\ &\cong \frac{\hbar}{6\epsilon_0 c \alpha^2} \left[\int_0^a \mathcal{L}''(x'-x) \frac{x'}{a} dx' + \int_0^x \mathcal{L}''(x'-x) dx' \right] \\ &= \frac{\hbar}{6\epsilon_0 c \alpha^2} [\mathcal{L}'(a-x) + \mathcal{L}''(x-x) - \mathcal{L}'(-x)] \\ &= \frac{\hbar}{6\epsilon_0 c \alpha^2} [\mathcal{L}'(x-a) + \mathcal{L}'(0) - \mathcal{L}'(x)], \end{aligned} \quad (4.77)$$

ou ainda

$$I_{SS}(\tau) \cong \frac{\hbar}{6\epsilon_0 c \alpha^2} \left\{ \frac{1}{3} + \mathcal{L}' \left[\frac{\pi c}{\alpha} \frac{c}{g_0} \left(\sinh \left(\frac{g_0}{c} \tau \right) - 1 \right) \right] - \mathcal{L}' \left[\frac{\pi c}{\alpha} \frac{c}{g_0} \sinh \left(\frac{g_0}{c} \tau \right) \right] \right\}, \quad (4.78)$$

que se comporta suavemente e tende a uma constante para $\tau \rightarrow \infty$.

Portanto, é lícito, conforme mencionado anteriormente, desprezar os termos de ordem $\left(\frac{g_0}{c}\right)^2$ nas componentes do tensor energia-momento. Assim, a densidade de energia eletromagnética para os campos não-locais 4.54 fica

$$\begin{aligned} \rho_{nl} &= \frac{\epsilon_0}{2} (4\langle \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_1 \rangle + 2\langle \mathcal{E}_3 \mathcal{E}_3 \rangle) \\ &\cong \frac{2\rho_0}{3} \left(\cosh^2 \theta + \sinh^2 \theta + \frac{1}{2} \right) - 8\epsilon_0 \frac{g_0}{c} \int_0^\tau \mathcal{C}(\tau, \tau') (\sinh \theta \cosh \theta' + \cosh \theta \sinh \theta') d\tau', \end{aligned} \quad (4.79)$$

as integrais acima são calculadas da mesma maneira que I_{CC} e I_{SS}

$$\begin{aligned} I_C(\tau) &\equiv \int_0^\tau \mathcal{C}(\tau, \tau') \cosh \theta' d\tau' \\ &= -\frac{\pi \hbar}{6\epsilon_0 \alpha^3} \int_0^x \mathcal{L}'''(x-x') dx' \\ &= -\frac{\pi \hbar}{6\epsilon_0 \alpha^3} [\mathcal{L}''(0) - \mathcal{L}''(-x)] \\ &= -\frac{\pi \hbar}{6\epsilon_0 \alpha^3} \mathcal{L}''(x) \\ &= -\frac{\pi \hbar}{6\epsilon_0 \alpha^3} \mathcal{L}'' \left[\frac{c}{g_0} \frac{\pi c}{\alpha} \sinh \left(\frac{g_0 \tau}{c} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.80)$$

e

$$\begin{aligned} I_S(\tau) &\equiv \int_0^\tau \mathcal{C}(\tau, \tau') \sinh \theta' d\tau' \\ &= -\frac{\pi \hbar}{6\epsilon_0 \alpha^3} \int_0^x \mathcal{L}'''(x-x') \frac{x'}{\sqrt{a^2+x'^2}} dx' \\ &\cong -\frac{\pi \hbar}{6\epsilon_0 \alpha^3} \left[\int_0^a \mathcal{L}'''(x-x') \frac{x'}{a} dx' + \int_a^x \mathcal{L}'''(x-x') dx' \right] \\ &= -\frac{\pi \hbar}{6\epsilon_0 \alpha^3} [\mathcal{L}''(x-a) + \mathcal{L}''(x-x) - \mathcal{L}''(x-a)] \\ &= 0, \end{aligned} \quad (4.81)$$

