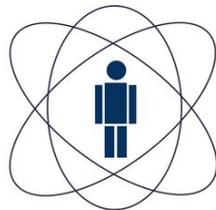


ALEXANDRE HEFREN DE VASCONCELOS JÚNIOR

ASPECTOS ESTRUTURAIS DA CORRENTE
ELETROMAGNÉTICA DE PORTADORES DE CARGA
ELÉTRICA COM SPIN-1

ASPECTOS ESTRUTURAIS DA CORRENTE ELETROMAGNÉTICA
DE PORTADORES DE CARGA ELÉTRICA COM SPIN-1

ALEXANDRE HEFREN DE VASCONCELOS JÚNIOR



CBPF

**Centro Brasileiro de
Pesquisas Físicas**

Dissertação de Mestrado

Julho 2016

Alexandre Hefren de Vasconcelos Júnior. *Aspectos Estruturais da Corrente Eletromagnética de Portadores de Carga Elétrica com Spin-1*. Dissertação de Mestrado, Título de Mestre. © Julho 2016

SUPERVISORS:

José Abdalla Helayël-Neto - Orientador

Rio de Janeiro

Julho 2016

“As long as we have what we have inside -the capacity to love, to work, to hear music,to see a flower, to look at the world as it is -nothing can stop us from being happy. . . But one thing you must take seriously. You must get rid of the ifs of life. Many people tell you,“I would be happy -if I had a certain job,or if I were better looking,or if a certain person would marry me”.There isn't any such thing. **You must live your life unconditionally, without the ifs**”.

(Arthur Rubinstein)

Aos que amo.

RESUMO

Esta Dissertação versa sobre uma discussão em torno da relação entre spin, carga elétrica, massa e extensibilidade de partículas elementares. Trata-se de um estudo que busca destacar esses pontos fundamentais através, principalmente, da interação eletromagnética e elucubrar reflexões no âmbito das propriedades de partículas elementares.

A importância do spin se revela à medida que investigamos as questões aqui propostas. Em particular, faz-se uma análise comparativa da estrutura da corrente eletromagnética de partículas elementares de naturezas fermiônica e bosônica. Destaca-se especialmente o caso bosônico cujos portadores de carga são spin-1, representados pelos bósons- W do setor eletrofraco do Modelo Padrão.

ABSTRACT

This Dissertation discusses the relation between spin, electric charge, mass and extensibility of truly elementary particles from the point of view of the electromagnetic interactions at a semi-classical level.

The importance of spin in the framework of classical electrodynamics becomes evident throughout the investigation of a number of issues worked out in this contribution. In particular, we carry out a comparative analysis of the structure of the electromagnetic current for elementary particles of both bosonic and fermionic natures. Special emphasis is placed on the case of spin-1 charge carriers, more specifically, the W -bosons of the electroweak sector of the Standard Model.

*“Of course there is no formula for success except perhaps
an unconditional acceptance of life and what it brings”*

(Arthur Rubinstein)

AGRADECIMENTOS

Após dois anos de trabalho, estou completando o mestrado. Conforme dito na minha monografia de graduação, um de meus objetivos foi, e será, diminuir minha própria ignorância. Porém, não é possível avançar sem as ajudas indubitavelmente necessárias recebidas de diversas pessoas ao longo da vida. Por isso, quero aqui registrar meus sinceros e lídimos agradecimentos.

Agradeço ao Professor Helayël, meu orientador, por ter me atendido desde 2012, quando o conheci no CBPF, e me orientado de 2014 até o presente momento, que marca o fim do mestrado. E se cheguei ao CBPF, foi também por ser orientado na graduação pelo Professor Carlos Alberto, a quem agradeço pelos valiosos conselhos.

Agradeço a todos Professores que discutiram Física comigo. Ao Professor Sebastião pela ajuda dada, ao Professor Bert Schroer pelas explicações, discussões e referências dadas, ao Professor Nami também pelas conversas sobre Física. Ao professor Ramos, por continuar sendo atencioso comigo. A todos professores que me deram boas aulas. Aos professores das disciplinas básicas; Fernando, Sheldard e Evaldo com seu bom humor.

A todos meus amigos. Especialmente, aos que dividiram a sala 514-D comigo; Guilherme, Rafael, Ricardo, Lucho, Juan e também Dr.Noguera, que, mesmo não sendo da sala, estava sempre fazendo visitas.

Agradeço ao meu pai e à minha mãe, que entendem e apoiam o caminho que tomei. Ao padrinho Egídio e à madrinha Luiciene pela contínua ajuda e atenção que tornaram meu caminho acadêmico menos árduo. À minha tia Heloísa pela preocupação comigo. À minha irmã. A meus avós pelo carinho.

Agradeço a todos que contribuíram na conclusão dessa etapa. Ao CNPq, pelo financiamento da bolsa de mestrado.

SUMÁRIO

i	APRESENTAÇÃO GERAL	1
1	INTRODUÇÃO	3
ii	DISCUSSÃO	9
2	SPIN	11
2.1	Datação Histórica	11
2.2	O Conceito de Spin	14
2.3	Momento Magnético	20
2.3.1	Momento Magnético Anômalo	25
2.4	Momento de Dipolo Elétrico do Elétron	28
2.5	Wigner e a Classificação do Spin	30
2.6	Quiralidade e Helicidade	35
3	OS SPINS 0 E 1/2	39
3.1	Klein-Gordon e Schrödinger	42
3.2	Dirac e Pauli	45
3.3	Zitterbewegung	49
3.3.1	Transformação de Foldy-Wouthuysen	52
3.4	Equações de Maxwell - Caso Fermiônico	54
3.5	Fatores de Forma e Corrente Fermiônica	57
3.6	Campo Clássico Estendido	60
4	O SPIN 1	67
4.1	Polarizações	68
4.2	Caso Livre	71
4.3	Caso Interagente	73
4.4	Fator Giromagnético	75
4.5	Lagrangeana	79
4.6	Fator Giromagnético Corrigido	80
4.7	Acoplamento não Mínimo da Teoria Eletrofraca	82
4.7.1	A Relação com o Higgs	85
4.8	Equações de Maxwell - Caso Bosônico	88
4.9	Decomposição de Gordon e Autointeração	94
4.10	Campo Clássico Estendido	94
5	SPIN, CARGA E MASSA	99
5.1	Teoria Quântica de Campos e Mecânica Quântica	99
5.2	Partícula e Localização	101
5.2.1	Localização	101
5.2.2	Partícula	107
5.3	Conservação e Superseleção	109
5.4	O Fator Giromagnético	114
6	COMENTÁRIOS FINAIS	119

iii	APÊNDICE	123
A	APÊNDICE	125
	A.1	Correntes Eletromagnéticas 125
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	127

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Esquema vetorial	22
Figura 2	Precessão do momento angular(clássico)	23
Figura 3	Precessão do momento angular(clássico)	24
Figura 4	Níveis de energia do geonium para elétron. Da esquerda para direita: os níveis de energia de cyclotron, do spin, das oscilações axiais e do movimento magnetron. Quando $\omega_s = \omega_c$, $\omega_a = 0$ implica em degenerescências.	24
Figura 5	Experimento de Penning Trap	25
Figura 6	Diagramas de Feynman	64
Figura 7	Partículas elementares	108

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Fatores giromagnéticos (g) de algumas partículas. [41] [42] [43] [44] [45]	26
Tabela 2	Transformações sob CPT.	29
Tabela 3	Correntes Eletromagnéticas	125

Parte I

APRESENTAÇÃO GERAL

INTRODUÇÃO

A interação eletromagnética nos fornece a possibilidade de testar muito do que as teorias formulam, isto é, possui fundamental importância na formulação das teorias físicas. É um fato histórico que o eletromagnetismo serviu, e ainda serve, de modelo teórico e foi área de importantíssimas descobertas na Física. Ela é a interação predominante em um grande intervalo de escalas espaciais, especialmente nas escalas da vida, isto é, nas dimensões espaciais em que a vida se desenvolve. Graças a isso, ela nos permite experimentar a Natureza e criar intuição física diretamente na nossa escala “habitat”. Evidentemente, a Física já conhece, teoricamente, o intervalo de 10^{-35}m (Comprimento de Planck) a 10^{26}m (Raio do Universo visível), enquanto a vida tal qual conhecemos só ocupa em torno de dez ordens de grandeza. Porém, a interação eletromagnética não é confinada, ao contrário da fraca e da forte[1][2][3][4], e está por trás das medidas experimentais que obtemos em laboratórios.

Por uma questão observacional, foi a carga elétrica que primeiro revelou seus efeitos para a humanidade. O spin [5] só foi descoberto depois e nasceu ao longo da construção da mecânica quântica, mas conseguiu receber notória atenção à medida que o entendimento da Física evoluía. Hoje, sabemos que alguns efeitos de spin são mais fracos, no sentido da detecção experimental, mas existem e abrem caminho para novas descobertas.

O conceito de spin de partículas elementares já existe há mais de noventa anos, porém é um assunto atual, pois não chegamos ainda ao conhecimento final que descreva satisfatoriamente como o spin surge, atua, relaciona-se com a estrutura do espaço-tempo e promove consequências nas caracterizações das interações fundamentais.

Ao investigarmos a natureza do spin, considerado como uma propriedade da matéria, seja bosônica ou fermiônica, percebemos a necessidade de entender conceitos fundamentais que carecem de uma explicação universal e realmente elucidadora. Embora trabalhem com partículas fundamentais, portadoras de propriedades físicas, não conhecemos com precisão o que é uma partícula elementar. Pode-se dizer que esse aludido nível de entendimento que busca o presente autor é meramente acadêmico e não vivifica contribuição concreta para a Física. Entretanto, a posição do autor é que já não se pode mais extrair resultados fundamentais como os muitos obtidos ao longo da história da Física devido a uma falta de entendimento da estrutura mais fundamental que forma a Física. É possível sim avançar com os olhos fechados em alguns trechos da Ciência, mas, em alguma hora,

se faz necessário repensar o caminho que tomamos, as bases que vão nos direcionar ao maior entendimento dos conhecimentos que a Natureza nos permite conhecer.

Sabemos que o conceito de campo surgiu com certa naturalidade no caminho que a Física tomou para descerever partículas, consideradas inicialmente como elementos mais importantes de uma teoria que busque entender um Todo a partir das suas partes. Embora não exista sempre uma bijeção entre campo associado e partícula de interesse [6], foi possível inserir os graus de liberdade de uma partícula nos de um campo, mesmo pagando, em teoria de gauge, o preço de espúrios graus de liberdade que acompanham a teoria.

É assaz notório o sucesso que teoria de campos conquistou com o trabalho de enorme esforço de inúmeros físicos ao longo da história[7], especialmente através da teoria quântica de campos. Apesar disso, há muito a ser feito e a se entender. Hoje, a questão da unificação [8] da interação gravitacional com a teoria quântica de campos é central e uma das mais desejadas como grande resultado para a Física, mas, muito provavelmente, esse é apenas um problema dos muitos a enfrentar, caso ansejamos construir o conhecimento que nos aproxime da identidade da Natureza.

Embora a massa e o spin pareçam conceitos totalmente diferentes, aparecem juntos em vários contextos, e o trabalho de Eugene Wigner[9] foi um dos grandes passos concretos em direção a mostrar isso. Parte-se do conceito de representações unitárias irredutíveis de um grupo e se chega à classificação de partículas. Os campos podem ser construídos através das partículas [10]; o caso contrário é quando as partículas são construídas pelos campos.

Interessantemente, não se conhece uma partícula eletricamente carregada sem massa [11][12]. O fóton, mediador da interação eletromagnética, não possui massa e nem carga elétrica. O glúon, mediador da interação forte, também não possui massa e nem carga elétrica, mas possui carga de cor. Nesse sentido, conhecemos partículas não massivas que portam algum tipo de carga, mas não carga eletromagnética. Assim, a carga eletromagnética se insere na discussão com a massa e o spin.

Adicionalmente, Wigner descobriu, baseado na invariância de Poincaré, ser possível construir estados de partículas não massivas com spins arbitrariamente altos e, por motivos históricos, os chamou de “continuous spin particles” (CSPs), embora o spin tenha valores discretos. Posteriormente, Weinberg e Witten[13] criam um teorema que nega a existência, em $(3 + 1)D$, de um tensor de energia-momentum $T^{\mu\nu}$ invariante de Poincaré e de gauge para uma partícula de massa nula e spin (helicidade) $s > 1$ (e também de uma corrente conservada J^μ para spin (helicidade) $s > 1/2$), servindo como um guia para deslustrar a realização dessas representações na Natureza. Entretanto, Yngvason[14] mostrou que não é possível associar represen-

tações CSPs a campos pontuais de Wightman, ou seja, associados a uma localização pontual. Na chamada formulação algébrica da teoria quântica de campos, o conceito de localização modular indicou a necessidade de considerarmos localização (tipo corda) em regiões não compactas, assim comportando uma descrição, antes comprometida, para essas CSPs, que podem, por exemplo, ser candidatas ao que se chama de matéria escura, considerada extremamente inerte [15]. Dessa forma, a questão do spin incitou uma reconsideração da localização no contexto da teoria quântica de campos.

Da mesma maneira em que há essa discussão de campos não pontuais, podemos introduzir a ideia de analisar partículas descritas por campos clássicos espacialmente estendidos e investigar se é possível, através da interação eletromagnética, obter alguma indicação que justifique essa preocupação em relação ao tratamento pontual dado a partículas fundamentais.

A eletrodinâmica quântica trata os léptons como partículas pontuais [16], porém as partículas elementares possuem os chamados fatores de forma, que descrevem os desvios eletromagnéticos do comportamento de uma autêntica carga pontual. A própria equação de Dirac costuma ser tomada como modelo de descrição de uma partícula pontual que fornece fator giromagnético $g = 2$, embora não há nada na equação em si que determine uma partícula pontual. Após a consideração dos efeitos da teoria quântica de campos, correções perturbativas na interação com fótons virtuais e polarização de vácuo por pares de partícula e antipartícula, esse fator giromagnético melhor se aproxima dos valores experimentais. Diz-se que a partícula nua (“bare”) é acompanhada de uma nuvem de fótons virtuais que confere o desvio da característica pontual e passa a ser chamada de partícula vestida (“dressed”)[17]. A partícula nua é livre de interação e a partícula vestida é resultado das interações. A renormalização da constante de acoplamento é que faz essa reconciliação em manter as quantidades físicas fora das indesejadas divergências.

No âmbito de melhor entender esses vários conceitos aqui destacados, o momento magnético é um valioso objeto de estudo. Primeiramente, ele relaciona quantias como a carga elétrica, a massa e o spin de um sistema em geral através de uma constante adimensional chamada fator giromagnético. Adicionalmente, o fator giromagnético é entrada para efeitos de outras interações fundamentais e até mesmo de física além do Modelo Padrão[18]. A questão da elementaridade de partículas também parece estar envolvida, pois já constatamos que partículas compostas possuem um grande fator giromagnético em comparação àquele derivado de partículas elementares.

Nos capítulos que sucedem, o comprimento de onda de Compton associado a uma partícula parece ganhar relevância quando buscamos entender determinadas propriedades inerentes a partículas. É importante lembrar que, enquanto o comprimento de onda de Bro-

glie está associado a distâncias em que a natureza ondulatória de partículas se torna manifesta, o comprimento de Compton corresponde à distância em que o próprio conceito de partícula é inextricável, ou seja, é o valor limite em que é seguro falar realmente de uma partícula. O comprimento de Compton é obviamente menor que o de Broglie para qualquer partícula massiva, o que indica maiores energias envolvidas. Dessa forma, é natural que se possa encontrar pares de partícula e antipartícula nessa escala de comprimento. Além disso, localização de pacotes de onda, no contexto de equação de Dirac, está restrita ao comprimento de Compton.

Quanto à proposta geral desta Dissertação:

Como necessário passo na discussão dos aspectos teóricos aqui considerados, a análise da estrutura da corrente eletromagnética é abordada, em caráter semiclássico, por envolver vários elementos básicos tais como o spin, a carga elétrica, a massa e, obviamente, o momento magnético. Faz-se uma comparação entre as características eletromagnéticas clássicas do caso fermiônico e as do caso bosônico. Calcula-se o momento magnético anômalo do bóson W por considerações semiclássicas baseadas em um conceito de extensibilidade da partícula.

Quanto à organização deste trabalho;

Parte I: Contextualizamos o assunto da dissertação, apresentamos motivações para o nosso estudo e definimos questões a serem abordadas ao longo dos capítulos.

O segundo capítulo traz uma marcação histórica com datas relevantes para os assuntos abordados na dissertação e uma apresentação de termos e conceitos centrais para o entendimento do trabalho. Mais do que uma reprodução do que já está escrito em um livro qualquer, há ênfase em esclarecer alguns pontos sem abandonar o rigor necessário. O spin recebe grande destaque, lembrando as várias maneiras em que ele aparece na teoria. O fator giromagnético (anômalo) é explicado. Distinguem-se a helicidade, a quiralidade, a polarização e o spin.

Parte II: Discussão conforme os seguintes capítulos.

O terceiro capítulo apresenta os spin 0 (partícula escalar) e 1/2 (partícula fermiônica) com a discussão inicial da mecânica quântica e a problematização que tornou necessário o passo além da mecânica quântica. Comenta-se a relação entre as equações de Schrödinger, Pauli, Klein-Gordon e Dirac. Surge a ideia de localização no sentido de Born e Newton-Wigner, que é uma propriedade esperada como cumprida pelas partículas elementares. O spin é revelado como presente nas equações de Maxwell consideradas não mais a nível macroscópico, mas microscópico em uma perspectiva semiclássica. A seção final é desenvolvida com uma ideia de extensibilidade espacial para o campo dos léptons e uma possível simulação de efeitos quânticos.

tivos do fator giromagnético anômalo obtida sem a quantização de campos.

O quarto capítulo apresenta o spin 1 (bóson vetorial) já na formulação lagrangeana de campo clássico. Definem-se os vetores de polarização e a relação com helicidades e polarizações. Dá-se ênfase aos bósons massivos, em especial ao bóson W por ser eletricamente carregado e, portanto, permitir a discussão do eletromagnetismo associado em direta analogia com o caso fermiônico considerado no terceiro capítulo. A questão do fator giromagnético surge requerindo a necessidade de acoplamentos não mínimos como consequência da consideração da interação eletromagnética na formulação eletrofraca. É destacada a relação desse acoplamento com o bóson de Higgs do Modelo Padrão. As equações de Maxwell são tomadas para o bóson vetorial massivo, destacando a diferença em relação ao caso fermiônico. A seção final trata novamente do fator giromagnético a partir da ideia de extensibilidade.

O quinto capítulo discute alguns pontos que diferem, ou relacionam, os conceitos de spin, carga elétrica e massa. Surge a necessidade em questionar o próprio conceito de partículas e sua possível fundamentalidade em detrimento à ideia de serem objetos totalmente derivados de campos. A questão da localização é inserida naturalmente e explicada em bases elementares no contexto de Newton-Wigner. Comenta-se a distinção entre conservação e regra de superseleção no âmbito em que são relevantes para o spin, a carga e a massa. Sobre o fator giromagnético, acrescentam-se observações à luz dos capítulos anteriores.

O sexto capítulo consiste nos comentários finais.

Parte II

DISCUSSÃO

Após a apresentação geral das motivações desse trabalho, prosseguimos de modo natural na sucessão dos conceitos e fatos abordados. A ideia é que um tópico incorra no seguinte. Naturalmente, um único tópico costuma envolver uma série de outros pontos relevantes. Na medida do possível, houve a preocupação em abranger, ou ao menos citar, esses pontos relevantes. Dadas as limitações de tempo para esse trabalho, consideram-se como conhecidos alguns pré-requisitos.

O spin possui uma crescente participação nas discussões da Física. As primeiras ideias de spin de partículas surgiram exatamente enquanto a mecânica quântica e a teoria de campos eram formuladas; não foram assuntos que se sucederam historicamente, mas entrelaçados como consequência inexorável dos esforços comuns, por parte dos físicos do século XX, em entender a natureza da matéria.

Teoria de campos procura descrever os campos através de equações que possuem embutidos os princípios fundamentais que guiam a teoria. Para descrever uma partícula, por exemplo, é preciso não apenas descrever uma idealização de partícula livre, mas também fornecer a descrição mais real, que envolve a maneira pela qual as partículas interagem entre si. A questão de como inserir os graus de liberdade de partículas em graus de liberdade de campos é central para as equações de campo. Assim, o spin, como um grau de liberdade, exerce notória importância na maneira em que decidimos relacionar campos e partículas.

2.1 DATAÇÃO HISTÓRICA

O motivo em iniciar com o destaque de algumas datas é que a Física segue uma sucessão de fatos que incorrem em outros, embora nem sempre lembremos isso. Sendo assim, conhecer os momentos históricos da pesquisa em Física é útil para entendermos o funcionamento e motivações da própria Física.

Alguns fatos datados para facilitar o entendimento do contexto aqui relevante

- 1896 - Efeito Zeeman .
- 1897 - Descoberta do elétron por Thomson.
- 1900 - Postulado de Plank e início da Mecânica Quântica.
- 1905 - Einstein descreve o efeito fotoelétrico.
- 1910 - Medida da carga do elétron.
- 1911 - Descoberta do núcleo.
- 1913 - Modelo de Bohr.
- 1919 - Descoberta do próton por Rutherford.
- 1921 - Compton propõe o “spinning” elétron.

- 1922 - Experimento de Stern-Gerlach testa hipótese de quantização de Bohr-Sommerfeld.
- 1923 - Dualidade onda-partícula, de Broglie.
- 1924 - Princípio da exclusão de Pauli.
- 1925 - Kronig inventa o conceito de spin, mas desiste devido críticas de Pauli.
 - Heisenberg formula a mecânica matricial.
 - Uhlenbeck e Goudsmit reinventam o conceito do “spinning” elétron para explicar o efeito Zeeman anômalo no espectro atômico.
- 1926 - Equação de Klein-Gordon.
 - Schrödinger formula a equação de onda.
 - Thomas aponta um efeito cinemático, precessão de Thomas, que retira uma possível discrepância no trabalho de Uhlenbeck e Goudsmit. A ideia de spin começa, então, a ser aceita.
- 1927 - Dennison descobre que o spin do próton é o mesmo do elétron.
 - Como resultado de discussões com Einstein em 1924/25 e com Born e Heisenberg em 1926, surge uma teoria quântica de campos bidimensional. Os objetos considerados como fundamentais são os campos - Pascual Jordan.
 - QED surge com a teoria quântica da radiação. Os objetos considerados como fundamentais são as partículas - Dirac.
- 1928 - Equação de onda relativística de Dirac para o elétron. $g = 2$
- 1930 - QED possui divergências ultravioleta; Oppenheimer.
- 1930 - Pauli propõe existência do neutrino.
- 1931 - Previsão do anti-elétron, pósitron, por Dirac.
- 1932 - Descoberta do neutron por Chadwick e do pósitron por Anderson.
- 1933 - Teoria de Fermi para decaimento beta marcando a interação fraca.
- 1935 - Stern mostra que o momento magnético do próton não é 2, mas 5.5.
 - Yukawa aponta existência do méson, partícula.

- 1939 - Eugene Wigner faz um trabalho fundamental sobre a classificação de partículas no contexto do grupo de Poincaré.
- 1940 - Pauli completa trabalho de Fierz sobre conexão spin-estatística.
 - Schwinger, Feynman e Tomonaga métodos para renormalização.
- 1947 - Medida do efeito Lamb shift.
 - Medida do fator $(g - 2)$ para o elétron; Kusch e Foley.
 - Descoberta do méson pi (César Lattes, Powell, Occhialini), partícula escalar carregada.
- 1948 - Schwinger calcula a primeira correção da QED para o $g = 2$ do elétron em concordância com resultado experimental de Kusch/Foley.
 - TQC para monopolos magnéticos - Dirac
- 1949 - Freeman Dyson mostra equivalência dos métodos de renormalização.
- 1952 - Desenvolvimento da QED escalar - Salam.
- 1954 - Teoria local de gauge; Yang-Mills/Utiyama.
- 1956 - Conferência internacional de física de partículas em Seattle: Lee-Yang anunciam quebra de Paridade; Salam introduz a simetria quiral.
- 1957 - Bóson vetorial intermediário na interação fraca; Lee/Yang e Schwinger.
 - Descoberta experimental da violação de Paridade na interação fraca - Shiung Wu.
 - “A theory of the fundamental interactions” - Schwinger.
- 1958 - José Leite Lopes introduz bóson Z como intermediário dos processos neutros na interação fraca.
- 1961 - Bósons não massivos de Goldstone.
 - Noção de quebra espontânea de simetria (SSB) em física de partículas - Nambu.
 - Princípio de gauge para QFT de campos interagentes; Salam e Ward.
 - Bóson intermediário neutro da interação fraca, Z^0 ; Glashow.
- 1962 - Lee-Yang e Salam estudam a renormalizabilidade da QED para bósons vetoriais carregados.

- 1964 - Teoria com quebra espontânea de simetria com bósons vetoriais massivos; Higgs, Englert, Brout, Guralnik, Hagen e Kibble.
 - Lagrangiana da teoria eletrofraca e estimativa da massa do bóson W ; Salam e Ward.
 - Introdução dos Quarks; Gell-Mann.
- 1967 - Lagrangiana da teoria eletrofraca e estimativa das massas dos bósons W e Z ; Weinberg.
- 1968 - Constatação experimental da liberdade assintótica no SLAC.
- 1971 - Renormalização de teorias de gauge com SSB; t’Hooft.
- 1972 - Formulação da QCD.
- 1973 - Descoberta das correntes fracas neutras no CERN.
- 1983 - Descoberta experimental dos bósons W e Z no CERN.
- 1988 - QED é testada a distâncias de 10^{-18} m
- 2012 - Bóson de Higgs descoberto no LHC.

2.2 O CONCEITO DE SPIN

Pauli has often called something wrong that turned out to be right, but he has never judged anything to be right that later turned out to be wrong - Wilhelm Lenz

A primeira ideia de elétron girando em torno de seu próprio eixo foi proposta por Compton em 1921, mas ele não aplicou essa hipótese ao chamado efeito de Zeeman anômalo e nem obteve simpatia da comunidade acadêmica. Em 1925, foi Kronig que teve a mesma ideia, mas, sob conselho de Landé, conversou com Pauli, que tinha escrito um artigo sobre efeito Zeeman em 1923. Porém, Pauli atacou a ideia, e Kronig não publicou a publicou, até porque Heisenberg, Kramers e outros também levantaram uma série de problemas ao conceito de partícula girante. Já em 1925, Uhlenbeck e Goudsmit reintroduziram o mesmo conceito, mas dessa vez conseguiram o apoio de Bohr, embora as críticas de Pauli. A hipótese consistia em três partes:

1. O elétron gira;
2. Tem momento angular $m_s = \pm \frac{1}{2}$;
3. Tem momento magnético $2m_s$.

Em 1926, com um cálculo feito por Thomas, que confirmou (2) e (3), Pauli começou a aceitar o elétron girante e justificou a incredulidade anterior devido ao caráter de mecânica clássica associado à parte (1). Depois disso, a ideia de spin seguiu evoluindo na Física. Hoje aprendemos, nos cursos básicos de mecânica quântica, que a imagem do

spin como uma rotação física do elétron não é correta, pois é uma visão clássica. Nesse sentido, pode-se dizer que o Pauli não errou em atrasar a introdução do conceito de spin na física.

É importante destacar que, ao contrário que o comumente ensinado, não foi o experimento de Stern-Gerlach que foi de maior importância para o desenvolvimento do conceito de spin, mas os experimentos da física atômica; efeito Zeeman da espectroscopia, etc. Sobre a história do spin, as seguintes referências[5] [19] são notórias e recomendadas como leitura.

*Classically
indescribable
two-valuedness -
Pauli*

O conceito de spin em mecânica clássica está associado a um movimento mecânico girante de um objeto; spin mecânico. Quando aplicado a uma partícula elementar, entra em sério conflito com a relatividade especial. Lorentz, além do Pauli, foi um opositor dessa visão que, em regime de altas energias, carrega sérias inconsistências.

Em mecânica quântica, também a presença do spin se manifesta como um grau de liberdade “intrínseco” da partícula, mas, inicialmente, não natural nas equações não relativísticas (Schrödinger e Pauli) até Dirac propor uma equação relativística que descrevia o spin como consequência natural da equação. A dimensão do spin é em unidades da constante de Planck \hbar devido ao caráter quântico, mas a invariância de Lorentz, relacionada ao grupo de simetria das transformações no espaço de Minkowski, dá o número $\frac{1}{2}$ no caso do elétron. O adjetivo “intrínseco” deve ser usado, talvez, pelo fato de o spin funcionar como um momento angular presente até mesmo no referencial de repouso do objeto de interesse.

Já na teoria de grupos, o spin aparece como um número que caracteriza as representações do grupo de simetria das transformações em questão. Como explicado mais adiante neste capítulo, as representações irredutíveis do grupo de Lorentz são caracterizadas por um par de números (j, k) $j, k \in \frac{\mathbb{Z}}{2}$. As demais representações podem ser construídas por produtos tensoriais e somas diretas das representações irredutíveis. O spin s das partículas, representações unitárias irredutíveis do grupo de Poincaré¹, está relacionado ao “little group”, subgrupo do grupo de Lorentz que é utilizado para construir representações do grupo de Poincaré em que estados de uma partícula se transformam. No caso de partículas massivas, por exemplo, esse “little group” é $SO(3)$, grupo de rotações espaciais, daí a importância de $SO(3)$. Quando as representações (j, k) são restritas ao subgrupo $SO(3)$, elas são unitárias, mas não irredutíveis em termos de $SO(3)$; uma decomposição de Clebsch–Gordan revela que há subespaços que se transformam com spins distintos $s = |j - k|, \dots, j + k - 1, j + k$. Sendo assim, a escolha do espaço é relevante para a determinação do spin; espaço galileano ou minkowskiano, por exemplo, possuem diferentes grupos de simetria sob o conjunto das transformações: translação, rotação, boost. Porém, em Física, creditamos maior fundamenta-

¹ Chamado também de Lorentz inhomogeneous.

lidade ao espaço de Minkowski como responsável pela descrição das partículas da Natureza².

É comum encontrarmos a asserção de que o spin é um efeito “puramente” relativístico. Isso, provavelmente, se deve ao fato de que a equação relativística de Dirac obtém o valor $g = 2$ para o fator giromagnético do elétron. Porém, essa frase é, no mínimo, imprecisa.

Existe um procedimento devido a Lévy-Leblond [20] que consiste na linearização das equações de onda que descrevem uma partícula de determinado spin. Particularmente, a aplicação do método para as equações de Schrödinger e Klein-Gordon resulta na obtenção das equações de Pauli e Dirac, respectivamente. Isso significa que o procedimento obtém com sucesso o fator giromagnético $g = 2$ para o elétron. A ideia da linearização, no caso de Schrödinger, consiste no seguinte: dado um operador

$$\hat{S} \equiv \hat{E} - \frac{\hat{p}^2}{2m}, \quad (2.1)$$

onde $\hat{S}\psi = 0$ é a equação livre de Schrödinger, construímos uma equação de onda para o mesmo ψ com um operador linear $\hat{\Theta}$ em termos da energia e do momentum

$$\hat{\Theta}\psi = (\hat{A}\hat{E} + \hat{B} \cdot \hat{p} + \hat{C})\psi, \quad (2.2)$$

com A, B, C operadores lineares a serem determinados. Faz-se o requerimento de ψ obedecer, portanto, simultaneamente a duas equações

$$\hat{\Theta}\psi = 0 \quad (2.3a)$$

$$\hat{S}\psi = 0. \quad (2.3b)$$

Assim, existe um operador $\hat{\Theta}'$ que aplicado em $\hat{\Theta}\psi$ equivale à atuação de \hat{S} a menos de constante multiplicativa. Por conveniência, adota-se

$$\hat{\Theta}'\hat{\Theta} = \hat{S}. \quad (2.4)$$

Após resolver o sistema de equações, obtém-se as chamadas equações de Lévy-Leblond, que são não relativísticas³

$$E\phi + (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})\chi = 0 \quad (2.5a)$$

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})\phi + 2m\chi = 0, \quad (2.5b)$$

com $\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$, pois são invariantes por uma transformação geral de Galileu dada por

$$\vec{x}' = R\vec{x} + \vec{v}t + \vec{a} \quad (2.6a)$$

$$t' = t + b, \quad (2.6b)$$

² Na prática, não vivemos em uma região invariante de Poincaré do espaço-tempo.

³ Do ponto de vista do espaço de Minkowski. Pode-se chamar, porém, de uma relatividade galileana.

em que a função de onda transformada é $\psi' \begin{pmatrix} \phi' \\ \chi' \end{pmatrix}$. Do estudo das representações unitárias irredutíveis do grupo de Galileu, mostra-se que a função de onda ψ se transforma na representação $s = 1/2$ do grupo de Galileu. Assim, a equação de onda em (2.5) descreve uma partícula não relativística de massa m e spin $1/2$.

Para obter o momento magnético com o correto fator giromagnético, acopla-se a partícula a um campo eletromagnético externo⁴ e utiliza-se a invariância de gauge da equação de Schrödinger, que se traduz no acoplamento mínimo do campo eletromagnético \vec{A} juntamente com a transformação de fase da função de onda. O resultado é a obtenção da equação de Pauli⁵, que surge como uma consequência e não como “ad-hoc” fenomenológico.

*“Thus a completely nonrelativistic linearized theory predicts the correct intrinsic magnetic moment of a spin- $\frac{1}{2}$ particle.”
(Lévy-Leblond)*

Posteriormente, vários livros destacaram o resultado e alertaram sobre a afirmação que credita todo o conceito spin a um efeito puramente relativístico no sentido de Minkowski. Segue uma citação, em particular, de Max Jammer[21]:

“The so often repeated statement-suggested, probably, by this peculiar historical development-that “the spin is a purely relativistic effect” is a misconception. For it can be show that a consistent theory of spin $1/2$ with the correct value of the intrinsic magnetic moment can be established without ad hoc assumptions within the framework of Galileo-invariant, and not necessarily Lorentz-invariant, wave equations, though with the exclusion of spin-orbit interactions and the Darwin term (which thus are truly relativistic effects).

Certamente, embora a aludida dedução do conceito de spin de um férmion elementar não invoque invariância de Lorentz, a ideia se utiliza de um princípio de invariância, uma relatividade galileana, que tem consequências matemáticas pautadas em teoria de grupos. O grupo de Galileu pode ser obtido como uma contração (Inönü-Wigner) do grupo de Poincaré no limite em que $c \rightarrow \infty$, e, nesse sentido, a álgebra galileana pode ser vista como um caso especial da álgebra de Poincaré.

Generalizações do método de Lévy para spins mais altos, utilizando equações de Bargmann-Wigner covariantes em respeito ao grupo de Galileu, concluem que é possível generalizar o fator giromagnético

4 Em que há discussão sobre a consistência, garantida para o caso de campo estático, da teoria galileana após a introdução de um campo de Maxwell tipicamente relativístico.

5 A equação de Pauli contém o grau de liberdade associado ao spin.

de uma partícula com spin s por $g = 1/s$. Esse resultado está errado⁶ para partículas elementares, pois possuem $g = 2$, a “tree-level”, independentemente do spin. Interessantemente, para férmions de $s = 1/2$, o valor de $g = 2$ é correto. Esse resultado $g = 1/s$ poderia⁷ estar relacionado ao fato do requerimento da relatividade galileana e nos levar a refletir sobre a maior fundamentalidade do grupo de Poincaré em relação à descrição de uma propriedade essencialmente eletromagnética (interação com fóton) que é o momento magnético das partículas elementares. Porém, essas equações de Bargmann-Wigner possuem problemas [22] com o acoplamento mínimo eletromagnético, enquanto que, no caso de spin $s = 1/2$, as equações de Dirac e de Pauli não sofrem desse problema. Assim, o férmion elementar de spin $s = 1/2$ parece se destacar por uma provável “fundamentalidade” que está relacionada ao seu spin.

Evidentemente, a invariância de Galileu não substitui a relatividade einsteniana devido a massa nula não ser um limite válido na teoria galileana e, portanto, a própria teoria de Maxwell para o fóton ficar comprometida. Particularmente, sob invariância de Galileu, no vácuo, tem-se ($\nabla \times \vec{B} = 0$), ou seja, há a perda da corrente de deslocamento que faz transporte físico de energia, a menos no caso limitante em que o sistema é estático, sem dependência temporal. Além disso, na formulação galileana, uma partícula elementar não relativística só é imbuída de carga elétrica e momento de dipolo magnético; não de outros momentos mais altos como quadrupolos. Sendo assim, há um problema de classificação bem definida das partículas que fica destacado pela descrição da interação eletromagnética dessas partículas.

De um ponto de vista totalmente matemático, o grupo universal de recobrimento $SU(2)$ do grupo especial de rotações em três dimensões $SO(3)$ está lá como sendo o duplo recobrimento de $SO(3)$, com núcleo discreto $\{+I, -I\}$. Da mesma forma, sabemos que $SU(2)$ é difeomórfico à 3-esfera S^3 , e $SO(3)$ é difeomórfico ao espaço real projetivo de três dimensões $\mathbb{R}P^3$, em que os pontos antipodais na superfície da esfera são identificados⁸. Quando se busca as classes de caminhos fechados que podem ser distorcidos a um ponto, descobre-se que $SO(3)$ não é simplesmente conexo, embora seja conexo, já que são duas as classes de caminhos possíveis. Isso é fato matemático.

Entretanto, qual a motivação física para buscarmos representações de um grupo de recobrimento ao invés do próprio grupo de simetria? Argumentos de invariância por difeomorfismos não são suficientes, pois difeomorfismos são simetrias de gauge, com infinidade de pa-

6 Ver a seção (5.4).

7 Argumentos de acoplamento mínimo eletromagnético em equações covariantes de Lorentz também obtiveram a errônea generalização de $g = 1/s$.

8 Trata-se de uma esfera sólida de raio π , no espaço dos parâmetros do grupo $SO(3)$. Pontos antipodais são identificados porque uma rotação de $+\pi$ é idêntica a uma rotação de $-\pi$. O espaço $\mathbb{R}P^n$ pode ser formado pela identificação dos pontos antipodais na superfície da n -esfera S^n em \mathbb{R}^{n+1} .

râmetros, portanto não uma simetria real de um sistema físico, mas uma redundância na descrição dos graus de liberdade. Simetrias verdadeiras de um sistema físico mapeam um estado físico em outros estados físicos, enquanto simetrias de gauge mapeam uma espúria descrição de um estado em outra. Sabemos que a simetria dos raios, ou das probabilidades de transição de estados, considerada por Wigner é uma necessidade de introdução do espaço de Hilbert, que é motivado pelo caráter quântico da Natureza. Sendo assim, a motivação física é a natureza quântica.

O spin pode ser chamado de um conceito quântico, além da unidade \hbar , no sentido de que a noção de graus de liberdade interno não encontra uma clara reconciliação com teoria clássica de partículas. Portanto, o spin⁹ fornece um grau de liberdade aceso pela natureza quântica, mas implementado por um princípio de invariância, isto é, relatividade. Para descobrirmos a noção da existência desse spin, não importa muito se a relatividade é de Galileu, Poincaré, etc, mas o grupo de Poincaré é o que melhor comporta a descrição das interações que esse spin vai se submeter.

Há um interessante trabalho[23] que questiona a natureza do spin e busca uma explicação consistente com uma visualização física. O autor sugere que esse grau de liberdade não é interno à partícula, mas à estrutura de onda. Em particular, há uma noção de rotação, não uma rotação mecânica da partícula, mas associada à circulação de energia de campos; “circulation of energy in the wave fields”.

Embora seja um conceito abstrato, do ponto de vista visual, a importância do spin não se restringe a uma “mera” caracterização de partículas, mas possui consequências práticas. O fenômeno do ferromagnetismo é derivado da existência de spin e está totalmente relacionado à indústria energética. Manipulação do spin do elétron permite armazenamento e leitura de informações em tecnologias e utilização de exames como o de ressonância magnética(MRI) em medicina. Há também o interesse na investigação da dinâmica do spin em plasmas utilizando, por exemplo, modelos de hidrodinâmica quântica[24] com spin 1/2 carregado; onde as equações de Maxwell adquirem explicitamente termos devido ao spin. Recentemente, a spintrônica e a computação quântica[25] também se desenvolvem e mantêm crescente interesse na manipulação do spin do elétron e atômico.

⁹ Como spin de partículas elementares. Obviamente, a palavra spin pode ser usada para descrever um certo tipo de rotação a nível macroscópico como o de um pião, mas esse “spin” não é o fundamental que faz a distinção entre um férmion e um bóson.

2.3 MOMENTO MAGNÉTICO

Classicamente, o momento de dipolo magnético $\vec{\mu}$ de um “objeto” relaciona o torque sentido com o campo magnético externo que atua nesse objeto.

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}. \quad (2.7)$$

A energia potencial associada ao momento magnético devido ao campo magnético atuante é dada por

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}. \quad (2.8)$$

Quando o campo magnético não é uniforme, o gradiente do potencial produz uma força que atua sobre o vetor de momento magnético.

Do ponto de vista da produção de um campo magnético, o momento de dipolo magnético é responsável pelo primeiro termo não nulo (considerando nulo o termo de monopolo) na expansão multipolar de um potencial vetor \vec{A} gerado por uma fonte magnética. O campo magnético associado decresce com o fator de $\frac{1}{r^3}$, sendo \vec{r} a distância à fonte. Sendo assim, outras contribuições são de quadrupolos, etc. Para o potencial \vec{A} , o termo de dipolo é o de dependência $\frac{1}{r^2}$. Portanto, para distâncias suficientemente afastadas da fonte, o termo de dipolo domina, e a fonte pode ser tratada como um dipolo. Para pequenas distâncias, outros termos podem ser relevantes.

Ainda classicamente, um “puro” dipolo magnético pode ser considerado como o limite de uma corrente elétrica de uma linha fechada ou de um par de pólos com a distância característica reduzida a zero enquanto o momento magnético é mantido constante.

Define-se o momento magnético diferencial como o seguinte pseudovetor

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{j} \quad (2.9)$$

Com \vec{j} sendo a densidade de corrente. O momento magnético integral de uma distribuição de cargas é

$$\vec{M} = \frac{1}{2} \iiint (\vec{r} \times \vec{j}) dV \quad (2.10)$$

No caso planar, pode-se reduzir a

$$\vec{M} = I \vec{S} \quad (2.11)$$

Assim, o momento magnético fica proporcional a corrente e à área S correspondente.

Para um corpo em rotação carregado uniformemente, a razão entre o momento angular total, que é angular \vec{L} , e o momento magnético $\vec{\mu}$ é dada por $\frac{Q}{2M}$, pois

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} \int d^3x \rho_c \vec{x} \times \vec{v}(\vec{x}) = \frac{Q}{2M} \int d^3x \rho \vec{x} \times \vec{v}(\vec{x}) = \frac{Q}{2M} \vec{L} \quad (2.12)$$

Onde ρ_c é densidade de carga e ρ é a densidade de massa constante.

No modelo clássico mais simples possível, por exemplo, uma carga q , de massa m , em órbita circular com velocidade angular ω tem momento angular $L = m r^2 \omega$ e momento magnético $\mu = \frac{\pi r^2 q \omega}{2\pi}$. A partícula carregada é efetivamente representada pelo loop que cerca a área πr^2 . Assim, a razão entre momento magnético e angular é dada por

$$\gamma = \frac{\mu}{L} = \frac{q}{2m} \quad (2.13)$$

Chamada de razão giromagnética.

No caso quântico, existe expressão análoga para a relação entre o momento magnético de uma partícula e o momento angular spin

$$\vec{\mu} = g \left(\frac{q}{2m} \right) \vec{S} \quad (2.14)$$

Onde g é o fator giromagnético. Dependendo da convenção, também pode se escrever $|g|$, quando considera o sinal de cargas negativas.

Sendo assim, comparando as expressões, o caso clássico nos daria $g = 1$. O que é bem destoante do caso quântico para o elétron, por exemplo, onde $g = 2$ na equação de Dirac; lembrando que a equação de Dirac é para partícula livre, portanto o momento angular em questão é spin e não orbital. Destacamos que, mesmo no referencial de repouso do elétron, $\vec{L} = 0$ e $\vec{p} = 0$, há momento magnético.

