

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Marcus Vinícius Bomfim de Jesus

INTERAÇÕES PERTURBATIVAS E APLICAÇÕES.

Rio de Janeiro
2017

Marcus Vinícius Bomfim de Jesus

INTERAÇÕES PERTURBATIVAS E APLICAÇÕES.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Física, sob a orientação do Prof. Dr. Arthur Kós Antunes Maciel.

Rio de Janeiro
2017

Agradecimentos

Agradeço ao meu Pai Valdir Bispo de Jesus e a minha mãe Milady Bomfim de Jesus pelo apoio incondicional desde sempre. Ao meu irmão João Victor Bomfim de Jesus pelo apoio e pela amizade. A todo o carinho de minhas avós Izaltina Martins de Jesus e Neide Santana Bomfim. Aos conselhos e poesias do meu tio e padrinho Vilomar Bispo de Jesus. A minha namorada Daniela Porto Faus por todos os conselhos e pela paciência. Ao meu orientador Prf. Dr. Arthur Kós Antunes Maciel pelo inestimável conhecimento compartilhado. E a todos aqueles que de alguma forma contribuíram para o presente trabalho.

RESUMO

Apresentamos uma introdução ao método variacional e dedução das equações de movimento para campos contínuos, analisando o impacto de possíveis simetrias sobre a evolução de tais campos. Um estudo sobre a quantização dos campos discute a evolução temporal e as condições necessárias para a preservação da causalidade. Considerando interações perturbativas, o método de diagramas de Feynman é usado no cálculo de observáveis como seções de choque em processos conhecidos de espalhamento.

ABSTRACT

We present an introduction to the variational method and the equations of motion for continuous fields, and consider the impact of possible symmetries over the evolution of such fields. There follows a study of field quantization, the time evolution operator and the conditions under which causality will be preserved. Under the assumption of perturbative interactions, the Feynman diagrams method is presented as a tool to calculate observables such as cross sections in well known scattering processes.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1	INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO 2	EQUAÇÕES DE MOVIMENTO E SIMETRIAS.....	2
2.1	O FORMALISMO LAGRANGEANO	2
2.2	A DERIVADA FUNCIONAL.....	3
2.3	O FORMALISMO LAGRANGEANO PARA CAMPOS	4
2.3.1	Simetrias na Teoria Clássica de Campos.....	5
2.3.2	Energia e Momentum	10
2.3.3	Momentum Angular	11
2.4	UM EXEMPLO IMPORTANTE: O ELETROMAGNETISMO.	13
CAPÍTULO 3	QUANTIZAÇÃO CANÔNICA DE CAMPOS ESCALARES.....	16
3.1	QUANTIZAÇÃO CANÔNICA DO OSCILADOR HARMÔNICO.....	16
3.2	A QUANTIZAÇÃO DO CAMPO ESCALAR.....	17
3.2.1	A Quantização do Campo Escalar Real.....	19
3.2.2	Quantização do Campo Escalar Complexo.	20
3.3	O ESPAÇO DE HILBERT	22
3.4	CAUSALIDADE.....	23
3.5	PROPAGADORES	25
3.5.1	Propagadores Não Relativísticos	26
3.5.2	Propagadores Relativísticos.....	26
CAPÍTULO 4	INTERAÇÕES PERTURBATIVAS.....	32
4.1	A REPRESENTAÇÃO DE INTERAÇÃO.....	34
4.2	O TEOREMA DE WICK PARA OS CAMPOS ESCALARES REAIS	39
4.3	SEÇÃO DE CHOQUE, TAXA DE DECAIMENTO E A MATRIZ S	40
4.3.1	Seção de Choque	40
4.3.2	Taxa de Decaimento	42
4.3.3	Ressonâncias.....	43
4.3.4	A Matriz S	43
CAPÍTULO 5	O MÉTODO DE FEYNMAN E APLICAÇÕES.....	51
5.1	DIAGRAMAS DE FEYNMAN E A MATRIZ S	51

5.2	AS REGRAS DE FEYNMAN PARA OS FÉRMIONS	55
5.2.1	As Regras de Feynman para os férmions na Teoria de Yukawa	55
5.2.2	Regras de Feynman para a Eletrodinâmica Quântica	60
5.3	PROCESSOS DE ESPALHAMENTO NÃO RELATIVÍSTICOS	62
5.3.1	O Potencial de Coulomb	62
5.3.2	Espalhamento Rutherford	64
5.4	ESPALHAMENTO $e + e \rightarrow ll$ DESPOLARIZADO	66
	CONSIDERAÇÕES FINAIS	71
	REFERÊNCIAS:	72

CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO

Uma primeira parte deste trabalho tem como objetivo um estudo da Teoria Quântica de Campos em seus aspectos básicos formais, focalizando inicialmente o método variacional e o formalismo Lagrangeano para as equações de movimento. Neste processo procuramos manter evidente a conexão com as teorias clássicas, mostrando a extensão que ocorre no tratamento das coordenadas generalizadas de modo a introduzir os campos clássicos e, em seguida, apresentamos a quantização de tais campos. Acompanha este desenvolvimento uma discussão sobre simetrias, quantidades conservadas e seu impacto sobre as equações de movimento. Este é resumidamente o conteúdo dos capítulos 2 e 3, que formam o fundamento teórico básico sobre o qual o restante da dissertação, dedicado a aspectos mais aplicativos, pode ser construído.

Uma segunda parte inicia-se no capítulo 4 e tem como objetivo estabelecer a conexão entre a Teoria Quântica de Campos e a observação experimental. Apresentamos um método de tratamento para interações ditas perturbativas, quando suas consequências podem ser tratadas como pequenos desvios de uma situação preponderante cuja solução já é conhecida. Sob tais regimes, uma técnica de expansões em séries aproximativas torna o cálculo possível, senão teoricamente exato. E, dentre estas técnicas, a mais usada é o método de diagramas desenvolvido por Feynman. Este é apresentado no capítulo 5 e possibilita o cálculo de observáveis experimentais como taxas de decaimento e seções de choque, já definidos no capítulo anterior.

O objetivo final da dissertação é a aplicação do programa descrito acima ao cálculo de processos específicos associados a situações experimentais concretas, como o espalhamento de Rutherford ou a aniquilação elétron-pósitron em experimentos com aceleradores de partículas. Com tais exemplos esperamos tornar evidente a importância e abrangência da Teoria Quântica de Campos como fundamento teórico e, ao mesmo tempo, ferramenta para o cálculo de processos envolvendo partículas elementares e suas interações fundamentais.

CAPÍTULO 2 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO E SIMETRIAS

Começamos o processo de formulação da Teoria Quântica de Campos aplicando o formalismo Lagrangeano aos campos. Deste modo poderemos representar as equações de Euler-Lagrange e as cargas associadas às transformações de simetria por meio de expressões funcionais, que serão quantizadas no capítulo seguinte.

2.1 O FORMALISMO LAGRANGEANO

O *espaço de configurações* do sistema clássico de uma partícula é definido como o conjunto \mathbb{Q}_n , de dimensão n , formado pelas coordenadas generalizadas (configurações) do sistema, q^a , $a = 1, \dots, n$, que fixam o estado do sistema num dado tempo t . Elas são funções suaves do tempo $q^a(t)$. As configurações nas quais o sistema pode se encontrar são chamadas de *configurações físicas*, que descrevem as situações observadas na natureza, compatíveis com os vínculos do sistema [1]

.Além das coordenadas generalizadas, também são necessárias, para estabelecer a dinâmica de um dado sistema, as *velocidades generalizadas* $\dot{q}^a(t)$. Todas as configurações e velocidades possíveis de um particular sistema físico, de acordo com as condições iniciais impostas, podem ser organizadas em uma trajetória $\gamma: \{q^a(t)\}, \forall t \in \mathbb{R}$ no espaço de configurações [2].

A dependência explícita do tempo pode ser obtida resolvendo equações diferenciais associadas ao sistema, que aparecem através do procedimento abaixo. Define-se o *funcional de ação*:

$$S [q^a] = \int_{t_0}^{t_1} L(t, q^a, \dot{q}^a) dt.$$

A função que está sendo integrada é a *Lagrangeana* $L(t, q^a, \dot{q}^a)$. A integração é feita em um intervalo de tempo $[t_0, t_1]$, em cujos extremos são estabelecidas condições para as coordenadas generalizadas ($q(t_0) = q_0, q(t_1) = q_1$). Um *funcional* é um mapa que associa elementos de um espaço de funções a elementos de um espaço de números reais, em outras palavras, funcional é uma generalização do conceito de função [1]

. A integral de ação é um funcional que depende suavemente de q^a . A partir desse funcional, impomos que os caminhos efetivamente seguidos pelo sistema físico nesse intervalo de tempo sejam aqueles em que $S [q^a]$ obtenha seus valores extremos (pontos de máximo e mínimo e

pontos de sela). Esta imposição é conhecida como *princípio de ação mínima* [1]. Ao fazermos variações em torno desses extremos, obtemos as *equações de Euler-Lagrange* [3],

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial L}{\partial q^a} = 0. \quad (2.1)$$

As equações acima são equações diferenciais parciais que nos permitirão obter as trajetórias $q^a(t)$ [1].

Todo esse formalismo é aplicável na Teoria de Campos, generalizando os conceitos apresentados para o caso de número infinito de graus de liberdade, conforme veremos a seguir.

2.2 A DERIVADA FUNCIONAL

A abordagem que faremos irá utilizar largamente o conceito de derivada funcional, também conhecida como derivada de Fréchet. É necessário definir sucintamente os aspectos principais dessa operação [1,4]

Um funcional $F[f]$ é um objeto que mapeia elementos de um espaço linear normado de funções $\mathcal{F} = \{f(a_n): a_n \in \mathbb{R}^N \text{ ou } \mathbb{C}^N\}$ no espaço dos reais \mathbb{R} ou dos complexos \mathbb{C} , $F: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Um *funcional local* é definido como

$$F_{g,l}[f] = \int \dots \int da_1 da_2 \dots da_N g(f(a_1, a_2, \dots, a_N)). \quad (2.2)$$

onde $g(f)$ é uma função convencional. Define-se, também, o funcional semi-local [5]

$$F_{g,sl}[f] = \int \dots \int da_1 da_2 \dots da_N g(f(a_1, a_2, \dots, a_N), f'(a_1, a_2, \dots, a_N)). \quad (2.3)$$

A derivada funcional de $F[f]$ com respeito a $f(y)$ é definida como [6]:

$$\frac{\delta F[f]}{\delta f(y)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[f(x) + \epsilon \delta(x - y)] - F[f]}{\epsilon}. \quad (2.4)$$

Aplicamos a definição acima ao funcional

$$f(x) = \int \dots dz f(z) \delta(x - z), \quad (2.5)$$

o que resulta em

$$\begin{aligned} \frac{\delta f(x)}{\delta f(y)} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\int dz (f(z) + \epsilon \delta(z - y)) \delta(x - z) - \int dz f(z) \delta(x - z)}{\epsilon} \right] \\ \frac{\delta f(x)}{\delta f(y)} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\int dz \epsilon \delta(z - y) \delta(x - z)}{\epsilon} \right] = \delta(x - y) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Podemos associar o operador $\delta/\delta f(y)$ à ideia de um operador diferencial parcial. Grande parte das regras de derivação aplica-se às derivadas funcionais. A derivada funcional

do produto de funcionais $F[f] = T[f]H[f]$, por exemplo, é similar à derivada convencional do produto de duas funções,

$$\frac{\delta F[f]}{\delta f(y)} = \frac{\delta T[f]}{\delta f(y)} H[f] + T[f] \frac{\delta H[f]}{\delta f(y)}. \quad (2.7)$$

