CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS
ICRA

Cosmologia Quântica de Campo Escalar com Potencial Exponencial

Daniel Wagner Fonteles Alves

Dissertação de Mestrado
Orientador: Prof. Dr. Nelson Pinto Neto
Rio de Janeiro
2015

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
ICRA

Cosmologia Quântica de Campo Escalar com Potencial Exponencial

Daniel Wagner Fonteles Alves

Banca Examinadora:

Dissertação de Mestrado
Orientador: Prof. Dr. Nelson Pinto Neto
Rio de Janeiro
2015

Resumo

Esta dissertação de mestrado consiste na análise da cosmologia clássica e quântica de universos dominados por um campo escalar, cujos potenciais são funções exponenciais do tipo $V = V_0 e^{-\lambda\sqrt{8\pi G}\phi}$. Tais modelos aparecem naturalmente em modelos de supergravidade, Kaluza-Klein, supercordas, entre outras além de produzirem comportamentos clássicos interessantes para o universo do ponto de vista da fenomenologia [23]. Revisamos o comportamento clássico do sistema, e desenvolvemos a análise da cosmologia quântica desse modelo usando a interpretação de de Broglie-Bohm da mecânica quântica. Mostramos que, em geral, efeitos quânticos não conseguem eliminar a singularidade, mas que é possível construir modelos onde ocorre um ricochete.

Agradecimentos

- Agradeço primeiramente à minha Família, por me dar base e me apoiar em todos os momentos e em todas as decisões. À vocês, devo tudo que sou.
- Agradeço à Luciana, por todo o amor, paciência, carinho e amizade.
- Agradeço ao professor Nelson Pinto Neto pela forma clara que conduziu a orientação deste trabalho.
- Agradeço ao Diego Pantoja, pelas longas discussões e horas trabalhando juntos em busca da solução às questões apresentadas nessa dissertação.
- Agradeço aos professores Sebastião Alves Dias e José Helayel por cursos de alto nível e pela imensa paciência e apoio em diversas situações.
- Agradeço aos companheiros Luis Rodolfo, Célio Marques, Jeovani Brandão, Cristhofer Zuñiga, Laís Lavra, Arthur Scadua, Zack Barnes, Tiago Celaro, Pedro Costa, Antônio e José pela valiosa amizade durante esses anos no Rio e por discussões.
- Agradeço ao CNPQ pela bolsa de estudos.
- Agradeço a todos os funcionários e professores do ICRA por todo o apoio.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Hoje somos capazes de entender o universo e quase todos os fenômenos que observamos usando um arcabouço conceitual e quantitativo bem definido: as teorias da relatividade geral (RG) e a mecânica quântica (MQ). Em última instância, todos os fenômenos físicos parecem poder ser explicados a partir dessas duas teorias. A mecânica quântica explica com incrível precisão do comportamento de partículas elementares (com a teoria quântica de campos) à moléculas, passando até por alguns sistemas macroscópicos especiais. A teoria da relatividade geral explica a estrutura do espaço-tempo, resultando no grande sucesso da emergência da cosmologia como ciência no século XX, entre muitos outros. Ambas as teorias têm como limite clássico a mecânica newtoniana.

Apesar de bem sucedido, nosso esquema de entendimento da natureza é imperfeito. Além da série de fenômenos que não encontram explicação definitiva dentro da física moderna, como a energia escura e matéria escura, parecem haver inconsistências dentro das próprias teorias da RG e MQ, o que leva a crer que há uma teoria mais fundamental que as tem como limite. Por um lado, os teoremas de singularidade de Penrose-Hawking [1] mostram que o espaço-tempo sempre terá uma singularidade para configurações de matérias razoáveis, onde a densidade de energia e curvatura devem divergir. Em tal ponto, não é possível aplicar a física que conhecemos. Além disso, o papel da observação na mecânica quântica permanece nebuloso [2]. Muitos cientistas se mostram desconfortáveis com a não-unitariedade do colapso da função de onda.

Boa parte desses problemas permaneceu pouco estudado por gerações.

De fato, as maiores aplicações da MQ e da RG não necessitam de esclarecimentos conceituais como o papel da observação, ou a presença de singularidades.

Esse panorama tem mudado nas últimas décadas. A atenção dos físicos tem se voltado a situações em que ambas as teorias da MQ e da RG devem tornam-se importantes, principalmente singularidades do espaço-tempo. Por argumentos dimensionais, espera-se que em escalas de energia muito altas e comprimentos muito curtos, uma teoria unificada seja necessária para explicar corretamente a natureza. Nesse ponto, todos os empecilhos conceituais da MQ e RG vêm à tona e tornam-se cruciais para o entendimento do problema.

No entanto, as duas teorias são incompatíveis. Tentar descrever como um fluido quântico determina a geometria do espaço-tempo ou tentar criar uma teoria quântica de campos para a gravitação como é feito com as outras interações rapidamente mostra-se muito difícil; chega-se a dificuldades conceituais e técnicas formidáveis como o paradoxo da perda de informação, não renormalizabilidade da teoria quântica, problema do tempo, entre outros [3]. Entre as muitas tentativas, incluem-se a gravitação quântica em laços, teoria de super-cordas, triangulações dinâmicas causais, além de muitas outras. Uma das razões para a proliferação das teorias de gravitação quântica é a falta de dados observacionais: até o presente momento, não tivemos um sinal claro de um fenômeno que envolvesse ao mesmo tempo a relatividade geral e a mecânica quântica. Entretanto, há fortes razões teóricas para a proposição de que deva haver uma teoria de gravitação quântica regendo fenômenos em situações extremas, como em singularidades do espaço-tempo.

Nesse trabaho, iremos estudar a cosmologia quântica, que nada mais é que o estudo do universo como um todo usando os métodos e paradigmas da mecânica quântica. Isso nos forçará a levar a RG e MQ ao extremo, expondo seus conceitos díspares e problemas conceituais, que muitas vezes podem ser ignorados em aplicações cotidianas. Iremos utilizar uma formulação de gravitação quântica baseada na equação de Wheeler-deWitt. Essa certamente não é a palavra final no assunto, uma vez que teorias muito mais complexas e completas, como por exemplo a teoria de cordas, fornecem um panorama completamente diferente do mundo na escala de Planck. Além disso, há diversos problemas matemáticos e conceituais. Entretanto, a equação de Wheeler-deWitt tem um limite semi-clássico bem definido e que concorda com a relatividade geral e mecânica quântica em espaços curvos, algo que não está claro nas outras formulações de gravidade quântica. É razoável esperar que a equação de Wheeler-deWitt seja válida ao menos numa escala intermediária entre a física que conhecemos, e a "verdadeira"gravitação quântica [4].

Vamos modelar o conteúdo de matéria do universo, usando os chamados modelos de minisuperespaço, onde os infinitos graus de liberdade da teoria são reduzidos a um número finito. O conteúdo de matéria será modelado com um campo escalar de potencial exponencial, motivado por trabalhos em teorias de cordas, supergravidade, entre outros. Iremos estudar a presença de singularidades nesse modelo, checando se efeitos quânticos podem evitá-las. Com isso, pretendemos obter um maior entendimento não só sobre o universo primordial, mas também sobre a MQ e RG.

Capítulo 2

Relatividade Geral

O conceito central por trás da relatividade é o fato de que espaço e tempo formam uma geometria quadridimensional, conhecida como espaço-tempo. Isso é análogo a noção intuitiva de geometria que temos no espaço euclidiano usual.

Por exemplo, imaginemos duas pessoas numa sala, numa situação onde os efeitos da relatividade não são aparentes. Estes dois observadores assinalarão coordenadas diferentes a dois pontos quaisquer dessa sala. Entretanto, suas medidas não são independentes: as relações geométricas entre os pontos da sala não muda com a mudança de referencial, muito embora a descrição (coordenadas (x, y, z)) mude. Ou seja, a distância entre os dois pontos d calculada por qualquer um dos referenciais é a mesma, e não há um observador preferencial.

Temos uma situação análoga na relatividade especial: diferentes observadores inerciais assinalam valores diferentes de duração de tempo e localização espacial (x, y, z, t) para os mesmos eventos. Embora as descrições sejam diferentes, as relações geométricas deste espaço quadridimensional não dependem do referencial: o intervalo espaço-temporal,

$$s^2 = -c^2\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2, \tag{2.1}$$

medido entre dois eventos é invariante. Todos os referenciais inerciais são igualmente válidos, não há um referencial privilegiado. A partir daí é possível construir uma dinâmica relativística nesse espaço quadridimensional, que tem como limite a mecânica newtoniana usual [5].

Entretanto, a situação torna-se sutil quando gravitação está envolvida. Através de argumentos extremamente elegantes, Einstein propôs que não deva haver uma força gravitacional, pois um objeto que cai num campo gravitacional não consegue distinguir seu movimento de queda livre de um movimento inercial, localmente. A conclusão de Einstein, inspirado no princípio de Mach e na filosofia positivista que ganhava força na época [6], foi que o movimento de queda livre deve ser inercial, e que a geometria do espaço-tempo ao redor de fontes do campo gravitacional é que deve ser alterada de modo a produzir as aparentes forças gravitacionais que medimos intuitivamente. Localmente, o espaço-tempo deveria reter a mesma simetria da relatividade especial.

O modelo matemático que melhor descreve esses conceitos é o de uma "variedade"[7]. A grosso modo, uma variedade é um conjunto topológico dotado de mapas locais dos pontos da variedade para um conjunto do $\mathbb{R}^n$, para algum n inteiro. Os eventos do espaço-tempo correspondem aos pontos da variedade, que são mapeados localmente num conjunto (x, y, z, t). O mapa, portanto, corresponde a uma escolha de coordenadas. A partir daí, podemos construir diversos objetos geométricos como tensores, curvas e funções, que serão interpretados como grandezas físicas. Impomos também que a variedade seja dotada de um tensor métrico $g_{\mu\nu}$ para que possamos definir uma noção de distância. A relatividade geral é construída de modo que localmente, a métrica seja a de Minkowski, o que garante a invariância do intervalo s. Porém, globalmente, efeitos de curvatura podem existir, e usaremos isso para representar o campo gravitacional.

A lei que relaciona o conteúdo de matéria a geometria do espaço-tempo é a equação de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{Rg_{\mu\nu}}{2} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{2.2}$$

onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento, e G é a constante gravitacional de Newton, e assumimos unidades em que a velocidade da luz, c, é igual a 1. Essas equações podem também ser derivadas de um princípio variacional

$$\delta S = \frac{1}{16\pi G}\delta(\int d^4x\sqrt{-g}R + S_M) = 0, \tag{2.3}$$

onde S_M é a ação do conteúdo de matéria do sistema em estudo.

Vamos agora investigar uma solução das equações de Einstein muito especial: o espaço-tempo de Friedmann-Robertson-Walker.

2.1 A métrica de Friedmann-Robertson-Walker

Olhe para sua esquerda com atenção. Agora para sua direita. Provavelmente as duas imagens vistas não são iguais: não há nenhuma simetria nas duas direções. Mas a medida que olhamos mais e mais longe, parece que as inomogeneidades tendem a diminuir. De fato, observações mostram que em escalas de centenas de Mpcs, de fato, o universo parece ser homogêneo e isotrópico em seu conteúdo de matéria, ao menos em um referencial especifico (esse referencial pode ser definido na prática a partir da radiação cósmica de fundo). Denominamos esse referencial de *comóvel*. Nenhum ponto do espaço é especial para um observador comóvel: existe uma simetria translacional (homogeneidade) e rotacional (isotropia) quanto ao conteúdo de aglomerados de galáxias do universo [8].

Além da homogeneidade e isotropia, as observações apontam que o universo está se expandindo. O que isso quer dizer é que a distância entre quaisquer dois pontos no universo está crescendo com o tempo. Como poderíamos matematizar essas observações?

Vamos requerer que nosso espaço-tempo possa ser dividido em uma família de seções espaciais Σ_t indexadas por um parâmetro t e que juntas compõe a variedade: $M = \bigcup\limits_{t\in\mathbb{R}} \Sigma_t$ (na seção 8 iremos abordar essa "folheação"do espaço-tempo de forma muito mais rigorosa). As seções espaciais tem geometria própria, como curvatura e métrica. 3-espaços homogêneos e isotrópicos tem curvatura constante, e portanto, há somente três possibildades para o valor da curvatura: positivo, negativo ou nulo. Como a curvatura é um escalar, o sinal dela não muda por mudanças de coordenada. O caso mais simples é o 3-espaço de curvatura nula, que nada mais é que o espaço euclideano usual

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{2.4}$$

Um 3-espaço com curvatura positiva pode ser representado como uma esfera tridimensional imersa num espaço euclideano quadridimensional,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + du^2, \tag{2.5}$$

onde

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = a^2. \tag{2.6}$$

E um 3-espaço com curvatura negativa pode ser representado como um hiperbolóide imerso num espaço lorentziano quadridimensional $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - du^2$ onde vale o vínculo $x^2 + y^2 + z^2 - u^2 = a^2$.

Para os últimos dois casos, note que

$$\begin{aligned} d(x^2 + y^2 + z^2 \pm u^2) &= d(a^2) \\ 2xdx + 2ydy + 2zdz \pm 2udu &= 0 \\ udu &= \mp(xdx + ydy + zdz) \\ du^2 &= \frac{(xdx + ydy + zdz)^2}{u^2}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Portanto, para os casos de curvatura positiva ou negativa, temos

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \pm \frac{(xdx + ydy + zdz)^2}{a^2 \mp (x^2 + y^2 + z^2)}. \tag{2.8}$$

Redefinindo $x \to ax$ e combinando os termos, chegamos a

$$ds^2 = a^2 \gamma_{ij} dx^i dx^j, \tag{2.9}$$

onde

$$\gamma_{ij} = \delta_{ij} + k \frac{x_i x_j}{1 - k(x_k x^k)}, \tag{2.10}$$

onde $k = 0$ para espaços planos, $k = 1$ para espaços esféricos e $k = -1$ para espaços hiperbólicos. Em coordenadas polares temos uma expressão mais simples

$$ds^2 = a^2 [\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2)]. \tag{2.11}$$

Portanto, em um espaço-tempo com seções espaciais isotrópicas e homogêneas, a métrica necessariamente tem a forma

$$ds^2 = c^2 dt^2 + a^2 [\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2)]. \tag{2.12}$$

Note que a pode ser uma função do tempo $a(t)$. Essa métrica é conhecia como métrica de Friedmann-Robertson-Walker, e descreve a geometria do universo em largas escalas.

Vamos agora olhar o lado direito das equações de Einstein, ou seja, o tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$. Para um observador comóvel, não há direções preferenciais no universo. Portanto, os vetores T_{0i} e T_{j0} devem ser nulos. Além disso, o escalar T_{00} deve ser uma função somente do tempo devido a homogeneidade. Por último, a condição de isotropia força T_{ij} a ser proporcional g_{ij}. Juntos esses argumentos resultam que para um espaço-tempo com seções espaciais isotrópicas e homogêneas, necessariamente temos que ter [9]

$$T_{\mu\nu} = (\rho(t) + p(t))U_\mu U_\nu - p g_{\mu\nu}, \tag{2.13}$$

onde U_μ é a quadrivelocidade do fluido medido por um certo observador. Esse é o tensor-energia momento de um fluido perfeito. Note que essa forma para $T_{\mu\nu}$ é consequência unicamente da geometria do universo em largas escalas que observamos. Os graus de liberdade são as funções $\rho(t)$ e $p(t)$.

Calculando as equações de Einstein para o tensor energia momento de um fluido perfeito e impondo que a métrica tenha a forma homogêna e isotrópica de FRW, chegamos as chamadas equações de Friedmann [8]

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} \tag{2.14}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + 3p\right). \tag{2.15}$$

Onde fizemos $c = 1$ e assumimos que o universo seja plano. Combinando as equações acima, chegamos a

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + p). \tag{2.16}$$

Para fechar o sistema, é preciso de uma terceira equação relacionando p e ρ, que chamaremos de "equação de estado". Para fluidos que satisfaçam critérios físicos razoáveis ($\rho > 0, p \geq -\frac{\rho}{3}$) é possível mostrar que todas as possíveis soluções tem uma singularidade em $a = 0$, onde a densidade de energia e curvatura divergem [1].

Porém a medida que nos aproximamos da singularidade e os comprimentos e energias passam a ter valores próximos aos comprimentos e energias de Planck, efeitos quânticos devem tornar-se relevantes (outras possíveis saídas ao problema seria supor que condição de energia forte não é válida ou que as equações de Einstein são equações efetivas de uma teoria de gravitação que não possui singularidades). O ponto de retorno, onde a velocidade de expansão do universo muda de sinal para longe da singularidade é conhecido como "ricochete". Iremos estudar quantitativamente como pode-se obter um ricochete a partir de efeitos quânticos em um modelo concreto.

Capítulo 3

Mecânica Quântica

A teoria quântica é um dos pilares da física moderna. Motivada por problemas teóricos com o eletromagnetismo e mecânica estatística como conhecidos na época, Planck introduziu pela primeira vez, no final do século XIX, o conceito de quantum como a unidade mínima de energia radiada por um oscilador harmônico em uma determinada frequência. Pouco depois, a complexa e abstrata teoria da mecânica quântica foi formulada matematicamente em todo seu rigor por Dirac, Hilbert, Schroedinger, Heinseberg e outros. Os postulados da mecânica quântica [10] de uma única partícula sem spin são os seguintes:

-O estado do sistema é dado por um ket $|\psi\rangle$ normalizado que pertence a um espaço de Hilbert

-A toda quantidade física observável corresponde um operador auto-adjunto $\hat{O}$

-Os únicos resultados possíveis de uma medição de primeira espécie um observável qualquer $\hat{O}$ são dados pelos autovalores de $\hat{O}$.

-A probabilidade do resultado da medida ser um auto-valor específico α_n é dado por

$$p(a_n) = \langle\psi| P_n |\psi\rangle . \tag{3.1}$$

Onde P_n é o projetor no sub-espaço gerado pelos auto-vetores com auto-valor α_n.

-A evolução do sistema no tempo é dada pela equação de Schroedinger

$$i\hbar\frac{d|\psi\rangle}{dt} = \hat{H}|\psi\rangle , \tag{3.2}$$

onde $\hat{H}$ é o operador Hamiltoniano.

-Após uma medida de um observável $\hat{A}$ ser efetuada, com resultado a_n, o sistema colapsa instantâneamente para o estado

$$|\psi\rangle = \frac{P_n |\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi| P_n |\psi\rangle}}. \tag{3.3}$$

Note que a teoria quântica é, nessa formulação, inerentemente probabilística: não existe o conceito de trajetória. Apesar da função de onda seguir uma lei de movimento determinística, os resultados da medição de qualquer observável físico só podem ser dados como probabilidades.

Existem diversas formas de se passar de uma teoria clássica para sua teoria quântica correspondente. A quantização canônica é um método direto, onde as coordenadas de um sistema $q(t)$ e seus momenta conjugados $p(t)$ são promovidos a operadores auto-adjuntos agindo num espaço de Hilbert satisfazendo a relação de comutação

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar. \tag{3.4}$$

O ferramental matemático acima é bem definido e teve tremendo sucesso experimental. Note no entanto que parece haver um paradoxo. A função de onda obedece a duas leis de evolução. A primeira, equação de Schroedinger, é uma equação diferencial parcial linear em $|\psi\rangle$: pode-se mostrar que o módulo $\langle\psi\,|\psi\rangle = 1$ é conservado no tempo. Diz-se que a evolução é *unitária.* Já quando uma medição é realizada, o sistema deixa de ser governado pela eq. de Schroedinger e colapsa instantâneamente para $\frac{P_n|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|P_n|\psi\rangle}}$. Porém uma observação nada mais é que uma interação física,que deveria ter um operador Hamiltoniano associado. Porque então a evolução deixa de respeitar a equação de Schroedinger?

A saída da *interpretação de Copenhaguen* é supor que o mundo deve ser dividido em clássico e quântico: uma medição ocorre quando um aparato clássico, por exemplo um voltímetro, interage com um sistema quântico.

No entanto, há sérios problemas com essa interpretação ao tentar generalizá-la para a cosmologia. Mais adiante, iremos tentar quantizar a relatividade geral para descrever o universo como um sistema quântico. Mas o universo é um sistema fechado: não pode haver um aparato clássico fora do mesmo para fazer medições. Temos que encontrar uma outra forma de interpretar os postulados da mecânica quântica, e possivelmente, modificá-la para tornar o caso da cosmologia quântica tratável.

Temos portanto, dois arcabouços conceituais completamente distintos para explicar a natureza: por um lado a relatividade geral, cuja geometria de fundo é dinâmica e segue leis de movimento bem definidas, mas que produz singularidades para fluidos que satisfazem condições físicas razoáveis, e a mecânica quântica, que é uma teoria com geometria de fundo euclidiana e estática, mas com problemas de interpretação quando aplicada ao universo como um todo. Nas próximas seções, iremos colocar as duas teorias numa forma mais compatível de modo a propor uma teoria de gravitação quântica, ainda que aproximada, e aplicarmos essa teoria ao universo como um todo.

3.1 Teoria de Hamilton-Jacobi

Vamos começar colocando a mecânica de Newton num formalismo que será extremamente útil mais adiante. No formalismo Hamiltoniano, temos as equações de movimento [11]

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{3.5}$$

Por serem equações diferenciais lineares de 1^o ordem, vemos que um único ponto no espaço de fase determina unicamente a solução

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(q_i^0, p_i^0, t) \\ p_i &= p_i(q_i^0, p_i^0, t), \end{aligned} \tag{3.6}$$

onde (q_i^0, p_i^0) são condições iniciais do problema. A idéia que motiva a introdução da teoria de Hamilton-Jacobi é a seguinte: seria possível inverter (3.6) e fazer de (q_i^0, p_i^0) (ou funções de (q_i^0, p_i^0)) as coordenadas do sistema? Uma transformação canônica no espaço de fase

$$\begin{aligned} Q_j &= Q_j(q_i, p_i, t) \\ P_j &= P_j(q_i, p_i, t), \end{aligned} \tag{3.7}$$

satisfaz

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial q_i} \tag{3.8}$$

para alguma função $K = K(Q, P, t)$. As equações de movimento podem em ambos os casos ser derivadas de um princípio variacional

$$\delta \int P_i \dot{Q}_i - K(Q, P, t)dt = 0 \tag{3.9}$$

$$\delta \int p_i \dot{q}_i - H(q, p, t)dt = 0.$$

Como há uma relação entre as novas e antigas coordenadas, para que as duas equações acima sejam válidas é preciso que

$$\lambda(p_i \dot{q}_i - H(q, p, t)) = P_i \dot{Q}_i - K(Q, P, t) + \frac{dF}{dt}, \tag{3.10}$$

onde λ é um número real (que pode ser feito igual a 1 sem perda de generalidade) e F é uma função que pode depender em geral das antigas e novas coordenadas.

Agora, como supomos que as novas coordenadas do sistema são as condições inciais ou funções delas, elas são necessariamente constantes no tempo. Portanto,

$$K(Q, P, t) = 0. \tag{3.11}$$

Vamos assumir que F é função de (q, Q, t). Então

$$p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) = P_i \dot{Q}_i + \frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial Q_i}\dot{Q}_i + \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{3.12}$$

Agrupando termos iguais, temos

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i} \tag{3.13}$$

$$P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i} \tag{3.14}$$

e

$$H(q_i(t), \frac{\partial F}{\partial q_i}, t) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0. \tag{3.15}$$

A equação (3.15) é conhecida como equação de Hamilton-Jacobi. Note que dada uma hamlitoniana H, para um sistema com n graus de liberdade, essa é uma equação diferencial parcial de 1^o ordem em (n+1) variáveis para a função F, conhecida como função principal de Hamilton. Resolvendo, devemos achar

$$F = F(q_i, \alpha_1, \alpha_2 ... \alpha_n, \alpha_{n+1}, t). \tag{3.16}$$

No entanto, uma dessas constantes arbitrárias deve ser uma constante aditiva (visto que somente derivadas de F aparecem na equação de Hamilton-Jacobi. Escolhendo $\alpha_{n+1} = 0$ temos

$$F = F(q_i, \alpha_1, \alpha_2 ... \alpha_n, t) \tag{3.17}$$

Podemos identificar os α_i como as condições iniciais $Q_i = q_i(0)$ ou com funções delas: o mais importante é notar que α_i são constantes no tempo: $\alpha_i = \alpha_i(q_j(0)) = \alpha_i(Q_1, ...Q_n)$. De posse de uma solução para F, podemos usar as equações (3.13) e chegarmos a expressões

$$\begin{aligned} p_i &= p_i(q_i, \alpha_1, \alpha_2 ... \alpha_n, t) \qquad (3.18) \\ P_i &= P_i(q_i, \alpha_1, \alpha_2 ... \alpha_n, t) = constante. \end{aligned}$$

Usando as relações (3.7) e invertendo o que for preciso, chegamos finalmente a soluções

$$\begin{aligned} p_i &= p_i(Q, P, t) \qquad (3.19) \\ q_i &= q_i(Q, P, t), \end{aligned}$$

onde Q, P são constantes. A equação acima envolve $2n$ constantes arbitrárias. É possível mostrar que ela é a solução geral das equações de movimento, contato que o determinante da matriz Hessiana de F seja diferente de zero.

Vamos usar o formalismo de Hamilton-Jacobi para mostrar que, introduzindo uma varável escondida na mecânica quântica, esta torna-se surpreendentemente próxima a mecânica clássica.

3.2 Interpretação de de Broglie-Bohm da mecânica quântica

Considere a equação de Schroedinger em representação de coordenadas:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}. \tag{3.20}$$

Vamos expressar ψ em sua forma polar: $\psi = R(\vec{x}, t)e^{\frac{i}{\hbar}S(\vec{x},t)}$ onde R e S são funções reais. Substituindo na equação de Schoedinger e separando as partes real e complexa obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2 R}{R} &= 0 \qquad (3.21) \\ \frac{\partial R^2}{\partial t} + \nabla.(R^2\frac{\nabla S}{m}) &= 0. \end{aligned}$$

Note que a primeira equação acima é muito parecida com a equação de Hamilton-Jacobi, para uma hamiltoniana do tipo $\frac{P^2}{2m} + V$. A diferença está no termo extra $\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2 R}{R}$, conhecido na literatura como potencial quântico, Q. No limite $Q \rightarrow 0$ a equação é exatamente a equação de Hamilton-Jacobi da mecânica clássica. A segunda equação tem a forma de uma equação de continuidade para R^2, que na verdade é igual a equação de continuidade para a densidade de probabilidade amplamente conhecida:

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} + \nabla.(R^2\frac{\nabla S}{m}) = \frac{\partial R^2}{\partial t} - \frac{i\hbar}{2m}\nabla.(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) = 0. \quad (3.22)$$

Motivados por essa similaridade , vamos interpretar a mecânica quântica de forma completamente diferente e aproximá-la da mecânica clássica. A interpretação de de Broglie-Bohm da mecânica quântica segue os seguintes postulados

- Um sistema físico é composto de uma partícula que segue uma trajétoria no espaço tempo e uma onda associada.
- A onda é representada pela função $\psi(\vec{x}, t)$ que é solução da equação de Schroedinger .
- As trajetórias do sistema são dadas pelas soluções de

$$\frac{d}{dt}(\vec{x}) = \frac{1}{m}\nabla S(\vec{x}, t), \quad (3.23)$$

onde S é a fase da solução da equação de Schroedinger. Note que esses postulados poderiam quase que perfeitamente reproduzir a mecânica de Newton, se S fosse a solução da equação de Hamilton-Jacobi clássica. No entanto, S é a fase da função de onda que aparece na equação de Schroedinger, que como vimos satisfaz a equação de Hamilton-Jacobi acrescida de um fator de ordem $\hbar^2 : \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2 R}{R} = 0$.