então, definindo o parâmetro adimensional $\lambda(\tau)$

$$\begin{aligned}\lambda(\tau) &\equiv \frac{\epsilon_0 g_0}{\rho_0 c} I_C(\tau) \\ &= -\frac{5\hbar}{2\pi c k_B} \frac{g_0}{T} \mathcal{L}'' \left[\frac{c}{g_0} \frac{\pi c}{\alpha} \sinh \left(\frac{g_0 \tau}{c} \right) \right] \\ &= \lambda_0 \mathcal{L}''(\theta),\end{aligned}\tag{4.82}$$

podemos expressar a densidade de energia como

$$\rho_{nl} = \frac{2\rho_0}{3} \left(\cosh^2 \theta + \sinh^2 \theta + \frac{1}{2} \right) - 8\rho_0 \lambda(\tau) \sinh \theta\tag{4.83}$$

ou

$$\frac{\rho_{nl}}{\langle T'_{00} \rangle} = 1 - 12\lambda(\tau) \frac{\sinh \theta}{\cosh^2 \theta + \sinh^2 \theta + \frac{1}{2}}.\tag{4.84}$$

É importante notar que, como pode ser visto na Fig. 4.1, a função $\mathcal{L}''(x)$ é sempre negativa para $x > 0$ de forma que λ é positivo definido, implicando assim em um decréscimo na densidade de energia.

Ainda é possível termos uma ideia da ordem de grandeza de λ substituindo os valores das constantes \hbar , c e k_B

$$\begin{aligned}\lambda_0 &\equiv \frac{5\hbar}{2\pi c k_B} \frac{g_0}{T} \\ &\approx 2 \times 10^{-19} \frac{g_0}{T},\end{aligned}\tag{4.85}$$

o que faz com que seja necessário uma grande razão aceleração-temperatura para tornar mensurável os efeitos não-locais.

A Fig. 4.3 ilustra o comportamento da magnitude do termo não-local na Eq. 4.84. Vemos que, mesmo para valores relativamente altos de λ , a influência da não-localidade na densidade de energia corresponde a cerca de 1 % do seu valor absoluto.

4.2.2 Não-Localidade no Fluxo de Calor

Vamos agora analisar outra grandeza presente no tensor momento-energia, o vetor de Poynting não-local é dado por

$$\langle \mathcal{S}_i \rangle = \frac{1}{\mu_0} \epsilon_{ijk} \langle \mathcal{E}^j \mathcal{B}^k \rangle.\tag{4.86}$$

A condição 4.21 permite apenas contribuições do tipo $\langle E_i^2 \rangle$ e $\langle B_i^2 \rangle$ ao fluxo de calor, o que faz com os termos que envolvam a componente z dos campos sejam automaticamente zero. Assim para $i = 1$

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{S}_1 \rangle &= \frac{1}{\mu_0} [\langle \mathcal{E}_2 \mathcal{B}_3 \rangle - \langle \mathcal{E}_3 \mathcal{B}_2 \rangle] \\ &= \frac{1}{\mu_0} \left\{ \left\langle \left[E_2 \cosh \theta + c B_1 \sinh \theta - \frac{g_0}{c} \int_0^\tau (c B_1 \cosh \theta' + E_2 \sinh \theta') d\tau' \right] B_3 \right\rangle + \right. \\ &\quad \left. - \left\langle E_3 \left[B_2 \cosh \theta - \frac{E_1}{c} \sinh \theta + \frac{g_0}{c} \int_0^\tau \left(\frac{E_1}{c} \cosh \theta' - B_2 \sinh \theta' \right) d\tau' \right] \right\rangle \right\} \\ &= 0,\end{aligned}\tag{4.87}$$