Dado o funcional $F(T[f])$ a regra da cadeia para as derivadas funcionais também é operacionalmente idêntica à regra da cadeia para derivadas convencionais de funções,

$$\frac{\delta F(T[f])}{\delta f(y)} = \int dx \frac{\partial F(T)}{\partial T} \frac{\delta T[f]}{\delta f(y)}. \quad (2.8)$$

É interessante mostrar um pouco mais detalhadamente as derivadas dos funcionais locais e funcionais semi-locais. Olhando primeiro para funcional local (2.3) temos

$$\frac{\delta F_{g,l}[f]}{\delta f(y)} = \int dx \frac{\partial g}{\partial f} \frac{\delta f(x)}{\delta f(y)} = \frac{\partial g(f(y))}{\partial f(y)}. \quad (2.9)$$

A derivada do funcional semi-local (2.4) segue o mesmo princípio da divergência total de uma função. Por simplicidade chamando $f(x)$ de f podemos escrever

$$\frac{\delta F_{g,sl}[f]}{\delta f(y)} = \int dx \left(\frac{\partial g}{\partial f} \frac{\delta f(x)}{\delta f(y)} + \frac{\partial g}{\partial f'} \frac{\delta f'(x)}{\delta f(y)} \right). \quad (2.10)$$

No entanto,

$$\frac{\delta f'(x)}{\delta f(y)} = \frac{\delta}{\delta f(y)} \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{\delta f(x)}{\delta f(y)} = \frac{d}{dx} \delta(x-y), \quad (2.11)$$

de sorte que,

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_g[f]}{\delta f(y)} &= \int dx \left(\frac{\partial g}{\partial f} \delta(x-y) + \frac{\partial g}{\partial f'} \frac{d}{dx} \delta(x-y) \right) \\ \frac{\delta F_g[f]}{\delta f(y)} &= \frac{\partial g(f(y), f'(y))}{\partial f(y)} - \frac{d}{dx} \frac{\partial g(f(y), f'(y))}{\partial f'(y)}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

No caso em que $f = f(x) = f(x^1, x^2, \dots, x^n)$, a fórmula acima generaliza-se facilmente para

$$\frac{\delta F_g[f]}{\delta f(y)} = \frac{\partial g(f(y), \partial f / \partial x^i(y))}{\partial f(y)} - \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx^i} \frac{\partial g(f(y), \partial f / \partial x^i(y))}{\partial (\partial f / \partial x^i)} \quad (2.13)$$

2.3 O FORMALISMO LAGRANGEANO PARA CAMPOS

É necessário definirmos o que são campos e como o formalismo Lagrangeano pode ser generalizado para os mesmos. O campo $\phi(\mathbf{x}, t)$ é a generalização do conceito de coordenada generalizada. Mais especificamente ao invés de termos um conjunto discreto $\{q^a(t)\}$ de coordenadas, temos um campo que associa números (reais ou complexos), vetores, espinores

ou tensores a cada ponto do espaço-tempo. Fica claro que o campo descreve um sistema com infinitos graus de liberdade. Como desejamos construir uma teoria invariante de Lorentz assumimos que o domínio dos campos é o espaço de Minkowski \mathcal{M}^4 . Portanto campos dependem localmente de pontos $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \in \mathcal{M}^4$, isto é, $\phi(x, t) = \phi(x)$. Estamos supondo que os campos são de classe $C^\infty(\mathcal{M}^4)$ assim como $q_i(t)$ era tomada como continuamente diferenciável em t , em todas as ordens.

As derivadas dos campos com respeito a pontos do espaço de Minkowski são definidas como segue:

$$\frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu \phi(x) = (\partial_0 \phi(x), \partial_i \phi(x)). \quad (2.14)$$

Os pontos do espaço de configurações agora são pares do tipo $(\phi(x), \partial_0 \phi(x))$.

Escrevemos a Lagrangeana L como a integral de uma *densidade de Lagrangeana* \mathcal{L} , que é função dos campos e de suas derivadas primeiras:

$$L = \int_V d^3x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)). \quad (2.15)$$

A partir dela, definimos a ação como,

$$S[\phi] = \int_{t_0}^{t_1} dt L = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_V d^3x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)). \quad (2.16)$$

A ação é um funcional, no sentido que definimos na seção anterior. O método variacional extrai os campos associados aos valores extremos de S em um intervalo de tempo pré-estabelecido. Dada a semelhança da derivação funcional com a derivação de funções, e olhando (2.13), concluímos que o campo associado ao valor extremo nos leva a [1],

$$\frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(x)} = 0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x)} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi(x))} \quad (2.17)$$

As equações acima são a generalização das equações de Euler-Lagrange para a teoria de campos. A consistência entre a mecânica de pontos materiais e a teoria clássica de campos é clara. Assim como no caso de pontos materiais, as informações de qualquer teoria clássica de campos estão contidas em S . É necessário agora olharmos mais detalhadamente para (2.17) e (2.18) para extrairmos outras consequências deste formalismo.

2.3.1 Simetrias na Teoria Clássica de Campos

Como vimos, a derivada funcional da ação leva à extração das equações de Euler-Lagrange. Mas há mais informações contidas neste funcional. Se fizermos transformações sobre

os campos que deixem a *ação invariante*, as equações de Euler-Lagrange não vão se alterar. Tais transformações são chamadas de *simetrias* do sistema físico sob consideração.

Suponhamos que temos uma teoria na qual as coordenadas generalizadas sejam os campos $\{\phi^i(x)\}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Definimos $\phi^i(x) \rightarrow \phi'^i(x') = \phi^i(x^\mu(u^a), u^a)$ como transformações dos campos $\phi^i(x^\mu)$, parametrizadas suavemente por um conjunto de parâmetros u^a , com $a = 1, \dots, m$. Essas transformações podem ocorrer de duas maneiras:

- 1) Sobre a forma funcional dos campos apenas, sem mudanças do ponto do espaço-tempo, situação na qual são chamadas de *simetrias internas*. Um exemplo bastante comum é o de rotações no espaço interno. Considere dois campos ϕ^1 e ϕ^2 e as rotações no espaço definido por eles:

$$\begin{aligned}\phi'^1(x^\mu) &= \cos u \phi^1(x^\mu) + \text{sen } u \phi^2(x^\mu), \\ \phi'^2(x^\mu) &= -\text{sen } u \phi^1(x^\mu) + \cos u \phi^2(x^\mu),\end{aligned}\tag{2.18}$$

onde u é o ângulo de rotação.

- 2) Sobre a forma funcional dos campos e sobre os pontos do espaço-tempo simultaneamente, quando são chamadas de *simetrias espaço-temporais*. Exemplificando essa situação, temos as transformações de Lorentz

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu\tag{2.19}$$

atuando sobre um campo vetorial

$$A'^\mu(x'^\mu) = \Lambda^\mu{}_\nu (\omega^\mu{}_\nu) A^\nu(x^\nu)\tag{2.20}$$

onde $\omega^\mu{}_\nu$ é uma matriz antissimétrica 4×4 , que possui 6 componentes independentes, que são os parâmetros necessários para caracterizar uma transformação de Lorentz geral. Nesse caso, a variação da forma funcional tem duas origens: uma explícita, contida na matriz Λ , e uma implícita, advinda da composição das funções A^μ e $x^\mu(\omega^\mu{}_\nu)$. Para transformações infinitesimais, podemos escrever:

$$\Lambda^\mu{}_\nu(\omega^\mu{}_\nu) = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu\tag{2.21}$$

e

$$A'^\mu(x^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu) = (\delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu) A^\nu(x^\mu)\tag{2.22}$$

Isso nos dá:

$$A'^\mu(x^\mu) = A^\mu(x^\mu) + \omega^\mu{}_\nu A^\nu(x^\mu) - \omega^\alpha{}_\beta x^\beta \partial_\alpha A^\mu(x^\mu)\tag{2.23}$$

onde, no terceiro termo, substituímos A'^μ por A^μ , devido à diferença ser de ordem $(\omega^\mu{}_\nu)^2$.

Podemos escolher a parametrização de modo que $u^a = 0$ corresponda à transformação identidade e $-u^a$ parametrize uma transformação que, quando feita sobre $\phi^i(x^\mu, u^a)$, leve de volta a $\phi^i(x^\mu)$. Vamos supor ainda que, se fizermos 3 transformações sucessivas, parametrizadas por três conjuntos de parâmetros u_1^a , u_2^a e u_3^a , a ordem na qual compomos essas transformações não importe. O conjunto de transformações obedecendo a esses requerimentos é chamado de um *grupo contínuo* ou um *grupo de Lie conexo com a identidade*.¹

Vamos começar calculando as consequências oriundas da variação da forma funcional dos campos sob transformações de simetria interna. A dependência em u^a foi definida como sendo suave, o que significa que podemos expandir o campo $\phi'^i(x^\mu) = \phi^i(x^\mu, \delta u^a)$ em torno de $\delta u^a = 0$,

$$\begin{aligned}\phi'^i(x^\mu) &= \phi^i(x^\mu, \delta u^a) \\ &= \phi^i(x^\mu) + \left. \frac{\partial \phi^i(x^\mu, u^a)}{\partial u^a} \right|_{u^a=0} \delta u^a + \mathcal{O}((\delta u^a)^2),\end{aligned}\quad (2.24)$$

Definimos, assim, a variação da forma funcional de ϕ^i sob a transformação em questão:

$$\delta \phi^i \equiv \phi'^i(x^\mu) - \phi^i(x^\mu) = \left. \frac{\partial \phi^i(x^\mu, u^a)}{\partial u^a} \right|_{u^a=0} \delta u^a. \quad (2.25)$$

Consequentemente, para as derivadas dos campos,

$$\begin{aligned}\delta \partial_\mu \phi^i &\approx \partial_\mu \phi'^i(x^\mu) - \partial_\mu \phi^i(x^\mu) = \left. \frac{\partial \partial_\mu \phi^i(x^\mu, u)}{\partial u^a} \right|_{u=u_0} \delta u^a \\ &= \partial_\mu \left. \frac{\partial \phi^i(x^\mu, u)}{\partial u^a} \right|_{u^a=0} \delta u^a = \partial_\mu \delta \phi^i.\end{aligned}\quad (2.26)$$

Consideramos, agora, que as transformações em questão sejam simetrias, o que significa

$$S[\phi'] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi'(x), \partial_\mu \phi'(x)) = S[\phi]. \quad (2.27)$$

Tomando transformações infinitesimais,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\phi'^i(x), \partial_\mu \phi'^i(x)) &= \mathcal{L}(\phi^i(x) + \delta \phi^i, \partial_\mu \phi^i(x) + \delta \partial_\mu \phi^i) \\ &= \mathcal{L}(\phi^i(x), \partial_\mu \phi^i(x)) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} \delta \phi^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^i} \delta \partial_\mu \phi^i \\ &= \mathcal{L}(\phi^i(x), \partial_\mu \phi^i(x)) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^i} \right) \delta \phi^i + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^i} \delta \phi^i \right).\end{aligned}\quad (2.28)$$

Isso mostra que

¹ Estamos supondo que os parâmetros u^a que caracterizam as transformações não são funções do espaço-tempo, ou seja, são *globais*.

$$\begin{aligned}
S[\phi'] &= S[\phi] + \int d^4x \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^i} \right) \delta \phi^i + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^i} \delta \phi^i \right) \right] = S[\phi] \\
&\Rightarrow \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^i} \right) \delta \phi^i + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^i} \delta \phi^i \right) = 0.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Supondo agora que os ϕ^i sejam soluções das equações de movimento, o primeiro termo da equação acima se anula e obtemos