Para o elétron, que possui $\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$, $g = 2$, temos o seguinte momento magnético

$$\vec{\mu} = \frac{-|e|\hbar}{2m_e} = -\vec{\mu}_B \vec{\sigma} \quad (2.15)$$

Onde $\vec{\mu}_B = \frac{|e|\hbar}{2m_e} = 5.78838 \times 10^{-5} \text{ eV/T}$ é chamado magneton de Bohr.

É importante deixar claro que, embora o conceito de fator giromagnético esteja relacionado com a razão giromagnética, são quantidades distintas; o fator é uma quantidade adimensional. Além disso, o fator pode estar associado com três momentos magnéticos diferentes: o do momento angular de spin, do momento angular orbital e do momento angular total.

$$\vec{\mu}_{\text{orbital}} = g_L \left(\frac{q}{2m} \right) \vec{L} \quad (2.16)$$

$$\vec{\mu}_{\text{spin}} = g_S \left(\frac{q}{2m} \right) \vec{S} \quad (2.17)$$

$$\vec{\mu} = g_J \left(\frac{q}{2m} \right) \vec{J} \quad (2.18)$$

Onde $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$.

Quando levamos em consideração o momento angular total \vec{J} , o fator correspondente é chamado fator de Landé; quem introduziu o conceito de fator g , em 1921, para dar conta do chamado efeito Zeeman. Assim: $\vec{\mu}_L = g_L \mu_B \vec{L}$, $\vec{\mu}_S = g_S \mu_B \vec{S}$ e $\vec{\mu}_J = \vec{\mu}_L + \vec{\mu}_S$.

Entretanto, a energia de interação do campo magnético externo com o momento magnético depende de $-\vec{\mu} \cdot \vec{B}$. Que, para um elétron atômico fica

$$\Delta E = \frac{e}{2m} (\vec{L} + 2\vec{S}) \cdot \vec{B} \quad (2.19)$$

Aqui já consideramos “e” sendo a carga fundamental, positiva. O espectro dessa energia não é contínuo, como esperado classicamente, mas discreto devido à dependência do spin.

Classicamente, temos ainda que, como o momento magnético é proporcional ao momento angular, a variação do momento magnético é proporcional ao torque (já que $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$) e ($\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$); então o vetor momento magnético precessiona em torno do campo magnético, \vec{B} , proporcionalmente a chamada frequência de Larmor.

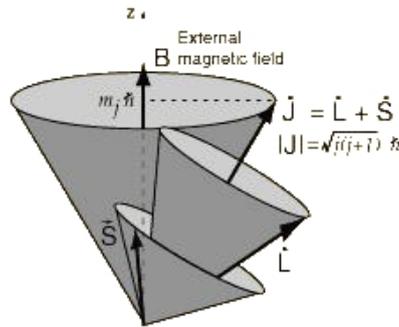


Figura 1: Esquema vetorial

De forma pictórica bem simples, partindo da variação do momento angular

$$\Delta L = L \sin \theta \omega \Delta t$$

e

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\mu} \times \vec{B} = \gamma \vec{J} \times \vec{B},$$

chega-se a

$$\omega = \gamma B = g \frac{q}{2m} B \quad (2.20)$$

Em geral,

$$\omega_s = \frac{g}{2} \omega_c \quad (2.21)$$

Onde ω_s é a frequência de precessão do spin.

No caso do elétron, $g = 2$ implica em uma frequência de Larmor igual a frequência de cyclotron, $\omega_c = \frac{eB}{m\hbar}$, para um campo magnético externo constante.

$$\omega_c = \frac{e}{m} B = \omega_s \quad (2.22)$$

Sendo assim, a ideia básica em verificar experimentalmente o desvio do fator giromagnético é calcular a seguinte quantidade

$$a = \frac{\omega_s - \omega_c}{\omega_c} = \frac{\omega_a}{\omega_c} \quad (2.23)$$

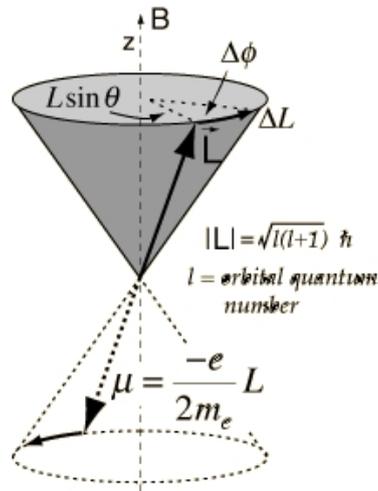


Figura 2: Precessão do momento angular(clássico)

Em analogia com $\frac{g}{2} = \frac{\omega_s}{\omega_c}$; com $\omega_a = \omega_s - \omega_c$.

Na questão experimental, os métodos mais modernos determinam o desvio e não o valor exato de g diretamente [26]. O primeiro experimento para medição do desvio $|g| - 2$ do elétron foi feito por Crane [27], e é baseado no desvio do ângulo entre o spin e momentum, de partículas com spin $1/2$, devido campo magnético solenoidal. O elétron se move em órbitas em quanto percorre o aparato, e então, após grande número de revoluções, é observado o ângulo final entre o spin e momentum. No caso de exato $g = 2$, não há variação alguma do ângulo inicial. Particularmente, inicialmente os elétrons são longitudinalmente polarizados, isto é, $\vec{p} \parallel \vec{S}$. Posteriormente, foi substituído por um arranjo de campo mais sofisticado no CERN, que permite o experimento para partículas não estáveis, como o múon.

Dehmelt [28][29], Nobel 1989, desenvolveu um sofisticado método para medir o desvio do fator giromagnético através de um experimento tipo Zeeman que utiliza a chamada Penning trap [30]. Onde um único elétron pode ficar preso (em semanas ou meses) por aplicação de forte campo magnético axial homogêneo e campo elétrico inhomogêneo de quadrupolo. O sistema formado pelo elétron e o aparato é chamado "geonium", uma espécie de "átomo" da Terra, como foi chamado por Dehmelt. Hoje, a ideia de Penning trap é utilizada no CERN para confinar antimatéria.

Dentro dessa armadilha, o elétron possui três tipos de movimentos: cyclotron (devido \vec{B}), axial (devido \vec{E}) e magnetron (devido a \vec{B} e \vec{E}). A diferença de energia entre dois níveis de Zeeman é dada pela frequência cyclotron ω_c

$$\hbar\omega_c = 2\mu_B B,$$

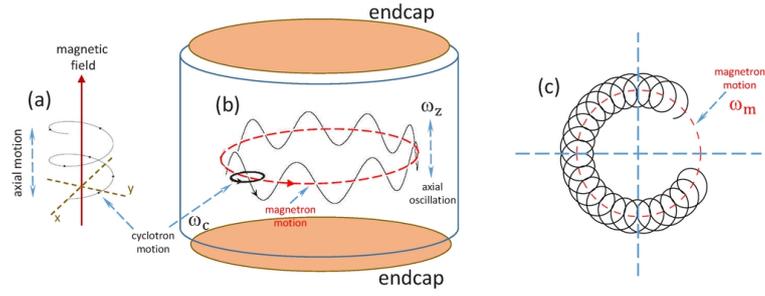


Figura 3: Precessão do momento angular(clássico)

e o flip de spin(mudar de down para up, por exemplo) também pode mudar a energia de

$$\hbar\omega_s = g\mu_B B.$$

As transições de energia podem ser escolhidas, de acordo com os campos aplicados, para serem puramente por mudança de órbita ou por spin e órbita ao mesmo tempo. No caso puramente de órbita, a frequência é dada por ω_c . No outro caso, é

$$\omega_a = \omega_s - \omega_c = \frac{(|g| - 2)\mu_B B}{\hbar}$$

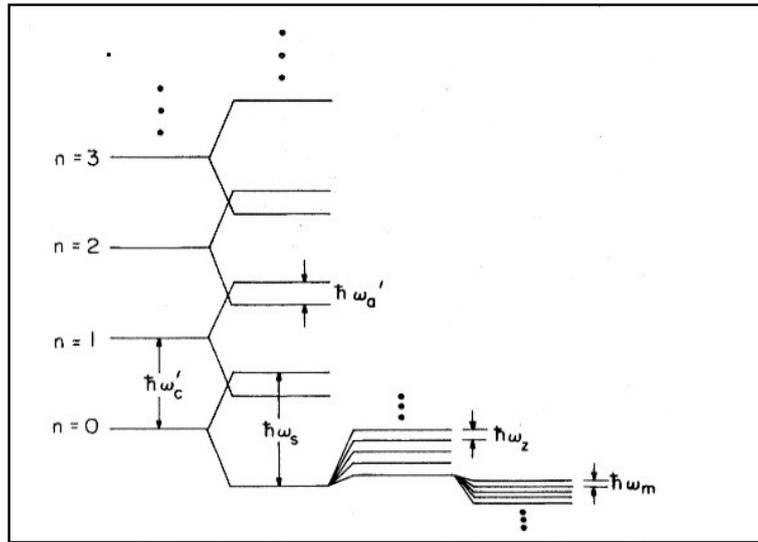


Figura 4: Níveis de energia do geonium para elétron. Da esquerda para direita: os níveis de energia de cyclotron,do spin, das oscilações axiais e do movimento magnetron. Quando $\omega_s = \omega_c$, $\omega_a = 0$ implica em degenerescências.

A razão entre as duas frequências é

$$\frac{\omega_a}{\omega_c} = \frac{(|g| - 2)}{2} \tag{2.24}$$

Ou ainda,

$$\omega_a = \frac{e}{m} a \vec{B} \tag{2.25}$$

Onde é definido a contribuição anômala para o momento magnético

$$\alpha = \frac{|g| - 2}{2}.$$

Então, a medida precisa dessas frequências permite a medida de $(|g| - 2)$. É o que foi feito por Dehmelt e, mais recentemente, outros que aumentaram ainda mais a precisão. A referência [31], por exemplo, refina o valor da constante de estrutura, α , pela medida experimental de g comparada ao valor calculado pela QED.

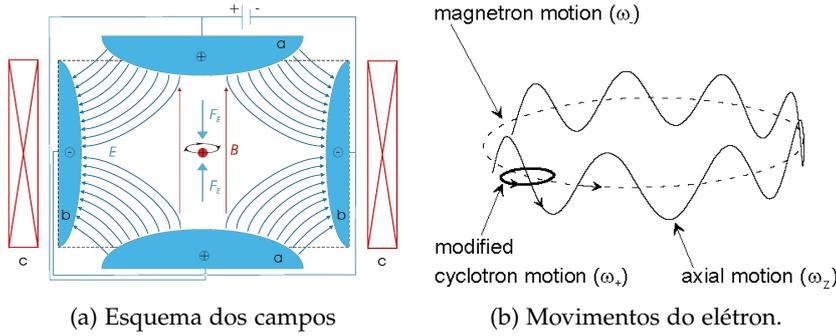


Figura 5: Experimento de Penning Trap

Vale aqui uma outra observação. A equação relativística clássica de precessão do vetor polarização de spin, por Bargmann-Michel-Telegdi [32], em um campo eletromagnético homogêneo é dada por

$$\frac{dS^\mu}{d\tau} = \frac{e}{2m} g F^{\mu\nu} S_\nu + \frac{e}{2m} (g - 2) u^\mu S_\nu F^{\nu\lambda} u_\lambda, \quad (2.26)$$

onde a velocidade própria é $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ e $\frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{e}{m} F^{\mu\nu} u_\nu$.

Essa equação simplifica exatamente para $g = 2$. Sendo assim, favorecendo a visão de que o valor $g = 2$ seja natural para partícula de qualquer spin. Na verdade, há um resultado geral cuja afirmação estabelece o valor $g = 2$ para todas as partículas elementares eletricamente carregadas. Na seção (5.4), retomaremos essa ideia com outros argumentos.

2.3.1 Momento Magnético Anômalo

A equação de Dirac parecia ser uma descrição precisa de um elétron com $(g = 2)$. Pauli acreditava que o próton fosse uma partícula de Dirac ¹⁰ até que, em 1933 [33], Stern mostrou que para o próton vale $g \sim 5.5$; valor bem diferente. Em 1940 [34], foi descoberto, por Alvarez e Bloch, que o valor para o nêutron também era bem distinto.

It gave just the properties that one needed for an electron. That was really an unexpected bonus for me, completely unexpected - Dirac, on the Dirac equation.

¹⁰ Uma partícula com o valor natural $g = 2$. A equação de Dirac também fornece $(g_1 = 1)$ associado ao momento orbital.

Atualmente, mesmo conhecendo os quarks e glúons, o valor do momento magnético de bárions é controverso [35] [36]; a chamada “spin crisis” é listada como um dos problemas em aberto na Física.

Devido a esse desvio do fator giromagnético, é comum o momento magnético ser escrito como

$$\mu = \frac{q\hbar}{2m}(1 + a); \quad a = \frac{g-2}{2}, \quad (2.27)$$

onde “a” é chamada anomalia.

Em 1947, foram observadas anomalias na estrutura hiperfina do estado fundamental do hidrogênio e deutério [37]. Breit [38] sugeriu que o desvio poderia ser explicado caso o fator de Landé “ g_e ” fosse um pouco diferente do valor dois. No mesmo ano [39], Schwinger propõe a correção radiativa para o momento magnético do elétron. No mesmo ano, com a contribuição de 1-loop tanto para o elétron quanto para o tau e múon é independente da massa e dada por

$$a_e = \frac{\alpha}{2\pi} \approx 0.00116... \quad (2.28)$$

No mesmo ano, Kusch e Foley [40] mediram a anomalia para o elétron, a_e , e obtiveram valor em bom acordo com o trabalho de Schwinger. Isso representou uma grande comprovação em favor da QED. Trata-se do resultado experimental mais preciso da Física. A comparação do valor teórico com o experimental é limitada também pela incerteza do valor da constante de estrutura fina.

Partícula	Valor Experimental	Precisão Relativa	Valor Teórico
elétron	2.0023193043738(82)	10^{-12}	2.00231930492(29)
Múon	2.0023318406(16)	10^{-10}	2.0023318338(14)
Tau	2.008(71)	10^{-2}	2.0023546(6)
Próton	5.585694674(58)	10^{-8}	5.58
Neutron	-3.8260854(10)	10^{-7}	-3.72

Tabela 1: Fatores giromagnéticos (g) de algumas partículas. [41] [42] [43] [44] [45]

Embora a precisão da medida de (g-2) do elétron seja maior que a do múon, este possui maior sensibilidade a efeitos de nova física (além do Modelo Padrão) que o elétron, pois as contribuições de nova física à anomalia são esperadas na escala de quadrado da massa. Sendo assim, já que a razão $\left(\frac{m_\mu}{m_e}\right)^2 \approx 43000$, o fator anômalo do múon deve ser mais sensível à descoberta de nova física [46]¹¹.

Como verificação da simetria CPT, a diferença entre os momentos magnéticos do elétron e pósitron, por exemplo, é um bom indicativo;

¹¹ Isso também considerando válida a chamada Universalidade Leptônica.

além de que a violação dessas simetrias remete à procura de física além do Modelo Padrão. O teorema de CPT tem como consequência a igualdade, em módulo, dos momentos magnéticos de partícula e antipartícula correspondente. Experimentos de 1987 [28] com Penning Trap submeteram um elétron individual e um pósitron individual ao teste de precisão e obtiveram valores

$$a_{e^-} = 1159652188.4(43) \times 10^{-12}. \quad (2.29a)$$

$$a_{e^+} = 1159652187.9(43) \times 10^{-12}. \quad (2.29b)$$

Enquanto que para o múon e antipartícula [47]

$$a_{\mu^+} = 11659204(6)(5) \times 10^{-10}. \quad (2.30a)$$

$$a_{\mu^-} = 11659215(8)(3) \times 10^{-10}. \quad (2.30b)$$

Para o elétron, o valor experimental de 2008 [42] atualizou para

$$a_e^{\text{exp}} = \frac{g_e - 2}{2} = 0.0015965218073(28). \quad (2.31)$$

Teoricamente [48], com correção de 4-loops, mais estimativa de 5-loops da QED mais as contribuições eletrofraca e hadrônica, o fator anômalo é dado por

$$a_e^{\text{SM}} = \frac{\alpha}{2\pi} - 0.328478444003 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + 1.1812340168 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 - 1.9144(35) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4 + 0.0(4.6) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^5 + 1.71 \times 10^{-12}. \quad (2.32)$$

A correção de (1.71×10^{-12}) é devido aos loops hadrônicos (1.68×10^{-12}) e efeitos eletrofracos (0.03×10^{-12}) .

Para o múon [49], o valor da QED em até 5 loops é dado teoricamente por

$$a_{\mu}^{\text{QED}} = \frac{\alpha}{2\pi} + 0.765857425(17) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + 24.05050996(32) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 + 130.8796(63) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4 + 753.3(1.0) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^5 + \dots \quad (2.33)$$

Em geral, a contribuição total do Modelo Padrão à anomalia do múon é dada por

$$a_{\mu}^{\text{SM}} = a_{\mu}^{\text{QED}} + a_{\mu}^{\text{EW}} + a_{\mu}^{\text{Had}}, \quad (2.34)$$

onde a contribuição de QED inclui loops fotônicos e leptônicos. A contribuição (EW) eletrofraca inclui loops de bósons W^{\pm}, Z e Higgs, e a contribuição (Had) hadrônica de quarks e glúons.

Considerando válida a QED, o fator anômalo a_e^{SM} é a melhor fonte de precisão para o valor da constante de estrutura fina

$$\alpha^{-1}(a_e) = 137.035999084(51).$$

Na física atômica ou de matéria condensada, um cálculo¹² baseado na constante de Rydberg fornece valor [50] próximo, porém com um maior erro, vinte vezes, do fator anômalo α_e (Rydberg) em relação ao experimental α_e^{exp} .

Espera-se que contribuição de nova física seja da ordem

$$|\alpha_e(\text{Nova Física})| = |\alpha_e^{\text{exp}} - \alpha_e^{\text{SM}}| < 10^{-11}. \quad (2.35)$$

Com um valor mais refinado e obtido por método independente da QED, é possível melhorar esse valor limite acessível para nova física [51]. Já para o múon, a contribuição é esperada em

$$|\alpha_\mu(\text{Nova Física})| = |\alpha_\mu^{\text{exp}} - \alpha_\mu^{\text{SM}}| < 440 \times 10^{-11}, \quad (2.36)$$

que é até maior que a contribuição eletrofraca [52] dada, em até 2-loops, por $\alpha_\mu^{\text{EW}} \approx 154 \times 10^{-11}$.

Como dito anteriormente, a contribuição de nova física para o fator anômalo α_e é esperada como quadrática na massa. Momento magnético anômalo, assim como termo de massa, muda quiralidade, então a contribuição $\left(\alpha_e \frac{e}{2m_e}\right)$ de nova física ao momento magnético anômalo deve ser zero no limite quiral em que $m_e \rightarrow 0$. Então, espera-se ao menos uma dependência quadrática

$$\alpha_e(\text{Nova Física}) \simeq C \left(\frac{m_e}{\Lambda}\right)^2,$$

onde Λ é a escala de massa de nova física e C é uma constante dependente do modelo. Assim, embora α_e seja um bom parâmetro de teste para a QED, não o é para uma escala muito massiva de nova física. Um refinamento da constante de estrutura fina é necessário para a sensibilidade de prova do fator anômalo.

2.4 MOMENTO DE DIPOLO ELÉTRICO DO ELÉTRON

Quanto ao momento de dipolo elétrico do elétron, ele gera, necessariamente, uma violação das simetrias temporal (T), $t \rightarrow -t$, e de paridade (P), $x \rightarrow -x$, [53] [54]. Isso pode ser visto, por exemplo, no hamiltoniano não relativístico de interação do campo eletromagnético com o spin 1/2 dado por

$$H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} - \vec{d} \cdot \vec{E}. \quad (2.37)$$

A transformação pelas simetrias CPT (carga | paridade | tempo) é dada por Portanto, o termo de momento magnético, $\vec{\mu} \cdot \vec{B}$, não viola nenhuma das simetrias, mas o termo de dipolo elétrico, $\vec{d} \cdot \vec{E}$ viola P e T. Pelo teorema de CPT, o termo de dipolo elétrico viola também CP.

¹² Independente da QED; deduzido da razão da constante de Plank e a massa do átomo, no caso (Rb).

	\vec{E}	\vec{B}	$\vec{\mu}$ ou \vec{d}
C	-	-	-
P	-	+	+
T	+	-	-

Tabela 2: Transformações sob CPT.

Sendo assim, a busca por dipolo elétrico em partículas elementares ou compostas, como elétron e nêutron, constitui um teste de quebra dessas simetrias.

Na teoria eletrofraca, que é quiral, isto é, não possui simetria quiral, ocorre violação de paridade. No Modelo Padrão, a violação de CP permite a presença de momento de dipolo elétrico. Ocorre violação de CP, por exemplo, em uma fase na matriz de mudança de sabor de quarks, chamada matriz Cabbibo-Kobayashi-Maskawa (CKM), devido a interação fraca. Ocorre também na matriz de Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata matrix (PMNS) devido à oscilação de neutrinos.

Embora previsto pelo Modelo Padrão, o valor do momento de dipolo elétrico é muito pequeno e constitui um limite de $|d_e| \leq 10^{-38} \text{e.cm}$ para o elétron, por exemplo. Os experimentos atuais provam apenas até a ordem de $d_e \sim \mathcal{O}(10^{-28} \text{e.cm})$. Devido à carga total zero, o nêutron [55] é mais sensível ao teste que partículas carregadas. Para o nêutron, o limite é de apenas $|d_n| \approx 10^{-31} \text{e.cm}$.

O momento de dipolo elétrico é uma medida da distribuição de carga positiva e negativa dentro da partícula. Na eletrodinâmica clássica, essa medida é traduzida pelo vetor

$$\mathbf{d} = \int \rho(\vec{x}) \vec{x} d^3x, \quad (2.38)$$

com $\rho(\vec{x})$ a distribuição de carga. Quando o centro de distribuição de carga positiva não coincide com o centro de distribuição de carga negativa para um objeto espacialmente extensivo, $\mathbf{d} \neq 0$. Um sistema tem momento de dipolo elétrico permanente quando $\mathbf{d} \neq 0$ é uma propriedade da densidade de carga do estado fundamental. O dipolo é induzido quando $\mathbf{d} \neq 0$ tem como causa um campo elétrico externo; nos condutores e dielétricos, por exemplo. A escolha de uma origem em (2.38) altera o valor do momento de dipolo elétrico exceto quando a carga total é nula.

Para partículas elementares [56] ou núcleons em estado não degenerado ¹³, a única direção disponível para o vetor de dipolo elétrico

¹³ Para moléculas, pode ocorrer um momento de dipolo elétrico devido a degenerescências, mas não para férmions, que obedecem o Princípio da Exclusão de Pauli.

é o momento angular. Assim, similarmente caso do momento magnético, temos a seguinte relação

$$\vec{d} = \zeta \left(\frac{q}{2mc} \right) \vec{S}, \quad (2.39)$$

com ζ uma constante adimensional análoga ao g do caso magnético.

A violação de CP prevista pelo Modelo Padrão é insuficiente para explicar a predominância de matéria, em oposição à antimatéria, no Universo. Assim, a busca por fontes de violação de CP é motivada nesse contexto [57].

2.5 WIGNER E A CLASSIFICAÇÃO DO SPIN

Eugene Wigner, no famoso trabalho de 1939 [58], deu um grande passo em formalizar o conceito de partículas na descrição matemática. A ideia básica era descrever partículas como representações projetivas (raios) unitárias irredutíveis do grupo inomogêneo de Lorentz, ou grupo de Poincaré. Para isso, é necessário encontrar quantidades invariantes que sirvam para classificar as representações irredutíveis. A teoria de Wigner é famosa pelo sucesso em fazer completa classificação dessas representações irredutíveis do grupo de Poincaré, porém não fechou a discussão do que é realmente uma partícula elementar e que tipo de localização ela obedece. No caso de uma teoria com interação, não mais se aplica a classificação de Wigner, e o conceito de partícula está comprometido ao limites temporais assintóticos $t \rightarrow 0$.

Há um teorema de Wigner que aproxima a mecânica quântica da relatividade especial: Uma transformação de simetria T sobre um sistema quântico pode ser representada no espaço de Hilbert associado \mathcal{H} , a menos de fases, por um operador linear unitário ou antiunitário $U(T)$. A transformação atua levando um raio em outro raio por $T : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$ e preservando a probabilidade de transição entre pares de estados, $P(\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_n) = P(\mathcal{R}' \rightarrow \mathcal{R}'_n)$ com O e O' distintos sistemas de referência. O operador do espaço de Hilbert $U(T)$ é definido de maneira que, dado um estado Ψ no raio \mathcal{R} , $U(T)\Psi$ esteja no raio \mathcal{R}' .

Theorem 1 *Qualquer representação projetiva de um grupo de simetria de Lie G em um espaço de Hilbert separável¹⁴ é equivalente a uma representação que é linear e unitária ou antilinear e antiunitária. Caso G seja conexo, as representações projetivas são equivalentes a uma representação unitária e linear.*

Estados físicos são raios no espaço de Hilbert, ou seja, um conjunto de vetores normalizados, $(\Psi, \Psi) = 1$, em que dois estados Ψ e Ψ' pertençam ao mesmo raio desde que valha a relação $\Psi' = \xi\Psi$ com ξ um número complexo qualquer de módulo $|\xi| = 1$. Para representarmos

¹⁴ Está relacionado a possuir um subconjunto denso enumerável em G . O espaço de Hilbert é separável apenas se possui uma base enumerável, $|\phi_n\rangle$ com $(n = 1, 2, 3, \dots \infty)$.

um grupo de Lie G de simetrias do sistema físico através das transformações T no espaço de Hilbert \mathcal{H} , precisamos fazê-lo com uma representação projetiva unitária do grupo G . O motivo de ser projetiva é que, devido ao teorema de Wigner, os operadores $U(T)$ são unitários ou antiunitários. Uma representação é um homomorfismo que leva um grupo G sob um espaço vetorial \mathcal{H} em um grupo linear geral em \mathcal{H} , $G \rightarrow GL(\mathcal{H})$. No caso em questão: $U : G \rightarrow U(\mathcal{H})$ tal que, para $T_1, T_2 \in G$, existe uma fase independente de n obedecendo

$$U(T_2)U(T_1)\Psi_n = e^{i\phi(T_2, T_1)}U(T_2T_1)\Psi_n. \quad (2.40)$$

Particularmente quando $\phi = 0$, é direto ver que $U(T)$ é uma representação do grupo de simetria das transformações T . Para uma fase geral, chamamos uma representação projetiva ou representação a menos de uma fase. Essa fase presente em representações ordinárias do grupo de simetria G pode ser evitada se buscarmos as representações do grupo universal de recobrimento G' . O ponto é que as representações de G e G' podem estar relacionadas por uma transformação de similaridade, portanto serem equivalentes.

A ideia de analisar o grupo de recobrimento é extremamente útil, pois ignora as complicações globais da topologia do grupo e foca na parte simplesmente conexa associada. Em especial, todo grupo de Lie conexo tem um grupo universal de recobrimento que é simplesmente conexo. Surge também a necessidade do conceito de grupo fundamental $\Pi_1(V)$ de um espaço V , ou primeiro grupo de homotopia, que dá uma noção de quanto um espaço é simplesmente conexo. Um espaço¹⁵ simplesmente conexo possui um único elemento, trivial, no seu grupo fundamental. Como exemplo: $\Pi_1(SU(2)) = 0$. Sendo assim, $SU(2)$ é simplesmente conexo. Isso tudo é importante para a compreensão de como o grupo $SO(3)$ está relacionado ao $SU(2)$, que surge na mecânica quântica não relativística devido ao spin. A relação matemática é expressa pelo seguinte

$$SO(3) \simeq SU(2)/\mathbb{Z}_2 \quad (2.41)$$

$$\Pi_1(SO(3)) = \Pi_1(SU(2)/\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2, \quad (2.42)$$

em que \mathbb{Z}_2 é o grupo cíclico de segunda ordem. O recobrimento universal de $SO(3)$ é $SU(2)$. Enquanto $SU(2)$ é simplesmente conexo, o $SO(3)$ é duplamente conexo. As representações projetivas de $SO(3)$ são dadas simplesmente pelas representações de $SU(2)$. As representações fermiônicas são descobertas pelo fato de analisarmos as representações projetivas de $SO(3)$, isto é, consideramos o grupo de recobrimento universal. Esse é o conteúdo principal das expressões acima.

¹⁵ Os elementos de um grupo de Lie formam um espaço topológico. Estamos aqui misturando os termos “grupo” e “espaço”, mas lembrando da relação que existe entre eles.

Estudando as representações de um grupo universal de recobrimento, é possível encontrar as representações projetivas de grupos de Lie associados. Qualquer álgebra de Lie \mathfrak{g} está associada a um único grupo simplesmente conexo \mathfrak{G} que possui, como álgebra de Lie correspondente, álgebra \mathfrak{g} . Portanto, o grupo de recobrimento universal de um grupo de Lie \mathfrak{h} conexo é o único grupo de Lie conexo¹⁶ \mathfrak{G} que possui a mesma álgebra de Lie do \mathfrak{h} .

A fim de expressar a relação formal entre o grupo de Lorentz restrito (ou próprio ortócrono)¹⁷ $SO(1,3)$ e o grupo $SO(3)$, responsável pela invariância rotacional no espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 em três dimensões espaciais, utilizamos o grupo $SU(2)$, que aparece naturalmente devido ao conceito de representações projetivas. No âmbito de esclarecermos as relações matemáticas aqui relevantes, que são, frequentemente, mal expressas na literatura, partindo do conhecimento de

$$\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) = \mathfrak{so}(4) \quad (2.43a)$$

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \mathfrak{su}(2) \oplus i \mathfrak{su}(2) \quad (2.43b)$$

$$\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{su}(2) \otimes \mathbb{C} \rightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \quad (2.43c)$$

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \quad (2.43d)$$

destacamos as expressões a seguir:

$$\mathfrak{so}(1,3) \simeq \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \quad (2.44a)$$

$$\mathfrak{so}(1,3)_{\mathbb{C}} \simeq (\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}})_{\mathbb{C}} \simeq \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} \quad (2.44b)$$

$$\mathfrak{so}(1,3)_{\mathbb{C}} \simeq \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \quad (2.44c)$$

$$SO(4; \mathbb{R}) \simeq [SU(2) \times SU(2)] / \mathbb{Z}_2 \quad (2.44d)$$

$$(SO(1,3))_{\mathbb{C}} \simeq [SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})] / \mathbb{Z}_2. \quad (2.44e)$$

O duplo recobrimento do grupo restrito de Lorentz é $SL(2, \mathbb{C})$. O grupo de Lie $[SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})]$, que é o “double cover” do grupo de Lorentz complexificado $SO(1,3; \mathbb{C})$, possui a seguinte álgebra de Lie escrita como uma soma direta $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Assim, a álgebra $\mathfrak{so}(1,3)$ precisa ser complexificada para o espaço de Minkowski complexificado, que é uma representação $(1/2, 1/2)$ do grupo de Lie $[SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})]$, ser decomposto em subespaços da representação do espino de Weyl, ou seja, em (R): $(0, 1/2)$ e (L): $(1/2, 0)$. Em suma, diferentes grupos de Lie com diferentes álgebras de Lie podem, de fato, possuir álgebras complexificadas isomórficas.

Em geral, um grupo especial ortogonal possui a seguinte relação de isomorfismo com o quociente de um grupo simplesmente conexo

$$SO(n) \simeq Spin(n) / \mathbb{Z}_2, \quad (2.45)$$

¹⁶ Um grupo de Lie é conexo se seu espaço topológico \mathfrak{G} é conexo. O grupo ortogonal $O(3)$, por exemplo, não é conexo, pois é formado por duas partes disjuntas correspondentes a determinantes $+1$ e -1 .

¹⁷ A notação mais clara é a que especifica o fato de os elementos Λ do grupo obedecerem: $\Lambda_{00} \geq 1$ e $\det \Lambda = 1$; com o grupo explicitamente denominado $SO_{\uparrow}^+(1,3)$

em que $\text{Spin}(n)$ é chamado grupo de spin, que é o duplo recobrimento dos grupos $\text{SO}(n)$; assim possuem mesma dimensão, $n \frac{(n-1)}{2}$, e mesma álgebra de Lie. O grupo $\text{spin}(n)$ é simplesmente conexo apenas para $n > 2$. Quando a métrica não é positiva definida, como no caso de Lorentz, a topologia de um grupo¹⁸ $\text{Spin}(p, q)$ pode ser mais complicada, mas, no caso de interesse de Lorentz, $\text{spin}(1, 3)$ é simplesmente conexo. As seguintes coincidências merecem destaque

$$\text{Spin}(2) = \text{U}(1) = \text{SO}(2) \quad (2.46a)$$

$$\text{Spin}(3) = \text{SU}(2) \quad (2.46b)$$

$$\text{Spin}(4) = \text{SU}(2) \times \text{SU}(2) \quad (2.46c)$$

$$\text{Spin}(1, 3) = \text{SL}(2, \mathbb{C}). \quad (2.46d)$$

$$(2.46e)$$

Para um entendimento matemático de como a física de um grupo de simetria requer um estudo de representações, destacamos um importante teorema. O teorema é devido a Bargmann[59] e diz o seguinte:

Theorem 2 *As representações projetivas de um grupo de Lie conexo G são equivalentes a representações comuns¹⁹ unitárias da máxima extensão central²⁰ G' .*

Definição: *Seja G um grupo e A um grupo abeliano. Um grupo G' é chamado extensão central de G pelo grupo A se cumprir*

1. A é (isomórfico a) um subgrupo do centro de G' ,
2. G é isomórfico a G'/A .

O grupo universal G' de recobrimento de um grupo de Lie conexo G é a extensão central topológica. G' é chamado único e máximo, já que o grupo de Lie G é conexo. Uma extensão central máxima é sempre simplesmente conexa. Escreve-se: $G \simeq G'/N$, em que $\pi_1(G) = N$ é um subgrupo normal máximo de G' . G' é a extensão máxima de G pelo grupo N . Quando N é um subgrupo normal não necessariamente máximo, diz-se que H é extensão de G pelo grupo N ; $G = H/N$. Esses fatos serão úteis para discussão da regra de superseleção(5.3) da massa.

Wigner utilizou a ideia de representações induzidas para construção do grupo completo de Poincaré. Em Física, costuma-se chamar pequeno grupo (“little group”) o que é chamado de grupo de isotropia ou estabilizador em Matemática²¹.

¹⁸ Vale que $\text{Spin}(p, q) = \text{Spin}(q, p)$.

¹⁹ Usuais, próprias, ordinárias, verdadeiras.

²⁰ Quando a extensão é central, o subgrupo normal está no centro do grupo e é, portanto, abeliano. A máxima extensão central é chamada de grupo de recobrimento!

²¹ A ideia inicial começou com Frobenius, mas George Mackey é uma das referências que bastante desenvolveu essa área de teoria de representações estreitando a relação entre Física e teoria de grupos.

Dado um $t \in T$, o grupo de isotropia do grupo G (com respeito a t) é formado pelo conjunto de elementos em G que fixam t , isto é,

$$G_t = \{g \in G \mid g \cdot t = t\}. \quad (2.47)$$

O grupo de isotropia considerado por Wigner mantinha fixo um momentum quadridimensional k^μ do sistema por certas transformações do grupo restrito de Lorentz.

Wigner considerou que as partículas são denominados pela massa m e pelo spin s (ou helicidade no caso não massivo) da partícula, enquanto o 4-momentum p e as componentes de spin σ ao longo de uma direção fixa selecionam os estados (de uma partícula) que geram o subespaço irredutível que forma a partícula; $\Psi_{p,\sigma}$. O motivo matemático é devido aos operadores de Casimir. Os operadores de Casimir de uma álgebra são funções dos geradores desta álgebra e comutam com todos geradores da álgebra. Devem-se encontrar os operadores Casimir de um grupo para denominar as representações do grupo em termos dos autovalores desses operadores. No caso de Poincaré, os Casimir são:

$$P^\mu P_\mu = m^2 \quad (2.48a)$$

$$W^\mu W_\mu = -m^2 s(s+1), \quad (2.48b)$$

em que W é chamado operador de Pauli-Lubanski, definido através de $W_\mu = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\alpha} J^{\nu\rho} P^\alpha$; sendo J o momentum angular total e P o momentum linear, ambos geradores do grupo de Poincaré, $W_\mu P^\mu = 0$. Assim, a massa e o spin surgem naturalmente com a invariância de Lorentz do espaço-tempo.

Emquanto o momentum é contínuo, σ assume valores puramente discreto. Em clara diferença entre estados de partículas massivas ou não, demonstra-se que o grupo de isotropia para partículas massivas, do tipo ($p^2 = m^2$), é o grupo compacto de rotações $SO(3)$, enquanto que, para partículas não massivas ($p^2 = 0$), o grupo é não compacto $ISO(2)$ ou $E(2)$, conhecido como grupo euclidiano²². Assim, as três grandes classes de representações são:

- $m \neq 0$,
- $m = 0$ com helicidade finita (únicas representações de dimensão finita do grupo de isotropia do caso não massivo),
- $m = 0$ com helicidade infinita.

A terceira classe é entendida como tendo um Casimir ($W = -\rho^2$), em que ρ é um parâmetro com dimensão de massa, não nulo, pois $m \rightarrow 0$ de forma a manter o produto constante $ms \rightarrow \rho$. Essa diferença é de fundamental importância e possui notórias consequências físicas.

²² Formado por rotações e translações em duas dimensões; grupo de isometria do plano.

Apenas como um exemplo das consequências do trabalho de Wigner, um método de quantização chamado quantização geométrica foi desenvolvido com base nessa conexão entre teoria quântica e teoria de representação de grupos. Esse método se baseia nas chamadas órbitas²³ coadjuntas e as referências são Kirillov, Konstant (Medalha-Wigner deste ano, 2016) e Souriau. A importância do método consiste na estreita relação entre uma teoria clássica partindo de espaço de fase e a teoria quântica associada; a quantização de uma órbita coadjunta leva a representações unitárias do grupo correspondente.

2.6 QUIRALIDADE E HELICIDADE

Relacionado ao spin, existem alguns conceitos que devem ser entendidos com o cuidado de não misturar os significados, pois a literatura carece de uma explícita e precisa distinção entre eles.

Os estados de uma partícula de massa m e spin s são completamente descritos pelo momentum p e pela componente de spin σ ao longo de uma direção fixa arbitrária ou, no caso de massa nula, pela helicidade h .

- O spin é determinado pela representação do grupo de Lorentz em que um campo se transforma. As representações projetivas de dimensão finita do grupo de Lorentz são especificadas por um par de números (j, k) que pode ser decomposto em termos de representações irredutíveis de $SO(3)$.

$$(j, k) = \bigoplus_{s=|j-k|}^{(j+k)} s, \quad (2.49)$$

em que $j, k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ marcam um par de álgebras $\mathfrak{su}(2)$ e s são os valores correspondentes de possíveis spins sob o ponto de vista de $SO(3)$. Cada valor possível ocorre exatamente uma vez, isto é, a representação (j, k) pode ser decomposta em

$$s = |j - k|, \dots, j + k - 1, j + k. \quad (2.50)$$

A dimensão complexa de (j, k) , ou número de graus de liberdade físicos associados, é dada por

$$\dim(j, k) = (2j + 1)(2k + 1). \quad (2.51)$$

O número de spin de um campo, que se transforma na representação irredutível (j, k) , é $(j + k)$. Um campo escalar é representado por $(0, 0)$ e possui spin 0. Um campo vetorial (4-vector) é

²³ Uma órbita de um grupo é um conjunto de pontos que podem ser obtidos com uma ação de grupo a partir de um ponto inicial. Uma ação que atua transitivamente implica em uma única órbita. Exemplo: o grupo de rotações em relação a um ponto fixo atuando no espaço euclidiano possui esferas de raio constante, em relação ao ponto fixo, como órbitas.

a representação $(1/2, 1/2)$ e possui spin 1. Um espinor de Dirac $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ possui spin $1/2$.

Isso ocorre, pelo que vimos na seção anterior, devido à decomposição da álgebra do grupo de Lorentz como soma de duas cópias complexificadas de $su(2)$, mas $su(2)$ é isomórfica à $so(3)$, já que os grupos correspondentes são relacionados por um homomorfismo sobrejetivo com núcleo discreto.

É preciso ter cuidado em distinguir o spin do campo e o spin das partículas que estão incorporadas nos campos. Por exemplo, o campo vetorial A^μ (spin 1 de Lorentz), que é caracterizado pela representação $(1/2, 1/2)$ do grupo de Lorentz, possui um conteúdo de spin, em termos de $SO(3)$, dado por $\underline{0} \oplus \underline{1}$, ou seja, contém um spin 0 (escalar) e um spin 1 (vetor) de $SO(3)$. Pode-se escrever também $(4 = 1 \oplus 3)$, dizendo que uma representação 4-dimensional de Lorentz é decomposta na soma direta das representações 1-dimensional (1 grau de liberdade) e 3-dimensional (3 graus de liberdade) do grupo $SO(3)$. Assim, quando alguém diz que um campo vetorial A^μ descreve uma partícula de spin 1, é porque alguma condição retira o grau de liberdade escalar garantindo que a partícula descrita seja apenas a de spin 1. No caso de a condição decorrer da simetria de gauge, dois graus de liberdade são retirados; um do escalar e outro da parte longitudinal²⁴ do spin 1. Porém, para partículas massivas como o bóson W , a parte longitudinal é restaurada depois que ocorre o mecanismo de Higgs, e somente o grau de liberdade do escalar, fisicamente espúrio, é realmente retirado.

Como último exemplo, um campo χ na representação de Weyl $(\frac{1}{2}, 0)$ do grupo de Lorentz possui um conteúdo de spin, em termos de $SO(3)$, com apenas uma opção $s = 1/2$. Nesse caso, a única partícula incorporada no campo é um lépton de quiralidade left(L).

- A polarização σ do spin dá as independentes possibilidades de direções com as quais o spin pode estar alinhado. A helicidade representa o caso específico da direção ao longo do movimento. Um fóton, partícula vetorial sem massa, por exemplo, possui apenas duas polarizações chamadas²⁵ esquerda(L)²⁶ e direita(R), ou ainda (+) e (-). Uma partícula vetorial massiva, diferentemente do fóton, possui os três graus de liberdade referentes a polarizações (+),(-),(L); direita, esquerda e longitudinal. Ver também seção (4.1).

²⁴ Polarização longitudinal será explicada adiante.

²⁵ A notação (R) e (L) também costuma ser utilizada para o conceito de quiralidade, mas se deve ter o cuidado de não confundir.

²⁶ Do inglês, L de Left. Não confundir com L de Longitudinal.

- A helicidade representa a projeção do spin na direção do momentum, então o operador helicidade é definido como

$$h = \frac{\vec{S} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} = \vec{S} \cdot \hat{p}, \quad (2.52)$$

em que \vec{S} é o operador de spin e \vec{p} o momentum da partícula. Ou ainda, pode-se destacar a natureza operatorial por

$$h = \epsilon_{ijk} p^i \Sigma^{jk}, \quad (2.53)$$

em que $\Sigma^{\mu\nu}$ é gerador do grupo de Lorentz em um dada representação.

Um sistema está apenas em um autoestado de spin ao longo de uma certa direção se uma rotação em torno dessa direção não muda o sistema. No caso da helicidade, a direção de interesse é a de movimento, que podemos escolher no eixo z sem perda de generalidade. Se o sistema possui um momentum não nulo, uma rotação geral pode alterar a direção do momentum, portanto alterar o sistema. Existe a possibilidade de o autoestado de S_z cujo autovalor é nulo ser simétrico com respeito a uma rotação em direção ortogonal à direção do movimento desde que seja possível um momento nulo. Assim, quando há a possibilidade de zerar o momentum de uma partícula, há também a do sistema estar em um autoestado com helicidade nula; " $S_z = 0$ ". Partículas de massa nula não possuem referencial de repouso, então não há a possibilidade de apresentar helicidade nula.