o mesmo ocorre para $i = 2$

$$\langle \mathcal{S}_2 \rangle = 0,\tag{4.88}$$

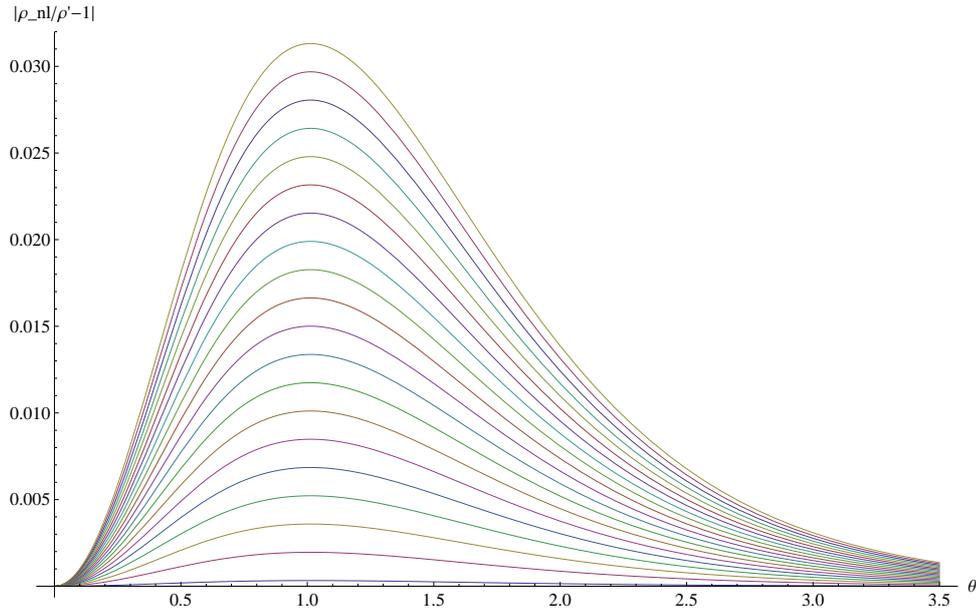


Figura 4.3: Comportamento do termo não-local da densidade de energia. Os valores de λ_0 plotados vão de 1×10^{-3} a 100×10^{-3} .

porém na direção do movimento temos uma contribuição não-nula

$$\langle \mathcal{S}_3 \rangle = \frac{1}{\mu_0} [\langle \mathcal{E}_1 \mathcal{B}_2 \rangle - \langle \mathcal{E}_2 \mathcal{B}_1 \rangle], \quad (4.89)$$

calculando ambos os termos acima

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E}_1 \mathcal{B}_2 \rangle &= \left\langle \left[E_1 \cosh \theta - c B_2 \sinh \theta + \frac{g_0}{c} \int_0^\tau (c B_2 \cosh \theta' - E_1 \sinh \theta') d\tau' \right] \right. \\ &\times \left. \left[B_2 \cosh \theta - \frac{E_1}{c} \sinh \theta + \frac{g_0}{c} \int_0^\tau \left(\frac{E_1}{c} \cosh \theta' - B_2 \sinh \theta' \right) d\tau' \right] \right\rangle \\ &= -\frac{2\rho_0}{3c\epsilon_0} \cosh \theta \sinh \theta + \frac{2}{c} \frac{g_0}{c} \left[\cosh \theta \int_0^\tau \mathcal{C}(\tau', \tau) \cosh \theta' d\tau' + \sinh \theta \int_0^\tau \mathcal{C}(\tau', \tau) \sinh \theta' d\tau' \right] + \\ &- \frac{1}{c} \left(\frac{g_0}{c} \right)^2 \int_0^\tau \int_0^\tau \mathcal{C}(\tau'', \tau') (\sinh \theta' \cosh \theta'' + \sinh \theta' \cosh \theta'') d\tau' d\tau'' \end{aligned} \quad (4.90)$$

e

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E}_2 \mathcal{B}_1 \rangle &= \left\langle \left[E_2 \cosh \theta + c B_1 \sinh \theta - \frac{g_0}{c} \int_0^\tau (c B_1 \cosh \theta' + E_2 \sinh \theta') d\tau' \right] \right. \\ &\times \left. \left[B_1 \cosh \theta + \frac{E_2}{c} \sinh \theta - \frac{g_0}{c} \int_0^\tau \left(\frac{E_2}{c} \cosh \theta' + B_1 \sinh \theta' \right) d\tau' \right] \right\rangle \\ &= \frac{2\rho_0}{3c\epsilon_0} \cosh \theta \sinh \theta - \frac{2}{c} \frac{g_0}{c} \left[\cosh \theta \int_0^\tau \mathcal{C}(\tau', \tau) \cosh \theta' d\tau' + \sinh \theta \int_0^\tau \mathcal{C}(\tau', \tau) \sinh \theta' d\tau' \right] + \\ &+ \frac{1}{c} \left(\frac{g_0}{c} \right)^2 \int_0^\tau \int_0^\tau \mathcal{C}(\tau'', \tau') (\sinh \theta' \cosh \theta'' + \sinh \theta' \cosh \theta'') d\tau' d\tau'' \\ &= -\langle \mathcal{E}_1 \mathcal{B}_2 \rangle. \end{aligned} \quad (4.91)$$