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^i} \delta \phi^i \right) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^i} \frac{\partial \phi^i(x, u)}{\partial u^a} \Big|_{u^a=0} \right) \delta u^a = 0. \tag{2.30}$$

Lembrando que a transformação infinitesimal envolve parâmetros arbitrários, obtemos a conservação covariante de m quantidades j_a^μ , $a = 1, \dots, m$,

$$\partial_\mu j_a^\mu \equiv \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^i} \frac{\partial \phi^i(x, u)}{\partial u^a} \Big|_{u^a=0} \right) = 0. \tag{2.31}$$

Suponha que integremos a equação acima sobre todo o volume V do espaço e tomemos os campos indo a zero no infinito espacial (em função do fenômeno sob estudo estar localizado num laboratório de tamanho finito). Obtemos,

$$I \equiv \int_V d^3x \frac{\partial j_a^\mu}{\partial x^\mu} = \int_V d^3x \left(\frac{\partial j_a^0}{\partial x^0} + \frac{\partial j_a^k}{\partial x^k} \right) \tag{2.32}$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\int_V d^3x j_a^0 \right) + \int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_a \tag{2.33}$$

Utilizando o teorema de Gauss para o segundo termo da integral,

$$\int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_a = \int_V \vec{J}_a \cdot d\vec{S} = 0. \tag{2.34}$$

Substituindo esse resultado em (2.33) temos

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V d^3x j_a^0 \right) \equiv \frac{dQ_a(t)}{dt} = 0. \tag{2.35}$$

Cada simetria da ação está associada a uma equação análoga à equação de continuidade do Eletromagnetismo e da Mecânica de Fluidos, envolvendo correntes apropriadas, que, quando integrada espacialmente origina quantidades chamadas de *cargas de Noether*, Q_a , que se conservam. O que acabamos de mostrar é um caso particular do *teorema de Noether*, o qual afirma que, dada uma simetria contínua da ação, parametrizada por m parâmetros, teremos m quantidades conservadas, as cargas de Noether.

Consideremos agora a situação de simetrias espaço-temporais. Uma transformação infinitesimal desse tipo no espaço-tempo será:

$$x'^{\mu}(x) = x^{\mu}(x, \delta u) = x^{\mu} + \left. \frac{\partial x^{\mu}(x, u)}{\partial u^a} \right|_{u=0} \delta u^a. \quad (2.36)$$

Isso nos leva a definir

$$\delta x^{\mu} \equiv x'^{\mu} - x^{\mu} = \left. \frac{\partial x^{\mu}(x, u)}{\partial u^a} \right|_{u=0} \delta u^a.$$

Essa transformação induz outra, sobre os campos ϕ^i . Para obtê-la, vamos supor que os campos se transformem, em geral, como:

$$\phi'^i(x') \equiv \phi'^i(x^{\mu}(u^a)) = \phi^i(x^{\mu}, u^a), \quad (2.37)$$

onde explicitamos uma dependência ostensiva da lei de transformação em u^a . Considerando uma transformação infinitesimal, parametrizada por parâmetros δu^a ,

$$\phi'^i(x') = \phi^i(x^{\mu}) + \left. \frac{\partial \phi^i(x, u)}{\partial u^a} \right|_{u=0} \delta u^a. \quad (2.38)$$

Isso implica

$$\phi'^i(x + \delta x) = \phi'^i(x) + (\partial_{\mu} \phi^i) \delta x^{\mu} = \phi^i(x^{\mu}) + \left. \frac{\partial \phi^i(x, u)}{\partial u^a} \right|_{u=0} \delta u^a. \quad (2.39)$$

Daí obtemos a variação da forma funcional de ϕ^i :

$$\delta \phi^i \equiv \phi'^i(x) - \phi^i(x) = \left. \frac{\partial \phi^i(x, u)}{\partial u^a} \right|_{u=0} \delta u^a - \partial_{\beta} \phi^i \delta x^{\beta}. \quad (2.40)$$

Na sequência vamos usar também o fato da densidade de Lagrangeana ser um escalar, $\mathcal{L}(\phi'^i(x')) \equiv \mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(\phi^i(x)) \equiv \mathcal{L}(x)$. Isso é fundamental para a invariância da ação e implica:

$$\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x) - \mathcal{L}'(x) + \mathcal{L}'(x) = \mathcal{L}'(x) - \delta \mathcal{L}(x). \quad (2.41)$$

Por sua vez, a variação de \mathcal{L} pode ser calculada de

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(x') &= \mathcal{L}'(x + \delta x) = \mathcal{L}'(x) + \delta x^{\mu} \partial_{\mu} \mathcal{L} = \mathcal{L}(x) \\ \Rightarrow \delta \mathcal{L}(x) &= \mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}(x) = -(\partial_{\mu} \mathcal{L}) \delta x^{\mu}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Consequentemente, sob uma mudança de variáveis infinitesimal que seja uma simetria,

$$\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}'(x) + (\partial_{\mu} \mathcal{L}) \delta x^{\mu}. \quad (2.43)$$

A condição de simetria continua sendo que a ação permaneça invariante. Mas agora, como transformamos os pontos do espaço-tempo, temos que mudar a medida e a região de integração na integral que a define.

$$S[\phi'^i] = \int_{\Omega'} d^4 x' \mathcal{L}(\phi'^i(x'), \partial_{\mu} \phi'^i(x')) = S[\phi^i] \quad (2.44)$$

Voltando para as variáveis x^{μ} , temos que considerar o Jacobiano da transformação:

$$d^4x' = \det\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right) d^4x = \left[\det\left(\delta_{\nu}^{\mu} + \frac{\partial \delta x^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right)\right] d^4x = (1 + \partial_{\mu} \delta x^{\mu}) d^4x. \quad (2.45)$$

Assim,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega'} d^4x' \mathcal{L}(\phi'^i(x'), \partial_{\mu} \phi'^i(x')) \\ &= \int_{\Omega} d^4x \left(\mathcal{L}(\phi^i(x), \partial_{\mu} \phi^i(x)) + (\partial_{\mu} \mathcal{L}) \delta x^{\mu} \right) (1 + \partial_{\mu} \delta x^{\mu}) \\ &= \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\phi^i(x), \partial_{\mu} \phi^i(x)), \end{aligned} \quad (2.46)$$

onde mantivemos apenas contribuições em primeira ordem em $\delta\phi^i$. A condição de simetria implica, então,

$$\delta S = \int_{\Omega} d^4x (\delta \mathcal{L} + \partial_{\mu} (\mathcal{L} \delta x^{\mu})) = 0. \quad (2.47)$$

Podemos agora escrever $\delta \mathcal{L}$ também como

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \mathcal{L}(\phi'^i(x), \partial_{\mu} \phi'^i(x)) - \mathcal{L}(\phi^i(x), \partial_{\mu} \phi^i(x)) \\ &= \mathcal{L}(\phi^i(x) + \delta\phi^i(x), \partial_{\mu} \phi^i(x) + \partial_{\mu}(\delta\phi^i)(x)) - \mathcal{L}(\phi^i(x), \partial_{\mu} \phi^i(x)) \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} \delta\phi^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi^i)} \partial_{\mu}(\delta\phi^i) \\ &= \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} - \partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi^i)} \right) \delta\phi^i + \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi^i)} \delta\phi^i \right) \end{aligned} \quad (2.48)$$

Considerando campos que satisfaçam as equações de movimento e transformações arbitrárias, temos que ter,

$$\partial_{\mu} \left(\mathcal{L} \delta x^{\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \phi^i} \delta\phi^i \right) = 0. \quad (2.49)$$

Ao explicitarmos as variações δx^{μ} e $\delta\phi^i$ teremos equações análogas à equação de continuidade, refletindo a conservação de quantidades específicas. Vamos ilustrar o que estamos dizendo com exemplos importantes.

2.3.2 Energia e Momentum

Um exemplo importante é o da *simetria por translações*:

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + u^{\mu}, \quad (2.50)$$

onde consideramos os campos como *escalares* por translações:

$$\phi'^i(x') = \phi^i(x). \quad (2.51)$$

A partir da equação acima, usando (2.41) calculamos $\delta\phi^i$:

$$\delta\phi^i = -(\partial_\mu \phi^i(x)) \delta u^\mu \quad (2.52)$$

Substituindo em (2.50),

$$\partial_\mu \left(\mathcal{L} \delta u^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^i} (\partial_\nu \phi^i(x)) \delta u^\nu \right) = 0. \quad (2.53)$$

Pondo δu^ν em evidência, obtemos:

$$\partial_\mu (H^{\mu\nu}) = 0. \quad (2.54)$$

onde,

$$H^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^i} \partial^\nu \phi^i - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (2.55)$$

é o chamado *tensor de energia-momentum* da teoria. A nomenclatura procede, pois define-se energia e momentum como as quantidades que se conservam em consequência de translações temporais e espaciais, respectivamente. Escrevendo a soma explicitamente na equação (2.55) e integrando sobre todo o volume espacial,

$$\int d^3x \frac{\partial H^{0\nu}}{\partial t} + \int d^3x \partial_i H^{i\nu} = 0. \quad (2.56)$$

Novamente, usamos o teorema da divergência para descartar o segundo termo e obtemos a conservação de quatro quantidades, correspondentes aos quatro parâmetros que caracterizam translações espaço-temporais:

$$\frac{d}{dt} \int d^3x H^{0\nu} \equiv \frac{d}{dt} P^\nu = 0. \quad (2.57)$$

A componente $P^0 \equiv H$ é, portanto, a energia do sistema, enquanto as 3 componentes espaciais P^i representam o seu momentum.

2.3.3 Momentum Angular

O teorema de Noether nos permitiu definir energia e momentum para um sistema de campos arbitrário. Podemos utilizá-lo para definir também o momentum angular, em sua versão quadridimensional. Para isso, vamos supor que o sistema possui simetria perante transformações de Lorentz,

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \quad (2.58)$$

sob as quais os campos se transformam como

$$\phi'^i(x'^\mu) = D^i_j(\omega^\mu_\nu) \phi^j(x^\nu) \quad (2.59)$$

onde recordamos que $\omega^\mu{}_\nu$ é a matriz dos parâmetros que caracterizam uma transformação de Lorentz geral. Infinitesimalmente, podemos escrever

$$D^i{}_j(\omega^\mu{}_\nu) = \delta^i{}_j + \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} (X^{\mu\nu})^i{}_j, \quad (2.60)$$

onde os $(X^{\mu\nu})^i{}_j$ são os geradores do grupo de Lorentz na representação carregada pelo campo.