A helicidade é um conceito invariante de Lorentz para partículas sem massa, mas para partículas com massa não é invariante, por isso é útil na descrição de partículas cuja massa é nula, ou seja, não possuem um referencial de repouso. Assim, formalmente, fala-se de spin de partícula massiva e helicidade de partícula não massiva.

Partículas com helicidade $h = \pm 1$ são ditas transversalmente polarizadas e com helicidade nula $h = 0$ são longitudinalmente polarizadas. Na seção (4.1), isso é explicado através do conceito de vetores de polarização.

- A quiralidade está relacionada aos férmions. Refere-se a representações irredutíveis do grupo de Lorentz nas quais os campos espinoriais se transformam. São duas as possibilidades, left(L) (ψ_L) e right(R) (ψ_R). Fisicamente, a quiralidade tem uma relação com a matriz γ_5 no espaço dos espinores de Dirac, portanto relação também com interação fraca, que faz distinção entre uma partícula (R) e (L). ψ_L e ψ_R são autoestados da matriz γ_5 , isto é, $\gamma_5 \psi_R = \psi_R$ e $\gamma_5 \psi_L = -\psi_L$. Além disso, define-se operadores de

projeção nos subespaços quirais, (R) e (L), do espinor de Dirac por

$$P_{\pm} = \frac{1}{2} (1 \pm \gamma_5). \quad (2.54)$$

Portanto, a atuação desses projetores em um espinor geral de Dirac, que não possui chiralidade definida é dada por

$$\frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \psi(p) = \psi_R(p) = \begin{pmatrix} \phi(p) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.55)$$

para o setor (R) e

$$\frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \psi(p) = \psi_L(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi(p) \end{pmatrix}, \quad (2.56)$$

para o setor (L). chamados espinores quirais (ou de Weyl), que são representações irredutíveis do grupo de Lorentz; o setor (L) é indicado por $(1/2, 0)$ e o setor (R) por $(0, 1/2)$.

Quando a partícula livre fermiônica não é massiva, ou no limite $v \rightarrow c$, helicidade e quiralidade se confundem²⁷, subespaços quirais são os subespaços de helicidade, e são, portanto, ambas invariantes de Lorentz.

Uma teoria que não é simétrica em relação a quiralidades é chamada teoria quiral. A teoria de gauge da interação fraca é quiral já que não respeita a simetria de paridade.

²⁷ Ou melhor, helicidade se torna quiralidade, pois quiralidade é um conceito invariante de Lorentz relacionado a representações de um grupo, portanto, não muda.

Logo após a formulação da mecânica quântica de partículas, percebeu-se que a teoria quântica era inadequada como uma teoria fundamental, pois sofria de sérios problemas ao ser utilizada para descrever sistemas microscópicos a altas energias, onde a relatividade é necessária. Os problemas imediatos são

- *Não é relativística.* E não pode incorporar a relatividade de forma simples através de uma mecânica relativística. Tentativas assim foram, por exemplo, as equações de Klein Gordon (KG) e Dirac, que geram problemas desde o aparecimento de probabilidades negativas ou energias negativas. No caso da teoria interagente, as inconsistências são ainda piores.
- *Estados com número fixo de partículas.* Na mecânica quântica, o número de partículas descrito por uma função de onda é fixo. A produção ou aniquilação de partículas não é natural na formulação fora do espaço de Fock.
- *O conceito de partícula.* Já com os campos clássicos, o conceito de partícula pode parecer secundário. A quantização é tida como fundamental a nível de campos, não partículas. Há quem sugira total fundamentalidade aos campos em detrimento de partículas [60].

De forma simplificada, os seguintes requerimentos são desejados para uma teoria de descrição quântica e caráter relativístico.

(Mecânica Quântica) - Descrição dos estados físicos em termos de espaço de Hilbert, dinâmica unitária e condição de estabilidade (Hamiltoniana limitada inferiormente).

(Relatividade) - Covariância de Lorentz, condição espectral relativística $P^2 \geq 0$, $P_0 \geq 0$ e localidade (dinâmica hiperbólica).

Partindo da expressão de dispersão clássica entre energia e momento, $E = \vec{p}^2 / 2m$, pode-se utilizar a expressão relativística¹ correspondente $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ para obter o que seria a equação de Schrödinger relativística pelo princípio da correspondência.

$$i\partial_t\psi = \sqrt{-\nabla^2 + m^2}\psi, \quad (3.1)$$

onde o lado direito possui um pseudo-operador diferencial que é um operador multiplicativo depois de uma transformada de Fourier. Porém, trata-se de um operador não local, com expansão infinita, que

¹ Em unidades naturais $c = \hbar = 1$.

*You know, it would
be sufficient to really
understand the
electron - Albert
Einstein*

sofre em não possuir soluções de suporte compacto, pois a transformada de Fourier, $\tilde{\psi}(\vec{p}, t)$, não é uma função analítica. Isso implica em uma não localização, por exemplo, da densidade $\psi^*(x)\psi(x)$. O mesmo ocorre também para a corrente. A localização está relacionada com a implementação de causalidade. Mais adiante, o conceito de localização será melhor definido.

Sendo assim, vemos que não é sempre que uma relação de dispersão interpretada pelo princípio da correspondência vai fornecer uma equação válida. A mesma relação entre energia e momentum, sem retirar as energias negativas, $E^2 = p^2 + m^2$, dá a equação de Klein Gordon

$$(\square + m^2)\phi(x) = 0, \quad (3.2)$$

em que há uma evolução temporal local, onde há causalidade. Entretanto, essa equação possui soluções que a transformada de Fourier em relação ao tempo tem suporte inferior ilimitado, isto é, a frequência ω pode assumir valores arbitrariamente negativos; dados por $\omega = \pm\sqrt{k^2 + m^2}$. Esses valores negativos violam a condição espectral de energia positiva. Problema de interpretação para energia negativa.

A densidade e a corrente podem ser retiradas facilmente através de (3.2) e a equação conjugada ². Assim, temos

$$\rho \equiv \frac{1}{c}J_0 = i(\phi^*\partial_t\phi - \phi\partial_t\phi^*) \quad \vec{J} = -ic^2(\phi^*\partial_i\phi - \phi\partial_i\phi^*). \quad (3.3a)$$

Porém, o que seria a densidade de probabilidade ρ não é definida positiva, portanto tem problemas em ser interpretada como uma densidade de probabilidade. O que compromete a interpretação de (3.2) como uma equação de uma função de onda ou uma quantização da função de onda ³. Para adicionar interação eletromagnética, pode-se fazer o acoplamento mínimo através da derivada covariante; $D_\mu = \partial_\mu + \frac{ieq}{c\hbar}A_\mu(x)$. Descrita por termos locais. Assim, a equação de KG se torna

$$(D_\mu D^\mu + m^2)\phi(x) = 0. \quad (3.4)$$

Agora essa equação contém termos de derivadas segunda e primeira no tempo. Novamente, a densidade J_0 não é definida positiva já que é da forma

$$J^\mu = cte[\phi^*D^\mu\phi - (D^\mu\phi^*)\phi]. \quad (3.5)$$

O que daria uma densidade de probabilidade negativa no caso da interpretação probabilística. J_μ não é vista, então, como a corrente de partícula. Em 1934, Pauli e Weisskopf interpretaram a equação de KG como uma equação de movimento de um campo com dois graus de liberdade correspondentes a estados com carga positiva ou negativa e energia sempre positiva. Assim, a densidade de corrente

² o fator complexo "i" apenas para tornar uma quantia real.

³ O que levou o nome, inapropriadamente, de segunda quantização.

J_0 é a densidade de carga, que contabiliza a diferença entre cargas positivas e negativas ⁴, e a corrente vetorial \vec{J} é a corrente de cargas.

Uma solução geral para (3.2) é dada pela decomposição em frequências

$$\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x) \quad (3.6)$$

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2p^0}} \left(b(\vec{p}) \exp(-ikx) + c^\dagger(\vec{p}) \exp(+ikx) \right), \quad (3.7)$$

em que $kx = k^\mu x_\mu$. $\phi^+(x)$ é a solução de frequências positiva e $\phi^-(x)$ é a de frequências negativa. As frequências possíveis satisfazem $|ck^0| = |w| \geq mc^2/\hbar$, isto é, pertencem a duas regiões separadas de $2mc^2/\hbar$, chamada frequência de Zitterbewegung. Frequências em que $|w| < mc^2/\hbar$ correspondem a soluções evanescentes no espaço.

Para o caso de apenas uma partícula, a densidade J^0 ⁵ pode ser bem definida como positiva ou negativa e permitir a interpretação da equação de KG como equação para uma partícula única; desde que selecionemos apenas uma única frequência positiva. Isso é o que ocorre no caso não relativístico, em que a carga tem um sinal único e há apenas uma frequência. O caso relativístico mistura positivo com negativo. A interpretação de partícula requer uma separação explícita dos dois graus de liberdade de KG. Uma descrição relativística, que requer a condição espectral, para uma dada partícula com interação de um campo externo, por exemplo a interação eletromagnética de acoplamento mínimo, é problemática pois a condição de energia positiva não é assegurada para a interação em geral.

Uma interação com campo externo de suporte compacto pode incorrer naturalmente em transições para soluções de energia negativa mesmo partindo de soluções iniciais de energia positiva [61]. Por exemplo, um acoplamento mínimo de um potencial eletromagnético de suporte compacto no espaço e tempo com a equação de KG, através da derivada covariante ($D_\mu = \partial_\mu + ieqA_\mu$), gera um termo do tipo ($A_\mu^2 \phi(x)$), já que A_μ^2 tem espectro de frequência não limitado inferiormente.

Na formulação matemática da mecânica quântica, vemos que alguns operadores considerados observáveis físicos sofrem de complicações como a de não serem definidos em todo o espaço de Hilbert. O teorema de Hellinger–Toeplitz diz que um operador simétrico⁶ definido em todo o espaço de Hilbert com um produto interno é um operador limitado (“bounded”). Então, um operador simétrico não limitado não pode ser definido em todo o espaço de Hilbert.

4 O que justifica poder ser uma quantidade negativa.

5 É possível ter $\int J^0 d^3x$ positiva e, ainda assim, regiões em que J^0 é negativa quando há mais de uma frequência na expansão de $\phi^+(x)$. Assim, até mesmo com frequências positivas, a interpretação de J^0 como densidade de probabilidade é problemática.

6 Definição matemática que se confunde com operador hermitiano na Física.

A energia, por exemplo, embora esteja associada a um operador autoadjunto⁷, em geral, não é limitada, então não pode ser definida em todo espaço de Hilbert, mas em um subconjunto denso.

Toda essa discussão problematiza a interpretação de $\phi(x)$ como função de onda de uma partícula. Sendo assim, esse é um motivo histórico que fortalece a necessidade da utilização de campos para descrever uma partícula relativística. O trabalho [62] de Dirac, 1932, mostra essa tentativa de estabelecer uma mecânica quântica relativística. Já o trabalho [63], de 1958, traz uma boa discussão sobre a descrição de partículas de spin 0 e spin 1/2 no contexto de mecânica quântica relativística e a conexão com a teoria de campos.

3.1 KLEIN-GORDON E SCHRÖDINGER

Diferentemente da equação de KG, a equação de Schrödinger é linear no tempo e possui um único sinal de frequência como parte da solução.

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = \hat{H}|\psi\rangle \quad (3.8)$$

A interpretação de Feynman para a equação (3.2) foi a de antipartículas corresponderem a partículas de energia negativa com uma reversão na direção do 4-momentum. Porém, essa solução está no âmbito da evolução temporal para um campo quântico e não para uma função de onda. Isso requer abandonar a mecânica quântica de Schrödinger com estado de uma partícula. O interessante é que se consideramos a mesma equação de Schrödinger para estado de uma partícula como uma equação para um campo quântico, obtém-se a generalização para estados de muitas partículas. A diferença está na substituição da função de onda complexa por um operador valorado em uma distribuição.

A equação de Schrödinger pode ser considerada para um campo clássico de matéria. A quantização desse campo clássico é dada pela função de onda operatorialmente valorada; um operador. Assim, um campo quântico que satisfaz a equação de Schrödinger fornece, no limite clássico⁸, o campo clássico de Schrödinger. O fato de a equação para o campo clássico ser idêntica à equação para a função de onda de uma partícula gera confusão. Particularmente, Schrödinger interpretou a função de onda $\psi(x)$ de sua equação não apenas como uma representação do estado de informação, mas como algo fisicamente real. A consideração da realidade de $\psi(x)$ foi questionada pelo

⁷ Em um espaço de Hilbert de dimensão finita, os operadores são limitados. Para operadores limitados, os conceitos (simétrico, hermitiano, autoadjunto) são idênticos, pois pode-se fazer uma extensão para o espaço de Hilbert completo, e qualquer operador simétrico definido em todo espaço é autoadjunto. Em um espaço de Hilbert de dimensão infinita, os observáveis físicos não são garantidos como definidos em todo o espaço, mas são autoadjuntos.

⁸ Quando o número de quanta é muito grande.

fato de haver um crescimento no número das possíveis variáveis físicas. Por exemplo, a função de onda, na base de posição, para uma partícula em três dimensões espaciais possui três variáveis; para duas partículas, já seriam seis variáveis, e assim sucesivamente. Já para a densidade de carga, as variáveis são fixas, três, no espaço tridimensional. A interpretação probabilística para a equação de Schrödinger é devido a Max Born e foi a mais aceita na visão ortodoxa.

É importante lembrar que diferentes interpretações da mecânica quântica ainda consideram a função de onda com um caráter realístico, ôntico, e possuem seus próprios problemas e soluções. Particularmente, alguns exemplos são: a teoria de David Bohm-Broglie, Many-Worlds, Colapso Dinâmico, Interpretação de Penrose, etc. Uma referência atual sobre o estado dessa questão é, por exemplo, [64].

Partindo da equação de KG, é possível obter um limite não relativístico ⁹ que é idêntico à equação de Schrödinger. Para isso, basta tomar a seguinte solução não relativística

$$\phi(\vec{x}, t) = \varphi \exp\left(-\frac{i}{\hbar} mc^2 t\right), \quad (3.9)$$

em que φ oscila no tempo muito lentamente comparada a $\exp\left(-\frac{i}{\hbar} mc^2 t\right)$. O limite não relativístico, a energia total é da ordem de mc^2 , tal que $E' = E - mc^2$ com $E' \ll mc^2$. Então,

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} \approx E' \varphi \ll mc^2 \varphi.$$

Assim, obtém-se, substituindo (3.9) em (3.2), a equação

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \varphi, \quad (3.10)$$

que é idêntica à de Schrödinger, mas não atribuída interpretação probabilística. Trata-se da evolução de um campo clássico em derivada de primeira ordem no tempo.

Ao fazermos o limite não relativístico, selecionamos uma solução de uma frequência de apenas um sinal, excluindo outras soluções que envolvem combinação de frequências de diferentes sinais. Essa solução particular não apresenta o efeito Zitterbewegung (ZBW), que é devido à interferência entre soluções com frequência positiva e frequência negativa.

Se considerarmos a equação de Schrödinger como uma equação de difusão, obtemos que $(\psi^* \psi)$ sofre espalhamento (“spreading”). Uma densidade difusa tem problemas para ser interpretada como uma densidade de carga. A equação de difusão nos dá uma descrição macroscópica de um fenômeno irreversível; a irreversibilidade está na segunda Lei de Fick.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \nabla^2 \rho, \quad (3.11)$$

⁹ No sentido de relatividade especial, porém existe também a chamada relatividade de Galileu.

com D sendo a constante de difusão e ρ uma concentração que se difunde.

Já a equação de Schrödinger é reversível¹⁰ sob atuação do operador reversão temporal¹¹, T , que é antilinear e antiunitário, pelo Teorema de Wigner das transformações de simetria representadas em um espaço de Hilbert. Particularmente, a constante de difusão análoga para a equação de Schrödinger de partícula livre seria complexa e igual

$$D = \frac{i\hbar}{2m}.$$

A solução para a equação de difusão para d -dimensões espaciais é dada por

$$\rho(\vec{r}, t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{d/2}} \int d^d r' \exp\left(-\frac{(\vec{r} - \vec{r}')^2}{4Dt}\right) \rho_{\text{init}}(\vec{r}', 0). \quad (3.12)$$

Aplicando o mesmo procedimento para o caso de Schrödinger,

$$\psi_0(x, t) = \int G(x - x') \psi_0(x', 0) d^3 x' \quad (3.13)$$

com a função de Green

$$G(x - x', t) = \left(\frac{m}{2\pi i\hbar t}\right)^{3/2} \exp\left(\frac{imr^2}{2\hbar t}\right). \quad (3.14)$$

Se tomarmos uma solução inicial do tipo gaussiana de raio “ a ”,

$$\psi_0(x, t) = \left(\frac{1}{2\pi a^2}\right)^{3/4} \exp\left(-\frac{r^2}{4a^2}\right), \quad (3.15)$$

teremos uma densidade que sofre o “spreading” dada por

$$|\psi_0(x, t)|^2 = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right), \quad (3.16)$$

em que a variância é definida

$$\sigma^2(t) \equiv a^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2 a^2}$$

com uma velocidade associada

$$\frac{v}{c} = \frac{\hbar/mc}{2a}.$$

Assim, enquanto a equação (3.2) não possui densidade positiva, a equação (3.8) possui densidade difusa. Diz-se que, em mecânica quântica não relativística, as funções de onda, inicialmente localizadas em

¹⁰ $\psi^*(x, -t)$ é solução da equação conjugada. Particularmente, é fácil ver no caso de soluções estacionárias $\psi(x, t) = \psi_0(x) \exp(-iEt/\hbar)$.

¹¹ A hamiltoniana deve comutar com T , $[H, T]$. Um campo magnético macroscópico externo, por exemplo, viola essa condição.

uma região finita, desenvolve uma cauda infinita (“infinite tail”). Isso não é problema no caso não relativístico e é comum no estudo de difusão de partículas, em que, formalmente, a velocidade de difusão das partículas é infinita. A equação de difusão descreve um movimento Browniano de uma partícula com velocidade infinita. No caso relativístico, há a complicação de que a causalidade tem que ser obedecida.

Na equação para o campo clássico, que não é atribuída interpretação probabilística, a densidade $(\psi^*(x)\psi(x))$ é uma densidade de carga¹². Na equação para a função de onda, pode ocorrer a interpretação de densidade de carga também¹³, como desejava Schrödinger, desde que uma grande quantidade de partículas estejam exatamente no mesmo estado ϕ . Nesse caso, $(\psi^*(x)\psi(x))$ pode ser interpretada como densidade de partículas e $(q\psi^*(x)\psi(x))$ a densidade de carga. Sabemos que isso é possível para os bósons, que possuem essa capacidade de condensarem em um mesmo estado. Para os férmions, há algo semelhante que é devido aos pares de Cooper na supercondutividade; pares de elétrons ligados a baixas temperaturas se comportando como bósons compostos.

A chamada equação de London, baseada no comportamento experimental de supercondutores, expressa a corrente proporcional ao vetor potencial, no gauge de Coulomb, da seguinte maneira

$$\vec{j} = -\rho \frac{q}{m} \vec{A}, \quad (3.17)$$

em que ρ é uma densidade de partículas. Uma consequência desta equação é o chamado efeito Meissner, em que um supercondutor expulsa exponencialmente um fluxo de campo magnético aplicado que penetra o material; determinado pelo parâmetro λ_L , largura de penetração de London, que é da ordem típica de dezenas e centenas de nanômetro.

Assim, mesmo na interpretação probabilística da função de onda, temos um efeito físico em escala macroscópica no limite em que a função de onda se comporta como um campo clássico.

3.2 DIRAC E PAULI

A equação de Dirac, 1928, marcou o passo de enfrentamento da dicotomia que a Física vivia, no início da teoria quântica, entre matéria e radiação. Dirac buscou uma descrição para o elétron que reconciliasse a mecânica quântica com a relatividade especial. Uma equação linear no tempo, que não mais trouxesse densidade não definida positiva e nem frequências negativas. O espinor ψ de Dirac, que descreve o spin do elétron, está na representação $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ do grupo restrito de Lorentz, portanto tem dimensão 4, quatro graus de liberdade

A great deal of my work is just playing with equations and seeing what they give - Dirac

¹² Na verdade, a densidade de carga é $q|\psi^2(x)|$.

¹³ Feynman explica isso em suas Lectures on Physics, por exemplo.

físicos. O que Dirac encontrou foi um sistema de equações para quatro componentes relacionadas.

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0, \quad (3.18)$$

com a álgebra de Clifford das matrizes de Dirac

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\mathbb{I}g^{\mu\nu}.$$

A corrente conservada, que satisfaz a equação de continuidade, é dada por

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi = (\psi^\dagger\psi, \psi^\dagger\vec{\alpha}\psi), \quad (3.19)$$

em que $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0$ é o conjugado de Dirac, e

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

com σ_i as matrizes de Pauli. Ou ainda

$$\gamma^0 \equiv \beta, \quad \gamma^i \equiv \beta\alpha_i. \quad (3.21)$$

A densidade é definida positiva, mas as soluções de energia negativa continuam presentes.

A equação de Dirac pode ser colocada exatamente na mesma forma de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \hat{H}\Psi, \quad (3.22)$$

desde que a hamiltoniana seja dada por

$$\hat{H} = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + m\beta.$$

Embora sejam escritas da mesma forma, Ψ de Dirac é diferente do ψ de Schrödinger; esta é uma função de onda, c-number, aquela é um campo de matéria fermiônica (spinor). Particularmente, a forma da equação só é a mesma no caso em que não há interação entre partículas. No caso de interação, a equação de Dirac para perde linearidade em Ψ , enquanto a de Schrödinger para função de onda continua com um princípio de superposição válido.

Em apenas uma dimensão espacial, para um férmion carregado sem massa descrito por uma onda plana que se move para direita, por exemplo, $\psi = \exp(i(kx - wt))$, a equação de Dirac é dada por

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

A equação para o mesmo férmion se movendo para esquerda é

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = +\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Isso destaca que o caso não massivo é desacoplado. Um termo de massa é que mistura as chamadas quiralidades right(R) e left(L), que

são representações irredutíveis do grupo de Lorentz. Em ambos os casos, há soluções com energia positiva e negativa. Dirac propôs a “Hole Theory”, baseando-se no princípio da exclusão de Pauli, com o chamado mar de Dirac, conjunto de estados de elétrons ocupados com energias negativas. Assim, explicava o fato de elétrons de energia positiva não decaírem arbitrariamente; já que a estatística de Fermi-Dirac tem máximo número de ocupação $N = 1$. Entretanto, mesmo argumento não servia aos bósons, que podem se condensar no mesmo estado. O problema só foi melhor explicado no contexto de teoria quântica de campos.

Diferentemente da equação de KG para campo escalar, a de Dirac mistura as componentes de ψ devido às matrizes γ^μ . Porém, a relação entre a equação de KG e a de Dirac é que cada da componente do espinor, ψ , satisfaz a equação de KG¹⁴.

$$(i\gamma^\nu \partial_\nu + m)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = -(\gamma^\nu \gamma^\mu \partial_\nu \partial_\mu + m^2) = 0,$$

que se utiliza a simetrização para obter

$$(\partial_\nu \partial^\nu + m^2)\psi = 0.$$

A equação de Pauli, de 1927, forneceu uma descrição ainda não relativística, mas que, ao contrário da equação de Schrödinger, levava em consideração a interação do spin com o campo eletromagnético externo aplicado sobre um férmion de spin 1/2. Pode ser obtida da equação de Dirac no limite não relativístico. Para isso, partimos de

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -i\vec{\alpha} \cdot \nabla\psi + \beta m\psi = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m)\psi \equiv H\psi,$$

e fazemos o acoplamento eletromagnético $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - e\vec{A}$; $H \rightarrow H - e\Phi$, pois $p^\mu \rightarrow p^\mu - eA^\mu$ em

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[\vec{\alpha} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) + e\Phi + \beta m \right] \psi. \quad (3.23)$$

Agora uma parte da hamiltoniana é interagente

$$H_{\text{int}} = -e\vec{\alpha} \cdot \vec{A} + e\Phi$$

, que ao ser comparada com o análogo clássico $H = -e\vec{v} \cdot \vec{A} + e\Phi$, sugere que $\vec{\alpha}$ seja o operador correspondente à velocidade. Para isso, verifica-se a equação de Heisenberg

$$\dot{\vec{r}} = \left(\frac{1}{i\hbar} \right) [\vec{r}, H] = \vec{\alpha} \quad (3.24)$$

$$\dot{\vec{\pi}} = \left(\frac{1}{i\hbar} \right) [\vec{\pi}, H] = e(\vec{E} + \vec{\alpha} \times \vec{B}), \quad (3.25)$$

¹⁴ Qualquer componente de campo livre satisfaz KG independentemente da representação do spin, pois declara a relação relativística entre momentum e energia

em que $\vec{\pi} \equiv \vec{p} - e\vec{A}$ é chamado momentum cinético associado ao momentum canônico \vec{p} . A interpretação de $\vec{\alpha}$ como operador velocidade implica que esta velocidade tem autovalores $\pm c$, já que $\alpha_i^2 = 1$. O spinor de Dirac pode ser escrito como

$$\psi = \begin{pmatrix} \tilde{\phi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

com ϕ e χ matrizes 2×2 . A aproximação não relativística pode ser colocada na seguinte forma em que a forte variação temporal está na exponencial

$$\begin{pmatrix} \tilde{\phi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} = \exp(-imt) \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

Após simplificações no limite não relativístico, em que $e\Phi \ll mc^2$, tira-se

$$\chi = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}}{2m} \phi. \quad (3.28)$$

A equação de Dirac para a matriz ϕ fica

$$i \frac{\partial \phi}{\partial t} = \left[\frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})}{2m} + e\Phi \right] \phi. \quad (3.29)$$

Utilizando as simplificações das matrizes de Pauli $\vec{\sigma}$, obtem-se a equação de Pauli para ψ , parte do spinor de Dirac que contém apenas duas componentes

$$i \frac{\partial \phi}{\partial t} = \left[\frac{(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})^2}{2m} - \frac{e\hbar}{2mc} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} + e\Phi \right] \phi. \quad (3.30)$$

Para um campo magnético externo uniforme \vec{B} com um gauge escolhido tal que o potencial é invariante rotacional $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}$, por exemplo, temos a expressão final, em ordem linear de B , dada por

$$i \frac{\partial \phi}{\partial t} = \left[\frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{e}{2mc} (\vec{L} + 2\vec{S}) \cdot \vec{B} + e\Phi \right] \phi, \quad (3.31)$$

com momento angular orbital $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ e momento angular spin $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$. Assim, o fator giromagnético devido ao spin é $g = 2$ e o orbital $g = 1$, como já previsto.

De Dirac, obtemos a equação de Pauli como limite não relativístico, que consiste em descartar soluções de energia negativa. A equação de Pauli se reduz à de Schrödinger ¹⁵ quando temos $\vec{A} = 0$ já que não há mais acoplamento com o spin. O caminho inverso, de Schrödinger para Pauli pode ser feito, embora menos natural, através da substituição $\vec{p}^2 \rightarrow (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2$ e do acoplamento mínimo $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - e\vec{A}/c$.

¹⁵ Duas equações desacopladas tipo Schrödinger para as duas componentes do spinor de Pauli.

A equação de Schrödinger muitas vezes é pensada como uma equação que descreve uma partícula sem spin, porém o correto é que o spin apenas não é relevante; a interação eletromagnética do spin não é naturalmente levada em consideração. Assim, um elétron, não relativístico, pode ser descrito por Schrödinger quando seu estado é um autoestado do operador de spin.

Embora a equação de Dirac tenha previsto a existência de antipartícula, pósitron correspondente ao buraco no mar de Dirac, a ocorrência de energias negativas é comum a todas as equações de onda relativísticas. O fato de exigir uma densidade ρ_0 positiva não é muito determinante, pois a interpretação dessa quantia é modificada em QFT. A interpretação inicial de densidade de probabilidade na equação de Dirac fora reinterpretada depois, para um campo, como uma densidade de carga. Dirac conseguiu fornecer uma descrição relativística local para férmions de spin 1/2 em que o spin está presente desde o início, sem precisar ser colocado à mão como teve de fazer Pauli. Um dos sucessos da equação foi a obtenção, na presença de interação eletromagnética, do fator giromagnético do elétron, $g = 2$, e correções de estrutura fina para o espectro do átomo de Hidrogênio previstas pelo termo de Darwin¹⁶.

3.3 ZITTERBEWUNG

Na teoria de Dirac, em uma visão de mecânica quântica, a equação de Heisenberg para a evolução temporal dos operadores observáveis pode ser utilizada para o operador posição, já que a ideia de localização em mecânica quântica está ligada à existência de um operador de posição. A hamiltoniana da equação de Dirac livre, $\hat{H} = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + m\beta$, é então utilizada

$$i \frac{dx}{dt} = [x, \hat{H}] = \vec{\alpha}. \quad (3.32)$$

Isso mostra o fato de o operador velocidade não ser paralelo ao momentum canônico e ser um operador de spin mesmo na equação de Dirac livre. Na teoria quântica de Schrödinger, o operador velocidade é puramente espacial, $\vec{v} = \dot{\vec{x}} = \vec{p}/m$. Mesmo na presença de interação eletromagnética, o operador continua sendo puramente espacial já que $\vec{v} = \vec{\pi}/m = 1/m(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A})$.

Na representação de Heisenberg, o operador evoluído no tempo é escrito como $x_H(t) = \exp(iHt)x_S \exp(-iHt)$ em que x_H e x_S se referem a operadores de Heisenberg e de Schrödinger. Então, para um tempo qualquer, com as unidades físicas destacadas, temos

$$\frac{dx(t)}{dt} = c\vec{\alpha}(t)$$

¹⁶ Afeta apenas orbitais tipo s. A contribuição que dá ao estado 2s a mesma energia de 2p. Pode-se relacionar como uma consequência do ZBW [65]. Já o chamado "Lamb shift", que, embora seja uma menor correção, faz a energia de 2s ultrapassar a de 2p.

. Os autovalores da matriz $c\vec{\alpha}$ são $+c$ e $-c$ para qualquer tempo; um espectro puramente discreto para o operador de velocidade padrão. Classicamente, é esperado que $\vec{v} = c^2\vec{p}/E$. Por correspondência, o análogo quântico deveria ser o operador velocidade $c^2\vec{p}H^{-1}$, que é de espectro contínuo e é uma constante do movimento para partícula livre.

Prosseguindo, podemos agora calcular a derivada temporal desse operador por

$$i\frac{d\vec{\alpha}}{dt} = [\vec{\alpha}, \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m] = 2\vec{\alpha}\beta m + 2i\vec{p} \times \vec{\Sigma}, \quad (3.33)$$

em que

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

é a matriz relacionada ao spin. Essa expressão pode ser reordenada como

$$i\dot{\vec{\alpha}} = 2\vec{\alpha}H - 2\vec{\alpha}(\vec{\alpha} \cdot \vec{p}) + 2i\vec{p} \times \vec{\Sigma}$$

, já que $[\alpha_i, \alpha_j] = 2i\epsilon_{ijk}\Sigma_k$ e $[\alpha_i, \beta] = 2\alpha_i\beta$. Utilizando que $\alpha_i\alpha_j = \frac{1}{2}[\alpha_i, \alpha_j] + \frac{1}{2}\{\alpha_i, \alpha_j\}$, obtemos

$$\dot{\vec{\alpha}} = 2i(\vec{p} - \vec{\alpha}H) = 2i(\vec{p}H^{-1} - \alpha\vec{p}\hbar\alpha)H, \quad (3.34)$$

que é uma diferença entre o operador velocidade e o esperado clássico. A solução formal, por ser uma EDO de primeira ordem, é dada por

$$\vec{\alpha}(t) = (\vec{\alpha}_0 - \vec{p}H^{-1})e^{-2iHt} + \vec{p}H^{-1}. \quad (3.35)$$

Mas $c\vec{\alpha} = \dot{\vec{x}}$, então a solução geral do operador posição é

$$\vec{x}(t) = \vec{b} + \vec{p}c^2H^{-1}t - \vec{b}\exp(-2iHt/\hbar), \quad (3.36)$$

com

$$\vec{b} = \vec{x}(0) - \frac{i}{2}\hbar c\vec{\alpha}(0)H^{-1} + \frac{i}{2}\hbar c^2\vec{p}H^{-2}.$$

O último termo representa uma rápida oscilação do operador de posição chamada Zitterbewegung por Schrödinger em 1930; ou ainda “trembling motion” e “jittery motion”. A frequência de oscilação é da ordem de $\omega \sim 2mc^2/\hbar$ e está associada com uma amplitude da ordem do comprimento (reduzido) de Compton $\hbar cH^{-1} \sim \hbar/mc = \lambda_c$. Assim, associa-se esse efeito a flutuações na posição da partícula da ordem do comprimento de Compton. Entretanto, quando calculado o valor médio do operador, $\langle \vec{x}(t) \rangle$, em um estado geral que é superposição de ondas planas de energia positiva e negativa, soluções da equação de Dirac, verifica-se que o efeito é uma consequência da interferência entre estados de energia positiva e negativa da partícula. Soluções de pacote de onda com energia unicamente positiva ou unicamente negativa, como as soluções de Schrödinger, não apresentam o efeito de Zitterbewegung.

Em uma análise de teoria quântica de campos, em que promove-se a função de onda de Dirac¹⁷ para campo quântico, ZBW é muito pouco mencionado pela comunidade em geral. Alguns trabalhos[66] consideram como um efeito não físico, que carece de realidade.

A questão de interferência entre energias positivas e negativas, perde consistência quando temos estados físicos que pertencem a setores distintos de uma regra de superseleção como cargas elétricas distintas. Assim, a superposição coerente desses estados é proibida, invalidando a observação física do efeito.

Outros trabalhos [67] abrem espaço para possíveis interpretações desse efeito até mesmo em uma visão de teoria quântica de campos. Trata-se de um assunto antigo, mas que surgiu novamente com a spintrônica e a matéria condensada¹⁸, que permitem testes de efeitos previstos pela mecânica quântica relativística como ZBW, Paradoxo de Klein e Mecanismo de Schwinger. Isso é possível devido a analogia, ou simulação [68], do comportamento de elétrons relativísticos com elétrons de baixa energia em materiais semicondutores (sistemas “Dirac-like”), por exemplo: [69] [70] [71] [72] [73] [74] [75].

Sobre demais questões relacionadas ao ZBW, pode-se citar, por exemplo, a questão de uma geometria interna para o elétron baseada em ZBW levantada por Barut[76], além da origem do spin como um momento angular associado ao ZBW devido a Huang[77] e a relação de ZBW com a álgebra geométrica de Hestenes[78]. Para o estudo da propagação de pacotes de onda de elétron e visualização dos efeitos de ZBW no contexto de soluções da equação de Dirac, referenciamos [79] [80].

Na discussão de localização de Newton-Wigner, as funções de onda representam estados de energias puramente positivas, que possuem dispersão de ordem maior ou igual ao comprimento de Compton da partícula associada. O ZBW poderia estar relacionado, então, com uma localização além do comprimento de Compton, onde a incerteza de energia pode ser grande suficiente para criar pares de partícula e antipartícula. Essa ideia de que partícula isolada relativística não possa ser localizada em distâncias menores que o comprimento de Compton é, novamente, no sentido de Newton-Wigner¹⁹. Dessa forma, pode-se dizer que uma partícula pontual possui uma dimensão linear efetiva da ordem do comprimento de Compton associado, já que a própria noção de partícula é comprometida para menores distâncias.

¹⁷ Teoria de estados de uma partícula apenas.

¹⁸ Experimentos com átomos frios e grafeno, por exemplo.

¹⁹ A questão da localização em teoria quântica de campos é uma outra abordagem, que será apenas mencionada mais adiante nesta dissertação.

3.3.1 Transformação de Foldy-Wouthuysen

Na mecânica quântica relativística, existe uma transformação canônica que altera a representação da função de onda na teoria de Dirac. A transformação de Foldy–Wouthuysen, 1949, diagonaliza, através de um operador unitário U , a hamiltoniana livre de Dirac separando as soluções de energia positiva e negativa antes acopladas devido ao $\vec{\alpha}$ presente na hamiltoniana. Embora o trabalho original fora descrito para partículas de spin 1/2, há generalizações para spin 0, 1 e spins mais altos [81][82][83] [84], que promovem uma maior similaridade entre as equações de onda que descrevem as partículas associadas.

Assim, qualquer operador é alterado por uma transformação de similaridade, $\tilde{Q} = UQU^\dagger$ e a função de onda transformada

$$\tilde{\psi} = U\psi = \exp(iS)\psi, \quad (3.37)$$

com S hermitiana. Por exemplo, $U = \exp(\beta\vec{\alpha} \cdot \hat{p}\theta)$, no caso de spin 1/2. Onde $2\theta = \arctan^{-1}(\frac{|p|}{m})$ é o ângulo que efetua a diagonalização.

Nessa representação²⁰, que é a do trabalho de Newton-Wigner de 1949, as duas componentes de energia positiva do spinor completo de Dirac não se misturam com as duas componentes de energia negativa; separando o spinor inicial em outros dois, de energias definidas, com dois graus de liberdade cada. A hamiltoniana simplifica em

$$\tilde{H} = \beta(m^2 + \vec{p}^2)^{1/2}.$$

Essa transformação foi usada por Foldy e Wouthuysen para também justificar de forma mais clara a transição da equação de Dirac para a de Pauli no limite não relativístico, já que, na representação de Newton-Wigner, o limite clássico da mecânica quântica relativística é obtido, isto é, o operador velocidade já não é mais relacionado ao spin, mas espacial; em similaridade com a teoria de Pauli.

O efeito de ZBW não se manifesta nessa nova representação, já que ocorre a separação das soluções de energias negativas e positivas. Entretanto, a noção de um comprimento característico da partícula é mantida e mais evidente que na representação de Dirac-Pauli.

No caso de haver interação, não é possível fazer apenas uma transformação para diagonalizar a hamiltoniana, mas uma sequência de transformações que expandem a hamiltonia em uma série infinita em potências do inverso da massa; $1/m$. Para uma série condicionalmente convergente, ou semi convergente, é preciso que a massa seja suficientemente grande comparada às componentes temporais de Fourier da interação.

No trabalho original de Foldy-Wouthuysen, lê-se

“In general, $\tilde{\psi}$ at a given point is constituted from contributions depending on ψ over a neighborhood of dimensions of the

²⁰ A transformação diagonaliza na representação particular de Wigner-Newton.

order of a Compton wave length of the particle about the point. Thus a wave function, which in the old representation corresponded to a state in which the particle was definitely located at one point, passes over in the new representation into a wave function which apparently corresponds to the particle being spread out over a finite region."

Eles encontram que, após a transformação, o operador posição não é mais o usual x , mas o seguinte

$$\tilde{x} = x - \frac{i\beta\vec{\alpha}}{2E_p} + \frac{i\beta(\vec{\alpha} \cdot \vec{p})\vec{p} - [\vec{\sigma} \times \vec{p}]p}{2E_p(E_p + m)}. \quad (3.38)$$

Considerando o chamado operador posição média na nova representação como sendo o operador posição na antiga $\tilde{X} = x$, obtém-se a posição média na representação antiga através da seguinte expressão

$$\tilde{X} = x + \frac{i\beta\vec{\alpha}}{2E_p} - \frac{i\beta(\vec{\alpha} \cdot \vec{p})\vec{p} + [\vec{\sigma} \times \vec{p}]p}{2E_p(E_p + m)} \quad (3.39)$$

com $\vec{\sigma} = \frac{1}{2i}[\vec{\alpha} \times \vec{\alpha}]$ o operador de spin e energia $E_p = (m^2 + p^2)^{1/2}$. Consequentemente, outras quantidades como velocidade e momento angular também são alteradas²¹.

A adição de interação complica a situação devido ao fato de permitir que haja possibilidades de introdução de energias negativas mesmo que a situação inicial seja com energia positiva. Quando a interação não é fraca, a distinção entre estados estacionários de energias positivas ou negativas fica comprometida, e a própria descrição da partícula, em termos de função de onda, pode perder a validade.

Para a equação de Dirac minimamente acoplada à interação eletromagnética, $H = \beta m - e\phi + \vec{\alpha} \cdot (\vec{p} - e\vec{A})$ na representação de Dirac, a transformação de Foldy–Wouthuysen fornece a seguinte expressão

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = & \left(\beta mc^2 + \frac{\beta}{2m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right)^2 + e\phi - \frac{e\hbar}{2mc} \beta \vec{\sigma} \cdot \vec{B} - \frac{e\hbar^2}{8m^2c^2} \nabla \cdot \vec{E} \right. \\ & \left. + \frac{e\hbar}{8m^2c^2} \left[\vec{\sigma} \cdot \left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right) \times \vec{E} - \vec{\sigma} \cdot \vec{E} \times \left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right) \right] + \dots \right) \psi' \end{aligned} \quad (3.40)$$

que destaca mais explicitamente os detalhes da interação entre a partícula e o campo eletromagnético.

Novamente, os autores concluem com:

"In the old representation, the Dirac particle interacted with the electromagnetic field only at its position. However, a particle which in the old representation was located at a point is in the new representation spread out over a region of dimensions of the Compton wavelength in the space of its mean-position variable $\tilde{X} = x$. But in the new representation, the interaction

²¹ O autor utiliza "mean position, mean velocity, mean angular momentum, etc.

between the particle and the electromagnetic field is expressed in terms of the values of the electromagnetic field quantities at its mean-position. Hence one must expect a series of correction terms of the nature of a multipole expansion of the field, since the particle is actually spread out over a finite region in the space of its mean-position variable. From this point of view, the explicit appearance of the magnetic moment interaction and the accompanying spin-orbit interaction in the Hamiltonian is to be expected."

3.4 EQUAÇÕES DE MAXWELL - CASO FERMIÔNICO

Partindo da decomposição de Gordon fermiônica e tomando o regime estático do potencial eletromagnético $\partial_t A^\mu = 0$, obtém-se parte das equações de Maxwell²² no referencial de repouso da partícula.

A decomposição de Gordon com interação eletromagnética é

$$\bar{\psi}\gamma^\alpha\psi = \frac{i}{2m} (\bar{\psi}\partial^\alpha\psi - (\partial^\alpha\bar{\psi})\psi) + \frac{1}{m}\partial_\mu (\bar{\psi}\Sigma^{\alpha\mu}\psi) - \frac{q}{m}\bar{\psi}\psi A^\alpha, \quad (3.41)$$

em que $\Sigma^{\alpha\mu} = \frac{i}{4} [\gamma^\alpha, \gamma^\mu]$ é matriz antissimétrica, gerador do grupo de Lorentz na representação espinorial. O primeiro termo é chamado convectivo, que é uma generalização relativística do termo convectivo no caso de Schrödinger e está ligado ao movimento das partículas carregadas. O segundo termo é o de magnetização, que está ligado ao spin da partícula. O último termo é um acoplamento entre o potencial eletromagnético e a densidade de partícula do portador.

No intuito de legitimar as aproximações tomadas a seguir, lembremos que uma solução geral da equação de Dirac, no espaço dos momenta, com energia positiva e na representação de Dirac é dada pelo espinor

$$\Psi = \exp(-ipx) \begin{pmatrix} \Phi \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\Phi \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

No limite não relativístico, reduz-se simplesmente a

$$\Psi = \exp(-ipx) \begin{pmatrix} \Phi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

Para encontrarmos a configuração de campos elétrico e magnético da partícula fermiônica, relacionada com a lei de Coulomb, fazemos algumas simplificações²³. Desprezamos a "back reaction", ou seja, o efeito da radiação gerada pela partícula sobre ela própria. Sendo assim, o campo eletromagnético é gerado pela partícula, mas não o consideramos acoplado na equação de Dirac que descreve a partícula,

²² Tendo o conhecimento da lagrangeana fermiônica em presença da radiação eletromagnética, ganha-se o correspondente à lei de Gauss e à equação de Ampere-Maxwell.