Essa teoria não envolve o conceito de probabilidade: as partículas tem trajetórias e momenta definidos simultaneamente, embora não possamos conhecê-los (mais detalhes sobre como probabilidades surgem nessa teoria, abaixo). Para resolver a equação (3.23) precisamos especificar três condições de contorno $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ que constituem a posição inicial da partícula.

Com um último postulado, modificação do postulado de Born, conseguimos explicar todos os efeitos probabilísticos da mecânica quântica:

- A probabilidade de que uma partícula num ensemble esteja (independente de observação) entre $\vec{x}$ e $\vec{x} + d\vec{x}$ no tempo té $R^2(\vec{x}, t)d^3x$

A teoria composta pelos 4 postulados acima é equivalente a mecânica quântica: ela explica todos os fenômenos da quânticos já observados até hoje [12]. Ainda que introduza uma visão de mundo completamente diferente, os resultados dessa abordagem são os mesmos da escola de Copenhaguen, ao menos para todos os experimentos realizados até hoje. Trata-se portanto de uma "interpretação"da mecânica quântica, conhecida como interpretação de de Broglie-Bohm. Todas os experimentos bizarros como o de dupla-fenda, superposição e comportamentos como o princípio de incerteza de Heisenberg podem ser entendidos usando esse arcabouço conceitual. A "esquisitice"da mecânica quântica, portanto, não é necessária: podemos manter uma visão de mundo muito mais próxima a clássica se assim desejarmos.

A teoria no entanto acrescenta uma variável para a qual não temos acesso experimental: a posição inicial $\vec{x}_0$. Portanto, a função de onda ψ não representa todo o conhecimento que podemos ter sobre o sistema (como ocorre na interpretação de Copenhaguen). Por outro lado, a observação nessa teoria não gera colapso da função de onda: ψ sempre segue a equação de Schroedinger e as partículas guiadas pela função de onda tem posição $\vec{x}$ independente de observações.

Além disso, foram dadas indicações [12] que o postulado 4 pode ser dispensado. Considere um ensemble para o qual a probabilidade P de se achar uma partícula entre $\vec{x}$ e $\vec{x} + d\vec{x}$ no tempo t é diferente de $R^2(\vec{x}, t)d^3x$.Então é possível mostrar que, guiadas pelas equações de movimento (3.23), as partículas irão se agrupar de modo que $P \to R^2(\vec{x}, t)d^3x$ em intervalos de tempo muito curtos. Diz-se que será atingido o "equilíbrio quântico".

Há a possibilidade de encontrar resquísicios de desvios de $P = R^2(\vec{x}, t)d^3x$ a partir de sinais emitidos no universo primordial [14]. Experimentos podem nos orientar a decidir qual é a forma correta de se interpretar a mecânica quântica: na interpretação de Copenhaguen, $P = R^2(\vec{x}, t)d^3x$ é um postulado e não pode ser falso. Existem também tentativas de deduzir o postulado de Born através de outras interpretações, como a interpretação de muitos mundos [15].

Queremos quantizar a relatividade geral e aplicá-la a todo o universo, obtendo resultados a partir da interpretação de de Broglie-Bohm. Para isso, precisamos primeiro definir uma teoria de gravitação quântica. Daremos os primeiros passos a seguir.

Capítulo 4

Formalismo 3+1:Geometrodinâmica

4.1 Introdução

É possível colocar a relatividade geral numa forma conveniente, e interpretá-la como uma teoria de 3-tensores evoluindo no tempo para um certo observador. Para isso, vamos nos restringir a espaço-tempos com topologia Σ x $\mathbb{R}$. Considere uma variedade M 4-dimensional. Assuma que temos um campo escalar t definido para todo M. Definimos uma hipersuperfície de M, Σ , como um *conjunto de pontos* de M da seguinte forma: para todo $p \in M, p \in \Sigma \Longleftrightarrow t(p) = c \in \mathbb{R}$. Note que qualquer campo escalar não-nulo definido em toda variedade pode ser usado para essa definição.

Podemos notar também que o conjunto de pontos Σ forma uma variedade 3-dimensional. Por exemplo, suponha que M tenha coordenadas locais $x^\alpha = (x, y, z, t)$. Vamos usar a própria coordenada t como campo escalar para definição de Σ. Então, para um dado t,o conjunto de pontos Σ pode ser parametrizado pelas coordenadas $x'^i = (x, y, z)$ e forma uma variedade tridimensional.

Para espaço-tempos com topologia Σ x $\mathbb{R}$, pode-se mostrar que podemos construir toda a variedade através da união de hipersuperfícies $\{\Sigma_t\} : M = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \Sigma_t$. Assim, cada hipersuperfície está associada a um "instante de tempo" para um dado observador. Em cosmologia, fazemos esse observador ser o observador comóvel (aquele para o qual as seções espaciais tem geometria homogênea e isotrópica).

De fato, o espaço-tempo de FRW é um exemplo de variedade folheada em hipersuperfícies cuja geometria é "do tipo-espaço". Mais adiante iremos formalizar melhor esses conceitos.

A ação da relatividade geral no vácuo, é

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}^4R. \tag{4.1}$$

Para interpretar a teoria como uma teoria dinâmica para a 3-geometria do espaço, temos que folhear o espaço-tempo num conjunto de hipersuperfícies e decompor

$$\sqrt{-g}^4R \rightarrow F(^3X), \tag{4.2}$$

onde $F(^3X)$ é uma função de tensores definidos a partir da geometria de cada hipersuperfície. Iremos então passar para o formalismo Hamiltoniano. Para executar essa decomposição, iremos estudar a geometria de M e Σ, e como as duas estão relacionadas. Iremos seguir [16].

4.2 Definições Básicas

Intuitivamente, esperamos que haja uma relação estreita entre as geometrias de M e Σ. Por exemplo, considere como M um cilindro, folheado em hipersuperfícies Σ circulares (suas seções transversais). Podemos construir curvas, vetores, formas em Σ, que também serão curvas,vetores e formas em M. Se o cilindro tem uma métrica bem definida (uma noção de distância entre dois pontos), essa métrica pode ser "projetada"sobre as seções transversais para dar uma noção de distância entre quaisquer dois pontos da seção transversal. De fato, usando coordenadas cilíndricas, para quaisquer dois pontos de do cilindro, a distância entre eles é dado por

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2d\theta^2. \tag{4.3}$$

Enquanto a distância entre quaisquer dois pontos na hipersuperfície é

$$ds^2 = dr^2 + r^2d\theta^2. \tag{4.4}$$

Vamos formalizar esses conceitos a seguir. Vamos assumir a variedade M como uma variedade 4-dimensional, com métrica g, e uma conexão compatível $\nabla g = 0$.

Para extrair a geometria de Σ, temos que definir mapas entre Σ e M. Vamos definir uma *imersão* $\Phi : \Sigma \to M$ como um mapa 1-1 inversível e contínuo entre as variedades Σ e M, levando ponto de Σ a seus respectivos em M. Por exemplo,

$$\Phi(x, y, z) \to (x, y, z, t) \tag{4.5}$$

Como a imersão leva pontos de Σ a pontos de M , ela pode ser usada para levar curvas de Σ a curvas de M, e portanto vetores de Σ a vetores de M. Ou seja, dada uma imersão, haverá um mapa Φ_* entre $T_p(\Sigma)$ e $T_p(M)$ conhecido como "push-foward". Num sistema particular de coordenadas em que t define a hipersuperfície, a ação do "pushfoward"em um vetor de Σ pode ser explicitada como:

$$\Phi_*(v_x, v_y, v_z) \to (0, v_x, v_y, v_z). \tag{4.6}$$

Além disso, um outro mapa entre $T_p^*(M)$ e $T_p^*(\Sigma)$ pode ser naturalmente definido com Φ. Definimos o "pull-back"Φ^*de uma forma qualquer em M como o funcional que associa a cada vetor de $\Sigma, \bar{v}$, um número real da seguinte forma:

$$\Phi^*(\tilde{\omega}(\bar{v})) = \tilde{\omega}(\Phi_*(\bar{v})), \tilde{\omega} \in T_p^*(M), \bar{v} \in T_p(\Sigma), \tag{4.7}$$

ou, em coordenadas,

$$\Phi^*(\omega_t, \omega_x, \omega_y, \omega_z) \to (\omega_x, \omega_y, \omega_z). \tag{4.8}$$

Esses mapas entre Σ e M serão de extrema importância para identificarmos como a hipersuperfície está “imersa” na variedade: uma hiper-superfície tem seus objetos geométricos próprios como vetores, formas e tensores, que guardam uma relação com os objetos geométricos de M. Quando estudarmos cosmologia quântica, hipersuperfícies serão identificados com o 3-espaço habitual em um instante de tempo visto por um observador cuja métrica é homogênea e isotrópica enquanto a variedade será identificada com o próprio espaço-tempo.

A variedade M possui uma métrica g por suposição. Podemos usar o pullback para definir uma métrica γ em Σ :

$$\Phi^*(g_{\mu\nu}) \to (g_{ij}) \equiv \gamma_{ij}. \tag{4.9}$$

Pode-se mostrar que Σ tem uma conexão própria satisfazendo $D\gamma = 0$. Podemos usar essa conexão para formar um tensor de curvatura intrínseco a hipersuperfície Σ:

$$(D_i D_j - D_j D_i)v^k =^3 R^k_{lij} v^l. \tag{4.10}$$

A curvatura intrínseca é totalmente definida pelas propriedades geométricas da hipersuperfície.

As relações geométricas entre a hipersuperfície e a variedade terão consequências formidáveis quando quantizarmos a RG canonicamente.

4.3 Vetor normal a hipersuperfície

Dado um campo escalar τ que usamos para definir Σ, considere a 1-forma $\widetilde{d\tau}$ (note que não necessariamente precisamos fazer τ ser uma coordenada na variedade). Veja que para qualquer $\bar{v} \in T_p(\Sigma)$, $< \widetilde{d\tau}, (\Phi_* \bar{v}) >\equiv \overrightarrow{d\tau}.\bar{v} = 0$ pois em coordenadas onde τ é também coordenada na variedade, $\widetilde{d\tau} \to (1,0,0,0), \Phi_*\bar{v} = (0, v_i)$. $\overrightarrow{d\tau}$ é um vetor, dual métrico de $\widetilde{d\tau}$. Por definição,

$$\overrightarrow{d\tau} = g^{\alpha\mu}(\widetilde{d\tau})_\mu \frac{\partial}{\partial x^\alpha}. \tag{4.11}$$

Note que o dual métrico de $\widetilde{d\tau}$, $\overrightarrow{d\tau} = g^{\alpha\mu}(\widetilde{d\tau})_\mu \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ é em geral diferente do dual de $\frac{\partial}{\partial x^0} = \frac{\partial}{\partial t}$ que satisfaz $\left\langle \widetilde{dt}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = 1$.

$\overrightarrow{d\tau}$ é normal a qualquer vetor tangente a Σ.Quando $\overrightarrow{d\tau}.\overrightarrow{d\tau} < 0$, portanto $\overrightarrow{d\tau}$ do tipo-tempo, dizemos que a hipersuperfície é *do tipo-espaço.*

Um objeto que se mostrará útil adiante é o vetor normal unitário associado a $\overrightarrow{d\tau}$:

$$\bar{n} = \frac{\overrightarrow{d\tau}}{\sqrt[2]{-\overrightarrow{d\tau}.\overrightarrow{d\tau}}}. \tag{4.12}$$

Definimos a função *lapso* N como $N = -(-\overrightarrow{d\tau}.\overrightarrow{d\tau})^{-1/2}$ de modo que $\bar{n} = -N\overrightarrow{d\tau}$. Note que $\bar{n}.\bar{n} = -1$.

4.4 Coordenadas na hipersuperfície

Será útil definimos um sistema de coordenadas na hipersuperfície. Como antes, vamos supor que M tem coordenadas locais (t, x, y, z). Então, essas coordenadas induzem uma base natural para o espaço vetorial $T_p(M)$ em cada ponto p, dado pelas derivadas direcionais:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right). \tag{4.13}$$

Será que há alguma relação entre o vetor $\frac{\partial}{\partial t}$ e $\bar{n}$?

Considere um ponto $\bar{p} = (t', x', y', z')$ qualquer de M. Então $t(\bar{p})$ dá a coordenada temporal desse ponto no sistema de coordenadas que estamos usando $t(p) = t'$. Considere a ação de t sobre um ponto infinitesimalmente próximo a p, $t(\bar{p}+\delta\bar{p})$. Definamos $\delta\bar{p} = \delta t.\bar{a}$. Então,

$$t(p + \delta t.\bar{a}) = t(p) + \delta t(\vec{\nabla} t.\bar{a}) = t(p) + \delta t \left\langle \widetilde{dt}, \bar{a} \right\rangle. \tag{4.14}$$

Se encontrarmos um $\bar{a}$ tal que $\left\langle \widetilde{dt}, \bar{a} \right\rangle = 1$, então

$$t(p + \delta t.\bar{a}) = t + \delta t. \tag{4.15}$$

Logo, o vetor $\bar{a}$ *transporta, no sentido descrito acima,* pontos para a hipersuperfície de tempo constante seguinte.

O vetor dual à forma $\widetilde{dt}$ é $\frac{\partial}{\partial t}$, e satisfaz

$$\left\langle \widetilde{dt}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = 1. \tag{4.16}$$

Logo podemos usar o vetor $\frac{\partial}{\partial t}$ para construir hipersuperfícies consecutivas, onde cada hipersuperfície construída dessa forma tem coordenada t constante.

Considere agora o caso de um campo escalar τ que não é usado necessariamente como uma das coordenadas da variedade. $\tau(p) = \tau'$ dá o valor do campo num ponto qualquer p. De forma análoga ao caso anterior, temos

$$\tau(p + \delta\tau.\bar{a}) = \tau + \delta\tau. \tag{4.17}$$

se $\left\langle \widetilde{d\tau}, \bar{a} \right\rangle = 1$. Na seção passada construímos o vetor normal unitário $\bar{n} = -N\overrightarrow{d\tau}$ com $N = -(-\overrightarrow{d\tau}.\overrightarrow{d\tau})^{-1/2} = -(-g^{\alpha\mu}((\widetilde{d\tau})_\mu)((\widetilde{d\tau})_\alpha))^{-1/2}$. Seja $\bar{m} = N\bar{n} = -N^2\overrightarrow{d\tau}$, conhecido como *vetor de evolução normal.* Então

$$\left\langle \widetilde{d\tau}, \bar{m} \right\rangle = -N^2 g^{\alpha\mu}(\widetilde{d\tau})_\mu \left\langle \widetilde{d\tau}, \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right\rangle = \tag{4.18}$$

$$-N^2 g^{\alpha\mu}(\widetilde{d\tau})_\mu(\widetilde{d\tau})_\alpha = \tag{4.19}$$

$$\frac{1}{g^{\alpha\mu}(\widetilde{d\tau})_\mu(\widetilde{d\tau})_\alpha} g^{\alpha\mu}(\widetilde{d\tau})_\mu(\widetilde{d\tau})_\alpha = 1. \tag{4.20}$$

Logo $\bar{m}$ pode ser usado para construir hipersuperfícies consecutivas com τ =constante.

Note que se fizermos $\tau = t$ onde t é coordenada de M, o vetor $\bar{m}$ que obtemos é

$$\bar{m} = -N^2\overrightarrow{dt} = -N^2 g^{\alpha\mu}(\widetilde{dt})_\mu \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = -N^2 g^{\alpha 0}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}. \tag{4.21}$$

Com esse $\bar{m}$, por construção, também podemos construir hipersuperfícies de t constante, assim como fizemos com $\frac{\partial}{\partial t}$. Porém, repare que $\bar{m}$ e $\frac{\partial}{\partial t}$ não são necessariamente iguais. Denominaremos a sua diferença por $\bar{\beta}$:

$$\frac{\partial}{\partial t} - \bar{m} = \bar{\beta}. \tag{4.22}$$

$\bar{\beta}$ é conhecido como vetor deslocamento (mais rigorosamente, $\bar{\beta}$ é um campo vetorial) . A relação (4.22) mostra que $\frac{\partial}{\partial t}$ não é necessariamente normal a hipersuperfícies de t constante, sendo $\bar{\beta}$ a diferença.

É fácil ver que se folheamos M com hipersuperfícies de t constante, $\bar{n}.\bar{\beta} = 0$,

$$\bar{n}.\left(\frac{\partial}{\partial t} - \bar{m}\right) = \bar{n}.\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) + N = -N\left\langle \widetilde{dt}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle + N = N - N = 0. \tag{4.23}$$

Portanto $\bar{\beta}$ é tangente a hipersuperfícies de t constante.

O campo vetorial $\bar{\beta}$ e o campo escalar N tem uma interpretação física simples: definem um conjunto de coordenadas em M. Para ver isso, vamos imaginar o seguinte procedimento.

1. Suponha que temos definida uma variedade M
2. Seja Σ_0 uma hipersuperfície em M com vetor normal $\bar{n}$
3. Defina um campo escalar N e coordenadas x_i arbitrárias em Σ_0
4. N define unicamente um vetor $\bar{m} = N\bar{n}$ com o qual podemos construir uma nova hipersuperfície $\Sigma_{\delta t}$ conforme explicamos anteriormente. Todos os pontos dessa hipersuperfície terão como valor de coordenada temporal δt.
5. Sabendo $\bar{\beta}$, construímos o vetor base na direção temporal usando a definição $\frac{\partial}{\partial t} = \bar{\beta} + \bar{m}$
6. Achamos os versores normais a $\frac{\partial}{\partial t}$ em cada ponto de M, que formarão os vetores base $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$.
7. Usamos os vetores $\frac{\partial}{\partial x^i}$ para construir um conjunto de coordenadas locais $\{x_i\}$ em cada hipersuperfície através do mapa exponencial $Exp : T_p(M) \to M$

No conjunto de coordenadas $\{t, x^i\}$ definido pelo procedimento acima as hipersuperfícies são formadas por conjuntos de pontos com t constante.

Vemos portanto que a escolha de $\bar{\beta}$ e N define um sistema de coordenadas. No caso da Relatividade Geral, sabemos que a teoria é invariante por uma transformação arbitrária de coordenadas. Esperamos, portanto, que no formalismo 3+1 da Relatividade Geral, $\bar{\beta}$ e N não sejam variáveis dinâmicas e possam ser escolhidas livremente. A escolha de um $\bar{\beta}$ e N deve corresponder a uma escolha de *calibre na teoria.*

É fácil mostrar que em coordenadas gerais definidas por $N, \bar{\beta}$, a 4-métrica assume a forma

$$g_{\alpha\beta} \to \begin{pmatrix} -N^2 + \beta^k\beta_k & \beta_j \\ \beta_i & \gamma_{ij} \end{pmatrix}. \tag{4.24}$$

Quando colocarmos a Relatividade Geral no formato hamiltoniano, veremos que a teoria é vinculada e que $\bar{\beta}$ e N são multiplicadores de Lagrange (seguindo as definições da teoria de Dirac).

4.5 Tensor de Curvatura Extrínseca

Anteriormente havíamos definido uma noção de curvatura intrínseca a cada hipersuperfície. Pensando intuitivamente, parece que podemos definir também um outro tipo de curvatura que dá informações sobre como Σ está "posicionada" em M. Está informação é dado pela variação do vetor normal em relação a curva integral de um vetor $\bar{v}$ da hipersuperfície: $\bigtriangledown_{\bar{v}}\bar{n}$, $\bar{v} \in T_p(\Sigma)$. O objeto para o qual encontraremos mais utilidade é no entanto o tensor de curvatura extrínseca, definido como

$$K(\bar{u},\bar{v}) = -\bar{u}. \bigtriangledown_{\bar{v}} \bar{n}. \tag{4.25}$$

Uma propriedade fundamental é a simetria de K:

$$K(\bar{u},\bar{v}) = -\bar{u}. \bigtriangledown_{\bar{v}} \bar{n} = -\bar{v}. \bigtriangledown_{\bar{u}} \bar{n} \tag{4.26}$$

o que provaremos a seguir. Primeiro, lembremos que a métrica é compatível com a conexão $\bigtriangledown$, ou seja,

$$\bigtriangledown\mathbf{g} =(\bigtriangledown^{\alpha} g_{\mu\nu})\overline{e_{\alpha}} = 0 \rightarrow \bigtriangledown^{\alpha} g_{\mu\nu} = 0. \tag{4.27}$$

Portanto, para quaisquer dois vetores $\bar{u},\bar{v}$,

$$\bigtriangledown^{\alpha} g_{\mu\nu} u^{\mu} v^{\nu} = (\bigtriangledown^{\alpha} g_{\mu\nu}) u^{\mu} v^{\nu} + g_{\mu\nu}(\bigtriangledown^{\alpha} u^{\mu}) v^{\nu} + g_{\mu\nu} u^{\mu}(\bigtriangledown^{\alpha} v^{\nu}) = \bar{v}.(\bigtriangledown\bar{u}) + \bar{u}.(\bigtriangledown\bar{v}). \tag{4.28}$$

Ou seja, a derivada covariante do produto escalar de dois vetores obedece

$$\bigtriangledown(\bar{u}.\bar{v}) = \bar{v}.(\bigtriangledown\bar{u}) + \bar{u}.(\bigtriangledown\bar{v}). \tag{4.29}$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned} K(\bar{u},\bar{v}) &= -\bar{u}. \bigtriangledown_{\bar{v}} \bar{n} = - \bigtriangledown_{\bar{v}} (\bar{u}.\bar{n}) + \bar{n}. \bigtriangledown_{\bar{v}} \bar{u} = \\ \bar{n}. \bigtriangledown_{\bar{v}} \bar{u} & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (4.30) \\ \bar{n}. \bigtriangledown_{\bar{v}} \bar{u} &= \bar{n}.(\bigtriangledown_{\bar{u}}\bar{v} + [\bar{u},\bar{v}]) = \bar{n}.(\bigtriangledown_{\bar{u}}\bar{v}) \\ \bar{n}.(\bigtriangledown_{\bar{u}}\bar{v}) &= (\bigtriangledown_{\bar{u}}\bar{n}.\bar{v}) - (\bar{v}. \bigtriangledown_{\bar{u}} \bar{n}) = K(\bar{v},\bar{u}). \end{aligned}$$

Onde $\bar{n}.[\bar{u},\bar{v}] = 0$, pois pelo teorema de Fröbenius,$[\bar{u},\bar{v}] \in T_p(\Sigma)$.

4.6 Projetor Ortogonal

Considere um vetor $\bar{v}$ qualquer definido no $\mathbb{R}^3$. Vemos que para todo $\bar{v}$, existe um projeção sobre um vetor no plano $\mathbb{R}^2$ univocamente definido. Esse é um mapa $\vec{\gamma} : T_p(M) \to T_p(\Sigma)$, portanto inverso ao push-foward que definimos anteriormente. Para o caso do plano na direção (x, y), podemos construir $\vec{\gamma}$ explicitamente da seguinte forma: $\vec{\gamma}(\bar{v}) = \bar{v} - (\hat{z}.\bar{v})\hat{z}$

Note que

$$\vec{\gamma}(\hat{z}) = \hat{z} - (\hat{z}.\hat{z})\hat{z} = 0. \tag{4.31}$$

O versor $\hat{z}$ tem o papel do vetor normal unitário $\bar{n}$ definido anteriormente. Vamos estender esses conceitos e definir um operador de projeção para o caso de Σ com $\bar{n}$ do tipo espaço. Para manter $\vec{\gamma}(\bar{n}) = 0$, devemos definir

$$\begin{aligned} \vec{\gamma} &: T_p(M) \to T_p(\Sigma') \\ \vec{\gamma}(\bar{v}) &= \bar{v} + (\bar{n}.\bar{v})\bar{n} \to \gamma^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta + n^\alpha n_\beta. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Similarmente, podemos construir o inverso do pullback definido na seção anterior e trazer formas de Σ para M.Em particular, podemos extender a métrica γ de Σ para M.Deixo ao leitor a tarefa de mostrar que o resultado desse procedimento nos dá

$$\gamma_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + n_\alpha n_\beta. \tag{4.33}$$

$\gamma_{\alpha\beta}$ tem a princípio 16 componentes, enquanto γ_{ij} tem 9. No entanto, podemos mostrar que $\gamma_{0i} = \gamma_{i0} = \gamma_{00} = 0$

$$\begin{aligned} \gamma_{00} &= g_{00} + n_0 n_0 = g_{00} - \frac{1}{g^{\alpha\beta} g_{\alpha 0} g_{\beta 0}} g_{00} g_{00} = \\ g_{00} &- \frac{1}{\delta^\beta_0 g_{\beta 0}} g_{00} g_{00} = 0 \end{aligned} \tag{4.34}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{i0} &= \gamma_{0i} = g_{0i} + n_0 n_i = g_{0i} - \frac{1}{g^{\alpha\beta} g_{\alpha 0} g_{\beta 0}} g_{00} g_{0i} \\ &= g_{0i} - \frac{1}{\delta^\beta_0 g_{\beta 0}} g_{00} g_{0i} = 0 \end{aligned} \tag{4.35}$$

Assim, sempre que contrairmos um tensor qualquer completamente com a métrica estendida, podemos sempre considerar somente a parte espacial:

$$\gamma^{\alpha\beta}K_{\alpha\beta} = \gamma^{ij}K_{ij}. \tag{4.36}$$

Para um tensor (p,q) geral de M, sempre podemos definir um novo tensor de M que chamaremos de sua projeção em Σ, da seguinte forma:

$$(\vec{\gamma}^{*}T)^{\alpha_1...\alpha_p}_{\beta_1...\beta_q} = \gamma^{\alpha_1}_{\mu_1}...\gamma^{\alpha_p}_{\mu_p}\gamma^{\nu_1}_{\beta_1}...\gamma^{\nu q}_{\beta_q}T^{\mu_1...\mu_p}_{\nu_1...\nu_q}. \tag{4.37}$$

Vemos que a contração do tensor acima com vetor na direção normal $\bar{n}$ o resultado é 0.