A mesma transformação infinitesimal que leva as coordenadas x^μ até as coordenadas x'^μ é,

$$x'^\mu = x^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu. \quad (2.61)$$

Logo,

$$\delta x^\mu = \omega^\mu{}_\nu x^\nu = \frac{1}{2} \omega^{\alpha\beta} (\delta_\alpha^\mu x_\beta - \delta_\beta^\mu x_\alpha). \quad (2.62)$$

A transformação associada do campo será, então,

$$\begin{aligned} \delta\phi^i &= \left. \frac{\partial\phi^i(x, \omega_{\mu\nu})}{\partial\omega^{\alpha\beta}} \right|_{u=0} \omega^{\alpha\beta} - \partial_\beta\phi^i \delta x^\beta \\ &= \frac{i}{2} \omega_{\alpha\beta} (X^{\alpha\beta})^i{}_j \phi^j - \partial_\alpha\phi^i \omega^{\alpha\beta} x_\beta \\ &= \frac{1}{2} \omega_{\alpha\beta} \left[i(X^{\alpha\beta})^i{}_j + \delta_j^i (x^\alpha \partial^\beta - x^\beta \partial^\alpha) \right] \phi^j. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Substituindo as variações acima na equação obtida pelo teorema de Noether,

$$\begin{aligned} &\partial_\mu \left(\mathcal{L} \delta x^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi^i} \delta\phi^i \right) \\ &= \frac{1}{2} \omega_{\alpha\beta} \partial_\mu \left(\mathcal{L} (\eta^{\mu\alpha} x^\beta - \eta^{\mu\beta} x^\alpha) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi^i} \left[i(X^{\alpha\beta})^i{}_j + \delta_j^i (x^\alpha \partial^\beta - x^\beta \partial^\alpha) \right] \phi^j \right) \\ &= \frac{1}{2} \omega_{\alpha\beta} \partial_\mu \left\{ x^\alpha \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi^i} \partial^\beta \phi^i - \mathcal{L} \eta^{\mu\beta} \right] - x^\beta \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi^i} \partial^\alpha \phi^i - \mathcal{L} \eta^{\mu\alpha} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi^i} i(X^{\alpha\beta})^i{}_j \phi^j \right\} \Rightarrow \partial_\mu M^{\mu\alpha\beta} = 0, \end{aligned} \quad (2.64)$$

com,

$$\begin{aligned} M^{\mu\alpha\beta} &= (x^\alpha H^{\mu\beta} - x^\beta H^{\mu\alpha}) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi^i} \left[i(X^{\alpha\beta})^i{}_j \phi^j \right] \\ &\equiv L^{\mu\alpha\beta} + S^{\mu\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Como antes, podemos integrar espacialmente a sua componente zero, para obter as cargas conservadas:

$$\frac{dM^{\alpha\beta}}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \int d^3x M^{0\alpha\beta} = 0, \quad (2.66)$$

onde

$$M^{\alpha\beta} \equiv \int d^3x M^{0\alpha\beta} = \int d^3x (L^{0\alpha\beta} + S^{0\alpha\beta}) = L^{\alpha\beta} + S^{\alpha\beta}, \quad (2.67)$$

As quantidades conservadas são interpretadas como os geradores de *boosts* e rotações. O tensor $M^{\alpha\beta}$ é chamado tensor de momentum angular. $L^{\alpha\beta}$ é sua parte orbital e $S^{\alpha\beta}$, sua parte de spin.

2.4 UM EXEMPLO IMPORTANTE: O ELETROMAGNETISMO.

Vamos mostrar que a Lagrangeana abaixo,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (2.68)$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.69)$$

e A_μ é o quadrivetor potencial eletromagnético, gera as equações de Maxwell e nos conduz à energia e momentum do campo eletromagnético. O tensor $F_{\mu\nu}$ é antissimétrico, $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$, e está claro que $F_{0i} = -F^{0i}$ e $F_{ij} = F^{ij}$. Podemos escrever a Lagrangeana acima em termos dos campos elétrico e magnético através de um cálculo explícito,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} (2F_{01}F^{01} + 2F_{02}F^{02} + 2F_{03}F^{03} + 2F_{12}F^{12} + 2F_{13}F^{13} + 2F_{23}F^{23}) \\ &= \frac{1}{2} (F_{01}^2 + F_{02}^2 + F_{03}^2 - F_{12}^2 - F_{13}^2 - F_{23}^2) \\ &= \frac{1}{2} [(\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0)^2 + (\partial_0 A_2 - \partial_2 A_0)^2 + (\partial_0 A_3 - \partial_3 A_0)^2 - (\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1)^2 \\ &\quad - (\partial_1 A_3 - \partial_3 A_1)^2 - (\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2)^2] \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2), \end{aligned} \quad (2.70)$$

onde

$$\begin{aligned} E^i &\equiv \partial^0 A^i - \partial^i A^0, \\ B^i &\equiv \epsilon^{ijk} \partial_j A_k. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Achar as equações de movimento desse sistema é imediato. Notamos que

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_\nu} = 0, \quad (2.72)$$

e

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu A_\nu} = -F^{\mu\nu} \quad (2.73)$$

Logo as equações de movimento serão

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0. \quad (2.74)$$

Já que $E^i = F^{0i}$ e $\epsilon_{ijk}B^k = -F_{ij}$, obtemos, fazendo $\nu = 0$,

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu 0} &= \partial_i F^{i0} = 0 = \partial_1 E^1 + \partial_2 E^2 + \partial_3 E^3 \\ \therefore \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0. \end{aligned} \quad (2.75)$$

As outras equações de Maxwell vêm da especificação $\nu = k$,

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu k} &= \partial_0 F^{0k} + \partial_i F^{ik} = 0 \\ \Rightarrow \partial_0 F^{0k} &= -\partial_i F^{ik} = \epsilon^{kij} \partial_i B_j \\ \therefore \nabla \times \mathbf{B} &= \partial_0 \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Vamos agora explorar a simetria por translações da Lagrangeana de Maxwell. A quantidade conservada, como já vimos, é o tensor de energia-momentum,

$$\partial_\mu \left[\left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu A_\lambda} \partial^\nu A_\lambda \right) - (\eta^{\mu\nu} \mathcal{L}) \right] = 0. \quad (2.77)$$

Substituindo os valores já calculados para a derivada da Lagrangeana, obtemos

$$H^{\mu\nu} = F^{\lambda\mu} \partial^\nu A_\lambda - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} (F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}). \quad (2.78)$$

É evidente que o tensor não é simétrico em μ e ν . É conveniente, para muitas aplicações, trabalhar com

$$\hat{H}^{\mu\nu} = H^{\mu\nu} + \partial_\lambda K^{\lambda\mu\nu}, \quad (2.79)$$

onde $K^{\lambda\mu\nu}$ é antissimétrico nos primeiros dois índices. Por isso percebemos que

$$\partial_\mu \hat{H}^{\mu\nu} = \partial_\mu H^{\mu\nu} + \partial_\mu (\partial_\lambda K^{\lambda\mu\nu}) = 0. \quad (2.80)$$

$\hat{H}^{\mu\nu}$ é uma quantidade conservada para qualquer $K^{\lambda\mu\nu}$ antissimétrico nos dois primeiros índices. Também não é difícil ver que as cargas conservadas associadas a $\hat{H}^{\mu\nu}$ e a $H^{\mu\nu}$ são as mesmas. Fazendo $K^{\lambda\mu\nu} = F^{\mu\lambda} A^\nu$ podemos escrever,

$$\begin{aligned} \hat{H}^{\mu\nu} &= H^{\mu\nu} + \partial_\lambda (F^{\mu\lambda} A^\nu) \\ &= H^{\mu\nu} + F^{\mu\lambda} \partial_\lambda A^\nu \\ &= F^{\lambda\mu} (\partial^\nu A_\lambda - \partial_\lambda A^\nu) - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}, \end{aligned} \quad (2.81)$$

onde, na segunda linha, usamos a equações de Euler-Lagrange. É claro, então, que $\hat{H}^{\mu\nu} = \hat{H}^{\nu\mu}$. Agora podemos derivar de $\hat{H}^{\mu\nu}$ as densidades de energia e de momentum do campo eletromagnético,

$$\begin{aligned} \hat{H}^{00} &= F^{i0} (\partial^0 A_i - \partial_i A^0) - \mathcal{L} \\ &= E^2 - \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \quad (2.82)$$

A densidade de momentum é similarmente calculada e coincide com o vetor de Pointing,

$$\begin{aligned} \hat{H}^{0k} &= F^{i0}(\partial^k A_i - \partial_i A^k) \\ &= E^i(\partial_i A_k - \partial_k A_i) \\ &= E^i \epsilon_{ikj} B^j \\ \therefore \hat{H}^{0k} &= (\mathbf{E} \times \mathbf{B})^k. \end{aligned} \quad (2.83)$$

CAPÍTULO 3 QUANTIZAÇÃO CANÔNICA DE CAMPOS ESCALARES

A quantização canônica do sistema clássico sem fontes de partículas não interagentes é obtida de maneira natural quando primeiro promovemos as coordenadas generalizadas do sistema $q_i(t)$ e seus *momenta* conjugados $\dot{q}_j(t) = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}_j(t)$ à condição de operadores, de modo que o Hamiltoniano e outras cargas associadas a simetrias também sejam elevados a esta categoria, já que dependem dessas coordenadas [3,7]. Em seguida escrevemos os agora operadores de posição \hat{q} e *momentum* conjugado $\hat{p} = \hat{q}$ como funções de operadores de criação \hat{a}^\dagger e de aniquilação \hat{a} [3]. Os autoestados do Hamiltoniano, que servem como uma base do espaço de Hilbert, são facilmente obtidos a partir da atuação desses operadores, o que completa a quantização da teoria. O objetivo deste capítulo é efetuar a quantização canônica dos campos escalares, mostrando que ela pode ser entendida em termos de mecanismos similares aos que estão em ação na quantização de um sistema de infinitos osciladores harmônicos.

3.1 QUANTIZAÇÃO CANÔNICA DO OSCILADOR HARMÔNICO

Para formar as bases do raciocínio de como quantizar um sistema de campos, vamos relembrar brevemente, nesta seção, os aspectos principais da quantização do sistema clássico correspondente a um oscilador harmônico. Como dissemos, ao promover a operadores as variáveis dinâmicas da descrição clássica, modificamos os objetos que possuíam expressões dependentes dessas variáveis. A Lagrangeana em unidades naturais ($\hbar = c = 1 = m$), por exemplo, passa a ser

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}\omega^2 q^2. \quad (3.1)$$

Os colchetes de Poisson são substituídos por comutadores, multiplicados por i :

$$[\hat{q}, \hat{q}] = [\hat{p}, \hat{p}] = 0, \quad [\hat{q}, \hat{p}] = i. \quad (3.2)$$

O operador Hamiltoniano é dado por

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}\omega^2\hat{q}^2, \quad (3.3)$$

e pode ser representado em função dos operadores de criação e aniquilação. Eles são definidos por

$$\hat{a}^\dagger \equiv \sqrt{\frac{\omega}{2}}\hat{q} - \frac{i}{\sqrt{2\omega}}\hat{p} \quad (3.4a)$$

$$\hat{a} \equiv \sqrt{\frac{\omega}{2}}\hat{q} + \frac{i}{\sqrt{2\omega}}\hat{p} \quad (3.4b)$$

Invertendo as relações acima, obtemos,

$$\hat{q} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (3.5a)$$

$$\hat{p} = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger). \quad (3.5b)$$

Substituindo as expressões (3.5) na expressão do Hamiltoniano (3.3) chegamos a

$$\hat{H} = \omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right). \quad (3.6)$$

A álgebra obedecida por operadores de criação e aniquilação é obtida facilmente através das relações de comutação (3.2)

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad (3.7)$$

Os comutadores envolvendo o Hamiltoniano e os operadores de criação e aniquilação são,

$$[\hat{H}, \hat{a}^\dagger] = \omega \hat{a}^\dagger, \quad [\hat{H}, \hat{a}] = -\omega \hat{a}. \quad (3.8)$$

A utilização desses operadores é justificada pela facilidade da obtenção de uma base de autovetores da Hamiltoniana [8]. Um autoestado do hamiltoniano $|\lambda\rangle$ de energia $(\lambda + 1/2)\omega$ quando atuado por \hat{a}^\dagger é levado em outro autoestado $\hat{a}^\dagger |\lambda\rangle$ de energia $((\lambda + 1) + 1/2)\omega$, da mesma forma que o autoestado $\hat{a} |\lambda\rangle$ possui energia $((\lambda - 1) + 1/2)\omega$. Pode-se mostrar que o estado de menor energia está associado a $\lambda = 0$, e que $\hat{a} |0\rangle = 0$. Atuando sobre $|0\rangle$ com os operadores de criação, podemos obter os autoestados do Hamiltoniano normalizados a partir do auto estado $|0\rangle$,

$$\frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle = |n\rangle, \quad (3.9)$$

de modo que

$$\hat{H}|n\rangle = \omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) |n\rangle = \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) |n\rangle. \quad (3.10)$$

O operador $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ é chamado de *operador número*, pois $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$.