²³ Na discussão do caso bosônico, essas simplificações ficarão mais bem colocadas.

já que queremos fazer a simplificação de considerar o referencial de repouso da partícula; para isto, precisamos de uma partícula livre. Entretanto, conhecemos a corrente eletromagnética de Maxwell, vinda da variação da lagrangeana de Dirac-Maxwell, isto é, $-\frac{1}{4}F^2 + \mathcal{L}_{\text{Dirac}}$, pois o campo eletromagnético é realmente gerado, possui dinâmica, já que a partícula possui carga elétrica. Ao se utilizar a decomposição de Gordon, estamos utilizando a equação de campo. Então, o cálculo é on-shell, ou seja, provém de uma conservação própria²⁴ do teorema de Noether. O caso off-shell não requer a utilização da equação de campo e vem de uma conservação imprópria de Noether.

Agora, tomando $\alpha = 0$ na decomposição de Gordon desacoplada²⁵ de A^α , temos

$$\bar{\psi}\gamma^0\psi = \frac{i}{2m} (\bar{\psi}\partial^0\psi - (\partial^0\bar{\psi})\psi) + \frac{1}{m}\partial_j (\bar{\psi}\Sigma^{0j}\psi). \quad (3.44)$$

Nas aproximações citadas e no referencial de repouso, simplifica em

$$\bar{\psi}\gamma^0\psi = \frac{i}{2m} (\bar{\psi}\partial^0\psi - (\partial^0\bar{\psi})\psi). \quad (3.45)$$

A equação de Gauss para o campo elétrico vem da variação da lagrangiana em relação ao A^μ . Em que a equação com o índice temporal

$$\partial_i F^{i0} = J^0 = eq\bar{\psi}\gamma^0\psi$$

é que fornece simplesmente

$$\nabla \cdot \vec{E} = eq\bar{\psi}\gamma^0\psi = \rho_{\text{carga}} = \frac{ieq}{2m} (\bar{\psi}\partial^0\psi - (\partial^0\bar{\psi})\psi), \quad (3.46)$$

e o potencial eletrostático, dado por $-\nabla\Phi = \vec{E}$, é então obtido

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho_{\text{carga}}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \quad (3.47)$$

Para uma partícula de distribuição pontual, pointlike, $\rho_{\text{carga}} = \delta(\vec{r}')$, tem-se a bem conhecida equação para o potencial

$$\Phi = \frac{eq}{4\pi|\vec{r}'|}, \quad (3.48)$$

que gera o campo elétrico de dependência $1/r^2$.

Para obtenção do campo magnético, tomamos a componente espacial $\alpha = i$, que fornece a seguinte expressão

$$\bar{\psi}\gamma^i\psi = \frac{i}{2m} (\bar{\psi}\partial^i\psi - (\partial^i\bar{\psi})\psi) + \frac{1}{m}\partial_j (\bar{\psi}\Sigma^{ij}\psi) + \frac{1}{m}\partial_0 (\bar{\psi}\Sigma^{i0}\psi). \quad (3.49)$$

²⁴ De 1918, a nomenclatura "proper conservation law" e "improper conservation law" foi a distinção de Noether sobre leis de conservação que dependem ou independem das equações de campo associadas. No caso on-shell, a partícula satisfaz a relação relativística entre momentum e energia.

²⁵ Impor a não consideração da "back reaction" é considerar a equação de Dirac livre, que dá a decomposição de Gordon sem A^α , e não simplesmente zerar o A^α . No caso bosônico, o equivalente será utilizar a condição subsidiária da partícula livre.

Nas mesmas aproximações, temos que a corrente convectiva espacial, $\frac{i}{2m} (\bar{\psi} \partial^i \psi - (\partial^i \bar{\psi}) \psi)$ é nula no referencial de repouso e obtemos a expressão simplificada

$$\bar{\psi} \gamma^i \psi = + \frac{1}{m} \partial_j (\bar{\psi} \Sigma^{ij} \psi). \quad (3.50)$$

Partindo da componente espacial da variação

$$\partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ji} = \partial_0 \vec{E} + \nabla \times \vec{B} = eq \bar{\psi} \gamma^i \psi$$

no limite estático, obtém-se a equação de Ampere-Maxwell para o campo magnético dada simplesmente por

$$(\nabla \times \vec{B})^i = eq \bar{\psi} \gamma^i \psi = \frac{eq}{m} \partial_j (\bar{\psi} \Sigma^{ij} \psi). \quad (3.51)$$

Para o potencial vetor \vec{A} com gauge já definido²⁶, tem-se a equação tipo Poisson

$$-(\nabla^2 \vec{A})^i = \frac{eq}{m} \partial_j (\bar{\psi} \Sigma^{ij} \psi), \quad (3.52)$$

que reproduz a conhecida expressão na literatura dada por

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \quad (3.53)$$

No referencial de repouso, ocorre que

$$\frac{eq}{m} \partial_j (\bar{\psi} \Sigma^{ij} \psi) = \frac{eq}{m} \partial_j (\epsilon^{ijk} \phi^\dagger \sigma^k \phi). \quad (3.54)$$

Sendo assim,

$$\vec{J} = \nabla \times \vec{\mu}$$

com $\vec{\mu}^i \equiv \vec{\mu}_0^i \delta^3(\vec{x})$ sendo o momento magnético proporcional ao spin da partícula responsável pela geração do campo magnético²⁷; trata-se do análogo clássico de um dipolo na origem, por exemplo.

Retornando para a equação (3.53), após uma integração parcial

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\nabla' \frac{-1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \times \vec{\mu}_0 \delta(\vec{r}') dV'. \quad (3.55)$$

Finalmente, o vetor potencial e o campo magnético, devido o spin, gerado por essa partícula fermiônica no referencial de repouso no limite não relativístico se reduzem a expressões conhecidas²⁸

$$\vec{A} = \frac{\vec{\mu}_0 \times \vec{r}}{4\pi |\vec{r}|^3} \quad (3.56)$$

²⁶ Na aproximação estática, o gauge de Coulomb tem mesmo efeito do gauge de Lorenz.

²⁷ Considerando $\vec{\mu}$ pontualmente localizado

²⁸ Cálculo obtido para distâncias externas ao dipolo, isto é, não reproduz distâncias internas.

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{4\pi|\vec{r}|^3} [3(\vec{\mu}_0 \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{\mu}_0] + \vec{\mu}_0\delta(\vec{r}). \quad (3.57)$$

No eletromagnetismo clássico de Maxwell, o spin da partícula e a interação da partícula com o próprio campo gerado são efeitos totalmente desprezados. Trata-se de uma visão macroscópica do efeito de fontes eletromagnéticas. Ao considerarmos o efeito do spin da partícula, estamos, na verdade, fazendo uma análise semiclássica que é mais microscópica.

No capítulo 4, um cálculo análogo será feito para bósons, no intuito de comparar as diferenças ou semelhanças.

3.5 FATORES DE FORMA E CORRENTE FERMIÔNICA

Embora a QED trate os léptons como partículas pontuais, sabemos que partículas elementares podem apresentar os chamados fatores de forma, que descrevem o desvio eletromagnético do comportamento de uma carga pontual ideal.

Para medir o tamanho de um objeto, é necessário o uso de algum tipo de comprimento de prova (resolução), que está associado ao método de medição. Algo bem pequeno requer uma resolução também bem pequena para não parecer desprezível frente à distância relevante da medição. Em [85], Jaynes defende que, assim como Louis Pasteur teve de observar um único micróbio por meio de microscópio, uma partícula pontual deveria ser provada nua, fora de um pacote de onda.

Uma medida de prova muito pequena pode ser problematizada pelo princípio da incerteza, que associa uma grande incerteza do momentum. Na prática, a quantia avaliada relacionada ao tamanho de partículas elementares é a distribuição de momenta, que está relacionada a uma transformada de Fourier em relação ao comprimento no espaço de coordenadas; essa distribuição é chamada fator de forma. O fator de forma parametriza a distribuição de carga e de corrente associadas às interações da partícula. O conceito foi inicialmente introduzido no estudo de espalhamentos por raios-X. Os fatores de forma dão uma relação direta entre a observação experimental e a análise teórica.

Na visão de espalhamento, os fatores de forma (atômica) aparecem diretamente na obtenção experimental da seção de choque como um fator multiplicativo que o altera.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{pontual}} |F(q^2)|^2. \quad (3.58)$$

Eles são interpretados como a transformada de Fourier de uma densidade de probabilidade

$$F(q^2) = \int d^3r \rho(\vec{r}) \exp(i\vec{q} \cdot \vec{r}/\hbar), \quad (3.59)$$

I feel that it is a delusion to think of the electrons and the fields as two physically different, independent entities. Since neither can exist without the other - Albert Einstein

em que $(q = p_2 - p_1)$ é o momentum transfer ou de transferência.

Em cálculos perturbativos da teoria quântica de campos, os propagadores são representados no espaço dos momenta, onde as divergências aparecem de uma forma mais simples de tratar que no espaço de coordenadas. Assim, ao analisarmos os elementos de matriz da corrente eletromagnética, $J_\mu^{EM} = eq \sum \bar{f} \gamma_\mu f$, entre um estado inicial e final para partículas de spin 1/2, por exemplo o elétron, temos

$$\langle u(p_2) | J_\mu^{EM} | u(p_1) \rangle = \bar{u}(p_2) \Gamma_\mu(p_1, p_1) u(p_1), \quad (3.60)$$

com espinor de Dirac u e Γ_μ descreve a estrutura de Lorentz geral da corrente eletromagnética. Assim, $|u(p)\rangle$ representa o estado de um elétron on-shell, $p_1^2 = p_2^2 = m^2$, com função de onda $u(p)$. Já o fóton é off-shell, ou seja, virtual.

Analisando todas possibilidades de estruturas invariantes de Lorentz, é possível obter uma expressão para Γ após tomar em consideração algumas restrições que diminuem o número de possibilidades: Invariância translacional da corrente, hermiticidade da corrente, a lei de conservação da corrente devido à invariância de gauge, relações das matrizes da álgebra de clifford para a equação de dirac (elétron on-shell).

Como Γ_μ possui apenas um índice, os três casos possíveis são esse índice vir no momentum transfer q , ou nas matrizes gamma da álgebra de Clifford ou no símbolo antissimétrico ϵ de Levi-Civita. Os fatores de forma são invariantes de Lorentz, então eles dependem de produtos escalares de 4-vetores, mas existem apenas dois independentes e relevantes na descrição física do problema, p_1 e p_2 . Dessa forma, as quantias invariantes são p_1^2 , p_2^2 e $p_1 \cdot p_2$. Como o elétron é on-shell, p_1 e p_2 não são variáveis, já que dão a massa da partícula cujo vértice de interação estamos considerando. A única opção restante é a dependência em $p_1 \cdot p_2$, mas temos liberdade para fazer uma mudança de variável mais conveniente e expressar isso em função do momentum do fóton, já que $q^2 = (p_2 - p_1)^2$. Portanto, os fatores de forma podem ser considerados todos como função do momentum do fóton como $F(q^2)$.

Para simplificar o possível, também se utiliza uma série de identidades que relacionam, por exemplo, $(p_1 + p_2)_\mu$ com γ_μ e $\Sigma_{\mu\nu} q^\nu$. Tratam-se de relações tais como a decomposição de Gordon da corrente fermiônica, que será utilizada na próxima seção.

Após as devidas restrições, a forma final de Γ é obtida como

$$\begin{aligned} \Gamma = & F_1(q^2) \gamma^\mu + i \frac{q_\nu}{2m} \sigma^{\mu\nu} F_2(q^2) \\ & + i \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \frac{q_\nu}{4m} \sigma_{\alpha\beta} F_3(q^2) \\ & + \frac{\left(q^\mu - \frac{q^2}{2m} \gamma^\mu \right)}{2m} \gamma_5 F_4(q^2) \end{aligned} \quad (3.61)$$

Finalmente, a estrutura da corrente eletromagnética, ainda sem a carga, é escrita como

$$J^\mu = \bar{u}(p_2) \left[F_1(q^2)\gamma^\mu + iF_2(q^2)\frac{\Sigma^{\mu\nu}}{2m}q_\nu + iF_3(q^2)\frac{\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\Sigma_{\alpha\beta}}{4m}q_\nu + \frac{1}{2m}\left(q^\mu - \frac{q^2}{2m}\gamma^\mu\right)\gamma_5F_4(q^2) \right] u(p_1), \quad (3.62)$$

com momento transfer, relacionado ao fóton, dado por $q \equiv p_2 - p_1$ e o seguinte spinor de Dirac

$$u(p_1) = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}_1}{E_1+m}\xi_2 \end{pmatrix}. \quad (3.63)$$

A corrente eletromagnética, rigorosamente definida, recebe um fator multiplicativo que é a carga $(eQ)^{29}$, onde (e) é a carga fundamental e Q dá o sinal e o número de múltiplos da carga fundamental. Assim, F_1 é o fator de forma relacionado à carga, F_2 é relacionado ao momento anômalo magnético, F_3 ao momento de dipolo elétrico e $F_4(q^2)$ é chamado fator de forma de Anapole, devido a Yakov Zel'dovich-1957 [86]. É esperado que, no limite em que $(q^2 \rightarrow 0)$, obtenha-se as propriedades estáticas da partícula, ou seja, a carga, o dipolo magnético, dipolo elétrico, anapole.

Podemos destacar algumas observações sobre esses fatores de forma. Primeiramente, mesmo que uma partícula não seja eletricamente carregada, é possível ter um momento magnético anômalo e um momento de dipolo elétrico ($F_2, F_3 \neq 0$) devido a esse efeito quântico que se manifesta através dos fatores de forma. O fator de anapole F_4 viola a Paridade (devido γ_5) e corresponde a um momento que não costuma receber destaque na física clássica, diferentemente do momento magnético e momento de dipolo elétrico.

Na eletrostática, sabemos que uma corrente eletromagnética pode ser expandida em termos de multipolos elétricos e magnéticos, porém há uma família de multipolos chamada momentos toroidais, que fazem parte de uma expansão multipolar no caso da eletrodinâmica. No contexto quânticos, esses momentos toroidais são chamados de anapoles. Uma extensa apresentação de multipolos toroidais em eletrodinâmica e em física do estado sólido é encontrada em [87].

Há também pesquisas [88][89] que tentam formular interação eletromagnética para matéria usual com a matéria escura fria ("cold dark matter") através dos anapoles, além dos mais usuais momentos de dipolo elétrico e magnético. A ideia é associar matéria escura com léptons massivos de Majorana, pois o único fator de forma permitido para um férmion de Majorana é o toroidal[90].

²⁹ Aqui Q é maiúscula para não confundir com o momento transfer q , mas, em outras situações desse trabalho, é possível encontrar q (minúscula) como a carga.

No limite não relativístico, após acoplamento com o potencial eletromagnético A_μ em ordem $\mathcal{O}(q^2)$, o termo de anapole F_4 , no espaço dos momenta, é expresso por

$$-\frac{\xi_2^\dagger \vec{\sigma} \xi_1}{2m} \left(\vec{q} q^0 A_0 - (q^0)^2 \vec{A} + \vec{q}^2 \vec{A} - \vec{q}(\vec{q} \cdot \vec{A}) \right) = -\frac{\xi_2^\dagger \vec{\sigma}_i \xi_1}{2m} (\partial_\nu F^{\nu i}). \quad (3.64)$$

Trata-se de uma interação entre o spin da partícula e o vetor densidade de corrente eletromagnética, tipo $(\vec{\sigma} \cdot \vec{j})$, que apareceu por motivos quânticos. Uma visualização clássica de anapole é um fio helicoidal tipo solenoide apertado em um anel como um toro, em que o fio só cria momento magnético dentro do toroide.

Embora não haja muitos textos sobre anapole, os seguintes trabalhos podem ser citados por envolver, de alguma forma, conceitos relevantes para esta dissertação: [91][92][93] [94][95].

3.6 CAMPO CLÁSSICO ESTENDIDO

*There is no such
thing in Nature as a
point particle -
E.T.Jaynes*

Como já mencionado anteriormente, um grande sucesso da equação de Dirac foi obter o fator giromagnético, $g = 2$, para o spin dos léptons eletricamente carregados. Esse resultado para o elétron já era esperado pelos estudos em espectroscopia, mas cálculos em eletrodinâmica quântica (QED) indicava maior precisão em acordo com os experimentos que apontavam um pequeno desvio do valor $g = 2$. A equação de Dirac obtinha sucesso a “tree-level”, mas era preciso considerar correções quânticas a esse valor utilizando os loops nos gráficos de Feynman.

Na própria equação de Dirac, a adição do chamado termo de interação de Pauli,

$$\frac{e}{4m_e} a_e F_{\mu\nu}(x) \sigma^{\mu\nu} \psi(x) \quad (3.65)$$

com $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ e $eF_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, acomoda essa correção ao valor obtido por Dirac, pois o termo a_e , chamado momento magnético anômalo, surge no cálculo do momento magnético da seguinte forma

$$g = 2(1 + a_e). \quad (3.66)$$

O termo de Pauli respeita a covariância de Lorentz e a invariância de gauge, porém constitui um termo chamado operador de dimensão 5, conhecido por prejudicar a renormalização das teorias. Assim, como um termo fundamental, esse termo não é esperado na expressão da lagrangeana, embora ele surja como resultado de loops em QFT.

O cálculo do momento magnético anômalo do elétron é encontrado nos livros de QFT como um exercício de aplicação das regras de Feynman para um loop de fóton ao vértice eletromagnético da interação elétron-fóton. Ao invés de reproduzirmos esse cálculo aqui, analisamos a possibilidade de obtenção do mesmo valor sem fazer o uso das correções quânticas aos gráficos de Feynman da QED.

Seguindo os passos de [96], analisamos o cálculo do momento magnético dos léptons, que são descritos pela equação de Dirac. Embora a equação de Dirac já carregue um \hbar embutido da descrição quântica, a ideia é não utilizar o campo de Dirac quantizado, mas ao nível clássico (ou semiclássico), e verificar a possibilidade de simulação de um efeito quântico por uma noção de extencibilidade espacial associada ao comprimento de Compton associado.

Partindo da lagrangeana de Dirac acoplada³⁰ ao campo eletromagnético

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^2 + \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - D_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) - m\bar{\psi}\psi, \quad (3.67)$$

a variação em relação à matéria e ao campo do fóton (A^μ) fornece

$$\partial_\alpha F^{\alpha\nu} = q\bar{\psi}\gamma^\nu\psi \quad (3.68)$$

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - qA_\mu\gamma^\mu\psi - m\psi = 0 \quad (3.69)$$

$$i\gamma^\mu D_\mu\psi - m\psi = 0, \quad (3.70)$$

ou de forma análoga, no gauge de Lorenz

$$\partial_\alpha\partial^\alpha A^\nu = q\bar{\psi}\gamma^\nu\psi \quad (3.71)$$

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - qA_\mu\gamma^\mu\psi - m\psi = 0. \quad (3.72)$$

O potencial eletromagnético é obtido pela função de Green em

$$A^\nu = \frac{q}{4\pi} \int \frac{\bar{\psi}'\gamma^\nu\psi'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r', \quad (3.73)$$

chamado potencial clássico retardado. Ele pode ser iterado na própria equação de Dirac de forma autoconsistente

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \frac{q^2}{4\pi} \int \frac{\gamma^\mu\psi\bar{\psi}'\gamma_\mu\psi'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' - m\psi = 0, \quad (3.74)$$

com $\psi' = \psi'(t - |\vec{r} - \vec{r}'|, \vec{r}')$ com efeito de retardamento e $\psi = \psi(t, \vec{r})$.

Utilizando a conhecida decomposição de Gordon da equação de Dirac, a corrente leptônica total, $\bar{\psi}\gamma^\alpha\psi$, pode ser expressa da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \partial_\mu\left(\frac{i}{4}\bar{\psi}[\gamma^\alpha, \gamma^\mu]\psi\right) + \frac{i}{2}(\bar{\psi}\partial^\alpha\psi - \partial^\alpha\bar{\psi}\psi) + \\ -qA^\alpha\bar{\psi}\psi - m\bar{\psi}\gamma^\alpha\psi = 0, \end{aligned} \quad (3.75)$$

em que a corrente total é decomposta em termos que explicitam diferentes contribuições físicas. Um termo relacionado ao spin da matéria portadora da carga eletromagnética $[\partial_\mu(\frac{i}{4}\bar{\psi}[\gamma^\alpha, \gamma^\mu]\psi)]$, o chamado termo convectivo $[\frac{i}{2}(\bar{\psi}\partial^\alpha\psi)]$, que está relacionado ao transporte de

³⁰ Aqui tomamos a derivada covariante dada pelo procedimento de acoplamento mínimo, que associa $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + \frac{ieq}{\hbar}A_\mu = D_\mu$. Obviamente, podemos simplesmente considerar, para o elétron uma carga q já com sinal e carga elementar embutidos. $\hbar = 1$.

cargas e à variação temporal do campo, o termo $[qA^\alpha \bar{\psi}\psi]$, que é um acoplamento direto entre a densidade de partícula do portador e o campo eletromagnético.

No limite não relativístico, o potencial possui parte espacial dada por

$$\vec{A} = \frac{q}{4\pi} \int \frac{\bar{\psi}'\vec{\gamma}\psi'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3r', \quad (3.76)$$

sem efeito de retardamento. Ocorre também uma simplificação no espinor que causa a redução de componentes $\bar{\psi} = (\phi^\dagger, 0)$, com dependências do tipo $\phi' = \phi'(\vec{r}')$ e $\phi = \phi(\vec{r})$.

A parte espacial da decomposição de Gordon, $\alpha = i$, é expressa por

$$\vec{\nabla} \times (\phi^\dagger \frac{\vec{\sigma}}{2} \phi) + \frac{i}{2} (\phi^\dagger \vec{\nabla} \phi - \vec{\nabla} \phi^\dagger \phi) - \phi^\dagger \phi q \vec{A} = m \bar{\psi} \vec{\gamma} \psi, \quad (3.77)$$

já que a dependência temporal pode ser fatorada; $\psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r})e^{-iEt}$. O termo³¹ $\frac{i}{2} (\phi^\dagger \vec{\nabla} \phi - \vec{\nabla} \phi^\dagger \phi)$ é a parte convectiva puramente espacial, mas pode ser desprezado, pois, no limite de baixas velocidades ou no referencial de repouso, é pequeno frente aos demais termos. Sendo assim, após a iteração autoconsistente do potencial, obtém-se o seguinte

$$\vec{\nabla} \times (\phi^\dagger \frac{\vec{\sigma}}{2} \phi) = m \bar{\psi} \vec{\gamma} \psi + \frac{q^2}{4\pi m} \int \frac{m \bar{\psi}' \vec{\gamma} \psi' \phi^\dagger \phi}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3r'. \quad (3.78)$$

A partir dessa expressão, utiliza-se o argumento heurístico de associar a distância $|\vec{r}-\vec{r}'|$ ao comprimento de onda de Compton em uma interpretação de campo clássico estendido espacialmente. A ideia inicial é destacar esse comprimento como fixo e característico da partícula já que está presente em vários fenômenos na fronteira entre o caráter de partícula e onda, então $|\vec{r}-\vec{r}'| = \lambda$.

É possível encontrar um discussão sobre a convergência dessa expressão obtida pela iteração do campo eletromagnético na equação de Dirac em [96]. Após decompor o espinor em componentes quirais esquerda (L) e direita (R), o autor sugere que as partes de autointeração, tomando o limite $\vec{r} \rightarrow \vec{r}'$, R-R: $(\gamma^\mu R \bar{R} \gamma_\mu R \equiv 0)$ e L-L: $(\gamma^\mu L \bar{L} \gamma_\mu L \equiv 0)$ são nulas; minimizando o problema das divergências ultravioletas. Porém, o argumento requer tratar os espinores como campos clássicos comutantes, não como variáveis de Grassmann.

Na representação quiral, ou de Weyl, a equação de Dirac mostra algumas peculiaridades. Em particular, é possível decompor a corrente de Dirac como uma soma de duas componentes de quiralidades opostas. Quando se toma $\psi = \psi_R + \psi_L$, a própria equação de Dirac se divide em duas

$$i\gamma^\mu \partial_\mu R - mL - eqA_\mu \gamma^\mu R = 0 \quad (3.79a)$$

$$i\gamma^\mu \partial_\mu L - mR - eqA_\mu \gamma^\mu L = 0. \quad (3.79b)$$

³¹ Esse termo é presente também no caso escalar, pois não depende do spin do portador.

Ao se substituir o potencial A acima, tem-se quatro integrais finais, mas ignoramos as que correspondem a termos RR e LL , que devem ser irrelevantes frente as RL e LR .

Particularmente, a parte espacial, fatorada do fator de carga, é decomposta na soma de $(-\bar{L}\vec{\gamma}L)$ e $(+\bar{R}\vec{\gamma}R)$. Assim, as duas quiralidades se tornam idênticas no limite não relativístico com densidades espaciais de momentum opostas, ou seja, $-\bar{L}\vec{\gamma}L \approx +\bar{R}\vec{\gamma}R$ e também $\phi'^{\dagger}\phi' \approx \phi^{\dagger}\phi$. Daí, tem-se a expressão

$$\vec{\nabla} \times (\phi^{\dagger} \frac{\vec{\sigma}}{2} \phi) = m\bar{\psi}\vec{\gamma}\psi - \frac{q^2}{4\pi} \frac{1}{m\lambda} \int m\bar{\psi}\vec{\gamma}\psi \phi'^{\dagger}\phi' d^3r', \quad (3.80)$$

que é reduzida para a seguinte forma final após utilizarmos uma normalização para o pacote de onda

$$\vec{\nabla} \times (\phi^{\dagger} \frac{\vec{\sigma}}{2} \phi) \approx m\bar{\psi}\vec{\gamma}\psi \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right), \quad (3.81)$$

valendo-se de $m\lambda = 2\pi$ e $\alpha = \frac{q^2}{4\pi}$. Essa expressão relaciona a corrente espacial de spin com a corrente total e pode ser utilizada para o cálculo do momento magnético da partícula.

A definição clássica do momento magnético é dada por

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} \int \vec{r} \times (q\bar{\psi}\vec{\gamma}\psi) d^3r', \quad (3.82)$$

mas agora já sabemos que a corrente leptônica é dada por

$$m\bar{\psi}\vec{\gamma}\psi = \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right)^{-1} \vec{\nabla} \times (\phi^{\dagger} \frac{\vec{\sigma}}{2} \phi). \quad (3.83)$$

Então, aplicando na equação do momento magnético

$$\vec{\mu} = \frac{q}{2m} \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right)^{-1} 2 \int \phi^{\dagger} \frac{\vec{\sigma}}{2} \phi d^3r, \quad (3.84)$$

mas $\frac{1}{2}\vec{r} \times [\vec{\nabla} \times (\phi^{\dagger} \frac{\vec{\sigma}}{2} \phi)] = \phi^{\dagger} \frac{\vec{\sigma}}{2} \phi$ a menos de termos de superfície escritos como derivadas totais que podem ser desprezados dentro da integral, então

$$\vec{\mu} = \frac{q}{2m} \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right)^{-1} 2 \int \phi^{\dagger} \frac{\vec{\sigma}}{2} \phi d^3r, \quad (3.85)$$

em que o termo que está dentro da integral é um elemento de matriz que representa o spin da partícula leptônica. Dessa forma,

$$\vec{\mu} = \frac{q}{2m} \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right)^{-1} 2\vec{s}. \quad (3.86)$$

A constante de estrutura fina, $\sim 1/137$ para a escala de energia da massa do elétron na QED, pode ser pensada em termos perturbativos já que é pequena em relação à unidade. Finalmente, fazemos a expansão de Taylor que confere o resultado

$$\vec{\mu} \approx \vec{s} \frac{q}{2m} 2 \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right) \quad (3.87)$$

em primeira ordem de $\frac{\alpha}{2\pi}$, ou seja, segunda ordem em termos de carga elétrica. Esse resultado foi obtido em 1948 por Schwinger através do cálculo perturbativo de loops de correções radiativas ao gráfico de Feynman que representa o vértice de interação eletromagnética do elétron com o fóton responsável pelo momento magnético.

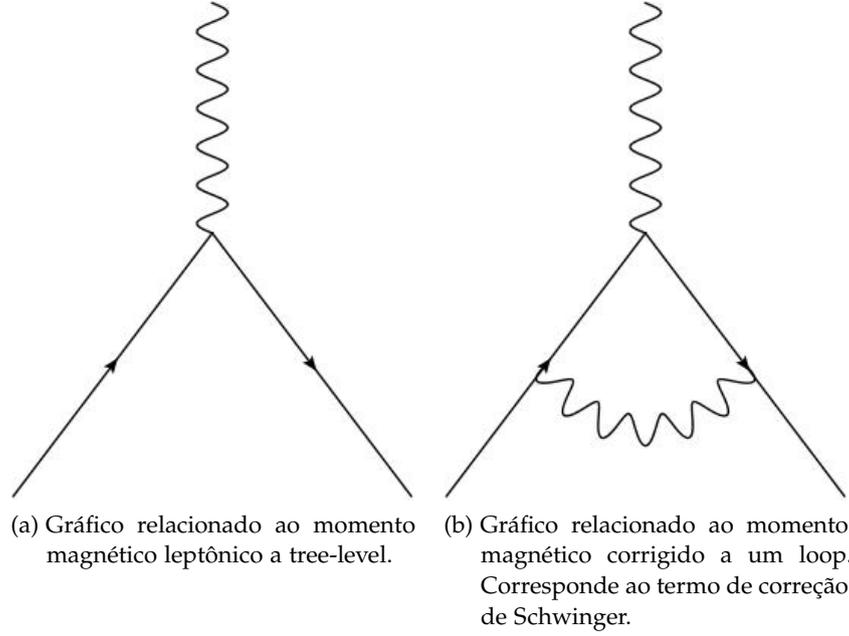


Figura 6: Diagramas de Feynman

É possível ir além e buscar simular o valor do momento magnético do elétron com mais precisão ainda. Para isso, é necessário considerar correções de ordem superior na constante de estrutura fina. A interpretação física pode partir de permitir que a distância outrora fixada com o comprimento de Compton possa variar devido a efeitos de alta escala de energia. Sendo assim, $|\vec{r} - \vec{r}'| = \lambda + \delta\lambda$ implica em

$$\vec{\mu} \approx \vec{s} \frac{q}{2m} 2 \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi + m\delta\lambda} \right)^{-1}. \quad (3.88)$$

que pode ser expandido em α and $\delta\lambda$. Particularmente, para um $\delta\lambda = k\frac{\alpha}{m}$ a expansão em termos de α é dada por

$$\vec{\mu} \approx \vec{s} \frac{q}{2m} 2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\pi} + \frac{1-k}{4} \left| \frac{\alpha}{\pi} \right|^2 \right), \quad (3.89)$$

onde o parâmetro k da variação $\delta\lambda$ só começa a importar para as correções de ordens quadráticas em α .

O momento magnético pode ser interpolado mais precisamente para o elétron quando $k \approx 2.53$, para o múon $k \approx -2.11$ e para o tau $k \approx -10.33$; com os léptons em ordem crescente de massa. Essa interpretação dá como resultado que a primeira correção, ao momento magnético, é devido ao comprimento de Compton associado à partícula e a segunda correção é da ordem do raio clássico da partícula

leptônica, já que o parâmetro k é aproximadamente da ordem da unidade.

É importante lembrar que, no caso leptônico, as correções elétricas ao momento magnético são substanciais, pois as outras interações fazem correções de menores ordens de grandeza. No caso de interesse para o bóson W , a correção elétrica pode não ser assim tão substancial, já que esse bóson possui massa muito mais elevada. A massa determina a importância das contribuições dos gráficos de correções a loops que constituem os efeitos de todas interações para o cálculo do momento magnético anômalo, pois está no denominador do propagador.

Devido à representação do férmion de Dirac ser a soma direta de duas representações irredutíveis correspondentes a quiralidades right e left, $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$, pode-se interpretar que, nessa visão de campo estendido, o elétron é formado pelos elétron-R e elétron-L com a distância de Compton separando essas duas projeções quirais. Ao se permitir a adição de uma variação desse comprimento $(\lambda + \delta\lambda)$, a interpretação é que essas componentes interagem e causam desvios ao comprimento de Compton.

Assim, credita-se fundamentalidade para as representações irredutíveis $(\frac{1}{2}, 0)$ e $(0, \frac{1}{2})$, já que elas poderiam ser interpretadas como formadoras do férmion total de Dirac. A pergunta que parece não ter resposta clara é de que forma esse comprimento de Compton poderia se manifestar experimentalmente como relacionado às projeções quirais que formam o elétron. Mesmo que essa não seja uma situação realista, é interessante refletir sobre o significado da interpretação de campos clássicos estendidos em relação a campos quânticos pontuais.

Peter Milonni: *“In QED the electron is viewed as a point particle. There is no experimental evidence of any internal electron structure. However, quantum fluctuations act in effect to spread out the point electron. As recalled in the preceding section, classical considerations collapse at very small scales of time and distance. These scales are of order $\Delta t \sim \hbar/mc^2$ and $\Delta d \sim \hbar/mc \equiv \lambda_c$, the electron Compton wavelength divided by 2π . And λ_c is much larger than the classical electron radius”:*

$$\frac{\lambda}{r_0} = \frac{\hbar/mc}{e^2/mc^2} = \frac{\hbar c}{e^2} = \alpha^{-1} \approx \frac{1}{137}$$

Partículas bosônicas de spin um foram, em geral, descobertas após partículas fermiônicas de spin meio, mas, desde então, se mostraram fundamentais em caracterizar interações físicas. O fóton, por estar diretamente ligado à luz, apareceu cedo na física com a descrição do efeito fotoelétrico por Einstein em 1905. Depois de uma lista de férmions descobertos, somente em 1983 é que surgiram os bósons W e Z^1 no CERN como partículas elementares massivas e de spin um. Os bósons W são eletricamente carregados e o bóson Z é eletricamente neutro. Enquanto o fóton, que é neutro, é considerado o portador da interação eletromagnética, os bósons vetoriais W e Z são os da interação fraca. Por possuírem carga elétrica, os bósons W são mais interessantes que o Z no sentido de permitirem uma diversidade de transformação de uma partícula em uma outra espécie diferente; transformam próton em nêutron, por exemplo.

Os bósons fundamentais são os mediadores trocados das interações fundamentais². A massa dessas partículas elementares é que está ligada à distância em que a interação é de considerável importância; interações de curto ou longo alcance. No caso do fóton, a interação eletromagnética é de longo alcance já que o fóton não é massivo, mas a interação fraca é de curto alcance, pois os bósons W e Z possuem grande massa. Uma possível eletrodinâmica quântica (QED) com portador massivo, por exemplo, apresenta uma inevitável blindagem (“screening”) da carga de Maxwell que foi formalizada por André Swieca [97]. Isso expõe a importância da massa, que influencia na definição de uma quantidade conservada como a carga.

Por possuir carga eletromagnética e spin, os bósons W possuem naturalmente um momento magnético associado, diferentemente do bóson Z , que é neutro³. No âmbito de fazer o cálculo do momento magnético no caso bosônico, utilizando a ideia de associar um comprimento de Compton nas equações de campo clássico como feito para os léptons, desenvolvemos, ao longo desse capítulo, o eletromagnetismo clássico do bóson W vindo de um contexto de interação eletrofraca após ocorrido o mecanismo de Higgs e os bósons adquirido massa.

¹ José Leite Lopes, do CBPF, fez a predição teórica do bóson Z em 1958.

² O bóson de Higgs não surge de uma condição de simetria de gauge e não é considerado um mediador de uma interação fundamental.

³ O nêutron também possui um momento magnético natural, mas o motivo é que ele não é uma partícula elementar. Há, porém, trabalhos sobre um possível momento magnético anômalo do fóton [98][99][100][101].

4.1 POLARIZAÇÕES

Em mecânica quântica, sabemos que uma partícula massiva de spin 1, um bóson vetorial, possui três orientações independentes para o spin; $+\hbar, -\hbar, 0$. No caso de massa nula, um grau de liberdade é perdido pela invariância de gauge, e a partícula possui apenas as duas helicidades. No caso massivo, existem alguns mésons e os bósons vetoriais intermediários da interação fraca.

A lagrangeana de Proca para spin 1 é dada em termos do 4-vetor V_μ , que, como representação finita, está na representação 4-dimensional $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ do grupo restrito de Lorentz. Em termos de $SO(3)$, essa representação se decompõe⁴ em $(4 = 1 \oplus 3)$; os quatro graus de liberdade são um do escalar (spin 0) e três do vetor (puro spin 1) de No espaço de Hilbert, porém, a prescrição de Wigner requer operadores unitários para descrever partículas, mas, devido a não compacticidade do grupo de Lorentz, as representações dos campos quânticos são de dimensão infinita. Partindo da lagrangeana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}V^{\mu\nu}V_{\mu\nu}^* + \frac{1}{2}m^2V_\mu^2, \quad (4.1)$$

com $m \neq 0$, as equações de Euler-Lagrange implicam na equação de movimento

$$(\square + m^2)V_\mu = 0, \quad (4.2)$$

e na condição subsidiária⁵

$$\partial_\mu V^\mu = 0, \quad (4.3)$$

que restringe o número de soluções independentes de onda plana a apenas três, isto é,

$$V_\mu(x) = \sum_i \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \tilde{v}_i(\vec{k}) \epsilon_\mu^i(\vec{k}) e^{ikx}; \quad k^2 = m^2, \quad (4.4)$$

para uma base de vetores $\epsilon_\mu(k)$ denominados vetores de polarização.

No referencial de repouso da partícula $k^\mu = (m, \vec{0})$, a condição subsidiária $\partial_\mu \epsilon^\mu$ implica que a componente temporal de ϵ_μ é nula. Para um referencial geral $k^\mu = (\omega, \vec{k})$, tomamos, por exemplo, k^μ na direção z

$$k^\mu = (\omega, 0, 0, k_z), \quad \omega^2 - k_z^2 = m^2. \quad (4.5)$$

Distinguimos dois tipos de soluções. As soluções de polarizações transversais, que são ortogonais tanto a k quanto \vec{k} , e a solução de

⁴ A decomposição dos graus de liberdade poderia ser pensada também em $4 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1$, onde estão presentes quatro escalares. A lagrangeana é quem dita como os graus de liberdade se decompõe. O interesse aqui é voltado para o spin 1, não para os escalares.

⁵ Essa condição reduz um grau de liberdade. Assim, o escalar é retirado e resta o que interessa para a descrição de uma partícula de spin 1.

polarização longitudinal, que possui componente espacial ao longo da direção do vetor tridimensional \vec{k} . As polarizações transversais são dadas por

$$\epsilon_{\mu}^1 = (0, 1, 0, 0) \quad (4.6a)$$

$$\epsilon_{\mu}^2 = (0, 0, 1, 0), \quad (4.6b)$$

$$(4.6c)$$

já a polarização longitudinal é

$$\epsilon_{\mu}^L = \left(\frac{|\vec{k}|}{m}, 0, 0, \frac{\omega(\vec{k})\vec{k}}{m|\vec{k}|} \right) \quad (4.7)$$

com a normalização no espaço de Minkowski $\epsilon_{\lambda}^{\mu*} \epsilon^{\lambda\mu} = -\delta_{AB}$. Além disso, $(\epsilon_{\mu}^L)^2 = -1$ e $k^{\mu} \epsilon^{\mu L} = 0$. Lembrando que a noção de polarização transversal e longitudinal, diferentemente da quiralidade, não é um conceito invariante de Lorentz.

Esses três vetores de polarização geram a representação irredutível de dimensão infinita do grupo de Poincaré, pois esses vetores de base $\epsilon_{\mu}(k)$ dependem de uma infinidade de possibilidades que k^{μ} , ou p^{μ} , pode tomar. A integral desses vetores de base com componentes de Fourier $\tilde{v}_i(k)$ gera o espaço dos campos, representações unitárias de dimensão infinita do grupo de Poincaré, que satisfazem as equações de movimento desejada.

Escolhemos uma base de vetores de polarização real, que dá as chamadas polarizações lineares, em que o campo $V^{\mu}(x)$ é fixado em uma única direção, mas uma mudança de base pode fazer com que a direção gire em torno de um círculo formando as polarizações circulares. As polarizações circulares envolvem autoestados da helicidade. Para medir a componente do spin ao longo do momentum \vec{k} , aplica-se uma rotação ao campo em torno da direção \vec{k} . Como exemplo comum, tomemos \vec{k} na direção positiva do eixo z . Uma rotação ao longo de \vec{k} é expressa pela matriz

$$L_{\mu}^{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

tal que $V'_{\mu}(\vec{k}) = L_{\mu}^{\nu} V_{\nu}(\vec{k})$. Um vetor de polarização com helicidade λ é um autoestado da matriz de rotação com autovalor $\exp(i\lambda\theta)$. É fácil perceber que o vetor de polarização longitudinal é invariante sob essa rotação, ou seja, possui helicidade nula. Os vetores de polarização transversal, agora complexos, são reexpressos em termos das helicidades $\lambda = \pm 1$ por

$$\epsilon_{\mu}(\vec{k}; \pm) = \frac{\sqrt{2}}{2} (0, 1, \pm i, 0, 0). \quad (4.9)$$

onde, usualmente, chamamos (0) ou (L) a polarização longitudinal, (+) ou (R) a polarização circular direita e (-) ou (L) a polarização circular esquerda.

Portanto, embora o nome possa sugerir o contrário, o vetor de polarização longitudinal está associado à helicidade $\lambda = 0$, e os vetores de polarização transversal estão associados a helicidades $\lambda = \pm 1$. E os termos direita(R) e esquerda(L) não dizem respeito a quiralidades.

Neste capítulo, para o bóson W em movimento ao longo do eixo z , consideramos os seguintes vetores de polarização

$$\epsilon_{\mu}^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, i, 0) \quad (4.10a)$$

$$\epsilon_{\mu}^{-} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -i, 0) \quad (4.10b)$$

$$\epsilon_{\mu}^L = \frac{1}{m}(p_z, 0, 0, E), \quad (4.10c)$$

em que as polarizações transversais são associadas à helicidade $h = \pm 1$, e a polarização longitudinal possui helicidade $h = 0$. No referencial de repouso, que é possível já que é um bóson massivo, a convenção adotada é

$$\epsilon_{\mu}^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, i, 0) \quad (4.11a)$$

$$\epsilon_{\mu}^{-} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -i, 0) \quad (4.11b)$$

$$\epsilon_{\mu}^L = (0, 0, 0, 1). \quad (4.11c)$$

No caso de um bóson de massa nula, em que $m \rightarrow 0$, a lagrangeana se reduz à de Maxwell do eletromagnetismo

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (4.12)$$

em que o “field strength” é $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$. Agora existe a simetria de gauge, que preserva a lagrangeana pela transformação

$$A_{\mu}(x) \rightarrow A_{\mu}(x) + \partial_{\mu}\alpha(x) \quad (4.13)$$

para função $\alpha(x)$ qualquer. Ao fazer a fixação, ou escolha, de um gauge específico, é possível retirar dois graus de liberdade dos quatro iniciais de $A^{\mu}(x)$, deixando a partícula não massiva de spin 1 com apenas dois graus de liberdade físicos.

A polarização longitudinal, de helicidade $h = 0$, não está presente na descrição de partículas on-shell (reais) sem massa, mas um fóton virtual, por exemplo, apresenta também a polarização longitudinal, pois possui uma massa.

Tanto no caso de bóson massivo quanto no sem massa, a base de vetores de polarização $\epsilon_{\mu}^i(p)$ é dependente do momentum⁶, que confere

⁶ Lembrando que $p^{\mu} = \hbar k^{\mu}$ relaciona p e k .

o caráter de uma representação de dimensão infinita. As representações irredutíveis do grupo de Poincaré são induzidas das representações irredutíveis do “little” grupo, ou grupo de isotropia, que é um subgrupo do grupo de Poincaré que possui representações finitas. O caso massivo possui como grupo de isotropia o grupo de rotações $SO(3)$, mas partículas sem massa possuem o grupo de isotropia dada por $ISO(2)$ ou $E(2)$ chamado grupo Euclideano.

4.2 CASO LIVRE

Partículas livres massivas de spin 1 são descritas pela lagrangeana de Proca. Quando não há massa, no caso do fóton, a lagrangeana é tipo Maxwell. Aqui partimos da lagrangeana (4.1) para o bóson W e obtemos a equação de movimento pelo princípio variacional usual.

