

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

As ações efetivas irreduzíveis a
n-partículas como abordagens
não-perturbativas em TQC

Mariana Rubet da Costa

Orientador: Itzhak Roditi

23/01/2014

Mariana Rubet da Costa

As ações efetivas irreduzíveis a
n-partículas como abordagens
não-perturbativas em TQC

Dissertação de Mestrado apresentada
ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
(CBPF), como requisito à obtenção
do título de **Mestre em Ciências** sob
a orientação do Prof. Dr. Itzhak Ro-
diti.

Rio de Janeiro

2014

Banca Examinadora

Prof. Dr. Itzhak Roditi

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas – CBPF

Prof. Dr. José Abdalla Helayël-Neto

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas – CBPF

Prof. Dr. César Linhares da Fonseca Jr.

Universidade Estadual do Rio de Janeiro – UERJ

"A vida existe sem argumento algum e a Verdade não necessita de provas - necessita apenas do teu coração . Não de argumentos, mas do teu amor, da tua confiança, da tua disponibilidade para receber."

Osho

"Sem amor
toda a adoração é um fardo
toda a dança se transforma em rotina
toda a música é um mero barulho.
Toda a chuva do céu poderia cair sobre o mar -
Sem amor,
nenhuma gota se transformaria em uma pérola."

de um poema de Rumi

Sumário

1	Introdução	1
2	Conceitos Básicos	5
2.1	Notação	5
2.2	A Integral de Trajetória	6
2.3	Funções de correlação e funcionais geradores	8
3	Potencial efetivo Gaussiano e pós-Gaussiano	15
3.1	Introdução	15
3.2	O potencial efetivo Gaussiano, PEG, no formalismo canônico*	17
3.3	Uma teoria “perturbativa” otimizada	20
4	Funcionais da Ação Efetiva	29
4.1	Visão Geral	29
4.2	Ação efetiva 1PI e o método do ponto sela	30
4.3	Ação efetiva 2PI e sua expansão diagramática	36
5	Cálculo do potencial efetivo a partir da análise da expansão 2PPI em uma teoria com termos de auto-interação tipo ϕ^4 e ϕ^6	43
5.1	Análise diagramática dos gráficos 2PPR e 2PPI	44
5.2	Cálculo do potencial efetivo	46

6	Conclusão	51
A	Diagramas de Feynman e Auto-energia	53
B	A transformada de Legendre	59
C	Expansão em loops	61
D	PEG	63
E	Prova da independência de Γ em ϕ_0	65
F	Efeito de realizar uma inserção de momento nulo	67
	Referências Bibliográficas	69

Capítulo 1

Introdução

Em Teoria Quântica de Campo (TQC), devido a dificuldade de se tratar, com exatidão, a dinâmica dos campos, em particular no caso de teorias interagentes, métodos de aproximação foram desenvolvidos para o aprofundamento do estudo de tais teorias. Esses métodos se situam em geral em dois grandes grupos: métodos perturbativos e não-perturbativos. No primeiro caso podemos destacar as expansões perturbativas na constante de acoplamento e no segundo as re-somações, como as expansões em anéis associadas a potenciais efetivos. O primeiro é muito eficiente e amplamente usado, porém, quando as flutuações quânticas se tornam importantes, ele é limitado. Já os potenciais efetivos são mais eficientes nestes casos e existem diversas formulações diferentes, com suas vantagens e desvantagens.

Nosso interesse nesta dissertação está orientado para o estudo dos métodos que dão origem a aproximações não perturbativas, como as ações efetivas e os os potenciais efetivos associados.

Observando com cuidado a evolução histórica do estudo de TQC em abordagens não-perturbativas constata-se que a partir do final dos anos 70 se têm procurado por aproximações analíticas eficientes em descrever os modelos físicos associados, como no caso de modelos de campos escalares ou modelos mistos com interação de Yukawa entre bósons e férmions. A maior parte destas aproximações se baseia na dominância de um tipo particular de configuração de campo (solitons, instantons, etc) ou em alguma situação física do vácuo de fundo não-perturbado (vácuo de Copenhague, vácuo supercondutor dual, ...). Essas técnicas aumentaram bastante a compreensão da natureza não-perturbativa da TQC, no entanto nenhuma delas pôde fornecer resultados quantitativamente confiáveis. Sempre se limitavam ao regime de acoplamento fraco (aproximações semi-clássicas) ou não puderam encontrar um meio sistemático de melhorar as aproximações.

O potencial efetivo teve grande impacto por sua utilidade na compreensão dos processos

envolvendo quebra de simetria, que vem a ser o processo subjacente ao mecanismo de Higgs. O potencial efetivo é definido como o menor valor esperado da Hamiltoniana relativamente a todos os possíveis funcionais de vácuo. Claramente uma quantidade cuja obtenção exata beira o impossível. Entretanto, como mencionamos, diversas aproximações foram introduzidas. A mais conhecida sendo o potencial efetivo de 1 anel (1-loop) lançada na década de 60.

No início dos anos 80 surgiu a proposta do Potencial Efetivo Gaussiano (PEG), nos dando uma estimativa variacional para o potencial efetivo, através de um funcional de vácuo Gaussiano. A largura da Gaussiana é o parâmetro variacional Ω , que é a massa na teoria. O potencial Gaussiano por não ser necessariamente convexo - condição necessária para se obter o potencial a partir da expansão em loops [12] - nos traz uma abordagem qualitativamente melhor, nos provendo de uma visão mais realista da física subjacente aos modelos. Além disso, o potencial a 1-loop perde sua eficácia quando efeitos quânticos de ordens maiores que 1 em \hbar se tornam significantes. Como, na abordagem do PEG estamos tratando de um método variacional, que sabemos que em geral é eficiente para todos os tipos de acoplamento, restou o desafio de se aprimorar a técnica para obter resultados de maior precisão. De acordo com Stevenson, este método contém os resultados da aproximação em um loop e os primeiros termos da expansão em $1/N$ [6], [16] e [24]. A desvantagem dele é a falta de controle na aproximação variacional.

Posteriormente, foi elaborado o Potencial Efetivo Pós-Gaussiano (PEPG), cujo objetivo foi acrescentar correções ao potencial Gaussiano. [15]* Nesta abordagem o PEG é o resultado em primeira ordem da série de expansão da densidade de energia do vácuo. O método para obter o PEPG consiste fundamentalmente em adicionar um termo de massa, parametrizado por Ω , à parte livre da Hamiltoniana original H_0 , e subtraí-lo da parte que contém os termos de interação H_I . Um parâmetro δ é introduzido artificialmente na parte da Hamiltoniana que contém os termos de interação, de tal modo que quando $\delta = 1$ restauramos a Hamiltoniana original, independente do parâmetro Ω . Neste método se expande perturbativamente δ , para se alcançar o PEPG. Pode-se ver que o PEG é o resultado em primeira ordem da série de expansão perturbativa gerada a partir de H_I , que nos fornece a densidade de energia do vácuo. Desta forma, usa-se como artifício teoria de perturbação, porém não estamos tratando de uma genuína teoria de perturbação visto que o parâmetro δ foi introduzido artificialmente na teoria, e não é, de modo algum, uma constante de acoplamento. Como os resultados em 1 loop coincidem com os do PEG, podemos pensar neste método como indo além do PEG - em uma expressão, pós-Gaussiano.

*Em [16] e [27] encontramos a origem do método

Alternativamente aos formalismos tradicionais da mecânica quântica, podemos calcular potenciais efetivos usando o formalismo de funcionais geradores. Podemos definir, com o conceito de integrais de trajetória, o funcional gerador das funções de Green, $Z(J)$. A partir deste, calcula-se o funcional gerador das funções de Green conexas, $W(J)$, e a partir de n transformações de Legendre deste, podemos obter o funcional gerador das funções n PI - irreduzíveis a n partículas, que são funções cujos diagramas não se separam em partes isoladas ao cortarmos n linhas internas. Este funcional é chamado ação efetiva, pois ele contém além da ação clássica, as correções quânticas. Podemos expandir a ação efetiva de modo a obter o potencial efetivo, que como a ação efetiva, já possui correções quânticas. Dentro desta metodologia, a aproximação 1PI é a mais imediata e simples, pois leva em conta apenas uma fonte e um operador de campo no cálculo da ação efetiva. Os diagramas gerados a partir dela são classificados como 1PI, ou seja, irreduzíveis a uma partícula, porque ao cortarmos uma única linha interna, que corresponde a um propagador simples do campo, o diagrama não se separa em partes isoladas. Já a aproximação 2PI tem uma construção mais elaborada, levando em conta no cálculo da ação efetiva duas fontes, $J(x)$ e $R(x, y)$, e além do operador de campo ordinário $\phi(x)$, temos um operador composto de campo que é o produto ordenado no tempo $T\phi(x)\phi(y)$. Os diagramas gerados a partir desta ação são classificados como 2PI, irreduzíveis a duas partículas, porque ao cortarmos 2 linhas internas quaisquer, o diagrama não se separa em partes isoladas. Esta formulação é vantajosa para teorias que apresentem quebra espontânea de simetria, já que o potencial efetivo pode, por construção, exibir uma forma de poço duplo com um máximo local na origem simétrica, o que não era possível antes, no método 1PI, pelo fato dele ser definido por uma transformada de Legendre de apenas um termo, o que o tornou uma função necessariamente convexa. A expansão 2PPI é bastante similar, porém mais simples que o 2PI por se tratar de operadores compostos locais, ou seja, avaliados num mesmo ponto. Isto torna a expansão mais simples. Um diagrama é classificado como 2PPI, irreduzível pontualmente a duas partículas, se ao cortarmos duas linhas de um mesmo vértice ele não se separa em partes isoladas. Desta forma, a expansão 2PPI está num lugar intermediário entre a expansão 1PI e a expansão 2PI.

Nesta dissertação vamos estudar estas abordagens não-perturbativas: o potencial efetivo Gaussiano, o pós-Gaussiano e os potenciais efetivos obtidos das ações efetivas irreduzíveis 1PI, 2PI e 2PPI.

No capítulo 2 temos uma apresentação dos conceitos básicos que serão utilizados no decorrer da dissertação.

No capítulo 3 fizemos uma breve revisão do conceito de potencial efetivo e em seguida expomos o procedimento e os cálculos do potencial efetivo Gaussiano, como foi desenvolvido

em [7], através do formalismo tradicional da mecânica quântica. A finalidade é comparar estes resultados com os desta dissertação e expor esta outra forma de calcular o potencial efetivo, fundamentada no formalismo algébrico da mecânica quântica. Ainda neste mesmo capítulo nós estendemos a aplicação do método pós-Gaussiano, como feito em [15], a uma teoria com termos de auto-interação ϕ^4 e ϕ^6 .

No capítulo 4 fizemos uma introdução às ações efetivas irreduzíveis a n partículas e em seguida analisamos particularmente o potencial efetivo a partir da ação efetiva 1PI, onde usamos o método do ponto cela para obter os diagramas de Feynman 1PI de acordo com as ordens de \hbar , que equivale a expansão em loops [†]. Nós estendemos a aplicação deste método, como feito em [8], para uma teoria com termos de auto-interação tipo ϕ^4 e ϕ^6 . Na seção seguinte expomos a aproximação 2PI, preliminar ao estudo da 2PPI, já que esta última pode ser vista como um caso particular da 2PI, em que o operador composto é uma função local, ou seja, função de apenas uma variável independente, invés de duas variáveis, como é na formulação 2PI.

Prosseguimos com o capítulo 5, em que fizemos uma discussão da aproximação 2PPI e análises diagramáticas pertinentes para o cálculo do potencial efetivo, tendo como referência os trabalhos publicados [20] e [18], porém reformulando e aplicando a uma teoria com termos de auto-interação tipo ϕ^4 e ϕ^6 .

No capítulo 6 chegamos às conclusões, e em seguida, temos alguns apêndices detalhando questões abordadas ao longo da dissertação.

Boa leitura.

[†]Vide apêndice C

Capítulo 2

Conceitos Básicos

2.1 Notação

Ao longo desta dissertação vamos realizar os cálculos num espaço quadri-dimensional Euclidiano, que é concebido através da rotação da coordenada temporal para o eixo imaginário. Esta manipulação matemática é conhecida como rotação de Wick. Desta forma as integrais podem ser tratadas como uma extensão das coordenadas esféricas num espaço quadri-dimensional *. A rotação da componente temporal do quadri-vetor $x^\mu = (x^0, \vec{x})$,

$$x^0 \rightarrow -ix^0, \quad (2.1)$$

produz um novo quadri-vetor $x_E^\mu = (-ix^0, \vec{x})$, cujo quadrado será sempre negativo:

$$x_E^2 = -(x^0)^2 - \vec{x}^2 = -|x_E^2|. \quad (2.2)$$

Com esta nova coordenada x_E podemos realizar integrais euclidianas em 4 dimensões.

Também usaremos uma prática notação que abrevia os argumentos espaço-temporais em

*Um ponto neste espaço é identificado, em coordenadas "quadri-esféricas", por

$$x = (r \sin \omega \sin \theta \cos \phi, r \sin \omega \sin \theta \sin \phi, r \sin \omega \cos \theta, r \cos \omega)$$

e o elemento de volume é

$$d^4x = r^3 \sin^2 \omega \sin \theta d\phi d\theta d\omega dr.$$

índices. Definindo:

$$\int_x \equiv \int d^4x \quad , \quad \delta_{xy} \equiv \delta^4(x - y) \quad (2.3)$$

$$\int_p \equiv \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \quad , \quad \delta_{pq} \equiv (2\pi)^4 \delta^4(p - q) \quad (2.4)$$

Vamos escrever a ação para uma teoria com termo de auto-interação tipo ϕ^4 somada ao termo de fonte de Schwinger, no espaço de Minkowski:

$$\int_x \mathcal{L} + J\phi = \int_x \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + J\phi. \quad (2.5)$$

Após a rotação de Wick, se torna

$$-i \int_{x_E} (\mathcal{L}_E + J\phi) = -i \int_{x_E} \left(-\frac{1}{2}(\partial_{E\mu} \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + J\phi \right). \quad (2.6)$$

E o gerador funcional $Z[J]$ se escreve:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left[\int_{x_E} (\mathcal{L}_E + J\phi) \right]. \quad (2.7)$$

Trabalharemos ao longo deste estudo no espaço Euclidiano.

2.2 A Integral de Trajetória

O uso de integrais de trajetória em TQC, proposto por Feynman, é uma alternativa ao formalismo tradicional da mecânica quântica desenvolvido por Heisenberg e Schroedinger. Essa formulação é baseada na noção de propagador. No propagador está resumida a mecânica quântica do sistema. Na formulação usual da MQ, dada uma função de onda inicial, pode-se achar a função de onda final depois de resolver a equação de Schrödinger dependente do tempo. Alternativamente, nesta formulação proposta por Feynman, o propagador fornece a solução diretamente. A idéia é expressar o propagador através da integral de caminho. Vejamos:

Dada uma função de onda em um tempo t_i , $\Psi(x_i, t_i)$, o propagador nos permite achar a função de onda correspondente em um tempo posterior t_f :

$$\Psi(x_f, t_f) = \int_{x_i} K(x_f t_f, x_i t_i) \Psi(x_i, t_i), \quad (2.8)$$

em que, por simplicidade, estamos considerando apenas uma dimensão espacial. Na in-

interpretação da MQ, $\Psi(x_f, t_f)$ é a amplitude de probabilidade da partícula se encontrar no ponto x_f , em um tempo t_f . Com isso, o propagador $K(x_f t_f, x_i t_i)$ é a amplitude de probabilidade da transição de x_i em t_i , para x_f em t_f . A probabilidade de se observar a partícula em x_f , no instante t_f , é

$$P(x_f t_f, x_i t_i) = |K(x_f t_f, x_i t_i)|^2.$$

O propagador K é na realidade a quantidade $\langle x_f t_f | x_i t_i \rangle$.[†]

Dividindo o intervalo entre x_i e x_f em duas partes, com t sendo o tempo intermediário e x o ponto espacial intermediário, pela aplicação sucessiva de (2.8), temos

$$\Psi(x_f, t_f) = \int_x \int_{x_i} K(x_f t_f, x t) K(x t, x_i t_i) \Psi(x_i, t_i), \quad (2.10)$$

de onde podemos concluir que

$$K(x_f t_f, x_i t_i) = \int_x K(x_f t_f, x t) K(x t, x_i t_i). \quad (2.11)$$

Sendo assim, a transição $(x_i, t_i) \rightarrow (x_f, t_f)$ é resultado da transição de (x_i, t_i) para todos os pontos possíveis x intermediários, seguido da transição $(x, t) \rightarrow (x_f, t_f)$. Sendo assim, podemos dividir um intervalo entre (x_i, t_i) e (x_f, t_f) em $n + 1$ pedaços, de modo que o propagador se torne

$$\langle x_f t_f | x_i t_i \rangle = \int_{x_n} \dots \int_{x_1} \langle x_f t_f | x_n t_n \rangle \langle x_n t_n | x_{n-1} t_{n-1} \rangle \dots \langle x_1 t_1 | x_i t_i \rangle. \quad (2.12)$$

[†]Podemos perceber isso lembrando que

$$\Psi(x, t) = \langle x | \Psi t \rangle_S$$

em que o vetor $|\Psi t\rangle_S$ de Schrödinger está relacionado com o de Heisenberg $|\Psi\rangle_H$ por

$$|\Psi t\rangle_S = e^{-iHt/\hbar} |\Psi\rangle_H.$$

Definindo o vetor

$$|x t\rangle = e^{iHt/\hbar} |\Psi\rangle_H,$$

temos que

$$\Psi(x, t) = \langle x t | \Psi \rangle_H. \quad (2.9)$$

E usando a propriedade que $\int_{x_i} |x_i t_i\rangle \langle x_i t_i| = 1$, temos

$$\langle x_f t_f | \Psi \rangle = \int_{x_i} \langle x_f t_f | x_i t_i \rangle \langle x_i t_i | \Psi \rangle.$$

Que com a (2.9),

$$\Psi(x_f, t_f) = \int_{x_i} \langle x_f t_f | x_i t_i \rangle \Psi(x_i, t_i).$$

Comparando com a (2.8), vemos que $\langle x_f t_f | x_i t_i \rangle = K(x_f t_f, x_i t_i)$.

Esta integral é feita em todos os possíveis “caminhos”. Em [3], podemos encontrar este cálculo, que é feito utilizando a álgebra desenvolvida para a mecânica quântica, nos casos em que a Hamiltoniana pode ser escrita como

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x),$$

chega-se a

$$\langle x_f t_f | x_i t_i \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}x \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int \mathcal{L}(x, \dot{x}) dt \right), \quad (2.13)$$

em que $\mathcal{D}x = \prod dx_i$ e \mathcal{L} é a Lagrangeana do sistema. O fator \mathcal{N} tende a infinito no limite $n \rightarrow \infty$, porém isso não é realmente um problema pois trabalharemos apenas com amplitudes de transição normalizadas.