3.2 A QUANTIZAÇÃO DO CAMPO ESCALAR

Os pares ordenados $(\phi(x), \partial_0 \phi(x))$ analisados no método variacional são os correspondentes às coordenadas e *momenta* generalizados do sistema de uma partícula. Como na teoria não-relativística, as coordenadas e seus *momenta* conjugados são soluções de equações de movimento (equações dinâmicas). Na teoria relativística não é diferente. Para o prosseguimento da quantização é necessário estudar a equação de movimento satisfeita pelo par $(\phi(x), \partial_0 \phi(x))$.

O campo mais elementar do qual dispomos é o campo escalar real $\phi(x)$, $\forall x \in \mathcal{M}^4$. A equação relativística correspondente aos campos escalares é a equação de Klein-Gordon,

$$(\square + m^2)\phi(x) = 0 \quad (3.11)$$

em que $\square = \partial^\mu \partial_\mu = -P^\mu P_\mu$ é o operador d'Alembertiano, também conhecido como operador de onda.

A expressão do operador de onda em notação de tempo e espaço $\square = \partial^2 / \partial t^2 - \nabla^2$, mostra com mais clareza que esta é uma equação diferencial parcial homogênea de segunda ordem chamada de equação de onda [9]b. Soluções para equações desse tipo são,

$$\zeta(x) \propto e^{\pm i p \cdot x} \quad (3.12)$$

Não é difícil obter uma densidade de Lagrangeana que, através das equações de Euler-Lagrange,

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi(x)} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi(x)} \right) = 0. \quad (3.13)$$

gere a equação de Klein-Gordon. Podemos ver que a Lagrangeana

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} (\partial_0 \phi(x) \partial^0 \phi(x) - \nabla \phi(x) \cdot \nabla \phi(x)) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2(x) \\ \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2(x) \end{aligned} \quad (3.14)$$

ao ser utilizada nas equações de Euler-Lagrange, gera a equação de Klein-Gordon. A quantidade

$$\partial_0 \phi(x) = \pi(x) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial^0 \phi(x)}. \quad (3.15)$$

é conhecida como *densidade de momentum conjugado* ao campo [5]. A densidade de Hamiltoniana é obtida a partir de uma transformação de Legendre, $\mathcal{H} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L}$ e assume a forma

$$\mathcal{H}(x) = \frac{1}{2} \left((\pi(x))^2 + (\nabla \phi(x))^2 \right) + \frac{1}{2} m^2 \phi^2(x). \quad (3.16)$$

Estas expressões são facilmente obtidas para campos escalares complexos $\phi^*(x) \neq \phi(x)$. Escrevendo $\phi(x) = 1/\sqrt{2}(\phi_1(x) + i\phi_2(x))$ definido em um plano complexo, expandido por duas soluções reais linearmente independentes que são $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$, pode-se obter as seguintes expressões para \mathcal{L} , $\pi(x)$ e $\mathcal{H}(x)$

$$\mathcal{L} = \left(\partial_\mu \phi^*(x) \right) \left(\partial^\mu \phi(x) \right) - m^2 \phi^*(x) \phi(x) \quad (3.17)$$

$$\partial_0 \phi^*(x) = \pi(x) \quad (3.18)$$

$$\mathcal{H}(x) = (\pi^*(x))(\pi(x)) + (\nabla\phi^*(x))(\nabla\phi(x)) + m^2\phi^*(x)\phi(x). \quad (3.19)$$

Veremos que neste caso $\mathcal{H}(x)$ descreve duas partículas escalares associadas pela conjugação de carga.

3.2.1 A Quantização do Campo Escalar Real

O processo de quantização do sistema clássico não relativístico que apresentamos baseou-se em operadores independentes do tempo. Para seguir caminho análogo na teoria relativística, vamos obter soluções particulares reais da equação de Klein-Gordon e obter a solução geral através de superposição. A partir daí a quantização segue o método similar ao visto para os operadores de criação e aniquilação da teoria não relativística. Este procedimento será mostrado nesta seção e estendido ao campo escalar complexo na seção seguinte.

Cada onda plana da forma $\zeta(x) \propto e^{\pm ip \cdot x}$ é uma solução particular da equação de Klein-Gordon, envolvendo o produto interno entre os quadrivetores x e p . Tais soluções, no entanto, só o são se um vínculo for satisfeito entre as componentes do quadrimomentum:

$$(\square + m^2)e^{\pm ip \cdot x} = (-p^2 + m^2)e^{\pm ip \cdot x} = 0, \quad (3.20)$$

o que implica $p^2 = m^2$. A solução geral pode ser representada como uma superposição de ondas planas, sujeitas ao vínculo que encontramos:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int d^4p \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) (a(p)e^{ip \cdot x} + a^\dagger(p)e^{-ip \cdot x}). \quad (3.21)$$

Fazemos a integração sobre p^0 e redefimos $a(p) \rightarrow \sqrt{p^0}a(p)$, obtemos

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} (a(p)e^{ip \cdot x} + a^\dagger(p)e^{-ip \cdot x}). \quad (3.22)$$

O momentum conjugado ao campo é obtido simplesmente tomando a derivada de $\varphi(x)$ com respeito ao tempo, ou seja,

$$\pi(x) = \partial_0\varphi(x) = i \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3}} \sqrt{\frac{p^0}{2}} [a(p)e^{ip \cdot x} - a^\dagger(p)e^{-ip \cdot x}]. \quad (3.23)$$

A quantização exige que consideremos $a(p)$ e $a^\dagger(p)$ como operadores. A álgebra satisfeita por eles é determinada pelas relações de comutação em tempos iguais entre o campo e seu momentum conjugado. Assim, impondo que

$$[\varphi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad (3.24)$$

$$[\varphi(\vec{x}, t), \varphi(\vec{y}, t)] = [\pi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)] = 0, \quad (3.25)$$

obtemos

$$[a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}')] = \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \quad (3.26)$$

$$[a(\vec{p}), a(\vec{p}')] = [a^\dagger(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}')] = 0. \quad (3.27)$$

Achar uma expressão para o operador Hamiltoniano por conta dos comutadores (3.26) e (3.27) torna-se uma tarefa simples,

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \int d^3x \mathcal{H}(x) = \int d^3x \frac{1}{2} \left((\partial^0 \varphi(x))^2 + (\nabla \varphi(x))^2 \right) + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2(x) \quad (3.28) \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_p \left(a(p) a^\dagger(p) + a^\dagger(p) a(p) \right) \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_p \left(a(p) a^\dagger(p) + \frac{1}{2} \delta^{(3)}(0) \right), \end{aligned}$$

onde definimos $\omega_p \equiv p^0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$. Observamos a presença de uma divergência, expressa pelo termo envolvendo a delta. Como, no entanto, apenas diferenças de energias têm significado físico e o termo em questão é uma constante, idêntica para todos os níveis de energia, vemos que ele será cancelado ao calcularmos diferenças de energias. Assim, podemos redefinir o Hamiltoniano para:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_p \left(a^\dagger(p) a(p) \right). \quad (3.29)$$

Assim como foi feito com o Hamiltoniano, é simples mostrar que o operador momentum do campo é

$$\hat{\mathbf{P}} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \mathbf{p} \left(a^\dagger(p) a(p) \right). \quad (3.30)$$

3.2.2 Quantização do Campo Escalar Complexo.

Na subseção anterior os campos $\varphi(x)$ e $\pi(x)$ foram obtidos assumindo que satisfaziam a condição $\varphi(x) = \varphi^\dagger(x)$ e $\pi(x) = \pi^\dagger(x)$. Para ter um campo escalar complexo tal vínculo não deve ser imposto, o que implica,

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} \left(a(p) e^{ip \cdot x} + b^\dagger(p) e^{-ip \cdot x} \right). \quad (3.31)$$

onde $a(p)$ e $b(p)$ são operadores independentes. O momentum conjugado ao campo passa ser representado como

$$\pi(x) = \partial_0 \varphi^\dagger(x) = i \int \frac{d^3 p}{\sqrt{(2\pi)^3}} \sqrt{\frac{p^0}{2}} [b(p)e^{ip \cdot x} - a^\dagger(p)e^{-ip \cdot x}]. \quad (3.32)$$

A supressão do vínculo de conjugação faz com que os campos passem a ter 1 grau de liberdade interno [1]. Fisicamente isso significa dizer que o campo descreve partículas distintas porém com a mesma massa por conta do coeficiente das exponenciais. A única interpretação para operadores de criação e aniquilação associados a partículas escalares independentes com a mesma massa, é a de que esses operadores referem-se a partícula e antipartícula.

A álgebra dos comutadores satisfeita por esses novos operadores é facilmente obtida com base nas relações de comutação dos operadores de criação e aniquilação,

$$[a(p), a^\dagger(p')] = [b(p), b^\dagger(p')] = \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \quad (3.33a)$$

$$[a(p), a(p')] = [b(p), b(p')] = 0, \quad (3.33b)$$

etc.

As relações de comutação entre os operadores $a(p)$ e $b(p)$ foram construídas com base no princípio de independência entre “osciladores harmônicos” de um sistema não interagente. É fácil verificar, a partir da densidade de Lagrangeana tratada na seção anterior e dos passos já mostrados acima, que os operadores Hamiltoniano e momentum total associados ao campo escalar complexo, têm respectivamente as formas,

$$\hat{H} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \omega_p (a^\dagger(p)a(p) + b^\dagger(p)b(p)), \quad (3.34)$$

$$\hat{\mathbf{P}} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \mathbf{p} (a^\dagger(p)a(p) + b^\dagger(p)b(p)). \quad (3.35)$$

O operador carga é um operador de simetria, que extrai o conteúdo de carga de um campo, obtido através da integração e quantização da componente 0 da corrente de Noether. Com base na equação (3.17),

$$\hat{Q} = \int_V d^3 x j^0 = -i \int d^3 x \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \pi^*(x)} \varphi(x) - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \pi(x)} \varphi^\dagger(x) \right) \quad (3.36)$$

$$= -i \int d^3 x (\pi(x)\varphi(x) - \pi^\dagger(x)\varphi^\dagger(x)) \quad (3.37)$$

o que nos leva a

$$\hat{Q} = \int_V d^3 x j^0 = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (a^\dagger(p)a(p) - b^\dagger(p)b(p)) \quad (3.38)$$

3.3 O ESPAÇO DE HILBERT

Até o momento com a quantização temos apenas operadores quânticos e ainda não apresentamos o espaço de Hilbert onde estão definidos esses operadores. Nessa seção iremos definir uma base para o espaço de Hilbert da teoria quântica de campos escalares com a qual possamos expandir o mesmo, representar qualquer estado físico, e mostrar a importância dos operadores de campo.