4.7 Relação entre K e ∇

Vamos agora derivar uma fórmula útil entre o tensor de curvatura extrínseca e a conexão ∇. Lembre que K era um tensor do tipo (0,2)de Σ.Vamos usar as definições anteriores para trazer K para M. Temos, para todo $(\bar{u}, \bar{v}) \in T_p(M)$,

$$\begin{aligned}
\vec{\gamma}^{*}_{M}(K(\bar{u},\bar{v})) &= K(\vec{\gamma}(\bar{u}),\vec{\gamma}(\bar{v})) = -\vec{\gamma}(\bar{u}).\nabla_{\vec{\gamma}(\bar{v})}\bar{n} = -(\bar{u}+(\bar{n}.\bar{u})\bar{n}).\nabla_{(\bar{v}+\bar{n}.\bar{v})}\bar{n} \\
&= -(\bar{u}+(\bar{n}.\bar{u})\bar{n}).(\nabla_{(\bar{v})}\bar{n}+\nabla_{(\bar{n}.\bar{v}).\bar{n}}\bar{n}) \qquad (4.38) \\
&= -\bar{u}.\nabla_{(\bar{v})}\bar{n} - (\bar{n}.\bar{u})\bar{n}.\nabla_{(\bar{v})}\bar{n} - [\bar{u}(\bar{n}.\bar{v}) + (\bar{n}.\bar{u})(\bar{n}.\bar{v})\bar{n}]\nabla_{\bar{n}}\bar{n}.
\end{aligned}$$

Mas $\bar{n}.\nabla_{(\bar{v})}\bar{n} = \frac{1}{2}\nabla_{\bar{v}}(\bar{n}.\bar{n}) = \frac{1}{2}\nabla_{\bar{v}}(-1) = 0$. Logo

$$\begin{aligned}
\vec{\gamma}^{*}_{M}(K(\bar{u},\bar{v})) &= -\bar{u}.\nabla_{(\bar{v})}\bar{n} - \bar{u}(\bar{n}.\bar{v}).\nabla_{\bar{n}}\bar{n} \qquad (4.39) \\
&= -\bar{u}.\nabla_{(\bar{v})}\bar{n} - (\bar{u}.\nabla_{\bar{n}}\bar{n})(\bar{n}.\bar{v}).
\end{aligned}$$

Para achar a expressão em termos de componentes, fazemos $(\bar{u}, \bar{v})$ serem vetores de base do espaço vetorial $T_p(M)$. Assim,

$$(\vec{\gamma}^{*}_{M}K)_{\alpha\beta} = -(\nabla_{\beta}\bar{n})_{\alpha} - (\nabla_{\bar{n}}\bar{n})_{\alpha}(n_{\beta}). \tag{4.40}$$

4.8 Relação entre as conexões ∇ e D

Considere o exemplo do cilindro como variedade M e suas seções transversais circulares como hipersuperfície Σ. Intuitivamente, parece haver uma relação entre as conexões ∇ do cilindro e D do círculo: a noção de paralelismo da variedade parece poder ser transportada para a hipersuperfície. Podemos achar a relação exata entre ∇ e D.É possível demonstrar que

$$D_\rho T^{\alpha_1\alpha_2\dots} = \gamma^{\alpha_1}_{\mu_1}\gamma^{\alpha_2}_{\mu_2}\dots\gamma^{\sigma}_{\rho}\nabla_\sigma T^{\mu_1\mu_2}. \tag{4.41}$$

Observe que a presença dos projetores ortogonais faz a derivada covariante de qualquer vetor paralelo ao vetor normal $\bar{n}$ ser nulo.

4.9 Relações de Gauss

Nessa seção iremos fazer a primeira decomposição do tensor de Riemman 4-dimensional. Para isso, note que temos expressões ligando as conexões D, ∇ a ${}^4R$ e ${}^3R$. Uma vez que temos a relação entre ∇ e D pela fórmula anterior, vamos descobrir uma relação entre ${}^4R$ e ${}^3R$.

Antes tínhamos, por definição, $(D_iD_j - D_jD_i)v^k =^3 R^k_{lij}v^l$. Vamos agora fazer o pull-back dessa relação, e escrevê-la usando objetos de M :

$$(D_\alpha D_\beta - D_\beta D_\alpha)V^\gamma =^3 R^\gamma_{\mu\alpha\beta}V^\mu. \tag{4.42}$$

Onde V^γ é tangente a Σ. Agora, usando a fórmula anterior, vamos analisar o primeiro termo do lado esquerdo:

$$D_\alpha D_\beta V^\gamma = D_\alpha(\gamma^\mu_\beta\gamma^\gamma_\nu\nabla_\mu V^\nu) = \gamma^\sigma_\beta\gamma^\rho_\alpha\gamma^\gamma_\lambda\nabla_\rho(\gamma^\mu_\sigma\gamma^\lambda_\nu\nabla_\mu V^\nu). \tag{4.43}$$

Usando a regra da cadeia,

$$\begin{aligned} D_\alpha(D_\beta V^\gamma) &= \gamma^\sigma_\beta\gamma^\rho_\alpha\gamma^\gamma_\lambda(\nabla_\rho(\gamma^\mu_\sigma\gamma^\lambda_\nu)\nabla_\mu V^\nu + (\gamma^\mu_\sigma\gamma^\lambda_\nu)(\nabla_\rho\nabla_\mu V^\nu) \qquad (4.44)\\ &= \gamma^\sigma_\beta\gamma^\rho_\alpha\gamma^\gamma_\lambda(\nabla_\rho(\gamma^\mu_\sigma)\gamma^\lambda_\nu\nabla_\mu V^\nu + \gamma^\mu_\sigma\nabla_\rho(\gamma^\lambda_\nu)\nabla_\mu V^\nu + (\gamma^\mu_\sigma\gamma^\lambda_\nu)\nabla_\rho\nabla_\mu V^\nu). \end{aligned}$$

Agora, sabemos que a conexão ∇ é compatível com a métrica g, $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$, mas não necessariamente devemos ter $\nabla_\alpha\gamma_{\mu\nu} = 0$ (embora seja verdade que $D_i\gamma_{jk} = 0$). De fato, podemos calcular explicitamente:

$$\nabla_\rho(\gamma^\mu_\sigma) = \nabla_\rho(\delta^\mu_\sigma + n^\mu n_\sigma) = (\nabla_\rho n^\mu)n_\sigma + n^\mu(\nabla_\rho n_\sigma). \tag{4.45}$$

Note que aparecerão termos do tipo $\gamma^\sigma_\beta n_\sigma$, que são a projeção ortogonal do vetor normal e portanto iguais a 0. Assim, abrindo as multiplicações em (4.44), temos

$$D_\alpha(D_\beta V^\gamma) = \gamma^\sigma_\beta\gamma^\rho_\alpha\gamma^\gamma_\nu n^\mu(\nabla_\rho n_\sigma)\nabla_\mu V^\nu + \gamma^\mu_\beta\gamma^\rho_\alpha\gamma^\gamma_\lambda(\nabla_\rho n^\lambda)n_\nu\nabla_\mu V^\nu + \gamma^\rho_\alpha\gamma^\mu_\beta\gamma^\gamma_\nu\nabla_\rho\nabla_\mu V^\nu. \tag{4.46}$$

Veja que temos termos do tipo $\gamma^\sigma_\beta\gamma^\rho_\alpha(\nabla_\rho n_\sigma)$.Para prosseguir, vamos voltar a eq. (4.40):

$$-(\vec{\gamma}^*_M K)_{\alpha\beta} = (\nabla_\beta \bar{n})_\alpha + (\nabla_{\bar{n}}\bar{n})_\alpha(n_\beta). \tag{4.47}$$

Temos

$$\begin{aligned}
\gamma^\sigma_\beta\gamma^\rho_\alpha(\nabla_\rho n_\sigma) &= \gamma^\sigma_\beta\gamma^\rho_\alpha(-(\vec{\gamma}^*_M K)_{\sigma\rho}) - \gamma^\sigma_\beta\gamma^\rho_\alpha(\nabla_{\bar{n}}\bar{n})_\sigma(n_\rho) = -\gamma^\sigma_\beta\gamma^\rho_\alpha((\vec{\gamma}^*_M K)_{\sigma\rho}) \\
&= -(\delta^\sigma_\beta + n^\sigma n_\beta)(\delta^\rho_\alpha + n^\rho n_\alpha)((\vec{\gamma}^*_M K)_{\sigma\rho}) \\
&= -(\delta^\sigma_\beta + n^\sigma n_\beta)((\vec{\gamma}^*_M K)_{\sigma\alpha} + n^\rho n_\alpha(\vec{\gamma}^*_M K)_{\sigma\rho}).
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Agora, da definição de $\vec{\gamma}^*_M K{=}K(\vec{\gamma}(\bar{u}),\vec{\gamma}(\bar{v}))$ temos que $(\vec{\gamma}^*_M K)_{\sigma\rho} = K(\vec{\gamma}(\bar{e}_\sigma),\vec{\gamma}(\bar{e}_\rho))$ onde $\bar{e}_\sigma$ e $\bar{e}_\rho$ são vetores base de M, e n^ρ $(\vec{\gamma}^*_M K)_{\sigma\rho} = n^\rho K(\vec{\gamma}(\bar{e}_\sigma),\vec{\gamma}(\bar{e}_\rho)) = K(\vec{\gamma}(\bar{n}),\vec{\gamma}(\bar{e}_\rho)) = 0$. Logo,

$$\gamma^\sigma_\beta\gamma^\rho_\alpha(\nabla_\rho n_\sigma) = -(\delta^\sigma_\beta + n^\sigma n_\beta)((\vec{\gamma}^*_M K)_{\sigma\alpha}) = -(\vec{\gamma}^*_M K)_{\beta\alpha}. \tag{4.49}$$

Assim,

$$D_\alpha(D_\beta V^\gamma) = -\gamma^\gamma_\nu n^\mu(\vec{\gamma}^*_M K)_{\beta\alpha}\nabla_\mu V^\nu + \gamma^\mu_\beta\gamma^\rho_\alpha\gamma^\gamma_\lambda(\nabla_\rho n^\lambda)n_\nu\nabla_\mu V^\nu + \gamma^\rho_\alpha\gamma^\mu_\beta\gamma^\gamma_\nu\nabla_\rho\nabla_\mu V^\nu. \tag{4.50}$$

Note que no segundo termo do lado direito da eq. acima, temos um fator

$$n_\nu\nabla_\mu V^\nu = \nabla_\mu(n_\nu V^\nu) - V^\nu(\nabla_\mu n_\nu) = -V^\nu(\nabla_\mu n_\nu), \tag{4.51}$$

pois $\bar{V}$ não tem componentes na direção do vetor normal a hipersuperfície (é tangente a Σ). Então o segundo termo do lado direito da equação (4.50) torna-se

$$\gamma^\mu_\beta\gamma^\rho_\alpha\gamma^\gamma_\lambda(\nabla_\rho n^\lambda)n_\nu\nabla_\mu V^\nu = -\gamma^\mu_\beta\gamma^\rho_\alpha\gamma^\gamma_\lambda(\nabla_\rho n^\lambda)V^\nu(\nabla_\mu n_\nu) = -K^\gamma_\alpha K_{\nu\beta}V^v. \tag{4.52}$$

Logo

$$D_\alpha(D_\beta V^\gamma) = -\gamma^\gamma_\nu n^\mu(\vec{\gamma}^*_M K)_{\beta\alpha}\nabla_\mu V^\nu - K^\gamma_\alpha K_{\nu\beta}V^v + \gamma^\rho_\alpha\gamma^\mu_\beta\gamma^\gamma_\nu\nabla_\rho\nabla_\mu V^\nu \tag{4.53}$$

Subtraindo $D_\beta(D_\alpha V^\gamma)$, vemos que o primeiro termo se anula devido a simetria de K em α, β.

$$(D_\alpha D_\beta - D_\beta D_\alpha)V^\gamma = (K^\gamma_\beta K_{\nu\alpha} - K^\gamma_\alpha K_{\nu\beta})V^v + \gamma^\rho_\alpha\gamma^\mu_\beta\gamma^\gamma_\nu(\nabla_\rho\nabla_\mu - \nabla_\mu\nabla_\rho)V^\nu. \tag{4.54}$$

Reconhecemos $(\nabla_\rho\nabla_\mu - \nabla_\mu\nabla_\rho)$ como nada menos que a definição do tensor de Riemman ${}^4R$:

$$(\nabla_\rho\nabla_\mu - \nabla_\mu\nabla_\rho)V^\nu = {}^4R^\nu_{\chi\rho\mu}V^\chi. \tag{4.55}$$

Ou seja,

$$\gamma^\rho_\alpha\gamma^\mu_\beta\gamma^{\gamma 4}_\nu R^\nu_{\sigma\rho\mu}V^\sigma =^3 R^\gamma_{\chi\alpha\beta}V^\chi + (K^\gamma_\alpha K_{\chi\beta} - K^\gamma_\beta K_{\chi\alpha})V^\chi. \tag{4.56}$$

Mas como $\bar{V} \in T_p(\Sigma)$, podemos escrever, do lado esquerdo, $V^\sigma = \gamma^\sigma_\chi V^\chi$. Ficamos com

$$\gamma^\rho_\alpha\gamma^\mu_\beta\gamma^\gamma_\nu\gamma^{\sigma 4}_\chi R^\nu_{\sigma\rho\mu}V^\chi =^3 R^\gamma_{\chi\alpha\beta}V^\chi + (K^\gamma_\alpha K_{\chi\beta} - K^\gamma_\beta K_{\chi\alpha})V^\chi. \tag{4.57}$$

Agora a equação acima é válida para *qualquer* $\bar{V} \in T_p(M)$. Para ver isso, note que do lado esquerdo, o projetor ortogonal anula qualquer componente de $\bar{V}$ na direção do vetor normal. Façamos $V^\chi = V^\chi_T + V^\chi_n$, ou seja, decompusemos o vetor na direção tangente e normal a Σ. Do lado direito temos de (4.43)

$${}^3R^\gamma_{\chi\alpha\beta}V^\chi = (D_\alpha D_\beta - D_\beta D_\alpha)V^\gamma = \gamma^\sigma_\beta\gamma^\rho_\alpha\gamma^\gamma_\lambda\nabla_\rho(\gamma^\mu_\sigma\gamma^\lambda_\nu\nabla_\mu(V^\nu_T + V^\nu_n) - (\alpha \to \beta). \tag{4.58}$$

A presença do projetor ortogonal em $\gamma^\lambda_\nu\nabla_\mu(V^\nu_T + V^\nu_n)$ mostra que só a componente tangente a Σ contribui para o termo. Além disso, havíamos mostrado antes que $n^\rho\ (\vec{\gamma}^*_M K)_{\sigma\rho} = 0$. Portanto, como a relação

$$\gamma^\rho_\alpha\gamma^\mu_\beta\gamma^\gamma_\nu\gamma^{\sigma 4}_\chi R^\nu_{\chi\rho\mu}V^\chi =^3 R^\gamma_{\chi\alpha\beta}V^\chi + (K^\gamma_\alpha K_{\chi\beta} - K^\gamma_\beta K_{\chi\alpha})V^\chi \tag{4.59}$$

vale para para qualquer $\bar{V} \in T_p(M)$, chegamos a

$$\gamma^\rho_\alpha\gamma^\mu_\beta\gamma^\gamma_\nu\gamma^{\sigma 4}_\chi R^\nu_{\sigma\rho\mu} =^3 R^\gamma_{\chi\alpha\beta} + (K^\gamma_\alpha K_{\chi\beta} - K^\gamma_\beta K_{\chi\alpha}). \tag{4.60}$$

A relação (4.60) é conhecida como *relação de Gauss*. Note que ela nada mais é que a decomposição de um tensor definido a partir da geometria de M (tensor de Riemman quadridimensional, que por sua vez é definido com a conexão ∇) em tensores definidos em Σ (que foram transportados para M através dos mapeamentos necessários). Para chegar as equações de Einstein num formato 3+1 iremos repetir esse processo, decompondo ${}^4R$ de outras formas.

Contraindo a expressão acima em γ, α, chegamos a

$$\begin{aligned}
(\delta^\rho_\nu + n^\rho n_\nu)\gamma^\mu_\beta \gamma^\sigma_\chi {}^4R^\nu_{\sigma\rho\mu} &= {}^3R_{\chi\beta} + (KK_{\chi\beta} - K^\mu_\beta K_{\chi\mu}) \\
\gamma^\mu_\beta \gamma^\sigma_\chi {}^4R_{\sigma\mu} + n^\rho \gamma^\mu_\beta n_\nu \gamma^\sigma_\chi {}^4R^\nu_{\sigma\rho\mu} &= {}^3R_{\chi\beta} + (KK_{\chi\beta} - K^\mu_\beta K_{\chi\mu}).
\end{aligned}$$

Contraindo essa expressão com $\gamma^{\chi\beta}$, obtemos

$$ {}^4R + 2.{}^4R_{\nu\sigma} n^\nu n^\sigma = {}^3R + K^2 - K^{ij}K_{ij}. \tag{4.61}$$

A equação (4.61) é conhecida como relação escalar de Gauss. Note que ainda não decompomos ${}^4R$ uma vez que ainda temos um termo ${}^4R_{\nu\sigma} n^\nu n^\sigma$. Para prosseguir, precisaremos antes demonstrar alguns resultados.

4.10 Relações Geométricas úteis

Para decompor ${}^4R$ precisaremos de alguns resultados puramente geométricos.

4.10.1 $\nabla_{\bar n}\bar n$

Vamos achar uma expressão para $\nabla_{\bar n}\bar n$:

$$\bar a \equiv \nabla_{\bar n}\bar n = (n^\alpha \nabla_\alpha n^\beta)\bar e_\beta \tag{4.62}$$

$$\begin{aligned}
a_\beta &= -n^\alpha \nabla_\alpha (N\nabla_\beta t) \\
&= -n^\alpha \nabla_\alpha (N) \nabla_\beta t - n^\alpha (N) \nabla_\alpha \nabla_\beta t.
\end{aligned} \tag{4.63}$$

Como a conexão não tem torsão, podemos escrever

$$a_\beta = -n^\alpha \nabla_\alpha (N) \nabla_\beta t - n^\alpha (N) \nabla_\beta \nabla_\alpha t = \frac{n^\alpha n_\beta}{N} \nabla_\alpha (N) - n^\alpha (N) \nabla_\beta (-\frac{n_\alpha}{N}). \tag{4.64}$$

Usando a regra do produto na derivada covariante,

$$a_\beta = \frac{n^\alpha n_\beta}{N} \nabla_\alpha (N) + n^\alpha n_\alpha (N) \nabla_\beta (\frac{1}{N}) + n^\alpha \nabla_\beta (n_\alpha), \tag{4.65}$$

mas $n^\alpha \nabla_\beta (n_\alpha) = \frac{1}{2} \nabla_\beta (n^\alpha n_\alpha) = \frac{1}{2} \nabla_\beta (-1) = 0$. Logo

$$\begin{aligned} a_\beta &= \frac{n^\alpha n_\beta}{N} \nabla_\alpha (N) - N \nabla_\beta (\frac{1}{N}) = \frac{n^\alpha n_\beta}{N} \nabla_\alpha (N) - \frac{N}{N^2} \nabla_\beta (N) \\ a_\beta &= \frac{1}{N} (n^\alpha n_\beta \nabla_\alpha N - \nabla_\beta N) = \frac{\nabla_\alpha N}{N} (n^\alpha n_\beta - \delta^\alpha_\beta) = \gamma^\alpha_\beta \frac{\nabla_\alpha N}{N} \equiv \frac{1}{N} D_\beta N. \end{aligned} \tag{4.66}$$

Portanto

$$a_\beta = D_\beta \ln N. \tag{4.67}$$

4.10.2 $\nabla_\beta m_\alpha$

Será útil a frente termos uma expressão para $\nabla_\beta m_\alpha$:

$$\nabla_\beta m_\alpha = \nabla_\beta (N n_\alpha) = n_\alpha \nabla_\beta (N) + N \nabla_\beta n_\alpha. \tag{4.68}$$

Lembremos que $\nabla_\beta n_\alpha = -K_{\alpha\beta} - a_\alpha n_\beta = -K_{\alpha\beta} - (D_\alpha \ln N) n_\beta$.Logo,

$$\nabla_\beta m_\alpha = -N K_{\alpha\beta} - N (D_\alpha \ln N) n_\beta + n_\alpha \nabla_\beta (N). \tag{4.69}$$

4.10.3 $\pounds_{\bar{m}} \gamma_{\alpha\beta}$

Vamos calcular $\pounds_{\bar{m}} \gamma_{\alpha\beta}$:

$$\pounds_{\bar{m}} \gamma_{\alpha\beta} = m^\mu \nabla_\mu \gamma_{\alpha\beta} + \gamma_{\mu\beta} \nabla_\alpha m^\mu + \gamma_{\alpha\mu} \nabla_\beta m^\mu. \tag{4.70}$$

Como $\gamma_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + n_\alpha n_\beta$ e $\nabla_\mu g_{\alpha\beta} = 0$, temos

$$\begin{aligned}
\pounds_{\bar{m}}\gamma_{\alpha\beta} &= m^\mu \nabla_\mu n_\alpha n_\beta + \gamma_{\mu\beta}\nabla_\alpha m^\mu + \gamma_{\alpha\mu}\nabla_\beta m^\mu = m^\mu(\nabla_\mu n_\alpha)n_\beta + m^\mu n_\alpha \nabla_\mu n_\beta \\
&\quad +\gamma_{\mu\beta}\nabla_\alpha m^\mu + \gamma_{\alpha\mu}\nabla_\beta m^\mu \qquad (4.71)\\
\pounds_{\bar{m}}\gamma_{\alpha\beta} &= -Nn^\mu(K_{\alpha\mu} + a_\alpha n_\mu)n_\beta - Nn^\mu n_\alpha(K_{\beta\mu} + a_\beta n_\mu) + \gamma_{\mu\beta}\nabla_\alpha m^\mu + \gamma_{\alpha\mu}\nabla_\beta m^\mu \\
\pounds_{\bar{m}}\gamma_{\alpha\beta} &= Na_\alpha n_\beta + Nn_\alpha a_\beta + \gamma_{\mu\beta}\nabla_\alpha m^\mu + \gamma_{\alpha\mu}\nabla_\beta m^\mu \qquad (4.72)\\
\pounds_{\bar{m}}\gamma_{\alpha\beta} &= Na_\alpha n_\beta + \gamma_{\mu\beta}\nabla_\alpha m^\mu + (\alpha \to \beta). \qquad (4.73)
\end{aligned}$$

Substituindo 4.69, temos

$$\begin{aligned}
\pounds_{\bar{m}}\gamma_{\alpha\beta} = Na_\alpha n_\beta = +\gamma_{\mu\beta}(-NK^\mu_\alpha - N(D^\mu \ln N)n_\alpha + n^\mu\nabla_\alpha(N)) + (\alpha \to \beta)\\
\pounds_{\bar{m}}\gamma_{\alpha\beta} = Na_\alpha n_\beta + (-NK_{\beta\alpha} - N(D_\beta \ln N)n_\alpha + n_\beta\nabla_\alpha(N))\\
+n_\mu n_\beta(-NK^\mu_\alpha - N(D^\mu \ln N)n_\alpha + n^\mu\nabla_\alpha(N)) +\\
(\alpha \to \beta).
\end{aligned}$$

Como $n_\mu K^\mu_\alpha = 0$ e $n_\mu D^\mu \ln N = n_\mu \gamma^\mu_\sigma \nabla^\sigma \ln N = 0$, temos

$$\begin{aligned}
\pounds_{\bar{m}}\gamma_{\alpha\beta} &= Na_\alpha n_\beta + (-NK_{\beta\alpha} - N(D_\beta \ln N)n_\alpha) + (\alpha \to \beta)\\
\pounds_{\bar{m}}\gamma_{\alpha\beta} &= Na_\alpha n_\beta - NK_{\beta\alpha} - Na_\beta n_\alpha + (\alpha \to \beta).
\end{aligned}$$

Como $K_{\alpha\beta}$ é simétrico, obtemos

$$\pounds_{\bar{m}}\gamma_{\alpha\beta} = -2NK_{\alpha\beta}. \qquad (4.74)$$

4.11 Relação de Ricci e decomposição de ^4R

De posse dessas relações, podemos decompor ^4R em tensores definidos nas hipersuperfícies. Para isso, vamos calcular a projeção do tensor de ^4R duas vezes no vetor normal e duas vezes no projetor ortogonal:

$$\gamma_{\alpha\mu}\gamma^\nu_\beta n^\sigma n^{\rho 4} R^\mu_{\rho\nu\sigma} = \gamma_{\alpha\mu}\gamma^\nu_\beta n^\sigma(\nabla_\nu\nabla_\sigma - \nabla_\sigma\nabla_\nu)n^\mu. \qquad (4.75)$$

De $\nabla_\sigma n^\mu = -K^\mu_\sigma - D^\mu(\ln N)n_\sigma$, temos

$$\begin{aligned}
\gamma_{\alpha\mu}\gamma^\nu_\beta n^\sigma n^{\rho 4} R^\mu_{\rho\nu\sigma} &= \gamma_{\alpha\mu}\gamma^\nu_\beta n^\sigma(\nabla_\nu(-K^\mu_\sigma - D^\mu(\ln N)n_\sigma) -\\
&\quad \nabla_\sigma(-K^\mu_\nu - D^\mu(\ln N)n_\nu)) \qquad (4.76)\\
&= \gamma_{\alpha\mu}\gamma^\nu_\beta n^\sigma[\nabla_\nu(-K^\mu_\sigma) - \nabla_\nu(D^\mu(\ln N))n_\sigma - D^\mu(\ln N)(\nabla_\nu n_\sigma)\\
&\quad +\nabla_\sigma(K^\mu_\nu) + \nabla_\sigma(D^\mu(\ln N))n_\nu + D^\mu(\ln N)(\nabla_\sigma n_\nu)].
\end{aligned}$$