Em teoria de campo, ao invés do elemento de volume $\prod dx(t)$, do espaço das funções, trabalha-se com o elemento de volume $\prod d\phi(x)$, definido no espaço dos campos clássicos. Ele é abreviado como $\mathcal{D}\phi(x)$. Vamos definir a partir da equação (2.13), o funcional $I(\phi(t))$:

$$I(\phi(t)) = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left[\frac{i}{\hbar} S(\phi(t)) \right], \quad (2.14)$$

que será usado mais adiante para definir o funcional gerador das funções de correlação.

2.3 Funções de correlação e funcionais geradores

As funções de correlação de n -pontos, $G^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$, $n = 2, 3, \dots$ de uma teoria são de grande interesse físico pois além de permitirem a construção das matrizes S , de onde extraímos as probabilidades de transição na teoria quântica e seções de choque, toda a teoria de perturbação e os procedimentos de renormalização são tradicionalmente expressos a partir destes objetos. Elas podem ser escritas compactamente graças a uma técnica muito útil desenvolvida por Schwinger, que consiste em modificar a ação S pela adição de um termo $\int_x J(x)\phi(x)$, onde $J(x)$ é uma função escalar, de modo que o produto $J(x)\phi(x)$ se transforma em relação a todas as simetrias de \mathcal{L} se mantendo invariante. Ao calcularmos a amplitude de transição vácuo-vácuo, com esta ação modificada, obtemos um funcional $Z(J)$, que ao ser funcionalmente expandido em potências de $J(x)$ nos fornece as funções de correlação da teoria. Podemos ainda obter o funcional gerador das funções de correlação conexas, $W(J)$ tomando o logaritmo de $Z(J)$. Este funcional, ao ser representado graficamente, abrange os diagramas de $Z(J)$ que não são separáveis em partes disjuntas. Ou seja, esta classe necessariamente não apresenta partes desconectadas umas das outras. E, ao fazer uma transformação de Legendre em $W(J)$, obtemos o funcional gerador das funções de

correlação irredutíveis a uma partícula, $\Gamma(\varphi(x))$, em que $\varphi(x)$ é variável conjugada de $J(x)$. Este funcional, ao ser representado graficamente, abrange os diagramas que não se separam em partes desconexas ao cortarmos uma única linha interna.

Vejam os um exemplo prático: considere uma Lagrangeana no espaço de Minkowski, descrevendo um campo escalar massivo auto-interagente através dos termos ϕ^4 e ϕ^6 :

$$\mathcal{L}(\phi) = \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)(\partial_\mu\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 - \xi\frac{\phi^6}{6!}. \quad (2.15)$$

O funcional gerador $Z[J]$ das funções de correlação na presença de fontes é definido como a amplitude de transição vácuo-vácuo na presença da fonte J :

$$Z(J) = \langle 0, -\infty | 0, \infty \rangle_J, \quad (2.16)$$

que em termos de integral de caminho se traduz por

$$Z[J] = \frac{\int \mathcal{D}\phi(x) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} [S(\phi) + \int_x J(x)\phi(x)] \right\}}{\int \mathcal{D}\phi(x) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} [S(\phi)] \right\}}, \quad (2.17)$$

onde $S(\phi) = \int_x \mathcal{L}(\phi)$. $Z[J]$ é definido de forma a apresentar naturalmente a normalização $Z[J=0] = 1$. O fator $1/\hbar$ além de tornar o argumento da exponencial adimensional, nos permite realizar a expansão em loops de acordo com a potência em \hbar .[‡] Explicitamente:

$$Z[J] = \frac{\int \mathcal{D}\phi(x) \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_x \left(-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + m^2\frac{\phi^2}{2} + \lambda\frac{\phi^4}{4!} + \xi\frac{\phi^6}{6!} - J\phi \right) \right]}{\int \mathcal{D}\phi(x) \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_x \left(-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + m^2\frac{\phi^2}{2} + \lambda\frac{\phi^4}{4!} + \xi\frac{\phi^6}{6!} \right) \right]}. \quad (2.18)$$

Para trabalharmos no espaço Euclidiano vamos realizar uma rotação de Wick, em que se substitui a parte temporal do quadrivetor x^μ por $x^0 \rightarrow -ix_E^0$, em que x_E^0 é variável Euclidiana. Desta forma, em vez de (2.17), trabalharemos com

$$Z[J] = \frac{\int \mathcal{D}\phi(x_E) \exp \left(\frac{1}{\hbar} [S_E(\phi) + \int_{x_E} J\phi] \right)}{\int \mathcal{D}\phi(x_E) \exp \left(\frac{1}{\hbar} [S_E(\phi)] \right)}, \quad (2.19)$$

em que $S_E(\phi) = \int_{x_E} \mathcal{L}_E(\phi)$. Com esta transformação, (2.18) se torna

$$Z[J] = \frac{\int \mathcal{D}\phi(x_E) \exp \left[-\frac{1}{\hbar} \int_{x_E} \left(\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + m^2\frac{\phi^2}{2} + \lambda\frac{\phi^4}{4!} + \xi\frac{\phi^6}{6!} - J\phi \right) \right]}{\int \mathcal{D}\phi(x_E) \exp \left[-\frac{1}{\hbar} \int_{x_E} \left(\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + m^2\frac{\phi^2}{2} + \lambda\frac{\phi^4}{4!} + \xi\frac{\phi^6}{6!} \right) \right]}. \quad (2.20)$$

[‡]Vide apêndice C para mais detalhes

em que o termo

$$(\partial\phi)^2 = \sum_{i=0}^3 \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i} \right)^2$$

é o quadrado do gradiente Euclidiano. Daqui para frente vamos omitir o "E" em x_E para não sobrecarregar a notação.

A grande utilidade do funcional $Z[J]$ é que os momentos em relação a ϕ , de onde se obtém as funções de correlação, são gerados de modo simples, diferenciando-se $Z[J]$ em relação a $J(x)$. Expandindo funcionalmente $Z(J)$ em potências de J ,

$$Z(J) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n)!} \int \prod_{i=0}^n [d^4 x_i J(x_i)] \frac{G^{(n)}(x_1, \dots, x_n)}{\hbar^n}. \quad (2.21)$$

Os coeficientes $G^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ são as funções de correlação de n -pontos da teoria e englobam a soma dos diagramas de Feynman com n linhas externas. O termo $1/\hbar^n$ aparece para corrigir os efeitos da introdução de $1/\hbar$ em (2.17), que faz com que ao derivarmos $Z(J)$ em relação a J , apareça um fator $1/\hbar$ a cada derivação.

As funções de correlação de n -pontos $G^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ são classificadas em conexas (irreduzíveis) ou desconexas (reduzíveis), dependendo se geram diagramas de Feynman com partes naturalmente disjuntas ou não.[§] Apenas as funções conexas, $G_c^n(x_1, \dots, x_n)$, contribuem para o espalhamento, e elas são geradas pelo funcional $W[J]$, definido como:

$$W(J) = \hbar \log Z(J). \quad (2.22)$$

O funcional $W(J)$ tem uma expansão análoga a (2.21), com uma pequena diferença no expoente de \hbar devido a definição adotada em (2.22):

$$W(J) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n)!} \int \prod_{i=0}^n [d^4 x_i J(x_i)] \frac{G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n)}{\hbar^{n-1}}. \quad (2.23)$$

As funções de correlação conexas, $G_c^n(x_1, \dots, x_n)$, englobam a soma de todos os diagramas de Feynman conexos - ou seja, que não podem ser separados em partes isoladas - com n linhas externas.

Agora podemos introduzir a ação efetiva $\Gamma(\varphi)$, que é o gerador funcional das funções de correlação irreduzíveis a uma partícula. Estas funções de correlação englobam os diagramas de Feynman tipo 1PI, ou seja, aqueles que não se desconectam ao se cortar uma única linha

[§]no apêndice A se encontra um exemplo gráfico

interna. A ação efetiva é obtida a partir de uma transformada de Legendre de $W(J)$,[¶]

$$\Gamma(\varphi) = W(J) - \int_x J(x)\varphi(x), \quad (2.24)$$

em que $\varphi(x)$ é chamado campo médio ou clássico e é definido por

$$\varphi(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}. \quad (2.25)$$

Podemos ver de (2.22) e (2.19), que realmente

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \frac{\hbar}{Z[J]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} = \frac{\int \mathcal{D}\phi(x) \phi(x) \exp \left[\frac{1}{\hbar} \int_x (\mathcal{L} + J\phi) \right]}{\int \mathcal{D}\phi(x) \exp \left[\frac{1}{\hbar} \int_x (\mathcal{L} + J\phi) \right]} \\ &= \left(\frac{\langle 0 | \Phi(x) | 0 \rangle}{\langle 0 | 0 \rangle} \right)_J \end{aligned} \quad (2.26)$$

é o valor esperado normalizado no vácuo do operador de campo $\phi(x)$ sob influência da fonte $J(x)$.

Vamos assumir que podemos inverter a relação entre φ e J em (2.25) e escrever $J(x; \varphi)$. Assim podemos eliminar J na (2.24) e substituí-lo por φ como uma variável independente. Desta forma fica claro que $\Gamma(\varphi)$ é apenas função de $\varphi(x)$.

Da (2.24) também temos

$$\frac{\delta \Gamma(\varphi)}{\delta \varphi(x)} = -J(x). \quad (2.27)$$

Como a fonte J é fictícia, já que foi incluída por construção com o intuito de se obter as funções de correlação da teoria, podemos considerá-la nula no final das contas. Esta situação é chamada de *ponto físico*. Assim, quando $J \rightarrow 0$, o campo médio φ torna-se constante devido à invariância translacional do vácuo, dada por $\langle \phi \rangle$ em (2.26). Sob circunstâncias normais, quando a fonte J vai a zero, $\varphi(x) \rightarrow 0$. Porém há exceções, no caso da teoria apresentar quebra espontânea de simetria, que é caracterizada pelo fato de o valor esperado do campo no vácuo ser diferente de zero.

No ponto físico temos que o campo médio no vácuo, $\langle \phi \rangle$, é solução da equação

$$\left. \frac{\delta \Gamma(\varphi)}{\delta \varphi} \right|_{\langle \phi \rangle} = 0. \quad (2.28)$$

O que nos diz que o vácuo quântico é o ponto estacionário de $\Gamma(\varphi)$. Pode-se mostrar que

[¶]mais detalhes sobre a transformada de Legendre no apêndice B

no limite $\hbar \rightarrow 0$, a ação efetiva $\Gamma(\varphi)$ é igual a ação do campo escalar livre. Ela apresenta além da ação clássica, correções quânticas provenientes da interação do campo com o vácuo quântico. Daí o nome ação efetiva.

Pode-se também checar que a segunda derivada da ação efetiva,

$$\frac{\delta^2 \Gamma(\varphi)}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)} = -\frac{\delta J(x)}{\delta\varphi(y)}, \quad (2.29)$$

corresponde ao inverso do propagador. [†]

A ação efetiva $\Gamma(\varphi)$ pode ser expandida em potências de $\varphi(x)$ na chamada série de Volterra,

$$\Gamma(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{x_n} \dots \int_{x_1} \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n). \quad (2.31)$$

Os coeficientes $\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ são as funções de correlação 1PI - irreduzíveis a uma partícula, também conhecidas como funções vértice de n - pontos:

$$\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \left. \frac{\delta^n \Gamma(\varphi)}{\delta\varphi(x_1) \dots \delta\varphi(x_n)} \right|_{\varphi=0}. \quad (2.32)$$

$\Gamma^{(n)}$ é a soma de todos diagramas de Feynman 1PI, com n linhas externas. Os diagramas 1PI não possuem propagadores associados às linhas externas.

Podemos notar que a expressão (2.31) é não-local, ou seja, depende simultaneamente do valor do campo $\varphi(x_i)$ em diversos pontos diferentes. No entanto, podemos reescrever o funcional $\Gamma(\varphi)$ como uma expressão local adicionada de mais algumas correções, ao expandirmos cada campo $\varphi(x_i), i \neq 1$ em torno do ponto x_1 , comum a todos os termos de (2.31):

$$\varphi(x_i) = \varphi(x_1) + (x_i - x_1)_j \partial_j \varphi(x_1) + (x_i - x_1)_j (x_i - x_1)_k \partial_j \partial_k \varphi(x_1) + \dots \quad (2.33)$$

(os índices $j, k = 1, 2, 3 \dots$ indicam somatório)

[†]Vemos que a (2.29) é inversa a

$$\frac{\delta^2 W(J)}{\delta J(x)\delta J(y)} = \frac{\delta\varphi(x)}{\delta J(y)}, \quad (2.30)$$

que é a igual a G_c/\hbar . Ou seja, se fizermos $J=0$, $\delta^2 W(0)/\delta J(x)\delta J(z)$ é proporcional ao propagador, então $-\delta^2 \Gamma(0)/\delta\varphi(z)\varphi(y)$ é proporcional ao inverso do propagador.

Podemos reescrever a ação efetiva: como

$$\Gamma(\varphi) = \int_x \left(-V(\varphi) + \frac{1}{2}(\partial_i\varphi)(\partial^i\varphi)F(\varphi) + \textit{Derivadas Maiores} \right). \quad (2.34)$$

$V(\varphi)$ e $F(\varphi)$ são funções locais do campo φ . Há contribuições de termos com derivadas de ordem arbitrariamente altas. O termo que não contém derivadas, $V(\varphi)$, é chamado potencial efetivo. Na aproximação tipo árvore (“tree approximation”, que significa que estamos desprezando os termos com loops fechados, ou seja, as correções quânticas), V é o potencial ordinário. Integralmente ele engloba além do termo massivo $\frac{1}{2}m^2\varphi^2$ e da parte auto-interativa da teoria, flutuações quânticas que podem ser estudadas através da expansão em loops.

No caso de φ e J serem independentes das coordenadas x_i , temos $\partial_i\varphi = 0$, e podemos ver, comparando (2.34) com (2.27) que

$$V(\varphi)' = J \quad (2.35)$$

e sendo assim, no ponto físico, em que consideramos a fonte nula, temos a minimização do potencial em relação a φ . E então o potencial assume um valor constante, independente de φ .

Este formalismo funcional da ação efetiva foi introduzido na década de 60 por Weinberg, Salam e Goldstone [22] e Jona-Lasinio [?] como um meio de tratar o fenômeno da quebra espontânea de simetria em teorias de campo. Ele se tornou o método padrão para o estudo de teorias relativísticas com quebra espontânea de simetrias por trazer bons resultados quanto à renormalização, em teorias renormalizáveis.

Capítulo 3

Potencial efetivo Gaussiano e pós-Gaussiano

3.1 Introdução

Vamos olhar para o conceito de potencial efetivo e, em seguida, examinar algumas formulações diferentes. Em mecânica clássica, o potencial efetivo é uma formulação que traduz a realidade do sistema, levando em conta além das forças que agem sobre ele, efeitos físicos menos óbvios, em termos de um potencial. No problema clássico de dois corpos de massas diferentes, m_1 e m_2 , sujeitos a um potencial $V(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$, podemos transformá-lo num problema de um único corpo de massa $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, sujeito a um potencial efetivo

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}, \quad (3.1)$$

em que r é a distância entre os dois corpos. Este potencial, além de um termo que descreve a interação entre as partículas devido a força de atração entre elas, $V(r)$, contém o termo $L^2/2\mu r^2$, consequência da conservação do momento angular do sistema, que corresponde a uma barreira centrífuga e se opõe a que a partícula se aproxime de $r = 0$. Essa oposição desaparece quando o momento angular é nulo, $L = 0$, mas para $L \neq 0$, ela impede a partícula de passar pela origem (a menos que $V(r)$ vença esta barreira).

Em um sistema em que efeitos quânticos são relevantes, como por exemplo no átomo de hidrogênio, o potencial efetivo corrige o potencial clássico, que não “enxerga” os efeitos quânticos, de modo a ser coerente com a realidade. No átomo de hidrogênio, classicamente, o elétron, sujeito ao potencial Coulombiano $-e^2/r^2$ ilimitado inferiormente, cairia dentro do núcleo. Se isto realmente acontecesse nós sequer estaríamos vivos, pois o mundo teria colapsado. É o fenômeno quântico de “claustrofobia” quântica, que vem do princípio da incerteza, que impede este acontecimento: ao se restringir a função de onda do elétron a uma pequena região, a incerteza associada ao seu momento cresce correspondentemente de

acordo com $\Delta p \geq \hbar/\Delta\phi$, em que $\Delta\phi$ é a região associada a posição espacial do elétron. Sendo assim, quanto maior o confinamento, maior o momento, e a energia cinética gerada e a partícula tende a ir para uma outra região, mais larga. Com isto, o estado fundamental, em que a energia do sistema é mínima, é diferente do esperado classicamente. No caso do átomo de hidrogênio, temos um estado fundamental finito, centrado na origem, mas com uma extensão espacial definida. Podemos então traduzir esta situação em termos de um potencial efetivo, como mostra graficamente a fig 3.1 abaixo:

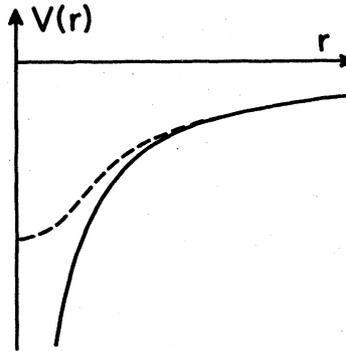


Figura 3.1: Potencial Coulombiano e o potencial efetivo (linha pontilhada), retratando o efeito da “claustrofobia” quântica

Vamos então definir mais especificamente um potencial efetivo, usando a mecânica quântica:

$$V_{\text{eff}}(\phi_0) = \text{mín}_{\psi} \langle \psi | H | \psi \rangle,$$

em que

$$\langle \psi | \psi \rangle = 1 \quad \text{e} \quad \langle \psi | \phi | \psi \rangle = \phi_0.$$

Em palavras, considere o valor esperado da energia do sistema, obtido para todas as funções existentes $|\psi\rangle$ que sejam normalizadas e centradas em ϕ_0 (no sentido do valor médio do campo ϕ ser ϕ_0). O potencial efetivo em ϕ_0 é o mínimo desse valor esperado. O estado $|\psi\rangle$ que nos dá este mínimo global da energia é o estado fundamental.