Na mecânica quântica não relativística os autoestados do Hamiltoniano formam uma base completa para o espaço do Hilbert. Assim como fazemos na mecânica quântica para construir estados de energia iterativamente atuando com o operador de levantamento a^\dagger sobre o estado de menor modo normal de vibração $|0\rangle$, na mecânica quântica relativística atuamos com o operador de criação iterativamente sobre o estado de menor ocupação $|0\rangle$, para construir os estados de partícula. Esse estado $|0\rangle$ é postulado como aquele que é aniquilado quando o operador $a(p)$ atua sobre ele, o que nos leva a nomeá-lo como *vácuo*. Temos, assim,

$$a(p)|0\rangle = 0 \quad (3.39)$$

E, para $\hat{a}^\dagger(p)$,

$$a^\dagger(p) |0\rangle = |p\rangle. \quad (3.40)$$

A atuação do operador de criação sobre o vácuo gera o estado de uma partícula com momentum p [3]. A intuição da mecânica quântica não relativística nos faz concluir que temos o seguinte resultado para atuação de $((a^\dagger(p))^2)$ sobre o estado de vácuo:

$$\frac{((a^\dagger(p))^2)}{\sqrt{2!}} |0\rangle = |p, p\rangle. \quad (3.41)$$

Assim obtemos o estado de duas partículas de momento p cada uma. O estado de $n(p_i)$ partículas de momento p_i é definido como sendo

$$\frac{((a^\dagger(p_i))^{n(p_i)})}{\sqrt{n(p_i)!}} |0\rangle = |n(p_i)\rangle. \quad (3.42)$$

Importante notar que o fato de não haver restrições para o número de partículas que possuem o mesmo momento p_i é uma confirmação de que a quantização de campos escalares leva a estados de partículas que respeitam a estatística de Bose-Einstein [1].

O estado mais geral que descreve todas as partículas para cada valor de momento \mathbf{p}_i , $i = 1, 2, \dots$, é representado como

$$\prod_i \frac{((a^\dagger(p_i))^{n(p_i)})}{\sqrt{n(p_i)!}} |0, 0, \dots\rangle = |n(p_1), n(p_2), \dots\rangle. \quad (3.43)$$

de tal maneira que com base nas relações de comutação dos operadores $a(p)$ e $a^\dagger(p)$,

$$a(p_j)|n(p_1), n(p_2), \dots\rangle = \sqrt{n(p_j)}|n(p_1), n(p_2), \dots, n(p_j) - 1\rangle. \quad (3.44)$$

Similarmente, para o operador de criação,

$$(a^\dagger(p_j)|n(p_1), n(p_2), \dots\rangle = \sqrt{n(p_j) + 1}|n(p_1), n(p_2), \dots, n(p_j) + 1\rangle. \quad (3.45)$$

É imediato mostrar que esses estados são ortonormais. A base do espaço de Hilbert do campo escalar complexo é gerada através da atuação de dois operadores de criação distintos ao invés de um,

$$\prod_i \frac{(a^\dagger(p_i))^{n(p_i)}}{\sqrt{n(p_i)!}} \prod_l \frac{(b^\dagger(q_l))^{n(q_l)}}{\sqrt{n(q_l)!}} |0,0, \dots; 0,0, \dots\rangle. \quad (3.46)$$

A base do espaço, portanto, é composta dos autovetores do operador número total de partículas

$$N = \int d^3p a^\dagger(p)a(p) = \int d^3p N(p) \quad (3.47)$$

$$N|n(p_1), n(p_2), \dots\rangle = n|n(p_1), n(p_2), \dots\rangle, \quad (3.48)$$

onde $n = \sum n(p_i)$. O produto tensorial entre os espaços de Hilbert individuais, nos quais estão definidos os estados com número fixo de partículas de cada valor de momentum, é conhecido como *espaço de Fock*. Através do que consideramos nessa seção podemos observar que

$$\varphi(x)|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} (a(p)e^{ip \cdot x} + a^\dagger(p)e^{-ip \cdot x})|0\rangle, \quad (3.49)$$

$$\varphi(x)|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} e^{-ip \cdot x}|p\rangle, \quad (3.50)$$

Ou seja, a atuação do operador de campo sobre o estado de vácuo gera uma superposição de estados de 1 partícula de momento bem definido. Esse estado é similar ao autoestado do operador de posição $|x\rangle$ da mecânica quântica não relativística, a menos do fator multiplicativo $1/2p^0$, que é aproximadamente constante para valores não relativísticos de p [3]. Por conta disso, a leitura que se faz da (3.67) é de que o operador $\varphi(x)$ cria uma partícula no ponto x do espaço-tempo, de modo que $\varphi(x)|0\rangle = |x\rangle$.

3.4 CAUSALIDADE

Podemos, agora, derivar a relação de comutação relativística entre operadores de campo que dependem de coordenadas x e y no espaço Minkowski,

$$\begin{aligned}
[\varphi(x), \varphi(y)] &= \int \frac{d^3 p' d^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{p'}} 2\omega_p} [e^{-ip' \cdot x} e^{ip \cdot y} [a(p'), a^\dagger(p)] \\
&\quad - [a^\dagger(p'), a(p)] e^{ip' \cdot x} e^{-ip \cdot y}] \\
[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2\omega_p} [e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)}] \equiv \Delta(x-y)
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Esta função é conhecida como função de Pauli-Jordan [7]b. É necessário verificar as propriedades dessa função para concluir que temos uma relação de comutação relativística.

A invariância por transformação de Lorentz torna-se manifesta quando rescrevemos a função como uma integral de quatro dimensões. Para isso modificando a componente espacial do tri-momento $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$, fazendo a substituição dos quadrivetores $z \equiv x - y$ temos

$$\begin{aligned}
[\varphi(x), \varphi(y)] &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2\omega_p} [e^{-i(\omega_p z_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{z})} - e^{i(\omega_p z_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{z})}] \\
&= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3 2\omega_p} [sgn(p_0) \delta(p_0 - \omega_p) + sgn(p_0) \delta(p_0 + \omega_p)] e^{-i(\omega_p z_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{z})}
\end{aligned}$$

onde $d^4 p = d^3 p dp_0$ e a função $sgn(p_0)$ é definida como [10]

$$sgn(p_0) \begin{cases} +1, & se p_0 > 0 \\ -1, & se p_0 < 0. \end{cases} \tag{3.52}$$

Combinando as funções delta com o auxílio da condição de *mass shell*, $\omega_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$

$$\frac{1}{E_p} (\delta(p_0 - E_p) + \delta(p_0 + E_p)) = \delta((p_0 - E_p)(p_0 + E_p)) = \delta(p^2 - m^2) \tag{3.53}$$

obtemos uma integral em quatro dimensões de quantidades escalares

$$\Delta(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3 2\omega_p} sgn(p_0) \delta(p^2 - m^2) e^{-i(\omega_p z_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{z})} \tag{3.54}$$

Objetos escalares são invariantes de Lorentz por definição. A mudança do elemento de volume infinitesimal $d^4 p$ para $d^4 \bar{p}$ por uma transformação de Lorentz,

$$[\Lambda] = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad \gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}, \quad \beta = v/c,$$

nos leva a

$$d^4 \bar{p} = \det|\Lambda| d^4 p = d^4 p. \tag{3.55}$$

A função $sgn(p_0)$ só se altera mediante transformações que não pertençam ao grupo de Lorentz próprio ortócrono ($\Lambda^0_0 < 0$). Como $p^2 - m^2 = \bar{p}^2 - m^2$, vemos que $\Delta(x-y)$ é invariante de Lorentz (próprio e ortócrono).

Separações do tipo tempo, $z = (t, 0, 0, 0)$ não anulam a função de Pauli-Jordan (3.51) pois produzem um resultado $\Delta(x - y) \sim e^{-imt} - e^{imt}$ com $e^{-imt} \neq e^{imt}$ [7]. Olhando agora separações do tipo espaço $z = (0, \mathbf{r})$

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\omega_p} [e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} - e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}] \quad (3.56)$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \quad (3.57)$$

A função de Pauli-Jordan é uma integral cuja variável de integração é \mathbf{p} , por isso podemos trocar \mathbf{p} por $-\mathbf{p}$ na segunda exponencial sem prejuízos.

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\sqrt{(-\mathbf{p})^2 + m^2}} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} [\varphi(x), \varphi(y)] &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.59)$$

O fato de o comutador ser identicamente nulo para intervalos do tipo espaço concorda com o princípio da causalidade. Isso mostra que, caso o campo fosse um observável físico (o que nem sempre ele é) medidas do campo feitas em um ponto não podem afetar medidas feitas em outro ponto caso esses pontos não estejam causalmente conectados [3]. Pode-se mostrar sem dificuldade que, se tivéssemos analisado campos escalares complexos, chegaríamos a uma equação de Pauli-Jordan que exigiria assumir a existência da antipartícula sob pena de violação do princípio da causalidade.

3.5 PROPAGADORES

O objetivo principal de se construir uma teoria que possui vetores de estado representando sistemas físicos é descrever o modo como esse sistema evolui de um estado a outro, isto é, como o sistema representado por um vetor de estado passa a ser representado por outro vetor de estado na medida em que ele evolui no espaço-tempo. Estabelecida a maneira como são criados os estados de partículas relativísticas agora é necessário saber qual a *amplitude de propagação* entre pontos distintos do espaço-tempo [10,11]. Na presente seção mostraremos que os propagadores da mecânica quântica não relativística, embora sejam mais simples, podem ser reproduzidos na teoria quântica de campos.

3.5.1 Propagadores Não Relativísticos

Para desenvolver a expressão do propagador da mecânica quântica não relativística é necessário primeiro escrever a relação entre um ket na representação de Schrödinger $|\psi(t)\rangle_S$ e outro na representação de Heisenberg $|\psi\rangle_H$

$$|\psi(t)\rangle_S = e^{-i\hat{H}t}|\psi\rangle_H. \quad (3.60)$$

Posteriormente, toma-se o produto interno com relação ao bra associado ao autoestado de posição $\langle q|$,

$$\langle q|\psi(t)\rangle = \langle q|e^{-i\hat{H}t}|\psi\rangle. \quad (3.61)$$

Definimos o autoestado de posição na representação de Heisenberg como [4],

$$|q, t\rangle = e^{i\hat{H}t}|q\rangle \quad (3.62)$$

e assim obtemos a função de onda

$$\langle q|\psi(t)\rangle = \langle q|e^{-i\hat{H}t}|\psi\rangle = \langle q, t|\psi\rangle_H = \psi(q, t). \quad (3.63)$$

O conjunto desses estados, para todos os q , constitui uma base no tempo t . Imaginamos um tempo inicial t_i e um tempo final t_f . A relação de completeza nos permite escrever

$$\langle q_f, t_f|\psi\rangle_H = \int \langle q_f, t_f|q_i, t_i\rangle \langle q_i, t_i|\psi\rangle_H dq_i \quad (3.64)$$

$$\psi(q_f, t_f) = \int \langle q_f, t_f|q_i, t_i\rangle \psi(q_i, t_i) dq_i \quad (3.65)$$

O objeto $K(q_f, t_f; q_i, t_i) = \langle q_f, t_f|q_i, t_i\rangle$ que relaciona os estados iniciais e finais é chamado *propagador*. O conceito de propagador possibilita uma maneira de estudar a evolução do sistema sem que tenhamos que resolver a equação de Schrödinger explicitamente [4].