Da mesma forma como obtido para o férmion, buscaremos a decomposição de Gordon do bóson vetorial livre. Para isso, partimos da equação de campo que descreve o bóson W , por exemplo, livre de interação e da equação conjugada complexa correspondente.

$$\partial_\mu W^{\mu\nu} + m^2 W^\nu = 0 \quad (4.14a)$$

$$\partial_\mu W^{*\mu\nu} + m^2 W^{*\nu} = 0 \quad (4.14b)$$

No intuito de escrevermos uma equação de conservação para a corrente conservada pela equação de campo, isto é, on-shell, multiplicamos a primeira por $W_{\kappa\nu}^*$, a segunda por $W_{\kappa\nu}$ e manipulamos os índices para obtermos

$$W^{*\kappa\nu} \partial^\mu W_{\mu\nu} + m^2 W^{*\kappa\nu} W^\nu = 0 \quad (4.15a)$$

$$\partial^\mu W_{\mu\nu}^* W^{\kappa\nu} + m^2 W^{\kappa\nu} W_\nu^* = 0. \quad (4.15b)$$

Subtraindo uma pela outra, temos

$$m^2 (W^{*\kappa\nu} W_\nu - W^{\kappa\nu} W_\nu^*) + W^{*\kappa\nu} \partial^\mu W_{\mu\nu} - \partial^\mu W_{\mu\nu}^* W^{\kappa\nu} = 0,$$

que pode se reescrita com derivadas totais como

$$m^2 (W^{*\kappa\nu} W_\nu - W^{\kappa\nu} W_\nu^*) = \partial^\mu (W_{\mu\nu}^* W^{\kappa\nu} - W^{*\kappa\nu} W_{\mu\nu}) + \partial^\mu (W^{*\kappa\nu}) W_{\mu\nu} - W_{\mu\nu}^* \partial^\mu W^{\kappa\nu}. \quad (4.16)$$

Podemos identificar que um dos termos acima é a corrente global. A corrente global é obtida subtraindo as equações 4.14 após multiplicação por W_ν^* e W_ν respectivamente para cancelar o termo de massa. Utilizando a antissimetria do field strength $W^{\mu\nu} = \partial^\mu W^\nu - \partial^\nu W^\mu$, pode-se chegar em

$$\implies \partial_\kappa (W^{*\kappa\nu} W_\nu - W^{\kappa\nu} W_\nu^*) = 0$$

que nos dá a corrente global

$$j^{\kappa} = W^{*\kappa\nu}W_{\nu} - W^{\kappa\nu}W_{\nu}^* \quad (4.17)$$

Acertando as dimensões físicas, temos a versão final da corrente eletromagnética global conservada dada por

$$J^{\kappa} = ieq(W^{*\kappa\nu}W_{\nu} - W^{\kappa\nu}W_{\nu}^*). \quad (4.18)$$

Retornando à expressão 4.16, os termos de derivadas totais podem ser reescritos através da matriz de spin, que, no caso vetorial, é dada por

$$(\Sigma_{\kappa\lambda})_{\nu}^{\mu} = i(\delta_{\kappa}^{\mu}g_{\lambda\nu} - g_{\kappa\nu}\delta_{\lambda}^{\mu}). \quad (4.19)$$

Equivalentemente, vale a seguinte expressão

$$(\Sigma_{\mu}^{\kappa})_{\alpha}^{\gamma} = i(g_{\mu\alpha}g^{\kappa\gamma} - \delta_{\mu}^{\gamma}\delta_{\alpha}^{\kappa}), \quad (4.20)$$

que transforma $\partial^{\mu}(W_{\mu\nu}^*W^{\kappa\nu} - W^{*\kappa\nu}W_{\mu\nu})$ em $\partial^{\mu}(W^{\alpha\beta}(\Sigma_{\mu}^{\kappa})_{\alpha}^{\gamma}W_{\gamma\beta}^*)$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} W^{*\kappa\nu}W_{\nu} - W^{\kappa\nu}W_{\nu}^* &= \frac{1}{m^2}[W_{\mu\nu}\partial^{\mu}(W^{*\kappa\nu}) - W_{\mu\nu}^*\partial^{\mu}(W^{\kappa\nu})] \\ &\quad + \frac{i}{m^2}\partial^{\mu}(W^{\alpha\beta}(\Sigma_{\mu}^{\kappa})_{\alpha}^{\gamma}W_{\gamma\beta}^*). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Portanto, a corrente (real) global escrita no tipo de decomposição de Gordon é finalmente obtida

$$J^{\kappa} = +\frac{ieq}{m^2}[W_{\mu\nu}\partial^{\mu}(W^{*\kappa\nu}) - W_{\mu\nu}^*\partial^{\mu}(W^{\kappa\nu})] - \frac{eq}{m^2}\partial^{\mu}(W^{\alpha\beta}(\Sigma_{\mu}^{\kappa})_{\alpha}^{\gamma}W_{\gamma\beta}^*) \quad (4.22)$$

A condição subsidiária é uma consequência retirada da equação de campo. Para este caso livre, $\partial_{\mu}W^{\mu\nu} + m^2W^{\nu} = 0$, aplicamos uma derivada na equação e utilizamos o argumento de antissimetria de $W^{\mu\nu}$. A condição obtida é

$$\partial^{\mu}W_{\mu} = 0. \quad (4.23)$$

Esta condição restringe o número de soluções independentes de onda plana.

Anteriormente 4.14, caso multipliquemos a primeira equação de campo por W_{ν}^* , a segunda por W_{ν} e, dessa vez, somemos, utilizando a condição subsidiária, obtemos a seguinte expressão relacionada à densidade de partículas no caso livre

$$2m^2(W^{*\nu}W_{\nu}) = -W_{\nu}^*\partial_{\mu}\partial^{\mu}W^{\nu} - W_{\nu}\partial_{\mu}\partial^{\mu}W^{*\nu} \quad (4.24)$$

Como visto, a corrente eletromagnética no caso livre é dada por

$$J^{\kappa} = ieq(W^{*\kappa\nu}W_{\nu} - W^{\kappa\nu}W_{\nu}^*).$$

Podemos desenvolver essa expressão através de uma outra maneira. Para isso, expandimos termos através da regra do produto de derivadas

$$J^{\kappa} = ieq [\partial^{\kappa}(W^{*\nu}W_{\nu}) - (\partial^{\kappa}W_{\nu})W^{*\nu} - \partial^{\nu}(W^{*\kappa}W_{\nu}) + (\partial^{\nu}W_{\nu})W^{*\kappa} - \text{c.c.}], \quad (4.25)$$

onde (c.c) significa o complexo conjugado.

Utilizando a condição subsidiária e as seguintes expressões,

$$\partial_{\beta}(W^{\alpha}(\Sigma^{\kappa\nu})_{\alpha}^{\beta}W_{\nu}^{*}) = +i(\partial^{\nu}(W^{\kappa}W_{\nu}^{*}) - \partial^{\kappa}(W^{\nu}W_{\nu}^{*})) \quad (4.26a)$$

$$\partial_{\beta}(W^{*\alpha}(\Sigma^{\kappa\nu})_{\alpha}^{\beta}W_{\nu}) = +i(\partial^{\nu}(W^{*\kappa}W_{\nu}) - \partial^{\kappa}(W^{*\nu}W_{\nu})). \quad (4.26b)$$

Simplificamos a corrente para a seguinte nova forma

$$J^{\kappa} = ieq [W^{\nu}(\partial^{\kappa}W_{\nu}^{*}) - W^{*\nu}(\partial^{\kappa}W_{\nu})] + eq\partial_{\beta}(W^{\alpha}(\Sigma^{\kappa\nu})_{\alpha}^{\beta}W_{\nu}^{*}) - eq\partial_{\beta}(W^{*\alpha}(\Sigma^{\kappa\nu})_{\alpha}^{\beta}W_{\nu}), \quad (4.27)$$

que podemos chamar também de uma decomposição de Gordon para a corrente eletromagnética do bóson vetorial massivo. A diferença entre a forma 4.66 e a 4.27 é que esta foi obtida pela reescrita da corrente em derivadas totais e aquela partiu diretamente da equação de campo e de subtrações apropriadas. As duas são on-shell, pois são dependentes da equação de campo. No caso com interação, partindo da lagrangeana, faremos o caso off-shell, em que a análise é diretamente através do fóton e não precisa depender das equações de campo da matéria bosônica.

Se fizermos uma transformada de Fourier dos campos na expressão acima 4.27, observamos que o primeiro termo, análogo da corrente escalar, é da ordem da soma dos momentums ($P + P'$) e que os termos derivativos, que envolvem spin, são da ordem do chamado momentum "transfer" ($P' - P$), uma espécie de momentum relacionado ao fóton emitido ou absorvido pelo bóson vetorial.

4.3 CASO INTERAGENTE

Agora, fazemos o acomplamento mínimo da interação eletromagnética. A prescrição é utilizar a derivada covariante fazendo a seguinte substituição:

$$D^{\mu} = \partial^{\mu} \mapsto \partial^{\mu} + ieqA^{\mu}.$$

É necessário lembrar que a carga depende do campo o qual recebe a atuação. Por exemplo:

$$D^{\mu}W^{\kappa\nu} = \partial^{\mu}W^{\kappa\nu} \mapsto \partial^{\mu}W^{\kappa\nu} + ieqA^{\mu}W^{\kappa\nu}; \quad (4.28a)$$

$$D^{\mu}W^{*\kappa\nu} = \partial^{\mu}W^{*\kappa\nu} \mapsto \partial^{\mu}W^{*\kappa\nu} - ieqA^{\mu}W^{*\kappa\nu}. \quad (4.28b)$$

A equação de campo com os fatores dimensionais corretos se torna

$$D_{\mu}W^{\mu\nu} + \lambda^{-2}W^{\nu} = 0 \quad (4.29)$$

onde

$$\lambda = \frac{\hbar}{mc}$$

Em forma expandida, temos que a equação de campo e a conjugada complexa são

$$\partial_\mu W^{\mu\nu} + \frac{ieq}{\hbar} A_\mu W^{\mu\nu} + \lambda^{-2} W^\nu = 0 \quad (4.30a)$$

$$\partial_\mu W^{*\mu\nu} - \frac{ieq}{\hbar} A_\mu W^{*\mu\nu} + \lambda^{-2} W^{*\nu} = 0. \quad (4.30b)$$

Analogamente ao caso anterior, multiplicamos a primeira por $W_{\kappa\nu}^*$ e a segunda por $W_{\kappa\nu}$. Subtraindo as equações e retornando para unidades naturais, obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &= m^2(W^{*\kappa\nu}W_\nu - W^{\kappa\nu}W_\nu^*) + W^{*\kappa\nu}(\partial^\mu W_{\mu\nu}) - (\partial^\mu W_{\mu\nu}^*)W^{\kappa\nu} \\ &+ \frac{ieq}{\hbar} A^\mu(W^{*\kappa\nu}W_{\mu\nu} + W^{*\mu\nu}W^{\kappa\nu}). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Novamente, reescrevemos a expressão utilizando as derivadas totais

$$\begin{aligned} 0 &= m^2(W^{*\kappa\nu}W_\nu - W^{\kappa\nu}W_\nu^*) + \partial^\mu(W^{*\kappa\nu}W_{\mu\nu}) - (\partial^\mu W_{\mu\nu}^*)W^{\kappa\nu} \\ &- \partial^\mu(W_{\mu\nu}^*W^{\kappa\nu}) + W_{\mu\nu}^*(\partial^\mu W^{\kappa\nu}) + \frac{2ieq}{\hbar} A^\mu \text{Re}[W^{*\kappa\nu}W_{\mu\nu}] \end{aligned} \quad (4.32)$$

Então, obtemos o seguinte

$$\begin{aligned} m^2(W^{*\kappa\nu}W_\nu - W^{\kappa\nu}W_\nu^*) &= \partial^\mu(W_{\mu\nu}^*W^{\kappa\nu} - W^{*\kappa\nu}W_{\mu\nu}) \\ &+ \partial^\mu(W^{*\kappa\nu})W_{\mu\nu} - W_{\mu\nu}^*\partial^\mu W^{\kappa\nu} - \frac{2ieq}{\hbar} A^\mu \text{Re}[W^{*\kappa\nu}W_{\mu\nu}]. \end{aligned}$$

Valendo-se, novamente, da expressão para o tensor de spin dada por

$$(\Sigma_{\mu\kappa})_\alpha^\gamma = i(g_{\mu\alpha}\delta_\kappa^\gamma - \delta_\mu^\gamma g_{\kappa\alpha}), \quad (4.33)$$

Reescrevemos nossa equação da seguinte maneira

$$\begin{aligned} m^2(W^{*\kappa\nu}W_\nu - W^{\kappa\nu}W_\nu^*) &= W_{\mu\nu}\partial^\mu(W^{*\kappa\nu}) - W_{\mu\nu}^*\partial^\mu W^{\kappa\nu} \\ &+ i\partial^\mu(W^{\alpha\beta}(\Sigma_{\mu\kappa})_\alpha^\gamma W_{\gamma\beta}^*) - \frac{2ieq}{\hbar} A^\mu \text{Re}[W^{*\kappa\nu}W_{\mu\nu}] \end{aligned} \quad (4.34)$$

Ou ainda, em forma mais compacta

$$\begin{aligned} m^2(W^{*\kappa\nu}W_\nu - W^{\kappa\nu}W_\nu^*) &= W_{\mu\nu}D^\mu(W^{*\kappa\nu}) \\ &- W_{\mu\nu}^*D^\mu W^{\kappa\nu} + i\partial^\mu(W^{\alpha\beta}(\Sigma_{\mu\kappa})_\alpha^\gamma W_{\gamma\beta}^*) \end{aligned} \quad (4.35)$$

Em unidades naturais, a equação de campo com acoplamento mínimo é simplesmente

$$D_\mu W^{\mu\nu} + m^2 W^\nu = 0 \quad (4.36)$$

A condição subsidiária pode ser retirada para esse caso interagente, porém agora ela fica dada por

$$D_\mu W^\mu = \frac{ieq}{2m^2} F_{\mu\nu} W^{\mu\nu}, \quad (4.37)$$

em que se utilizou a seguinte relação de comutação, que expressa o field strength como produto da falta de comutatividade das derivadas covariantes

$$[D_\mu, D_\nu] = ieq F_{\mu\nu}. \quad (4.38)$$

Assim, obtemos a equação para o campo de Proca, correspondente ao bóson vetorial massivo, a partir da lagrangeana acoplada minimamente com interação eletromagnética. Porém, se desejarmos que essa equação realmente descreva uma partícula fundamental como o bóson W , precisamos verificar o momento magnético através do fator giromagnético, pois o valor experimental nos beneficia com esse conhecimento adicional.

4.4 FATOR GIROMAGNÉTICO

Até aqui, a equação de campo que temos para descrever o bóson vetorial é inapropriada por um importante motivo. O fator giromagnético obtido, ao submeter a partícula em um campo eletromagnético externo, é diferente do valor esperado, $g = 2$, para partículas elementares. Sendo assim, não podemos prosseguir com esse erro. Porém, aqui indicamos como podemos observar esse erro. Para isso, vamos calcular o fator giromagnético do bóson vetorial W .

Partindo da equação de campo e da condição subsidiária,

$$D_\mu W^{\mu\nu} + m^2 W^\nu = 0$$

$$D_\mu W^\mu = \frac{ieq}{2m^2} F_{\mu\nu} W^{\mu\nu}.$$

Ou ainda,

$$\partial_\mu W^\mu + ieA_\mu W^\mu = \frac{ie}{m^2} F_{\mu\nu} D^\mu W^\nu,$$

onde omitimos q , que, para o bóson W , vale $(+1)$ ou (-1) dependendo se é o bóson W^+ ou o W^- . Nesse caso, podemos também absorver esse sinal na carga elementar (e) sem problemas.

A fim de calcular o fator giromagnético, consideramos que o campo eletromagnético acoplado é externo. Sendo assim, tomamos campo magnético constante e uniforme

$$F_{0i} = \vec{E}_i = 0 \quad (4.39a)$$

$$F_{ij} = -\epsilon_{ijk} \vec{B}_k \quad (4.39b)$$

$$\partial_\mu F_{\nu\kappa} = 0. \quad (4.39c)$$

Tomando o gauge temporal com a seguinte escolha

$$A^0 = 0 \quad (4.40a)$$

$$\vec{A}_i = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\vec{x}_j\vec{B}_k, \quad (4.40b)$$

reescrevemos a condição subsidiária como

$$\partial_0 W^0 + \partial_i W^i + ieA_i W^i = \frac{ie}{m^2} F_{ij} D^i W^j, \quad (4.41)$$

ou ainda

$$\partial_t W^0 + \nabla \cdot \vec{W} - ie\vec{A} \cdot \vec{W} = \frac{ie}{m^2} \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{W}) + \frac{e^2}{m^2} \vec{B} \cdot (\vec{A} \times \vec{W}). \quad (4.42)$$

Os dois termos do lado direito da equação acima são da ordem de $(\frac{eA}{m} \frac{p}{m})$ e $(\frac{eA}{m})^2$ respectivamente. Consideramos que o campo externo aplicado produz uma energia bem menor do que a energia da massa da partícula. Sendo assim, esses termos podem ser desprezados frente a termos de primeira ordem em $(\frac{p}{m})$ e $(\frac{eA}{m})$. Portanto, pelo princípio da correspondência, $(\partial_t = -iE)$ e $(\nabla = i\vec{p})$, e desprezando esses termos,

$$W^0 = \frac{\vec{p}}{E} \cdot \vec{W} - \frac{e}{E} \vec{A} \cdot \vec{W}. \quad (4.43)$$

Estamos considerando o limite não relativístico, onde

$$\left(\frac{|\vec{p}|}{E}\right) = |\vec{v}| \ll 1. \quad (4.44)$$

Assim, substituímos o seguinte $E \approx m$,

$$W^0 \approx \frac{\vec{p}}{m} \cdot \vec{W} - \frac{e}{m} \vec{A} \cdot \vec{W}, \quad (4.45)$$

que mostra a aproximação ($W^0 \rightarrow 0$) no limite não relativístico.

Partindo da equação de campo, (4.36), temos

$$\begin{aligned} 0 = & (\square + m^2)W^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu W^\mu) + ie(\partial_\mu A^\mu)W^\nu + 2ieA_\mu(\partial^\mu W^\nu) \\ & - ie(\partial^\mu A^\nu)W_\mu - ieA_\mu(\partial^\nu W^\mu) - e^2 A_\mu A^\mu W^\nu \\ & - ieA^\nu \underbrace{(\partial_\mu W^\mu + ieA_\mu W^\mu)}_{D_\mu W^\mu}. \end{aligned}$$

Utilizando a condição subsidiária e o gauge de Lorenz⁷ ($\partial_\mu A^\mu$), simplificamos para a seguinte equação

$$\begin{aligned} 0 = & (\square + m^2)W^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu W^\mu) + 2ieA_\mu(\partial^\mu W^\nu) - ie(\partial^\mu A^\nu)W_\mu \\ & + \frac{e^2}{m^2} A^\nu F_{\mu\kappa} \partial^\mu W^\kappa + \frac{e^2}{m^2} A^\nu F_{\mu\kappa} A^\mu W^\kappa - ieA_\mu(\partial^\nu W^\mu) - e^2 A_\mu A^\mu W^\nu. \end{aligned} \quad (4.46)$$

⁷ Ludvig Valentin Lorenz (1829 – 1891) não deve ser confundido com o alemão Hendrik Antoon Lorentz (1853 – 1928).

Novamente, fazemos o limite não relativístico, $v \ll c$, em que a parte vetorial \vec{W} , puro spin um, domina a parte temporal W^0 . Tomando a componente $\nu = i$ na equação (4.46)

$$0 = (\square + m^2)\vec{W}_i + \partial_t \partial_i W^0 + \partial_i \partial_j \vec{W}_j + 2ie\vec{A}_j \partial_j \vec{W}_i - ie\vec{W}_j \partial_j \vec{A}_i - \frac{e^2}{m^2} F_{jk} (\partial_j \vec{W}_k) \vec{A}_i + \frac{e^2}{m^2} \vec{A}_i F_{jk} \vec{A}_j \vec{W}_k - ie\vec{A}_j \partial_i \vec{W}_j + e^2 \vec{A}^2 \vec{W}_i. \quad (4.47)$$

Agora, partindo dessa última expressão, reescrevemos W^0 em função de \vec{W} utilizando a (4.45). Além disso, fazemos a seguinte aproximação não relativística no operador $(\square + m^2)$

$$(\square + m^2) = -E^2 + \vec{p}^2 + m^2 = \underbrace{-(E + m)(E - m) + \vec{p}^2}_{-2mE_{nr} + \vec{p}^2}.$$

Com $E_{nr} \equiv (E - m)$ e $(E + m) \approx 2m$.

Sendo assim, fazendo as substituições e utilizando novamente as seguintes correspondências: $(\partial_t = -iE)$ e $(\nabla = i\vec{p})$. Obtemos

$$\begin{aligned} (\vec{p}^2 - 2mE_{nr})\vec{W}_i + E\vec{p}_i \left(\frac{\vec{p}}{m} \cdot \vec{W} - \frac{e}{m} \vec{A} \cdot \vec{W} \right) - \vec{p}_i \vec{p}_j \vec{W}_j \\ - 2e\vec{A}_j \vec{p}_j \vec{W}_i - \frac{ie}{2} \epsilon_{jik} \vec{W}_j \vec{B}_k + \frac{e^2}{m^2} \epsilon_{jkl} \vec{B}_l (\partial_j \vec{W}_k) \vec{A}_i \\ - \frac{e^2}{m^2} \epsilon_{jkl} \vec{B}_l \vec{A}_i \vec{A}_j \vec{W}_k - ie\vec{A}_j \partial_i \vec{W}_j + e^2 \vec{A}^2 \vec{W}_i = 0 \end{aligned} \quad (4.48)$$

que pode ser reescrito, ao tomar $(E \approx m)$, na seguinte equação

$$\begin{aligned} E_{nr} \vec{W}_i = \frac{1}{2m} \vec{p}^2 \vec{W}_i - \frac{e}{2m} \vec{p}_i (\vec{A} \cdot \vec{W}) - \frac{e}{m} \vec{A}_j \vec{p}_j \vec{W}_i \\ + \frac{e^2}{2m^3} \epsilon_{jkl} \vec{B}_l (i\vec{p}_j \vec{W}_k) \vec{A}_i - \frac{e^2}{2m^3} \epsilon_{jkl} \vec{B}_l \vec{A}_i \vec{A}_j \vec{W}_k \\ - \frac{i}{2} \frac{e}{m} \epsilon_{jik} \vec{B}_k \vec{W}_j - \frac{ie}{2m} \vec{A}_j (i\vec{p}_i) \vec{W}_j + \frac{e^2}{2m} \vec{A}^2 \vec{W}_i. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Desprezamos os termos quadráticos em campos eletromagnéticos frente a ordem de grandeza da massa envolvida. No caso do bóson W , da ordem de GeV.

As seguintes observações são utilizadas, então, para a simplificação da expressão acima

1. O potencial escolhido satisfaz o gauge de Coulomb $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, além do gauge temporal. Então, $(p_j A_j = 0)$
2. Dois termos, $\vec{p}_i (\vec{A}_j W_j)$ e $\vec{A}_j \vec{p}_j \vec{W}_i$, de (4.49) se juntam, através da regra do produto, no termo

$$-\frac{e}{2m} (\vec{p}_i \vec{A}_j) \vec{W}_j = -\frac{ie}{4m} \epsilon_{ijk} \vec{B}_k \vec{W}_j$$

Após as simplificações, tem-se

$$E_{nr}\vec{W}_i = \frac{1}{2m}(\vec{p} - e\vec{A})^2\vec{W}_i + \frac{ie}{2m}\vec{B}_k\epsilon_{kij}\vec{W}_j \quad (4.50)$$

Os geradores do grupo SU(2) na representação adjunta ⁸ ($s = 1$; $(2s + 1 = 3)$) são também os geradores 3-dimensional de SO(3). Os elementos de matriz dos geradores nessa representação são dados então, equivalentemente, por

$$(S_k)_{ij} = -i\epsilon_{kij} \quad (4.51a)$$

$$(\Sigma_{ij})_{kl} = (-i)(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}). \quad (4.51b)$$

Assim, o chamado termo de Pauli, para \vec{W} , é reescrito

$$+ \frac{ie}{2m}\vec{B}_k\epsilon_{kij}\vec{W}_j = -\frac{e}{2m}\vec{B} \cdot \vec{S}_{ij}\vec{W}_j.$$

Finalmente, a equação de campo puramente espacial para o spin um com termo de Pauli fica no formato semelhante à equação de Schrödinger de uma partícula na presença de campo externo.

$$E_{nr}\vec{W}_i = \frac{1}{2m}(\vec{p} - e\vec{A})^2\vec{W}_i - \frac{e}{2m}\vec{B}\vec{S}_{ij}\vec{W}_j. \quad (4.52)$$

O que se acopla ao campo magnético é o momento magnético, que pode ser retirado da contribuição de energia potencial, $(-\vec{\mu} \cdot \vec{B})$, como

$$\vec{\mu} = \frac{e}{2m}\vec{S} \quad (4.53)$$

Finalmente, o fator giromagnético do bóson vetorial é dado simplesmente por

$$g = 1. \quad (4.54)$$

Como dito anteriormente, esse valor não está de acordo com o valor experimental e, por isso, já foi declarado como errado. A teoria conseguiu fazer uma correção nesse valor ao custo de adicionar um termo de acoplamento não mínimo na equação de campo. À nível de lagrangeana, porém, é possível ver que o termo surge naturalmente da teoria eletrofraca, que une o formalismo da interação eletromagnética com o da interação fraca. As contribuições para a eletrodinâmica vetorial foi motivo para o prêmio Nobel de 1979, em que os laureados foram Abdus Salam, Steven Weinberg e Sheldon Glashow.

⁸ A representação fundamental de SU(2) é $s = 1/2$. No caso de SO(3), a representação fundamental é também a adjunta. A única outra representação 3-dimensionais de SO(3) é a trivial.

4.5 LAGRANGEANA

Sabendo que o fator giromagnético do bóson vetorial W , partícula elementar, deve ser igual a dois e não a um, partimos da lagrangeana que já dá o acoplamento não-mínimo, do ponto de vista eletromagnético, através do termo que corrige o fator giromagnético. Posteriormente, iremos mostrar a obtenção dessa lagrangeana pela teoria eletrofraca e calcular o fator giromagnético para constatar que, de fato, é alterado.

A seguinte lagrangeana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}W_{\mu\nu}^*W^{\mu\nu} + m^2W^*W + ieqF_{\mu\nu}W^{*\mu}W^\nu \quad (4.55)$$

Sabemos que o field strength é escrito como

$$W_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu + ieqA_\mu W_\nu - ieqA_\nu W_\mu. \quad (4.56)$$

A equação de campo é dada pela variação da lagrangiana em relação ao campo δW^*

$$D_\mu W^{\mu\nu} + m^2W^\nu + ieqW_\mu F^{\nu\mu} = 0 \quad (4.57)$$

A condição subsidiária é obtida aplicando uma derivada covariante à equação acima, utilizando a antissimetria e o comutador dado por $[D_\mu, D_\nu] = ieqF_{\mu\nu}$

$$D_\nu W^\nu = -\frac{ieq}{m^2}W_\mu \partial_\nu F^{\nu\mu} \quad (4.58)$$

Além da equação de campo, podemos buscar a corrente eletromagnética associada à equação de Maxwell. Trata-se de utilizar o segundo teorema de Noether, para simetrias locais. Dessa forma, não precisamos passar pelas equações de campo para obtermos a corrente conservada. Isso nos dará uma corrente conservada off-shell. Assim, fazendo a variação δA em relação ao fóton, obteremos a equação de Maxwell correspondente.

$$\delta W_{\mu\nu} = ieq(\delta A_\mu)W_\nu - ieq(\delta A_\nu)W_\mu \quad (4.59)$$

Então, a variação é obtida

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_{\delta A} = & -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}(\delta F^{\mu\nu}) - \frac{1}{2}(\delta W_{\mu\nu}^*)W^{\mu\nu} \\ & - \frac{1}{2}W_{\mu\nu}^*(\delta W^{\mu\nu}) + ieq(\delta F_{\mu\nu})W^{*\mu}W^\nu \end{aligned} \quad (4.60)$$

Portanto, pela utilização da integração por partes, valendo-se de que a lagrangeana está submetida a uma integração na expressão da ação, e tomando as derivadas totais como termos de superfície, que vão a zero no infinito já que o próprio campo vai também a zero,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu = +ieq\partial_\mu(W^{*\mu}W^\nu - W^{*\nu}W^\mu) + ieq(W_\mu^*W^{\mu\nu} - W^{*\mu\nu}W_\mu), \quad (4.61)$$

que pode ser colocada na seguinte forma

$$J^\mu = +ieq[W^{*\mu\nu}W_\nu - W^{\mu\nu}W_\nu^*] - ieq\partial_\nu(W^{*\mu}W^\nu - W^{*\nu}W^\mu). \quad (4.62)$$

Partindo da expressão acima, a decomposição de Gordon pode ser calculada analogamente ao caso anterior, utilizando o tensor de spin na representação vetorial. No primeiro termo, reescreve-se as derivadas utilizando a regra do produto.

$$\begin{aligned} ieq(D^\mu(W^{*\nu} - D^\nu W^{*\mu})W_\nu - c.c) = +ieqD^\mu(W^{*\nu}W_\nu) + \\ -ieqW^{*\nu}D^\mu W_\nu - ieqD^\nu(W^{*\mu}W_\nu) + ieqW^{*\mu}D^\nu W_\nu - c.c, \end{aligned} \quad (4.63)$$

onde "c.c" significa complexo conjugado da expressão imediatamente adjacente. Após simplificação e utilização da condição subsidiária, o primeiro termo fica reexpresso⁹ por

$$\begin{aligned} +ieq(W^\nu \overleftrightarrow{D}^\mu W_\nu^*) + eq[D_\beta(W^\alpha(\Sigma^{\mu\nu})_\alpha^\beta W_\nu^*) - D_\beta(W^{*\alpha}(\Sigma^{\mu\nu})_\alpha^\beta W_\nu)] \\ + \frac{e^2 q^2}{m^2} W^{*\mu} W_\kappa (\partial_\nu F^{\nu\kappa}) + \frac{e^2 q^2}{m^2} W^\mu W_\kappa^* (\partial_\nu F^{\nu\kappa}). \end{aligned} \quad (4.64)$$

O segundo fica reexpresso por

$$-eq[\partial_\beta(W^{*\alpha}(\Sigma^{\mu\nu})_\alpha^\beta W_\nu - \partial_\beta(W^\alpha(\Sigma^{\mu\nu})_\alpha^\beta W_\nu^*)]. \quad (4.65)$$

Finalmente, a decomposição de Gordon para a corrente do bóson vetorial

$$\begin{aligned} J^\mu = +ieq(W^\nu \overleftrightarrow{D}^\mu W_\nu^*) + 2eq\partial_\beta(W^\alpha(\Sigma^{\mu\nu})_\alpha^\beta W_\nu^*) \\ - 2eq\partial_\beta(W^{*\alpha}(\Sigma^{\mu\nu})_\alpha^\beta W_\nu) + \frac{e^2 q^2}{m^2} W^{*\mu} W_\kappa (\partial_\nu F^{\nu\kappa}) \\ + \frac{e^2 q^2}{m^2} W^\mu W_\kappa^* (\partial_\nu F^{\nu\kappa}). \end{aligned} \quad (4.66)$$

Essa decomposição partiu da análise do fóton, isto é, pelo segundo teorema de Noether, porém utilizamos a condição subsidiária para obter essa expressão final. Como a condição subsidiária depende das equações de campo, a corrente eletromagnética realmente off-shell é a dada pela expressão 4.62, que depende explicitamente do potencial eletromagnético em notória diferença com o caso fermiônico.

4.6 FATOR GIROMAGNÉTICO CORRIGIDO

Devido ao acoplamento eletromagnético não mínimo entre bóson W e fóton, o fator giromagnético desse bóson vetorial é corrigido para ($g = 2$). Aqui mostraremos que, de fato, essa correção é obtida partindo da lagrangeana (4.55) que dá a equação de campo para o bóson W (4.57). Considerando ($q = +1$), por exemplo, temos

$$D_\mu W^{\mu\nu} + m^2 W^\nu + ieW_\mu F^{\nu\mu} = 0$$

⁹ A notação de fecha dupla significa um termo convectivo dado pela seguinte prescrição: $W^\nu \overleftrightarrow{D}^\mu W_\nu^* \equiv (W^\nu D^\mu W_\nu^* - W^{*\nu} D^\mu W_\nu)$.

Fazemos o processo análogo ao feito para o caso do elétron. Sendo assim, retiramos a equação subsidiária, que podemos obter de (4.58), tomando $\partial_\nu F^{\nu\mu}$. O motivo é que agora consideramos o $F^{\nu\mu}$ como um campo de background, externo, constante. Ou seja, desconsideramos o campo gerado pela própria partícula; a “back reaction”. Assim, a única contribuição para $F^{\nu\mu}$ é externa e constante. Isso nos dá a seguinte equação subsidiária

$$D_\mu W^\mu = 0. \quad (4.67)$$

Fazendo as mesmas considerações anteriormente feitas, obtemos novamente a equação (4.45)

$$W^0 \approx \frac{\vec{p}}{m} \cdot \vec{W} - \frac{e}{m} \vec{A} \cdot \vec{W}.$$

Quanto à equação de campo, obtemos a mesma equação (4.46) acrescida do termo de acoplamento não mínimo

$$\begin{aligned} 0 = & (\square + m^2)W^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu W^\mu) + 2ieA_\mu(\partial^\mu W^\nu) - ie(\partial^\mu A^\nu)W_\mu \\ & + \frac{e^2}{m^2}A^\nu F_{\mu\kappa}\partial^\mu W^\kappa + \frac{e^2}{m^2}A^\nu F_{\mu\kappa}A^\mu W^\kappa \\ & - ieA_\mu(\partial^\nu W^\mu) - e^2A_\mu A^\mu W^\nu + ieF^{\nu\mu}W_\mu. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Olhando a componente $\nu = i$, tem-se toda a expressão do caso anterior mais a correção ($-ie\epsilon_{ijk}\vec{B}_j\vec{W}_k$). Depois de toda a repetida simplificação do caso anterior, a equação correspondente à (4.50) é

$$E_{nr}\vec{W}_i = \frac{1}{2m}(\vec{p} - e\vec{A})^2\vec{W}_i + \frac{ie}{2m}\vec{B}_k\epsilon_{kij}\vec{W}_j + \frac{ie}{2m}\vec{B}_j\epsilon_{jik}\vec{W}_k. \quad (4.69)$$

Onde os dois últimos termos se somam para formar a seguinte contribuição

$$-\frac{e}{m}\vec{B} \cdot \vec{\mu}_{ij}\vec{W}_j.$$

A forma final da equação tipo Pauli para o spin 1 massivo, carregado e acoplado ao fóton é então a seguinte

$$E_{nr}\vec{W}_i = \frac{1}{2m}(\vec{p} - e\vec{A})^2\vec{W}_i - \left(\frac{e}{m}\vec{S}_{ij}\right) \cdot \vec{B}\vec{W}_j \quad (4.70)$$

Assim, fica indicado que o fator giromagnético é corrigido para

$$g = 2.$$

O bóson vetorial massivo eletricamente carregado, exemplificado pelo bóson W , apresenta, a “tree-level”, o valor esperado como partícula elementar.

4.7 ACOPLAMENTO NÃO MÍNIMO DA TEORIA ELETROFRACA

Para justificar o termo de acoplamento não mínimo, $ieqF_{\mu\nu}W^{*\mu}W^\nu$, utilizado na lagrangeana de bóson vetorial massivo e carregado, introduzimos a teoria de Yang-Mills, que descreve a interação eletrofraca no Modelo Padrão. Dentro desta descrição, o que é acoplamento não mínimo no ponto de vista puramente eletromagnético surge como um autêntico acoplamento mínimo para o cenário não abeliano da teoria de interação eletrofraca, uma teoria de gauge.

Teoria de gauge é descrita por uma ação invariante sob um grupo contínuo de simetria que depende do espaço-tempo. A simetria dependente do espaço-tempo se chama simetria local. Nesse caso, o grupo de simetria passa a ser chamado de grupo de gauge. Uma partícula de gauge é introduzida para garantir que a teoria seja invariante sob a transformação de simetria local. Pela invariância de Lorentz, essa partícula deve ter spin um, portanto chamada de bóson de gauge. O número de geradores da simetria local define o número de bósons de gauge associados. As teoria de gauge são renormalizáveis. Inicialmente, os bósons de gauge não possuem massa, então a interação que descrevem possui longo alcance. Entretanto, a simetria de gauge pode sofrer uma quebra espontânea de simetria (ou Simetria Oculta) devido ao valor esperado no vácuo do escalar de Higgs. Isso ocorre quando o estado de mínima energia não respeita a simetria, embora a lagrangiana seja invariante sob essa simetria. Nesse caso, os bósons vetoriais adquirem massa. Dentro do chamado Modelo Padrão, as interações fraca, forte e eletromagnética são descritas por teorias de gauge renormalizáveis espontaneamente quebradas.

Aqui vamos nos direcionar para a teoria eletrofraca, uma descrição que une a interação fraca com a eletromagnética.

A partir de duas simetrias, SU(2) e U(1), representando as duas cargas respectivamente correspondentes isospin fraco (I_3) e hipercarga fraca (Y), é possível obter a simetria U(1) do eletromagnetismo, fruto da chamada quebra espontânea de simetria. A relação entre essas cargas surgiu de uma expressão fenomenológica proposta por Nishijima e Nakano em 1953 [102] e, mais tarde, por Gell-Mann em 1956 [103]. Aqui estamos considerando os léptons e não estamos considerando os quarks, que fazem parte de uma outra simetria independente SU(3) que representa a interação forte; com os 8 geradores correspondentes aos glúons.

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}Y \quad (4.71)$$

Assim, temos o seguinte:

$$SU(2) \times U(1) \longrightarrow U(1)_{EM} \quad (4.72)$$

O grupo SU(2) tem 3 campos de gauge valorados na álgebra de Lie dados por: $W_\mu^{(+)}$, $W_\mu^{(-)}$ e $X_\mu^{(0)}$. O grupo U(1) tem um único campo

de gauge Y_μ . O produto do campo de gauge pelo gerador associado, $\Phi_{\mu\alpha} G_\alpha = \Phi_\mu$, é chamado campo valorado em uma álgebra de Lie. E essa combinação é o que aparece na prescrição da derivada covariante, que faz o acoplamento mínimo da matéria com o setor de gauge na lagrangeana da matéria

$$D_\mu = \partial_\mu + ig\Phi_{\mu\alpha} G_\alpha, \quad (4.73)$$

onde G_α é um gerador da simetria, $\Phi_{\mu\alpha}$ o campo de gauge associado e g a constante de acoplamento. Quando o grupo é formado por geradores que comutam entre si, chama-se abeliano. O exemplo físico mais simples é a QED, que possui simetria $U(1)$ com único gerador “ Q ” que dá a carga elétrica e constante de acoplamento $|g| = e$.

Sendo assim,

$$A_\mu = A_{\mu\alpha} \sigma_\alpha = \begin{pmatrix} A_\mu^{(3)} & A_\mu^{(1)} - iA_\mu^{(2)} \\ A_\mu^{(1)} + iA_\mu^{(2)} & -A_\mu^{(3)} \end{pmatrix} \quad (4.74)$$

Onde redefinimos

$$W_\mu^{(+)} \equiv \frac{A_\mu^{(1)} - iA_\mu^{(2)}}{\sqrt{2}}$$

$$W_\mu^{(-)} \equiv \frac{A_\mu^{(1)} + iA_\mu^{(2)}}{\sqrt{2}}$$

$$X_\mu^{(0)} = A_\mu^{(3)}$$

Com $W^{(+)}$, $W^{(-)}$ e $X^{(0)}$ carregados positivamente, negativamente e neutro, respectivamente. O fator $\sqrt{2}$ é apenas por notação. Neste ponto, não podemos identificar o $X_\mu^{(0)} = A_\mu^{(3)}$ com o fóton, pois o fóton deve vir com o gerador de uma interação abeliana; além de estar associado com uma outra constante de acoplamento.

A lagrangiana eletrofra completa é composta das lagrangianas de: puro setor gauge, Higgs, matéria leptônica e Yukawa.

$$\mathcal{L}_{SU(2) \times U(1)} = \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_\Phi + \mathcal{L}_l + \mathcal{L}_Y \quad (4.75)$$

A lagrangiana de Yukawa, por exemplo, é que gera as massas dos férmions após o Higgs adquirir valor esperado não nulo no vácuo. A lagrangeana de puro gauge descreve as interações dos bósons de gauge.

Para justificar o surgimento do termo não mínimo que acopla o fóton com os bóson vetorias W , basta analisarmos a lagrangiana do setor puramente de gauge.

$$\mathcal{L}_g = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu\alpha} F_\alpha^{\mu\nu} - \frac{1}{4} Y_{\mu\nu} Y^{\mu\nu}. \quad (4.76)$$

Com o seguinte

$$F_{\mu\nu\alpha} = \partial_\mu A_{\nu\alpha} - \partial_\nu A_{\mu\alpha} - g\epsilon_{abc} A_{\mu ab} A_{\nu c} \quad (4.77a)$$

$$Y_{\mu\nu} = \partial_\mu Y_\nu - \partial_\nu Y_\mu \quad (4.77b)$$

Já que adotamos a convenção $F_{\mu\nu\alpha} = \partial_\mu A_{\nu\alpha} - \partial_\nu A_{\mu\alpha} + ig [A_\mu, A_\nu]$. No caso abeliano, as constantes de estrutura f são nulas. No caso não abeliano quando os geradores estão na representação fundamental, as constantes de estruturas são os epsilons, o símbolo totalmente antissimétrico ϵ . Além disso, atentamos que esse $F_{\mu\nu\alpha}$ não é o field strength do fóton. Para evitar confusão, algumas notações o chamam de $W_{\mu\nu\alpha}$.

Após substituição adequada, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_g = & -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_{\nu 1} - \partial_\nu A_{\mu 1})^2 - \frac{1}{4}(\partial_\mu A_{\nu 2} - \partial_\nu A_{\mu 2})^2 \\ & - \frac{1}{4}(\partial_\mu A_{\nu 3} - \partial_\nu A_{\mu 3})^2 + g(\partial_\mu A_{\nu 1} - \partial_\nu A_{\mu 1})A_2^\mu A_3^\nu \\ & - g(\partial_\mu A_{\nu 2} - \partial_\nu A_{\mu 2})A_1^\mu A_3^\nu + g(\partial_\mu A_{\nu 3} - \partial_\nu A_{\mu 3})A_1^\mu A_2^\nu \quad (4.78) \\ & - \frac{g^2}{4} (A_{\mu\alpha} A_\alpha^\mu A_{\nu\beta} A_\beta^\nu - A_{\mu\beta} A_{\nu\beta} A_\beta^\mu A_\alpha^\nu) \\ & - \frac{1}{4}(\partial_\mu Y_\nu - \partial_\nu Y_\mu)^2. \end{aligned}$$

E agora fazemos as seguintes substituições

$$\begin{aligned} A_{\mu 1} &= \frac{W_\mu^{(+)} + W_\mu^{(-)}}{\sqrt{2}} \\ A_{\mu 2} &= i \frac{W_\mu^{(+)} - W_\mu^{(-)}}{\sqrt{2}} \\ A_3^\mu &= \cos \theta A^\mu - \sin \theta Z^\mu \\ Y^\mu &= \sin \theta A^\mu + \cos \theta Z^\mu \end{aligned}$$

Onde A^μ e Z^μ surgem da matriz de massa diagonalizada na lagrangiana de Higgs após a quebra espontânea de simetria. O A^μ é associado com autovalor nulo e o Z^μ com autovalor não nulo; o que garante que o fóton não tenha massa e o bóson Z tenha massa. Também definimos $F_{\mu\nu} = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$ como sendo o field strength do fóton. Aqui já é fácil ver que o sétimo termo acima é que dá origem ao termo de acoplamento não mínimo que estamos nos referindo.