Outro aspecto importante da definição acima, é que devido a sua interpretação como energia, $V_{\text{eff}}(\phi_0)$ deve ser convexo ($d^2V_{\text{eff}}/d\phi_0^2 \geq 0$).[§] Sendo assim, V_{eff} nunca poderá ter a forma de poço duplo, mesmo quando esta é a forma de se descrever a física do sistema. Por isso, temos absurdos nestes casos, como vemos na figura 3.2.

O crucial da questão é que a condição $\langle \psi | \phi | \psi \rangle = \phi_0$ requer que a função de onda esteja simplesmente centrada, e não necessariamente localizada ou concentrada ao redor de ϕ_0 . Um

[§]Veja a prova da convexidade em [25]

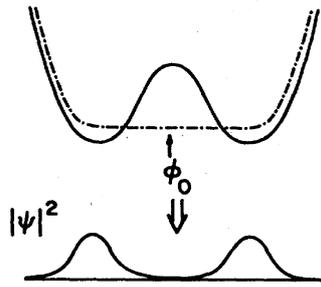


Figura 3.2: Comportamento inadequado do potencial efetivo no caso de um poço de potencial duplo

bom potencial efetivo deve indicar corretamente as regiões mais prováveis de se encontrar a partícula, e é justamente neste ponto que surgem problemas. Na figura 3.2, vemos que $|\psi|^2$ tem dois grandes picos dos dois lados de ϕ_0 e é pequeno em sua vizinhança. O respectivo potencial efetivo, centrado em ϕ_0 , tem seu mínimo exatamente no meio da barreira de potencial. Logo, este potencial efetivo não está sendo um bom indicativo das condições neste ponto.

Uma outra formulação, conhecida na literatura como one-loop effective potential, é uma construção semi-clássica, em que adiciona-se ao potencial clássico, as correções quânticas de ordem \hbar e as de ordens superiores são negligenciadas. Nesta formulação, o potencial efetivo se escreve como uma expansão em potências de \hbar , considerando o limite $\hbar \rightarrow 0$:

$$V_{\text{eff}}(\phi_0) \sim V(\phi_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^n V_n(\phi_0), \quad (3.2)$$

que considerando até ordem 1 em \hbar , temos

$$V_1(\phi_0) \equiv V(\phi_0) + \hbar V_1(\phi_0). \quad (3.3)$$

A desvantagem desta aproximação é que ela falha quando os efeitos quânticos se tornam importantes; que é o caso de muitas teorias interessantes. Vamos ver a seguir outras alternativas.

3.2 O potencial efetivo Gaussiano, PEG, no formalismo canônico*

* Nesta seção vamos usar o formalismo canônico, que requer estratégias diferentes das usadas quando tratamos um problema com integrais de caminho. Neste último caso, usamos a rotação de Wick para se chegar a uma convergência nas integrais envolvidas. O campo é tratado como variável estocástica sobre

a qual realizamos as integrações. Já no formalismo canônico, o campo é um operador, que tem em si os operadores de criação e aniquilação de quanta. Neste formalismo, a estratégia usada é a integração da componente temporal da transformada de Fourier do campo. São dois modos distintos de se encarar um problema, porém equivalentes, como pode ser visto com mais detalhe em [26].

Uma outra formulação bem interessante é o potencial efetivo Gaussiano (PEG) por sua assertividade em formalizar nosso conhecimento intuitivo sobre as flutuações de ponto-zero da mecânica quântica. Como vimos na primeira formulação do potencial efetivo, os aspectos indesejáveis vinham da possibilidade da função de onda ter duas ou mais cristas, não centradas em ϕ_0 , mas com uma média caindo em ϕ_0 . Para se obter um potencial efetivo mais realista pode-se restringir a forma das funções de onda candidatas a representar o estado fundamental para funções Gaussianas centradas em ϕ_0 , de modo que elas estarão verdadeiramente concentradas ao redor de ϕ_0 . Esta é a proposta do potencial efetivo Gaussiano:

$$\bar{V}_G(\phi_0) = \text{mín}_\Omega V_G(\phi_0, \Omega) = \text{mín}_\Omega \langle \psi | H | \psi \rangle, \quad (3.4)$$

e

$$|\psi\rangle = \left(\frac{\Omega}{h\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\Omega}{h}(\tilde{\phi} - \phi_0)^2\right) \quad \text{com } \Omega > 0. \quad (3.5)$$

Em que $\tilde{\phi}$ é o campo livre e ϕ_0 é um campo de background constante. Esta é a função de onda do estado fundamental do oscilador harmônico. O parâmetro variacional Ω é a largura da Gaussiana e também, significa na teoria, a massa do campo livre. Este parâmetro é ajustável. Ao utilizarmos ele de forma a minimizar $\langle H \rangle$, para cada ϕ_0 escolhido, obtemos a função de onda mais próxima ao estado fundamental verdadeiro. Desta forma, podemos considerar o potencial efetivo Gaussiano, \bar{V}_G , uma versão variacional do potencial efetivo clássico.

Podemos calcular \bar{V}_G utilizando o formalismo algébrico da mecânica quântica. Vamos escrever o campo ϕ como um campo livre, $\tilde{\phi}$, mais um campo de fundo, ϕ_0 :

$$\phi(x) = \tilde{\phi}(x) + \phi_0,$$

onde $\tilde{\phi}$ é um campo quântico livre, de massa Ω , positivo definida*. Usando a álgebra de operadores de criação e aniquilação, temos

$$\phi(x) = \phi_0 + \int (dk)_\Omega [a_\Omega(\vec{k})e^{-ik \cdot x} + a_\Omega^\dagger(\vec{k})e^{ik \cdot x}]. \quad (3.6)$$

*para que o funcional de onda representando o estado fundamental definido acima possa ser normalizável, assim como o é em mecânica quântica.

Logo,

$$\partial_\mu \phi(x) = \int (dk)_\Omega (-ik_\mu) [a_\Omega(\vec{k}) e^{-ik \cdot x} - a_\Omega^\dagger(\vec{k}) e^{ik \cdot x}]. \quad (3.7)$$

A componente temporal do quadrivetor k^μ é

$$k^0 = w_{\vec{k}}(\Omega) \equiv (\vec{k}^2 + \Omega^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3.8)$$

e o elemento de integração, em 4 dimensões espaciais é

$$(dk)_\Omega = \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 2w_{\vec{k}}(\Omega)}. \quad (3.9)$$

Os operadores de criação e aniquilação obedecem a usual relação de comutação

$$[a_\Omega(\vec{k}), a_\Omega^\dagger(\vec{k}')] = \delta_{kk'} = 2\omega_k(\Omega) (2\pi)^4 \delta^4(\vec{k} - \vec{k}') \quad (3.10)$$

e o índice Ω nos lembra que os operadores a_Ω e a_Ω^\dagger dependem da frequência do oscilador harmônico, cujo estado fundamental $|\psi\rangle_\Omega$ será representado pela função Gaussiana (3.5). O estado fundamental é normalizado e representa o vácuo do campo livre, e portanto

$$\Omega \langle \psi | \psi \rangle_\Omega = 1 \quad \Omega \langle \psi | \phi | \psi \rangle_\Omega = \phi_0, \quad (3.11)$$

etambém

$$a_\Omega(\vec{k}) |\psi\rangle_\Omega = 0. \quad (3.12)$$

Avaliando a seguinte expressão para o potencial:

$$V_G(\phi_0, \Omega) \equiv \Omega \langle \psi | H | \psi \rangle_\Omega, \quad (3.13)$$

e substituindo o valor de Ω que o minimiza,

$$\bar{V}_G(\phi_0) = \min_\Omega V_G(\phi_0, \Omega), \quad (3.14)$$

obtemos o potencial efetivo Gaussiano $\bar{V}_G(\phi_0)$. Este valor de Ω é obtido simplesmente pela condição $dV_G(\phi_0, \Omega)/d\Omega = 0$, que nos fornece $\bar{\Omega}(\phi_0)$. Para uma teoria regida pela Hamiltoniana (3.19), podemos calcular o potencial Gaussiano de acordo com (3.13):

$$\left\langle \psi \left| \frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 + (\nabla\phi)^2) + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + \xi \frac{\phi^6}{6!} \right| \psi \right\rangle_\Omega, \quad (3.15)$$

que nos fornece, com o uso de (3.6), (3.7), (3.8), (3.10), (3.11) e (3.12):[†]

$$V_G(\phi_0, \Omega) = \frac{1}{2}m^2\phi_0^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi_0^4 + \frac{\xi}{6!}\phi_0^6 + I_1 + \frac{1}{2}(m^2 - \Omega^2) + \frac{\lambda}{4}I_0\phi_0^2 + \frac{\lambda}{8}I_0^2 + \frac{\xi}{48}(I_0\phi_0^4 + 3I_0^2\phi_0^2 + I_0^3), \quad (3.16)$$

em que

$$I_N(\Omega) = \int (dk)_\Omega [w_k^2(\Omega)]^N.$$

Minimizando o potencial Gaussiano em relação a Ω , através da condição $dV_G(\phi_0, \Omega)/d\Omega = 0$, obtém-se seguinte expressão para $\bar{\Omega}(\phi_0)$:

$$\bar{\Omega} = m^2 + \frac{\lambda}{2}(I_0 + \phi_0^2) + \frac{\xi}{24}(\phi_0^4 + 6I_0\phi_0^2 + 3I_0^2). \quad (3.17)$$

Substituindo $\bar{\Omega}$ em (3.16), temos o seguinte potencial efetivo Gaussiano,

$$\bar{V}_G(\phi_0) = \frac{1}{2}m^2\phi_0^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi_0^4 + \frac{\xi}{6!}\phi_0^6 + I_1 - \frac{\lambda}{8}I_0^2 - \frac{\xi}{16}I_0^2\phi_0^2 - \frac{\xi}{24}I_0^3. \quad (3.18)$$

3.3 Uma teoria “perturbativa” otimizada

Nesta seção desenvolveremos os cálculos do potencial efetivo para uma teoria com termos de auto-interação tipo ϕ^4 e ϕ^6 , utilizando o mesmo método já aplicado em [15], para uma teoria com ϕ^4 . Chegaremos ao mesmo resultado obtido através do potencial efetivo Gaussiano (PEG), [7], exposto acima, em que foi utilizado como ferramenta o formalismo canônico. Os resultados serão comparados com o método da ação efetiva 2PPI, no capítulo 5.

Vamos começar expondo a proposta do método: Queremos calcular a energia do estado fundamental, E_0 , de um oscilador anarmônico, cuja dinâmica é governada pela Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + \xi\frac{\phi^6}{6!}. \quad (3.19)$$

Para tanto, vamos considerar a Hamiltoniana modificada

$$\mathcal{H}_\delta = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{\text{int}},$$

[†]Para mais detalhes nos cálculos vide [6] e [7]

em que

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0 &= \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\Omega^2\phi^2 \\ \mathcal{H}_{\text{int}} &= \delta \left(\frac{1}{2}(m^2 - \Omega^2)\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + \xi\frac{\phi^6}{6!} \right).\end{aligned}\quad (3.20)$$

Para $\delta = 1$, o parâmetro Ω é cancelado e temos a Hamiltoniana \mathcal{H} original. Em teoria de campo, para $\delta = 0$ a Hamiltoniana descreve uma teoria de um campo livre, escalar e de massa Ω . Tratando pela mecânica quântica, temos um oscilador harmônico simples. Podemos então aplicar teoria de perturbação para obter a energia do estado fundamental, usando séries de potência em δ . Extrapolando a série para $\delta = 1$ obtemos a aproximação para E_0 . Como a energia exata do estado fundamental E_0 independe de Ω , esta aproximação truncada do potencial se torna confiável apenas quando não temos uma forte dependência em Ω . Por isso se usa, como estratégia para otimizar o resultado, o "princípio da sensibilidade mínima", ou seja, a aproximação adequada é aquela que apresenta menor sensibilidade à variação do parâmetro Ω , em que Ω é escolhido a cada ordem (se Ω for mantido fixo os resultados não convergem; para mais detalhes ver [15]). Usualmente, isto se resolve achando o ponto estacionário do potencial efetivo.

É interessante notar que apesar do cálculo ser basicamente de teoria de perturbação, a aproximação é genuinamente não -perturbativa visto que δ é um parâmetro introduzido artificialmente e não é $\ll 1$. Este método consegue uma boa abordagem de problemas como oscilador quártico e potenciais singulares, como a função δ e o potencial de Coulomb, que são problemas que até então falharam ao tentarem ser resolvidos por teoria de perturbação e expansão em loops.[‡]

A seguir vamos calcular a aproximação pós-Gaussiana exposta acima para o potencial efetivo numa teoria com auto-interação tipo ϕ^4 e ϕ^6 , em 4 dimensões Euclidianas, através deste método já aplicado por I.Stancu e P.M.Stevenson em [15], numa teoria com auto-interação tipo ϕ^4 . Considere a seguinte ação :

$$S(\phi) = \int_x \left[\frac{1}{2}(-\partial^2 + m^2)\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + \xi\frac{\phi^6}{6!} \right]. \quad (3.21)$$

O gerador funcional das funções de Green é obtido pela integral funcional

$$Z(J) = \int \mathcal{D}\phi \exp \left[-S(\phi(x)) + \int_x J(x)\phi(x) \right]. \quad (3.22)$$

[‡]Estes exemplos estão desenvolvidos em [16].

Tomando o logaritmo, produzimos o gerador funcional das funções de Green conexas:

$$W(J) = \ln Z(J). \quad (3.23)$$

A ação efetiva é obtida por uma transformação de Legendre de $W(J)$:

$$\Gamma(\varphi) = W(J) - \int_x J(x)\varphi(x), \quad (3.24)$$

em que

$$\varphi(x) = \frac{\delta W}{\delta J(x)} = Z^{-1} \int \mathcal{D}\phi \phi \exp \left[-S(\phi) + \int_x J(x)\phi(x) \right]$$

é o valor esperado do campo no estado de vácuo, sob influência da fonte $J(x)$.

O Potencial efetivo, $V_{\text{ef}}(\varphi)$, é obtido do $\Gamma(\varphi)$ fazendo φ constante, como explicamos em (2.27). Isto nos fornece, como podemos ver de (2.34),

$$\Gamma(\varphi)|_{\varphi=\text{const}} = -\mathcal{V} V_{\text{ef}}(\varphi), \quad (3.25)$$

em que \mathcal{V} é o elemento de volume $\int d^4x$. E como

$$\frac{\delta \Gamma(\varphi)}{\delta \varphi(x)} = -J(x),$$

isto também implica que J é independente de x .

Vamos reescrever o operador de campo como um campo livre, mais um campo de fundo, ϕ_0 :

$$\phi(x) = \hat{\phi}(x) + \phi_0, \quad (3.26)$$

e definir:

$$\mathcal{L} = (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}})_{\delta=1}, \quad (3.27)$$

em que \mathcal{L}_0 é a Lagrangeana do campo livre, com massa Ω :

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \hat{\phi}(x) (-\partial^2 + \Omega^2) \hat{\phi}(x) \quad (3.28)$$

e a Lagrangeana de interação é:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \delta(v_0 + v_1 \hat{\phi} + v_2 \hat{\phi}^2 + v_3 \hat{\phi}^3 + v_4 \hat{\phi}^4 + v_5 \hat{\phi}^5 + v_6 \hat{\phi}^6), \quad (3.29)$$

em que as constantes v_i são dependentes de ϕ_0 :

$$\begin{aligned}
v_0 &= \frac{1}{2}m^2\phi_0^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi_0^4 + \frac{\xi}{6!}\phi_0^6 \\
v_1 &= (m^2 + 3\frac{\lambda}{3!}\phi_0^2 + \frac{\xi}{5!}\phi_0^4)\phi_0 \\
v_2 &= \frac{1}{2}(m_B^2 - \Omega^2) + \frac{\lambda}{4}\phi_0^2 + \frac{\xi}{48}\phi_0^4 \\
v_3 &= \frac{\lambda}{3!}\phi_0 + \frac{\xi}{36}\phi_0^3 \\
v_4 &= \frac{\lambda}{4!} + \frac{\xi}{48}\phi_0^2 \\
v_5 &= \frac{\xi}{5!}\phi_0 \\
v_6 &= \frac{\xi}{6!}.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

O parâmetro artificial δ é usado para nos indicar a ordem calculada da aproximação. Obteremos uma série de Taylor em δ , centrada em $\delta = 0$ e truncada, que será usada para extrapolarmos para $\delta = 1$, que expressa a Lagrangeana original. Podemos ajustar o campo ϕ_0 como o campo médio $\phi_0 = \varphi = \frac{\partial W}{\partial J}$ no intuito de simplificar os cálculos, sem comprometer a consistência dos resultados[§]. Ω é fixado a cada ordem, de acordo com o "princípio da sensibilidade mínima", como explicitado previamente.

Podemos escrever a ação do campo livre, abreviando os argumentos espaço-temporais em índices[¶], como

$$\int_x \mathcal{L}_{0,x} = \frac{1}{2} \int_x \int_y \hat{\phi}_x G_{xy}^{-1} \hat{\phi}_y, \tag{3.31}$$

em que

$$G_{xy}^{-1} = (-\partial^2 + \Omega^2)\delta_{xy}. \tag{3.32}$$

Cujo inverso, no sentido matricial

$$\int_y G_{xy} G_{yz}^{-1} = \delta_{xz}, \tag{3.33}$$

é a função

$$G_{xy} = \int_p \frac{1}{p^2 + \Omega^2} e^{-ip(x-y)}, \tag{3.34}$$

o propagador no espaço Euclidiano de coordenadas.

[§]Vide apêndice E para o exame mais detalhado desta questão.