3.5.2 Propagadores Relativísticos

A ideia dos propagadores na mecânica quântica relativística utiliza-se do mesmo princípio da subseção anterior. O intuito agora é estender essa ideia ao limite relativístico. Em outras palavras, nos interessa a projeção do estado $\varphi(x)|0\rangle$ sobre o estado $(\varphi(y)|0\rangle)^\dagger = \langle 0|\varphi(y)$, para obtermos o objeto conhecido como *amplitude de propagação* entre esses pontos [1].

Tomando o produto interno explícito entre os estados supracitados obtemos o propagador de Klein-Gordon

$$\langle 0|\varphi(y)\varphi(x)|0\rangle = \int \frac{d^3p' d^3p}{(2\pi)^6} \frac{1}{\sqrt{4\omega_{p'}\omega_p}} \langle 0|\hat{a}_{p'}\hat{a}_p^\dagger|0\rangle e^{ip'\cdot x - ip\cdot y} \quad (3.66)$$

$$\langle 0|\varphi(y)\varphi(x)|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_p} e^{-ip\cdot(y-x)} \equiv D(y-x). \quad (3.67)$$

É simples notar que separações tipo espaço geram uma amplitude de propagação que decai exponencialmente como [7],

$$D(y-x) \sim e^{-m|x-y|}. \quad (3.68)$$

Na prática isso significa dizer que fora do cone de luz a amplitude pode assumir valores não nulos. Sendo assim, medidas feitas em pontos causalmente desconectados não seriam independentes causando dificuldades com o princípio da causalidade. No entanto, antes de solucionar esse problema é importante notar que a expressão do propagador não está completa. É necessário considerar também a propagação no sentido $y \rightarrow x$, já que a princípio nada exclui essa possibilidade [7],

$$\langle 0|\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle = D(x-y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_p} e^{-ip\cdot(x-y)}. \quad (3.69)$$

A subtração das amplitudes de propagação nos dá a função de Pauli-Jordan

$$\begin{aligned} \langle 0|\varphi(y)\varphi(x)|0\rangle - \langle 0|\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_p} e^{-ip\cdot(y-x)} - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_p} e^{ip\cdot(y-x)} \\ \langle 0|[\varphi(y), \varphi(x)]|0\rangle &= D(y-x) - D(x-y) = \Delta(y-x). \end{aligned} \quad (3.70)$$

Assim, vemos que a função de Pauli-Jordan é o comutador dos campos escalares,

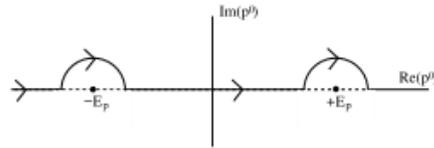
$$\Delta(y-x) = [\varphi(y), \varphi(x)] = \langle 0|[\varphi(y), \varphi(x)]|0\rangle. \quad (3.71)$$

Como vimos que a função de Pauli-Jordan vai a zero para separações do tipo espaço, o princípio da causalidade é preservado. O comutador do campo escalar complexo $[\phi(y), \phi^\dagger(x)]$ origina a mesma função, contudo, ao invés de interpretar o resultado como a possibilidade de propagação de um mesmo tipo de partícula nos dois sentidos conclui-se que a amplitude de propagação da partícula em um determinado sentido anula a amplitude de propagação da antipartícula no sentido oposto [1,10].

Para desenvolver uma expressão explícita para o propagador, notamos que cada componente da integral (3.70) possui a reta dos reais, \mathbb{R} , como domínio de integração. A condição de *mass shell* gera indeterminações para a componente temporal nos pontos $p^0 = \pm\omega_p = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ do domínio. Estendendo este domínio ao plano complexo conferimos um grau de liberdade a mais ao domínio, sendo possível estabelecer um contorno na região de integração que não passe “por cima” dos pontos singulares. Para decidir em qual semiplano o contorno deve ser fechado precisamos olhar o sinal da separação temporal [11]. Caso a separação temporal seja $y^0 > x^0$ temos $\exp(-ip_0(y^0 - x^0)) \rightarrow 0$ quando $p_0 \rightarrow -i\infty$,

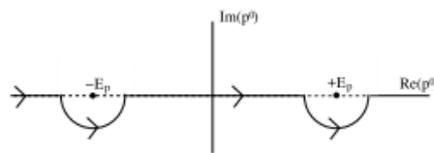
consequentemente imaginamos um contorno de integração como um semicírculo tendendo ao infinito contido no semi-plano complexo negativo,

Figura 1



Do mesmo modo se tivermos $y^0 < x^0$, então devemos observar que $\exp(-ip_0(y^0 - x^0)) \rightarrow 0$ quando $p_0 \rightarrow i\infty$, o que impõe um contorno de integração como um semicírculo infinito contido no semi-plano complexo positivo,

Figura 2



Fazendo a mudança $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ no segundo termo da (3.70),

$$\Delta(y-x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x})} \left\{ \frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}} e^{-ip_0(y^0-x^0)} - \frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}} e^{ip_0(y^0-x^0)} \right\} \quad (3.72)$$

$$= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x})} \left\{ \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip_0(y^0-x^0)} \Big|_{p^0=\omega_{\mathbf{p}}} + \frac{1}{-2\omega_{\mathbf{p}}} e^{ip_0(y^0-x^0)} \Big|_{p^0=-\omega_{\mathbf{p}}} \right\} \quad (3.73)$$

é possível interpretar as indeterminações como resíduos de uma integração sobre dp^0 com polos em $p^0 = \pm E_{\mathbf{p}} = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ [1]. Já que o sentido de integração é horário multiplicamos o somatório dos resíduos da integral temporal por -1 quando $y^0 > x^0$. De acordo com o Teorema de Resíduos de Cauchy podemos utilizar a identidade

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \frac{dp^0}{2\pi} \frac{e^{-ip_0(y^0-x^0)}}{p^2 - m^2} &= \int_{\mathcal{C}} \frac{dp^0}{2\pi} \frac{e^{-ip_0(y^0-x^0)}}{p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2} = \int_{\mathcal{C}} \frac{dp^0}{2\pi} \frac{e^{-ip_0(y^0-x^0)}}{p_0^2 - \omega_{\mathbf{p}}^2} \\ &= -2\pi i \left\{ \frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}} e^{-ip_0(y^0-x^0)} \Big|_{p^0=\omega_{\mathbf{p}}} + \frac{1}{-2\omega_{\mathbf{p}}} e^{ip_0(y^0-x^0)} \Big|_{p^0=-\omega_{\mathbf{p}}} \right\} \end{aligned} \quad (3.74)$$

e substituir na expressão (3.73) obtendo

$$\Delta(y-x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \int_{\mathcal{C}} \frac{dp^0}{2\pi i} \frac{-1}{p^2 - m^2} e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x})}, \quad \text{para } y^0 > x^0. \quad (3.75)$$

O Teorema de Resíduo permite que o contorno de integração seja fechado em ambos os semi-planos, evitando o fato da integral divergir. No entanto, se tivéssemos fechado o contorno por

cima não teríamos polos dentro do mesmo e conseqüentemente o somatório de resíduos e o propagador seriam nulos. Este fato nos permite dividir os propagadores em dois grupos, os adiantados e os retardados. De acordo com essa ideia é possível notar que derivamos o propagador retardado

$$\Delta_R(y-x) = \begin{cases} D(y-x) & y^0 > x^0 \\ 0 & x^0 > y^0. \end{cases} \quad (3.76)$$

Matematicamente este propagador é classificado como a função de Green da equação Klein-Gordon. O método das funções de Green é utilizado para resolver equações diferenciais não homogêneas [12]. Para observar melhor o papel de função de Green definimos a função

$$\Theta(y^0 - x^0) = \begin{cases} 1, & \text{se } y^0 > x^0 \\ 0, & \text{se } x^0 > y^0 \end{cases} \quad (3.77)$$

e reescrevemos o propagador de forma reduzida

$$\Delta_R(y-x) = \Theta(y^0 - x^0) \langle 0 | [\phi(y), \phi(x)] | 0 \rangle \quad (3.78)$$

de maneira que

$$\begin{aligned} (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \Delta_R(y-x) &= (\partial_\mu \partial^\mu \Theta(y^0 - x^0)) \langle 0 | [\phi(y), \phi(x)] | 0 \rangle \\ &\quad + 2 (\partial_\mu \Theta(y^0 - x^0)) \partial^\mu \langle 0 | [\phi(y), \phi(x)] | 0 \rangle \\ &\quad + \Theta(y^0 - x^0) (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \langle 0 | [\phi(y), \phi(x)] | 0 \rangle \end{aligned} \quad (3.79)$$

$$\begin{aligned} (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \Delta_R(y-x) &= -\delta(y^0 - x^0) \langle 0 | [\pi(y), \phi(x)] | 0 \rangle \\ &\quad + \delta(y^0 - x^0) \langle 0 | [\pi(y), \phi(x)] | 0 \rangle + 0 \\ &= -\delta^{(4)}(y-x). \end{aligned} \quad (3.80)$$

O propagador é a solução da equação de Klein-Gordon não homogênea, em outras palavras, é a função de Green do *Operador de Klein-Gordon* $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)$, como afirmamos. O papel de função de Green não é desempenhado apenas pelos propagadores de Klein-Gordon. As funções de Green da equação de Schrödinger são os propagadores da mecânica quântica não relativística [13],

$$\left(H - \frac{i\partial}{\partial t} \right) K(q_f, t_f; q_i, t_i) = -i\delta^{(3)}(\mathbf{q}_f - \mathbf{q}_i) \delta(t_f - t_i). \quad (3.81)$$

Outra maneira de escrever o propagador é conhecida como prescrição de Feynman. Esta prescrição necessita definir o operador de ordenação temporal,

$$T\{\varphi(y)\varphi(x)\} = \begin{cases} \varphi(y)\varphi(x), & \text{se } y^0 > x^0 \\ \varphi(x)\varphi(y), & \text{se } x^0 > y^0 \end{cases} \quad (3.82)$$

que também pode ser escrito como

$$T\{\varphi(y)\varphi(x)\} = \Theta(y^0 - x^0) \varphi(y)\varphi(x) + \Theta(x^0 - y^0) \varphi(x)\varphi(y). \quad (3.83)$$

Tomando o valor esperado de vácuo da função de Pauli-Jordan na condição de *mass shell* $p^0 = \pm\omega_p$, obtemos o propagador de Feynman

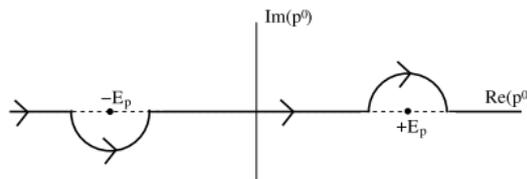
$$\Delta_F(y-x) = \langle 0|T\{\phi(y)\phi(x)\}|0\rangle \quad (3.84)$$

$$\Delta_F(y-x) = \Theta(y^0 - x^0)\langle 0|\phi(y)\phi(x)|0\rangle + \Theta(x^0 - y^0)\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle$$

$$\Delta_F(y-x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip\cdot(y-x)}. \quad (3.85)$$

Assim como fizemos para encontrar o propagador de Klein-Gordon é necessário estabelecer o domínio de p^0 como sendo o plano complexo e determinar o contorno de integração adequado que evite os pontos de singulares [11].