Os seguintes termos aparecerão:

$$\begin{aligned} n^\sigma \nabla_\nu(-K^\mu_\sigma) &= [\nabla_\nu(n^\sigma K^\mu_\sigma) - K^\mu_\sigma \nabla_\nu(n^\sigma)] \quad (4.77) \\ = K^\mu_\sigma \nabla_\nu(n^\sigma) & \\ -n^\sigma D^\mu(\ln N)(\nabla_\nu n_\sigma) &= -\frac{1}{2}\nabla_\nu(n_\sigma n^\sigma) D^\mu(\ln N) = 0 \\ D^\mu(\ln N) n^\sigma(\nabla_\sigma n_\nu) &= D^\mu(\ln N) D_\nu(\ln N) \\ (\gamma^\nu_\beta n_\nu)\nabla_\sigma(D^\mu(\ln N)) &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, simplificando,

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\mu}\gamma^\nu_\beta n^\sigma n^{\rho 4} R^\mu_{\rho\nu\sigma} &= \gamma_{\alpha\mu}\gamma^\nu_\beta [K^\mu_\sigma \nabla_\nu(n^\sigma) + \nabla_\nu D^\mu(\ln N) + n^\sigma \nabla_\sigma(K^\mu_\nu) \\ &\quad + D^\mu(\ln N) D_\nu(\ln N)] \quad (4.78) \\ &= [-K_{\alpha\sigma}\nabla_\beta(n^\sigma) + D_\beta D_\alpha(\ln N) + \gamma_{\alpha\mu}\gamma^\nu_\beta n^\sigma \nabla_\sigma(K^\mu_\nu) \\ &\quad + D_\alpha(\ln N) D_\beta(\ln N)]. \quad (4.79) \end{aligned}$$

Temos

$$D_\alpha(\ln N) D_\beta(\ln N) = \frac{1}{N^2} D_\alpha(N) D_\beta(N) \quad (4.80)$$

e

$$D_\beta D_\alpha(\ln N) = D_\beta(\frac{1}{N} D_\alpha N) = \frac{-1}{N^2} D_\beta N D_\alpha N + \frac{1}{N} D_\beta D_\alpha N. \quad (4.81)$$

Logo, chegamos a

$$\gamma_{\alpha\mu}\gamma^\nu_\beta n^\sigma n^{\rho 4} R^\mu_{\rho\nu\sigma} = [-K_{\alpha\sigma}\nabla_\beta(n^\sigma) + \frac{1}{N} D_\beta D_\alpha N + \gamma_{\alpha\mu}\gamma^\nu_\beta n^\sigma \nabla_\sigma(K^\mu_\nu)]. \quad (4.82)$$

Para prosseguir, considere $\pounds_{\bar{m}} K \rightarrow m^\mu \nabla_\mu K_{\alpha\beta} + K_{\mu\beta}\nabla_\alpha m^\mu + K_{\alpha\mu}\nabla_\beta m^\mu$. De (4.69), após simplificações, chegamos a

$$\pounds_{\bar{m}} K_{\alpha\beta} = N n^\mu \nabla_\mu K_{\alpha\beta} - 2N K_{\mu\beta} K^\mu_\alpha - K_{\mu\beta}(D^\mu N) n_\alpha - K_{\alpha\mu}(D^\mu N) n_\beta. \quad (4.83)$$

Vamos projetar essa equação usando o projetor ortogonal:

$$\begin{aligned} \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta \pounds_{\bar{m}} K_{\mu\nu} &= \pounds_{\bar{m}} K_{\alpha\beta} = \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta (N n^\sigma \nabla_\sigma K_{\mu\nu} - 2N K_{\sigma\nu} K^\sigma_\mu \\ &\quad - K_{\sigma\nu}(D^\sigma N) n_\mu - K_{\mu\sigma}(D^\sigma N) n_\nu) \quad (4.84) \\ &= N \gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta n^\sigma \nabla_\sigma K_{\mu\nu} - 2N K_{\sigma\beta} K^\sigma_\alpha. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\gamma^\mu_\alpha \gamma^\nu_\beta n^\sigma \nabla_\sigma K_{\mu\nu} = \frac{1}{N} \pounds_{\bar{m}} K_{\alpha\beta} + 2K_{\sigma\beta} K^\sigma_\alpha. \quad (4.85)$$

Inserindo em (4.82),

$$\gamma_{\alpha\mu}\gamma^{\nu}_{\beta}n^{\sigma}n^{\rho 4}R^{\mu}_{\rho\nu\sigma} = [-K_{\alpha\sigma}\nabla_{\beta}(n^{\sigma})+\frac{1}{N}D_{\beta}D_{\alpha}N+\frac{1}{N}\pounds_{\bar{m}}K_{\alpha\beta}+2K_{\sigma\beta}K^{\sigma}_{\alpha}], \tag{4.86}$$

e portanto

$$\gamma_{\alpha\mu}\gamma^{\nu}_{\beta}n^{\sigma}n^{\rho 4}R^{\mu}_{\rho\nu\sigma} = \frac{1}{N}\pounds_{\bar{m}}K_{\alpha\beta} + \frac{1}{N}D_{\alpha}D_{\beta}N + K_{\alpha\mu}K^{\mu}_{\beta}. \tag{4.87}$$

A equação (4.87) é conhecida como equação de Ricci. Combinando com a equação de Gauss contraída, ficamos com

$$\gamma^{\mu}_{\alpha}\gamma^{\nu 4}_{\beta}R_{\mu\nu} = -\frac{1}{N}\pounds_{\bar{m}}K_{\alpha\beta} - \frac{1}{N}D_{\alpha}D_{\beta}N +^{3} R_{\alpha\beta} + KK_{\alpha\beta} - 2K_{\alpha\mu}K^{\mu}_{\beta}. \tag{4.88}$$

Vamos agora contrair com $\gamma^{\alpha\beta}$

$$\gamma^{\mu\nu 4}R_{\mu\nu} = -\frac{1}{N}\gamma^{ij}\pounds_{\bar{m}}K_{ij} - \frac{1}{N}D^{i}D_{i}N +^{3} R + K^{2} - 2K^{ij}K_{ij}. \tag{4.89}$$

Temos $\gamma^{\mu\nu 4}R_{\mu\nu} = (g^{\mu\nu} + n^{\mu}n^{\nu})^{4}R_{\mu\nu} =^{4} R + n^{\mu}n^{\nu 4}R_{\mu\nu}$, e também

$$-\frac{1}{N}\gamma^{ij}\pounds_{\bar{m}}K_{ij} = -\frac{1}{N}(\pounds_{\bar{m}}\gamma^{ij}K_{ij} - K_{ij}\pounds_{\bar{m}}\gamma^{ij}) = -\frac{1}{N}(\pounds_{\bar{m}}K - K_{ij}\pounds_{\bar{m}}\gamma^{ij}). \tag{4.90}$$

Note que aparece um termo com a derivada de lie da métrica inversa. Usando (4.74), podemos escrever

$$\begin{aligned} \pounds_{\bar{m}}(\gamma^{ik}\gamma_{kj}) &= \pounds_{\bar{m}}(\delta^{i}_{j}) = 0 = \\ &\quad \pounds_{\bar{m}}(\gamma^{ik})\gamma_{kj} + \pounds_{\bar{m}}(\gamma_{kj})\gamma^{ik} \\ \gamma^{lj}\pounds_{\bar{m}}(\gamma^{ik})\gamma_{kj} + \gamma^{lj}\gamma^{ik}\pounds_{\bar{m}}(\gamma_{kj}) &= \pounds_{\bar{m}}(\gamma^{\imath l}) + \gamma^{lj}\gamma^{ik}\pounds_{\bar{m}}(\gamma_{kj}) = 0. \end{aligned} \tag{4.91}$$

Ou seja

$$\begin{aligned} \pounds_{\bar{m}}(\gamma^{\imath l}) &= -\gamma^{lj}\gamma^{ik}\pounds_{\bar{m}}(\gamma_{kj}) = 2N\gamma^{lj}\gamma^{ik}K_{kj} \\ \pounds_{\bar{m}}(\gamma^{\imath l}) &= 2NK^{il}. \end{aligned} \tag{4.92}$$

Substituindo (4.90),

$$-\frac{1}{N}\gamma^{ij}\pounds_{\bar{m}}K_{ij} = -\frac{1}{N}(\pounds_{\bar{m}}K - 2NK_{ij}K^{ij}). \tag{4.93}$$

Substituindo em (4.89),

$${}^{4}R + n^{\mu}n^{\nu 4}R_{\mu\nu} = -\frac{1}{N}(\pounds_{\bar{m}}K) - \frac{1}{N}D^{i}D_{i}N +^{3} R + K^{2}. \tag{4.94}$$

Combinando com a relação escalar de Gauss, chegamos finalmente à decomposição total do tensor de riemman do espaço-tempo em função somente da geometria das hipersuperfícies espaciais:

$$^4R =^3 R + K^2 + K_{ij}K^{ij} - \frac{2}{N}\pounds_{\bar{m}}K - \frac{2}{N}D^iD_iN. \tag{4.95}$$

4.12 Formalismo ADM da Relatividade Geral

Agora podemos reescrever as equações de Einstein usando o formalismo Hamiltoniano. Faremos isso em detalhes para o caso de não haver campos de matéria (vácuo). Lembre que a Relatividade Geral tem um princípio variacional:

$$\delta S = \delta \int^4 R\sqrt{-g}d^4x = 0, \tag{4.96}$$

onde g é o determinante da métrica, $g = \det(g_{\alpha\beta})$.

De (4.24), pode se mostrar que $\sqrt[2]{-g} = N\sqrt[2]{\gamma}$ onde $g = \det(\gamma_{\alpha\beta})$. Assim,

$$\delta \int [N(^3R + K^2 + K_{ij}K^{ij}) - 2\pounds_{\bar{m}}K - 2D^iD_iN]\sqrt[2]{\gamma}d^4x = 0. \tag{4.97}$$

Vamos analisar o termo $\pounds_{\bar{m}}K$

$$\pounds_{\bar{m}}K = Nn^\mu\nabla_\mu K = N[\nabla_\mu(n^\mu K) - K\nabla_\mu(n^\mu)] = N[\nabla_\mu(n^\mu K) + K^2]. \tag{4.98}$$

Porém, o termo

$$\int N\nabla_\mu(n^\mu K)\sqrt[2]{\gamma}d^4x = \int \nabla_\mu(n^\mu K)\sqrt[2]{-g}d^4x, \tag{4.99}$$

é um termo de superfície, que iremos desprezar. Da mesma forma, o termo D^iD_iN é de superfície quando integrado em d^3x

$$\int D^iD_iN\sqrt[2]{\gamma}d^3x = 0. \tag{4.100}$$

Assim ficamos com

$$\delta \int N(^3R + K^2 + K_{ij}K^{ij} - K^2)\sqrt[2]{\gamma}d^3xdt = 0, \tag{4.101}$$

ou

$$\delta \int N[^3R + K^2 + (\gamma^{ik}\gamma^{jl} - \gamma^{ij}\gamma^{kl})K_{ij}K_{kl}]\sqrt[2]{\gamma}d^3xdt = 0. \quad (4.102)$$

Onde, de (4.74) , temos que

$$\pounds_{\bar{m}}\gamma_{ij} = -2NK_{ij} \rightarrow (\pounds_{\partial/\partial t} - \pounds_{\beta})\gamma_{ij} = -2NK_{ij}, \quad (4.103)$$

ou seja

$$K_{ij} = \frac{1}{2N}(\gamma_{ik}D_j\beta^k + \gamma_{jk}D_i\beta^k - \dot{\gamma}_{ij}). \quad (4.104)$$

A densidade lagrangiana do sistema, é portanto, função de $(\gamma_{ij}, \dot{\gamma}_{ij}, \beta, N)$

$$\mathcal{L}(\gamma_{ij}, \dot{\gamma}_{ij}, \beta, N) = N[^3R + K^2 + (\gamma^{ik}\gamma^{jl} - \gamma^{ij}\gamma^{kl})K_{ij}K_{kl}]\sqrt[2]{\gamma}. \quad (4.105)$$

Podemos agora passar para o formalismo hamiltoniano. O primeiro passo é calcular os momenta conjugado associados aos graus de liberdade da lagrangeana $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\gamma_{ij}, \dot{\gamma}_{ij}, \beta, N)$. Note que $\dot{N}, \dot{\beta}$ não aparecem na lagrangeana, de modo que

$$\begin{aligned} \pi_N &= \frac{\partial L}{\partial \dot{N}} = 0 \quad (4.106) \\ \pi_{\beta i} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}_i} = 0 \end{aligned}$$

são vínculos primários da teoria. Podemos mostrar por cálculo direto que

$$\pi_{ij} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} = \sqrt{\gamma}(\gamma^{ij}K - K^{ij}). \quad (4.107)$$

A densidade hamiltoniana será

$$\mathcal{H} = \pi^{ij}\dot{\gamma}_{ij} - \mathcal{L}(\gamma_{ij}, \pi_{ij}, \beta^i, N). \quad (4.108)$$

Desprezando termos de superfície, chegamos facilmente a

$$H(\gamma^{ij}, \pi^{ij}, N, \beta^i) = \int d^3x \sqrt[2]{\gamma}[N(K^2 + R - K_{ij}K^{ij}) - 2\beta^i(D_iK - D_jK_i^j)]. \quad (4.109)$$

Podemos agora calcular as equações de movimento e achar as equações de Einstein na separação 3+1. Para isso, basta calcular explicitamente as equações de Hamilton

$$\begin{aligned} \frac{\delta H}{\delta \pi^{ij}} &= \dot{\gamma}_{ij} \quad (4.110) \\ \frac{\delta H}{\delta \gamma_{ij}} &= -\dot{\pi}^{ij}. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{\delta H}{\delta \pi^N} &= \dot{N} \\ \frac{\delta H}{\delta N} &= -\dot{\pi}^N, \end{aligned} \tag{4.111}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\delta H}{\delta \pi^{\beta i}} &= \dot{\beta}_i \\ \frac{\delta H}{\delta \beta^i} &= -\dot{\pi}^N. \end{aligned} \tag{4.112}$$

De (4.106), temos que (4.111) e (4.112) implicam que

$$\begin{aligned} K^2 + R - K_{ij}K^{ij} &\approx 0 \\ D_iK - D_jK_i^j &\approx 0. \end{aligned} \tag{4.113}$$

Ou seja, a hamiltoniana da relatividade geral é um vínculo $H \approx 0$.Analisando (4.109), vemos que N e β^i são multiplicadores de Lagrange associados aos vínculos acima. Isso era esperado, pois a relatividade geral é invariante sob uma transformação arbitrária de coordenadas, e N e β^i especificam como as coordenadas de uma seção espacial se relacionam com as coordenadas de uma outra. Agora, vamos estudar a quantização desse sistema usando o procedimento de Dirac .

Capítulo 5

A equação de Wheeler-deWitt

De posse de uma formulação hamiltoniana da relatividade geral, vamos proceder agora a sua quantização. Vamos adicionar um campo escalar ϕ com potencial arbitrário $V(\phi)$ minimamente acoplado a gravitação, de modo a modelar o universo primordial, como explicaremos mais adiante. Repetindo os cálculos da seção anterior, pode-se mostrar que chegamos a [17]

$$H_t = \int d^3xNH + \beta^j H_j, \tag{5.1}$$

onde

$$\begin{aligned} H &= kG_{ijkl}\pi^{ij}\pi^{kl} + \frac{1}{2}\sqrt{\gamma}\pi_\phi^2 + \\ &\sqrt{\gamma}[-k^{-1}({}^3R) + \frac{1}{2}\gamma^{ij}\partial_i\phi\partial_j\phi + V(\phi)] \\ H_j &= -2D_i\pi^i_j + \pi_\phi\partial_j\phi, \end{aligned} \tag{5.2}$$

e

$$\begin{aligned} \pi^{ij} &= -\sqrt{\gamma}(K^{ij} - \gamma^{ij}K) \equiv G^{ijkl}(\gamma_{kl} - D_k\beta_l - D_l\beta_k) \\ K_{ij} &= -\frac{1}{2N}(\dot{\gamma}_{ij} - D_i\beta_j - D_j\beta_i), \end{aligned} \tag{5.3}$$

onde

$$G^{ijkl} = \frac{1}{2}\sqrt{\gamma}\left(\gamma^{ik}\gamma^{jl} + \gamma^{il}\gamma^{jk} - 2\gamma^{ij}\gamma^{kl}\right) \tag{5.4}$$

$$G_{ijkl} = \frac{1}{2}\sqrt{\gamma}\left(\gamma_{ik}\gamma_{jl} + \gamma_{il}\gamma_{jk} - \gamma_{ij}\gamma_{kl}\right), \tag{5.5}$$

e

$$\pi_\phi = \frac{\sqrt[2]{\gamma}}{N}(\dot{\phi} - N^i \partial_i \phi), \tag{5.6}$$

com $k = \frac{16\pi G}{c^4}$. Calculando as equações de movimento, temos que a teoria é vinculada, onde como antes, N e β^j são multiplicadores de lagrange associados aos vínculos hamiltoniano $H \approx 0$ e de momentum $H_j \approx 0$. Vamos seguir agora a receita da quantização canônica para obtermos nossa teoria de gravitação quântica.

Vamos promover nossos graus de liberdade $\phi, \gamma_{ij}, \pi_\phi, \pi^{ij}$ a operadores agindo sobre uma função de onda:

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{ij}\Psi[\gamma_{ij}, \phi] &= \gamma_{ij}\Psi[\gamma_{ij}, \phi] \\ \hat{\pi}_{ij}\Psi[\gamma_{ij}, \phi] &= -i\hbar\frac{\delta}{\delta\gamma_{ij}}\Psi[\gamma_{ij}, \phi] \\ \hat{\phi}\Psi[\gamma_{ij}, \phi] &= \phi\Psi[\gamma_{ij}, \phi] \\ \hat{\pi}_\phi\Psi[\gamma_{ij}, \phi] &= -i\hbar\frac{\delta}{\delta\phi}\Psi\left[\gamma_{ij}, \phi\right]. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Usando o procedimento de Dirac, temos que impor

$$\begin{aligned} H\left|\Psi\right\rangle &= 0 \\ H_j\left|\Psi\right\rangle &= 0. \end{aligned} \tag{5.8}$$

As equações acima são, em representação de coordenadas,

$$[-\hbar^2(kG_{ijkl}\frac{\delta}{\delta\gamma_{ij}}\frac{\delta}{\delta\gamma_{kl}} + \frac{1}{2}\sqrt{\gamma}\frac{\delta^2}{\delta^2\phi}) + U]\Psi[\gamma_{ij}, \phi] = 0, \tag{5.9}$$

onde

$$U = \gamma^{1/2}[-k^{-1}({}^3R) + \frac{1}{2}\gamma^{ij}\partial_i\phi\partial_j\phi + V(\phi)] \tag{5.10}$$

e

$$-2\gamma_{li}D_j\frac{\delta}{\delta\gamma_{lj}}(\Psi[\gamma_{ij}, \phi]) + \frac{\delta}{\delta\phi}(\Psi[\gamma_{ij}, \phi])\partial_i\phi = 0. \tag{5.11}$$

A equação (5.11) impõe que a função de onda é invariante por reparametrização de coordenadas espaciais. A equação (5.9) é chamada equação de Wheeler-deWitt.

Vamos agora observar diversas características peculiares da nossa teoria de gravitação quântica.

Antes de tudo, note que as equações acima formam um sistema de equações diferenciais funcionais parciais acopladas. Matematicamente, elas não são muito bem definidas, e há diversos problemas técnicos, ao menos no caso geral. Além disso, as equações acima envolvem produtos de operadores, e portanto, é preciso escolher uma forma de ordenar esse produto. A situação é análoga ao que ocorre em mecânica quântica quando temos produtos do tipo xp na hamiltoniana e, ao quantizarmos a teoria, temos que escolher entre $\hat{x}\hat{p}, \hat{p}\hat{x}$,etc.

Note também que uma vez que γ_{ij} e $\pi_{ij} = -\sqrt{\gamma}(K^{ij} - \gamma^{ij}K)$ são canonicamente conjugadas, devem obedecer, em qualquer interpretação da mecânica quântica que envolva colapso da função de onda, relações de incerteza: não é possível conhecer os dois simultaneamente. Mas γ_{ij} e π_{ij} são grandezas geométricas e dizem respeito a geometria das hipersuperfícies e como esta é imersa na dimensão temporal. A conclusão é que a 4-geometria espaço-temporal deixa de ser bem definida. Essa é um dos resultados mais notáveis, presente em várias outras teorias de gravitação quântica: o espaço-tempo é um modelo efetivo de uma "geometria"quântico mais fundamental.

Além disso, note que a equação de Wheeler-deWitt não envolve o tempo: a função de onda é um funcional de $\Psi[\gamma_{ij}, \phi]$. A hamiltoniana é nula, uma das características mais notáveis da relatividade geral, relacionada com invariância por difeomorfismo da teoria, como explicamos anteriormente, e portanto precisa anular a função de onda. Ao juntarmos a relatividade geral e a mecânica quântica, portanto, perdemos o tempo: o que sobra é um estado quântico estático.

Esse é o famoso problema do tempo [18] na gravitação quântica canônica. Relacionado a isso, estão o fato de não conseguirmos definir um produto interno, nem checar se os operadores são auto adjuntos, ingredientes fundamentais no ferramental usual da mecânica quântica.

Como se não bastasse, ainda que todos os problemas acima estivessem resolvidos, ainda temos um grande problema ao aplicar a gravitação quântica ao universo como um todo: na escola de Copenhaguen, durante a medição de qualquer observável, que se dá pela interação de um sistema clássico com um quântico, a função de onda colapsa. Mas o universo, por definição é um sistema fechado: não há um domínio clássico fora dele. Como explicar o processo de observação em cosmologia quântica?

Alguns desses problemas podem ser aliviados e melhor entendidos realizando uma expansão semi-clássica da equação Wheeler-de Witt. É o que faremos a seguir

5.1 Expansão Semi-Clássica

Apesar de todos os problemas técnicos e conceituais, as equações que obtemos quantizando canonicamente a relatividade geral tem um mérito notável [19]. Para compreendê-lo, vamos começar analisando a equação de Klein-Gordon com um pontecial A^μ eletromagnético minimamente acoplado, onde por simplicidade mantemos somente a componente $A^0 = \phi$

$$(\frac{\hbar}{2}c^2\frac{\partial^2}{\partial^2 t}-\hbar^2\nabla^2+m^2c^2+\frac{2ie}{c^2}\phi\frac{\partial}{\partial t}-\frac{e^2\phi^2}{c^2}+\frac{ie\hbar}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t})\psi(\vec{x},t) = 0. \quad (5.12)$$

Vamos impor o ansatz $\psi(\vec{x},t) = e^{iS(\vec{x},t)/\hbar}$ onde

$$S(\vec{x},t) = c^2 S_0 + S_1 + c^{-2}S_2 + ... \quad (5.13)$$

Ou seja, expandimos S em potências do quadrado da velocidade da luz. Inserindo esse ansatz em (5.12) e comparando termos de ordens iguais em c, obtemos para ordem c^4

$$(\nabla S_0)^2 = 0 \to S_0 = S_0(t). \quad (5.14)$$

Em ordem c^2

$$-(\frac{\partial S_0}{\partial t})^2 + m^2 = 0, \quad (5.15)$$

que pode ser integrada imediatamente, nos dando

$$S_0 = \pm mt + const. \quad (5.16)$$

Nessa ordem, as funções de onda satisfazem

$$\psi(\vec{x},t) = e^{\pm\frac{mc^2 t}{\hbar}}. \quad (5.17)$$

Reconhecemos essa expressão como funções de onda para partículas com energia de repouso $E = \pm mc^2$, onde as energias negativas são um problema bem conhecido da equação de Klein-Gordon.

Em ordem c^0, temos

$$2m\dot{S}_1 + (\nabla S_1)^2 - i\hbar\nabla^2 S_1 + 2em\phi = 0. \tag{5.18}$$

Definindo $f \equiv e^{\frac{i}{\hbar}S_1}$, a equação acima pode ser escrita como

$$i\hbar\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 f + e\phi f. \tag{5.19}$$

Essa equação nada mais é que a equação de Schroedinger para o caso de uma partícula num potencial eletrostático. Vemos portanto que conseguimos recuperar a equação de Schroedinger a partir da equação de Klein-Gordon através de uma expansão semiclássica da função de onda em potências da velocidade da luz.

Indo até a ordem c^{-2} em nossa expansão pode-se mostrar que chegamos numa equação de Schroedinger modificada com termos de origem relativística. Com isso podemos calcular, por exemplo, um deslocamento nos níveis de energia para o átomo de hidrogênio devido a efeitos relativísticos. O resultado que se encontra não é o correto pois não leva em conta o spin do elétron, porém isso não será problema no que se segue: vamos expandir a equação de Wheeler-DeWitt em potências da massa de planck de forma análoga e checar qual é o seu limite semi-clássico.

Considere a equação de Wheeler-deWitt (6.30). Lembrando que $k = \frac{16\pi G}{c^4}$, vamos usar a massa $M = c^2/32\pi G$ como parâmetro de expansão. Impomos que a função de onda satisfaça

$$\Psi\left[\gamma_{ij}, \phi\right] = e^{iS/\hbar}. \tag{5.20}$$

Onde

$$S = MS_0 + S_1 + M^{-1}S_2 + ... \tag{5.21}$$

Seguindo a analogia com o caso da equação de Klein-Gordon, inserimos (5.20) na equação de Wheeler-deWitt e comparamos termos de orden iguais em M. Em ordem M^2 obtemos

$$\left(\frac{\delta S_0}{\delta\phi}\right)^2 = 0. \tag{5.22}$$

Em ordem M^1

$$\frac{1}{2}G_{ijkl}\frac{\delta S_0}{\delta\gamma_{ij}}\frac{\delta S_0}{\delta\gamma_{kl}} - 2c^2\sqrt{\gamma}R = 0. \tag{5.23}$$

A equação acima é equivalente as equações de Einstein no vácuo. Chegamos ao resultado notável de recuperar a gravitação clássica a partir da equação de Wheeler-deWitt. Procedendo para ordem M^2, obtemos

$$i\hbar G_{ijkl}\frac{\delta S_0}{\delta\gamma_{ij}}\frac{\delta f}{\delta\gamma_{kl}} = H_m f, \tag{5.24}$$

onde f satisfaz

$$f = D\,(h)\,e^{iS_1/\hbar} \tag{5.25}$$

e D satisfaz

$$G_{ijkl}\frac{\delta S_0}{\delta\gamma_{ij}}\frac{\delta D}{\delta\gamma_{kl}} - \frac{1}{2}(G_{ijkl}\frac{\delta^2 S_0}{\delta\gamma_{ij}\delta\gamma_{kl}} + g_{ij}\frac{\delta S_0}{\delta\gamma_{ij}}) = 0 \tag{5.26}$$

H_m é a Hamiltoniana devido ao campo escalar. Note que a equação (5.24) tem a forma da equação de Schroedinger, se identificarmos

$$\frac{\delta S_0}{\delta\gamma_{ij}}\frac{1}{\delta\gamma_{kl}} = \frac{\delta}{\delta\tau}. \tag{5.27}$$

A equação é conhecida como equação de Tomonaga-Schwinger e é a equação de Schroedinger para um campo de matéria se propagando num espaço curvo fixo:

$$i\hbar\frac{\delta f}{\delta\tau} = H_m f. \tag{5.28}$$

Continuando a expansão até a próxima ordem, identificamos as primeiras modificações da equação de Schroedinger devido a efeitos genuínos de gravitação quântica. Pode-se calcular o deslocamento nas linhas espectrais para o átomo de hidrogênio, que no entanto mostra-se muito pequeno e completamente impossível de ser verificado. Esses efeitos podem ser calculados em outras situações, como no espectro de potência da radiação cósmica de fundo, o que poderia levar a um resultado verificável eventualmente.