[¶] $G(x, y) = G_{xy}$ e $\phi(x) = f_x$

Seguindo o procedimento padrão*, vamos reescrever o gerador funcional $Z(J)$, eq.(3.22), usando (3.26):

$$Z(J) = \exp \left(\int_z J_z \phi_0 \right) \exp \left(- \int_x \mathcal{L}_{\text{int}} \left(\frac{\delta}{\delta J_x} \right) \right) \int \mathcal{D}\hat{\phi} \exp \left(- \int_z \mathcal{L}_{0,z} + \int_z J_z \hat{\phi}_z \right), \quad (3.35)$$

em que o campo $\hat{\phi}$ foi substituído pelo operador $\frac{\delta}{\delta J}$. Podemos realizar a integração em $\hat{\phi}$, que tem a forma de uma integral Gaussiana, como podemos ver de (3.31), nos dando [†]

$$Z(J, \phi_0) = \exp(J\phi_0) (\det G^{-1})^{-1/2} \exp(-\mathcal{L}_{\text{int}}) \exp \left(\frac{JGJ}{2} \right). \quad (3.36)$$

Estamos omitindo temporariamente as integrações nos argumentos das exponenciais acima

*Pode ser encontrado em [3] e [17], que numa teoria com interação, podemos escrever

$$Z(J) = N \exp \left[- \int_x \mathcal{L}_{\text{int}} \left(\frac{\delta}{\delta J} \right) \right] Z_0(J)$$

no espaço Euclidiano. N é uma constante de normalização e

$$Z_0(J) = \frac{\int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ - \int_x \mathcal{L}_0 + \int_x J\phi \right\}}{\int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ - \int_x \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}} \right\}}.$$

[†]Para uma integral Gaussiana

$$I(A, b) = \int \left(\prod_i^n dx_i \right) \exp \left(- \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} x_i A_{ij} x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i \right),$$

o resultado da integração é

$$I(A, b) = (2\pi)^{n/2} (\det A)^{-1/2} \exp \left[\sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} b_i (A^{-1})_{ij} b_j \right].$$

para simplificar a notação. O determinante funcional acima nos fornece[‡]:

$$(\det G^{-1})^{-1/2} = \exp(-\mathcal{V}I_1(\Omega)), \quad (3.37)$$

em que $\mathcal{V} = \int d^4x$ e $I_1(\Omega) = \frac{1}{2} \int_p \ln(p^2 + \Omega^2)$.

Tomando o logaritmo de $Z(J, \phi_0)$, e substituindo $\exp(-\mathcal{L}_{\text{int}})$ por sua expansão em série, temos

$$W(J, \phi_0) = J\phi_0 - \mathcal{V}I_1(\Omega) + \ln \left[\left(1 - \mathcal{L}_{\text{int}} + 1/2 \mathcal{L}_{\text{int}}^2 + \dots \right) \exp \left(\frac{JGJ}{2} \right) \right]. \quad (3.38)$$

Tomando $\varphi = \phi_0 = \text{const}$ temos que $\Gamma(\varphi)$ é dado por $W(J, \phi_0)$, mas sem o termo $J\phi_0$. À ordem zero em δ , pegaremos apenas o primeiro termo da expansão da exponencial, temos:

$$W_0(J, \phi_0) = \int_z J_z \phi_0 - \mathcal{V}I_1(\Omega) + \frac{1}{2} \int_z \int_y J_z G_{zy} J_y. \quad (3.39)$$

Podemos obter $J(\varphi)$ através de $\varphi = \frac{\delta W}{\delta J}$. Nesta ordem em δ é

$$\varphi_x = \frac{\delta W}{\delta J_x} = \phi_0 + \int_y G_{xy} J_y = \phi_0 + (GJ)_x. \quad (3.40)$$

Adotando φ independente de x e igual a ϕ_0 , vemos que $J = 0$ nesta ordem. Logo

$$\Gamma(\varphi) = -\mathcal{V}I_1(\Omega).$$

Em primeira ordem em δ , pegaremos até o segundo termo da expansão da exponencial

[‡]temos que

$$\begin{aligned} \log(\det G^{-1})^{-1/2} &= -\frac{1}{2} \log(\det G^{-1}) \\ &= -\frac{1}{2} \text{Tr} \log G^{-1} \\ &= -\frac{1}{2} \text{Tr} \log(-\partial^2 + \Omega^2) \delta_{xy} \\ &= -\frac{1}{2} \text{Tr} \log(-\partial^2 + \Omega^2) \int_p e^{ip(x-y)} \\ &= -\frac{1}{2} \int_x \int_y \delta_{xy} \log(-\partial^2 + \Omega^2) \int_p e^{ip(x-y)} \\ &= -\frac{1}{2} \int_x \int_p \log(p^2 + \Omega^2). \end{aligned}$$

Que é precisamente $-\mathcal{V}I_1$. Tomando como argumento da função exponencial, temos a equação (3.37).

em (3.38). Lembrando (3.35), que o termo \mathcal{L}_{int} tem uma integração implícita, e usando apenas o primeiro termo da expansão de $\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - \dots$ em (3.38), pois é ele que nos fornece a primeira ordem em δ , temos

$$\begin{aligned} W(J, \phi_0) &= W_0(J, \phi_0) - \mathcal{L}_{\text{int}} \\ &= \int_z J_z \phi_0 - \mathcal{V} I_1(\Omega) + \frac{1}{2} \int_z \int_y J_z G_{zy} J_y - \int_x \mathcal{L}_{\text{int}} \left(\frac{\delta}{\delta J_x} \right). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Substituindo \mathcal{L}_{int} da (3.29), em que as potências do campo $\hat{\phi}$ foram calculados a partir de (3.38) através da substituição do campo $\hat{\phi}(x)$ pelo operador $\frac{\delta}{\delta J(x)}$ em \mathcal{L}_{int} , temos

$$\begin{aligned} W(J, \phi_0) &= W_0(J, \phi_0) - \delta \int_x [v_0 + v_1(JG)_x + v_2 G_{xx} + v_3 3G_{xx}(JG)_x + v_4 3G_{xx}^2 + \\ &\quad + v_5 15(JG)_x^3 + v_6 15G_{xx}^3 + O(J^2)]. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Identificando $G_{xx} = I_0 = \int_p \frac{1}{p^2 + \Omega^2}$, temos

$$\begin{aligned} W(J, \phi_0) &= W(J, \phi_0)|_{(0)} - \delta \left[(v_0 + v_2 I_0 + v_4 3I_0^2 + v_6 15I_0^3) \mathcal{V} \right. \\ &\quad \left. + (v_1 + v_3 3I_0 + v_5 15I_0^2) \int_x (JG)_x \right], \end{aligned} \quad (3.43)$$

em que \mathcal{V} é o elemento de volume $\int_x d^4x$.

Analisando o sistema a ordem zero em δ , vemos da (3.40) que a fonte deve ser nula. Considerando a ordem seguinte em δ , a equação (3.40) fica diferente e temos a presença de fonte não nula no sistema. Isto implica que se analisarmos J em termos de δ ele terá contribuições a partir da primeira ordem em δ . Não haverá contribuição de ordem zero, visto que a fonte é nula quando analisamos o sistema nesta aproximação. Através de uma breve análise de φ à primeira ordem em δ , que é obtido pela derivação de (3.43), podemos checar $J(x)$ em termos de δ :

$$\varphi_x = \frac{\delta W}{\delta J_x} = \phi_0 + (GJ)_x - \delta (v_1 + v_3 3I_0 + v_5 15I_0^2) \int_z G_{xz} + O(\delta^2, \delta J). \quad (3.44)$$

Multiplicando por G^{-1} , e considerando $\varphi = \phi_0 = \text{const}$, temos

$$J = \delta (v_1 + v_3 3I_0 + v_5 15I_0^2) + O(\delta^2), \quad (3.45)$$

nos confirmando que a expansão de J em termos de δ tem como primeiro termo, um termo de ordem 1 de δ . Os demais termos de (3.43) que contêm o fator δJ ou J^2 são de ordem δ^2 e portanto podem ser desprezados no cálculo do potencial efetivo a primeira ordem em δ .

Para chegar ao potencial efetivo, vamos primeiro calcular a ação efetiva a primeira ordem em δ , desprezando então os termos de segunda ordem em J e δ , e considerando $\varphi = \phi_0 = \text{const.}$ De acordo com a (3.24) e analisando (3.43) e (3.39), temos

$$\Gamma(\varphi) = -\mathcal{V}I_1(\Omega) - \delta(v_0 + v_2I_0 + v_43I_0^2 + v_615I_0^3)\mathcal{V}. \quad (3.46)$$

Substituindo as constantes de (3.30), obtemos

$$\Gamma(\varphi) = -\mathcal{V} \left\{ I_1(\Omega) + \delta \left[\frac{1}{2}m^2\phi_0^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi_0^4 + \frac{\xi}{6!}\phi_0^6 + \left(\frac{1}{2}(m^2 - \Omega^2) + \frac{\lambda}{4}\phi_0^2 + \frac{\xi}{48}\phi_0^4 \right) I_0 + \left(\frac{\lambda}{8} + \frac{\xi}{16}\phi_0^2 \right) I_0^2 + \frac{\xi}{48}I_0^3 \right] \right\}. \quad (3.47)$$

O potencial efetivo que buscamos é a expressão entre as chaves, ajustando $\delta = 1$:

$$V(\phi_0, \Omega) = I_1(\Omega) + \frac{1}{2}m^2\phi_0^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi_0^4 + \frac{\xi}{6!}\phi_0^6 + \left(\frac{1}{2}(m^2 - \Omega^2) + \frac{\lambda}{4}\phi_0^2 + \frac{\xi}{48}\phi_0^4 \right) I_0 + \left(\frac{\lambda}{8} + \frac{\xi}{16}\phi_0^2 \right) I_0^2 + \frac{\xi}{48}I_0^3. \quad (3.48)$$

É o mesmo obtido em [7] através do formalismo canônico.

O potencial efetivo mais verossímil é obtido substituindo o valor de Ω que minimiza o potencial acima:

$$\bar{V}(\phi_0) = \min_{\Omega} V(\phi_0, \Omega). \quad (3.49)$$

Este valor de Ω é obtido simplesmente pela condição $dV(\phi_0, \Omega)/d\Omega = 0$, que nos fornece $\bar{\Omega}(\phi_0)$. Sabendo que, com auxílio do apêndice D,

$$\frac{dI_N}{d\Omega} = (2N - 1)\Omega I_{N-1},$$

temos a seguinte expressão para $\bar{\Omega}(\phi_0)$:

$$\bar{\Omega}(\phi_0) = m^2 + \frac{\lambda}{2}(I_0 + \phi_0^2) + \frac{\xi}{24}(\phi_0^4 + 6I_0\phi_0^2 + 3I_0^2) \quad (3.50)$$

e o seguinte potencial efetivo:

$$\bar{V}(\phi_0) = \frac{1}{2}m^2\phi_0^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi_0^4 + \frac{\xi}{6!}\phi_0^6 + I_1 - \frac{\lambda}{8}I_0^2 - \frac{\xi}{16}I_0^2\phi_0^2 - \frac{\xi}{24}I_0^3. \quad (3.51)$$

Este resultado, obtido na aproximação em 1 loop, é idêntico ao obtido por meio do PEG em [7].

Capítulo 4

Funcionais da Ação Efetiva

4.1 Visão Geral

Em TQC o conhecimento de todas as funções de correlação de n -pontos, $\varphi(x)$, $G^{(2)}(x, y)$, $G^{(3)}(x, y, z), \dots$ nos fornece uma descrição completa da teoria quântica em questão. Elas constituem um conjunto dinâmico de "graus de liberdade". [1]

As equações de movimento para todas as funções de correlação de n -pontos são convenientemente condensadas num funcional gerador chamado ação efetiva. Existem diferentes representações funcionais da ação efetiva. A chamada ação efetiva irreduzível a n partículas (n -particle irreducible (n PI) effective action), $\Gamma(\varphi, G^{(2)}, G^{(3)}, \dots, G^{(n)})$, é representada em termos das funções $\varphi, G^{(2)}, G^{(3)}, \dots, G^{(n)}$ e é particularmente eficiente na descrição de esquemas aproximativos em TQC fora do equilíbrio. As equações de movimento para $\varphi, G^{(2)}, G^{(3)}, \dots, G^{(n)}$ são determinadas por derivação funcional em primeira ordem e são também chamadas de condições estacionárias:

$$\frac{\delta\Gamma(\varphi, G^{(2)}, G^{(3)}, \dots)}{\delta\varphi} = 0, \quad \frac{\delta\Gamma(\varphi, G^{(2)}, G^{(3)}, \dots)}{\delta G^{(2)}} = 0, \quad \frac{\delta\Gamma(\varphi, G^{(2)}, G^{(3)}, \dots)}{\delta G^{(3)}} = 0, \quad \dots \quad (4.1)$$

Podemos classificar as contribuições de $\Gamma(\varphi, G^{(2)}, G^{(3)}, \dots)$ pelas potências de um parâmetro de expansão (acoplamentos/loops ou $1/n$).

De acordo com as variáveis $\varphi, G^{(2)}, G^{(3)}, \dots$ usadas na composição da ação efetiva, existe uma resposta definida para sua expansão até determinada ordem. É crucial observar que não é necessário calcular o $\Gamma(\varphi, G^{(2)}, G^{(3)}, \dots, G^{(n)})$ mais geral, com um n arbitrariamente grande para uma solução satisfatória. Existe uma hierarquia de equivalências entre as n PI

ações efetivas. No contexto de expansão em loops temos,

$$\begin{aligned}
\Gamma^{1\text{loop}}(\varphi) &= \Gamma^{1\text{loop}}(\varphi, G^{(2)}), \\
\Gamma^{2\text{loop}}(\varphi) &\neq \Gamma^{2\text{loop}}(\varphi, G^{(2)}) = \Gamma^{2\text{loop}}(\varphi, G^{(2)}, G^{(3)}), \\
\Gamma^{3\text{loop}}(\varphi) &\neq \Gamma^{3\text{loop}}(\varphi, G^{(2)}) \neq \Gamma^{3\text{loop}}(\varphi, G^{(2)}, G^{(3)}) = \Gamma^{3\text{loop}}(\varphi, G^{(2)}, G^{(3)}, G^{(4)}), \\
&\text{etc}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

onde $\Gamma^{n\text{loop}}$ denota a aproximação da respectiva ação efetiva a uma ordem n em loops, na ausência de fontes externas. Para uma aproximação em dois loops, todas as descrições $n\text{PI}$ com $n \geq 2$ são equivalentes, e a ação efetiva 2PI já captura a solução completa para uma descrição autoconsistente até esta ordem. No entanto, para uma solução completa autoconsistente em três loops é necessário, pelo menos, a ação efetiva 3PI. Tipicamente uma ação efetiva 2PI, 3PI, ou até 4PI já captura a solução completa até a ordem desejada.

4.2 Ação efetiva 1PI e o método do ponto sela

Vamos agora ao cálculo da ação efetiva $\Gamma^{\text{1PI}}(\varphi)$ para uma teoria com auto-interações tipo ϕ^4 e ϕ^6 , da qual extrairemos os gráficos de Feynman do tipo 1PI. Usaremos o método do ponto sela que consiste em expandir o expoente do numerador de $Z(J)$ ao redor do ponto ϕ_0 , onde ele é estacionário. O denominador é apenas um fator de normalização, que permite $W(0) = 0$.

Vamos considerar uma Lagrangeana, descrevendo um campo escalar massivo através dos acoplamentos ϕ^4 e ϕ^6 , transformada para o espaço Euclidiano por uma rotação de Wick como foi feito no capítulo anterior:

$$\mathcal{L}_E(\phi) = -\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \lambda\frac{\phi^4}{4!} - \xi\frac{\phi^6}{6!}, \tag{4.3}$$

em que $(\partial\phi)^2 = \sum_{i=0}^3 \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)^2$.

O funcional $Z(J)$ na presença da fonte J se escreve como em (2.20),

$$Z[J] = \frac{\int \mathcal{D}\phi(x) \exp \left[-\frac{1}{\hbar} \int_x \left(\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + m^2\frac{\phi^2}{2} + \lambda\frac{\phi^4}{4!} + \xi\frac{\phi^6}{6!} - J\phi \right) \right]}{\int \mathcal{D}\phi(x) \exp \left[-\frac{1}{\hbar} \int_x \left(\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + m^2\frac{\phi^2}{2} + \lambda\frac{\phi^4}{4!} + \xi\frac{\phi^6}{6!} \right) \right]}. \tag{4.4}$$

Vamos definir $I(\phi, J)$, a integral que é o argumento da exponencial no numerador da

(4.4):

$$\begin{aligned}
I(\phi, J) &= \int_x \left(\frac{1}{2} (\partial\phi)^2 + m^2 \frac{\phi^2}{2} + \lambda \frac{\phi^4}{4!} + \xi \frac{\phi^6}{6!} - J\phi \right) \\
&= - \int_x (\mathcal{L}_E(\phi) + J\phi).
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Definindo o ponto sela ϕ_0 em que $I(\phi, J)$ é estacionária, ou seja

$$\left. \frac{\delta I(\phi, J)}{\delta\phi(x)} \right|_{\phi_0} = 0, \tag{4.6}$$

temos

$$(-\square + m^2)\phi_0 + \lambda \frac{\phi_0^3}{3!} + \xi \frac{\phi_0^5}{5!} = J, \tag{4.7}$$

em que $\square\phi = \sum_{i=0}^3 \frac{\partial^2\phi}{\partial x_i^2}$. Que nos diz que $\phi_0(x)$ é funcional de $J(x)$. Vamos escolher a fonte $J(x)$ nula no infinito. A solução para (4.7) é única e também será nula no infinito. Ou seja, $\phi_0 = 0$ se $J = 0$.