Por fim, teremos o seguinte após as simplificações

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_g = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{4}Z_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2}W_{\mu\nu}W^{*\mu\nu} + ig \cos \theta A^\nu (W_{\mu\nu}^* W^\mu - W_{\mu\nu} W^{*\mu}) \\ & - ig \cos \theta F_{\mu\nu} W^\mu W^{*\nu} - g^2 \cos^2 \theta W_\nu W^{*\nu} A^2 \\ & + \frac{g^2}{2} \cos^2 \theta W_\mu W^{*\nu} A_\nu A^\mu + \frac{g^2}{2} \cos^2 \theta W_\mu^* W^\nu A_\nu A^\mu \\ & + ig \sin \theta Z^\nu (W_{\mu\nu} W^{*\mu} - W_{\mu\nu}^* W^\mu) + ig \sin \theta Z_{\mu\nu} W^\mu W^{*\nu} \\ & - g^2 \sin^2 \theta W_\nu W^{*\nu} Z^2 + \frac{g^2}{2} \sin^2 \theta W_\mu W^{*\nu} Z_\nu Z^\mu \\ & + \frac{g^2}{2} \sin^2 \theta W_\mu^* W^\nu Z_\nu Z^\mu + 2g^2 \sin \theta \cos \theta W_\nu W^{*\nu} A_\mu Z^\mu \\ & - g^2 \sin \theta \cos \theta W_\mu W^{*\nu} A^\mu Z_\nu - g^2 \sin \theta \cos \theta W_\mu W^{*\nu} Z^\mu A_\nu, \quad (4.79) \end{aligned}$$

onde $F_{\mu\nu} = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$, $W_{\mu\nu} = (\partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu)$ e, por último, $Z_{\mu\nu} = (\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu)$. Para evitar confusão, destacamos que nesse ponto ambos field strength, $W_{\mu\nu}$ e $Z_{\mu\nu}$ são definidos pelas derivadas usuais, mas podem se agrupar com os termos necessários para a definição através de derivadas covariantes.

Se tomarmos $-g \cos \theta = e$, teremos que o quinto termo será exatamente igual ao fator que adicionamos anteriormente, $ieqF_{\mu\nu}W^{*\mu}W^\nu$, na lagrangiana do bóson vetorial W ; esse termo é que fez a correção do fator g . Por fim, lembramos que o ângulo θ em questão é chamado de ângulo de Weinberg, θ_W . Em nossa convenção, $\tan \theta_W = \left(\frac{g}{2g'}\right)$. É dependente das constantes de acoplamento de $SU(2)$, g , e de $U(1)$, g' . Como visto, é o ângulo que, através da quebra espontânea de simetria, faz a mudança de base dos bósons A_3^μ e Y^μ para o fóton A^μ e Z bóson. O modelo Padrão não dá o valor desse parâmetro; é um parâmetro livre da teoria.

4.7.1 A Relação com o Higgs

Para justificar o termo de acoplamento não mínimo, analisamos a a lagrangiana de puro gauge da teoria eletrofraca. Para inserir o Higgs no contexto, isto é, indicar as relações entre Higgs, fóton e bósons vetoriais, vejamos a lagrangiana de Higgs na teoria de Yang-Mills.

$$\mathcal{L}_\Phi = (D_\mu \Phi^\dagger)(D^\mu \Phi) - V(\Phi^\dagger, \Phi), \quad (4.80)$$

que é uma parte da equação (4.75); onde não há nenhum termo explícito que quebre a simetria de gauge. Um termo de massa para os bósons vetoriais na lagrangiana quebraria a simetria de gauge. Entretanto, devido ao alcance da interação fraca, mediada por esses bósons, é sabido que os aludidos bósons são massivos. Portanto, a massa surge a partir do mecanismo que é a quebra espontânea de simetria, introduzida por um valor esperado no vácuo do escalar de Higgs, $v = \langle \phi^0 \rangle_0$.

Em geral,

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi + i\xi \\ h + i\rho \end{pmatrix}$$

Onde o dubleto de $SU(2)$ possui componentes com isospin ($I_3 = +1/2$) para Φ^+ e ($I_3 = -1/2$) para Φ^0 . Tomamos Φ^+ carregado eletricamente com carga $Q = +1$ e Φ^0 neutro eletricamente, $Q = 0$, para não quebrar a simetria de carga do vácuo; a simetria residual eletromagnética. Pela relação de GellMann-Nishijima (4.71), ambas componentes possuem mesma hipercarga fraca $Y = +1$. No chamado gauge unitário, $\chi = \xi = \rho = 0$, o espectro físico é simplificado: bósons W^+, W^- e Z^0 adquirem massa e os bósons de Goldstone desaparecem.

O teorema de Goldstone diz que uma teoria com quebra espontânea de simetria global possui bósons escalares não massivos no espectro físico chamados bósons de gauge. Portanto, os bósons vetoriais, mediadores da interação fraca, "comem" (termo usualmente utilizado) os bósons de Goldstone e, assim, adquirem massa. Um bóson vetorial não massivo possui duas polarizações (Left/Right) de spin. Um bóson vetorial massivo possui três polarizações, pois ganha um grau de liberdade a mais, que é a polarização longitudinal. Cada polarização pode ser pensada como um grau de liberdade independente.

Portanto, é dito que três bósons vetoriais não massivos adquirem massa após comerem três bósons escalares (um para cada), bósons de Goldstone, que lhe conferem o grau de liberdade longitudinal; já que uma partícula escalar possui apenas a polarização longitudinal. O número de bósons de Goldstone, excitações não massivas, que surgem em uma teoria com quebra de simetria é dado pela dimensão do seguinte Coset

$$\# = \dim(G/H) = \dim(G) - \dim(H) \quad (4.81)$$

Com o seguinte: G é o grupo de simetria da teoria, H é o grupo de simetria do vácuo da teoria e considerando simetrias contínuas. Em geral, H é um subgrupo de G . No caso em que $G = SO(n)$ e $H = SO(n-1)$, por exemplo, haverá $(n-1)$ bósons de Goldstone. No caso da quebra de simetria local, diz-se que, no gauge unitário, os bósons de gauge comem os bósons de Goldstone através do mecanismo de Higgs. Esses três bósons de Goldstones são, na verdade, parte dos quatro bósons de Higgs, os Higgses. Devido a simetria de gauge da teoria fraca, o campo de Higgs, como visto acima, é um dubleto de duas componentes valoradas nos complexos. Sendo assim, o campo de Higgs, Φ , é formado por quatro partículas chamadas H^+ , H^- , H^0 e h ; duas carregadas e duas neutras. As três primeiras é quem dão as massas de W^+ , W^- e Z^0 . A partícula realmente chamada de "o Higgs" é a "h", que adquire valor esperado no vácuo não nulo. Assim, no gauge unitário,

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v + \frac{H(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Aqui chamamos H de campo de Higgs e $v = \langle \phi^0 \rangle_0$.

Assim, temos que

$$D_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi + ig A_{\mu\alpha} \frac{\sigma_\alpha}{2} \Phi + ig' Y_\mu \Phi$$

O potencial é dado por

$$V(\Phi) = \frac{\mu^2}{2} \Phi^\dagger \Phi + \frac{\lambda}{4} (\Phi^\dagger \Phi)^2; \quad \mu^2 < 0, \lambda > 0, \quad (4.82)$$

mas não precisamos analisá-lo se estamos interessados apenas nas interações do Higgs com os bósons de gauge, pois o potencial é puramente Higgs.

Após substituição das derivadas covariantes na lagrangiana de Higgs, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\Phi = & \frac{1}{2}(\partial_\mu H)^2 + \frac{g^2 v^2}{2} W_\mu^* W^\mu + \frac{v^2}{2} \begin{pmatrix} A_{\mu 3} & Y_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{g^2}{2} & -gg' \\ -gg' & 2g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{\mu 3} \\ Y_\mu \end{pmatrix} \\ & + \frac{g^2}{\sqrt{2}} v H W_\mu^* W^\mu + \frac{\sqrt{2}}{4} g^2 v H A_{\mu 3} A^{\mu 3} - \sqrt{2} g g' v H A_{\mu 3} Y^\mu + \sqrt{2} g'^2 v H Y_\mu^2 \\ & + \frac{g^2}{4} H^2 W_\mu^* W^\mu + \frac{g^2}{8} H^2 A_{\mu 3} A_3^\mu - \frac{g g'}{2} H^2 A_{\mu 3} Y^\mu + \frac{g'^2}{2} H^2 Y_\mu^2. \end{aligned} \quad (4.83)$$

A seguinte matriz, chamada matriz de massa é real e simétrica e possui determinante nulo

$$\begin{pmatrix} \frac{g^2}{2} & -gg' \\ -gg' & 2g'^2 \end{pmatrix}. \quad (4.84)$$

Pelo teorema espectral, pode ser diagonalizada por uma matriz ortogonal R

$$R \equiv \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (4.85)$$

Um dos autovalores é nulo, então a diagonalização segue como

$$\begin{pmatrix} A_{\mu 3} & Y_\mu \end{pmatrix} R^t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{g^2}{2} + 2g'^2 \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} A_{\mu 3} & Y_\mu \end{pmatrix}. \quad (4.86)$$

Por último, fazemos a seguinte mudança de base

$$A^\mu = \cos \theta A_3^\mu + \sin \theta Y^\mu \quad (4.87a)$$

$$Z^\mu = -\sin \theta A_3^\mu + \cos \theta Y^\mu \quad (4.87b)$$

Ou equivalentemente,

$$A_3^\mu = \cos \theta A^\mu - \sin \theta Z^\mu \quad Z^\mu = +\sin \theta A^\mu + \cos \theta Z^\mu. \quad (4.88)$$

O que nos fornece dois novos campos A^μ , associado com o fóton, e Z^μ , associado com o bóson Z^0 . A matriz de massa indica que o fóton possui massa nula e o bóson Z possui massa proporcional à $(\frac{g^2}{2} + 2g'^2)$. Além disso, convencionamos que $(\tan \theta = \frac{g}{2g'})$. Lembrando que este ângulo é o ângulo de Weinberg.

Após a substituição completa das especificações acima, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\Phi = & \frac{1}{2}(\partial_\mu H)^2 + \frac{g^2 v^2}{2} W_\mu^* W^\mu + \frac{v^2}{2} \left(\frac{g^2}{2} + 2g'^2 \right) Z^\mu Z_\mu + \frac{g^2}{\sqrt{2}} v H W_\mu^* W^\mu \\ & + Z^\mu Z_\mu H \left(\frac{\sqrt{2}}{4} g^2 v \sin^2 \theta + \sqrt{2} g g' v \sin \theta \cos \theta + \sqrt{2} g'^2 v \cos^2 \theta \right) \\ & + \frac{g^2}{4} H^2 W_\mu^* W^\mu + Z_\mu Z^\mu H^2 \left(\frac{g g'}{2} \sin \theta \cos \theta + \frac{g'^2}{2} \cos^2 \theta + \frac{g^2}{8} \sin^2 \theta \right); \end{aligned} \quad (4.89)$$

em que os termos de acoplamento do Higgs com o fóton zeraram. Já os bósons W e Z adquiriram termo de massa como esperado, através do Higgs. A massa do bóson Z é ainda maior que a dos W , entretanto as massas estão relacionadas pelo ângulo de Weinberg, ou seja, através das constantes de acoplamento; essa é uma marca notória da quebra espontânea de simetria. Os valores das massas detectadas experimentalmente são de $M_Z \sim 91.19 \text{ GeV}$, $M_W \sim 80.40 \text{ GeV}$ e $M_H \sim 125 \text{ GeV}$. Em termos cosmológicos, é esperado que o campo de Higgs sofra quebra espontânea de simetria em 10^{-12} s após o Big Bang, na transição de fase eletrofraca. Como é visto atualmente, o campo de Higgs é não nulo e permeia todo o espaço.

4.8 EQUAÇÕES DE MAXWELL - CASO BOSÔNICO

Partindo da expressão (4.62) já obtida da lagrangeana eletromagnética completa com termo não mínimo, temos a corrente de Noether

$$\begin{aligned} J^\mu = & +ieq[W^{*\mu\nu}W_\nu - W^{\mu\nu}W_\nu^*] \\ & -ieq\partial_\nu(W^{*\mu}W^\nu - W^{*\nu}W^\mu), \end{aligned}$$

que podemos escrevê-la, no gauge de Lorenz, também como

$$\begin{aligned} \square A^\mu = J^\mu = & -2eq \text{Im} [W_\nu (\partial^\mu W^{*\nu}) + W^{*\nu} (\partial^\nu W^\mu)] + 2e^2 q^2 W^{*\nu} W_\nu A^\mu \\ & - e^2 q^2 [W^{*\mu} W_\nu + W^\mu W_\nu^*] A^\nu - ieq \partial_\nu (W^\nu W^{*\mu} - W^{*\nu} W^\mu). \end{aligned} \quad (4.90)$$

Para $\mu = 0$ e $A^0 \equiv \Phi$ estático¹⁰, obteremos a equação eletrostática correspondente à lei de Gauss.

$$\begin{aligned} -\nabla^2 \Phi - 2e^2 q^2 (W^{*\nu} W_\nu) \Phi + e^2 q^2 A^\nu (W^{*0} W_\nu + W^0 W_\nu^*) \\ = -2eq \text{Im} [W_\nu (\partial^0 W^{*\nu}) + W_\nu^* \partial^\nu W^0] - ieq \partial_\nu (W^\nu W^{*0} - W^{*\nu} W^0). \end{aligned} \quad (4.91)$$

Precisamos também fazer aproximações válidas para as equações de Maxwell, particularmente a desconsideração da chamada “back reaction”, isto é, não considerar o campo que a própria partícula gera

¹⁰ Há dois casos menos restritivos. Quando $\frac{\partial E}{\partial t} = 0$, tem-se a aproximação quasia-magnetostática. Quando $\frac{\partial B}{\partial t} = 0$, tem-se a aproximação quasia-eletrostática.

sobre ela própria. Nesse caso, a partícula é considerada livre; descrita por equações de campo livre. No caso do spin um, a condição subsidiária, como visto anteriormente, é dada por

$$\partial_\nu W^\nu = 0,$$

que, pela transformada de Fourier, é equivalente a

$$\vec{p} \cdot \vec{W} + EW^0.$$

No referencial de repouso da partícula, $\vec{p} = 0$, ocorre de a componente temporal do bóson vetorial ser nula, $W^0 = 0$. Assim, temos a seguinte simplificação

$$-\nabla^2\Phi + 2e^2q^2(\vec{W}^* \cdot \vec{W})\Phi = +2eq\text{Im}(\vec{W} \cdot \dot{\vec{W}}^*) \quad (4.92)$$

É necessário observar que, lá no caso livre de interação eletromagnética, $A^\mu = 0$, a corrente global para a definição da densidade de carga está relacionada com derivadas temporais do campo W^{11} . Em KG, a densidade de carga está associada com $ieq(\dot{\phi}^*\phi - \phi^*\dot{\phi}) = -2eq\text{Im}(\dot{\phi}^*\phi)$. Da mesma forma, para o bóson vetorial, atentando às unidades físicas, fazemos as seguintes associações

$$2eq\text{Im}(\vec{W} \cdot \dot{\vec{W}}^*) = \rho_{\text{carga}}; \quad (4.93)$$

$$\rho_{\text{partícula}} = \frac{\rho_{\text{carga}}}{eq} = \frac{\rho_{\text{matéria}}}{m}; \quad (4.94)$$

$$\frac{\rho_{\text{partícula}}}{m} = 2\vec{W}^* \cdot \dot{\vec{W}}, \quad (4.95)$$

em que a densidade de partícula é uma medida da quantidade de partículas por elemento de volume, portanto tem dimensão de M^3 . A densidade de carga é produto da carga pela densidade de partículas, já que cada portador de carga contribui com sua carga individual para a densidade total de cargas¹².

Feita as considerações anteriores, obtemos a expressão

$$-\nabla^2\Phi + \frac{e^2q^2}{m}\rho_{\text{part}}\Phi = \rho_{\text{carga}}, \quad (4.96)$$

ou ainda

$$-\nabla^2\Phi + \frac{eq}{m}\rho_{\text{carga}}\Phi = \rho_{\text{carga}}, \quad (4.97)$$

que é exatamente a mesma equação que descreve o potencial eletromagnético no caso do campo escalar; onde $\vec{E} = -\nabla\Phi$.

Ainda com as mesmas aproximações antecedentes, tomamos a componente $\mu = i$ na equação da corrente, lembrando que $W^0 = 0$,

¹¹ Algo que ocorre já em KG para a densidade de carga do campo escalar. Não ocorre na de Schrödinger por ser não relativística.

¹² O caso mais simples aqui tratado é uma única partícula ou um aglomerado de partículas da mesma espécie.

para obtermos a expressão correspondente à equação fermiônica de Ampere-Maxwell

$$\begin{aligned} & -\nabla^2 A^i + 2e^2 q^2 (\vec{W}^* \cdot \vec{W}) A^i - e^2 q^2 (W^{i*} \vec{W} \cdot \vec{A} + W^i \vec{W}^* \cdot \vec{A}) \\ & = +2eq \text{Im} [\vec{W} \cdot \partial^i \vec{W}^* - \vec{W}^* \cdot \partial^i W^i] - ieq \partial_j (W^j W^{i*} - W^{j*} W^i). \end{aligned} \quad (4.98)$$

No referencial de repouso da partícula, a chamada corrente convectiva espacial, $\text{Im} [\vec{W} \cdot \partial^i \vec{W}^* - \vec{W}^* \cdot \partial^i W^i]$, é nula, pois, no espaço de Fourier, está ligada ao momentum total do bóson vetorial. Já a parte da corrente relacionada ao spin, $\partial_j (W^j W^{i*} - W^{j*} W^i)$ não é nula, pois, no espaço de Fourier, está relacionada com o momentum transfer, que é o momentum do fóton associado à radiação eletromagnética gerada pela partícula¹³. A simplificação que está implícita aqui é de que a energia do fóton envolvido seja bem pequena para não considerarmos o recuo que o bóson vetorial sofre para conservar o momentum linear. Não há a back reation, então o bóson é tido como livre. Sendo assim, o referencial de repouso da partícula é possível como uma aproximação sem violar conservação de momentum.

Sendo assim, temos

$$\begin{aligned} & [-\nabla^2 + 2e^2 q^2 (\vec{W}^* \cdot \vec{W})] A^i - e^2 q^2 (W_i^* W_j A_j + W_i W_j^* A_j) \\ & = -ieq \partial_j (W^j W^{i*} - W^{j*} W^i). \end{aligned} \quad (4.99)$$

Em particular, podemos tomar uma polarização específica para o bóson W , por exemplo

$$\epsilon_\mu^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, i, 0).$$

O termo $W_i^* W_j A_j + W_i W_j^* A_j$ fica, então, expandido em

$$W_+^* W_+ (\epsilon_{+i}^* \epsilon_{+j} + \epsilon_{+i} \epsilon_{+j}^*) A_j.$$

Chamaremos a matriz indicada acima por

$$M_{ij} = (\epsilon_{+i}^* \epsilon_{+j} + \epsilon_{+i} \epsilon_{+j}^*), \quad (4.100)$$

que é a matriz de polarização.

Quanto ao termo $W_i^* W_i$, podemos desenvolvê-lo em

$$\vec{W}^* \cdot \vec{W} = W_+^* W_+ \epsilon_{+i}^* \epsilon_{+i} = W_+^* W_+. \quad (4.101)$$

Retornando à matriz M , podemos facilmente observar que é uma matriz idempotente, já que satisfaz o seguinte

$$M^2 = M_{ij} M_{jk} = (\epsilon_{+i}^* \epsilon_{+k} + \epsilon_{+i} \epsilon_{+k}^*) = M_{ik}. \quad (4.102)$$

¹³ Não existe um regime não relativístico para o fóton, já que ele não possui massa, então não é possível zerar o momentum dele.

Além disso, temos que as suas componentes são dadas por

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.103)$$

Retornando para a expressão que nos dá a componente espacial do potencial vetor, tomaremos, conforme já explicado, a seguinte expressão

$$2W_+^* W_+ = \frac{\rho_{particula}}{m} \quad (4.104)$$

no desenvolvimento da equação 4.99

$$\begin{aligned} [-\nabla^2 + 2e^2 q^2 W_+^* W_+] \delta_{ij} A_j - e^2 q^2 (W_+^* W_+ M_{ij} A_j) \\ = -ieq \partial_j (W^j W^{i*} - W^{*j} W^i), \end{aligned} \quad (4.105)$$

que fica reescrita na seguinte forma

$$\begin{aligned} \left[\left(-\nabla^2 + \frac{e^2 q^2 \rho_{part}}{m} \right) \delta_{ij} - \frac{e^2 q^2 \rho_{part}}{2m} M_{ij} \right] A_j \\ = -ieq \partial_j (W^j W^{i*} - W^{*j} W^i). \end{aligned} \quad (4.106)$$

Para retirarmos o potencial A_j dessa expressão, precisamos inverter a equação utilizando a função de Green, por exemplo.

De forma geral, temos uma expressão para o nosso operador que é a seguinte

$$\mathcal{O} = \alpha \mathbb{I} + \beta M = \alpha (\mathbb{I} + \alpha^{-1} \beta M). \quad (4.107)$$

Prosseguimos agora com o processo de inversão do operador:

$$\mathcal{O}^{-1} = \alpha^{-1} (\mathbb{I} + \alpha^{-1} \beta M)^{-1}, \quad (4.108)$$

que é expandida em

$$\mathcal{O}^{-1} = \alpha^{-1} (\mathbb{I} - \alpha^{-1} \beta M + \alpha^{-2} \beta^2 M - \alpha^{-3} \beta^3 M + \dots). \quad (4.109)$$

Após fatoração dos termos em comum,

$$\mathcal{O}^{-1} = \alpha^{-1} (\mathbb{I} - \alpha^{-1} \beta (\mathbb{I} - \alpha^{-1} \beta + \alpha^{-2} \beta^2 - \dots) M),$$

mas $(\mathbb{I} - \alpha^{-1} \beta + \alpha^{-2} \beta^2 - \dots) = (\mathbb{I} + \alpha^{-1} \beta)^{-1}$, então temos que

$$\mathcal{O}^{-1} = \frac{\mathbb{I}}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha(\alpha + \beta)} M. \quad (4.110)$$

Quanto à convergência da sequência, podemos formalizar os critérios para os quais o nosso cálculo seja válido, isto é, garantida a convergência. O caso que temos aqui é uma série de Neumann, que pode ser colocada na seguinte forma

$$|f\rangle = (\mathbb{I} + \lambda \mathbb{K} + \lambda^2 \mathbb{K}^2 + \lambda^3 \mathbb{K}^3 + \dots) |g\rangle. \quad (4.111)$$

Para um operador \mathbb{K} limitado em um espaço vetorial normado V que¹⁴ seja um espaço de Banach, a convergência da série é garantida, formalmente, se

$$|\lambda| \|\mathbb{K}\| < 1. \quad (4.112)$$

A definição da norma de um operador limitado em um espaço vetorial normado é

$$\|\mathbb{K}\|^2 \equiv \limsup_{|\psi\rangle \in V} \left[\frac{\langle \mathbb{K}\psi | \mathbb{K}\psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \right]. \quad (4.113)$$

Retornando para a expressão do potencial vetor que desejamos calcular, após a inversão do operador, escrevemos A_i explicitamente dado por

$$A_i = \mathcal{O}^{-1} \left(-ieq\partial_j \left[W_+ W_+^* \left(\epsilon_{+j} \epsilon_{+i}^* - \epsilon_{+j}^* \epsilon_{+i} \right) \right] \right), \quad (4.114)$$

com o operador inverso \mathcal{O}^{-1} expresso por

$$\mathcal{O}^{-1} = \left(\frac{\mathbb{I}}{\left(-\nabla^2 + \frac{e^2 q^2 \rho_{\text{part}}}{m} \right)} - \frac{\left(-\frac{e^2 q^2 \rho_{\text{part}}}{2m} \right) M}{\left(-\nabla^2 + \frac{e^2 q^2 \rho_{\text{part}}}{m} \right) \left(-\nabla^2 + \frac{e^2 q^2 \rho_{\text{part}}}{2m} \right)} \right). \quad (4.115)$$

Utilizando frações parciais, é possível reescrever o segundo termo do operador \mathcal{O}^{-1} da seguinte maneira

$$\frac{\left(-\frac{e^2 q^2 \rho_{\text{part}}}{2m} \right) M}{\left(-\nabla^2 + \frac{e^2 q^2 \rho_{\text{part}}}{m} \right) \left(-\nabla^2 + \frac{e^2 q^2 \rho_{\text{part}}}{2m} \right)} = \quad (4.116)$$

$$\left[\frac{M}{\left(-\nabla^2 + \frac{e^2 q^2 \rho_{\text{part}}}{m} \right)} - \frac{M}{\left(-\nabla^2 + \frac{e^2 q^2 \rho_{\text{part}}}{2m} \right)} \right].$$

Dado um operador diferencial que queremos inverter, podemos realizar a inversão pela função de Green. No caso de interesse, lembramos que uma equação do tipo

$$(\nabla^2 + k^2)G(\mathbf{R}) = \delta^{(3)}(\mathbf{R}) \quad (4.117)$$

tem solução dada por

$$G(\mathbf{R}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}, \quad (4.118)$$

em que $(G(\mathbf{R}) \rightarrow 0)$ quando $(r \rightarrow \infty)$. No caso que desejamos resolver, temos algo do tipo

$$\frac{-1}{\nabla^2 - \xi^2}$$

¹⁴ É uma condição suficiente, porém não necessária. Espaço de Banach é um espaço vetorial normado completo. Um espaço de Hilbert, por exemplo, é sempre de Banach.

em que tomamos ($k^2 \equiv -\xi^2$) e fazemos a correspondência

$$\frac{\mathbb{I}}{\left(-\nabla^2 + \frac{e^2 q^2 \rho_{\text{part}}}{m}\right)} = \frac{-\mathbb{I}}{(+\nabla^2 - \xi^2)} = \frac{-\mathbb{I}}{(+\nabla^2 + k^2)}.$$

Assim, o potencial eletromagnético é obtido por

$$\begin{aligned} A_i = & \left(\frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{-\xi|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \frac{M}{4\pi} \int \frac{e^{-\xi|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right. \\ & \left. + \frac{M}{4\pi} \int \frac{e^{-\frac{\xi}{2}|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \left[\nabla \times \vec{\mu}_0 \delta^{(3)}(\vec{r}') \right]_i, \end{aligned} \quad (4.119)$$

em que interpretamos o termo de spin, assim como no caso fermiônico, relacionado a um rotacional por

$$\left(-ieq\partial_j \left[W_+ W_+^* \left(\epsilon_{+j} \epsilon_{+i}^* - \epsilon_{+j}^* \epsilon_{+i} \right) \right] \right) = (\nabla \times \vec{\mu})_i.$$

Após uma integração parcial em que os termos de superfície são nulos, obtemos

$$\begin{aligned} A_i = & \left(-\frac{1}{4\pi} \int \nabla' \frac{e^{-\xi|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \frac{M}{4\pi} \int \nabla' \frac{e^{-\xi|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \right. \\ & \left. - \frac{M}{4\pi} \int \nabla' \frac{e^{-\frac{\xi}{2}|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \times \left[\vec{\mu}_0 \delta^{(3)}(\vec{r}') \right]_i. \end{aligned} \quad (4.120)$$

Executando o cálculo do gradiente e a aplicação do operador sob a delta de Dirac, a forma final do potencial é expressa pela seguinte expressão

$$\begin{aligned} \vec{A} = & + \frac{1}{4\pi} \left[e^{-\xi|\vec{r}|} \frac{(\vec{\mu}_0 \times \vec{r})}{r^2} + \xi e^{-\xi|\vec{r}|} \frac{(\vec{\mu}_0 \times \vec{r})}{r} \right] \\ & - \frac{M}{4\pi} \left[e^{-\xi|\vec{r}|} \frac{(\vec{\mu}_0 \times \vec{r})}{r^2} + \xi e^{-\xi|\vec{r}|} \frac{(\vec{\mu}_0 \times \vec{r})}{r} \right] \\ & + \frac{M}{4\pi} \left[e^{-\frac{\xi}{2}|\vec{r}|} \frac{(\vec{\mu}_0 \times \vec{r})}{r^2} + \xi e^{-\frac{\xi}{2}|\vec{r}|} \frac{(\vec{\mu}_0 \times \vec{r})}{r} \right], \end{aligned} \quad (4.121)$$

onde utilizamos $\nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) = + \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$.

Quando ξ é zero, obtemos o potencial calculado no caso fermiônico, que é um campo eletromagnético devido ao spin da partícula em repouso. No caso geral em que ξ não é zero, constatamos que o potencial¹⁵ gerado pelo bóson não é apenas devido ao spin, mas também à polarização da partícula.

¹⁵ Uma observação de como a aplicação de fortes campos magnéticos influencia no eletromagnetismo do bóson W é encontrada em[104]. Ocorre um efeito de “anti-screening” em que se forma um condensado de bóson W que tende a aumentar o campo.

Diferentemente do caso fermiônico, em que precisamos analisar a corrente “on-shell” para vermos o efeito do spin, o caso bosônico já revela toda sua estrutura na corrente “off-shell”, ou seja, bastando fazer a variação em relação ao campo do fóton δA . Portanto, desprezar a back reaction, nesse caso bosônico, não pode ser simplesmente anular o campo A^μ , mas tomar a condição subsidiária que vem da equação de campo livre e requer $W^0 = 0$.

A obtenção da corrente “off-shell” parte de uma análise do fóton, enquanto a obtenção da corrente “on-shell” requer uma equação de campo satisfeita para a partícula de interesse. Portanto, a corrente eletromagnética, que é diretamente relacionada ao fóton, é obtida, de forma geral, pelo segundo teorema de Noether, ou seja, pela variação da lagrangeana em relação ao campo A^μ do fóton e é, portanto, “off-shell”.

4.9 DECOMPOSIÇÃO DE GORDON E AUTOINTERAÇÃO

Na seção (3.5), a corrente eletromagnética leptônica apresenta o fator de forma de anapole 3.64 que é bem semelhante a um termo¹⁶ da decomposição de Gordon para a corrente do bóson vetorial carregado dada pela (4.66) escrita abaixo

$$\begin{aligned} J^\mu = & +ieq(W^\nu \overleftrightarrow{D}^\mu W_\nu^*) + 2eq\partial_\beta (W^\alpha (\Sigma^{\mu\nu})_\alpha^\beta W_\nu^*) \\ & - 2eq\partial_\beta (W^{*\alpha} (\Sigma^{\mu\nu})_\alpha^\beta W_\nu) + \frac{e^2 q^2}{m^2} W^{*\mu} W_\kappa (\partial_\nu F^{\nu\kappa}) \\ & + \frac{e^2 q^2}{m^2} W^\mu W_\kappa^* (\partial_\nu F^{\nu\kappa}). \end{aligned}$$

A aludida corrente fermiônica é assim descrita, com seus fatores de forma, pela TQC, ou seja, após tomar efeitos relativísticos e quânticos, enquanto a corrente bosônica descrita acima em decomposição de Gordon é clássica, já que os campos da lagrangeana não foram quantizados. Isso parece sugerir que, já a nível clássico, diferentemente do férmion, o bóson melhor destaca a propriedade de um tipo de “autointeração” da corrente com ela própria, pois a expressão da corrente J^μ contém termos do tipo $\partial_\nu F^{\nu\kappa}$, que dão novamente a própria corrente J^κ ; tipo uma iteração.

4.10 CAMPO CLÁSSICO ESTENDIDO

Com a mesma ideia de campo clássico estendido espacialmente utilizada no caso fermiônico na seção (3.6), podemos buscar um cálculo análogo do momento magnético anômalo para o caso bosônico de interesse, que é o do bóson W .

¹⁶ Aos dois últimos termos da expressão seguinte.

Partindo da corrente eletromagnética off-shell 4.62, podemos escrevê-la em forma expandida

$$\begin{aligned} J^\mu = & +ieq[W^{*\mu\nu}W_\nu - W^{\mu\nu}W_\nu^*] - ieq\partial_\nu(W^{*\mu}W^\nu - W^{*\nu}W^\mu) \\ & +2e^2q^2A^\mu(W^{\nu*}W_\nu) - e^2q^2A^\nu[W^{\mu*}W_\nu + W^\mu W_\nu^*], \end{aligned} \quad (4.122)$$

em que, aqui, estamos considerando $W^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, sem o acoplamento, que já fora explicitado.

Como desejamos buscar correções em ordem quadrática $\mathcal{O}(e^2q^2)$ no fator giromagnético do bóson W , precisamos fatorar nossa corrente de modo a nos possibilitar obter a correção perturbativa que buscamos. Tendo isso em mente, definimos a corrente fatorada dada por \tilde{J}^μ

$$J^\mu \equiv eq\tilde{J}^\mu. \quad (4.123)$$

Na parte espacial da corrente, que está relacionada ao magnetismo, é onde fazemos a análise do momento magnético e fator giromagnético da partícula. A equação diferencial que temos de resolver é simplesmente

$$-\nabla^2 A^i = eq\tilde{J}^i. \quad (4.124)$$

Pela função de Green, obtemos o potencial gerado associado à essa corrente

$$\vec{A} = \frac{eq}{4\pi} \int \frac{\tilde{J}(\vec{x}')d^3\vec{x}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (4.125)$$

Para prosseguirmos com o cálculo, indicamos duas aproximações que serão adotadas para simplificação do problema, porém o autor acredita que essas aproximações podem mudar substancialmente o resultado quantitativo preservando o qualitativo, isto é, a ideia do que queremos destacar como possíveis conclusões. A primeira aproximação é considerar a partícula livre de interação; isso significa diminuir a influência do fóton na participação da caracterização do bóson W , pois retiramos o efeito de “back reaction”. A segunda aproximação é o limite não relativístico, em que o termo de corrente convectiva espacial é desprezível. Dessa forma, utilizamos a condição subsidiária de partícula livre $\partial_\mu W^\mu = 0$, que, juntamente com o limite não relativístico, nos leva a $W^0 = 0$.

Retornando para a expressão da corrente fatorada \tilde{J} , inserimos o potencial eletromagnético que calculamos na própria equação da corrente \tilde{J} em um processo autoconsistente; em similaridade ao caso fermiônico. Para isso, definimos uma nova corrente $\tilde{\tilde{J}}$ como um pedaço que envolve a parte convectiva e a de spin

$$\tilde{\tilde{J}}^i = eq \left[2 \operatorname{Im} \left[\vec{W} \cdot \partial^i \vec{W}^* - \vec{W}^* \cdot \partial^i \vec{W} \right] - i\partial_j (W^j W^{i*} - W^{j*} W^i) \right]. \quad (4.126)$$

Agora, podemos escrever a corrente fatorada total $\tilde{\mathbf{J}}^i$ utilizando o potencial eletromagnético já calculado. Dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{J}}^i(\vec{x}) = & \tilde{\mathbf{J}}^i(\vec{x}) + \left(\frac{2e^2 q^2}{4\pi} \right) \int \frac{\tilde{\mathbf{J}}^i(\vec{x}') W^{\nu*} W_\nu d^3 \vec{x}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \\ & - \left(\frac{e^2 q^2}{4\pi} \right) \int \frac{\tilde{\mathbf{J}}^\nu(\vec{x}') [W^{i*} W_\nu + W^i W_\nu^*] d^3 \vec{x}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \end{aligned} \quad (4.127)$$

Isolando todos os termos que envolvem a corrente fatorada total, lembrando que $W^0 = 0$, poderemos expressar uma corrente em função de outra, pois deixamos a seguinte expressão já preparada¹⁷ para a fatoração que faremos mais adiante

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{J}}^i(\vec{x}) = & \tilde{\mathbf{J}}^i(\vec{x}) - \left(\frac{2e^2 q^2}{4\pi} \right) \int \frac{\tilde{\mathbf{J}}^i(\vec{x}') W^{j*} W_j d^3 \vec{x}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \\ & + \left(\frac{e^2 q^2}{4\pi} \right) \int \frac{\tilde{\mathbf{J}}^j(\vec{x}') [W^{i*} W_j + W^i W_j^*] d^3 \vec{x}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \end{aligned} \quad (4.128)$$

Por se tratar de um bóson vetorial massivo, as três polarizações estão presentes na descrição física da partícula. Podemos escolher uma polarização particular para avaliarmos o resultado. Tomando a polarização $\epsilon_\mu^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, i, 0)$, por exemplo, e valendo-se de 4.104, temos¹⁸

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{J}}^i(\vec{x}) = & \tilde{\mathbf{J}}^i(\vec{x}) + \left(\frac{2e^2 q^2}{4\pi} \right) \int \frac{\rho_{\text{part}}}{2m} \left(\frac{1}{\lambda} \right) (\epsilon_{+j}^* \epsilon_{+j}) \tilde{\mathbf{J}}^i(\vec{x}') d^3 \vec{x}' + \\ & - \left(\frac{e^2 q^2}{4\pi} \right) \int \frac{\rho_{\text{part}}}{2m} \left(\frac{1}{\lambda} \right) (\epsilon_{+i}^* \epsilon_{+j} + \epsilon_{+i}^* \epsilon_{+j}^*) \tilde{\mathbf{J}}^j(\vec{x}') d^3 \vec{x}'. \end{aligned} \quad (4.129)$$

Em que fazemos a consideração heurística de uma região estendida de integração conforme fizéramos no caso fermiônico, onde surge o comprimento de Compton $|\vec{r} - \vec{r}'| \equiv \lambda$. De forma similar, também pode ser escrita na seguinte forma

$$\tilde{\mathbf{J}}^i = \tilde{\mathbf{J}}^i + \frac{e^2 q^2}{4\pi(m\lambda)} \left(\int \rho_{\text{part}} \tilde{\mathbf{J}}^i(\vec{x}') d^3 \vec{x}' - \int \frac{\rho_{\text{part}}}{2} M_{ij} \tilde{\mathbf{J}}^j(\vec{x}') d^3 \vec{x}' \right). \quad (4.130)$$

Já dentro da aludida proposta de aproximações, reavaliemos o conteúdo da corrente $\tilde{\mathbf{J}}$. Desprezamos a parte convectiva e ficamos apenas com a parte de spin

$$\tilde{\mathbf{J}}^i = -i\partial_j (W^j W^{i*} - W^{j*} W^i) = -i\partial_j \left[W_+ W_+^* (\epsilon_{+i}^* \epsilon_{+j} - \epsilon_{+i} \epsilon_{+j}^*) \right], \quad (4.131)$$

¹⁷ Até este ponto, os índices são do espaço de Minkowski, mas, após a consideração da mudança de sinais, índices contra ou covariantes significarão a mesma coisa, pois já serão índices euclidianos.

¹⁸ Aqui não há preocupação com a posição dos índices, pois já são índices euclidianos.

ou ainda o seguinte

$$\tilde{\mathbf{J}}^i = -\frac{i}{2m} \partial_j \left[\rho_{\text{part}} \left(\epsilon_{+i}^* \epsilon_{+j} - \epsilon_{+i} \epsilon_{+j}^* \right) \right]. \quad (4.132)$$

Por se tratar de uma corrente de spin, assim como em 4.120, associamos uma “função” delta $\delta^{(3)}(\vec{r}')$ à densidade de partícula. Tomamos o spin da partícula na direção z , por exemplo, que dá uma corrente planar.

Na expressão 4.129, a matriz de polarização se destaca com fundamental importância para a contribuição na relação entre a corrente $\tilde{\mathbf{J}}$ e $\tilde{\mathbf{J}}$, pois é particular do caso bosônico em oposição ao fermiônico. Na visão perturbativa em que buscamos correções de $\mathcal{O}(e^2 q^2)$, dentro das integrais, a corrente total $\tilde{\mathbf{J}}$ pode ser substituída pela parte de spin $\tilde{\mathbf{J}}$ pois ambas diferem por termos de $\mathcal{O}(eq)$, então fazemos a fatoração da parte de spin e obtemos a seguinte relação

$$\tilde{\mathbf{J}}^i = \tilde{\mathbf{J}}^i \left(1 - \frac{e^2 q^2}{16\pi^2} \right), \quad (4.133)$$

em que a quantidade $m\lambda = 2\pi$ é inserida pela relação de Compton. Ou após inversão e explicitação de termos

$$\tilde{\mathbf{J}}^i = \frac{1}{m} \left(1 - \frac{e^2 q^2}{16\pi^2} \right)^{-1} \left(-i\partial_j \left[\left(\frac{\rho_{\text{part}}}{2} \right) \left(\epsilon_{+i}^* \epsilon_{+j} - \epsilon_{+i} \epsilon_{+j}^* \right) \right] \right). \quad (4.134)$$

Para o gerador de rotações no setor euclideano, vale

$$(\Sigma_{ij})_{ab} = -i (\delta_{ia} \delta_{jb} - \delta_{ib} \delta_{ja}) \quad (4.135)$$

e também

$$(\Sigma_{ij})_{ab} = \varepsilon_{ijn} (S_n)_{ab}; \quad (4.136a)$$

$$(S_n)_{ab} = -i (\varepsilon_{nab}). \quad (4.136b)$$

Com isso, podemos reescrever o termo de spin

$$\left(-i\partial_j \left[\left(\frac{\rho_{\text{part}}}{2} \right) \left(\epsilon_{+i}^* \epsilon_{+j} - \epsilon_{+i} \epsilon_{+j}^* \right) \right] \right) = \partial_j \left[\left(\frac{\rho_{\text{part}}}{2} \right) \epsilon_{+a}^* (\Sigma_{ij})_{ab} \epsilon_{+b} \right]. \quad (4.137)$$

A corrente $\tilde{\mathbf{J}}$ fica expressa, então, por um rotacional que envolve a densidade de partícula e um valor médio da matriz S pelos vetores de base da polarização escolhida

$$\tilde{\mathbf{J}}^i = \frac{1}{m} \left[\nabla \times \left(\left(\epsilon_+^* S \epsilon_+ \right) \frac{\rho_{\text{part}}}{2} \right) \right]_i \quad (4.138)$$

Para calcularmos o momento magnético, partimos de

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} \int \vec{r} \times (e q \vec{\mathbf{J}}) d^3 r', \quad (4.139)$$

e utilizamos o conhecimento sobre como expressar a corrente fatorada total em termos de um rotacional que envolve o gerador de rotação em $SO(3)$. Também sabemos que $\alpha = \frac{e^2 q^2}{4\pi}$, então temos

$$\vec{\mu} = \frac{eq}{2m} \left(1 - \frac{\alpha}{4\pi}\right)^{-1} \int \vec{r} \times \nabla \times \left((\epsilon_+^* \vec{S} \epsilon_+) \frac{\rho_{\text{part}}}{2} \right) d^3 r', \quad (4.140)$$

que pode ser simplificada, a menos de termos de superfície, pelo seguinte resultado $\vec{r} \times [\nabla \times (\vec{F})] = 2\vec{F}$. Portanto,

$$\vec{\mu} = \frac{eq}{2m} \left(1 + \frac{\alpha}{4\pi}\right)^{-1} 2 \int \left((\epsilon_+^* \vec{S} \epsilon_+) \frac{\rho_{\text{part}}}{2} \right) d^3 r', \quad (4.141)$$

em que fazemos a seguinte associação da integral de normalização que define o vetor de spin a partir da matriz geradora de rotações no espaço euclidiano

$$\int \frac{\rho_{\text{part}}}{2} (\epsilon_+^* \vec{S} \epsilon_+) d^3 r' = \vec{s}, \quad (4.142)$$

para obter a expressão final do momento magnético

$$\vec{\mu} = \frac{eq}{2m} 2 \left(1 - \frac{\alpha}{4\pi}\right)^{-1} \vec{s}, \quad (4.143)$$

que é expandida na aproximação em que a constante de estrutura fina α é pequena

$$\vec{\mu} = \frac{eq}{2m} 2 \left(1 + \frac{\alpha}{4\pi}\right) \vec{s}. \quad (4.144)$$

Um resultado experimental de 1992 [105] fornece o seguinte intervalo para os valores possíveis do momento magnético do bóson W :

$$\mu = \frac{(\kappa + 1)eq}{2m}, \quad -2.4 \leq \kappa \leq 3.7.$$

Os dados mais atuais são de 2001 [106] e indicam uma melhora do resultado para o fator giromagnético:

$$\mu_W \left(\frac{2M}{eq} \right) = 2.22_{-0.19}^{+0.20}.$$

Conforme dito no capítulo anterior, era esperado que a contribuição eletromagnética a correções de $g = 2$ para o bóson W não fossem substanciais, pois outras interações dão contribuições relevantes, diferentemente do caso fermiônico em que a massa do portador é bem menor comparada a do bóson W . Entretanto, a grandeza da correção é ainda da ordem esperada de α/π .