A teoria que encontramos, portanto, tem um limite semi-clássico bem definido e que se mostra exatamente o esperado: recuperamos as equações de Einstein, a equação de Schroedinger em espaços curvos, e contribuições de gravitação quântica muito pequenas, em ordens sucessivas.

Note também que recuperamos o tempo (definido pelos campos de matéria), e uma 4-geometria realizando a expansão semi-clássica.

Isso mostra que, apesar de não termos nenhum resquício do espaço-tempo na teoria de gravitação quântica canônica completa que desenvolvemos, toda a geometria aparece naturalmente quando estamos distantes da escala de Planck.

Devido a seu comportamente semi-clássico, acredita-se que a equação de Wheeler-deWitt seja válida ao menos numa escala intermediária entre a teoria de gravitação quântica "verdadeira"e as escalas que temos acesso hoje. Parece sensato, portanto, utilizá-la para constuir "modelos-brinquedo"e tentar aprender algo sobre a física na escala de Planck.

Cientes das limitações e hipóteses que assumimos, vamos agora aplicar toda a teoria desenvolvida até aqui para o universo como um todo.

5.2 Cosmologia Quântica

Como mencionamos, as equações da gravitação quântica canônica formam um sistema acoplado de equação diferenciais funcionais de segunda ordem para a 3-métrica γ_{ij} e campos de matéria. Em geral, essas equações são mal definidas matematicamente. Há porém uma aproximação que pode ser realizada quando quantizamos o universo como um todo, que simplifica os infinitos graus de liberdade em apenas um. Para isso, impomos que a 3-métrica tem a forma homogênea e isotrópica de Friedmann-Robertson-Walker, cujo único grau de liberdade é $a(t)$, o fator de escala. Modelos obtidos dessa forma são conhecidos como modelos de mini-superespaço. Essa aproximação viola o princípio da incerteza, porém espera-se que mantenha as características qualitativas da soluções. Para maiores discussões, ver [20].

A equação (5.11), que assegura que a função de onda seja invariante por mudanças arbitrárias de coordenadas espaciais é trivial para uma métria de FRW, que já é homogênea e isotrópica. A equação central será portanto a equação de Wheeler-deWitt. Inserindo a métrica de FRW, e escolhendo um ordenamento de fatores de Laplace-Beltrami, obtemos [17]

$$(\frac{\hbar^2 8\pi G}{12}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - \frac{\hbar^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + e^{6\alpha}V(\phi))\Psi(\alpha,\phi) = 0. \tag{5.29}$$

Onde fizemos novamente $c = 1$. Aqui, $\alpha = ln(a)$. Essa é a equação central que usaremos para obter o comportamento do universo primordial.

Como estamos quantizando o universo como um todo, não podemos aplicar a interpretação de Copenhaguen (note que esse problema não aparece se quantizarmos um sistema como um buraco negro, que tem uma singularidade clássica, mas que admite um observador clássico externo). Na interpretação de muitos mundos, extraímos informações da seguinte forma: resolvemos a equação de Wheeler-deWitt acima para um potencial especificado e interpetamos $|\Psi(\alpha, \phi)|^2$ como a distribuição de probabilidade dos universos para os valores de α, ϕ.

Na interpretação de de Broglie-Bohm, inseriremos, como antes, o ansatz

$$\Psi(\alpha, \phi) = R(\alpha, \phi)e^{\frac{i}{\hbar}S(\alpha,\phi)}, \tag{5.30}$$

e usaremos as equações de movimento para obter as trajetórias bohmianas

$$\pi_\alpha = \frac{\partial S(\alpha, \phi)}{\partial \alpha}, \pi_\phi = \frac{\partial S(\alpha, \phi)}{\partial \phi}. \tag{5.31}$$

Assim, evitamos a interpretação probabilística na cosmologia quântica [21], mas precisamos impor condições iniciais para o universo $\alpha(0), \phi(0)$. As diferentes interpretações da mecânica quântica, portanto, podem diferir drasticamente quando o sistema em estudo é o universo, ao menos em nossa formulação da gravitação quântica.

Capítulo 6

Cosmologia de Campo Escalar com Potencial Exponencial

6.1 Cosmologia Clássica

Vamos aplicar todas as ideias desenvolvidas até aqui num modelo concreto. Nesse trabalho, vamos utilizar o potencial exponencial

$$V(\phi) = V_0 e^{-\lambda\sqrt{8\pi G}\phi}, \tag{6.1}$$

onde V_0, λ são constantes. Tais potenciais aparecem naturalmente em teorias de Kaluza-Klein, super-cordas, super-gravidade, entre outras [22]. Além disso, foi mostrado que tal potencial gera soluções atratoras, ou seja, um grande conjunto de condições iniciais do universo tende assintoticamente a uma única solução, o que alivia problemas de ajuste fino. Faremos uma breve revisão da cosmologia clássica desse sistema. Maiores detalhes podem ser vistos em [23]

Iremos resolver o problema usando a teoria de Hamilton-Jacobi para facilitar a compreensão do análogo quântico. A lagrangeana de um campo escalar minimamente acoplado a gravitação é, desprezando termos de superfície,

$$S = -\frac{3}{8\pi G}\int d^4x\sqrt[2]{-g}R + \int d^4x\sqrt[2]{-g}[\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi)]. \tag{6.2}$$

Impondo a métrica homogênea e isotrópic de FRW, e o potencial exponencial, obtemos

$$S = \int d^4x \left(-\frac{3}{N8\pi G} e^{\alpha} (e^{\alpha}\dot{\alpha})^2 + \frac{1}{2N} e^{3\alpha} \dot{\phi}^2 - N e^{3\alpha} V(\phi) \right), \quad (6.3)$$

onde N é a função lapso e $\alpha = \ln(a)$. Os momenta canonicamente conjugados são

$$\pi_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}} = -\frac{6}{8\pi G N} e^{3\alpha} \dot{\alpha} \rightarrow \dot{\alpha} = -\frac{8\pi G N}{6} e^{-3\alpha} \pi_a \quad (6.4)$$

$$\pi_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{e^{3\alpha}}{N} \dot{\phi} \rightarrow \dot{\phi} = N e^{-3\alpha} \pi_\phi \quad (6.5)$$

$$\pi_N = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{N}} = 0. \quad (6.6)$$

A densidade hamiltoniana é portanto

$$\mathcal{H} = \pi_\alpha \dot{\alpha} + \pi_\phi \dot{\phi} + \pi_N \dot{N} - \mathcal{L}(N, \alpha, \phi, \pi_N, \pi_\alpha, \pi_\phi)$$

$$\mathcal{H} = N(-\frac{8\pi G}{12} e^{-3\alpha} \pi_\alpha^2 + \frac{1}{2} e^{-3\alpha} \pi_\phi^2 + e^{3\alpha} V_0 e^{-\lambda\sqrt{8\pi G}\phi}). \quad (6.7)$$

O vínculo primário da teoria impõe $-\frac{8\pi G}{12} e^{-3\alpha} \pi_\alpha^2 + \frac{1}{2} e^{-3\alpha} \pi_\phi^2 + e^{3\alpha} V_0 e^{-\lambda\sqrt{8\pi G}\phi} \approx 0$. De agora em diante vamos escolher o gauge de coordenadas onde $N = 1$. Nossa teoria tem dois graus de liberdade, α, ϕ. Portanto, deveríamos ter 4 condições de contorno para achar uma solução completa, por exemplo $\alpha(0), \phi(0), \pi_\phi(0), \pi_\alpha(0)$. Entretanto, como o sistema é vinculado, só 3 dessas constantes são independentes. Assim a solução completa será dada por um conjunto $\alpha(t), \phi(t)$ com 3 constantes arbitrárias.

A equação de Hamilton-Jacobi para nosso problema é

$$\mathcal{H}(\alpha, \phi, \frac{\partial S}{\partial \alpha}, \frac{\partial S}{\partial \phi}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (6.8)$$

Como $\mathcal{H} \approx 0$, $\frac{\partial S}{\partial t} \approx 0$, portanto

$$-\frac{8\pi G}{12} e^{-3\alpha} (\frac{\partial S}{\partial \alpha})^2 + \frac{1}{2} e^{-3\alpha} (\frac{\partial S}{\partial \phi})^2 + e^{3\alpha} V_0 e^{-\lambda\sqrt{8\pi G}\phi} \approx 0. \quad (6.9)$$

Essa é uma equação diferencial parcial não linear para $S(a, \phi)$. Olhando essa expressão, parece dificíl conseguir uma solução analítica.

Há porém uma transformação de coordenadas que facilita nosso trabalho. Sejam

$$u = \frac{\sqrt[2]{2V_0}}{3}\frac{e^{3\alpha-(\lambda\sqrt[2]{6}/2)\phi}}{1-(\lambda/\sqrt[2]{6})^2}(\cosh(X)+\frac{\lambda}{\sqrt[2]{6}}senh(X)) \quad (6.10)$$
$$v = \frac{\sqrt[2]{2V_0}}{3}\frac{e^{3\alpha-(\lambda\sqrt[2]{6}/2)\phi}}{1-(\lambda/\sqrt[2]{6})^2}(senh(X)+\frac{\lambda}{\sqrt[2]{6}}\cosh(X)),$$

onde

$$X = 3\phi - \frac{\lambda\sqrt[2]{6}}{2}\alpha \quad (6.11)$$

Não provaremos, mas nessas novas variáveis e escolhendo unidades em que $8\pi G = 6$, a equação de Hamilton-Jacobi torna-se [22]

$$(\frac{\partial S(u,v)}{\partial u})^2 - (\frac{\partial S(u,v)}{\partial v})^2 = 1. \quad (6.12)$$

Uma solução incompleta com somente uma constante arbitrária pode ser encontrada facilmente. Vamos impor

$$S(u,v) = F(u) + G(v). \quad (6.13)$$

Temos então

$$(\frac{dF}{du})^2 = 1 + (\frac{dG}{dv})^2 \quad (6.14)$$

Como o lado direito é função somente de v e o lado esquerdo, somente de u,

$$(\frac{dF}{du})^2 = z^2 \rightarrow F(u) = \pm zu \quad (6.15)$$
$$(\frac{dG}{dv})^2 = z^2 - 1 \rightarrow G(v) = \pm\sqrt[2]{z^2-1}v. \quad (6.16)$$

Logo,

$$S(u,v) = \pm zu \pm \sqrt[2]{z^2-1}v \quad (6.17)$$

Onde z é uma constante arbitrária, e os sinais podem ser escolhidos como mais ou menos livremente. De agora em diante vamos usar somente a solução positiva, $S(u,v) = zu + \sqrt[2]{z^2-1}v$.

Podemos achar também a segunda equação de movimento $\frac{\partial S}{\partial z} = \beta$ onde β é outra constante arbitrária, porém as relações que achamos já são suficientes para explorar o comportamento dinâmico do sistema. Da teoria de Hamilton-Jacobi, temos

$$\dot{\alpha} = -e^{-3\alpha}\pi_a = -e^{-3\alpha}\frac{\partial S}{\partial \alpha} = -e^{-3\alpha}(\frac{\partial S}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial S}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \alpha}) \quad (6.18)$$

$$\dot{\phi} = e^{-3\alpha}\pi_\phi = e^{-3\alpha}\frac{\partial S}{\partial \phi} = e^{-3\alpha}(\frac{\partial S}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{\partial S}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \phi}). \quad (6.19)$$

Podemos calcular as derivadas explicitamente e visualizar o campo vetorial $(\dot{\alpha}, \dot{\phi})$ no plano α, ϕ. O resultado é

$$\dot{\alpha} = -\sqrt{2}\sqrt{V_0}e^{-\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda\phi}\left(z\cosh\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\alpha\lambda - 3\phi\right) - \sqrt{z^2-1}senh\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\alpha\lambda - 3\phi\right)\right), \quad (6.20)$$

e

$$\dot{\phi} = \sqrt{2}\sqrt{V_0}e^{-\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda\phi}\left(\sqrt{z^2-1}\cosh\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\alpha\lambda - 3\phi\right) - zsenh\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\alpha\lambda - 3\phi\right)\right). \quad (6.21)$$

As curvas integrais serão soluções de

$$\frac{d\phi}{d\alpha} = \frac{\dot{\phi}}{\dot{\alpha}} = -\frac{\left(\sqrt{z^2-1}\cosh\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\alpha\lambda - 3\phi\right) - zsenh\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\alpha\lambda - 3\phi\right)\right)}{\left(z\cosh\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\alpha\lambda - 3\phi\right) - \sqrt{z^2-1}senh\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\alpha\lambda - 3\phi\right)\right)}. \quad (6.22)$$

As figuras fig(6.1),fig(6.2),fig(6.3),fig(6.4)mostram algumas das possíveis trajetórias do universo. Para esses e todos os outros gráficos, fizemos $V_0 = 1/2$.

Notamos que temos uma singularidade de big-crunch, ou seja, α tende a menos infinito em qualquer um dos casos, apesar de haverem retas que dividem a evolução em duas: em um caso,$\phi \to -\infty$ quando $\alpha \to \infty$, e no outro $\phi \to \infty$ quando $\alpha \to \infty$. De fato [22], as retas atratoras seguem

$$\phi(\alpha) = \frac{\lambda}{\sqrt{8\pi G}}\alpha \quad (6.23)$$

Note que para z grande, as curvas se aproximam de retas, conforme podemos ver analiticamente de (6.22). Nestes gráficos, α está na vertical.

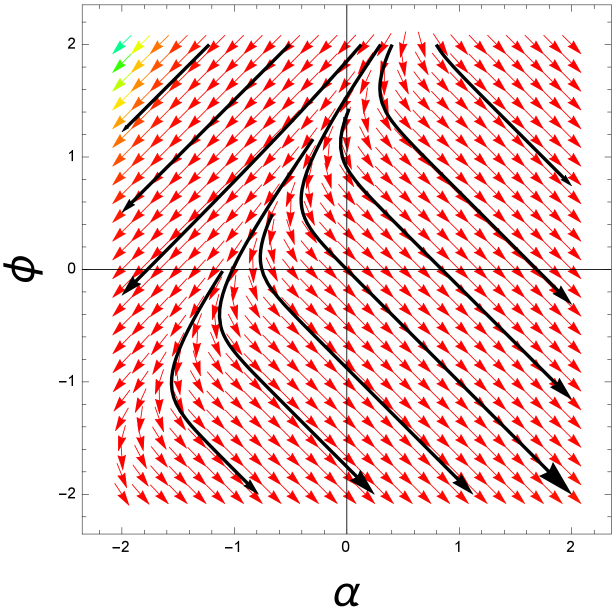

Figura 6.1: Trajetórias do universo para $\lambda = \sqrt{3}$,$z = 40$

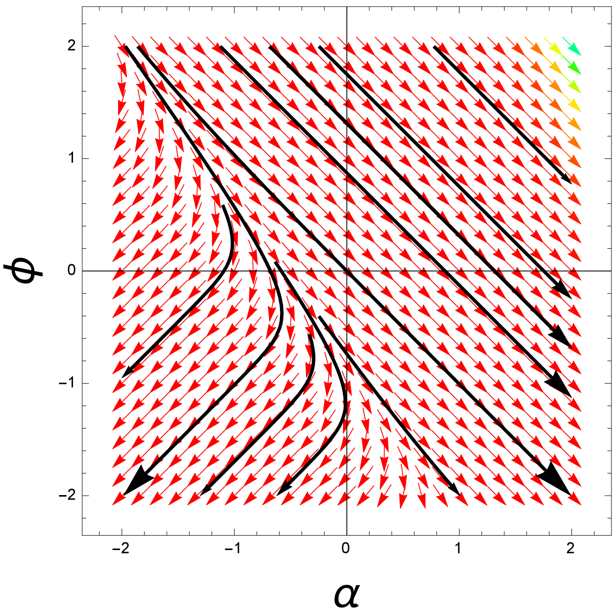

Figura 6.2: Trajetórias do universo para $\lambda = -\sqrt{3}$,$z = 40$

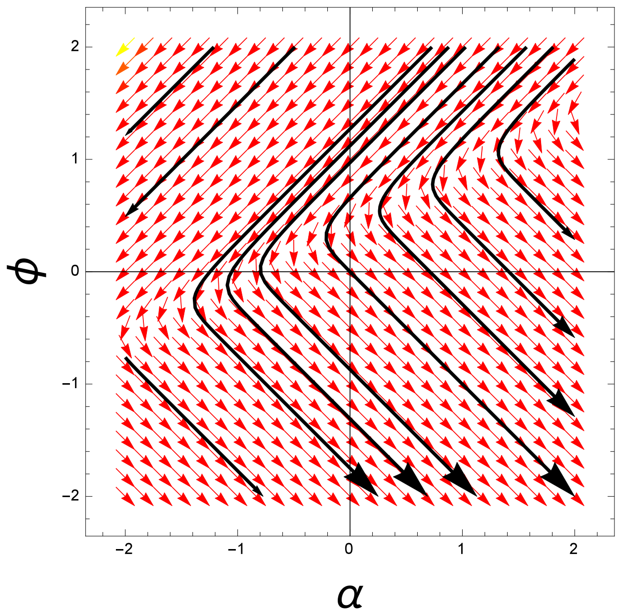

Figura 6.3: Trajetórias do universo para $\lambda = 5$,$z = 40$

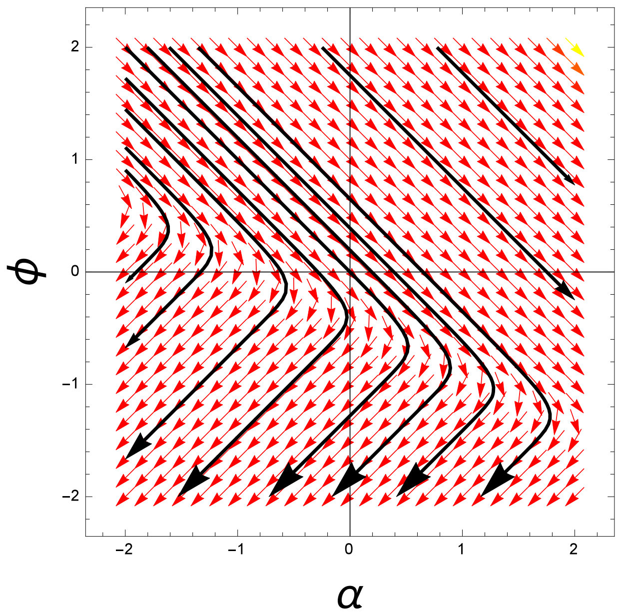

Figura 6.4: Trajetórias do universo para $\lambda = -5$,$z = 40$

Note que $\dot{\alpha}$ nunca pode ser igual a zero, pois

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha} &= -\sqrt{2}\sqrt{V_0}e^{-\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda\phi} \\
\cdot\left(\begin{array}{c} z\cosh\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\alpha\lambda - 3\phi\right) - \\ \sqrt{z^2-1}senh\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\alpha\lambda - 3\phi\right)\end{array}\right) &= 0 \rightarrow \\
\tanh\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\alpha\lambda - 3\phi\right) &= \frac{z}{\sqrt{z^2-1}} > 1, \quad (6.24)
\end{aligned}$$

e sabemos que tanh não pode ser maior que 1. Isso já era esperado da equação de Friedmann, $\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \propto \rho$. Como $\rho = \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)\right) \neq 0$, logo $\dot{\alpha} \neq 0$. A singularidade do Big-Bang não pode ser evitada nesse modelo: $\dot{\alpha}$ nunca é nulo e sendo uma função contínua, não pode trocar de sinal.

A cosmologia cássica pode ser entendida com ainda mais profundidade a partir de uma análise dos pontos críticos do sistema. Os resultados [23], podem ser resumidos nas figuras abaixo:

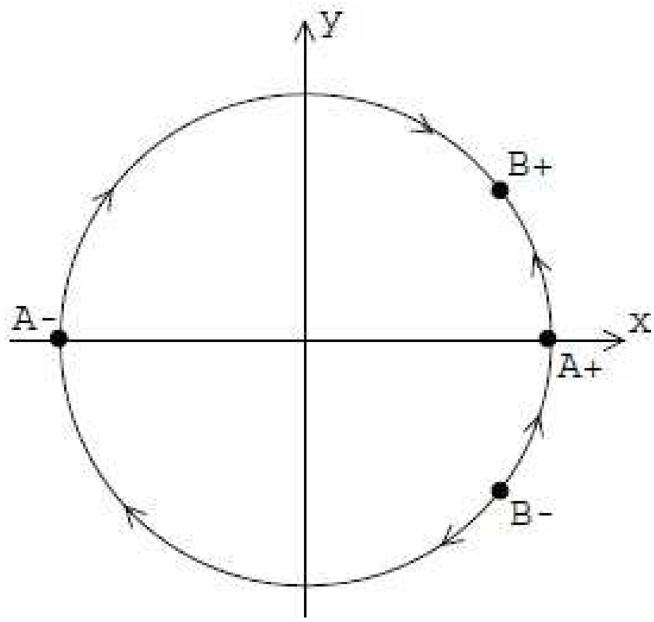

Figura 6.5: Espaço de fase bidimensional para $0 < \lambda^2 < 6$. Setas indicam evolução no tempo. Retirado de [23]

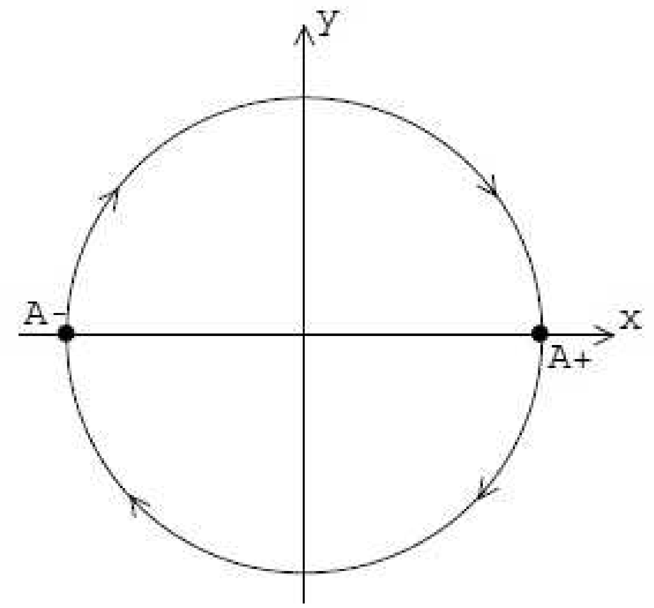

Figura 6.6: Espaço de fase bidimensional para $\lambda^2 > 6$. Setas indicam evolução no tempo. Retirado de [23]

Nas figuras 6.5,6.6,

$$x = \frac{\sqrt{8\pi G}\dot{\phi}}{\sqrt{6}H}, y = \frac{\sqrt{8\pi G}\sqrt{V}}{\sqrt{3}H} \tag{6.25}$$

onde H é o parâmetro de Hubble. Mostra-se também que

$$\frac{P_\phi}{\rho_\phi} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \tag{6.26}$$

onde $\frac{P_\phi}{\rho_\phi}$ é a equação de estado efetiva para o campo escalar ϕ, para o nosso caso onde fazemos $V > 0$. Os pontos A e B são pontos críticos do sistema. Para $\lambda^2 < 6$, os seguintes pontos críticos existem, $(y_A, x_A) = (0, 1), (0, -1)$ e $(y_B, x_B) = (\pm\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{6}}, \frac{\lambda}{6})$. Para $\lambda^2 < 6$, só dois pontos críticos existem: $(y_A, x_A) = (0, 1), (0, -1)$. Note que a equação de estado efetiva para o campo escalar nos pontos A e B é, respectivamente,

$$\frac{P_\phi}{\rho_\phi} = 1 \tag{6.27}$$

e

$$\frac{P_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\lambda^2}{3} - 1 \tag{6.28}$$

Dessa forma, se escolhermos $\lambda = \sqrt{3}$, temos um comportamento efetivo de poeira para grandes fatores de escala, no caso $\lambda^2 < 6$. Ainda de acordo com [23], o ponto $(y_A, x_A) = (0, -1)$ é sempre instável. O ponto $(y_A, x_A) = (0, 1)$ também é instável para $\lambda < \sqrt{6}$. Os pontos B são sempre estáveis assim como $(y_A, x_A) = (0, 1)$ para $\lambda > \sqrt{6}$.

As figuras fig(6.1),fig(6.3) mostram as trajetórias tendendo aos respectivos pontos críticos estáveis, para os casos $\lambda = 5 > \sqrt{6}$ e $\lambda = \sqrt{3} < \sqrt{6}$.

Vamos agora analisar a equação de Wheeler-DeWitt desse sistema a fim de descobrir se efeitos quânticos podem evitar a singularidade.