Expandindo $I(\phi, J)$ em torno do ponto estacionário ϕ_0 ,

$$\begin{aligned}
I(\phi, J) &= I(\phi_0, J) + \int_x \left. \frac{\delta I(\phi, J)}{\delta\phi(x)} \right|_{\phi_0} (\phi(x) - \phi_0(x)) + \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{xy} (\phi(x) - \phi_0(x)) \left. \frac{\delta^2 I(\phi, J)}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} \right|_{\phi_0} (\phi(y) - \phi_0(y)) + \dots
\end{aligned}$$

Usando (4.6) ficamos com,

$$I(\phi, J) = I(\phi_0, J) + \frac{1}{2} \int_{xy} (\phi(x) - \phi_0(x)) \left. \frac{\delta^2 I(\phi, J)}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} \right|_{\phi_0} (\phi(y) - \phi_0(y)) + \dots \tag{4.8}$$

As cinco primeiras derivadas de $I(\phi, J)$ são:

$$\left. \frac{\delta^2 I(\phi, J)}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} \right|_{\phi_0} = \left(-\square + m^2 + \lambda \frac{\phi_0^2}{2} + \xi \frac{\phi_0^4}{4!} \right) \delta_{xy}, \tag{4.9}$$

$$\left. \frac{\delta^3 I(\phi, J)}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)\delta\phi(z)} \right|_{\phi_0} = \left(\lambda\phi_0 + \xi \frac{\phi_0^3}{3!} \right) \delta_{xy}\delta_{xz}, \quad \left. \frac{\delta^6 I(\phi, J)}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)\delta\phi(z)\delta\phi(w)\delta\phi(s)\delta\phi(r)} \right|_{\phi_0} = \xi \delta_{xy}\delta_{xz}\delta_{xw}\delta_{xs}\delta_{xr},$$

$$\left. \frac{\delta^4 I(\phi, J)}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)\delta\phi(z)\delta\phi(w)} \right|_{\phi_0} = \left(\lambda + \xi \frac{\phi_0^2}{2} \right) \delta_{xy}\delta_{xz}\delta_{xw}, \quad \left. \frac{\delta^5 I(\phi, J)}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)\delta\phi(z)\delta\phi(w)\delta\phi(s)} \right|_{\phi_0} = \xi\phi_0 \delta_{xy}\delta_{xz}\delta_{xw}\delta_{xs}.$$

Podemos então reescrever (4.8) como

$$I(\phi_0 + \phi, J) = - \int_x (\mathcal{L}_E(\phi_0) + J\phi_0) + \int_x \left[\frac{1}{2} \left(-\square + m^2 + \lambda \frac{\phi_0^2}{2} + \xi \frac{\phi_0^4}{4!} \right) \phi^2 + \frac{1}{3!} \left(\lambda\phi_0 + \xi \frac{\phi_0^3}{3!} \right) \phi^3 + \frac{1}{4!} \left(\lambda + \xi \frac{\phi_0^2}{2} \right) \phi^4 + \xi\phi_0 \frac{\phi^5}{5!} + \xi \frac{\phi^6}{6!} \right]. \quad (4.10)$$

Vamos agora obter $Z[J]$, o funcional gerador das funções de correlação:

$$Z[J] = \frac{\int D\phi e^{-\frac{I(\phi, J)}{\hbar}}}{\int D\phi e^{-\frac{I(\phi, 0)}{\hbar}}} = e^{\frac{W(J)}{\hbar}}. \quad (4.11)$$

Considerando a medida $\mathcal{D}\phi$ invariante sob translação, e de acordo com (4.5), (4.10) e (4.11),

$$Z[J] = e^{-\frac{I_0}{\hbar}} \frac{\int D\phi \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \int_x \left[\frac{1}{2} \left(-\square + m^2 + \lambda \frac{\phi_0^2}{2} + \xi \frac{\phi_0^4}{24} \right) \phi^2 + \dots \right] \right\}}{\int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \int_x \left[(-\square + m^2) \frac{\phi^2}{2} + \frac{\lambda\phi^4}{4!} + \xi \frac{\phi^6}{6!} \right] \right\}}, \quad (4.12)$$

em que $I_0 = I(\phi_0, J)$.

Vamos obter $W(J)$ através de sua expansão em ordens de \hbar , que equivale a sua expansão em loops, como pode ser visto no apêndice C. Escrevendo

$$W(J) = W_0 + \hbar W_1 + \hbar^2 W_2 + \hbar^3 W_3 + \dots \quad (4.13)$$

e substituindo em $Z[J]$, temos

$$Z = e^{\frac{W(J)}{\hbar}} = e^{\frac{W_0}{\hbar}} \cdot e^{W_1} \cdot e^{W_2\hbar} \dots \quad (4.14)$$

Reescalando o campo $\phi \rightarrow \phi' \sqrt{\hbar}$ na (4.12), e omitindo a linha para não sobrecarregar a notação, a integral no numerador desta será reescrita como

$$\int \mathcal{D}\phi(\sqrt{\hbar}) \exp \left\{ - \int_x \left[\frac{1}{2} \left(-\square + m^2 + \lambda \frac{\phi_0^2}{2} + \xi \frac{\phi_0^4}{4!} \right) \phi^2 + \frac{\sqrt{\hbar}}{6} (\lambda\phi_0 + \xi\phi_0^3) \phi^3 + \frac{\hbar}{4!} \left(\lambda + \xi \frac{\phi_0^2}{2} \right) \phi^4 + \xi \hbar \sqrt{\hbar} \phi_0 \frac{\phi^5}{5!} + \xi \hbar^2 \frac{\phi^6}{6!} \right] \right\} \quad (4.15)$$

e a do denominador será

$$\int \mathcal{D}\phi(\sqrt{\hbar}) \exp \left\{ - \int_x \left[(-\square + m^2) \frac{\phi^2}{2} + \hbar\lambda \frac{\phi^4}{4!} + \hbar^2 \xi \frac{\phi^6}{6!} \right] \right\}. \quad (4.16)$$

Resumidamente,

$$Z[J] = e^{-\frac{I_0}{\hbar}} \frac{\int D\phi \exp \left\{ - \int_x \left[\frac{1}{2} \left(-\square + m^2 + \lambda \frac{\phi_0^2}{2} + \xi \frac{\phi_0^4}{4!} \right) \phi^2 + \dots \right] \right\}}{\int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ - \int_x \left((-\square + m^2) \frac{\phi^2}{2} + \hbar\lambda \frac{\phi^4}{4!} + \hbar^2 \xi \frac{\phi^6}{6!} \right) \right\}}. \quad (4.17)$$

Comparando com a (4.14), podemos identificar

$$W_0 = -I(\phi_0, J) = \int_x \mathcal{L}_E(\phi_0) + J\phi_0. \quad (4.18)$$

Este termo gera os diagramas tipo árvore, que são a parte clássica. Tendo em vista (4.14) e (4.18), podemos obter W_1 ao dividirmos (4.17) por $e^{\frac{W_0}{\hbar}}$, ou seja, por $e^{-\frac{I_0}{\hbar}}$ e selecionarmos apenas os termos que contribuem com a ordem zero em \hbar , o que equivale a considerar $\hbar \rightarrow 0$ na (4.17):

$$e^{W_1} = \frac{\int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ - \int_x \left[\frac{1}{2} \phi \left(-\square + m^2 + \lambda \frac{\phi_0^2}{2} + \xi \frac{\phi_0^4}{4!} \right) \phi \right] \right\}}{\int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ - \int_x \left[\frac{1}{2} \phi (-\square + m^2) \phi \right] \right\}}. \quad (4.19)$$

Como as integrais na expressão (4.19) acima são Gaussianas, podemos resolvê-las usualmente*. Obtemos então

$$W_1 = \log \left(\frac{\det D^{-1}}{\det D_0^{-1}} \right)^{-1/2}, \quad (4.20)$$

*Para uma integral Gaussiana

$$I(A, b) = \int \left(\prod_i^n dx_i \right) \exp \left(- \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} x_i A_{ij} x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i \right),$$

o resultado da integração é

$$I(A, b) = (2\pi)^{n/2} (\det A)^{-1/2} \exp \left[\sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} b_i (A^{-1})_{ij} b_j \right].$$

No nosso caso, $b = 0$.

em que

$$D^{-1} = \left(-\square + m^2 + \lambda \frac{\phi_0^2}{2} + \xi \frac{\phi_0^4}{4!} \right), \quad (4.21)$$

$$D_0^{-1} = (-\square + m^2). \quad (4.22)$$

Podemos chamar de D_0 o propagador de campo da teoria sem interação, de modo que

$$D_0(x-y)(-\square + m^2) = \delta^4(x-y),$$

e D o propagador completo. Usando algumas propriedades de determinante[†], obtemos

$$W_1(\phi_0) = -\frac{1}{2} \text{Tr} \log(D_0 \cdot D^{-1}). \quad (4.23)$$

A expressão acima gera o diagrama de Feynman de 1 loop, mostrado na figura 4.1.



Figura 4.1: diagrama tipo 1PI gerado a partir da expansão em 1 loop de W_1

Os diagramas de 2 loops são gerados pelos termos da expansão (4.17) com dependência de ordem 1 em \hbar , que juntos compõe o termo W_2 de (4.14). Eles serão gerados através da expansão da exponencial dos termos com ϕ^3 e ϕ^4 , no numerador de (4.17):

$$e^{\hbar W_2} = \mathcal{B} \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ - \int_x \frac{\phi D^{-1} \phi}{2} \right\} \left[-\frac{\hbar}{4!} \int_x \left(\lambda + \xi \frac{\phi_0^2(x)}{2} \right) \phi^4(x) + \right. \\ \left. + \frac{\hbar}{36} \int_{xy} (\lambda \phi_0(x) + \xi \phi_0(x)^3) \phi^3(x) (\lambda \phi_0(y) + \xi \phi_0^3(y)) \phi^3(y) \right], \quad (4.24)$$

onde $\mathcal{B} = \left(\int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ - \int_x \left[(-\square + m^2) \frac{\phi^2}{2} + \hbar \lambda \frac{\phi^4}{4!} + \hbar^2 \xi \frac{\phi^6}{6!} \right] \right\} \right)^{-1}$, é o denominador. Como, para obter W_2 , temos de extrair o logarítmo de (4.24), o efeito de \mathcal{B} em W_2 é de se somar às contribuições que vem do numerador. Os termos com ordem 1 em \hbar no denominador são gerados por

$$\int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ - \int_x \left((-\square + m^2) \frac{\phi^2}{2} \right) \right\} \left(-\hbar \lambda \frac{\phi^4}{4!} \right),$$

que já é um termo presente no numerador. Os diagramas gerados a partir de W_2 estão

[†]Se M é invertível: $\det(M)^{-1} = \frac{1}{\det M}$; $(M)^{-1}$ é inversa de M .

Para duas matrizes, M e N , quadradas e de mesma dimensão: $\det M \cdot \det N = \det(M \cdot N)$.
E $\log(\det M) = \text{Tr}(\log M)$; $\text{Tr} \equiv \text{Traço}$.

representados na figura 4.2 abaixo.

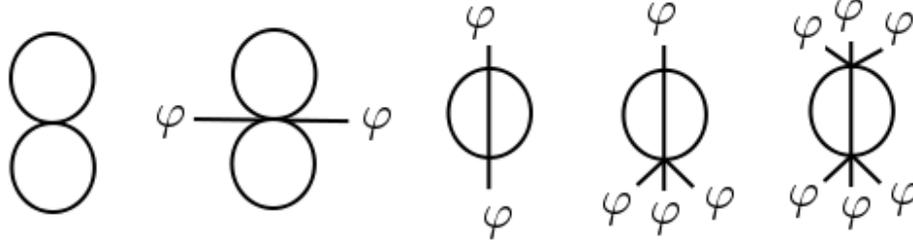


Figura 4.2: diagramas tipo 1PI gerados a partir da expansão em 2 loops de W_2

Vamos agora calcular a ação efetiva $\Gamma(\varphi)$, através da transformada de Legendre de $W(J)$:

$$\Gamma(\varphi) = W[J] - \int_x \varphi(x)J(x). \quad (4.25)$$

O campo médio, $\varphi(x)$, é definido como

$$\varphi(x) := \frac{\partial W[J]}{\partial J(x)}. \quad (4.26)$$

Podemos expandir φ como

$$\varphi = \phi_0 + \hbar\tilde{\phi} + \dots \quad (4.27)$$

Vamos agora expandir $\Gamma(\varphi)$ em loops e calcular seus termos ordem a ordem.

$$\Gamma(\varphi) = \Gamma_0(\varphi) + \hbar\Gamma_1(\varphi) + \hbar^2\Gamma_2(\varphi) + \dots \quad (4.28)$$

A ordem zero em \hbar , temos

$$\Gamma_0(\varphi) = W_0[J] - \int_x \varphi(x)J(x) \quad (4.29)$$

e, como podemos notar de (4.27), $\phi_0 = \varphi$. Usando (4.18),

$$\begin{aligned} \Gamma_0(\varphi) &= \int_x \mathcal{L}_E(\phi_0) + J\phi_0 - \int_x \varphi(x)J(x) \\ &= \int_x \mathcal{L}_E(\varphi). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Nesta ordem, a ação efetiva é a própria ação do campo médio φ .

Vamos encontrar as próximas ordens de $\Gamma(\varphi)$. Para isto, vamos considerar uma ordem

a mais de (4.27), ou seja $\varphi = \phi_0 + \hbar\tilde{\phi}$.

$$\begin{aligned}\Gamma(\varphi) - \Gamma_0(\varphi) &= W[J] - \int_x \varphi(x)J(x) - \Gamma_0(\varphi) \\ &= W_0(\phi_0) + \hbar W_1(\phi_0) + \hbar^2 W_2(\phi_0) + \dots + I(\varphi, J) \\ &= -I(\phi_0, J) + I(\varphi, J) + \hbar W_1(\phi_0) + \hbar^2 W_2(\phi_0) + \dots\end{aligned}\quad (4.31)$$

Calculando até segunda ordem em \hbar , temos, ao levar em consideração a equação (4.7),

$$\begin{aligned}\hbar\Gamma_1(\varphi) + \hbar^2\Gamma_2(\varphi) &= - \int_x \frac{1}{2} \left(-\square + m^2 + \lambda \frac{\phi_0^2}{2} + \xi \frac{\phi_0^4}{24} \right) \hbar^2 \tilde{\phi}^2 + \hbar W_1(\varphi - \hbar\tilde{\phi}) + \hbar^2 W_2(\varphi - \hbar\tilde{\phi}) \\ &= - \hbar^2 \int_x \frac{1}{2} \left(-\square + m^2 + \lambda \frac{\phi_0^2}{2} + \xi \frac{\phi_0^4}{24} \right) \tilde{\phi}^2 \\ &\quad + \hbar W_1(\varphi) - \hbar^2 \frac{\partial W_1(\varphi)}{\partial \varphi} \tilde{\phi} + \hbar^2 W_2(\varphi).\end{aligned}\quad (4.32)$$

De onde notamos que

$$\Gamma_1(\varphi) = W_1(\varphi), \quad (4.33)$$

$$\Gamma_2(\varphi) = \int_x \frac{1}{2} \left(-\square + m^2 + \lambda \frac{\phi_0^2}{2} + \xi \frac{\phi_0^4}{24} \right) \tilde{\phi}^2(x) - \frac{\partial W_1(\varphi)}{\partial \varphi(x)} \tilde{\phi}(x) + W_2(\varphi). \quad (4.34)$$

Finalmente, vemos de (4.28), (4.30) e (4.33), que a ação efetiva até a primeira ordem em loops é:

$$\Gamma(\varphi) = \int_x \mathcal{L}_E(\varphi) - \frac{\hbar}{2} \int_{xp} \log \left(\frac{p^2 + m^2 + \lambda\varphi^2/2 + \xi\varphi^4/4!}{p^2 + m^2} \right). \quad (4.35)$$

Considerando ϕ constante, e de acordo com (2.34) o potencial efetivo é:

$$V(\varphi) = \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 + \frac{\xi}{6!} \varphi^6 + \frac{\hbar}{2} \int_p \log \left(\frac{m^2 + \lambda\varphi^2/2 + \xi\varphi^4/4!}{m^2} \right). \quad (4.36)$$

4.3 Ação efetiva 2PI e sua expansão diagramática

Da necessidade de se ter um formalismo geral para a derivação das equações de movimento dos propagadores e das funções de correlação em geral, em teorias que apresentam quebra espontânea de simetria, alguns trabalhos foram feitos na área de física da matéria condensada e em seguida estendidos para a física de campo relativística. Em 1974, Cornwall, Jackiw e Tomboulis, publicaram um artigo tratando do formalismo da ação efetiva para operadores compostos [10] com este mesmo objetivo. Entre outras características,

ele foi desenvolvido de modo que o potencial efetivo possa exibir uma forma de poço duplo com um máximo local na origem simétrica, o que não era possível antes, no método 1PI, pelo fato dele ser definido por uma transformada de Legendre de apenas um termo, o que o tornou uma função necessariamente convexa. Nele é considerada uma generalização, $\Gamma(\phi, G)$, da ação efetiva usual $\Gamma(\varphi)$, que depende não só do valor esperado, $\varphi(x)$, do campo quântico $\phi(x)$, mas também do valor esperado, $G(x, y)$, do produto ordenado no tempo $T\phi(x)\phi(y)$.

As soluções físicas satisfazem condições estacionárias:

$$\frac{\delta\Gamma(\varphi, G)}{\delta\varphi(x)} = 0 \quad (4.37)$$

e

$$\frac{\delta\Gamma(\varphi, G)}{\delta G(x, y)} = 0. \quad (4.38)$$

A ação efetiva convencional, $\Gamma(\varphi)$, é dada por $\Gamma(\varphi, G)$ na solução $G_0(\varphi)$ obtida da equação (4.38): $\Gamma(\varphi) = \Gamma(\varphi, G_0(\varphi))$. Neste formalismo é possível se somar uma vasta gama de diagramas de séries perturbativas que contribuem para a ação efetiva $\Gamma(\varphi)$. A forma do propagador é determinada pelo método variacional em (4.38).

Para soluções invariantes sob translação, consideramos $\varphi = \text{const}$ e $G(x, y)$ uma função apenas de $(x - y)$, e então obtemos o potencial efetivo para o propagador inteiro:

$$V(\varphi, G) = -\Gamma(\varphi, G) / \int d^4x. \quad (4.39)$$

O gerador funcional das funções de correlação conexas, $W[J, R]$, na presença de dois termos de fonte, $J(x)$ e $R(x, y)$ é dado por:

$$\begin{aligned} Z[J, R] &= \exp\left(\frac{W[J, R]}{\hbar}\right) \\ &= \int \mathcal{D}\phi \exp\left(\frac{1}{\hbar}\left(S(\phi) + \int_x J(x)\phi(x) + \frac{1}{2} \int_{xy} R(x, y)\phi(x)\phi(y)\right)\right). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Podemos definir, além do campo médio $\varphi(x)$, a função de dois pontos conexa, $G(x, y)$,

pela variação de $W[J, R]$ em relação às fontes:

$$\begin{aligned}\frac{\delta W[J, R]}{\delta J(x)} &= \varphi(x), \\ \frac{\delta W[J, R]}{\delta R(x, y)} &= \frac{1}{2}(\varphi(x)\varphi(y) + \hbar G(x, y)).\end{aligned}\quad (4.41)$$

A ação efetiva 2PI é construída a partir de duas transformadas de Legendre de $W[J, R]$ em relação as fontes,

$$\begin{aligned}\Gamma[\varphi, G] &= W[J, R] - \int_x \frac{\delta W[J, R]}{\delta J(x)} J(x) - \int_{xy} \frac{\delta W[J, R]}{\delta R(x, y)} R(x, y) \\ &= W[J, R] - \int_x \varphi(x)J(x) - \frac{1}{2} \int_{xy} \varphi(x)\varphi(y)R(x, y) - \frac{\hbar}{2} \int_{xy} G(x, y)R(x, y) \\ &= \Gamma_R^{1\text{PI}}[\varphi] - \frac{1}{2} \int_{xy} \varphi(x)\varphi(y)R(x, y) - \frac{\hbar}{2} \text{Tr}GR.\end{aligned}\quad (4.42)$$

Em que $\Gamma_R^{1\text{PI}}(\varphi)$ corresponde a ação efetiva 1PI, para uma teoria governada por uma ação clássica modificada $S_R(\phi) = S(\phi) + \frac{1}{2} \int_{xy} R(x, y)\phi(x)\phi(y)$, que apresenta um termo "massivo" não-constante $\sim R(x, y)$, quadrático nos campos.