Como referência da contribuição de outras interações, no contexto de gráficos de Feynman, citamos [107]. Há também discussão do momento anômalo a altas temperaturas em [108], onde se comparam o caso fermiônico e bosônico. Por fim, a consideração de bósons W compostos pode ser consultada em [109][110].

Ao analisarmos as equações de Maxwell em uma visão microscópica, passamos pela influência do spin, da polarização, da massa, além da própria carga, na descrição da interação eletromagnética. Naturalmente, surge questionamentos sobre o que cada propriedade realmente significa e possíveis relações entre elas. Buscar entender o conceito de uma propriedade de um objeto nos leva a entender também o próprio objeto. Sendo assim, verificamos que o próprio conceito de partícula sofre mudanças desde Leucippus e Democritus até os dias atuais, em que não existe, ainda, conceito universal e único.

A ideia de partícula estendida espacialmente, em oposição a uma partícula pontual idealizada de dimensão nula, não é novidade na Física, porém foi proposta, em diversas versões distintas, por inúmeras pessoas. Além de a maioria dos modelos propostos sofrerem de inconsistências com a relatividade, por exemplo, os fatos experimentais não aparentam demonstrar uma posição favorável, já que partículas elementares têm sido submetidas a experimentos que não evidenciam estrutura alguma até ordens de grandeza bem inferiores ao comprimento de Compton associado à partícula. Entretanto, qual a relação entre possuir estrutura e ser pontual? É razoável que algo com estrutura interna possua comprimento, mas algo que não possui estrutura poderia também apresentar um comprimento associado? Para Wigner [111], a partícula elementar não possui uma estrutura associada.

É notável que o spin, a carga eletromagnética, a massa e as polarizações das partículas possuem influência na caracterização ontológica da partícula. Dentro da formulação de Wigner para partículas, já se destaca a marcação das propriedades de partículas, que são relacionadas aos graus de liberdade envolvidos, com distinção entre casos massivos, não massivos e os diversos valores de helicidade e spin possíveis. Por exemplo, partículas sem massa possuem duas direções de polarização independentemente do spin, mas uma partícula massiva de spin s possui $(2s + 1)$ polarizações. Sendo assim, o estudo fundamental de uma propriedade pode nos levar a considerar outras propriedades que estão direta ou indiretamente ligadas à propriedade inicial.

5.1 TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS E MECÂNICA QUÂNTICA

Devido uma série de problemas enfrentados pela mecânica quântica relativística, a teoria quântica de campos ganhou relevância como a consequência da união de relatividade especial e mecânica quân-

tica, porém, como observou Wigner [112] e Beck [113], embora não haja conflito conceitual em unir as duas áreas, a união não deve ser chamada natural.

Descrever uma propagação de equação de onda relativística com os requisitos gerais esperados da união entre mecânica quântica e relatividade é que gera o conflito com a interpretação, dentro da mecânica quântica, das soluções. Em suma, são

- Espectro de energia positiva
- Localização da configuração inicial; suporte compacto no espaço.
- Propagação com velocidade finita; Hiperbolicidade.

... particles were reduced in status to mere epiphenomena. In its essentials, this point of view has survived to the present day, and forms the central dogma of quantum field theory: the essential reality is a set of fields, subject to the rules of special relativity and quantum mechanics; all else is derived as a consequence of the quantum dynamics of these fields - Weinberg

Diz-se que há um conflito entre localização espacial, no sentido de Newton-Wigner ¹, e espectro de frequência positiva das soluções de equação de onda relativística. Dessa forma, a evolução relativística de equações de onda, em uma interpretação de Schrödinger, é problemática. A ocorrência de frequências negativas está ligada ao espectro do gerador de translações temporais não ser definido positivo; o que implica em energia negativa, pois, em mecânica quântica, esse gerador é o operador energia.

A teoria quântica de campos, embora resolva tecnicamente problemas da mecânica quântica relativística, não é considerada uma teoria fechada, isto é, concluída, mas um campo aberto que é atual área de trabalho. Porém, a questão da localização não é finalizada em TQC. Além da versão mais divulgada chamada “Lagrangian QFT”, iniciada com Dirac, encontram-se os termos “Axiomatic QFT” e “Algebraic QFT (AQFT)” ou “Local Quantum Physics”, versões que buscam maior fundamentação matemática dos axiomas e da estrutura da teoria quântica de campos; em que Arthur Wightman [6] e Rudolf Haag [114] são os fundadores.

Sobre a questão de um operador de posição e localizabilidade em TQC, escreveu o Eduard Prugovecki[115]:

“The pragmatic attitude toward these fundamental difficulties has been to simply ignore them by concentrating experimentally on momentum measurements based on the suitable macroscopic localization of particles (namely their tracks in bubble chambers, spark chambers, etc.), and theoretically on the development of S-matrix techniques. Some of the numerical successes of the renormalization program have reinforced the belief in the correctness of this position, despite the fact that some of the pioneers in that area have warned about fundamental difficulties that have been left unresolved. In view of the present widespread feeling

¹ Versão relativística da localização de Born na MQ.

that LQFT is the panacea for all ills of relativistic quantum theories, it is also worthwhile pointing out that the founder of LQFT (Dirac) has himself repeatedly expressed his dissatisfaction with LQFT as the ultimate solution to both the physical and mathematical problems inherent in the renormalization program, warning against complacency in accepting its faults . . . Hence these approaches leave the fundamental question of the meaning of localizability on the quantum level untouched” . . .

A discussão da busca de operadores de posição covariantes em influência do spin e da localidade poder ser encontrada, além do trabalho de Newton-Wigner, em [116][117]; O primeiro autor, Fleming, deixa claro isso “these difficulties are intimately related to the spin of the particle or the intrinsic angular momentum of the closed system, as the case may be, since for spinless systems all the position operators discussed become identical, local, and covariant”.

5.2 PARTÍCULA E LOCALIZAÇÃO

Espera-se que uma partícula, considerada como objeto diretamente acessível a experimentos, possua a característica de ser localizável. Macroscopicamente, os objetos do dia a dia possuem, dentro de uma imprecisão dos instrumentos de medida, uma posição razoavelmente² definida. Ao buscarmos os objetos mais fundamentais em menores escalas, o conceito teórico de localização fica mais impreciso ou complexo já que fatores diversos o influenciam.

Embora a TQC possa descrever processos relacionados a partículas, não existe uma bijeção entre campos e partículas, isto é, uma partícula pode ser associada a muitos campos. A noção de partícula é reservada para o limite assintótico ($t \rightarrow \pm\infty$) em que a interação dos campos é dita desligada. Há a importante discussão[118][119][120] sobre quando é possível que uma TQC realmente descreva partículas.

5.2.1 Localização

Da transição do quântico para o clássico, espera-se que a noção de localização seja exatamente satisfeita, mas, em nível quântico, a localização parece aproximada. A noção de partículas tem uma justificativa operacional devido à localização, registro de “clicks” de partículas em detectores. Assim, diversas definições em diferentes níveis matemáticos podem ser dadas no âmbito de explicar essa propriedade importada, a priori, da noção que temos do mundo clássico.

Na visão de definir um operador posição dentre vários possíveis, é preciso definir os requerimentos esperados que sejam satisfeitos por

² Há a noção de arbitrariamente localizada, pois a questão é, em escala macroscópica, refinar a precisão da medida.

It should be mentioned that there need be no connection between the number of fields necessary to describe a field theory and the number of elementary systems it describes. One can have one field and many elementary systems or many fields and only one elementary system - Wightman

. . . it is not possible to assume that an electron has, at a particular instant of time, any position in space; in other words, the concept of position at a given time is not a meaningful attribute of the electron. Rather, ‘position’ is an attribute of the interaction between the electron and a suitable detection device - Haag

esse operador. A hipótese inicial é que uma partícula possa ser localizada em um subconjunto B , região, de \mathbb{R}^3 . Se essa é uma propriedade observável, associa-se um operador autoadjunto $E(B)$ no espaço de Hilbert que indique se a partícula está fora ou dentro da região; sendo, portanto, um operador de projeção de autovalores 0 e 1.

Alguns requerimentos são os seguintes:

1. Para todo conjunto de Borel $B \subset \mathbb{R}^3$, há um operador de projeção $E(B)$ que a probabilidade de encontrar a partícula nessa região seja dada por $P = (\psi, E(B)\psi)$ se o estado que a descreve é dado por ψ , com $\|\psi\| = 1$ e probabilidade total de a partícula está em algum local unitária, $(\psi, E(\mathbb{R}^3)\psi) = \mathbb{I}$;
2. Para um mesmo instante de tempo, se o sistema é localizado em B_1 e B_2 , então é localizado na interseção $B_1 \cap B_2$,

$$E(B_1 \cap B_2) = E(B_1)E(B_2) \quad \forall B_1, B_2;$$

3. O subespaço de estados localizados em $B_1 \cup B_2$ é associado ao $E(B_1 \cup B_2)$:

$$E(B_1 \cup B_2) = E(B_1) + E(B_2) - E(B_1 \cap B_2) \quad \forall B_1, B_2.$$

Caso B_i , $i = 1, 2, 3, \dots$ seja conjuntos disjuntos de Borel, então vale

$$E(\cup B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} E(B_i);$$

4. Tome $U(\vec{\alpha}, R)$, $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^3$, $R \in SO(3)$, uma representação unitária do grupo universal de recobrimento do grupo Euclidiano³ no espaço de Hilbert da partícula. Para qualquer conjunto de Borel em \mathbb{R}^3 , o conjunto $(RB + \vec{\alpha})$ formado de rotação e translação é tal que

$$E(RB + \vec{\alpha}) = U(\vec{\alpha}, R)E(B)U^*(\vec{\alpha}, R)$$

Caso $E(B)$ satisfaça as condições acima, diz-se então que é uma medida espectral de um único operador de posição $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$. Defini-se, então, uma família espectral $E_{q_i}(\lambda) \equiv E(\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 | x_i \leq \lambda\})$ e operadores autoadjuntos com representação espectral

$$q_i = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_{q_i}(\lambda), \quad i = 1, 2, 3.$$

Levando adiante essas considerações, não é possível associar um operador de posição que não possui componentes comutantes a uma

³ O grupo Euclidiano tridimensional é um produto semidireto $SO(3) \times \mathbb{R}^3$. O grupo de recobrimento de $E(3)$ é dado por $\tilde{E}(3) = SU(2) \times \mathbb{R}^3$

medida espectral em \mathbb{R}^3 , pois viola o requerimento (2). Sendo assim, vê-se, por exemplo que, na equação de Dirac, um operador de posição, com componentes não comutantes, que não mistura energias positivas com negativas⁴ não satisfaz a noção de localizabilidade acima.

O valor médio do operador $E(B)$ é relacionado à probabilidade de encontrar a partícula em B :

$$(\psi, E(B)\psi) = \int_B |\psi(x)|^2 d^3x.$$

Nessa noção de localização no espaço tridimensional, para um determinado instante de tempo, uma partícula está localizada em B apenas se a sua função de onda, ψ , zerar quase que totalmente fora de B . Se, $(\psi, E(B)\psi) = 1$, a partícula está localizada em B , mas não significa que a função de onda está localizada em B .

Além dos requisitos acima, um teorema de Wightman [121], Newton e Wigner [111] acrescenta mais uma condição que, se satisfeita juntamente com as anteriores, garante que o operador posição requerido é o de Newton-Wigner. Essa condição extra é a seguinte: Dado operador posição \vec{q} autoadjunto no espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^3)$, $E_q(B)$ deixa invariante os subespaços de Hilbert de energias negativas e o de energias positivas, ou seja, atua sem misturar os setores; $E_q(B)h_{\pm} \subset h_{\pm}$. Sendo assim, as cinco condições definem o operador posição como o obtido na formulação de NW.

Há, porém, argumentos que indicam uma proibição de uma localização exata para partículas descritas por função de onda com uma energia de sinal definido. Comentaremos sobre isso um pouco adiante.

É importante lembrar que toda essa noção de localização em espaço tridimensional para um dado instante poderia ser pensada para o espaço-tempo requerindo, por exemplo,

$$U(\vec{a}, \Lambda)E(B)U^{-1}(\vec{a}, \Lambda),$$

com B um conjunto de Borel e (Λ, \vec{a}) transformação de Poincaré. Entretanto, ocorre uma violação⁵ do estado de mínima energia e, conseqüentemente, macula esse conceito de localização.

Existe um famoso resultado, devido a Hegerfeldt, que é dado pelo teorema seguinte

Theorem 3 (Teorema de Hegerfeldt) *Em mecânica quântica relativística, não existe um estado de 1-partícula satisfazendo a hipótese de que existe um operador projetivo de localização e que seja localizado em uma região espacial finita V enquanto, ao mesmo tempo, obedeça a condição de localidade relativística.*

⁴ Operador construído para não sofrer o problema do efeito ZBW.

⁵ Relacionada a um teorema de George Mackey.

A primeira formulação do teorema requeria [122][123][124] [125], de certa forma, invariância translacional, mas depois Hegerfeldt reformulou o teorema em uma versão menos restritiva [126], que só requer positividade da energia e que o sistema seja representado no espaço de Hilbert com um operador de evolução temporal unitário.

A descrição matemática do teorema segue do seguinte: Seja H um operador autoadjunto limitado inferiormente em um espaço de Hilbert \mathcal{H} , para um dado $\psi_0 \in \mathcal{H}$, definimos ψ_t , com $t \in \mathbb{R}$, por

$$\psi_t = e^{-iHt}\psi_0. \quad (5.1)$$

Tome um operador positivo A em \mathcal{H} , $A \geq 0$, e defina $p_A(t)$ como

$$p_A(t) = \langle \psi_t, A\psi_t \rangle. \quad (5.2)$$

Então, ocorre que

$$p_A(t) \neq 0 \quad \text{para quase todo } t \quad (5.3)$$

e o conjunto dos “ t ” é denso e aberto; ou

$$p_A(t) \equiv 0 \quad \forall t. \quad (5.4)$$

A importância de requerer um operador de energia H autoadjunto é que, pelo teorema de Stone (1930) [127][128] e von Neumann (1932) [129], apenas um operador autoadjunto possui uma bijeção com grupos unitários a 1-parâmetro fortemente contínuo⁶ necessários para a dinâmica dos sistemas quânticos. A prova do teorema é baseada em argumentos de analiticidade do operador de evolução temporal e pode ser encontrada nos vários artigos do próprio Hegerfeldt.

No âmbito de aplicar o teorema para um operador relacionado à localização da partícula, prosseguimos com as considerações seguintes.

Supondo possível determinar a probabilidade de encontrar uma partícula, em um dado instante, dentro de uma região espacial V , existe um operador autoadjunto $N(V)$ que deve satisfazer

$$0 \leq N(V) \leq 1.$$

A probabilidade de encontrar uma partícula em V , no tempo t , é dada por

$$\langle \psi_t, N(V)\psi_t \rangle.$$

Define-se que um estado de partícula está localizado em V , no tempo t , quando a probabilidade de encontrar a partícula em V é 1. É dito que a partícula não está em V , no tempo t , se a probabilidade é nula.

⁶ Está relacionado com a existência de um gerador infinitesimal que é exponenciado para permitir a evolução temporal dos estados quânticos.

Assumimos que, em ($t = 0$), o sistema de estado puro⁷ ψ_0 está estritamente localizado na região V_0 , isto é, $\langle \psi_0, N(V_0)\psi_0 \rangle = 1$ ou ainda

$$\langle \psi_0, (1 - N(V_0))\psi_0 \rangle = 0,$$

mas $(1 - N(V_0)) \geq 0$, então, para aplicar o teorema, pode-se definir o operador

$$A \equiv 1 - N(V_0).$$

Como consequência,

$$\langle \psi_t, N(V_0)\psi_t \rangle \equiv 1 \quad \forall t \quad (5.5)$$

ou

$$\langle \psi_t, N(V_0)\psi_t \rangle < 1 \text{ para quase todo } t. \quad (5.6)$$

A primeira alternativa significa que a partícula permanece em V_0 a todo momento, como um estado ligado em um potencial externo, por exemplo. Se a partícula está estritamente localizada na região V_0 no tempo $t = 0$, também deve estar em uma região V que contém V_0 , $V_0 \subset V$. Sendo as fronteiras de V e de V_0 separadas por uma distância finita, e valendo o limite de velocidade finita de propagação, então a probabilidade de encontrar a partícula em V também deve ser 1 para tempos suficientemente pequenos ($0 \leq t \leq \epsilon$). Agora, pode-se aplicar o teorema novamente, mas para a região V com $A \equiv 1 - N(V)$, que indicará o fato de a partícula estar em V para todo tempo t ⁸. Tomando um limite em que V é cada vez menor, aproximando-se da região V_0 , concluímos que: se a partícula está estritamente localizada na região V_0 , no tempo $t = 0$, com limite de velocidade finita de propagação, então a partícula permanece em V_0 em todos os momentos e, conseqüentemente, não pode se movimentar para o infinito espacial. Ou ainda, equivalentemente: Se no tempo $t = 0$, uma partícula é estritamente localizada em uma região limitada V_0 , então, a menos que ela permaneça em V_0 para todo instante de tempo, ela não pode ser estritamente localizada em uma outra região limitada V , independentemente de quão grande seja, para qualquer intervalo de tempo finito, isto é, a localização da partícula desenvolve uma cauda infinita; espalhamento sobre todo⁹ o espaço.

O teorema mostra que uma partícula, ou sistema, estritamente localizada em uma região limitada irá imediatamente desenvolver uma cauda infinita, exceto no caso em que a partícula permanece na região original a todo momento. Como deixamos claro ao discutir a equação de Schrödinger, esse espalhamento da função de onda não é problema no caso não relativístico, mas, no caso relativístico, entra em

⁷ Para misturas, pode-se utilizar a matriz de densidade.

⁸ A opção de $\langle \psi_t, N(V)\psi_t \rangle < 1$ implicaria que a partícula não estaria mais estritamente localizada em V , muito menos em V_0 , que é subconjunto.

⁹ Para todo o espaço realmente, é necessária a condição de invariância translacional.

The concept of the position to which one is led by their axioms is a thoroughly non-covariant one. A particle localized here and now has a small but non zero probability of being found ten light years away one second later - Wightman sobre Newton-Wigner

possível conflito com a causalidade de Einstein, caso exista esse operador autoadjunto de projeção que consegue localizar estritamente uma partícula que obedece a mecânica quântica. A generalidade do teorema está em não requerer a existência de um operador de posição, mas assumir positividade da energia.

No trabalho de Newton-Wigner, as funções de onda são estados de pura energia positiva, então não fechou essa questão de localização estrita, já que uma localização de uma posição de uma partícula não faz sentido com o aparecimento de pares de partículas além da própria considerada. Funções de onda de Newton-Wigner inicialmente localizadas possuem problema com propagação superluminal da distribuição de probabilidade [130] em acordo com o teorema de Hegerfeldt. Algo interessante sobre o trabalho de NW é o fato de Wigner concluir que partículas com spins $s \geq 1$ possuem sérias complicações em relação ao conceito de localizabilidade adotada por eles. Sendo assim, é possível dizer que o spin está fundamentalmente envolvido no próprio conceito de partícula.

Embora a generalidade do teorema de Hegerfeldt, no famoso experimento mental, devido a Fermi, de um sistema formado por dois átomos, ele apontou uma espúria violação da causalidade de Einstein que ficou conhecida por Paradoxo de Hegerfeldt [122]. Buchholz e Yngvason [131] apontaram erro na análise de Hegerfeldt em que a consideração da existência de um operador positivo relacionado à localização do sistema físico não é certa:

“ Any state of the type considered by Fermi which can actually be prepared in an experiment necessarily contains besides the two atoms, other particles, e.g., photons. This inevitable creation of particles in the process of localizing physical systems is the basic reason for the absence of locally pure states and the ensuing uselessness of the concept of transition probability for the study of local properties. But it is not at variance with the existence of a maximal propagation speed c ”.

Essa ideia de que há a criação de partículas no processo de localização é que problematiza toda a caracterização de uma partícula como ente isolado e localizado. Localização estrita requer quantidade arbitrariamente alta de energia. O comprimento de Compton é que aparece como o candidato da distância relevante [132] para essa fronteira em que o conceito de estrita localização de uma partícula tem ou não sentido. Isso confere ao comprimento de Compton a característica de estar naturalmente associado a importantes propriedades de uma partícula.

A cerca da relação dos resultados de Hegerfeldt com a visão da teoria de campos, a seguinte conclusão é inferida[133]

“In a field-theoretic context permanent infinite tails can be understood intuitively through clouds of virtual particles due

to renormalization (“dressed states”). It is also conceivable that whenever one tries to prepare a localized particle or system, one automatically creates particle-antiparticle pairs outside the desired localization region, and this would have the same effect as tails”.

Já é bem entendido que qualquer noção de localizabilidade que, assim como Newton-Wigner, assumir o bem razoável postulado de que o conjunto de estados localizados em uma região espaço-temporal \mathcal{O} é ortogonal aos estados localizados em um região complementarmente causal¹⁰ \mathcal{O}' é problematizada como uma localização de partícula [134].

Particularmente, encontra-se um conceito de localização para campos na formulação algébrica, chamado Localização Modular [135][136] [137], que é uma noção mais intrínseca do que a construção de um operador de posição para partículas e vai além da localização tipo pontual, utilizando uma localização tipo corda¹¹ (“string-like”). Há inúmeras referências do Professor Bert Schroer [138] [139] [140], atualmente no CBPF¹², sobre o assunto.

The primary physical interpretation of the theory is given in terms of local operations, not in terms of particles - Haag

5.2.2 Partícula

A análise do grupo de Poincaré feita por Wigner em 1939[58] é ainda referência na definição de partícula elementar. De acordo com Wigner, partículas elementares são descritas por um espaço de Hilbert em que o grupo de Poincaré age irreduzivelmente. A ideia associa representações irreduzíveis unitárias de um grupo de simetria espaço-temporal aos estados de partículas elementares.

A definição de partícula não possui um caráter universal, e a de partículas elementares continua um conceito que é muito presente em toda a física, mas carece de real entendimento em níveis fundamentais. No trabalho de Newton-Wigner, há uma distinção entre sistema elementar e partícula elementar, em que o sistema é tido como algo muito mais geral que a partícula.

O sistema elementar é associado a uma falta de estrutura caracterizada pela chamada condição de irreducibilidade; não existência de uma distinção relativisticamente invariante entre os vários estados do sistema, isto é, todos estados do sistema podem ser obtidos de qualquer estado previamente escolhido. Qualquer transformação leva um estado do sistema em outro estado também do sistema. Um exemplo é o átomo de hidrogênio no estado de mínima energia. Dessa forma, qualquer estado do sistema é obtido de qualquer outro por combinações das seguintes operações:

A particle is simply a physical system that has no continuous degrees of freedom except for its total momentum - Weinberg

¹⁰ O complemento causal de uma região \mathcal{O} no espaço de Minkowski consiste de todos os pontos que são deparados de \mathcal{O} por uma distância tipo “space-like”.

¹¹ Termo que não deve ser confundido com “string” de Teoria de Cordas.

¹² Instituição em que o presente autor realiza este trabalho de dissertação.

1. transformação de Poincaré em um estado inicial;
2. superposição linear de estados obtidos em (1);
3. tomar limite da sequência de Cauchy de estados obtidos em (1) e (2).

A partícula elementar, além de satisfazer a condição anterior, não pode ser considerada como união de outras partículas; o átomo de hidrogênio não é, portanto, uma partícula elementar. Porém, esse conceito não é muito útil na prática, pois nem sempre é fácil saber se uma partícula é ou não constituída por outras; o próton, por exemplo, que foi tido como partícula elementar.

mass →	$\approx 2.3 \text{ MeV}/c^2$	$\approx 1.275 \text{ GeV}/c^2$	$\approx 173.07 \text{ GeV}/c^2$	0	$\approx 126 \text{ GeV}/c^2$
charge →	$2/3$	$2/3$	$2/3$	0	0
spin →	$1/2$	$1/2$	$1/2$	1	0
	u up	c charm	t top	g gluon	H Higgs boson
QUARKS	$\approx 4.8 \text{ MeV}/c^2$	$\approx 95 \text{ MeV}/c^2$	$\approx 4.18 \text{ GeV}/c^2$	0	
	$-1/3$	$-1/3$	$-1/3$	0	
	$1/2$	$1/2$	$1/2$	1	
	d down	s strange	b bottom	γ photon	
	$0.511 \text{ MeV}/c^2$	$105.7 \text{ MeV}/c^2$	$1.777 \text{ GeV}/c^2$	$91.2 \text{ GeV}/c^2$	
	-1	-1	-1	0	
	$1/2$	$1/2$	$1/2$	1	
	e electron	μ muon	τ tau	Z Z boson	
LEPTONS	$< 2.2 \text{ eV}/c^2$	$< 0.17 \text{ MeV}/c^2$	$< 15.5 \text{ MeV}/c^2$	$80.4 \text{ GeV}/c^2$	
	0	0	0	± 1	
	$1/2$	$1/2$	$1/2$	1	
	ν_e electron neutrino	ν_μ muon neutrino	ν_τ tau neutrino	W W boson	
					GAUGE BOSONS

(a) Lista das partículas elementares de acordo com o Modelo Padrão (Wikipedia).

Figura 7: Partículas elementares

Embora o trabalho de Wigner tenha exaurido as possibilidades de classificação das representações unitárias irredutíveis do grupo de Poincaré como relacionadas a partículas elementares, a relatividade galileana pode ser também utilizada[141] para a associação com partículas, mesmo que com as dificuldades associadas. O ponto central é a questão da existência de representações irredutíveis de um grupo de simetria¹³. Barut[142] destaca o seguinte em relação a isso:

¹³ Em um cenário completamente clássico (sem espaço de Hilbert), a operação (2) acima é retirada, já que não há superposição no caso clássico. A condição análoga à atuação irredutível é um requerimento de transitividade: um sistema clássico dotado de simetria é elementar se o grupo de simetria age transitivamente no espaço de fase. O grupo de Poincaré tem uma ação transitiva sobre o conjunto de estados S , chamado espaço homogêneo do grupo de Poincaré, que forma uma variedade de dimensão finita com estrutura (simplética) de espaço de espaço de fase.

“The concept of an elementary particle is usually used in the following sense: (1) It is an elementary system, i.e., all states of the system can be obtained as superpositions of transforms of any state under Lorentz transformations (for relativistic theory) or under Galilei transformations (for a nonrelativistic theory), that is to say, it is described by an irreducible representation of the Poincaré or Galilei group. (2) It is not useful to attribute further structure to it”.

Particularmente, há na literatura posicionamentos que põe campos quânticos como objetos mais fundamentais em detrimento do conceito de partícula; por exemplo, [143] [60]. Ou afirmando explicitamente que “particles do not exist” [144]. Considerando partículas como fundamentais, há também trabalhos [145] sobre os limites da extensibilidade de partículas elementares.

5.3 CONSERVAÇÃO E SUPERSELEÇÃO

Uma lei de conservação costuma ser uma característica extremamente importante de teorias físicas. A existência de constantes de movimento e geradores de simetria é intimamente relacionada à integrabilidade de sistemas dinâmicos, por exemplo. O fato é que simetrias possuem relação com leis de conservação através do Teorema de Noether. Embora seja um teorema clássico que é levado também para o contexto quântico, a noção de simetria em teorias quânticas tem substanciais consequências que não estão presentes na teoria clássica. Por exemplo, operadores que representam transformações em vetores de estado são eles próprios observáveis enquanto que classicamente não o são; a transformação de paridade, por exemplo, classicamente é apenas uma regra de transformação.

Como simples exemplo para destacar que simetrias se manifestam diferentemente entre teoria clássica e quântica, lembramos o seguinte: Em um problema tipo Kepler, de força central, que possui invariância rotacional¹⁴, o momentum angular total $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ é uma constante de movimento, portanto conservado, e as condições iniciais $\vec{r}(0)$ e $\vec{p}(0)$ determinam \vec{L} para cada órbita clássica solução do potencial central. Escolhendo, por simplicidade, o conjunto de órbitas de magnitudes $r(0)$ e $p(0)$ constantes, mas permitindo todas direções possíveis para $\vec{r}(0)$ e $\vec{p}(0)$, as soluções são órbitas circulares de mesmo raio, mas em planos de todas direções possíveis. Cada órbita pode ser relacionada a outra por uma transformação de rotação nas coordenadas. Qualquer órbita em particular quebra a invariância rotacional do Hamiltoniano, mas o conjunto total de órbitas restaura a simetria esférica. Classicamente, as diferentes soluções em diferentes direções estão relacionadas por uma transformação de simetria, mas, uma vez fixadas as

A superselection rule in the broadest sense for a quantum mechanical theory can be defined as any restriction on what is observable in the theory - Wightman/Strocchi

¹⁴ Com um Hamiltoniano invariante rotacional do tipo $H = p^2/2m + V(r)$.

condições iniciais e o sistema de coordenadas, a órbita é fixa. O caso quântico análogo é o estado de mínima energia do elétron em um átomo de hidrogênio. O estado de mínima energia, que possui função de onda proporcional a e^{-r/a_0} , possui também a simetria esférica do Hamiltoniano (devido à realização de simetria de Weyl-Wigner), e o valor mais provável de r não é zero, mas o raio de Bohr a_0 . Porém, o número quântico de momento angular orbital dos estados é $l = 0$. Isso significa que há um tipo de superposição das soluções de órbitas clássicas, relacionadas pela simetria de rotação, para obtenção de uma função de onda correspondente ao estado de mínima energia. Duas soluções distintas relacionadas por uma simetria se unem para formar uma solução final. Então, a simetria na teoria quântica ganha um aspecto marcante em relação à realização na teoria clássica.

Além da lei de conservação, existem as chamadas regras de superseleção¹⁵. A motivação em distinguir esses conceitos é justificada pelo entendimento de diferenças e semelhanças entre spin, carga e a massa.

Usualmente, um observável B é conservado se comuta com a hamiltoniana do sistema

$$[B, H] = 0, \quad (5.7)$$

mas uma regra de superseleção é mais restritiva, pois requer que B comute com todos os observáveis A da teoria

$$[B, A] = 0, \quad (5.8)$$

em que B é agora chamado “carga” de superseleção.

Para entender o significado dessas regras, pode-se observar o princípio da superposição em mecânica quântica no intuito de destacar que tal princípio, inserido em um contexto físico, está restrito a um setor de superseleção.

Dadas funções de onda ψ_1 and ψ_2 de dois estados, o princípio da superposição permite que uma combinação linear

$$\psi = \alpha\psi_1 + \beta\psi_2$$

também seja uma função de onda de um estado quântico. O sentido da superposição em mecânica clássica, para soluções de onda, é muito intuitivo e claro, mas não o é em mecânica quântica, já que o valor da função de onda em um ponto não possui um preciso significado físico. A própria função de onda é dependente da representação escolhida.

Em geral, a seguinte superposição

$$\psi' = \alpha\psi_1 + \beta\psi_2, \quad \phi \in \mathbb{R}$$

¹⁵ Uma regra de seleção, diferentemente da superseleção, é apenas uma restrição na possibilidade de transições entre estados quânticos distintos. As regras de seleção estão relacionadas com as leis de conservação.

descreve um estado diferente do de ψ . O fato de essa fase relativa em superposição ser observável é uma característica da mecânica quântica e é chamado uma superposição coerente. Porém, estados quânticos nem sempre podem ser superpostos coerentemente, isto é, a fase relativa da superposição não é observável. Uma possível superposição do estado de um bóson com o estado de um férmion foi destacada por Wigner, Wightman e Wick (WWW) [146] como exemplo onde não há uma superposição coerente: Seja a superposição dada por estados de um férmion de spin meio, ψ_1 , e um bóson de spin zero ψ_2

$$\psi = \alpha\psi_1 + \beta\psi_2, \quad (5.9)$$

uma rotação de 2π transforma $\psi_1 \rightarrow -\psi_1$ e $\psi_2 \rightarrow \psi_2$, então ψ se transforma como

$$\psi' = -\alpha\psi_1 + \beta\psi_2. \quad (5.10)$$

Porém, uma rotação é uma fase global que transforma ψ em ψ' , então ambas possuem as mesmas propriedades. Isso significa que todo observável A não consegue fazer distinção entre os estados, ou seja

$$\begin{aligned} (\psi, A\psi) = (\psi', A\psi') = |\alpha|^2 (\psi_1, A\psi_1) + |\beta|^2 (\psi_2, A\psi_2) + \\ \pm (\alpha^*\beta (\psi_1, A\psi_2) + \alpha\beta^* (\psi_2, A\psi_1)), \end{aligned} \quad (5.11)$$

que é satisfeita para os dois sinais apenas se vale $(\psi_1, A\psi_2) = 0$ para todos observáveis físicos A ¹⁶. Para o estado ψ , os observáveis possuem os mesmos valores médios que no estado mistura descrito pelo operador densidade

$$\rho = |\alpha|^2 |\psi_1\rangle \langle\psi_1| + |\beta|^2 |\psi_2\rangle \langle\psi_2|.$$

A impossibilidade de fazer uma superposição coerentemente é chamada regra de superseleção. A regra de superseleção nos proíbe de formar um estado puro através da superposição de outros estados puros. Sendo assim, a presença de regra de superseleção faz que a superposição ψ não seja um estado puro, mas uma mistura, já que é estatisticamente equivalente ao estado mistura. Na falta da regra de superseleção, a superposição ψ não é estatisticamente equivalente ao estado mistura.

A ideia de regras de superseleção leva naturalmente a uma separação de subespaços ortogonais no espaço de Hilbert, que descreve um sistema quântico, em somas diretas¹⁷

$$\mathcal{H} = \oplus_i \mathcal{H}_i. \quad (5.12)$$

Tomando A_i como a restrição do observável A em um setor \mathcal{H}_i ,

$$A_i = A|_{\mathcal{H}_i}, \quad (5.13)$$

¹⁶ No caso da regra de seleção, $(\psi_1, H\psi_2) = 0$ para um dado Hamiltoniano H .

¹⁷ Em geral, o espaço de Hilbert será decomposto não discretamente, mas em um contínuo chamado "direct integral".

o operador A pode ser escrito como uma matriz diagonal cujos elementos pertencem a diferentes setores do espaço de Hilbert total

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & & \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & A_i & & \\ \vdots & & & \ddots & \end{pmatrix}, \quad (5.14)$$

isto é, $\langle \psi_1 | A | \psi_2 \rangle = 0$ para todo observável fisicamente realizado A .

Uma superposição coerente só é possível dentro de um único subespaço \mathcal{H}_i . Um conjunto de estados que obedece, sem restrição, a um princípio de superposição é chamado setor de superseleção. É impossível passar de um setor para outro através de operações locais. Uma regra de superseleção para a carga elétrica diz que um estado de carga definida $q = -1$, por exemplo, não pode se confundir com um estado de carga $q = +1$; um elétron é diferente de um próton.

Em suma, o espaço de Hilbert de um sistema é decomposto em subespaços que pertencem a autovalores distintos de uma “carga” de superseleção, e cada subespaço é chamado setor. As quantidades mensuráveis possuem elementos de matriz, entre vetores de estados que pertencem a setores distintos, nulos. A fase relativa entre os dois estados de setores distintos não é observável, e a superposição desses estados é, na verdade, um estado misto, não um estado puro obtido de uma superposição usual. Com isso, as regras de superseleção restringem o que pode ser ou não observável. Por exemplo, nem todo operador autoadjunto corresponde a um observável.

Sobre a validade dessas regras, Susskind[147], em 1966, sugere que seria possível interferência entre estados com diferentes cargas, nêutron e próton, em oposição ao trabalho de (WWW), porém estes autores respondem ([148]) reafirmando a validade da regra de superseleção para a carga. Uma referência na análise dessas regras é também os trabalhos de Wightman e Strocchi [149] [150]. No estudo de transição entre mecânica quântica e clássica, a decoerência, conceito introduzido em 1970 por H.Zeh, é considerada uma regra de superseleção induzida pelo ambiente¹⁸.

Assim como a carga elétrica total, em um sistema isolado, o momentum total e o momentum angular também são quantidades aditivas conservadas¹⁹. Entretanto, há uma diferença fundamental entre essas quantidades. Naturalmente, encontramos estados que representam uma superposição de estados com diferentes momenta; em particular, todos sistemas macroscópicos o são. A fase relativa dessa superposição de estados dá a posição espacial. Em notória oposição, não nos é dado um estado que representa superposição, não uma mistura, de estados com diferentes cargas e nem há uma interpretação

¹⁸ Einselection é o nome dado por Zurek.

¹⁹ Momento angular e linear são relacionados a simetrias do espaço-tempo. A simetria da carga elétrica é uma simetria global.

para a fase relativa. A regra de superseleção (“univalence”) que impede a superposição de férmions com bósons está relacionada a uma simetria de invariância rotacional. A superseleção para carga elétrica está relacionada à conservação da carga total. O número bariônico também possui uma regra de superseleção, e o número leptônico é violado devido a oscilações de neutrinos, que são massivos. Existem ideias teóricas não comprovadas que permitem a violação tanto do número leptônico quanto bariônico.

Na relatividade galileana, existe uma regra de superseleção para a massa total, isto é, uma fase (portanto, representação projetiva) que surge proibindo a superposição de estados com diferentes massas. Entretanto, pode-se estender o grupo de simetria (“central extension”) com criação de um operador de massa M que está no centro²⁰ da álgebra dos observáveis e é um gerador da álgebra de Lie. Nesse caso, agora os estados físicos estão em uma representação comum²¹ do grupo estendido de simetria.

No caso do grupo de Poincaré ou de Lorentz, representações projetivas podem ser descritas por representações unitárias do grupo de recobrimento no espaço de Hilbert do sistema. No caso do grupo de Galileu, representações projetivas não podem ser descritas por representações unitárias do grupo de recobrimento, mas por representações unitárias projetivas do grupo de recobrimento. Nesse sentido, o grupo de Galileu G é mais complicado que o de Lorentz.

O que se pode fazer é estender o grupo universal de recobrimento do grupo de Galileu para obtermos verdadeiras representações unitárias. Como estamos interessados no grupo de recobrimento, aplicamos o teorema de Bargmann (2), trocando a parte de rotação $SO(3)$ por $SU(2)$, para ($G = SU(2)$), relacionando as representações projetivas unitárias do grupo de recobrimento $\mathbb{R}^4 \rtimes (\mathbb{R}^3 \rtimes G)$ com as representações unitárias irredutíveis da extensão central H do grupo de recobrimento de Galileu. As seguintes relações expressam o que se passa em termos de espaço topológico

$$G \simeq G'/N, \quad (5.15a)$$

$$G' \simeq H/T, \quad (5.15b)$$

$$G \simeq H/T/N, \quad (5.15c)$$

$$H = T \times (N \times G), \quad (5.15d)$$

em que a extensão H é escrita como um produto²² em termos do subgrupo normal²³ T relacionado a translações espaço-temporais e ao subgrupo (abeliano) central de um parâmetro e do máximo subgrupo invariante N de H/T . Em particular, $G = SU(2) = H/T/N$.

20 O centro de um grupo G é o conjunto de elementos que comutam com todos elementos de G .

21 Ordinária no sentido de uma verdadeira representação.

22 A nível de grupo, trata-se de um produto semidireto.

23 Também chamado de subgrupo invariante ou subgrupo autoconjugado.

Em termos de grupo²⁴, o grupo de Galilei em três dimensões espaciais é dada pelo produto semidireto $G(3) = \mathbb{R}^4 \rtimes (\mathbb{R}^3 \rtimes SO(3))$ e seu recobrimento universal é simplesmente $\mathbb{R}^4 \rtimes (\mathbb{R}^3 \rtimes SU(2))$.

A álgebra estendida fica, portanto, livre de carga central, então a parte do grupo em torno da identidade possui apenas as representações ordinárias e não requer regras de superseleção. Para isso, é necessário considerar essa extensão de grupo.

A relação física entre simetria e regra de superseleção não parece clara. Um exemplo de como elas se relacionam pode ser visto ao olharmos as simetrias quebradas. Correntes conservadas derivadas de uma invariância local de gauge dão origem a regras de superseleção se a simetria de gauge não for quebrada[150]. Nas palavras de Weinberg[10]:

“It may or it may not be possible to prepare physical systems in arbitrary superpositions of states, but one cannot settle the question by reference to symmetry principles, because whatever one thinks the symmetry group of nature may be, there is always another group whose consequences are identical except for the absence of superselection rules”.

5.4 O FATOR GIROMAGNÉTICO

Após todas discussões dos capítulos anteriores, podemos fazer algumas conclusões e observações em respeito ao fator giromagnético.

O fator giromagnético g é uma quantidade adimensional que está presente na física de diversos problemas, desde que exista um sistema com descrição em termos de carga elétrica q , massa m e momento angular J . Uma expressão geral pode ser definida por

$$g = \frac{2m\mu}{qJ}, \quad (5.16)$$

em que μ é o momento magnético associado.

- Em electromagnetismo clássico:

Como visto em (2.13), o eletromagnetismo clássico de Maxwell fornece para um sistema com razão constante entre a carga e a massa, com uma velocidade comum para a massa e a carga,

$$\mu = \frac{qJ}{2m}$$

o valor $g = 1$ para o fator giromagnético. Naturalmente, é possível obter correções relativísticas para um dado sistema carregado massivo em que o valor a baixas velocidades seja obtido através de um limite.

²⁴ Já o grupo de Poincaré é simplesmente dado por $\mathbb{R}^{1,3} \rtimes SO(1,3)$.

- Em teoria quântica ou teoria de campos:

Requerindo-se o acoplamento mínimo para descrição de interação eletromagnética de partículas elementares, uma grande quantidade de trabalhos foram publicados sugerindo que o fator giromagnético de uma partícula elementar de spin s pudesse ser generalizado²⁵ a $g = 1/s$.

O resultado é conhecido por conjectura de Belinfante[151], 1953, e teve suporte de vários outros trabalhos que confirmavam a conjectura [152] [153] [154][155]. Como comentado na seção(2.2), Lévy-Leblond[20], além de Hagen-Hurley[156], e outros obtiveram o mesmo resultado, mas com invariância galileana, apoiando-se no acoplamento eletromagnético mínimo.

Entretanto, trabalhos da década de sessenta [157] [158] apontaram problemas no acoplamento mínimo eletromagnético para partículas com spin $s \pm \frac{3}{2}$ devido a um grande número de graus de liberdade que surgem com spins mais altos. Algumas equações de onda relativísticas lineares (Bargmann-Wigner 1948, Duffin–Kemmer–Petiau 1938/1939/1936, Bhabha 1945, Joos-Weinberg 1964) buscavam uma descrição de outros spins já que a equação de Dirac é apenas para spin meio. Tratam-se de equações de forma matemática similar à de Dirac em que a álgebra das matrizes γ é generalizada para outros spins.

Steven Weinberg [159], em 1970, fez a conjectura de que, na verdade, partículas elementares eletricamente carregadas possuem $g = 2$ independentemente do spin. Baseou-se em em análise de matriz-S em limites de altas energias²⁶, renormalizabilidade e a chamada “Gerasimov-Drell-Hearn Sum Rule”(GDH) com espalhamento de Compton. A derivação de GDH requer conceitos fundamentais [160] que estão bem presentes na QFT:

- Invariância de Lorentz
- Invariância de gauge
- Analiticidade
- Causalidade
- Unitariedade
- Simetria “Crossing”
- Invariância rotacional.

Weinberg conjecturou, baseado em seus cálculos, que acoplamentos não mínimos poderiam ser relevantes para o cálculo correto do fator giromagnético g :

25 No caso do formalismo de Bargmann-Wigner com o acoplamento eletromagnético mínimo, um espinor com o mínimo número de componentes ($2(2s + 1)$) possui fator giromagnético $g = 1/s$.