Caímos aqui na integral

$$I_{SC}(\tau) \equiv \int_0^\tau \int_0^\tau \mathcal{C}(\tau'', \tau') \sinh \theta' \cosh \theta'' d\tau' d\tau'' \quad (4.92)$$

que possui uma parte integrável analiticamente e outra apenas aproximadamente. Ainda com a mudança de variáveis 4.71 podemos reescrever I_{SC} como

$$\begin{aligned} I_{SC}(\tau) &= -\frac{\hbar}{6\epsilon_0 c \alpha^2} \int_0^x \int_0^x \frac{\mathcal{L}'''(x'' - x')}{\sqrt{a^2 + x'^2}} x' dx'' dx' \\ &= \frac{\hbar}{6\epsilon_0 c \alpha^2} \int_0^x \frac{\mathcal{L}''(x' - x) - \mathcal{L}''(x')}{\sqrt{a^2 + x'^2}} x' dx', \end{aligned} \quad (4.93)$$

recorrendo novamente a aproximação utilizada em I_{SS} ficamos com

$$I_{SC}(\tau) \cong \frac{\hbar}{6\epsilon_0 c \alpha^2} \left\{ \int_0^a [\mathcal{L}''(x' - x) - \mathcal{L}''(x')] \frac{x'}{a} dx' + \int_a^x [\mathcal{L}''(x' - x) - \mathcal{L}''(x')] dx' \right\} \quad (4.94)$$

e desprezando os termos proporcionais a a^{-1}

$$\begin{aligned} I_{SC}(\tau) &= \frac{\hbar}{6\epsilon_0 c \alpha^2} [\mathcal{L}'(a - x) - \mathcal{L}'(a) + \mathcal{L}'(x - x) - \mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}'(a - x) + \mathcal{L}'(a)] \\ &= \frac{\hbar}{6\epsilon_0 c \alpha^2} [2\mathcal{L}'(a) + \mathcal{L}'(0) - \mathcal{L}'(x)] \\ &= \frac{\hbar}{6\epsilon_0 c \alpha^2} \left\{ \frac{1}{3} - \mathcal{L}' \left[\frac{c}{g_0} \frac{\pi c}{\alpha} \sinh \left(\frac{g_0 \tau}{c} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.95)$$

Assim, podemos novamente manter os termos até primeira ordem em $\frac{g_0}{c}$ e com isso a terceira componente do vetor de Poynting fica

$$\langle \mathcal{S}_3 \rangle = -\frac{4}{3} \rho_0 \cosh \theta \sinh \theta + 4\epsilon_0 \frac{g_0}{c} \left[\cosh \theta \int_0^\tau \mathcal{C}(\tau', \tau) \cosh \theta' d\tau' + \sinh \theta \int_0^\tau \mathcal{C}(\tau', \tau) \sinh \theta' d\tau' \right] \quad (4.96)$$

que com a definição 4.82 torna-se

$$\langle \mathcal{S}_3 \rangle = -\frac{4}{3} \rho_0 \cosh \theta \sinh \theta + 4\lambda(\tau) \rho_0 \cosh \theta, \quad (4.97)$$

ou ainda

$$\frac{\langle \mathcal{S}_3 \rangle}{\langle S'_3 \rangle} = 1 - 3 \frac{\lambda(\tau)}{\sinh \theta}. \quad (4.98)$$

Aqui devemos ter um pouco mais de cuidado com a análise, pois para $\theta = 0$ a divisão acima não pode, à rigor, ser feita. No entanto, isso não representa nenhum problema físico, já que para $\theta \rightarrow 0$ temos que $\langle \mathcal{S}_3 \rangle \rightarrow 0$. Com isso em mente, percebemos que a contribuição não-local é mais acentuada no início da aceleração e cai rapidamente a zero com o decorrer do tempo, como mostra a Fig. 4.4.