Podemos facilmente obter as condições estacionárias,

$$\begin{aligned}\frac{\delta \Gamma(\varphi, G)}{\delta \varphi(x)} &= -J(x) - \int_y R(x, y)\varphi(y), \\ \frac{\delta \Gamma(\varphi, G)}{\delta G(x, y)} &= -\frac{\hbar}{2}R(x, y),\end{aligned}\quad (4.43)$$

que nos dão as equações de movimento na ausência de fontes, ou seja, $J = 0$ e $R = 0$.

Analisando (4.42), podemos recorrer à seção 1PI para calcular a parte 1PI da ação efetiva, $\Gamma_R^{1\text{PI}}[\varphi]$, à ordem de um loop. O termo com R , por ser quadrático no campo, pode ser visto como um termo massivo inserido na ação clássica, gerando assim uma ação clássica modificada S_R . Sendo assim, este cálculo é feito, na prática, trocando-se $D^{-1} \rightarrow D^{-1} - R$ em (4.21) e $S \rightarrow S_R$ em (4.30). Note que $D^{-1}(x, y; \varphi)$ é o inverso do propagador do campo original, obtido por $\frac{\delta^2 S(\varphi)}{\delta \varphi(x)\delta \varphi(y)}$. Isto nos diz que até a ordem um em loops temos, com o auxílio dos resultados obtidos anteriormente para Γ_0 e Γ_1 , dados pelas expressões (4.30) e (4.33), que

$$\Gamma_R^{1\text{PI}}(\varphi) = S_R(\varphi) - \frac{\hbar}{2} \text{Tr} \text{Log}(D_0(D^{-1} - R)).\quad (4.44)$$

Com isso, a ação efetiva 2PI, (4.42), até um loop, se torna

$$\Gamma(\varphi, G) \simeq S(\varphi) - \frac{\hbar}{2} \text{TrLog}(D_0(D^{-1} - R)) - \frac{\hbar}{2} \text{Tr}GR, \quad (4.45)$$

e o correspondente potencial efetivo a um loop, ao considerarmos φ constante, como podemos concluir a partir da (2.34):

$$V(\varphi, G) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 + \frac{\xi}{6!}\varphi^6 + \frac{\hbar}{2} \int_p \text{Log} \left(\frac{m^2 - R + \lambda\varphi^2/2 + \xi\varphi^4/4!}{m^2} \right) + \frac{\hbar}{2}GR. \quad (4.46)$$

Se considerarmos $R = 0$, retomamos o potencial obtido a partir da ação efetiva 1PI.

Nesta ordem pode ser provado que o inverso do propagador é $G^{-1} = D^{-1} - R$. Inicialmente vamos considerar esta sentença verdadeira e substituir na equação (4.45):

$$\Gamma(\varphi, G) \simeq S(\varphi) - \frac{\hbar}{2} \text{TrLog}(D_0G^{-1}) + \frac{\hbar}{2} \text{Tr}(1 - D^{-1}G). \quad (4.47)$$

Derivando a expressão acima em relação a G e usando a (4.43), produzimos exatamente $G^{-1} = D^{-1} - R$. Nos confirmando sua validade.

Para irmos além de 1 loop somaremos à expressão acima de $\Gamma(\varphi, G)$ até um loop, um "resto", que chamaremos de $\Gamma_2(\varphi, G)$,

$$\Gamma(\varphi, G) \simeq S(\varphi) - \frac{\hbar}{2} \text{TrLog}(D_0G^{-1}) + \frac{\hbar}{2} \text{Tr}(1 - D^{-1}G) + \Gamma_2(\varphi, G). \quad (4.48)$$

Para entendermos o significado de Γ_2 vamos derivar a equação (4.48) acima em relação a G . Obtemos,

$$G^{-1}(x, y) = D^{-1}(x, y; \varphi) - R(x, y) - \Sigma(x, y; \varphi, G), \quad (4.49)$$

em que

$$\Sigma(x, y; \varphi, G) = \frac{2}{\hbar} \frac{\partial \Gamma_2(\varphi, G)}{\partial G(x, y)}. \quad (4.50)$$

Vamos comparar a expressão acima com o inverso exato do propagador, que dentro da perspectiva 1PI é obtido através da segunda derivação da ação efetiva em relação ao campo

φ :[‡]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Gamma_R^{1PI}(\varphi)}{\partial \varphi(x) \partial \varphi(y)} &= -\hbar G^{-1}(x, y) \\ &= -\hbar (D^{-1}(x, y) - R(x, y) - \Sigma^R(x, y)), \end{aligned} \quad (4.51)$$

em que $\Sigma^R(x, y)$ é o termo de auto-energia, que consiste na soma de todos os gráficos de Feynman do tipo 1PI. Para entender melhor a equação (4.51), temos no apêndice A o cálculo da equação do propagador completo, incluindo todas as ordens em loops. Nele encontramos a dedução detalhada da presença do termo de auto-energia no propagador completo. O propagador, por construção, é o inverso do operador que age no setor da Lagrangeana quadrático no campo. Ao compararmos com o método 1PI, podemos perceber que o propagador simples, obtido quando não havia o termo $\int_{xy} R(x, y) \varphi(x) \varphi(y)$ no lagrangeano, foi substituído pelo propagador efetivo $(D^{-1} - R)^{-1}$, pelo efeito da inclusão do termo de fonte $R(x, y)$ dentro do operador do setor quadrático no campo.

Comparando (4.49) com (4.51) vemos que

$$\Sigma^R(x, y) = \Sigma(x, y; \varphi, G).$$

Como $\Sigma^R(x, y)$ por ser a auto-energia contém somente gráficos 1PI[§], com linhas de propagadores associadas ao propagador clássico efetivo $(D^{-1} - R)^{-1}$, então, a (4.50), nos diz que Γ_2 conterá diagramas tipo 2PI, ou seja, irreduzíveis a duas partículas, que são diagramas que permanecem conexos ao abrirmos duas linhas internas. Podemos perceber que Γ_2 não possui contribuições do tipo 2PR (reduzíveis a duas partículas) pois isso implicaria que Σ^R teria contribuições do tipo 1PR; o que não condiz com sua definição de auto-energia.

Analisando a (4.51) vemos que o propagador completo $G(x, y)$ pode ser expresso através de uma série infinita em termos do propagador clássico efetivo e do termo de auto-energia $\Sigma^R(x, y)$:

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \frac{1}{D^{-1}(x, y) - R(x, y) - \Sigma^R(x, y)} \\ G(x, y) &= (D^{-1} - R)^{-1} + (D^{-1} - R)^{-1} \Sigma^R (D^{-1} - R)^{-1} \\ &\quad + (D^{-1} - R)^{-1} \Sigma^R (D^{-1} - R)^{-1} \Sigma^R (D^{-1} - R)^{-1} + \dots \end{aligned} \quad (4.52)$$

[‡]Vide equação (2.29) e (2.30)

[§]vide figura A.4 no apêndice A

Portanto existe uma correspondência entre um diagrama 1PI com linhas de propagadores associadas ao propagador efetivo G e uma série infinita de propagadores 1PI com linhas de propagadores associadas ao propagador clássico D . Como consequência disso, para cada gráfico 2PI de Γ_2 corresponde uma série infinita de diagramas 1PI. Por exemplo, para 2 e 3 loops, temos a correspondência dada pela figura 4.3.

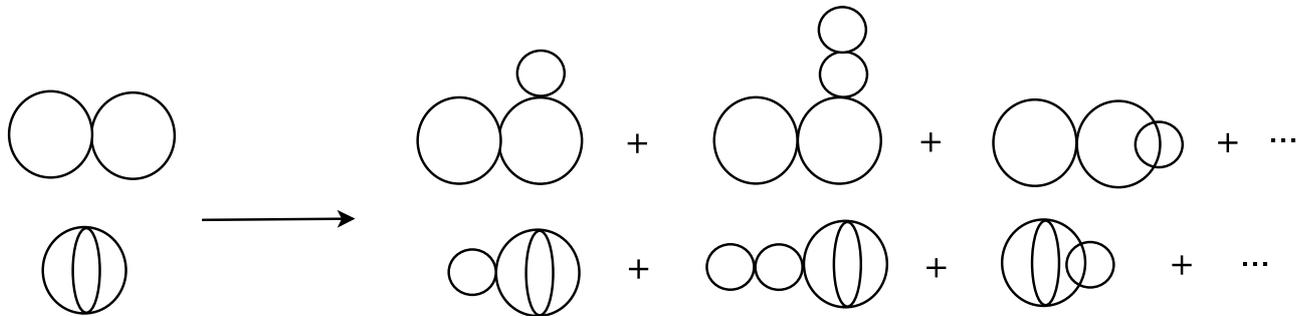


Figura 4.3: Correspondência de diagramas 2PI, de 2 e 3 loops de Γ_2 com séries infinitas de diagramas 1PI

Capítulo 5

Cálculo do potencial efetivo a partir da análise da expansão 2PPI em uma teoria com termos de auto-interação tipo ϕ^4 e ϕ^6

A expansão Two Point Particle Irreducible (2PPI) é uma aproximação usada para calcular a ação efetiva de operadores compostos locais. Ela é similar à 2PI, com a particularidade de tratar de operadores compostos locais, ou seja, avaliados no mesmo ponto. Este método também tem a vantagem de ser baseado num princípio variacional genuíno, diferente da expansão perturbativa vista no capítulo 3.

Ele foi publicado em 1992, [20], aplicado a uma teoria com auto-interação ϕ^4 , tendo como operador composto ϕ^2 . Nele, o Potencial efetivo é calculado como o mínimo da densidade de energia possível dentro de uma classe de funcionais de onda com valores esperados fixos para os campos elementares e para operadores compostos locais. Ao minimizar a ação efetiva em relação aos valores dos operadores compostos obtém-se equações de gap, que somam séries infinitas de diagramas de Feynman. Em [20] foi mostrado que, nesta construção com ϕ^4 , o resultado a um loop corresponde ao calculado pelo PEG.

Em 2002 foi publicado este mesmo método numa abordagem um pouco diferente; em que a contribuição dos diagramas de Feynman redutíveis a 2 partículas (diagramas 2PPR) é absorvida numa massa efetiva, ajustável através de um princípio variacional, [19]. A diferença básica está no parâmetro variacional, agora interpretado como massa efetiva. Isto torna a expansão 2PPI mais simples de trabalhar em ordens maiores do que a expansão 2PI, que se utiliza da função de correlação de dois pontos como objeto variacional, [19].

Neste capítulo vamos analisar a expansão 2PPI, de forma similar a [20] e [19], aplicada a uma teoria com termos de auto-interação tipo ϕ^4 e ϕ^6 . Os diagramas 2PPI são todos aqueles que permanecem conexos ao cortarmos duas linhas internas que se encontrem num mesmo

vértice. Desta forma, a expansão 2PPI está num lugar intermediário entre a expansão 1PI e a expansão 2PI.

5.1 Análise diagramática dos gráficos 2PPR e 2PPI

Um diagrama 2PPR é todo diagrama que se desconecta ao cortarmos duas linhas internas que se encontrem no mesmo vértice. Podemos perceber que numa teoria com auto-interação tipo $\lambda\phi^4$ as inserções que tornam um gráfico 2PPR são do tipo gaivota (2 linhas de campo externas) ou bolha (diagramas de vácuo), ou combinações destes dois tipos, como ilustra a figura 5.1(a). Numa teoria com auto-interação tipo $\xi\phi^6$ as inserções básicas, que também podem ser combinadas para formar novas inserções 2PPR, estão ilustradas na figura 5.1(b). Numa teoria que apresenta estes dois tipos de auto-interação os diagramas são mistos. Um fato bem simples de se perceber é que os diagramas 1PI podem ser divididos nestes dois grupos: redutíveis ou irredutíveis a 2 partículas de acordo com o critério enunciado acima. Ou ele é 2PPR ou é 2PPI.

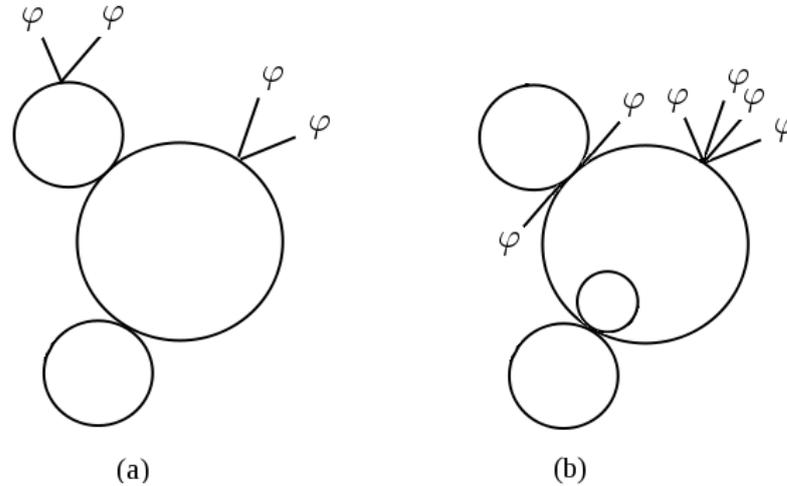


Figura 5.1: diagramas 2PPR genéricos com suas inserções em teorias com auto-interações tipo ϕ^4 em (a) e ϕ^6 em (b)

Podemos então, a partir de uma expansão de diagramas tipo 1PI, numa primeira análise, suprimir os diagramas 2PPR e inseri-los na forma de massa efetiva na expansão 2PPI restante. Na figura 5.1(a), os gráficos gaivota contribuem para a massa efetiva com termos tipo $\langle\phi\rangle^2 = \phi^2$ e os tipo bolha com $\langle\phi^2\rangle = \Delta$. Em (b), analogamente, temos contribuições tipo ϕ^4 , $\phi^2\Delta$ e Δ^2 . Poderíamos pensar em realizar isto simplesmente retirando os diagramas

2PPR da expansão 1PI e trocando a massa m por uma massa efetiva \bar{m} :

$$\bar{m} = m + \frac{\lambda}{2}(\varphi^2 + \Delta) + \xi/24(\varphi^4 + 6\varphi^2\Delta + 3\Delta^2). \quad (5.1)$$

Porém ocorre um pequeno problema em que fica mal definido o que é inserção e o que é a parte 2PPI restante. A figura 5.2(a) ilustra este problema. Como definir qual é a parte 2PPI? A princípio qualquer um dos dois loops pode ser a parte 2PPI ou inserção. Por isto temos que fazer uma equivalência que usa de uma derivada atuando no funcional gerador dos gráficos. Esta derivada, num diagrama, tem o efeito de marcá-lo de forma que não reste mais dúvida do que é o quê. A figura 5.2(b) ilustra o diagrama marcado. A parte sombreada, que permanece intacta, é classificada como inserção, e a marcada é o diagrama 2PPI que permanece na expansão. Desta forma a equivalência é traduzida por:

$$\frac{\delta\Gamma_q^{1PI}}{\delta\varphi}(\varphi, J_2(\varphi, \Delta)) = \frac{\delta\Gamma_q^{2PPI}}{\delta\varphi}(\varphi, \lambda/2(\varphi^2 + \Delta) + \xi/24(\varphi^4 + 6\varphi^2\Delta + 3\Delta^2) - J_2(\varphi, \Delta)). \quad (5.2)$$

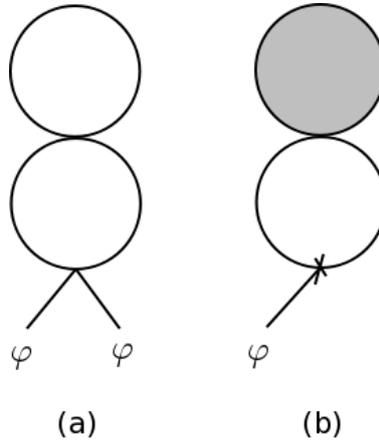


Figura 5.2: (a) diagrama 2PPI original; (b) a inserção 2PPR está sombreada e o diagrama 2PPI restante aparece marcado

Ao tratarmos em termos da massa efetiva (5.1), diagramaticamente temos duas possibilidades ao fazer a derivação em relação a φ : ou a derivada incide sobre um campo externo explícito, que não é inserção, ou atinge a inserção, ou seja um campo φ que está implicitamente incluído na massa efetiva. Daí temos:

$$\frac{\delta\Gamma_q^{1PI}}{\delta\varphi}(\varphi, m^2) = \frac{\partial\Gamma_q^{2PPI}}{\partial\varphi}(\varphi, \bar{m}^2) + \frac{\partial\bar{m}^2}{\partial\varphi} \frac{\partial\Gamma_q^{2PPI}}{\partial\bar{m}^2}(\varphi, \bar{m}^2). \quad (5.3)$$

5.2 Cálculo do potencial efetivo

Considere a seguinte Lagrangeana no espaço Euclidiano:

$$\mathcal{L}(\phi) = -\frac{1}{2}(\square + m^2)\phi(x)^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi(x)^4 - \frac{\xi}{6!}\phi(x)^6. \quad (5.4)$$

Neste caso, o funcional gerador das funções de correlação é

$$\begin{aligned} Z[J_1, J_2] &= \exp\left(\frac{W[J_1, J_2]}{\hbar}\right) \\ &= \int \mathcal{D}\phi \exp\left[\frac{1}{\hbar}\left(S(\phi) + \int_x J_1(x)\phi(x) + \frac{1}{2}\int_x J_2(x)\phi(x)^2\right)\right]. \end{aligned} \quad (5.5)$$

onde $S(\phi) = \int_x \mathcal{L}(\phi)$.

Podemos definir $\varphi(x)$, o campo macroscópico, e $\Delta(x)$, a função de apenas um ponto conexas, pelas variações de $W(J_1, J_2)$ na presença de fontes,

$$\frac{\delta W(J_1, J_2)}{\delta J_1(x)} = \varphi(x) \quad e \quad \frac{\delta W(J_1, J_2)}{\delta J_2(x)} = \frac{1}{2}(\varphi^2(x) + \Delta(x)). \quad (5.6)$$

Analogamente a (4.42), na seção 2PI do capítulo anterior, obtemos o $\Gamma(\varphi, \Delta)$ através da dupla transformada de Legendre,

$$\begin{aligned} \Gamma(\varphi, \Delta) &= W(J_1, J_2) - \int_x J_1 \varphi - \int_x \frac{J_2}{2} (\varphi^2 + \Delta) \\ &= \Gamma^{\text{1PI}}(\varphi, J_2) - \int_x \frac{J_2}{2} (\varphi^2 + \Delta). \end{aligned} \quad (5.7)$$

As equações efetivas de movimento são obtidas a partir de

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \varphi}(\varphi, \Delta) = -J_1 - J_2 \varphi, \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \Delta}(\varphi, \Delta) = -\frac{1}{2}J_2, \quad (5.9)$$

na ausência das fontes J_1 e J_2 .