26 Amplitudes de espalhamento com bom comportamento a altas energias.

“As far as I know, the electrodynamics of charged particles of unit spin is unrenormalizable for any value of g . However, even if we can't calculate them, higher order electromagnetic (and weak) effects on photon-intermediate bosons scattering amplitudes ought to be small, so if these amplitudes behave well at infinity, we must again have $g \sim 2$ ”.

Pelos importantes princípios, especialmente em QFT, envolvidos na derivação de Weinberg, ele destacou que descobrir o valor experimental do fator giromagnético de um bóson intermediário, como o bóson W , seria muito útil para confirmar quais princípios realmente determinam ou não as propriedades eletromagnéticas das partículas elementares. O resultado foi que o bóson foi descoberto experimentalmente somente em 1983, mas o valor indicava que Weinberg estava certo, já que $g_W = 2.22 \pm 0.20$.

Um outro trabalho de Weinberg-Jackiw[161] indicava que a contribuição do bóson W para o cálculo do momento magnético anômalo do múon só é finita com $g_W = 2$.

The choice $g = 2$ for the bare magnetic moment is a necessary (but insufficient!) condition of unitarity and renormalizability in QED - Khriplovich

Bem depois, em 1992, um trabalho de Ferrara-Porrati-Telegdi[162] generalizou o mesmo resultado de Weinberg a partir de formulação lagrangeana, não puramente em termos de matriz- S , mas definitivamente desligado do requerimento de acoplamento mínimo. O requerimento essencial era de: *“Any theory of massive particles interacting with photons must possess a smooth $M \rightarrow 0$ fixed-charge limit”*. O trabalho conclui que, para o Modelo-Padrão, o g_W do bóson W vem de acoplamento não mínimo da teoria de gauge, e que o limite de unitariedade para a descrição de interação entre partículas de spin arbitrário e o fóton deve ser de energias muito mais altas que as massas das partículas envolvidas, $E \gg M/e$. Embora o interessante resultado, os autores citam que possíveis problemas de propagações não causais podem estar presentes mesmo na formulação lagrangeana, embora não tivessem interesse em elaborar mais sobre a questão.

Assim, no capítulo (4), o aparecimento do acoplamento eletromagnético não mínimo na descrição da interação com bóson W fica justificado, mais uma vez, como natural no sentido de fornecer o valor esperado, a “tree level”, do fator giromagnético em acordo com os resultados experimentais.

É uma visão geral a de que altos valores para o fator giromagnético é uma característica de partículas compostas; o próton tem $g_p \sim 5.5$ e é formado de quarks. No caso dos hádrons, a QCD tem grande relevância para obtenção teórica do valor medido. No caso dos léptons, a contribuição da QED já é a mais relevante.

- Na gravitação:

As soluções das equações de Einstein-Maxwell[163] são relevantes para a obtenção das configurações do campo gravitacional e eletromagnético de um corpo eletricamente carregado em rotação. É importante buscar as soluções em um regime estacionário, com simetria axial²⁷; soluções assintoticamente planas ($\Lambda = 0$), fora de efeitos gravitacionais fortes. Assim, podem ser definidos, independentemente do tempo, os valores dos parâmetros que descrevem o sistema: a massa m , a carga q e o momento angular J . Diferentemente do eletromagnetismo clássico, o campo gravitacional, além do eletromagnético, é relevante.

Buracos negros podem ser formados a partir de colapso de estrelas muito massivas em rotação. O fenômeno pode ser bastante complicado, mas a conjectura “no-hair” diz que, independentemente de como o buraco negro foi formado, soluções de buraco negro das equações de Einstein-Maxwell são completamente caracterizadas por apenas três²⁸ parâmetros (assintóticos) clássicos observados externamente ao horizonte de eventos: massa total, carga elétrica e momento angular.

Sucintamente, em relação a presença de carga elétrica e momento angular, os buracos negros são chamados

	$J = 0$	$J \neq 0$
$q = 0$	Schwarzschild	Kerr
$q \neq 0$	Reissner-Nordström	Kerr-Newman

Soluções tipo Kerr-Newman são soluções tipo Kerr carregadas e são as relevantes aqui para a questão do momento magnético; buraco negro carregado em rotação.

Interessantemente, a solução de Kerr-Newman é caracterizada por um fator giromagnético que é o dobro do valor encontrado no eletromagnetismo clássico para um objeto pontual que rotaciona e possui uma razão constante entre a massa e a carga, ou seja

$$\frac{J}{\mu} = \frac{m}{q}; \quad g = 2, \quad (5.17)$$

que é então resultado idêntico ao obtido pela equação de Dirac para o elétron.

Por causa disso, formalmente, uma figura clássica para o spin do elétron seria[164] um disco de Kerr-Newman com momento angular $J = \frac{1}{2}\hbar$ e diâmetro $d = \frac{\hbar}{m}$, que é o comprimento de Compton associado.

²⁷ Em inglês, o termo é “axisymmetric”.

²⁸ A existência física de monopolo magnético deve aumentar esse número para quatro.

Na verdade, como já mencionado, o valor $g = 2$ é o valor universal para partículas elementares massivas carregadas eletricamente.

Um trabalho de Jayme Tiomno-Wald-Cohen[165] sobre uma casca massiva uniformemente carregada em rotação obtém o valor $g = 1$ quando o raio da casca é grande comparado ao raio de Schwarzschild, mas ocorre o limite $g \rightarrow 2$ quando a casca tende ao próprio raio de Schwarzschild associado, que cresce com o aumento da massa.

Embora a relatividade geral tenha obtido esse valor, em teoria de cordas, Susskind[166] destaca que, embora seja possível obter $g = 2$ em um tipo²⁹ de teoria de cordas, o valor não é universal ou preferencial, pois é possível obter outros valores de acordo com as considerações tomadas nas teorias de cordas.

Se a coincidência do valor $g = 2$ ser obtido tanto em relatividade geral quanto em teoria quântica é, de fato, apenas uma coincidência, não existe ainda uma resposta certa. Porém, o comum resultado vem de sistemas aparentemente bem distintos; buracos negros e partículas elementares. Caso não seja mera especulação, pode haver uma convergência entre a teoria quântica e a gravitação que é centralizada nessa importante quantidade adimensional chamada momento magnético.

²⁹ "Heterotic string theory".

Ao consideramos as fontes eletromagnéticas em um caráter microscópico, em oposição ao macroscópico tido como usual do eletromagnetismo clássico, as equações de Maxwell mostram efeitos adicionais além dos referentes à carga elétrica. Naturalmente, uma partícula carregada com spin possui um momento magnético associado, isso implica em um campo magnético devido ao spin; embora esse efeito costume ser desprezado frente aos campos eletromagnéticos externos em que uma partícula é usualmente submetida. Entretanto, ao consideramos apenas uma dada partícula elementar eletricamente carregada, a interação com o fóton, que é concebido em consequência da radiação eletromagnética gerada pela partícula carregada, é relevante não apenas em termos de carga, mas também o spin começa a evidenciar participação na interação.

No caso fermiônico do elétron, por exemplo, o spin e a densidade de partículas se acoplam ao campo A^μ do fóton, mas é necessário recorrer à uma análise on-shell (uma consulta às equações de campo) para perceber esses efeitos. O termo de corrente convectiva pode ser ignorado no limite não relativístico, já que a partícula é massiva.

No caso de uma partícula bosônica escalar, spin zero, carregada e massiva, o spin não pode estar presente, mas a densidade de partícula também é utilizada para o acoplamento. Diferentemente do caso fermiônico, não é preciso fazer a análise on-shell para perceber isso; basta fazer a variação da lagrangeana em relação ao campo associado ao fóton. O termo convectivo pode ser novamente desprezado.

Já no caso do bóson vetorial, spin um, carregado e massivo, bóson W como único conhecido, tanto o spin quanto a densidade de partículas parecem influenciar o acoplamento, mas, adicionalmente, as polarizações também contribuem, pois surge uma matriz de polarização que, ao contrário da densidade de partícula que é uma quantia escalar, possui índices nos campos W_μ . A matriz de polarização pode ser considerada um termo mais geral que a densidade de partículas, já que está é o traço daquela. Novamente, não há a necessidade da consideração on-shell e o termo convectivo pode ser desprezado.

Em qualquer um dos casos citados, a massa sempre surge no denominador da corrente eletromagnética, caso consideremos a expressão on-shell. O limite em que a massa da partícula em questão é tomado a zero, $m \rightarrow 0$, não é um limite razoável nessa formulação de campos de gauge pontuais dados por uma lagrangeana.

A mecânica quântica relativística iniciou a busca por fornecer a esperada característica de partículas localizáveis, mas os princípios bá-

sicos de positividade de energia (ou condição espectral relativística), causalidade e localização compacta mostraram haver um conflito que não permitia uma teoria consistente que descrevesse uma partícula por sua função de onda. A questão da localização foi levada para a teoria quântica de campos, mas não em termos de partículas e sim de campos. Entretanto, pode-se dizer que a teoria quântica de campos sofre em fornecer uma interpretação de partículas quando há interação entre os campos; o conceito de partícula é restrito aos limites assintóticos $t \rightarrow \pm\infty$ (no caso não massivo, há complicações adicionais).

Embora o trabalho de Wigner tenha completamente classificado os estados de partículas em uma teoria quântica (espaço de Hilbert) com transformações de Poincaré, de uma teoria livre, nem todos os tipos de partículas possíveis parecem se realizarem na Natureza. De acordo com a classificação de massa e spin (ou helicidade), há uma tricotomia em: $m > 0$, $m = 0$ com helicidade finita, $m = 0$ com helicidade infinita. Particularmente, a terceira categoria, estados com massa nula e helicidade infinita, não recebe amparo algum da teoria de campos pontuais de gauge no sentido de cumprir a localizabilidade. Na formulação algébrica da teoria quântica de campos (AQFT), essa terceira categoria recebe uma localização (modular) causal, porém em uma região não compacta. Assim, o preço da localização é uma formulação de campos não pontuais, mas tipo corda semi-infinita.

Ao longo do desenvolvimento desta dissertação, ficou destacada a constante presença do comprimento de Compton λ associado a uma partícula. No cálculo do momento magnético com a utilização da ideia de um campo clássico estendido, o fator giromagnético anômalo dos léptons, considerado o valor experimental de maior precisão entre todas as Ciências naturais, é exatamente obtido em primeira ordem na constante de estrutura fina α . No caso bosônico vetorial W , em que o valor experimental tem uma maior incerteza na medida, o cálculo teórico baseado na aludida extensibilidade obteve uma menor contribuição em relação ao valor esperado, embora em acordo com a ordem de α/π . A correção calculada foi inteiramente baseada na interação eletromagnética do portador da carga com o fóton, então não há motivos para que esse procedimento dê conta das contribuições devido a outras interações. Certamente, o bóson W , por possuir uma grande massa, permite que as contribuições de interação fraca sejam substanciais comparadas ao caso leptônico, em que o termo dominante é o termo eletromagnético de Schwinger, e as outras interações desempenham menor relevância para o cálculo do fator anômalo. Deve-se lembrar também de que o cálculo desconsiderou o efeito integral da “back-reaction” e considerou um regime não relativístico; simplificações justificadas, mas não inócuas. Certamente, uma caracterização mais realista, em que se permite uma associação corrigida

por $\lambda + \delta\lambda$ à extensão do campo, possui chances maiores de amenizar as simplificações tomadas.

O elétron, como exemplo de partícula elementar, já foi testado a distâncias de 10^{-18}m e não demonstrou ser composto por alguma outra subestrutura. Entretanto, a relação entre possuir estrutura e ser pontual não é totalmente clara. Parece óbvio que algo realmente pontual não possa ser composto de algo menor¹, mas uma partícula, no sentido quântico, elementar poderia possuir um comprimento espacial diretamente mensurável e não ser composta, ou seja, realmente elementar. É claro, até mesmo em mecânica clássica, que uma estrutura contínua pode parecer pontual em relação ao comprimento de teste (poder de resolução) que está associado à mediação.

O tamanho de partículas é determinado pela maneira a qual a partícula responde aos experimentos de espalhamento, então os resultados dependem do poder de resolução envolvido. Certamente, a Física não fechou ainda a questão do tamanho das partículas elementares; seja para os férmions ou para os bósons. Quanto à gravitação, existe uma escala fundamental em gravitação quântica[167] que é pensada como menor comprimento físico realizável na Natureza, o comprimento de Planck $\sim 10^{-35}\text{m}$. Contudo, não há ainda uma teoria de gravidade quântica destituída de sérios problemas fundamentais.

Em relação ao comprimento de Compton, por exemplo do elétron $\lambda_e \sim 10^{-12}\text{m}$, aparenta ser um comprimento natural, devido sua ubiquidade, que associa uma partícula a características esperadas satisfeitas por ela, conforme comentado ao longo dessa dissertação. Nesse ponto, a localizabilidade nos fornece o comprimento de Compton com um certo caráter especial, pois menores distâncias podem envolver pares de partículas e antipartículas mudando, portanto, a natureza do sistema elementar inicial.

Na teoria quântica de campos, os valores dos fatores giromagnéticos anômalos são calculados através de correções de flutuações quânticas relativísticas chamadas correções radiativas. A utilização da ideia de campo estendido para obtenção do fator anômalo tem como objetivo nos questionar se é possível, de certa forma, simular efeitos quânticos através dessa prescrição de extensibilidade e assim ganhar algum significado para o que realmente é uma quantização, algo realizado através de inúmeros métodos, mas que carece de lúdica interpretação física.

No âmbito de prosseguir com as questões aqui indagadas, seria, de certo, assaz esclarecedor compreender melhor as atribuições do spin, da carga e da massa e, conseqüentemente, as suas relações inseridas no contexto de uma Física mais fundamental, isto é, além do que conquistamos até o presente momento.

¹ No máximo por algo do mesmo tamanho, mas aí a semântica da palavra “composto” não parece ser bem definida.

Parte III

APÊNDICE

APÊNDICE

A.1 CORRENTES ELETROMAGNÉTICAS

Na tabela a seguir, segue um resumo da corrente eletromagnética¹ e a decomposição de gordon para o spin 0 (bóson escalar), spin 1/2 (férmion) e spin 1 (bóson vetorial). Em particular, considera-se o bóson vetorial já com o termo de acoplamento não mínimo vindo do cenário de teoria eletrofraca para corrigir o fator giromagnético.

spin	0	1/2	1
\tilde{J}^μ	$\frac{i}{1}[\phi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi] - \frac{2eq}{1}(\phi^* \phi)A^\mu$	$\bar{\psi}\gamma^\alpha\psi$	$i(W^{*\mu\nu}W_\nu - W^{\mu\nu}W_\nu^*)$ $- i\partial_\nu(W^{*\mu}W^\nu - W^{*\nu}W^\mu)$ $+ 2eqA^\mu(W^{\nu*}W_\nu)$ $- eqA^\nu[W^{\mu*}W_\nu + W^\mu W_\nu^*]$
Gordon	---	$\frac{i}{2m}(\bar{\psi}\partial^\alpha\psi - (\partial^\alpha\bar{\psi})\psi)$ $+ \frac{1}{m}\partial_\mu(\bar{\psi}\Sigma^{\alpha\mu}\psi) - \frac{q}{m}\bar{\psi}\psi A^\alpha$	$i(W^\nu \overleftrightarrow{D}^\mu W_\nu^*)$ $+ 2\partial_\beta(W^\alpha(\Sigma^{\mu\nu})_\alpha^\beta W_\nu^*)$ $- 2\partial_\beta(W^{*\alpha}(\Sigma^{\mu\nu})_\alpha^\beta W_\nu)$ $+ \frac{eq}{m^2}W^{*\mu}W_\kappa(\partial_\nu F^{\nu\kappa})$ $+ \frac{eq}{m^2}W^\mu W_\kappa^*(\partial_\nu F^{\nu\kappa})$.

Tabela 3: Correntes Eletromagnéticas

Na tabela, a corrente fatorada \tilde{J}^μ vem da lagrangeana correspondente acoplada ao fóton e é calculada em termos do segundo teorema de Noether (“improper conservations”), portanto é uma corrente off-shell. Os termos em *Gordon* significam que cada corrente foi colocada na forma de decomposição de Gordon, em que se utiliza a informação das equações de campo com o primeiro teorema de Noether. Trata-se de uma versão on-shell da corrente. Não há a necessidade de uma forma de Gordon para o campo escalar, já que o termo convectivo aparece naturalmente já na corrente off-shell, e não há termo de spin, obviamente.

Pode-se perceber que a massa sempre aparece ao utilizarmos as correntes em forma de Gordon. Particularmente, a corrente de Schrö-

¹ Na verdade, estamos fatorando o termo (eq) de carga, então, rigorosamente, a corrente fatorada (a corrente a menos de um fator (eq)) pode ser chamada de \tilde{J} . Por exemplo, no caso de spin 1/2, a corrente eletromagnética correta é (eq) $\bar{\psi}\gamma^\alpha\psi$

dingar se assemelha à corrente do campo escalar, mas a menos da massa.

No caso de Schrödinger, o vetor densidade de corrente, associado com a densidade de probabilidade, é dado por

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - \frac{eq}{m} \vec{A} |\Psi|^2, \quad (\text{A.1})$$

com $\rho = |\Psi|^2$. A generalização de Schrödinger para o caso relativístico implica em considerar

$$j^\mu = \frac{i\hbar}{2m} \left[\phi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi \right] - \frac{eq}{m} (\phi^* \phi) A^\mu, \quad (\text{A.2})$$

que se reduz, na componente espacial, ao vetor densidade de corrente de Schrödinger, mas a definição de ρ se altera devido a derivadas temporais, permitindo toda a problematização de interpretar ρ como densidade de probabilidade, já que a expressão permite ρ negativos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] David J Gross and Frank Wilczek. Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories. *Physical Review Letters*, 30(26):1343, 1973.
- [2] H David Politzer. Reliable perturbative results for strong interactions? *Physical Review Letters*, 30(26):1346, 1973.
- [3] Gerardus t Hooft. A planar diagram theory for strong interactions. *Nucl. Phys. B*, 72(CERN-TH-1786):461–473, 1973.
- [4] Abdus Salam and John Clive Ward. Electromagnetic and weak interactions. *Physics Letters*, 13(2):168–171, 1964.
- [5] Sin-itiro Tomonaga. *The story of spin*. University of Chicago Press, 1997.
- [6] Raymond F Streater and Arthur Strong Wightman. *PCT, spin and statistics, and all that*. Princeton University Press, 2000.
- [7] Steven Weinberg. The search for unity: Notes for a history of quantum field theory. *Daedalus*, pages 17–35, 1977.
- [8] Steven Weinberg. *Dreams of a final theory*. Vintage, 1992.
- [9] Eugene Paul Wigner. *The Collected Works of Eugene Paul Wigner: Historical, Philosophical, and Socio-political Papers. Historical and Biographical Reflections and Syntheses*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [10] Steven Weinberg. *The quantum theory of fields*, volume 2. Cambridge university press, 1996.
- [11] KM Case and SG Gasiorowicz. Can massless particles be charged? *Physical Review*, 125(3):1055, 1962.
- [12] G Morchio and F Strocchi. Confinement of massless charged particles in qed 4 and of charged particles in qed 3. *Annals of Physics*, 172(2):267–279, 1986.
- [13] Steven Weinberg and Edward Witten. Limits on massless particles. *Physics Letters B*, 96(1-2):59–62, 1980.
- [14] Jakob Yngvason. Zero-mass infinite spin representations of the poincaré group and quantum field theory. *Communications in Mathematical Physics*, 18(3):195–203, 1970.
- [15] Bert Schroer. Dark matter and wigner’s third positive-energy representation class. *arXiv preprint arXiv:1306.3876*, 2013.

- [16] Peter W Milonni. *The quantum vacuum: an introduction to quantum electrodynamics*. Academic press, 2013.
- [17] Gerard 't Hooft. Nobel lecture: A confrontation with infinity. *Reviews of Modern Physics*, 72(2):333–339, 2000.
- [18] Toichiro Kinoshita. *Quantum electrodynamics*, volume 7. World Scientific, 1990.
- [19] Victor Frederick Weisskopf. *Physics in the twentieth century: Selected essays*. 1972.
- [20] Jean-Marc Lévy-Leblond. Nonrelativistic particles and wave equations. *Communications in Mathematical Physics*, 6(4):286–311, 1967.
- [21] Max Jammer. *The conceptual development of quantum mechanics*. 1966.
- [22] S Kamefuchi and Y Takahashi. A lagrange formalism and the relativistic quantization of the bargmann-wigner fields. *Il Nuovo Cimento A*, 44(1):1–16, 1966.
- [23] Hans C Ohanian. What is spin. *Am. J. Phys*, 54(6):500–505, 1986.
- [24] Pavel A Andreev. Separated spin-up and spin-down quantum hydrodynamics of degenerated electrons: spin-electron acoustic wave appearance. *Physical Review E*, 91(3):033111, 2015.
- [25] Bruce E Kane. A silicon-based nuclear spin quantum computer. *nature*, 393(6681):133–137, 1998.
- [26] R.D. Sard. *Relativistic mechanics: special relativity and classical particle dynamics*. Lecture notes and supplements in physics. W. A. Benjamin, 1970. URL <https://books.google.com.br/books?id=RFrvAAAAMAAJ>.
- [27] David Todd Wilkinson and HR Crane. Precision measurement of the g factor of the free electron. *Physical Review*, 130(3):852, 1963.
- [28] Robert S Van Dyck Jr, Paul B Schwinberg, and Hans G Dehmelt. New high-precision comparison of electron and positron g factors. *Physical Review Letters*, 59(1):26, 1987.
- [29] Hans Dehmelt. A single atomic particle forever floating at rest in free space: new value for electron radius. *Physica Scripta*, 1988 (T22):102, 1988.
- [30] Lowell S Brown and Gerald Gabrielse. Geonium theory: Physics of a single electron or ion in a penning trap. *Reviews of Modern Physics*, 58(1):233, 1986.

- [31] G Gabrielse, D Hanneke, T Kinoshita, M Nio, and B Odom. New determination of the fine structure constant from the electron g value and qed. *Physical Review Letters*, 97(3):030802, 2006.
- [32] Valentine Bargmann, Louis Michel, and Valentine L Telegdi. Precession of the polarization of particles moving in a homogeneous electromagnetic field. *Physical Review Letters*, 2(10):435, 1959.
- [33] R Frisch and Otto Stern. Über die magnetische ablenkung von wasserstoffmolekülen und das magnetische moment des protons. i. *Zeitschrift für Physik*, 85(1-2):4–16, 1933.
- [34] Luis W Alvarez and F Bloch. A quantitative determination of the neutron moment in absolute nuclear magnetons. *Physical review*, 57(2):111, 1940.
- [35] Robert L Jaffe. Where does the proton really get its spin? *Physics today*, 48(9):24–33, 1995.
- [36] Anthony W Thomas. Interplay of spin and orbital angular momentum in the proton. *Physical review letters*, 101(10):102003, 2008.
- [37] Darragh E Nagle, Renne S Julian, and Jerrold R Zacharias. The hyperfine structure of atomic hydrogen and deuterium. *Physical Review*, 72(10):971, 1947.
- [38] Gregory Breit. Does the electron have an intrinsic magnetic moment? *Physical Review*, 72(10):984, 1947.
- [39] Julian Schwinger. Quantum electrodynamics. iii. the electromagnetic properties of the electron—radiative corrections to scattering. *Physical Review*, 76(6):790, 1949.
- [40] P Kusch and HM Foley. The magnetic moment of the electron. *Physical Review*, 74(3):250, 1948.
- [41] K. A. Olive et al. Review of Particle Physics. *Chin. Phys.*, C38:090001, 2014. doi: 10.1088/1674-1137/38/9/090001.
- [42] D Hanneke, S Fogwell, and G Gabrielse. New measurement of the electron magnetic moment and the fine structure constant. *Physical Review Letters*, 100(12):120801, 2008.
- [43] D Hanneke, S Fogwell Hoogerheide, and G Gabrielse. Cavity control of a single-electron quantum cyclotron: Measuring the electron magnetic moment. *Physical Review A*, 83(5):052122, 2011.

- [44] GW Bennett, B Bousquet, HN Brown, G Bunce, RM Carey, P Cushman, GT Danby, PT Debevec, M Deile, H Deng, et al. Improved limit on the muon electric dipole moment. *Physical Review D*, 80(5):052008, 2009.
- [45] Tatsumi Aoyama, Masashi Hayakawa, Toichiro Kinoshita, and Makiko Nio. Tenth-order electron anomalous magnetic moment: Contribution of diagrams without closed lepton loops. *Physical Review D*, 91(3):033006, 2015.
- [46] Andrzej Czarnecki and William J Marciano. Muon anomalous magnetic moment: A harbinger for “new physics”. *Physical Review D*, 64(1):013014, 2001.
- [47] Gerald W Bennett, B Bousquet, HN Brown, G Bunce, RM Carey, P Cushman, GT Danby, PT Debevec, M Deile, H Deng, et al. Final report of the e821 muon anomalous magnetic moment measurement at bnl. *Physical Review D*, 73(7):072003, 2006.
- [48] T Aoyama, M Hayakawa, T Kinoshita, and M Nio. Revised value of the eighth-order qed contribution to the anomalous magnetic moment of the electron. *Physical Review D*, 77(5):053012, 2008.
- [49] Tatsumi Aoyama, Masashi Hayakawa, Toichiro Kinoshita, and Makiko Nio. Complete tenth-order qed contribution to the muon $g-2$. *Physical review letters*, 109(11):111808, 2012.
- [50] Malo Cadoret, Estefania De Mirandes, Pierre Cladé, Saïda Guellati-Khélifa, Catherine Schwob, François Nez, Lucile Julien, and François Biraben. Combination of bloch oscillations with a ramsey-bordé interferometer: new determination of the fine structure constant. *Physical review letters*, 101(23):230801, 2008.
- [51] Andrzej Czarnecki. Particle physics: A finer constant. *Nature*, 442(7102):516–517, 2006.
- [52] Andrzej Czarnecki, Bernd Krause, and William J Marciano. Electroweak corrections to the muon anomalous magnetic moment. *Physical Review Letters*, 76(18):3267, 1996.
- [53] L Landau. On the conservation laws for weak interactions. *Nuclear Physics*, 3(1):127–131, 1957.
- [54] Norman F Ramsey. Time reversal, charge conjugation, magnetic pole conjugation, and parity. *Physical Review*, 109(1):225, 1958.
- [55] JH Smith, EM Purcell, and NF Ramsey. Experimental limit to the electric dipole moment of the neutron. *Physical Review*, 108(1):120, 1957.

- [56] Norman F Ramsey. Electric-dipole moments of elementary particles. *Reports on progress in physics*, 45(1):95, 1982.
- [57] Maxim Pospelov and Adam Ritz. Electric dipole moments as probes of new physics. *Annals of physics*, 318(1):119–169, 2005.
- [58] Eugene Wigner. On unitary representations of the inhomogeneous lorentz group. *Annals of mathematics*, pages 149–204, 1939.
- [59] Valentine Bargmann. On unitary ray representations of continuous groups. *Annals of Mathematics*, pages 1–46, 1954.
- [60] Art Hobson. There are no particles, there are only fields. *American Journal of Physics*, 81(3):211–223, 2013.
- [61] Giorgio Velo and Arthur S Wightman. Invariant wave equations. In *Invariant Wave Equations*, volume 73, 1978.
- [62] Paul AM Dirac. Relativistic quantum mechanics. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 136, pages 453–464. The Royal Society, 1932.
- [63] Herman Feshbach and Felix Villars. Elementary relativistic wave mechanics of spin 0 and spin 1/2 particles. *Reviews of Modern Physics*, 30(1):24, 1958.
- [64] Matthew F Pusey, Jonathan Barrett, and Terry Rudolph. On the reality of the quantum state. *Nature Physics*, 8(6):475–478, 2012.
- [65] M.I.T. Fine structure and lamb shift. jan 2006. lecture notes.
- [66] P Krekora, Q Su, and R Grobe. Relativistic electron localization and the lack of zitterbewegung. *Physical review letters*, 93(4):043004, 2004.
- [67] Zhi-Yong Wang and Cai-Dong Xiong. Zitterbewegung by quantum field-theory considerations. *Physical Review A*, 77(4):045402, 2008.
- [68] Rene Gerritsma, Gerhard Kirchmair, Florian Zähringer, E Solano, R Blatt, and CF Roos. Quantum simulation of the dirac equation. *Nature*, 463(7277):68–71, 2010.
- [69] JY Vaishnav and Charles W Clark. Observing zitterbewegung with ultracold atoms. *Physical review letters*, 100(15):153002, 2008.
- [70] Andrey Chaves, L Covaci, Kh Yu Rakhimov, GA Farias, and FM Peeters. Wave-packet dynamics and valley filter in strained graphene. *Physical Review B*, 82(20):205430, 2010.

- [71] J Tworzydło, Björn Trauzettel, M Titov, Adam Rycerz, and Carlo WJ Beenakker. Sub-poissonian shot noise in graphene. *Physical Review Letters*, 96(24):246802, 2006.
- [72] MI Katsnelson. Zitterbewegung, chirality, and minimal conductivity in graphene. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 51(2):157–160, 2006.
- [73] R Winkler, U Zülicke, and Jens Bolte. Oscillatory multiband dynamics of free particles: The ubiquity of zitterbewegung effects. *Physical Review B*, 75(20):205314, 2007.
- [74] AH Castro Neto, F Guinea, NMR Peres, Kostya S Novoselov, and Andre K Geim. The electronic properties of graphene. *Reviews of modern physics*, 81(1):109, 2009.
- [75] Tomasz M Rusin and Wlodek Zawadzki. Theory of electron zitterbewegung in graphene probed by femtosecond laser pulses. *Physical Review B*, 80(4):045416, 2009.
- [76] AO Barut and AJ Bracken. Zitterbewegung and the internal geometry of the electron. *Physical Review D*, 23(10):2454, 1981.
- [77] Kerson Huang. On the zitterbewegung of the dirac electron. *American Journal of Physics*, 20(8):479–484, 1952.
- [78] David Hestenes. The zitterbewegung interpretation of quantum mechanics. *Foundations of Physics*, 20(10):1213–1232, 1990.
- [79] Bernd Thaller. Visualizing the kinematics of relativistic wave packets. *arXiv preprint quant-ph/0409079*, 2004.
- [80] Sang Tae Park. Propagation of a relativistic electron wave packet in the dirac equation. *Physical Review A*, 86(6):062105, 2012.
- [81] KM Case. Some generalizations of the foldy-wouthuysen transformation. *Physical Review*, 95(5):1323, 1954.
- [82] VP Neznamov and AJ Silenko. Foldy–wouthuysen wave functions and conditions of transformation between dirac and foldy–wouthuysen representations. *Journal of Mathematical Physics*, 50(12):122302, 2009.
- [83] Alexander J Silenko. Foldy-wouthuysen transformation and semiclassical limit for relativistic particles in strong external fields. *Physical Review A*, 77(1):012116, 2008.
- [84] J Jayaraman. A note on the recent foldy-wouthuysen transformations for particles of arbitrary spin. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 8(1):L1, 1975.

- [85] David Hestenes and Antonio Weingartshofer. *The Electron: New Theory and Experiment*, volume 45. Springer Science & Business Media, 2012.
- [86] Ia B Zel'Dovich. Electromagnetic interaction with parity violation. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 6:1184, 1958.
- [87] VM Dubovik and VV Tugushev. Toroid moments in electrodynamics and solid-state physics. *Physics reports*, 187(4):145–202, 1990.
- [88] Maxim Pospelov and Tonnis ter Veldhuis. Direct and indirect limits on the electro-magnetic form factors of wimps. *Physics Letters B*, 480(1):181–186, 2000.
- [89] Chiu Man Ho and Robert J Scherrer. Anapole dark matter. *Physics Letters B*, 722(4):341–346, 2013.
- [90] Boris Kayser and Alfred S Goldhaber. Cpt and cp properties of majorana particles, and the consequences. *Physical Review D*, 28(9):2341, 1983.
- [91] MS Dvornikov and AI Studenikin. Electromagnetic form factors of a massive neutrino. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 99(2):254–269, 2004.
- [92] H Czyz, K Kołodziej, M Zrałek, and P Christova. Is the anapole moment a physical observable? *Canadian Journal of Physics*, 66(2):132–134, 1988.
- [93] H Czyż and M Zralek. The anapole moment and singlet fields. *Canadian Journal of Physics*, 66(5):384–384, 1988.
- [94] A Rosado. Physical electroweak anapole moment for the neutrino. *Physical Review D*, 61(1):013001, 1999.
- [95] A Rosado. A simple connection of the (electroweak) anapole moment with the (electroweak) charge radius of a massless left-handed dirac neutrino. *Revista Mexicana de Física*, 47(2):132–135, 2001.
- [96] Luca Fabbri. A classical calculation of the leptonic magnetic moment. *International Journal of Theoretical Physics*, 55(2):669–677, 2016.
- [97] JA Swieca. Charge screening and mass spectrum. *Physical Review D*, 13(2):312, 1976.
- [98] Selym Villalba-Chávez. Photon magnetic moment and vacuum magnetization in an asymptotically large magnetic field. *Physical Review D*, 81(10):105019, 2010.

- [99] H Pérez Rojas and E Rodriguez Querts. Is the photon paramagnetic? *Physical Review D*, 79(9):093002, 2009.
- [100] S Villalba-Chávez and H Pérez-Rojas. Has the photon an anomalous magnetic moment? *arXiv preprint hep-th/0609008*, 2006.
- [101] Brett Altschul. Astrophysical bounds on the photon charge and magnetic moment. *Astroparticle Physics*, 29(4):290–298, 2008.
- [102] Tadao Nakano and Kazuhiko Nishijima. Charge independence for ν -particles. *Progress of Theoretical Physics*, 10(5):581–582, 1953.
- [103] Murray Gell-Mann. The interpretation of the new particles as displaced charge multiplets. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, 4(2):848–866, 1956.
- [104] Jan Ambjørn and Poul Olesen. Anti-screening of large magnetic fields by vector bosons. *Physics Letters B*, 214(4):565–569, 1988.
- [105] Mark A Samuel, G Li, Nita Sinha, Rahul Sinha, and MK Sundaresan. The magnetic moment of the w boson. *Physics Letters B*, 280(1-2):124–128, 1992.
- [106] TDELPHI Collaboration and P Abreu. Measurement of trilinear gauge boson couplings wwv , ($v = z, \gamma$) in e^+e^- collisions at 189 gev. *Phys. Lett. B*, 502:9–23, 2001.
- [107] KO Mikaelian, MA Samuel, and D Beown. Lowest order $g-2$ of $w \pm$ bosons. *Lettere Al Nuovo Cimento (1971-1985)*, 27(7):211–214, 1980.
- [108] AV Strelchenko. Anomalous magnetic moment of w -boson at high temperature. *Physics Letters B*, 542(3):223–228, 2002.
- [109] H Terazawa, Y Chikashige, and K Akama. Unified model of the nambu-jona-lasinio type for all elementary-particle forces. *Physical Review D*, 15(2):480, 1977.
- [110] Harald Fritzsch. The size of the weak bosons. *Physics Letters B*, 712(3):231–232, 2012.
- [111] Theodore Duddell Newton and Eugene P Wigner. Localized states for elementary systems. *Reviews of Modern Physics*, 21(3):400, 1949.
- [112] Eugene P Wigner. Relativistic invariance and quantum phenomena. *Reviews of Modern Physics*, 29(3):255, 1957.
- [113] Guido Beck. Field concepts in quantum theory. *Reviews of Modern Physics*, 17(2-3):187, 1945.

- [114] Rudolf Haag. *Local quantum physics: Fields, particles, algebras*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [115] Eduard Prugovečki. A self-consistent approach to quantum field theory for extended particles. *Foundations of Physics*, 11(5-6): 355–382, 1981.
- [116] Gordon N Fleming. Covariant position operators, spin, and locality. *Physical Review*, 137(1B):B188, 1965.
- [117] Thomas F Jordan and N Mukunda. Lorentz-covariant position operators for spinning particles. *Physical Review*, 132(4):1842, 1963.
- [118] Rudolf Haag and J André Swieca. When does a quantum field theory describe particles? *Communications in Mathematical Physics*, 1(4):308–320, 1965.
- [119] Hans Halvorson and Rob Clifton. No place for particles in relativistic quantum theories? *Philosophy of Science*, 69(1):1–28, 2002.
- [120] Jonathan Bain. Quantum field theories in classical spacetimes and particles. *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 42(2):98–106, 2011.
- [121] Arthur S Wightman. On the localizability of quantum mechanical systems. *Reviews of Modern Physics*, 34(4):845, 1962.
- [122] Gerhard C Hegerfeldt. Causality problems for fermi's two-atom system. *Physical review letters*, 72(5):596, 1994.
- [123] Gerhard C Hegerfeldt and Simon NM Ruijsenaars. Remarks on causality, localization, and spreading of wave packets. *Physical Review D*, 22(2):377, 1980.
- [124] Gerhard C Hegerfeldt. Violation of causality in relativistic quantum theory? *Physical review letters*, 54(22):2395, 1985.
- [125] Gerhard C Hegerfeldt. Difficulties with causality in particle localization. *Nuclear Physics B-Proceedings Supplements*, 6:231–237, 1989.
- [126] Gerhard C Hegerfeldt. Causality, particle localization and positivity of the energy. In *Irreversibility and Causality Semigroups and Rigged Hilbert Spaces*, pages 238–245. Springer, 1998.
- [127] Marshall H Stone. Linear transformations in hilbert space iii. operational methods and group theory. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 16(2):172–175, 1930.

- [128] Marshall H Stone. On one-parameter unitary groups in hilbert space. *Annals of Mathematics*, pages 643–648, 1932.
- [129] J v Neumann. Uber einen satz von herrn mh stone. *Annals of Mathematics*, pages 567–573, 1932.
- [130] B Rosenstein and M Usher. Explicit illustration of causality violation: Noncausal relativistic wave-packet evolution. *Physical Review D*, 36(8):2381, 1987.
- [131] Detlev Buchholz and Jakob Yngvason. There are no causality problems for fermi’s two-atom system. *Physical Review Letters*, 73(5):613, 1994.
- [132] Piotr Kosiński et al. On the violation of causality in relativistic quantum mechanics. *Journal of mathematical physics*, 31(7):1755–1760, 1990.
- [133] Gerhard C Hegerfeldt. Instantaneous spreading and einstein causality in quantum theory. *arXiv preprint quant-ph/9809030*, 1998.
- [134] David B Malament. In defense of dogma: Why there cannot be a relativistic quantum mechanics of (localizable) particles. In *Perspectives on quantum reality*, pages 1–10. Springer, 1996.
- [135] Bert Schroer. Modular localization and the bootstrap-formfactor program. *Nuclear Physics B*, 499(3):547–568, 1997.
- [136] Jens Mund, Bert Schroer, and Jakob Yngvason. String-localized quantum fields from wigner representations. *Physics Letters B*, 596(1):156–162, 2004.
- [137] Jens Mund, Bert Schroer, and Jakob Yngvason. String-localized quantum fields and modular localization. *Communications in mathematical physics*, 268(3):621–672, 2006.
- [138] Bert Schroer. Localization and nonperturbative local quantum physics. *arXiv preprint hep-th/9805093*, 1998.
- [139] Bert Schroer. Localization and the interface between quantum mechanics, quantum field theory and quantum gravity i: the two antagonistic localizations and their asymptotic compatibility. *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 41(2):104–127, 2010.
- [140] Bert Schroer and H-W Wiesbrock. Modular theory and geometry. *Reviews in Mathematical Physics*, 12(01):139–158, 2000.
- [141] J Voisin. On some unitary representations of the galilei group i. irreducible representations. *Journal of Mathematical Physics*, 6(10):1519–1529, 1965.

- [142] AO Barut and S Malin. Position operators and localizability of quantum systems described by finite-and infinite-dimensional wave equations. *Reviews of Modern Physics*, 40(3):632, 1968.
- [143] Heinz-Dieter Zeh. There is no “first” quantization. *Physics Letters A*, 309(5):329–334, 2003.
- [144] Paul CW Davies. Particles do not exist. *Quantum theory of gravity*, page 66, 1984.
- [145] Irina Dymnikova, Jürgen Ulbricht, and Jiawei Zhao. Limits on sizes of fundamental particles and on gravitational mass of a scalar. *arXiv preprint hep-ph/0109138*, 2001.
- [146] Gian Carlo Wick, Arthur Strong Wightman, and Eugene Paul Wigner. The intrinsic parity of elementary particles. *Physical Review*, 88(1):101, 1952.
- [147] Yakir Aharonov and Leonard Susskind. Charge superselection rule. *Physical Review*, 155(5):1428, 1967.
- [148] G-C Wick, Arthur Strong Wightman, and Eugene P Wigner. Superselection rule for charge. *Physical Review D*, 1(12):3267, 1970.
- [149] AS Wightman. Superselection rules; old and new. *Il Nuovo Cimento B (1971-1996)*, 110(5-6):751–769, 1995.
- [150] Franco Strocchi and Arthur Strong Wightman. Proof of the charge superselection rule in local relativistic quantum field theory. *Journal of Mathematical Physics*, 15(12):2198–2224, 1974.
- [151] FJ Belinfante. Intrinsic magnetic moment of elementary particles of spin 3/2. *Physical Review*, 92(4):997, 1953.
- [152] KM Case. The nonrelativistic limit of half-integral spin-wave equations. In *PHYSICAL REVIEW*, volume 94, pages 1442–1442. AMERICAN PHYSICAL SOC ONE PHYSICS ELLIPSE, COLLEGE PK, MD 20740-3844 USA, 1954.
- [153] PA Moldauer and KM Case. Properties of half-integral spin dirac-fierz-pauli particles. *Physical Review*, 102(1):279, 1956.
- [154] C Fronsdal. On the theory of higher spin fields. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, 9:416–443, 1958.
- [155] Julian Seymour Schwinger. Particles, sources and fields. 1970.
- [156] CR Hagen and WJ Hurley. Magnetic moment of a particle with arbitrary spin. *Physical Review Letters*, 24(24):1381, 1970.
- [157] Giorgio Velo and Daniel Zwanziger. Propagation and quantization of rarita-schwinger waves in an external electromagnetic potential. *Physical Review*, 186(5):1337, 1969.

- [158] Kenneth Johnson and ECG Sudarshan. Inconsistency of the local field theory of charged spin $3/2$ particles. *Annals of Physics*, 13(1):126–145, 1961.
- [159] S Weinberg, S Deser, M Grisaru, and H Pendleton. Lectures on elementary particles and quantum field theory. *Proceedings of the Summer Institute, Brandeis University*, 1, 1970.
- [160] Klaus Helbing. The gerasimov–drell–hearn sum rule. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 57(2):405–469, 2006.
- [161] Roman Jackiw and Steven Weinberg. Weak-interaction corrections to the muon magnetic moment and to muonic-atom energy levels. *Physical Review D*, 5(9):2396, 1972.
- [162] Sergio Ferrara, Massimo Porrati, and Valentine L Telegdi. $g=2$ as the natural value of the tree-level gyromagnetic ratio of elementary particles. *Physical Review D*, 46(8):3529, 1992.
- [163] GC Debney, Roy P Kerr, and Alfred Schild. Solutions of the einstein and einstein-maxwell equations. *Journal of Mathematical Physics*, 10(10):1842–1854, 1969.
- [164] Werner Israel. Source of the kerr metric. *Physical Review D*, 2(4):641, 1970.
- [165] Jeffrey M Cohen, Jayme Tiomno, and Robert M Wald. Gyromagnetic ratio of a massive body. *Physical Review D*, 7(4):998, 1973.
- [166] Jorge G Russo and Leonard Susskind. Asymptotic level density in heterotic string theory and rotating black holes. *Nuclear Physics B*, 437(3):611–623, 1995.
- [167] Luis J Garay. Quantum gravity and minimum length. *International Journal of Modern Physics A*, 10(02):145–165, 1995.

DECLARAÇÃO

Rio de Janeiro, Julho 2016

Alexandre Hefren de
Vasconcelos Júnior