4.2.3 Não-Localidade no Tensor de Tensões

Finalmente, o tensor de tensões não-local é dado por

$$\mathcal{T}_{ij} = \mathcal{T}_{ji} = \epsilon_0 \left[\frac{1}{2} (\mathcal{E}^2 + c^2 \mathcal{B}^2) \delta_{ij} - \mathcal{E}_i \mathcal{E}_j - c^2 \mathcal{B}_i \mathcal{B}_j \right]. \quad (4.99)$$

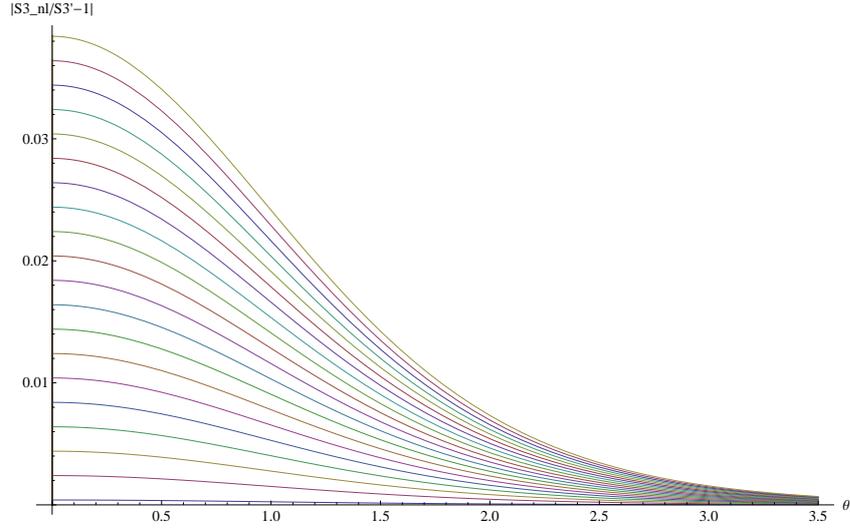


Figura 4.4: Influência da não-localidade na componente do vetor de Poynting paralela ao movimento do observador. Os valores de λ plotados vão de 0 a 100×10^{-3} .

Calculando cada componente

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{T}_{11} \rangle &= \epsilon_0 \left[\frac{1}{2} (\langle \mathcal{E}^2 \rangle + c^2 \langle \mathcal{B}^2 \rangle) - \langle \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_1 \rangle - c^2 \langle \mathcal{B}_1 \mathcal{B}_1 \rangle \right] \\
 &= \frac{\epsilon_0}{2} [-\langle \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_1 \rangle + \langle \mathcal{E}_2 \mathcal{E}_2 \rangle + \langle \mathcal{E}_3 \mathcal{E}_3 \rangle - c^2 \langle \mathcal{B}_1 \mathcal{B}_1 \rangle + c^2 \langle \mathcal{B}_2 \mathcal{B}_2 \rangle + c^2 \langle \mathcal{B}_3 \mathcal{B}_3 \rangle] \\
 &= \frac{\epsilon_0}{2} (\langle \mathcal{E}_3 \mathcal{E}_3 \rangle + c^2 \langle \mathcal{B}_3 \mathcal{B}_3 \rangle) \\
 &= \frac{\epsilon_0}{2} (\langle E_3 E_3 \rangle + c^2 \langle B_3 B_3 \rangle) \\
 &= \frac{\rho_0}{3} \\
 &= \langle T_{11} \rangle
 \end{aligned} \tag{4.100}$$

e pelo fato de que $\langle \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_1 \rangle = \langle \mathcal{E}_2 \mathcal{E}_2 \rangle$ e $\langle \mathcal{B}_1 \mathcal{B}_1 \rangle = \langle \mathcal{B}_2 \mathcal{B}_2 \rangle$, teremos que

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{T}_{22} \rangle &= \frac{\epsilon_0}{2} (\langle \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_1 \rangle - \langle \mathcal{E}_2 \mathcal{E}_2 \rangle + \langle \mathcal{E}_3 \mathcal{E}_3 \rangle + c^2 \langle \mathcal{B}_1 \mathcal{B}_1 \rangle - c^2 \langle \mathcal{B}_2 \mathcal{B}_2 \rangle + c^2 \langle \mathcal{B}_3 \mathcal{B}_3 \rangle) \\
 &= \langle T_{22} \rangle,
 \end{aligned} \tag{4.101}$$