6.2 Cosmologia Quântica

A equação de Wheeler-De Witt nesse caso é

$$\left(\frac{\hbar^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - \frac{\hbar^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + e^{6\alpha}V_0 e^{-\lambda\sqrt{6}\phi}\right)\Psi(\alpha,\phi) = 0. \tag{6.29}$$

Vamos usar as coordenadas (u, v) como antes. Nessas coordenadas, a equação acima torna-se [22]

$$\hbar^2\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\Psi}{\partial v^2}\right) + \Psi(u,v) = 0. \tag{6.30}$$

A partir de agora, vamos fazer $\hbar = 1$. É fácil encontrar dois tipos de solução para a equação acima

6.2.1 Solução por separação multiplicativa de variáveis

Vamos impor que Ψ possa ser escrito como $\Psi(u, v) = \chi(u)\Phi(v)$.Substituindo na equação de Wheeler-deWitt, obtemos

$$\frac{d^2\chi}{du^2}\Phi - \frac{d^2\Phi}{dv^2}\chi + \chi\Phi = 0 \rightarrow \frac{d^2\chi}{du^2}\frac{1}{\chi} = -1 + \frac{d^2\Phi}{dv^2}\frac{1}{\Phi}. \tag{6.31}$$

O lado esquerdo depende somente de u e o direito somente de v,portanto ambos devem ser constantes. Seja λ^2 essa constante. Chegamos a um conjunto de 2 equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{d^2\chi}{du^2}\frac{1}{\chi} = \lambda^2 \tag{6.32}$$

$$\frac{d^2\Phi}{dv^2}\frac{1}{\Phi} = \lambda^2 + 1. \tag{6.33}$$

Seja $\chi = e^{ru}$ onde r é uma constante. Então,

$$r^2 e^{ru} - \lambda^2 e^{ru} = 0 \to r = \pm\lambda \tag{6.34}$$

Logo, a solução geral é

$$\chi = C_1 e^{\lambda u} + C_2 e^{-\lambda u}. \tag{6.35}$$

De forma análoga, chegamos a

$$\Phi = C_3 e^{\sqrt[2]{(\lambda^2+1)}v} + C_4 e^{-\sqrt[2]{(\lambda^2+1)}v}. \tag{6.36}$$

Dessa forma, temos que

$$\Psi(u,v) = (C_1 e^{\lambda u} + C_2 e^{-\lambda u})(C_3 e^{\sqrt[2]{(\lambda^2+1)}v} + C_4 e^{-\sqrt{(\lambda^2+1)}v}). \tag{6.37}$$

Se todas as constantes arbitrárias, $\lambda, C_1, C_2, C_3, C_4$ forem reais, $\Psi(u,v)$ é real, e dessa forma, sua fase é nula. Da teoria de de Broglie-Bohm, temos que $\dot{\alpha} \propto \frac{\partial S}{\partial \alpha} = 0$. Portanto, as trajetórias bohmianas são todas estáticas. Para achar resultados mais interessantes, podemos fazer λ ou uma das constantes C_i serem números puramente complexos. Analisemos o primeiro caso: se $\lambda = iz$ com $z \in \mathbb{R}$, então

$$\Psi(u,v) = (C_1 e^{izu} + C_2 e^{-izu})(C_3 e^{\sqrt[2]{(-z^2+1)}v} + C_4 e^{-\sqrt[2]{(-z^2+1)}v}). \tag{6.38}$$

Fatorando -1 da raiz quadrada, chegamos a forma equivalente

$$\Psi(u,v) = (C_1 e^{izu} + C_2 e^{-izu})(C_3 e^{i\sqrt[2]{(z^2-1)}v} + C_4 e^{-i\sqrt[2]{(z^2-1)}v}). \tag{6.39}$$

Note que nesse caso, fazendo algumas das constantes serem 0, chegamos a

$$S = \pm zu \pm \sqrt[2]{z^2-1}v \tag{6.40}$$

que nada mais é que a função principal de Hamilton que havíamos achado no caso clássico. Logo, a função de onda $\Psi = e^{\frac{i}{\hbar}S}$ onde

$S(u,v) = zu + \sqrt[2]{z^2-1}v$, solução da equação de Hamilton-Jacobi clássica é também solução da equação de Wheeler-De Witt. Como as equações de movimento são idênticas para o caso clássico e quântico (somente S muda) na interpretação de de Broglie-Bohm, isso implica que para essa solução, as trajetórias Bohmianas são idênticas às trajetórias clássicas. Para introduzir desvios de natureza quântica da solução clássica, e tendo em vista a linearidade da equação de Wheeler-DeWitt, podemos construir uma superposição

$$\Psi(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty} A(z)e^{iS}dz, \tag{6.41}$$

como faremos adiante. Note que também podemos chegar a soluções não triviais fazendo uma das constantes C_i ser puramente complexa. Vamos analisar cada um desses casos a seguir

Superposição de soluções clássicas

Seguiremos [17], escolhendo uma curva gaussiana $A(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt[2]{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(z-\bar{z})^2}{\sigma^2}}$ para a superposição, onde $\bar{z}$ é o valor médio de z e σ o desvio padrão. Vamos recuperar temporariamente $\hbar$ para mostrarmos mais facilmente o limite clássico:

$$\Psi(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt[2]{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(z-\bar{z})^2}{\sigma^2}}e^{\frac{i}{\hbar}(zu+\sqrt[2]{z^2-1}v)}dz. \tag{6.42}$$

Vamos fazer uma expansão de Taylor de $S(u,v)$ em torno do valor médio $\bar{z}$.

$$S = S(\bar{z}) + \frac{\partial S}{\partial z}(\bar{z})(z-\bar{z}) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 S}{\partial z^2}(\bar{z})(z-\bar{z})^2 + ... \tag{6.43}$$

Vamos assumir $(z-\bar{z})$ pequeno, de modo a desprezar termos a partir da terceira ordem. Fazendo uma mudança de variáveis $y = z-\bar{z}$, obtemos

$$\Psi(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt[2]{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(y)^2}{\sigma^2}}e^{\frac{i}{\hbar}(S+S'y+\frac{1}{2}S''y^2)}dy. \tag{6.44}$$

Onde $S' = \frac{\partial S}{\partial z}(\bar{z}), S'' = \frac{\partial^2 S}{\partial z^2}(\bar{z})$. Assim

$$\Psi(u,v) = \frac{1}{\sigma\sqrt[2]{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(-\frac{1}{\sigma^2}+\frac{i}{\hbar}S'')y^2+\frac{i}{\hbar}S'y+\frac{i}{\hbar}S}dy. \tag{6.45}$$

A integral acima tem a forma de uma integral gaussiana

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx+c} dx = \sqrt[2]{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}+c}, \tag{6.46}$$

com $a = \frac{1}{2}(\frac{1}{\sigma^2} - \frac{i}{\hbar}S''), b = \frac{i}{\hbar}S', c = \frac{i}{\hbar}S$. Logo,

$$\Psi(u,v) = \frac{1}{\sigma\sqrt[2]{2\pi}} \sqrt[2]{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}+c} = \frac{1}{\sigma\sqrt[2]{2\pi}} \sqrt[2]{\frac{\pi}{\frac{1}{2}(\frac{1}{\sigma^2} - \frac{i}{\hbar}S'')}} e^{\frac{(\frac{i}{\hbar}S')^2}{4(\frac{1}{2}(\frac{1}{\sigma^2}-\frac{i}{\hbar}S''))}+\frac{i}{\hbar}S}. \tag{6.47}$$

Simplificando,

$$\Psi(u,v) = \sqrt[2]{\frac{1}{(1-\frac{i\sigma^2}{\hbar}S'')}} e^{\frac{(\frac{i}{\hbar}S')^2}{(2(\frac{1}{\sigma^2}-\frac{i}{\hbar}S''))}+\frac{i}{\hbar}S}. \tag{6.48}$$

Queremos usar a interpretação de de Broglie-Bohm. Para isso, temos que escrever $\Psi(u,v)$ como $\Psi(u,v) = R(u,v)e^{\frac{i}{\hbar}S(u,v)}$ onde R, S são funções reais. Vamos começar analisando o termo

$$e^{\frac{(\frac{i}{\hbar}S')^2}{2(\frac{1}{\sigma^2}-\frac{i}{\hbar}S'')}+\frac{i}{\hbar}S} = e^{\frac{i}{\hbar}S}.e^{\frac{-S'^2\sigma^2(\hbar^2+i\hbar\sigma^2S'')}{2(\hbar^4+\hbar^2\sigma^4S''^2)}} = e^{\frac{-S'^2\hbar^2\sigma^2}{2(\hbar^4+\hbar^2\sigma^4S''^2)}}.e^{\frac{i}{\hbar}S}.e^{\frac{i}{\hbar}\frac{-S'^2(\hbar^2\sigma^4S'')}{2(\hbar^4+\hbar^2\sigma^4S''^2)}}. \tag{6.49}$$

Agora, analisando o radical,

$$\sqrt[2]{\frac{1}{(1-\frac{i\sigma^2}{\hbar}S'')}} = \sqrt[2]{\frac{1+\frac{i\sigma^2}{\hbar}S''}{(1+\frac{\sigma^4}{\hbar^2}S''^2)}} = \sqrt[2]{\frac{1}{(1+\frac{\sigma^4}{\hbar^2}S''^2)}}.\sqrt[2]{1+\frac{i\sigma^2}{\hbar}S''}. \tag{6.50}$$

Sabe-se que em forma polar, a raiz de um número complexo pode ser expressa como $\sqrt[2]{re^{i\theta}} = \sqrt[2]{r}e^{i\theta/2}$. Logo, temos

$$\sqrt[2]{\frac{1}{(1-\frac{i\sigma^2}{\hbar}S'')}} = \sqrt[2]{\frac{1}{(1+\frac{\sigma^4}{\hbar^2}S''^2)}}.\sqrt[4]{1+\frac{\sigma^4}{\hbar}^2 S''^2}e^{\frac{i}{2}\tan^{-1}(\frac{\sigma^2S''}{\hbar})}. \tag{6.51}$$

Juntando tudo, temos portanto

$$\Psi(u,v) = \sqrt[2]{\frac{1}{(1+\frac{\sigma^4}{\hbar^2}S''^2)}}.\sqrt[4]{1+\frac{\sigma^4}{\hbar^2}S''^2}e^{\frac{-S'^2\hbar^2\sigma^2}{2(\hbar^4+\hbar^2\sigma^4S''^2)}}.e^{\frac{i}{\hbar}(\frac{\hbar}{2}\tan^{-1}(\frac{\sigma^2S''}{\hbar}))}e^{\frac{i}{\hbar}S}.e^{\frac{i}{\hbar}\frac{-S'^2(\hbar^2\sigma^4S'')}{2(\hbar^4+\hbar^2\sigma^4S''^2)}}. \tag{6.52}$$

Logo a fase quântica S é

$$S_q(u,v) = S_c + \frac{\hbar}{2}\tan^{-1}(\frac{\sigma^2 S''}{\hbar}) + \frac{-S'^2(\hbar^2\sigma^4 S'')}{2(\hbar^4+\hbar^2\sigma^4 S''^2)}. \tag{6.53}$$

onde S_c é a função principal de Hamilton para o caso clássico. Com essa função podemos proceder e calcular as trajetórias bohmianas. Como antes,

$$\dot{\alpha} = -e^{-3\alpha}\pi_a = -e^{-3\alpha}\frac{\partial S_q}{\partial\alpha} = -e^{-3\alpha}(\frac{\partial S_q}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{\partial S_q}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial\alpha}) \tag{6.54}$$

$$\dot{\phi} = e^{-3\alpha}\pi_\phi = e^{-3\alpha}\frac{\partial S_q}{\partial\phi} = e^{-3\alpha}(\frac{\partial S_q}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial\phi} + \frac{\partial S_q}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial\phi}). \tag{6.55}$$

Calculamos as curvas integrais dos campos vetoriais acima, que serão soluções de

$$\frac{d\phi}{d\alpha} = \frac{\dot{\phi}}{\dot{\alpha}} = -\frac{(\frac{\partial S_q}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial\phi} + \frac{\partial S_q}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial\phi})}{(\frac{\partial S_q}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{\partial S_q}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial\alpha})}. \tag{6.56}$$

Alguns dos resultados podem ser vistos nas figuras 6.7,6.8,6.9,6.10. Os efeitos quânticos são muito pequenos e não suficientes para evitar singularidade. Isso contrasta com os resultados de [22], onde foi mostrado que efeitos quânticos eliminam a singularidade, usando outra interpretação da mecânica quântica. Podemos observar que algumas trajetórias apresentam recolapso.

C_i complexo

Havíamos chegado a expressão

$$\Psi(u,v) = (C_1 e^{izu} + C_2 e^{-izu})(C_3 e^{i\sqrt[2]{(z^2-1)}v} + C_4 e^{-i\sqrt[2]{(z^2-1)}v}). \tag{6.57}$$

Seja $C_1 = i$. Então,

$$\begin{aligned}\Psi(u,v) &= C_2 e^{-izu}(C_3 e^{i\sqrt[2]{(z^2-1)}v} + C_4 e^{-i\sqrt[2]{(z^2-1)}v}) + \\ &\quad ie^{izu}(C_3 e^{i\sqrt[2]{(z^2-1)}v} + C_4 e^{-i\sqrt[2]{(z^2-1)}v}).\end{aligned} \tag{6.58}$$

Expandindo as multiplicações de exponenciais,

$$\begin{aligned}\Psi &= C_2 C_3 e^{i\sqrt[2]{(z^2-1)}v-izu} + C_2 C_4 e^{-i\sqrt[2]{(z^2-1)}v-izu} \\ &\quad +i(C_3 e^{i\sqrt[2]{(z^2-1)}v+izu} + C_4 e^{-i\sqrt[2]{(z^2-1)}v+izu})\end{aligned}$$

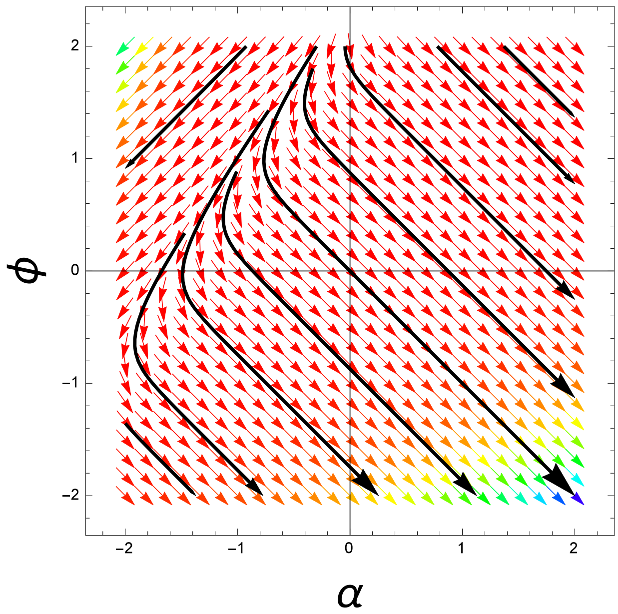

Figura 6.7: Trajetórias do universo para $\lambda = \sqrt{3}$,$z = 40$,$\sigma = 1$,$V_0 = 1/2$

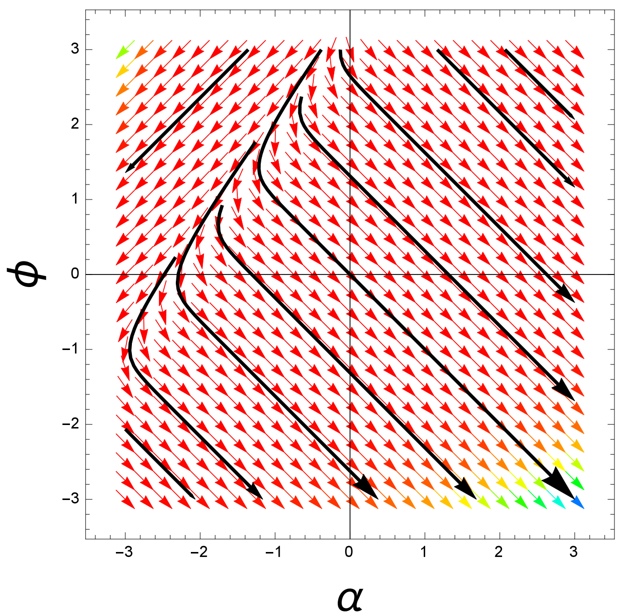

Figura 6.8: Trajetórias do universo para $\lambda = \sqrt{3}$,$z = 400$,$\sigma = 1$,$V_0 = 1/2$

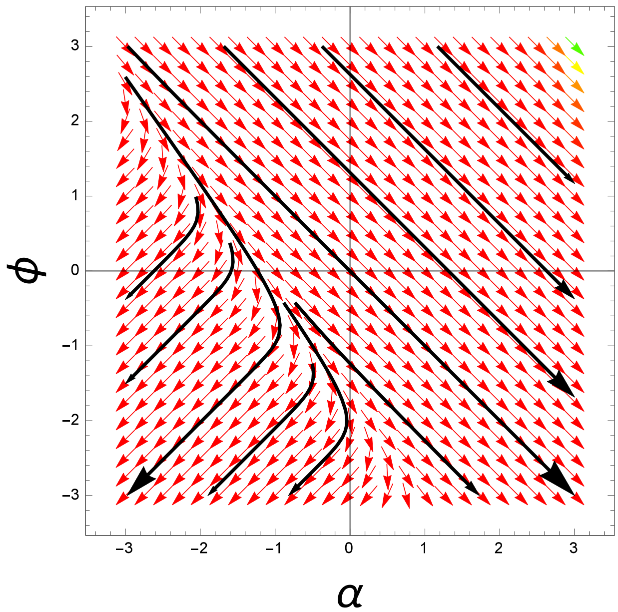

Figura 6.9: Trajetórias do universo para $\lambda = -\sqrt{3}$,$z = 40$,$\sigma = 1$,$V_0 = 1/2$

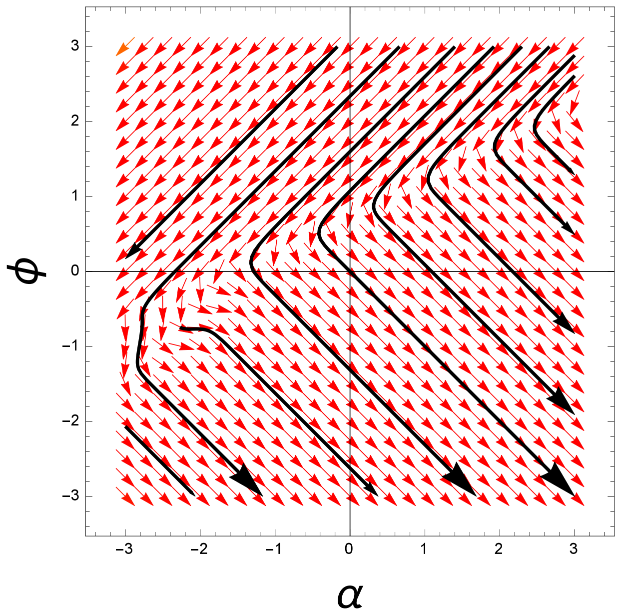

Figura 6.10: Trajetórias do universo para $\lambda = 5$,$z = 40$,$\sigma = 1$,$V_0 = 1/2$

$$
\begin{aligned}
\Psi \;=\; & C_2C_3\cos(\sqrt[2]{(z^2-1)}v - zu) + iC_2C_3sen(\sqrt[2]{(z^2-1)}v - zu) \\
& + C_2C_4(\cos(\sqrt[2]{(z^2-1)}v + zu)) - iC_2C_4sen(\sqrt[2]{(z^2-1)}v + zu) \\
& - C_3sen(\sqrt[2]{(z^2-1)}v + zu)) + iC_3\cos(\sqrt[2]{(z^2-1)}v + zu) \\
& - C_4sen(-\sqrt[2]{(z^2-1)}v + zu)) + iC_4\cos(-\sqrt[2]{(z^2-1)}v + zu).
\end{aligned}
$$

Ψ está escrito na forma $a + ib$. Passando para forma polar, temos $\Psi = \sqrt[2]{a^2+b^2}e^{i\arctan\left(\frac{b}{a}\right)}$. Nesse caso, chegamos a

$$
S = \arctan\left(\frac{\begin{array}{c} C_2C_3sen(\sqrt[2]{(z^2-1)}v - zu) - C_2C_4sen(\sqrt[2]{(z^2-1)}v + zu) \\ +C_3\cos(\sqrt[2]{(z^2-1)}v + zu) + C_4\cos(-\sqrt[2]{(z^2-1)}v + zu) \end{array}}{\begin{array}{c} C_2C_3\cos(\sqrt[2]{(z^2-1)}v - zu) + C_2C_4(\cos(\sqrt[2]{(z^2-1)}v + zu)) \\ -C_3sen(\sqrt[2]{(z^2-1)}v + zu)) - C_4sen(-\sqrt[2]{(z^2-1)}v + zu)) \end{array}}\right). \tag{6.59}
$$

Como antes, aplicamos as equações de movimento

$$
\begin{aligned}
\dot{\alpha} &= -e^{-3\alpha}\pi_a = -e^{-3\alpha}\frac{\partial S_q}{\partial \alpha} \qquad (6.60)\\
&= -e^{-3\alpha}(\frac{\partial S_q}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial S_q}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \alpha}) \\
\dot{\phi} &= e^{-3\alpha}\pi_\phi = e^{-3\alpha}\frac{\partial S_q}{\partial \phi} \qquad (6.61)\\
&= e^{-3\alpha}(\frac{\partial S_q}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{\partial S_q}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \phi}).
\end{aligned}
$$

Calculamos as possíveis trajetórias do universo para diferentes condições de contorno no gráfico a, ϕ. Os resultados podem ser vistos nas figuras 6.11,6.12,6.13. Vemos que a singularidade continua presente nestes modelos.

6.2.2 Solução por separação de variáveis aditiva

A equação de Wheeler-deWitt também pode ser resolvida com uma separação aditiva de variáveis. Vamos impor

$$
\Psi = \chi(u) + \Phi(v). \tag{6.62}
$$

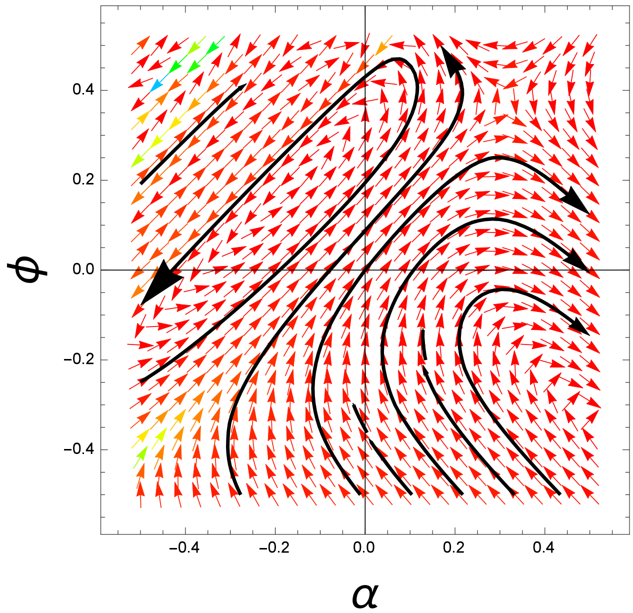

Figura 6.11: Trajetórias do universo para $\lambda = \sqrt{3}$,$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 1$,$z = 2$,$V_0 = 1/2$

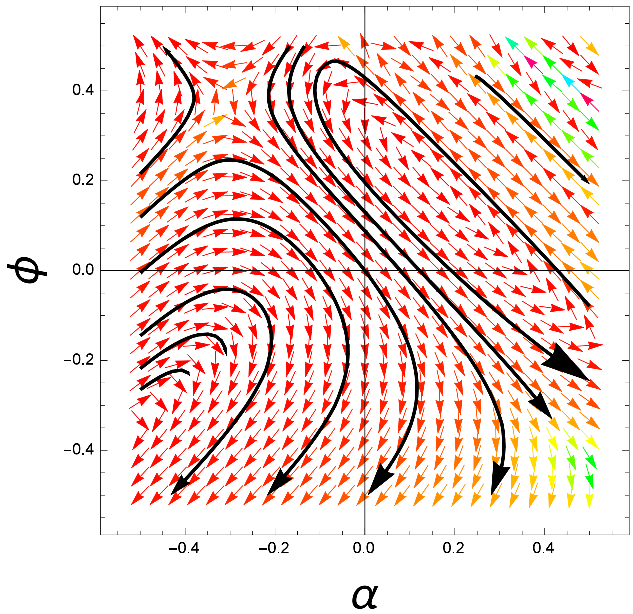

Figura 6.12: Trajetórias do universo para $\lambda = -\sqrt{3}$,$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 1$,$z = 2$,$V_0 = 1/2$

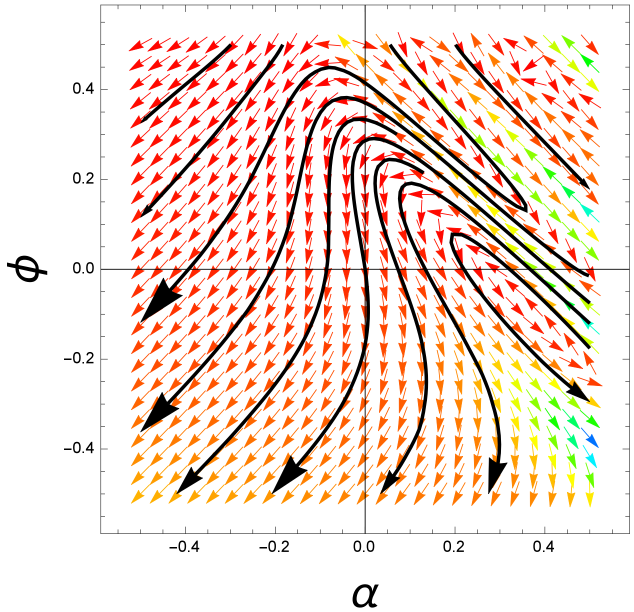

Figura 6.13: Trajetórias do universo para $\lambda = -\sqrt{3}$,$c_1 = c_3 = 0$,$c_2 = c_4 = 1 z = 2$,$V_0 = 1/2$

Substituindo em (6.30), chegamos a duas equações diferenciais ordinárias, não homogêneas

$$\frac{d^2\chi}{du^2} + \chi = \lambda \tag{6.63}$$

$$\frac{d^2\Phi}{dv^2} - \Phi = \lambda. \tag{6.64}$$

Sabemos que a solução dessas equações é dada pela soma da solução geral da equação diferencial homogênea associada com uma solução particular da equação não homogênea. Seja $\chi = e^{ru}$ onde r é uma constante. Então, a equação homogênea associada a χ é

$$r^2 e^{ru} + e^{ru} = 0 \rightarrow r = \pm i. \tag{6.65}$$

Uma solução particular da equação não homogênea é simplesmente

$$\chi = \lambda. \tag{6.66}$$

Logo,

$$\chi = C_1 e^{iu} + C_2 e^{-iu} + \lambda. \tag{6.67}$$

De forma análoga, chegamos na seguinte solução para Φ

$$\Phi = C_3 e^{v} + C_4 e^{-v} - \lambda. \tag{6.68}$$

Portanto,

$$\Psi(u,v) = C_1 e^{iu} + C_2 e^{-iu} + C_3 e^{v} + C_4 e^{-v}. \tag{6.69}$$

Expandindo as exponenciais

$$\Psi(u,v) = C_3 e^{v} + C_4 e^{-v} + C_1 \cos(u) + C_2 \cos(u) + i(C_1 sen(u) - C_2 sen(u)). \tag{6.70}$$

Passando para forma polar, achamos a seguinte expressão para a fase da função de onda

$$S(u,v) = \arctan\left(\frac{C_1 sen(u) - C_2 sen(u)}{C_3 e^{v} + C_4 e^{-v} + C_1 \cos(u) + C_2 \cos(u)}\right). \tag{6.71}$$

Podemos notar imediatamente que para alguns valores das constantes, a singularidade não é evitada. Por exemplo, façamos $C_3 = C_4 = 0$. Então

$$S(u) = \arctan\left(\tan(u)\frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2}\right). \tag{6.72}$$

Aplicando as equações de movimento, temos

$$\dot{\alpha} \propto \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2}\frac{1}{1 + \left(\tan(u)\frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2}\right)^2}\sec^2(u)\frac{\partial u}{\partial \alpha}. \tag{6.73}$$

Observando a expressão acima, vemos que $\dot{\alpha}$ não pode mudar de sinal, pois $\frac{\partial u}{\partial \alpha} > 0$ e, portanto, a singularidade não pode ser evitada.