Podemos separar a ação efetiva 1PI em uma parte de ordem zero em \hbar , Γ_0^{1PI} , e outra com as correções quânticas, Γ_q^{1PI} :

$$\Gamma^{\text{1PI}} = \Gamma_0^{\text{1PI}} + \Gamma_q^{\text{1PI}}. \quad (5.10)$$

No caso da presença de uma fonte quadrática no campo a equação (4.30) é escrita da seguinte forma:

$$\Gamma_0^{1\text{PI}}(\varphi, J_2) = \int_x \mathcal{L}_2(\varphi, J_2), \quad (5.11)$$

em que a fonte entra como se fosse um termo massivo na Larangeana: $\mathcal{L}_2(\varphi, J_2) = \mathcal{L}(\varphi) + \frac{J_2}{2}\varphi^2$. Isto ocorre devido a dependência quadrática no campo do termo de fonte, a semelhança do termo massivo. Ou seja

$$\Gamma_0^{1\text{PI}}(\varphi, J_2) = S(\varphi) + \int_x \frac{J_2}{2}\varphi^2.$$

Com isso a equação (5.7) se torna

$$\Gamma(\varphi, \Delta) = S(\varphi) - \int_x \frac{J_2}{2}\Delta + \Gamma_q^{1\text{PI}}(\varphi, J_2). \quad (5.12)$$

Fazendo uma variação em relação a $\delta\varphi$ da expressão acima temos:

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi} = \frac{\delta S}{\delta\varphi} - \int_x \frac{\Delta}{2} \frac{\delta J_2}{\delta\varphi} + \frac{\delta\Gamma_q^{1\text{PI}}}{\delta\varphi}. \quad (5.13)$$

Para obtermos a ação efetiva $\Gamma^{2\text{PPI}}$ usaremos a equivalência diagramática descrita na seção anterior:

$$\frac{\delta\Gamma_q^{1\text{PI}}}{\delta\varphi}(\varphi, J_2(\varphi, \Delta)) = \frac{\delta\Gamma_q^{2\text{PPI}}}{\delta\varphi}(\varphi, \lambda/2(\varphi^2 + \Delta) + \xi/24(\varphi^4 + 6\varphi^2\Delta + 3\Delta^2) - J_2(\varphi, \Delta)).$$

Em que, como foi explicado anteriormente, estamos tirando os diagramas 2PPR da expansão 1PI e introduzindo-os diretamente nos diagramas 2PPI que restarem na forma de massa efetiva, $\bar{m}(\varphi, \Delta)$,

$$\bar{m}(\varphi, \Delta) = m^2 + z(\varphi, \Delta), \quad (5.14)$$

em que

$$z(\varphi, \Delta) = \frac{\lambda}{2}(\varphi^2 + \Delta) + \frac{\xi}{24}(\varphi^4 + 6\varphi^2\Delta + 3\Delta^2) - J_2(\varphi, \Delta), \quad (5.15)$$

lembrando que a fonte será considerada nula no final das contas.

Integrando a (5.13), com o uso da (5.2), temos

$$\Gamma(\varphi, \Delta) = S(\varphi) - \int_x \frac{J_2}{2} \Delta + \Gamma_q^{2\text{PPI}}(\varphi, z(\varphi, \Delta)) + F(\Delta), \quad (5.16)$$

em que $F(\Delta)$ é uma constante de integração a ser determinada por (5.9). Este termo corrige a dupla contagem de gráficos. Eliminando $J_2(\varphi, \Delta)$ da equação acima com o uso da (5.15),

$$\Gamma(\varphi, \Delta) = S(\varphi) + \Gamma_q^{2\text{PPI}}(\varphi, z(\varphi, \Delta)) + \int_x \frac{\Delta}{2} \left[z(\varphi, \Delta) - \frac{\lambda}{2}(\varphi^2 + \Delta) - \frac{\xi}{24}(\varphi^4 + 6\varphi^2\Delta + 3\Delta^2) \right] + F(\Delta). \quad (5.17)$$

Variando a expressão acima em relação a $z(\varphi, \Delta)$, temos

$$\frac{\delta \Gamma_q^{2\text{PPI}}}{\delta z}(\varphi, z) = -\frac{\Delta}{2}. \quad (5.18)$$

Como z entra no propagador formando uma massa efetiva, $\bar{G} = \frac{1}{k^2 + \bar{m}^2}$, onde $\bar{m}^2 = m^2 + z$ é a massa efetiva, a derivação em (5.18) é equivalente a :

$$\frac{\delta}{\delta z} = \int dk \frac{\delta \bar{G}(k)}{\delta z} \frac{\delta}{\delta \bar{G}(k)} = \int dk \left(-\frac{1}{(k^2 + m^2 + z)^2} \right) \frac{\delta}{\delta \bar{G}(k)}. \quad (5.19)$$

Em termos de diagramas, a operação acima equivale a introduzir uma inserção de momento nulo num propagador qualquer, cujo efeito final é de termos dois propagadores de mesmo momento conectados pela inserção*. Na representação de Δ na figura 5.4 este propagador de momento nulo é representado como uma bolinha preta. Esta representação é obtida a partir da expansão de $\Gamma_q^{2\text{PPI}}$ ilustrada na figura 5.3.

Podemos derivar a equação (5.16) em Δ e substituir a (5.9), obtendo

$$-\frac{J_2}{2} = \frac{\delta \Gamma_q^{2\text{PPI}}}{\delta \Delta}(\varphi, z(\varphi, \Delta)) - \frac{J_2}{2}(\varphi, \Delta) - \int_x \frac{\Delta}{2} \frac{\delta J_2}{\delta \Delta}(\varphi, \Delta) + \frac{\delta F(\Delta)}{\delta \Delta}. \quad (5.20)$$

Como

$$\frac{\delta \Gamma_q^{2\text{PPI}}}{\delta \Delta} = \int_x \frac{\delta \Gamma_q^{2\text{PPI}}}{\delta z} \frac{\delta z}{\delta \Delta}, \quad (5.21)$$

*Vide apêndice F para mais detalhes

e de acordo com (5.18) e (5.15), temos

$$\frac{\delta\Gamma_q^{2\text{PPI}}}{\delta z}(\varphi, z) = -\frac{\Delta}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\delta z}{\delta\Delta} = \frac{\lambda}{2} + \frac{\xi}{4}\varphi^2, + \frac{\xi}{4}\Delta - \frac{\delta J_2}{\delta\Delta},$$

podemos obter $F(\Delta)$ da equação (5.20):

$$\begin{aligned} \frac{\delta F(\Delta)}{\delta\Delta} &= \int_x \frac{\Delta}{2} \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{\xi}{4}\varphi^2 + \frac{\xi}{4}\Delta \right) \\ F(\Delta) &= \int_x \left(\frac{\lambda}{8}\Delta^2 + \frac{\xi}{16}\varphi^2\Delta^2 + \frac{\xi}{24}\Delta^3 + \text{cte} \right). \end{aligned} \quad (5.22)$$

A ação efetiva será, de acordo com (5.16),

$$\Gamma(\varphi, \Delta) = S(\varphi) + \Gamma_q^{2\text{PPI}}(\varphi, z(\varphi, \Delta)) - \int_x \frac{J_2}{2} \Delta + \left(\frac{\lambda}{8} \int_x \Delta^2 + \frac{\xi}{16} \int_x \varphi^2 \Delta^2 + \frac{\xi}{24} \int_x \Delta^3 \right). \quad (5.23)$$

Ou, em termos de $z(\varphi, \Delta)$,

$$\begin{aligned} \Gamma(\varphi, \Delta) &= S(\varphi) + \Gamma_q^{2\text{PPI}}(\varphi, z(\varphi, \Delta)) + \frac{1}{2} \int_x z(\varphi, \Delta) \Delta - \frac{\lambda}{4} \int_x \varphi^2 \Delta - \frac{\lambda}{8} \int_x \Delta^2 \\ &\quad - \frac{\xi}{48} \int_x \varphi^4 \Delta - \frac{\xi}{16} \int_x \varphi^2 \Delta^2 - \frac{\xi}{48} \int_x \Delta^3. \end{aligned} \quad (5.24)$$

No estado de mínima energia a energia cinética do campo deve ser nula, ou seja, suas derivadas em relação ao espaço devem ser nulas (no espaço de Minkowski estaríamos falando de derivadas em relação ao espaço e tempo). Isto equivale a considerar o campo constante (e Δ também), independente da posição espacial. Sendo assim temos uma invariância sob translação. Isto simplifica bastante o cálculo do potencial efetivo, que como podemos ver, com o auxílio de (2.34), será

$$V(\varphi) = \frac{m^2}{2}\varphi^2 + \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 + \frac{\xi}{6!}\varphi^6 + \Gamma_q^{2\text{PPI}}(\varphi, z(\varphi, \Delta)) - \frac{\lambda}{8}\Delta^2 - \frac{\xi}{16}\varphi^2\Delta^2 - \frac{\xi}{24}\Delta^3, \quad (5.25)$$

em que \mathcal{V} é o elemento de volume do espaço euclidiano $\int d^4x$. I_1 equivale ao primeiro termo da expansão diagramática de $\Gamma_q^{2\text{PPI}}(\varphi, z)$ em loops, na figura 5.3. Vemos também uma equivalência entre Δ e I_0 , já que ambos representam a função de dois pontos avaliada num mesmo ponto. Comparando este resultado com o obtido no capítulo 3 através do método pós-Gaussiano, vemos que são iguais. O método então funciona bem para este caso.

$$\Gamma_q^{2\text{PPI}} = \bigcirc + \varphi \cdots \bigcirc \cdots \varphi + \varphi \cdots \bigcirc \cdots \varphi + \varphi \cdots \bigcirc \cdots \varphi + \dots$$

Figura 5.3: expansão em até 2 loops de $\Gamma_q^{2\text{PPI}}(\varphi, z(\varphi, \Delta))$

$$\frac{\Delta}{2} = \bigcirc + \varphi \cdots \bigcirc \cdots \varphi + \varphi \cdots \bigcirc \cdots \varphi + \dots$$

Figura 5.4: Δ em diagramas

Capítulo 6

Conclusão

Nesta dissertação estudamos alguns métodos de aproximação não perturbativos aplicados à TQC, em particular a uma teoria escalar com termos de auto-interação ϕ^4 e ϕ^6 , e calculamos os respectivos potenciais efetivos. Apresentei as aproximações Gaussiana, pós-Gaussiana e os métodos 1PI, 2PI e 2PPI que usam de funcionais geradores, aplicados à teoria auto-interativa ϕ^4 e ϕ^6 , com o objetivo final de obter o potencial efetivo. Com exceção da Gaussiana [7], estas aplicações ainda não tinham sido feitas na literatura.

Verificamos uma convergência de resultados a 1-loop nas aproximações Gaussiana, pós-Gaussiana e 2PPI. O método 1PI nos fornece a primeira parte do resultado encontrado através dos métodos anteriores e o método 2PI reproduz o resultado do 1PI nesta ordem de aproximação. A ordem de 2 loops: 2PPI e 2PI somam séries infinitas de diagramas, porém a expansão é confiável apenas até esta ordem de loops. Para ordem maiores precisa do método 3PI, 4PI, etc. Com o PEPG pode-se calcular ordens maiores que 2 em \hbar . O método 2PPI se destacou dos demais por termos usado como parte essencial do procedimento uma análise gráfica dos diagramas de Feynman da teoria. Este procedimento mostrou-se adequado na investigação da teoria, visto que concorda com resultados obtidos anteriormente pelas aproximações Gaussiana e pós-Gaussiana.

Algumas aplicações dos métodos aqui investigados, em especial os métodos 2PI e 2PPI aplicados à teorias sigma não-lineares, podem trazer resultados interessantes. Na literatura encontramos aplicações recentes desses métodos em modelos $O(N)$ sigma lineares em [27] e [28]. Também encontramos aplicação do método 2PI em teoria de Yang-Mills em 4 dimensões em [29], porém não há ainda aplicação do método 2PPI, o que pode ser uma boa possibilidade de estudo.

Apêndice A

Diagramas de Feynman e Auto-energia

Vamos usar um exemplo para expor os diferentes tipos de diagramas de Feynman e o significado da auto-energia $\Sigma(p)$. Vamos considerar uma teoria com um termo de auto-interação tipo

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{\lambda}{4!}\phi^4. \quad (\text{A.1})$$

Em geral, para teorias com interação, podemos escrever o funcional gerador $Z(J)$ normalizado da seguinte forma:

$$Z[J] = \frac{\exp \left[\int_z \mathcal{L}_{int} \left(\frac{\delta}{\delta J(z)} \right) \right] \exp \left[-\frac{1}{2} \int_{xy} J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right]}{\left\{ \exp \left[\int_z \mathcal{L}_{int} \left(\frac{\delta}{\delta J(z)} \right) \right] \exp \left[-\frac{1}{2} \int_{xy} J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right] \right\} \Big|_{J=0}}, \quad (\text{A.2})$$

em que a única forma de se tratar o termo $\exp(\int \mathcal{L}_{int})$ é como uma série de potências na constante de acoplamento, ou seja, através de teoria de perturbação. Podemos expandir o numerador de (A.2), até a ordem em λ desejada. No caso de (A.1),

$$\left[1 - \frac{\lambda}{4!} \int_z \left(\frac{\delta}{\delta J(z)} \right)^4 + O(\lambda^2) + \dots \right] \exp \left[-\frac{1}{2} \int_{xy} J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right]. \quad (\text{A.3})$$

A primeira contribuição de (A.3) gera o termo de ordem λ^0 , que é o gerador funcional da partícula livre Z_0 .

Já na ordem λ , após calcular cuidadosamente as etapas $\frac{\delta}{\delta J(z)}$, $\left(\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^2$, $\left(\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^3$, temos a seguinte contribuição:

$$-\frac{\lambda}{4!} \left(\frac{\delta}{\delta J(z)} \right)^4 \exp \left[-\frac{1}{2} \int_{xy} J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right] = -\frac{\lambda}{4!} \left(\left[\int_x \Delta_F(z-x) J(x) \right]^4 - 6 \Delta_F(0) \left[\int_x \Delta_F(z-x) J(x) \right]^2 + 3 [\Delta_F(0)]^2 \right) \exp \left[-\frac{1}{2} \int_{xy} J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right]. \quad (\text{A.4})$$

Vamos escrever esta expressão em forma de diagramas. O propagador para uma partícula livre, $\Delta_F(x-y)$, é representado por uma linha aberta e $\Delta_F(0) = \Delta_F(x-x)$ por uma linha fechada, um loop.

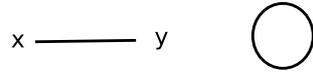


Figura A.1: $\Delta_F(x-y)$ e $\Delta_F(0)$

A (A.4) pode ser escrita em diagramas como:

$$-\frac{\lambda}{4!} \int dz \left(3 \text{○○} - 6 \text{↔} + \text{✕} \right) \exp \left(-\frac{1}{2} \int J \Delta_F J \right)$$

As fontes estão representadas pelas cruzezinhas nas pontas dos propagadores, constituindo linhas externas. Se considerarmos $J = 0$, o segundo e o terceiro termos são eliminados e nos sobra apenas o primeiro, que é conhecido como diagrama de vácuo, por não possuir linhas externas.

Com isso, o funcional Z em primeira ordem em λ é escrito na forma:

$$Z[J] = \frac{\left[1 - \frac{\lambda}{4!} \int dz \left(-3 \text{○○} + 6 \text{↔} + \text{✕} \right) \right] \exp \left(-\frac{1}{2} \int J \Delta_F J \right)}{1 - \frac{\lambda}{4!} \int dz \left(-3 \text{○○} \right)}$$

$$= \left[1 - \frac{\lambda}{4!} \int dz \left(6 \text{↔} + \text{✕} \right) \right] \exp \left(-\frac{1}{2} \int J \Delta_F J \right)$$

em que na última linha usamos uma propriedade matemática bem conhecida.* Vemos

*Se $x \ll 1$

$$\frac{1}{1+x} \simeq 1-x.$$

que o diagrama de vácuo sumiu da expressão de $Z(J)$ em virtude de estarmos usando o funcional já normalizado.

As funções de correlação de n -pontos $G^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$, geradas de $Z(J)$ através de derivações:

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \hbar^n \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Bigg|_{J=0}, \quad (\text{A.5})$$

podem gerar diagramas conexos ou desconexos. Por exemplo, a função de correlação de quatro pontos pode ser escrita diagramaticamente, usando as convenções gráficas, como

$$\mathbf{G}^{(4)} = -3 \text{---} \text{---} - 3\lambda \text{---} \bigcirc \text{---} - \lambda \text{---} \times \text{---} + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

Figura A.2: Função de correlação de 4-pontos (A.6)

Os primeiros gráficos são desconexos, pois são facilmente separáveis, enquanto que o último é conexo. Apenas as partes conexas contribuem para o espalhamento, e elas são geradas pelo funcional $W[J]$,

$$W(J) = \hbar \log Z(J), \quad (\text{A.7})$$

através de derivações em relação a J . São denominadas funções de correlação conexas em n -pontos, $G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$:

$$G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \hbar^{(n-1)} \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_n) \dots \delta J(x_1)} \Bigg|_{J=0}. \quad (\text{A.8})$$

No nosso exemplo, vemos de (A.6) que

$$\mathbf{G}_c^{(4)} = -\lambda \text{---} \times \text{---}$$

Podemos ainda dar um passo a mais e subdividir os conjuntos de diagramas conexas $G_c^{(n)}$ em dois tipos: redutíveis e irreduzíveis. Sabemos que estes tipos de diagramas não tem origem de simples multiplicações de funções de correlação de ordens menores, como podemos ver nos primeiros gráficos da expressão de $G^{(4)}$; mas ainda sim podem apresentar algumas redundâncias. Por exemplo, a função de dois pontos conexa expandida em ordens maiores de loops é escrita graficamente na figura A.3 abaixo como:

$$\begin{aligned}
G_c^{(2)} = & \text{---} + \lambda \text{---} \bigcirc \text{---} + \lambda^2 \left[\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \right] \text{---} \bigcirc \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} \left[\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \right] \\
& + \lambda^3 \left[\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \right] \text{---} \bigcirc \bigcirc \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \bigcirc \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \bigcirc \text{---} \\
& + \text{---} \bigcirc \bigcirc \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \bigcirc \bigcirc \text{---} \left[\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \right] \\
& + \mathcal{O}(\lambda^4)
\end{aligned}$$

Figura A.3: Expansão em loops da função de 2-pontos conexa

Os diagramas da segunda linha, o terceiro da primeira linha e o segundo da terceira linha podem ser separados em duas partes independentes ao cortarmos uma única linha interna. Isto acontece porque eles possuem um propagador ligando duas partes do mesmo gráfico. Eles são chamados de redutíveis a uma partícula. Os restantes já apresentam uma topologia não trivial e como não podem ser separados desta maneira são chamados de irreduzíveis a uma partícula. Que é abreviado por 1PI (“one particle irreducible”).