já para o terceiro termo

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{T}_{33} \rangle &= \frac{\epsilon_0}{2} (\langle \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_1 \rangle + \langle \mathcal{E}_2 \mathcal{E}_2 \rangle - \langle \mathcal{E}_3 \mathcal{E}_3 \rangle + c^2 \langle \mathcal{B}_1 \mathcal{B}_1 \rangle + c^2 \langle \mathcal{B}_2 \mathcal{B}_2 \rangle - c^2 \langle \mathcal{B}_3 \mathcal{B}_3 \rangle) \\
 &= \epsilon_0 (2 \langle \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_1 \rangle - \langle \mathcal{E}_3 \mathcal{E}_3 \rangle) \\
 &= \frac{\rho_0}{3} [2(\cosh^2 \theta + \sinh^2 \theta) - 1 - 2\lambda(\tau) \sinh \theta]
 \end{aligned} \tag{4.102}$$

e a razão entre as quantidades não-locais e locais é

$$\frac{\langle \mathcal{T}_{33} \rangle}{\langle T'_{33} \rangle} = 1 - \lambda(\tau) \frac{\sinh \theta}{\cosh^2 \theta + \sinh^2 \theta - \frac{1}{2}}, \tag{4.103}$$

e portanto há uma variação da pressão associada a não-localidade da forma mostrada na Fig. 4.5.

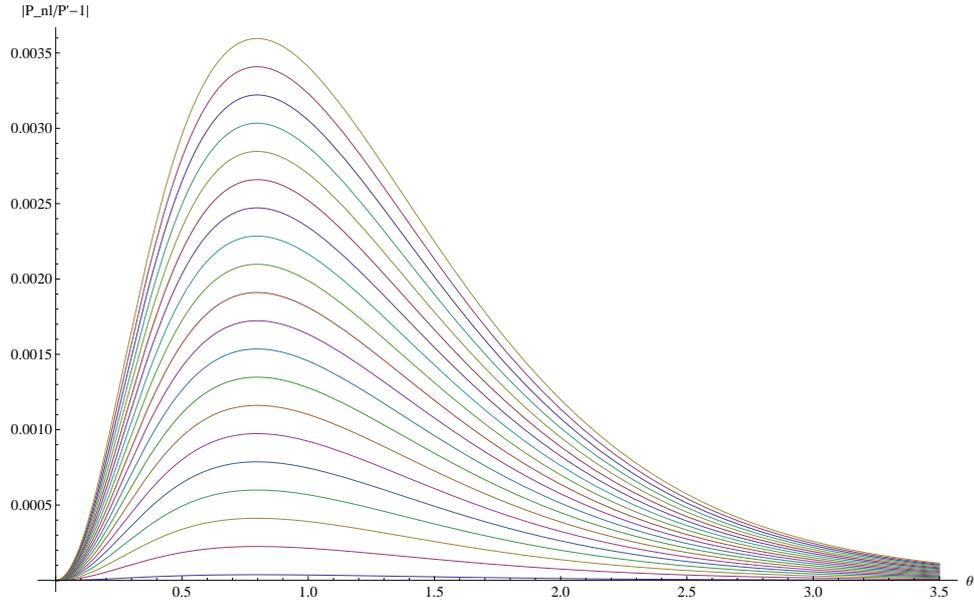


Figura 4.5: Não-localidade na componente \mathcal{T}_{33} . Os valores de λ vão de 1×10^{-3} a 100×10^{-3} .

Os termos cruzados serão todos identicamente nulos

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{T}_{12} \rangle &= -\epsilon_0 (\langle \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 \rangle + c^2 \langle \mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2 \rangle) \\
 &= -\epsilon_0 \left[\left\langle \left(E'_1 + c \frac{g_0}{c} \int_0^\tau B'_2(\tau') d\tau' \right) \left(E'_2 - c \frac{g_0}{c} \int_0^\tau B'_1(\tau') d\tau' \right) \right\rangle + \right. \\
 &\quad \left. + c^2 \left\langle \left(B'_1 - \frac{g_0}{c} \int_0^\tau \frac{E'_2(\tau')}{c} d\tau' \right) \left(B'_2 + \frac{g_0}{c} \int_0^\tau \frac{E'_1(\tau')}{c} d\tau' \right) \right\rangle \right] \\
 &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.104}$$