Para uma escolha mais geral de constantes, resolvemos numericamente as equações de movimento. Os resultados podem ser vistos nas figuras 6.14,6.15. As trajetórias também tendem a singularidade nesse modelo, para uma ampla escolha de parâmetros.

6.3 Soluções com ricochete

6.3.1 Teorema

Como podemos ver, em geral, as soluções da equação de Wheeler-deWitt para universo dominado por um campo escalar de potencial

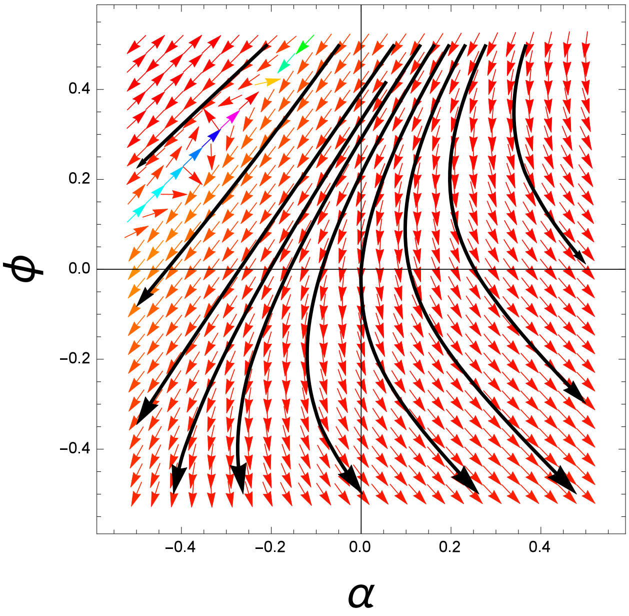

Figura 6.14: Trajetórias do universo para $\lambda = \sqrt{3}$,$c_1 = 5$,$c_2 = c_3 = c_4 = 1$,$V_0 = 1/2$

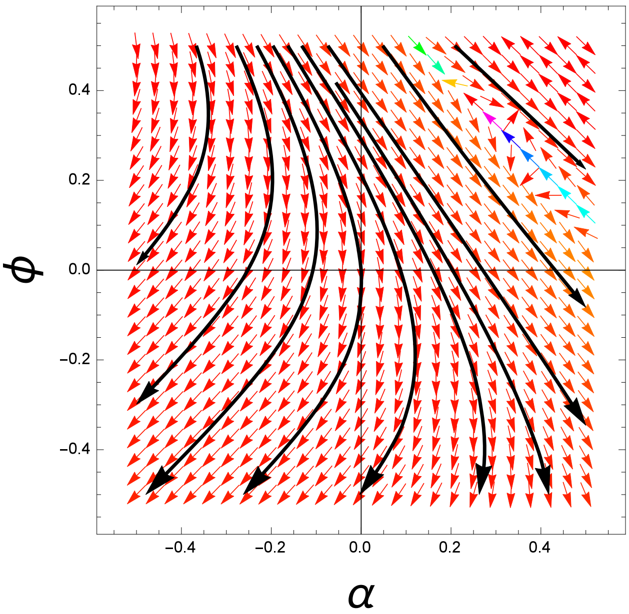

Figura 6.15: Trajetórias do universo para $\lambda = -\sqrt{3}$,$c_1 = 5$,$c_2 = c_3 = c_4 = 1$,$V_0 = 1/2$

exponencial não apresentam ricochete. Nesta seção, faremos um estudo analítico mais aprofundado da equação de Wheeler-deWitt e apresentaremos a seguir um método para construir soluções que evitam a singularidade. Para isso, provaremos o seguinte teorema:

Sejam

$$u = \frac{\sqrt[2]{2V_0}}{3} \frac{e^{3\alpha-(\lambda\sqrt[2]{6}/2)\phi}}{1-(\lambda/\sqrt[2]{6})^2}(\cosh(A) + \frac{\lambda}{\sqrt[2]{6}} senh(A)) \tag{6.74}$$

e

$$v = \frac{\sqrt[2]{2V_0}}{3} \frac{e^{3\alpha-(\lambda\sqrt[2]{6}/2)\phi}}{1-(\lambda/\sqrt[2]{6})^2}(senh(A) + \frac{\lambda}{\sqrt[2]{6}} \cosh(A)), \tag{6.75}$$

onde

$$A = 3\phi - \frac{\lambda\sqrt[2]{6}}{2}\alpha. \tag{6.76}$$

Sejam também $Y(u)$ e $W(v)$ funções suficientemente comportadas (mais detalhes abaixo).

Então,

$$S(u,v) = \int \sqrt[2]{k + \frac{Y(u)}{2}} du + \int \sqrt[2]{k - 1 - \frac{W(v)}{2}} dv \tag{6.77}$$

é a fase de uma solução da equação de Wheeler de Witt

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)\Psi(u,v) + \Psi(u,v) = 0 \tag{6.78}$$

de um universo dominado por um campo escalar com pontencial exponencial $V(\phi) = V_0 e^{-\lambda\sqrt{8\pi G}\phi}$.

6.3.2 Demonstração

A equação de Wheeler-deWitt para um potencial exponencial $V(\phi) = V_0 e^{-\lambda\sqrt{8\pi G}\phi}$ é, em unidades em que $\hbar = 1{,}8\pi G = 6$

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right) + e^{6\alpha}V(\phi)\right]\Psi(\alpha,\phi) = 0. \tag{6.79}$$

Expressando $\Psi(\alpha,\phi)$ na forma polar, $\Psi(\alpha,\phi) = R(\alpha,\phi)e^{iS(\alpha,\phi)}$ e separando as partes reais e imaginárias, chegamos às seguintes equações

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 R}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2 R}{\partial\phi^2}+R\left[\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial\alpha}\right)^2\right]\right]+ \\ R(\alpha,\phi)e^{6\alpha}V=0 \tag{6.80}$$

$$2\frac{\partial R}{\partial\alpha}\frac{\partial S}{\partial\alpha}-2\frac{\partial R}{\partial\phi}\frac{\partial S}{\partial\phi}+R\left(\frac{\partial^2 S}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2 S}{\partial\phi^2}\right)=0. \tag{6.81}$$

Agora, note que partindo da equação de Wheeler-deWitt, recuperamos a equação de Hamilton-Jacobi clássica quando $R=0$.

$$\frac{e^{-3\alpha}}{2}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial\alpha}\right)^2\right]+e^{3\alpha}V=0. \tag{6.82}$$

Recorde que, nas coordendas (u,v) definidas como

$$u = \frac{\sqrt[2]{2V_0}}{3}\frac{e^{3\alpha-(\lambda\sqrt[2]{6}/2)\phi}}{1-(\lambda/\sqrt[2]{6})^2}(\cosh(A)+\frac{\lambda}{\sqrt[2]{6}}senh(A)) \tag{6.83}$$

$$v = \frac{\sqrt[2]{2V_0}}{3}\frac{e^{3\alpha-(\lambda\sqrt[2]{6}/2)\phi}}{1-(\lambda/\sqrt[2]{6})^2}(senh(A)+\frac{\lambda}{\sqrt[2]{6}}\cosh(A)),$$

onde

$$A=3\phi-\frac{\lambda\sqrt[2]{6}}{2}\alpha \tag{6.84}$$

A equação de Hamilton-Jacobi torna-se

$$(\frac{\partial S(u,v)}{\partial u})^2-(\frac{\partial S(u,v)}{\partial v})^2=1. \tag{6.85}$$

Comparando (6.82) e (6.85), temos que

$$(\frac{\partial S(u,v)}{\partial u})^2-(\frac{\partial S(u,v)}{\partial v})^2=-\frac{1}{2e^{6\alpha}V}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial\alpha}\right)^2\right]. \tag{6.86}$$

Levando tudo isso em consideração, vamos supor que, além de satisfazer as condições vindas da equação de Wheeler de Witt, R satisfaça

$$\frac{1}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial\alpha^2}-\frac{1}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial\phi^2}=\left(Y(u)+W(v)\right)e^{6\alpha}V(\phi). \tag{6.87}$$

$Y(u)$ é uma função que depende somente de u e $W(v)$ uma função que depende somente de v, (6.83) . A equação de Wheeler de Witt (6.127) então torna-se

$$\frac{1}{2}\left[(Y(u)+W(v))\,e^{6\alpha}V(\phi)+\left[\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right)^2\right]\right]+e^{6\alpha}V=0. \tag{6.88}$$

Logo

$$\frac{1}{2}\left[(Y(u)+W(v))\,e^{6\alpha}V-2e^{6\alpha}V\left[(\frac{\partial S(u,v)}{\partial u})^2-(\frac{\partial S(u,v)}{\partial v})^2\right]\right]+e^{6\alpha}V=0. \tag{6.89}$$

Dividindo por $-e^{6\alpha}V$ obtemos,

$$\left[(\frac{\partial S(u,v)}{\partial u})^2-(\frac{\partial S(u,v)}{\partial v})^2\right]=1+\frac{(Y(u)+W(v))}{2}. \tag{6.90}$$

Agora podemos resolver para $S(u,v)$ por separação aditiva de variáveis. Defina $S(u,v)=F(u)+G(v)$. Então

$$\left[\left(\frac{dF(u)}{du}\right)^2-\left(\frac{dG(v)}{dv}\right)^2\right] = 1+\frac{Y(u)}{2}+\frac{W(v)}{2} \tag{6.91}$$

$$\left(\frac{dF(u)}{du}\right)^2-\frac{Y(u)}{2} = \left(\frac{dG(v)}{dv}\right)^2+1+\frac{W(v)}{2} \tag{6.92}$$

Como o lado esquerdo depende somente de u e o direito somente de v, ambos devem ser iguais a uma constante k. Ficamos com duas equações

$$\left(\frac{dF(u)}{du}\right)^2-\frac{Y(u)}{2} = k \tag{6.93}$$

$$\left(\frac{dG(v)}{dv}\right)^2+1+\frac{W(v)}{2} = k. \tag{6.94}$$

A solução da segunda equação é simplesmente

$$G(v)=\int\sqrt[2]{k-1-\frac{W(v)}{2}}dv, \tag{6.95}$$

e da primeira

$$F(u)=\int\sqrt[2]{k+\frac{Y(u)}{2}}du. \tag{6.96}$$

Portanto $S(u,v) = \int \sqrt[2]{k + \frac{Y(u)}{2}}du + \int \sqrt[2]{k - 1 - \frac{W(v)}{2}}dv$. No entanto, R e S ainda precisam satisfazer a segunda equação oriunda da equação de Wheeler-deWitt (8)

$$2\frac{\partial R}{\partial \alpha}\frac{\partial S}{\partial \alpha} - 2\frac{\partial R}{\partial \phi}\frac{\partial S}{\partial \phi} + R\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 S}{\partial \phi^2}\right) = 0, \qquad (6.97)$$

e a condição que impomos $\left(\frac{1}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial \phi^2}\right) = \left(Y(u) + W(v)\right) e^{6\alpha} V(\phi)$ ao mesmo tempo. Em coordenadas (u,v) podemos mostrar que (6.97) torna-se

$$2\frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial S}{\partial u} - 2\frac{\partial R}{\partial v}\frac{\partial S}{\partial v} + R\left(\frac{\partial^2 S}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 S}{\partial v^2}\right) = 0. \qquad (6.98)$$

Vamos resolvê-la por separação multiplicativa de variáveis. Seja $R = \chi(u)\Phi(v)$. Então

$$2\Phi(v)\frac{d\chi}{du}\frac{\partial S}{\partial u} - 2\chi(u)\frac{d\Phi}{dv}\frac{\partial S}{\partial v} + \chi(u)\Phi(v)\left(\frac{\partial^2 S}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 S}{\partial v^2}\right) = 0. \quad (6.99)$$

Levando em conta a forma que achamos para S, $S(u,v) = \int \sqrt[2]{k + \frac{Y(u)}{2}}du + \int \sqrt[2]{k - 1 - \frac{W(v)}{2}}dv$, temos

$$\begin{aligned} & 2\left(\sqrt[2]{k + \frac{Y(u)}{2}}\right)\Phi(v)\frac{d\chi}{du} && (6.100)\\ & -2\sqrt[2]{k - 1 - \frac{W(v)}{2}}\chi(u)\frac{d\Phi}{dv} \qquad +\chi\Phi\frac{d}{du}\left(\sqrt[2]{k + \frac{Y(u)}{2}}\right) \\ & -\chi\Phi\frac{d}{dv}\left(\sqrt[2]{k - 1 - \frac{W(v)}{2}}dv\right) = 0. \end{aligned}$$

Dividindo por $\chi(u)\Phi(v)$ ficamos com

$$\begin{aligned} & 2\frac{1}{\chi}\left(\sqrt[2]{k + \frac{Y(u)}{2}}\right)\frac{d\chi}{du} + \frac{d}{du}\left(\sqrt[2]{k + \frac{Y(u)}{2}}\right) = && (6.101)\\ & 2\frac{1}{\Phi}\sqrt[2]{k - 1 - \frac{W(v)}{2}}\frac{d\Phi}{dv} + \frac{d}{dv}\left(\sqrt[2]{k - 1 - \frac{W(v)}{2}}dv\right). \end{aligned}$$

Mais uma vez, o lado esquerdo é função somente de u e o direito somente de v. Logo, ambos devem ser iguais a uma constante C_1

$$\begin{aligned} 2\frac{1}{\chi}\left(\sqrt[2]{k+\frac{Y(u)}{2}}\right)\frac{d\chi}{du} + \\ \frac{d}{du}\left(\sqrt[2]{k+\frac{Y(u)}{2}}\right) &= C_1 \qquad (6.102) \\ 2\frac{1}{\Phi}\sqrt[2]{k-1-\frac{W(v)}{2}}\frac{d\Phi}{dv} + \\ \frac{d}{dv}\left(\sqrt[2]{k-1-\frac{W(v)}{2}}dv\right) &= C_1. \qquad (6.103) \end{aligned}$$

Além disso, R também tem que satisfazer

$$\left(\frac{1}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial\alpha^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial\phi^2}\right) = (Y(u) + W(v))\, e^{6\alpha}V(\phi). \qquad (6.104)$$

Vamos passar para coordenadas (u, v). Podemos mostrar facilmente que a equação acima torna-se

$$\frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 R}{\partial v^2}\right) = \frac{(Y(u) + W(v))}{2}. \qquad (6.105)$$

Como fizemos $R = \chi(u)\Phi(v)$, a equação acima implica que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\chi}\left(\frac{d^2\chi}{du^2}\right) - \frac{1}{\Phi}\left(\frac{d^2\Phi}{dv^2}\right) &= \frac{Y(u) + W(v)}{2} \qquad (6.106) \\ \frac{1}{\chi}\left(\frac{d^2\chi}{du^2}\right) - \frac{Y(u)}{2} &= \frac{1}{\Phi}\left(\frac{d^2\Phi}{dv^2}\right) + \frac{W(v)}{2}. \qquad (6.107) \end{aligned}$$

Mais uma vez, o lado esquerdo depende somente de u e o direito somente de v. Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\chi}\left(\frac{d^2\chi}{du^2}\right) - \frac{Y(u)}{2} &= C_2 \qquad (6.108) \\ \frac{1}{\Phi}\left(\frac{d^2\Phi}{dv^2}\right) + \frac{W(v)}{2} &= C_2. \qquad (6.109) \end{aligned}$$

Isolando χ, Φ chegamos a

$$\chi = \frac{1}{C_2 + \frac{Y(u)}{2}} \left(\frac{d^2\chi}{du^2} \right) \quad (6.110)$$

$$\Phi = \frac{1}{C_2 - \frac{W(v)}{2}} \left(\frac{d^2\Phi}{dv^2} \right). \quad (6.111)$$

Substituindo em (6.102), chegamos a

$$\left(\frac{d^2\chi}{du^2} \right) \left(\frac{d}{du} \left(\sqrt[2]{k + \frac{Y(u)}{2}} \right) - C_1 \right) + 2 \left(C_2 + \frac{Y(u)}{2} \right) \left(\sqrt[2]{k + \frac{Y(u)}{2}} \right) \frac{d\chi}{du} = 0 \quad (6.112)$$

$$\left(\frac{d^2\Phi}{dv^2} \right) \left(\frac{d}{dv} \left(\sqrt[2]{k - 1 - \frac{W(v)}{2} dv} \right) - C_1 \right) + 2 \left(C_2 - \frac{W(v)}{2} \right) \sqrt[2]{k - 1 - \frac{W(v)}{2}} \frac{d\Phi}{dv} = 0. \quad (6.113)$$

Vemos que essas equações tem a forma de equações diferenciais lineares ordinárias de primeira ordem (fazendo $\frac{d\chi}{du} \equiv m(u), \frac{d^2\chi}{du^2} = m'(u), \frac{d\Phi}{dv} \equiv n(v), \frac{d^2\Phi}{dv^2} = n'(v)$) com coeficientes variáveis, $p(u)m'(u) + q(u)m(u) = 0$, $q(v)n'(v) + r(v)n(v) = 0$. Sabemos que tais equações tem soluções analíticas bem conhecidas, o que mostra a consistência do método que utilizamos. Resolvendo para $\chi(u)$, $\Phi(v)$, achamos $R(u,v) = \chi(u)\Phi(v)$.

De posse de $R(u,v)$ e $S(u,v)$, especificamos completamente uma solução da equação de Wheeler-deWitt.

Portanto, concluímos o seguinte:

$$S(u,v) = \int \sqrt[2]{k + \frac{Y(u)}{2}} du + \int \sqrt[2]{k - 1 - \frac{W(v)}{2}} dv \quad (6.114)$$

é a fase de uma possível solução da equação de Wheeler-deWitt, $\Psi(u,v) = R(u,v)e^{iS(u,v)}$ para um universo dominado por um campo escalar com potencial exponencial , onde a única condição sobre as funções $Y(u), W(v)$ é que sejam reais e comportadas o suficiente para que as equações diferenciais para $R(u,v)$, (6.112),(6.113), tenham solução, provando o teorema.

Note que, por construção, R satisfaz

$$\frac{1}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial \phi^2} = (Y(u) + W(v))\, e^{6\alpha} V(\phi). \tag{6.115}$$

6.3.3 Condição geral sobre $Y(u)$ e $W(v)$ para ricochete

Uma vez que a única condição sobre $Y(u)$ e $W(v)$ é que sejam suficientemente comportadas de modo a que a equação diferencial para o módulo da função de onda (6.112),(6.113) tenha solução, temos uma grande liberdade na escolha de possíveis soluções.

Vamos re-escrever as soluções que achamos de uma forma mais transparente. Levando em conta a definição de $\dot{\alpha}$ e $\dot{\phi}$, podemos re-escrever a equação de Wheeler-deWitt (6.80) como

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial \phi^2} + \left[\left(\dot{\phi}\right)^2 - \left(\dot{\alpha}\right)^2\right]\right] + V(\phi) = 0. \tag{6.116}$$

Definindo $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial \phi^2}\right) = (Y(u) + W(v))\, e^{6\alpha} V(\phi)$ como o termo quântico Q, podemos reescrever a equação acima como

$$\frac{1}{2}\left(\dot{\alpha}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\dot{\phi}\right)^2 + V(\phi) + Q, \tag{6.117}$$

que tem a forma de um balanço de energia, e representa a equação de Friedmann modificada na presença de efeitos quânticos. Para $R = cte$ (que corresponde a uma função de onda com módulo constante), o termo Q se anula. Note também que como temos grande liberdade da escolha de $Y(u) + W(v)$, podemos escolher um Q que satisfaça condições de contorno adequadas para que se evite a singularidade.

Antes disso, vamos encontrar condições gerais para que tenhamos uma solução com ricochete. Uma condição necessária e suficiente é que α tenha um ponto de mínimo. Nesse ponto, devemos ter

$$\dot{\alpha} = 0, \ddot{\alpha} > 0. \tag{6.118}$$

Sabemos que

$$\dot{\alpha} = -e^{-3\alpha}\pi_\alpha = -e^{-3\alpha}\frac{\partial S}{\partial \alpha} \tag{6.119}$$

$$\dot{\phi} = e^{-3\alpha}\pi_\phi = e^{-3\alpha}\frac{\partial S}{\partial \phi}. \tag{6.120}$$

Logo, no ponto estacionário

$$-e^{-3\alpha}\frac{\partial S}{\partial \alpha} = 0 \rightarrow \frac{\partial S}{\partial \alpha} = 0. \tag{6.121}$$

Temos também que

$$\ddot{\alpha} = \frac{d}{dt}\left(-e^{-3\alpha}\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right) = 3e^{-3\alpha}\dot{\alpha}\frac{\partial S}{\partial \alpha} - e^{-3\alpha}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right). \tag{6.122}$$

Aplicando a regra da cadeia

$$\ddot{\alpha} = 3e^{-3\alpha}\dot{\alpha}\frac{\partial S}{\partial \alpha} - e^{-3\alpha}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha^2}\dot{\alpha} + \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha \partial \phi}\dot{\phi}\right). \tag{6.123}$$

No ponto estacionário, portanto, devemos ter

$$\ddot{\alpha} = -e^{-3\alpha}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha \partial \phi}\dot{\phi}\right). \tag{6.124}$$

Logo, a condição $\ddot{\alpha} > 0$ no ponto estacionário implica

$$\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha \partial \phi}\dot{\phi}\right) < 0, \tag{6.125}$$

ou

$$\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha \partial \phi}\frac{\partial S}{\partial \phi}\right) < 0. \tag{6.126}$$

Considere a equação (6.80). Dividindo por R, ficamos com

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial \phi^2} + \left[\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right)^2\right]\right] + e^{6\alpha}V = 0. \tag{6.127}$$

Derivando a equação acima em relação a α, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial \phi^2} + \left[\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right)^2\right]\right] + \frac{\partial}{\partial \alpha}[e^{6\alpha}V(\phi)] = 0 \tag{6.128}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial \phi^2}\right) + 2\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \phi \partial \alpha}\right) - 2\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha^2}\right) + \frac{\partial}{\partial \alpha}[2e^{6\alpha}V(\phi)] = 0. \tag{6.129}$$

Essa equação vale em todos os pontos para qualquer solução (R, S) da equação de Wheeler-deWitt. No ponto crítico, onde $\frac{\partial S}{\partial \alpha} = 0$, devemos ter portanto

$$\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial \phi^2}\right) + 2\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \phi \partial \alpha}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial \alpha}[2e^{6\alpha}V(\phi)] = 0. \tag{6.130}$$

Ou seja,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \phi \partial \alpha}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial \phi^2}\right) - [6e^{6\alpha}V(\phi)]. \tag{6.131}$$

A condição (6.126) para que tenhamos ricochete pode portanto ser escrita da seguinte forma: no ponto estacionário, deve valer:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial \phi^2}\right) > -[6e^{6\alpha}V(\phi)]. \tag{6.132}$$

Levando em conta (6.87), isso se traduz em

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial \phi^2}\right) = 6e^{6\alpha}V(\phi)\left(Y(u) + W(v)\right) + \left(\frac{dY}{du}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{dW}{dv}\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)e^{6\alpha}V(\phi) > -12e^{6\alpha}V(\phi), \tag{6.133}$$

ou seja

$$6\left(Y(u) + W(v)\right) + \left(\frac{dY}{du}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{dW}{dv}\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right) > -12. \tag{6.134}$$

que deve valer ao menos no ponto estacionário para que tenhamos um ricochete. Para termos um ponto estacionário, precisamos que, nesse ponto,

$$\dot{\alpha} = -e^{-3\alpha}\frac{\partial S}{\partial \alpha} = 0, \tag{6.135}$$

ou seja,

$$\frac{\partial S}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial S}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \alpha} = 0. \tag{6.136}$$

Calculando as derivadas, chegamos a

$$Tanh\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\alpha\lambda - 3\phi\right) = \sqrt{\frac{k + \frac{Y(u)}{2}}{k - 1 - \frac{W(v)}{2}}} \tag{6.137}$$

no ponto estacionário. Mas a função tangente hiperbólico nunca pode ser maior que 1. Portanto, no ponto crítico, deve valer

$$\frac{k+\frac{Y(u)}{2}}{k-1-\frac{W(v)}{2}} < 1 \rightarrow Y(u)+W(v) < -2. \tag{6.138}$$

Exemplo de solução com ricochete

Vamos impor como condição de contorno que o termo quântico $Q \rightarrow 0$ para $\alpha \rightarrow \infty$, de modo que recuperemos o limite clássico. Considere $\lambda = 5$. Então,

$$u(\alpha,\phi) = -\frac{1}{114} e^{(3-5\sqrt{3/2})\alpha-(3+5\sqrt{3/2}))\phi} \left(\left(6-5\sqrt{6}\right) e^{5\sqrt{6}\alpha} + \left(6+5\sqrt{6}\right) e^{6\phi}\right). \tag{6.139}$$

Sabemos que na região clássica, há soluções atratoras caracterizadas pelas retas

$$\phi(\alpha) = \frac{\lambda}{\sqrt{8\pi G}}\alpha = \frac{5}{\sqrt{6}}\alpha. \tag{6.140}$$

Na região clássica, nas soluções atratoras, substituindo a solução $\phi(\alpha)$ chegamos a

$$u = -\frac{2}{19} e^{(-\frac{19}{2})\alpha}. \tag{6.141}$$

Como o termo quântico é

$$Q = \left(Y(u)+W(v)\right) e^{6\alpha} V(\phi) \tag{6.142}$$

vemos que se escolhermos

$$Y(u) = -\frac{1}{u}, W(v) = 0, \tag{6.143}$$

então

$$Q = \frac{-1}{u} e^{6\alpha} V(\phi) = \frac{-V_o}{u} e^{6\alpha-5\sqrt{6}\phi} \tag{6.144}$$

e na região clássica

$$Q \rightarrow -V_o \frac{1}{-\frac{2}{19} e^{(-\frac{19}{2})\alpha}} e^{-19\alpha} \tag{6.145}$$

tende a zero quando $\alpha \rightarrow \infty$. Na região onde efeitos quânticos deve ser relevantes, não temos uma forma funcional para $\phi(\alpha)$, uma vez que as trajetórias devem mudar perto da singularidade e assim, o limite para $u(\alpha,\phi)$ não está definido. Escolhendo $W(v) = 0$, $Y(u) = -1/u$, temos que a fase da solução da equação de Wheeler-deWitt é

$$S(\alpha,\phi) = \int \sqrt{k - \frac{1}{u}(\alpha,\phi)du} + \sqrt{k-1}v(\alpha,\phi). \tag{6.146}$$

As trajetórias bohmianas podem ser vistas nas figuras 6.16,6.18,6.19,6.17,6.20

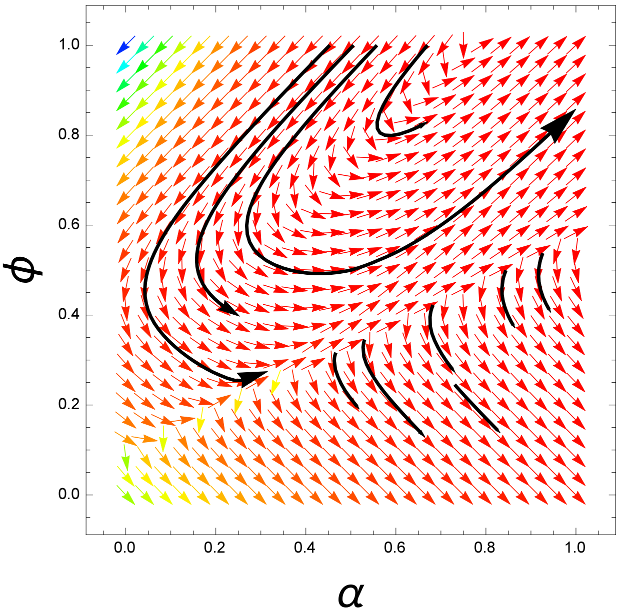

Figura 6.16: Trajetórias do universo para $\lambda = 5$,$k = 40$,$V_0 = 1/2$

Vemos que para λ grande o suficiente conseguimos um modelo que evita a singularidade, o que não ocorre para λ pequeno.