A auto-energia, $\Sigma(p)$, é definida como a soma das inserções gráficas tipo 1PI. Graficamente na figura A.4.

$$\bigcirc \otimes = \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \bigcirc \text{---} + \dots$$

Figura A.4: Auto-energia $\Sigma(p)$

Podemos então escrever o propagador completo, que é equivalente a função de correlação de 2-pontos, obtida a partir de (A.5) incluindo todas as ordens em loops, através de propa-

gadores para a partícula livre, $G_0(p) = 1/(p^2 - m^2)$, e de funções de auto-energia $\Sigma(p)$, que em diagramas se traduz:

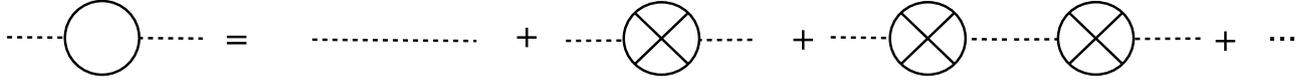


Figura A.5: Propagador completo em termos de $G_0(p)$ e $\Sigma(p)$

E analiticamente como a seguinte soma:

$$\begin{aligned}
 G_c^{(2)}(p) &= G_0(p) + G_0(p)\Sigma(p)G_0(p) + G_0(p)\Sigma(p)G_0(p)\Sigma(p)G_0(p) + \dots \\
 &= G_0(p) (1 + \Sigma(p)G_0(p) + \Sigma(p)G_0(p)\Sigma(p)G_0(p) + \dots) \\
 &= G_0(p) (1 - \Sigma(p)G_0(p))^{-1} \\
 &= [G_0(p)^{-1} - \Sigma(p)]^{-1} \\
 &= \frac{1}{p^2 - m^2 - \Sigma(p)}. \tag{A.9}
 \end{aligned}$$

Definindo a massa física, m_F pelo pólo no propagador completo:

$$G_c^{(2)}(p) = \frac{1}{p^2 - m_F^2}, \tag{A.10}$$

e comparando com (A.9), constatamos que o somatório de diagramas tipo 1PI acrescenta à massa comum uma parcela de energia a mais:

$$m_F^2 = m^2 + \Sigma(p). \tag{A.11}$$

Daí sua denominação de auto-energia.

Apêndice B

A transformada de Legendre

Considere uma função convexa $f(x)$. Vamos definir uma outra função convexa através da transformada de Legendre como

$$g(y) = \min_{x \in \mathbb{R}} \{f(x) - xy\}. \quad (\text{B.1})$$

Esta definição é unívoca, isto é, para cada $f(x)$ temos uma $g(y)$. Se $f(x)$ for diferenciável, podemos derivar o lado direito da equação acima em relação a x e igualar a zero para obter o mínimo desta diferença. Com isso obtemos $y = \frac{df}{dx}$. Desta relação podemos extrair a expressão de x , em termos de y , que se adequa ao mínimo da diferença em (B.1). Podemos então reescrever a (B.1) substituindo $x(y)$ como:

$$g(y) = f(x(y)) - x(y)y. \quad (\text{B.2})$$

Esta expressão pode ser estendida também para funcionais. Ou seja, se uma função diferenciável $f(x)$ expressa a relação entre duas quantidades físicas, e nessa relação x é variável independente, podemos encontrar uma nova função que tenha como variável independente invés de x , $y = \frac{df}{dx}$, sem perder nenhuma informação da $f(x)$ original. Ela é dada pela equação (B.2).

Apêndice C

Expansão em loops

Em geral, exceto para teorias triviais, o conhecimento do potencial efetivo requer uma soma infinita dos diagramas de Feynman, o que se torna uma tarefa muito trabalhosa, inclusive além das nossas capacidades computacionais. Por isso é importante conhecermos um bom método de aproximação para V . Um desses métodos é a expansão em loops: primeiro somamos os gráficos sem loops fechados ("tree graphs"), depois com 1 loop, com 2 loops, etc. Em cada estágio dessa aproximação nos deparamos com uma soma infinita; mas estas são simples.

Ao introduzirmos o parâmetro \hbar dividindo uma Lagrangeana inteira, veremos que a expansão em loops é equivalente a uma expansão em série de potências do parâmetro \hbar . Ao efetuarmos esta alteração podemos escrever o funcional gerador Z da seguinte forma:

$$Z[J] = \exp \frac{W[J]}{\hbar} = \frac{\int D\phi \exp \left[-(1/\hbar) \int_x \left[\frac{\phi}{2} (\square + m^2) \phi + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 - J\phi \right] \right]}{\int D\phi \exp \left[-(1/\hbar) \int_x \left[\frac{\phi}{2} (\square + m^2) \phi + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right] \right]}. \quad (\text{C.1})$$

Com isto, os vértices (V) são multiplicados por um fator $1/\hbar$, os propagadores (I) por um fator \hbar e as linhas externas (E) por $1/\hbar$. A potência de \hbar associada aos gráficos será:

$$\hbar^{(I-V-E)}. \quad (\text{C.2})$$

Sabemos que o número de loops está relacionado com o número de linhas internas (I) e vértices por:

$$L = I - V + 1. \quad (\text{C.3})$$

Isto é assim porque o número de loops de um gráfico é igual ao número de integrações em momento independentes, e cada linha interna contribui com uma integração independente. Cada vértice contribui com uma função delta δ , que reduz o número de integrações por um,

exceto por uma função delta que é deixada para a conservação global de energia e momento.

Combinando (C.2) com (C.3), temos

$$\hbar^{(L-1-E)}.$$

Se pensarmos em termos da ação efetiva, os diagrama da expansão $(1/\hbar)\Gamma(\varphi)$ são os mesmos da expansão de $(1/\hbar)W(J)$, só que sem a contribuição de linhas externas. Ao consideramos $E = 0$ vemos que os termos da expansão de $(1/\hbar)\Gamma(\varphi)$ terão fatores em \hbar do tipo:

$$\hbar^{(L-1)} = (1/\hbar)(\hbar)^L. \tag{C.4}$$

E então fica simples de ver que na expansão de $\Gamma(\varphi)$ a potência de \hbar é igual ao número de loops. Para $\hbar = 0$ temos os diagramas tipo árvore ("tree diagrams"), que corresponde a aproximação clássica.

Apêndice D

PEG

Em [6] é apresentada a seguinte notação para as seguintes integrais:

$$I_N(\Omega) = \int (dp)_\Omega [w_p^2(\Omega)]^N, \quad (\text{D.1})$$

em que $w_p(\Omega) = (\vec{p}^2 + \Omega^2)^{1/2} = p^0$ é a parte temporal do quadri-vetor energia-momento p^μ , cuja parte espacial é $\vec{p}^2 = \vec{p} \cdot \vec{p}$. A medida de integração em d dimensões é:

$$(dp)_\Omega = \frac{d^d p}{(2\pi)^d 2w_p(\Omega)}.$$

De (D.1) pode-se deduzir que:

$$\frac{dI_N}{d\Omega} = (2N - 1) \Omega I_{N-1}. \quad (\text{D.2})$$

Desta forma temos, em 3 dimensões espaciais, para $N = 0$:

$$I_0(\Omega) = \int (dp)_\Omega = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2(p^2 + \Omega^2)^{1/2}}. \quad (\text{D.3})$$

Esta integral é quadraticamente divergente e corresponde ao valor esperado de ϕ^2 , o quadrado de um campo escalar. Ela é equivalente a seguinte integral no formalismo covariante:

$$I_0(\Omega) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 + \Omega^2}. \quad (\text{D.4})$$

A equação (D.3) pode ser obtida a partir da (D.4) ao realizarmos a integração na coordenada temporal.

A densidade de energia do vácuo de um campo escalar livre de massa Ω é dada pela seguinte integral, quarticamente divergente, num espaço de 3 dimensões:

$$I_1(\Omega) = \int (dp)_\Omega \omega_p^2(\Omega) = \int \frac{d^3p}{2(2\pi)^3} (p^2 + \Omega^2)^{1/2}, \quad (\text{D.5})$$

que é a soma das densidades de energias de ponto-zero em todos os modos de momento. Esta integral no formalismo covariante aparece na seguinte forma:

$$\frac{1}{2} \text{Tr} \ln[G^{-1}(x, y)]/\mathcal{V} = I_1(\Omega) = \frac{1}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \ln(p^2 + \Omega^2), \quad (\text{D.6})$$

em que \mathcal{V} é o volume no espaço-tempo do sistema físico. A equação (D.5) pode ser obtida a partir da (D.6) ao realizarmos a integração na coordenada temporal. Surge uma constante infinita que pode ser removida pela normalização da densidade de energia do vácuo.

Apêndice E

Prova da independência de Γ em ϕ_0

Ao identificarmos ϕ_0 com φ obtemos a vantagem de J ser da mesma ordem de δ ; no entanto pode-se chegar a esta mesma conclusão com qualquer ajuste para ϕ_0 . O que demanda muito mais trabalho. Vamos considerar o cálculo de Γ até uma dada ordem em δ com ϕ_0 arbitrário, porém fixo. Ao considerarmos λ , Ω e ξ constantes, como J é eliminado de Γ , este funcional depende apenas das variáveis φ e ϕ_0 , logo:

$$d\Gamma = \left. \frac{\partial \Gamma}{\partial \varphi} \right|_{\phi_0} d\varphi + \left. \frac{\partial \Gamma}{\partial \phi_0} \right|_{\varphi} d\phi_0. \quad (\text{E.1})$$

O segundo coeficiente de (E.1) é $-J$ segundo a construção da transformada de Legendre. Precisamos analisar melhor o primeiro coeficiente, que expressa a dependência de Γ em ϕ_0 . Sabemos que a fonte J é função de ϕ_0 e φ . Diferenciando Γ e mantendo a fonte J fixa, temos:

$$\left. \frac{\partial \Gamma}{\partial \phi_0} \right|_J = \left. \frac{\partial \Gamma}{\partial \phi_0} \right|_{\varphi} - J \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \phi_0} \right|_J. \quad (\text{E.2})$$

Como $\Gamma = \ln Z - J\varphi$ temos que

$$\left. \frac{\partial \Gamma}{\partial \phi_0} \right|_J = \frac{1}{Z} \left. \frac{\partial Z}{\partial \phi_0} \right|_J - J \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \phi_0} \right|_J. \quad (\text{E.3})$$

Comparando estas duas últimas equações vemos que a dependência de Γ em ϕ_0 é dada por

$$\left. \frac{\partial \Gamma}{\partial \phi_0} \right|_{\varphi} = \frac{1}{Z} \left. \frac{\partial Z}{\partial \phi_0} \right|_J. \quad (\text{E.4})$$

O funcional gerador Z é uma expansão em δ de

$$Z = \int \mathcal{D}\phi \exp \left[-\frac{1}{2}(\phi - \phi_0)G^{-1}(\phi - \phi_0) - \delta V(\phi) + J\phi \right], \quad (\text{E.5})$$

em que $(G^{-1})_{xy} = [-\partial^2 + (1-\delta)\Omega^2]\delta_{xy}$. Com isso, ao derivarmos Z em relação a ϕ_0 , mantendo J constante, obtemos a expressão para o valor esperado da quantidade $G^{-1}(\phi - \phi_0)$. Como $\varphi = \langle \phi \rangle$ temos então da (E.4):

$$\left. \frac{\partial \Gamma}{\partial \phi_0} \right|_{\varphi} = G^{-1}(\varphi - \phi_0). \quad (\text{E.6})$$

Para φ independente de x ,

$$\left. \frac{\partial \Gamma}{\partial \phi_0} \right|_{\varphi} = (1 - \delta)\Omega^2(\varphi - \phi_0). \quad (\text{E.7})$$

Daí podemos ver que só há alteração em Γ nas ordens zero e um em δ , os outros termos são independentes de ϕ_0 . Além disso, se $\delta = 1$ esta dependência desaparece. Ao considerarmos, por exemplo, $\phi_0 = 0$, até a primeira ordem em δ encontramos o mesmo resultado do cálculo com $\phi_0 = \varphi$. Isto ocorre pois há cancelamentos entre os termos de ordem 0 e 1 em δ . Vide [15] para mais detalhes.

Apêndice F

Efeito de realizar uma inserção de momento nulo

Considere uma teoria escalar livre, com uma Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{(\partial\varphi)^2}{2} - \frac{m^2\varphi^2}{2}. \quad (\text{F.1})$$

Podemos repensar o termo de massa como um termo de interação, quadrático no campo φ , associado a um vértice com constante de acoplamento m^2 . A figura mostra diagramaticamente o que ocorre ao inserirmos o termo de interação, $m^2\varphi^2/2$, de momento p nulo no propagador de partícula livre não massiva, $1/k^2$:

$$\frac{1}{k^2} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{k^2} \frac{1}{(k+p)^2} \begin{array}{c} \downarrow m^2, p \end{array}$$

Como $p = 0$ temos simplesmente:

$$\frac{1}{k^2} \frac{1}{k^2} \begin{array}{c} \downarrow m^2 \end{array}$$

Somando todas as contribuições, temos o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2} m^2 \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2} m^2 \frac{1}{k^2} m^2 \frac{1}{k^2} + \dots &= \frac{1}{k^2} \left(1 + \frac{m^2}{k^2} + \left(\frac{m^2}{k^2}\right)^2 + \left(\frac{m^2}{k^2}\right)^3 + \dots \right) \\ &= \frac{1}{k^2} \left(\frac{1}{1 - m^2/k^2} \right) \\ &= \frac{1}{k^2 - m^2}. \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

Vemos que recuperamos o propagador da partícula livre de massa m .

Referências Bibliográficas

- [1] H. Verschelde, J.de Pessemier, Eur. Phys. J. C22,771-779(2002), '*Study of the $O(N)$ linear σ model at finite temperature using the 2PPI expansion*'
- [2] J. Berges, arXiv:hep-ph/0409233 v1, (20 sep 2004) '*Introduction to Nonequilibrium Quantum Field Theory*'
- [3] H. Ryder, **Quantum Field Theory**, 2 ed., Cambridge University Press.
- [4] R. Greiner, **Field Quantization**, 1996, Springer.
- [5] C. Nash, **Relativistic Quantum Fields**, 1978, Academic Press.
- [6] P.M.Stevenson, Physical Review D, v32, n6, (1985) '*Gaussian effective potential. II. ϕ^4 field theory*'
- [7] P.M.Stevenson, I.Roditi, Physical Review D, v33, n8, (1986) '*Gaussian effective potential. III. ϕ^6 theory and bound states*'
- [8] J. Iliopoulos, C. Itzykson e A. Martin, Rev. Mod. Phys. 47, 165 (1975) '*Functional methods and perturbation theory*'.
- [9] Fabricio de Souza Amaral, tese de doutorado **O potencial efetivo Gaussiano e equações diferenciais parciais estocásticas**, 2007, CBPF.
- [10] M. Cornwall, R. Jackiw, E. Tomboulis, Physical Review D, v10, n8, (1974) '*Effective action for composite operators*'
- [11] P.M.Stevenson, Nuclear Physics B 231, 65-90 (1984) '*Optimization and the ultimate convergence of QCD perturbation theory*'
- [12] Y. Fujimoto, L. O'Raifeartaigh, G. Parravicini, Nuclear Physics B 212, 268-300 (1983) '*Effective potential for non-convex potentials*'
- [13] P.Cea, Physics Letters B 236, 191 (1990) '*Gaussian effective potential beyond the gaussian approximation*'

- [14] P.M.Stevenson, Physical Review D, v23, n12, (1981) '*Optimized perturbation theory*'
- [15] P.M.Stevenson, I.Stancu, Physical Review D, v42, n8, (1990) '*Second-order corrections to the Gaussian Effective potencial of $\lambda\phi^4$ theory*'
- [16] P.M.Stevenson, Physical Review D, v30, 1712, (1984) '*Gaussian effective potential: quantum mechanics*'
- [17] Peskin M.E., Schroeder D.V., **An Introduction to Quantum Field Theory**, 1995, Perseus.
- [18] H. Vershelde, Phys. Lett. B 497, 165 (2001) '*Summation and renormalization of bubble graphs to all orders*'
- [19] G.Smet, T. Vanzieleghem, K. Van Acoleyen e H. Vershelde, Physical Review D, vol 65, 045015 (2002) '*Two-Loop two-particle point irreducible analysis of $\lambda\phi^4$ theory at finite temperature*'
- [20] H. Vershelde, M. Coppens, Phys. Lett. B 287, 133 (1992) '*A variational approach to quantum field theory*'
- [21] S. Coleman, E. Weinberg, Phys.Review D, v7, n6, (1973) '*Radiative Corrections as the Origin of Spontaneous Symmetry Breaking*'
- [22] J.Goldstone, S.Weinberg, A.Salam, Phys. Review 127, (1962) 1888 '*Broken Symmetries*'
- [23] G. Jona-Lasinio, Nuovo Cimento 34 (1964) 1790 '*Relativistic field theories with symmetry-breaking solutions*'
- [24] P.M.Stevenson, B. Alles, R. Tarrach, Physical Review D, v35, 2407, (1987) '*O(N)-symmetric $\lambda\phi^4$ theory: The Gaussian-effective-potential approach*'
- [25] Denimar Possa, Flávio Pereira, José Alexandre Nogueira, Revista Brasileira de Ensino de Física, v.27, n.3, p.415-421 (2005)
- [26] Ernest S.Abers, Benjamin W.Lee, Physics Reports v9, (1975) '*Generating functionals for Green's functions and proper vertices*'
- [27] J.Baacke, S.Michalski, Physical Review D, vol. 70, Issue 8, (2004) '*Two-particle irreducible finite temperature effective potential of the O(N) linear sigma model in 1+1 dimensions at next-to-leading order of $1/N$* '

-
- [28] H.Vershelde, J.de Pessemier, Eur.Phys.J. C, Vol 22, pp. 771-779 (2002) '*Study of the $O(N)$ linear σ model at finite temperature using the 2PPI expansion*'
- [29] J.Smolic, M.Smolic, Eur.Phys.J. C, (2012) '*2PI effective action and evolution equations of $N=4$ super Yang-Mills*'