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{T}_{13} \rangle &= -\epsilon_0 (\langle \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_3 \rangle + c^2 \langle \mathcal{B}_1 \mathcal{B}_3 \rangle) \\
 &= \epsilon_0 \left[\left\langle \left(E'_1 + c \frac{g_0}{c} \int_0^\tau B'_2(\tau') d\tau' \right) E_3 \right\rangle + c^2 \left\langle \left(B'_1 - \frac{g_0}{c} \int_0^\tau \frac{E'_2(\tau')}{c} d\tau' \right) B_3 \right\rangle \right] \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{4.105}$$

e

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{T}_{23} \rangle &= -\epsilon_0 (\langle \mathcal{E}_2 \mathcal{E}_3 \rangle + c^2 \langle \mathcal{B}_2 \mathcal{B}_3 \rangle) \\
 &= \epsilon_0 \left[\left\langle \left(E'_2 - c \frac{g_0}{c} \int_0^\tau B'_1(\tau') d\tau' \right) E_3 \right\rangle + c^2 \left\langle \left(B'_2 + \frac{g_0}{c} \int_0^\tau \frac{E'_1(\tau')}{c} d\tau' \right) B_3 \right\rangle \right] \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.106}$$

Portanto, a influência da não-localidade enfraquece os efeitos provocados pela aceleração do observador e é mais evidente na densidade de energia. No entanto, todos esses efeitos, devido ao comportamento da função de correlação 4.50, são rapidamente atenuados.

Considerações Finais

Apresentamos o conceito de localidade que permeia a Física e mostramos como ele pode ser estendido. Nesse sentido, as teorias que daí se sucedem são ditas não-locais. Analisamos então o caso da eletrodinâmica, onde a definição do campo eletromagnético foi aprimorada a fim de contemplar os observadores não-inerciais. Isso garante que *nenhum* observador permaneça parado diante uma onda eletromagnética.

Utilizamos assim esses novos campos para descrever como um observador uniformemente acelerado percebe uma radiação homogênea e isotrópica de corpo negro. Para isso calculamos o tensor energia-momento associado a essa radiação no referencial acelerado de onde obtivemos quantitativamente a influência da não-localidade na densidade de energia, fluxo de calor e pressão.

Vimos então que as propriedades que caracterizam uma radiação homogênea e isotrópica deixam de ser válidas já para um observador acelerado, no entanto, com a não-localidade essas diferenças são atenuadas. Porém devido ao comportamento da função de correlação, os efeitos não-locais são rapidamente suprimidos, de modo que qualquer medição que tenha em vista detectar tais efeitos deve ser feita tão logo a aceleração se dê início. Mostrou-se útil caracterizar esses efeitos pelo parâmetro λ o qual depende diretamente da razão g_0/T .

Ainda, de acordo com a definição 4.85 há uma possível conexão entre λ e a chamada *temperatura de Unruh* $T_U = \frac{\hbar g_0}{2\pi c k_B}$, o que permite investigações futuras nessa linha.

Outro aspecto interessante, é que por a teoria não-local basear-se na construção dos campos é possível generalizar as leis físicas para o caso não-inercial [34]. No entanto, as novas equações assim obtidas são válidas apenas para um determinado observador acelerado, de forma que perdem parte do caráter abrangente que possuem nos referenciais inerciais.

A não-localidade, como já mencionado, não limita-se apenas a eletrodinâmica, pelo contrário, ela deve ser considerada sempre que os fenômenos em estudo envolvam ondas e referenciais acelerados, o que faz com que a Mecânica Quântica seja um candidato natural à aplicação da teoria não-local. Não obstante, há esforços [35]-[37] para empregá-la no domínio gravitacional, onde simula, por exemplo, o comportamento da matéria escura na Teoria da Relatividade Geral.