6.4 Algoritmo para construção de soluções com λ arbitrário

Nessa seção, apresentaremos um método para construção de soluções da equação de Wheeler-deWitt para potencial exponencial com ricochete para qualquer valor de λ.

Para que tenhamos ricochete, é preciso que $\dot{\alpha} = 0$ tenha ao menos uma solução, e que nesse ponto, $\ddot{\alpha} > 0$. Essas condições gerais,

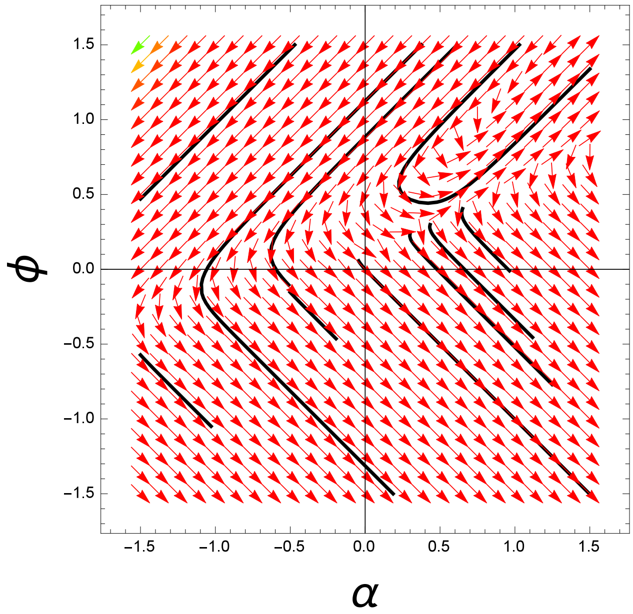

Figura 6.17: Trajetórias do universo para $\lambda = 5, k = 40, V_0 = 1/2$

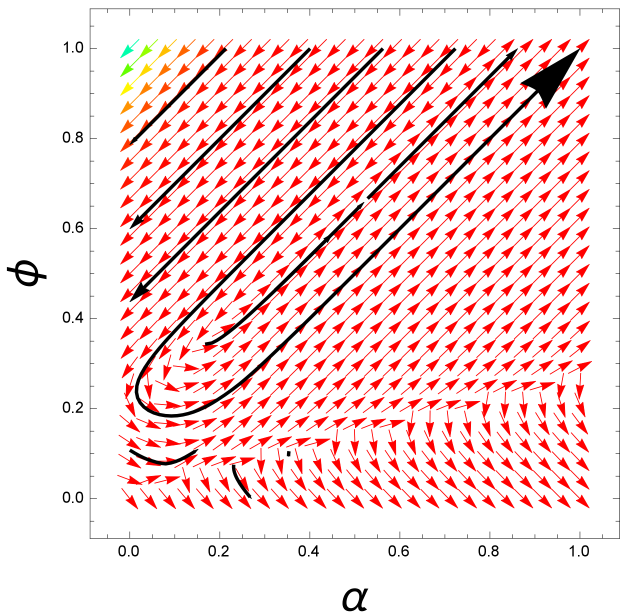

Figura 6.18: Trajetórias do universo para $\lambda = 10, k = 40, V_0 = 1/2$

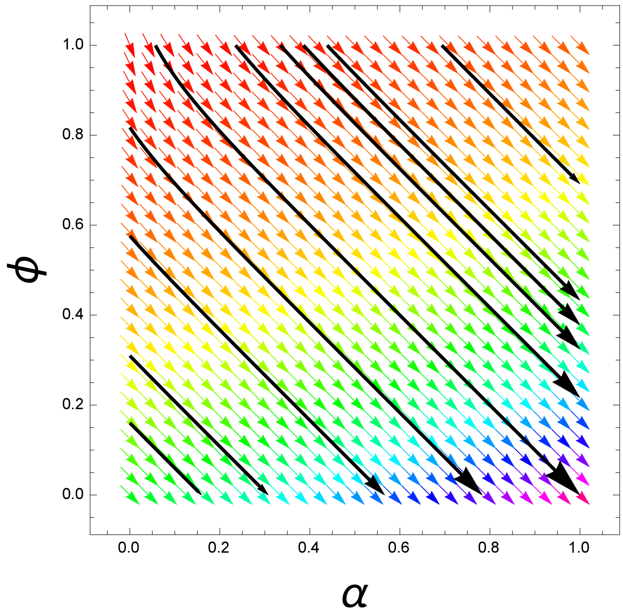

Figura 6.19: Trajetórias do universo para $\lambda = \sqrt{3}$,$k = 40$,$V_0 = 1/2$

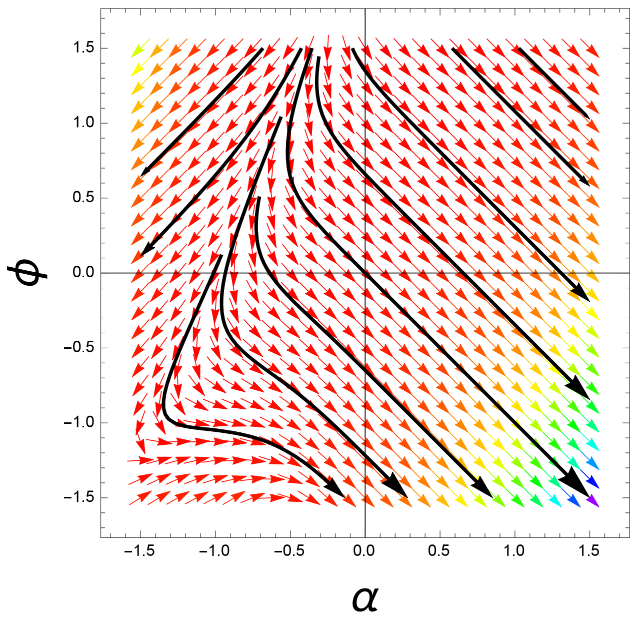

Figura 6.20: Trajetórias do universo para $\lambda = 1$,$k = 40$,$V_0 = 1/2$

quando aplicadas a solução que construímos, tornam-se (6.137),(6.134), como mostrado em 6.3.3,

1. $Tanh\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\alpha\lambda - 3\phi\right) = \sqrt{\frac{k+\frac{Y(u)}{2}}{k-1-\frac{W(v)}{2}}}$ deve ter ao menos uma solução
2. $6\left(Y(u)+W(v)\right)+\left(\frac{dY}{du}\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{dW}{dv}\frac{\partial v}{\partial\alpha}\right) > -12$ sempre que $\dot{\alpha}=0$

Vamos geometrizar esse problema. Façamos $W(v)=0$. A função $-2k+2(k-1)Tanh^2\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\alpha\lambda - 3\phi\right)$ descreve uma superfície no plano (u,v), que pode ser vista nas figuras 6.21,6.22

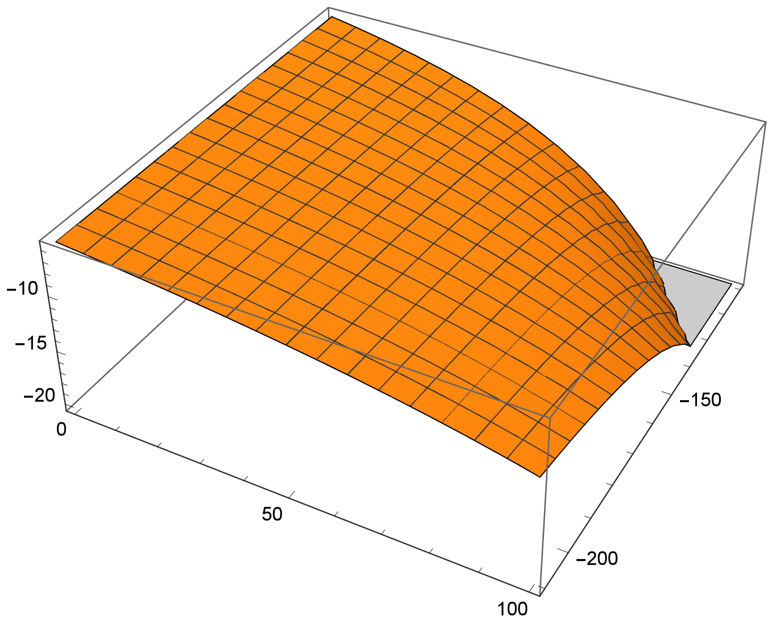

Figura 6.21: Superfície $-2k+2(k-1)Tanh^2\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\alpha\lambda - 3\phi\right)$ para $\lambda=\sqrt{3}$, $k=20$,$V_0=1/2$ no plano (u,v)

Já $Y(u)$ descreve uma superfície no plano (u,v), cuja projeção no plano u, para qualquer v, é sempre a curva $Y(u)$. Por exemplo, para $Y(u)=-\frac{1}{u}$ podemos ver a curva e a superfície nas figuras 6.23,6.24

A medida que o universo segue uma trajetória $\alpha(\phi)$, $Y(u)$ descreve uma curva sobre a superície da figura 6.24, cuja projeção no plano u é a figura 6.23. Quando essa curva intersecta a superfície $-2k+2(k-1)Tanh^2\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\alpha\lambda - 3\phi\right)$, $\dot{\alpha}=0$, veja (6.137). Para que

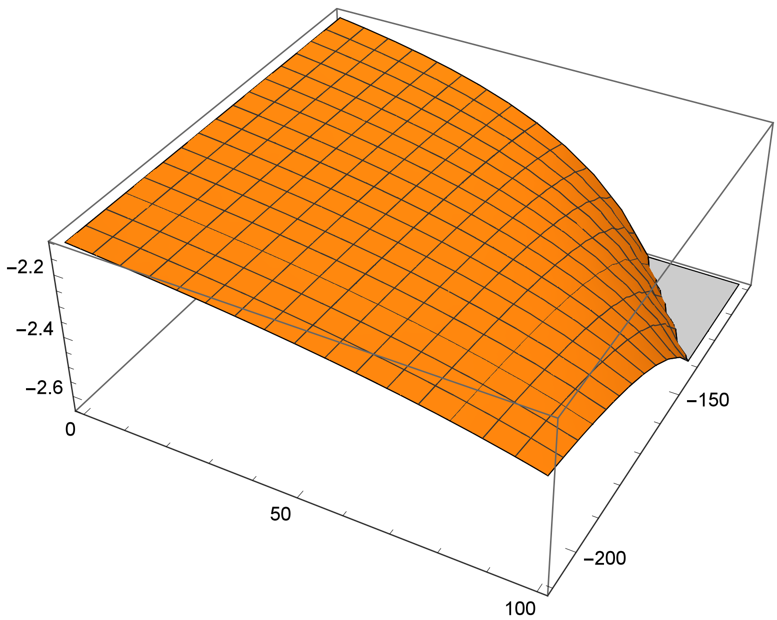

Figura 6.22: Superfície $-2k+2(k-1)Tanh^2\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\alpha\lambda-3\phi\right)$ para $\lambda=-\sqrt{3}$, $k=20$,$V_0=1/2$ no plano (u,v)

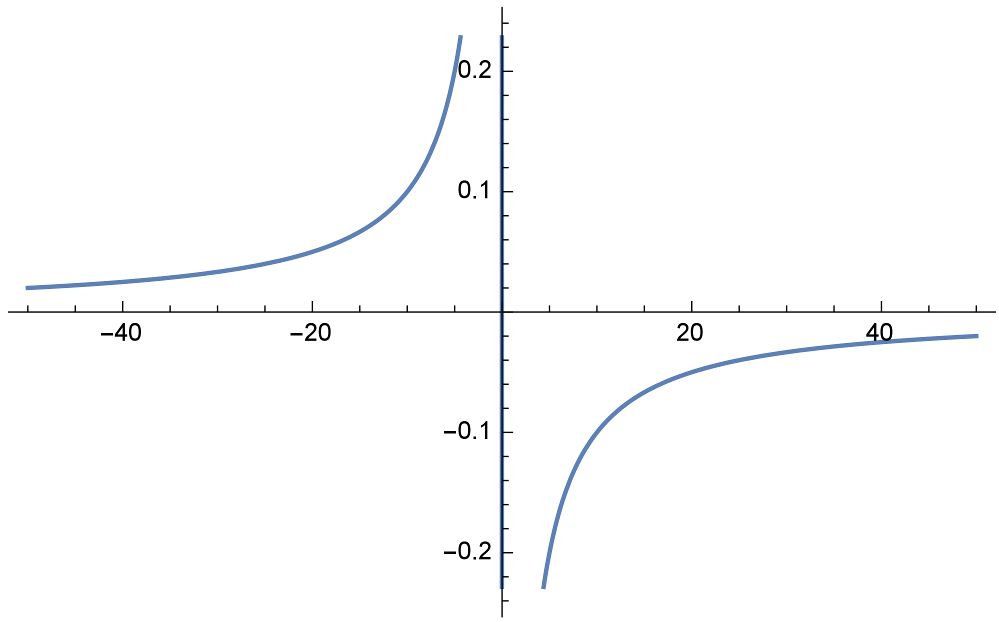

Figura 6.23: Curva $Y(u)=-\frac{1}{u}$,$V_0=1/2$,$\lambda=\sqrt{3}$

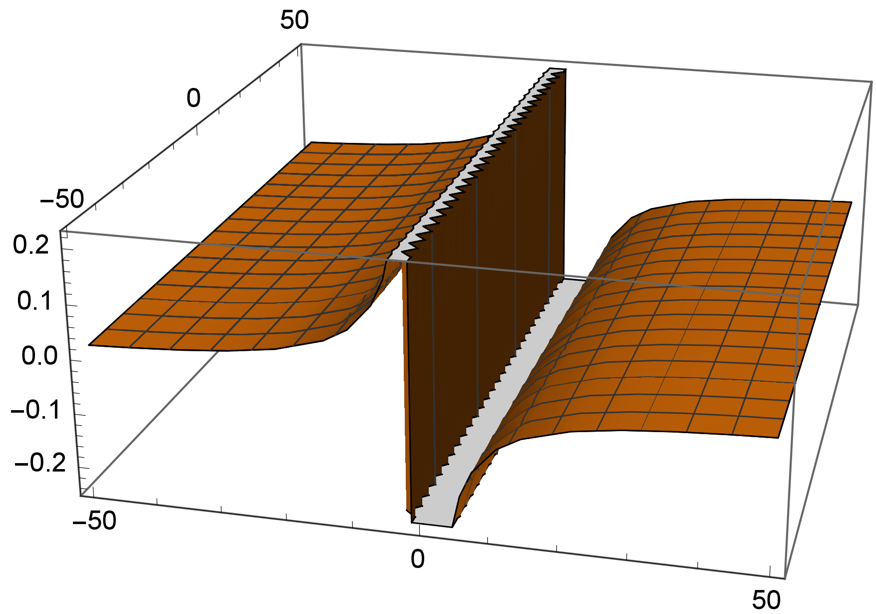

Figura 6.24: Superfície $Y(u) = -\frac{1}{u}$,$\lambda = \sqrt{3}$

haja ricochete, a derivada da projeção Y(u) no plano u, nesse ponto, deve ser grande o suficiente

$$6\left(Y(u)\right) + \left(\frac{dY}{du}\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right) > -12 \tag{6.147}$$

Ou seja, a inclinação da reta tangente a Y(u) no ponto estacionário deve ser grande o suficiente. Baseado nisso, propomos o seguinte algoritmo para construção de soluções com ricochete para λ arbitrário:

1. Projete $-2k+2(k-1)Tanh^2\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\alpha\lambda - 3\phi\right)$ no plano v =constante (por exemplo para $v = 10$, fig.6.25)

2. Escolha um ponto de interseção para $Y(u)$ com essa curva. Calcule o valor mínimo da derivada nesse ponto, $6\left(Y(u)\right) + \left(\frac{dY}{du}\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right) > -12$. Use a inclinação escolhida e defina $Y(u)$ como uma reta com esse coeficiente angular.

3. Agora, projete a superfície $-2k+2(k-1)Tanh^2\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\alpha\lambda - 3\phi\right)$ para outro valor de v. Usando o $Y(u)$ construído no passo

anterior, cheque os pontos de interseção de $Y(u)$ com a superfície. Se a derivada $\frac{dY}{du}$ não for grande o suficiente nesse ponto, *deforme* $Y(u)$ próximo ao ponto de interseção, tal que sua inclinação seja grande o suficiente.

4. Repita o passo (3) por toda uma região em (u,v), assegurando que a curva $Y(u)$ resultante seja contínua e suave e tenha derivada grande o suficiente em todos os pontos de interseção.

5. De posse do $Y(u)$ final, construa as trajetórias bohmianas usando

$$\dot{\alpha} = -e^{-3\alpha}\left(\sqrt{k + \frac{Y(u)}{2}}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \sqrt{k-1}\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)$$
$$\dot{\phi} = e^{-3\alpha}\left(\sqrt{k + \frac{Y(u)}{2}}\frac{\partial u}{\partial \phi} + \sqrt{k-1}\frac{\partial v}{\partial \phi}\right).$$

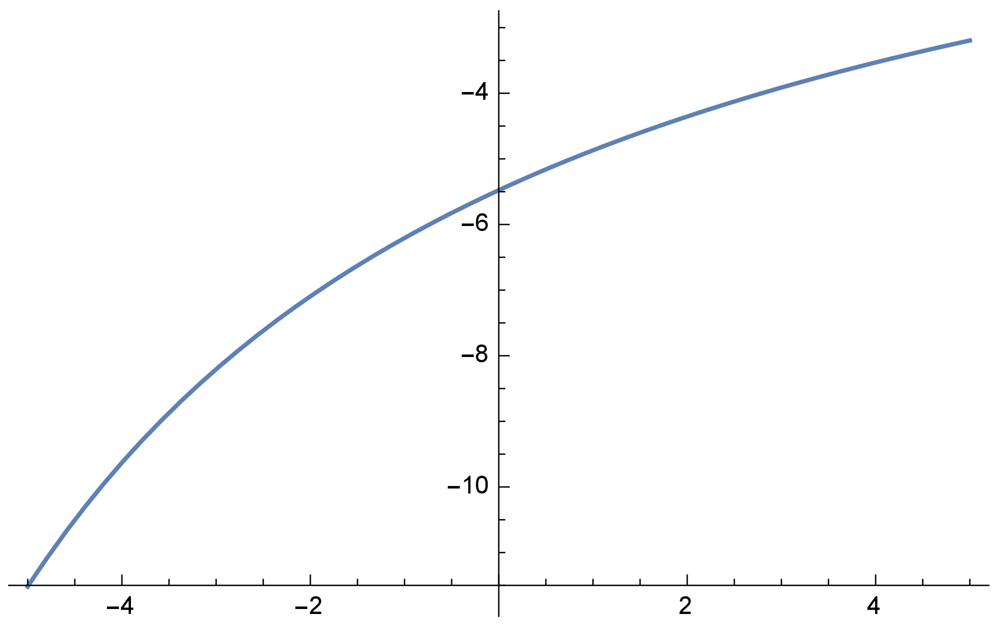

Figura 6.25: Projeção da superfície $-2k + 2(k-1)Tanh^2\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\alpha\lambda - 3\phi\right)$ para $v = 10$,$k = 20$,$\lambda = \sqrt{3}$

Por construção, as trajetórias obtidas apresentarão ricochete e nenhum recolapso na região (u,v) estudada. Longe da superfície

$-2k + 2(k-1)Tanh^2\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\alpha\lambda - 3\phi\right)$ podemos fazer $Y(u) \rightarrow 0$ de modo a recuperarmos as trajetórias clássicas, geradas a partir de $S(u, v) = ku + \sqrt{k^2 - 1}v$. Esse procedimento pode ser feito para qualquer λ

Capítulo 7

Conclusão

Neste trabalho, foi revisada a cosmologia clássica e estudada a cosmologia quântica, pela interpretação de de Brogie-Bohm da mecânica quântica, de um universo dominado por um campo escalar, com potencial exponencial do tipo $V = V_0 e^{-\lambda\sqrt{8\pi G}\phi}$. Inicialmente revisamos assuntos básicos como a teoria de de Broglie-Bohm e o formalismo 3+1 da relatividade geral, e exploramos algumas características da equação de Wheeler-deWitt. Prosseguimos mostrando que, para o modelo estudado, em geral, as trajetórias bohmianas não evitam a singularidade para uma grande variedade de soluções. Para λ grande o suficiente, construímos diretamente uma solução com ricochete, onde a fase da função de onda satisfaz $S(\alpha, \phi) = \int \sqrt{k - \frac{1}{u}(\alpha, \phi)}du + \sqrt{k-1}v(\alpha, \phi)$. Fizemos um estudo detalhado das condições que garantem que as trajetórias bohmianas descrevam um fator de escala mínimo diferente de zero. Isso levou a um algoritmo para construção de soluções com ricochete, para λ arbitrário. Como sugestão para trabalhos futuros, pode ser feita a implementação numérica desse algoritmo e obtidas funções $Y(u)$ que descrevem ricochetes para qualquer valor de λ. Estas funções podem ser usadas para construir modelos interessantes do universo primordial, que por sua vez podem ser usados como geometria de fundo para evolução de pertubações, em busca de sinais observacionais na radiação cósmica de fundo.

Referências Bibliográficas

[1] Hawking, S. W., Ellis G. F. R., *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge (1975)

[2] Schlosshauer, M. *Decoherence, the measurement problem, and interpretations of quantum mechanics*, arXiv:quant-ph/0312059v4 , Rev.Mod.Phys.76:1267-1305 (2004)

[3] Ed.Oriti, D. *Approaches to Quantum Gravity*, Cambridge (2009)

[4] Kiefer, C. , Kramer, M. *Can effects of quantum gravity be observed in the cosmic microwave background?*, arXiv:[gr-qc]1205.5161, Int. J. Mod. Phys. D 21,1241001 (2012)

[5] Wheeler, J.A., Taylor E.F., *Space-Time Physics*, W.H.Freeman (1992)

[6] Barbour, J. *The Discovery of Dynamics*, Oxford University Press (2001)

[7] Carroll, S. *Space-Time and Geometry*, Addison-Wesley (2003)

[8] Ryden, B. *Introduction to Cosmology*, Addison-Wesley (2002)

[9] Liddle, A. *An Introduction to Modern Cosmology*, Wiley (2003)

[10] Cohen, T., Diu, B., Laloe, F., *Quantum Mechanics*, Wiley (1991)

[11] Goldstein, H., Poole Jr, C., Safko J.L., *Classical Mechanics*, Addison-Wesley (2001)

[12] Holland, P.R. *The Quantum Theory of Motion: An Account of the de Broglie-Bohm Causal Interpretation of Quantum Mechanics*, Cambridge (1995)

[13] Valentini, A. *Signal-locality, uncertainty, and the sub-quantum H-theorem, I*, Physics Letters A, vol. 156, no. 5 (1991)

[14] Valentini, A. *Inflationary Cosmology as a Probe of Primordial Quantum Mechanics*, arXiv:0805.0163, Phys.Rev.D82:063513 (2010)

[15] Carroll, S., Sebens, C., *Many Worlds, the Born Rule, and Self-Locating Uncertainty*, arXiv:1405.7907 [gr-qc] (2014)

[16] Gourgoulhon , E. *3+1 Formalism and Bases of Numerical Relativity*, arXiv:gr-qc/0703035 (2007)

[17] Kiefer, C., Sandhofer,B., *Quantum Cosmology*, arXiv:gr-qc/0804.0672v2(2008), "Beyond the Big Bang", ed. by R. Vaas, Springer (2008)

[18] Isham, C. J., *Canonical Quantum Gravity and the Problem of Time*, arXiv:gr-qc/9210011v1,Imperial/TP/91-92/25, (1992)

[19] Kiefer, C., Singh,T., *Quantum gravitational corrections to the functional Schrodinger equation*, Phys.Rev.D (1991)

[20] Kuchar, K.V., Ryan Jr,M.P., *Is minisuperspace quantization valid?: Taub in mixmaster*,Phys. Rev. D 40, 3982 (1989)

[21] Pinto-Neto,N., Fabris,J.C., *Quantum cosmology from the de Broglie-Bohm perspective*,arXiv:1306.0820v1, (2013)

[22] Kiefer, C., Sandhofer, B., Dabrowski, M.P.,*Quantum Phantom Cosmology*, Phys.Rev. D74 044022, (2006)

[23] Heard I.,Wands D. *Cosmology with positive and negative exponential potentials*, arXiv:gr-qc/0206085v1 (2002)