Bibliografia

- [1] J. C. Maxwell; *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*; Philosophical Transactions of the Royal Society of London 155: 459–512 (1865).
- [2] A. Einstein, *On the Electrodynamics of Moving Bodies*; Annalen der Physik 17, 891-921 (1905).
- [3] M. Nussenzveig *Curso de Física Básica Volume 4*; 7ed. Editora Blucher, São Paulo (1998).
- [4] O. Gron, S. Hervik; *Einstein's General Theory of Relativity*; Springer (2007)
- [5] M. Nakahara; *Geometry, Topology and Physics*; 2ed. GSSP, IoP (2003).
- [6] C. Nash, S. Sen; *Topology and Geometry for Physicists*; Academic Press Inc., London (1983)
- [7] J. D. Jackson *Classical Electrodynamics*; 2ed. Wiley, New York (1975).
- [8] D. Griffiths *Introduction to Electrodynamics*; 3ed. Prentice Hall, NJ (1999)
- [9] M. Planck *Sobre a Teoria da Lei de Distribuição de Energia do Espectro Normal*; Annalen der Physik 1, 719 (1900)
- [10] R. Eisberg; R. Resnick; *Física Quântica*; 9ed. Elsevier, Editora Campus (1994).
- [11] J. E. Mayer, M. G. Mayer *Statistical Mechanics*; 2ed. John Wiley Sons Inc., New York, (1977).
- [12] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler; *Gravitation*; San Francisco (1971).
- [13] F. F. Faria; *Sistemas de Referência Locais no Espaço-tempo*; Tese de Doutorado, UnB (2009).
- [14] J. L. Synge *Relativity: The General Theory*; North-Holland, Amsterdam (1960).
- [15] J. W. Maluf, F. F. Faria; *On the Construction of Fermi-Walker Transported Frames*; Ann. Phys. 5, 326-335 (2008).
- [16] H. A. Lorentz *The Theory of Electrons*; Dover, New York (1952).
- [17] A. Einstein, *The Meaning of Relativity*; Princeton University Press, Princeton, NJ (1955).
- [18] B. Mashhoon; *Nonlocal Special Relativity*; arXiv:0805.2926v1 [gr-qc] (19 May 2008).

- [19] B. Mashhoon *The Hypothesis of Locality and Its Limitations*; arXiv:gr-qc/0303029v1 (7 Mar 2003).
- [20] N. Bohr, L. Rosenfeld; *Phys. Rev.* 78, 794 (1950)
- [21] N. Bohr, L. Rosenfeld; *K. Dan. Vidensk. Selsk, Mat. Fys. Medd.* 12, No. 8 (1933); traduzido como *Quantum Theory and Measurement*, editado por J. A. Wheeler e W. H. Zurek; Princeton University Press, Princeton, NJ (1983).
- [22] B. Mashhoon; *Necessity of Acceleration-Induced Nonlocality*; arXiv:1006.4150v2 [gr-qc] (29Nov2010).
- [23] F. G. Tricomi; *Integral Equations*; Interscience, New York (1957).
- [24] V. Volterra; *Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations*; Dover, New York (1959)
- [25] G. B. Arfken, H. J. Weber; *A Mathematical Method for Physicists*; 6ed. Elsevier, (2005).
- [26] B. Mashhoon; *Nonlocal Theory of Accelerated Observers*; *Phys. Rev. A* 47 4498 (1993).
- [27] B. Mashhoon; *Nonlocal Electrodynamics of Linearly Accelerated Systems*; *Phys. Review A* 70, 062103 (2004).
- [28] B. Mashhoon; *Nonlocal Electrodynamics of Accelerated Systems*; *Phys. Letters A* 366, 545-549 (2007).
- [29] C. Chicone, B. Mashhoon; *Acceleration-Induced Nonlocality: Uniqueness of the Kernel*; *Phys. Letters A* 298, 229-235 (2002).
- [30] C. Chicone; B. Mashhoon, *Acceleration-Induced Nonlocality: Kinetic Memory Versus Dynamic Memory*; *Ann. Phys. (Leipzig)* 11, 309-332 (2002).
- [31] R. C. Bourret; *Coherence Properties of Blackbody Radiation*; *Il Nuovo Cimento*, Vol. XVIII, N° 2 (1960).
- [32] R. C. Tolman; *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*; Clarendon Press. (1934).
- [33] G. K. Batchelor; *The Theory of Homogeneous Turbulence*; Cambridge University Press, Cambridge, NJ (1959).
- [34] B. Mashhoon; *Vacuum Electrodynamics of Accelerated Systems: Nonlocal Maxwell's Equations*; arXiv:hep-th/0309124v1 (12 Sep 2003).
- [35] F. W. Hehl, B. Mashhoon; *Phys. Lett. B* 673, 279 (2009).
- [36] F. W. Hehl, B. Mashhoon; *Phys. Rev. D* 79, 064028 (2009).
- [37] H. J. Blome *et. al.*; *Phys. Rev. D* 79, 065020 (2010).