Figura 3



Quando $y^0 > x^0$ devemos fechar o contorno no semiplano inferior o que faz $p^0 = +\omega_p$ ser o único polo deste contorno, logo

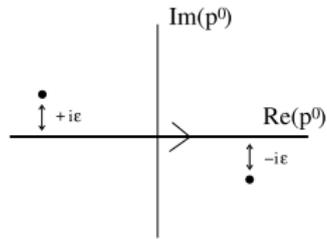
$$\Delta_F(y-x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_p} e^{-ip\cdot(y-x)} = D(y-x). \quad (3.86)$$

Da mesma forma quando $x^0 > y^0$ o contorno deve ser fechado no semiplano superior fazendo p^0 ser o único polo gerando,

$$\Delta_F(y-x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_p} e^{-ip\cdot(x-y)} = D(x-y). \quad (3.87)$$

Até o presente momento utilizamos o grau de liberdade a mais do plano complexo para estabelecer contornos de integração. Feynman, porém, desenvolveu um raciocínio inverso. Ao invés de achar e deformar contornos de integração ele desloca os polos no plano complexo pelo valor infinitesimal $\epsilon > 0$,

Figura 4



proporcionando o propagador com a seguinte expressão,

$$\Delta_F(y-x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (y-x)}. \quad (3.88)$$

A integração se torna mais simples, pois o domínio de p^0 passa a ser todo o eixo $Re(p^0)$. Feita a integração utiliza-se o limite $\epsilon \rightarrow 0$ [11].

No atual momento, com o que temos em mão, ainda não dispomos de uma teoria que dê conta de descrever fenômenos reais em física de partículas. Embora no fim desse capítulo tenhamos chegado a uma equação de Klein-Gordon que possui um termo de fonte, ainda existe um considerável caminho até estabelecermos uma equação dinâmica geral. Para descrever sistemas interagentes com inúmeros tipos de partículas sem número fixo com termo de fonte, devemos substituir a equação dinâmica da qual dispomos, que é linear, por uma que não seja linear e que contenha termos de fontes e outros tipos de campos. O método das integrais de trajetória é o formalismo mais adequado para chegarmos a uma teoria de sistemas evolutivos e complexos. A base do método dos integrais de trajetória é o conceito de propagador, que foi o ponto de chegada do atual capítulo, o que ilustra a importância do formalismo desenvolvido até aqui.

CAPÍTULO 4 INTERAÇÕES PERTURBATIVAS

Até aqui nos dedicamos a sistemas de partículas livres. Porém agora estamos interessados em descrever sistemas de partículas interagentes. Na Mecânica Quântica Relativística parte-se da hipótese de que uma Lagrangeana de interação é somada à Lagrangeana livre originando a Lagrangeana total da teoria interagente. A partir desse ponto as equações dinâmicas passam a ser não-lineares. Os termos nas Lagrangeanas de interação são potências dos campos, logo geram equações dinâmicas não lineares nessas variáveis. Tais equações não podem ser resolvidas exatamente por funções de Green.

O Hamiltoniano é a transformada de Legendre da Lagrangeana e, portanto, passa a ter um termo de interação somado ao Hamiltoniano livre. O método mais utilizado para tratar uma Teoria Quântica Relativística, com termos de interação não lineares no Hamiltoniano, é tratar tais termos como perturbações ao Hamiltoniano livre.

Métodos perturbativos são aproximações. Assim, desejamos que as interações sejam pequenas perturbações do sistema livre. As soluções interagentes terão valores próximos aos das soluções livres, diferindo por pequenas correções.

Na Teoria Quântica de Campos, além de perturbações pequenas, existem outras exigências quanto ao termo de interação da Lagrangeana. Considere, por exemplo, a densidade de Lagrangeana para o campo escalar real

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \sum_{n \geq 3} \frac{\lambda_n}{n!} \phi^n$$

onde λ_n é chamada de constante de acoplamento. As ordens das expansões perturbativas se dão com respeito às potências das constantes de acoplamento. Porém dizer que $\lambda_n \ll 1$ só é correto se λ_n for um termo adimensional.

A dimensão da Integral Fundamental da Ação, $[S] = 0$, impõe que a densidade de Lagrangeana tenha dimensão 4, já que, $S = \int d^4x \mathcal{L}$ e $[d^4x] = -4$. Olhando as dimensões do termo de interação $[\phi] = 1$, $[\partial_\mu] = 1$ e $[m] = 1$ vemos que a constante de acoplamento deve ter dimensão $[\lambda_n] = 4 - n$, pois,

$$[\lambda_n] + [\phi^n] = [\lambda_n] + n = 4 \rightarrow [\lambda_n] = 4 - n.$$

Para que as constantes de acoplamento sejam de fato adimensionais devemos multiplicá-las por E^{-n} quando necessário, já que, E (Energia) tem dimensão de massa, isto é, $[E] = [m] = 1$. Isso nos leva às seguintes Teorias de Interação para campos escalares:

- Teoria $\lambda^3\phi^3$. Nesta Teoria é necessário substituir $\lambda^3 \leftrightarrow \lambda_3/E$. Para termos perturbações pequenas a energia precisa ser grande comparada à constante de acoplamento, $E \gg \lambda_3 \rightarrow 1 \gg \lambda_3/E$. As potências $(\lambda_3/E)^k$ tornam-se ínfimas para valores $k > 1$. Neste caso dizemos que as contribuições relevantes das séries Perturbativas são os dois primeiros termos: O termo livre e o de interação em 1^a ordem de λ .
- Teoria $\lambda^4\phi^4$. A análise dimensional nos mostra que, $[\lambda_4] = 4 - 4 = 0$. E já que escolhemos $1 \gg \lambda_4$, também teremos contribuições relevantes apenas dos dois primeiros termos.

Teorias que tenham constantes de acoplamento de dimensão $4 - n$, $n > 4$, não são bem definidas perturbativamente, já que nesse caso as séries perturbativas tornam-se divergentes. Em outras palavras, temos uma teoria não renormalizável.

A dimensão dos campos espinoriais é $[\psi] = 1/2$. Portanto fica claro que com campos dessa natureza não podemos ter interações do tipo ψ^n . Interações desse tipo além de violar a invariância de Lorentz, quando n for ímpar, também violam o balanço dimensional da densidade de Lagrangeana. Interações envolvendo férmions precisam conter campos que não sejam fermiônicos. As duas interações envolvendo campos fermiônicos que iremos abordar no próximo capítulo são:

- Interações do Tipo Yukawa $g\bar{\psi}\psi\phi$, onde estão acoplados campos escalares aos campos espinoriais.
- Interações da Eletrodinâmica Quântica $e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$. Nesta teoria o acoplamento se dá entre os campos espinoriais e campos vetoriais.

Os aspectos particulares dessas interações, envolvendo férmions, serão abordados no presente trabalho.

O outro objetivo que temos é traduzir as descrições das teorias interagentes para a linguagem dos diagramas de Feynman. Neste formalismo poderemos observar melhor o comportamento das séries perturbativas e desenvolver um método para calcular processos de espalhamento reais ao final deste trabalho.

4.1 A REPRESENTAÇÃO DE INTERAÇÃO

Na mecânica quântica não relativística o formalismo que trata as entidades de uma teoria interagente como entidades de uma teoria livre, além de intuitivo é bastante útil ao cálculo de processos de espalhamento reais [3]. Portanto, assim como se fez com a quantização canônica lançaremos mão do mesmo raciocínio das interações perturbativas da Mecânica Quântica para lidar com as interações na Teoria Quântica de Campos [13]. Para isso necessitamos das duas representações mais comuns, a representação de Heisenberg e a Representação de Schrödinger. Partindo delas vamos apresentar a representação híbrida, também conhecida como representação de interação.

A representação de interação é obtida com a utilização do operador de evolução temporal associado ao Hamiltoniano livre, conjugando campos de Heisenberg:

$$\varphi_I(t, \mathbf{x}) = e^{i\hat{H}_0(t-t_0)}\varphi(t_0, \mathbf{x})e^{-i\hat{H}_0(t-t_0)} \quad (4.1)$$

assim

$$\varphi(t, \mathbf{x}) = e^{i\hat{H}(t-t_0)}e^{-i\hat{H}_0(t-t_0)}\varphi_I(t, \mathbf{x})e^{i\hat{H}_0(t-t_0)}e^{-i\hat{H}(t-t_0)} \quad (4.2)$$

$$\varphi(t, \mathbf{x}) = \hat{U}^\dagger(t, t_0)\varphi_I(t, \mathbf{x})\hat{U}(t, t_0). \quad (4.3)$$

$\hat{U}(t, t_0)$ é a versão do operador unitário de mudança de representação da teoria de campos. Como resultado já temos os meios necessários para derivarmos uma expressão que possibilite descrever as interações perturbativamente. E também que seja consistente com o princípio de coincidência entre as representações quando $\hat{H}_{int} \rightarrow 0$. Portanto, utilizando como condição inicial $\hat{U}(t_0, t_0) = \mathbb{I}$

$$\begin{cases} i \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(t, t_0) = \hat{H}_I \hat{U}(t, t_0) \\ \hat{U}(t_0, t_0) = \mathbb{I} \end{cases} \quad (4.4)$$

e integrando com respeito a dt' chegamos a uma equação integral equivalente

$$i\hat{U}(t, t_0) = \mathbb{I} + \int_{t_0}^t dt' \hat{H}_I(t')\hat{U}(t', t_0). \quad (4.5)$$

O fato de serem equivalentes nos permite obter a solução da equação que acharmos mais conveniente já que esta servirá para as duas equações. Como o objetivo aqui é encontrar uma solução perturbativa basta expandirmos (4.5) iterativamente para os vários valores de tempo intermediários t_i

$$\begin{aligned}
\hat{U}(t, t_0) = & \mathbb{I} - i \int_{t_0}^t dt_1 \hat{H}_I(t_1) \\
& + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \hat{H}_I(t_1) \hat{H}_I(t_2) \\
& + (-i)^3 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 \hat{H}_I(t_1) \hat{H}_I(t_2) \hat{H}_I(t_3) \\
& \quad \vdots \\
& + (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \hat{H}_I(t_1) \hat{H}_I(t_2) \hat{H}_I(t_3) \dots \hat{H}_I(t_n). \quad (4.6)
\end{aligned}$$

É possível tornar essa expressão ainda mais simples utilizando o produto temporalmente ordenado entre os operadores de interação [3]. Por exemplo para os operadores $\hat{H}(t_1)$ e $\hat{H}(t_2)$ (apenas para o termo de segunda ordem em \hat{H}_I) temos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 T\{\hat{H}(t_1) \hat{H}(t_2)\} \\
& = \frac{1}{2} \left\{ \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \hat{H}(t_1) \hat{H}(t_2) \theta(t_1 - t_2) + \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^t dt_1 \hat{H}(t_2) \hat{H}(t_1) \theta(t_2 - t_1) \right\}. \quad (4.7)
\end{aligned}$$

Como t_1 e t_2 são variáveis de integração podemos trocá-las na segunda integral do lado direito de modo a produzir

$$\begin{aligned}
& = \frac{1}{2} \left\{ \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \hat{H}(t_1) \hat{H}(t_2) \theta(t_1 - t_2) \right. \\
& \quad \left. + \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \hat{H}(t_1) \hat{H}(t_2) \theta(t_1 - t_2) \right\} \\
& = \frac{1}{2} \left\{ 2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \hat{H}(t_1) \hat{H}(t_2) \right\} \quad (4.8)
\end{aligned}$$

e finalmente temos

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 T\{\hat{H}(t_1) \hat{H}(t_2)\} = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \hat{H}(t_1) \hat{H}(t_2). \quad (4.9)$$

Agora assumimos que a seguinte identidade é válida em ordens mais elevadas:

$$\int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \hat{H}(t_1) \dots \hat{H}_I(t_n) = \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^t dt_n T\{\hat{H}(t_1) \dots \hat{H}_I(t_n)\}. \quad (4.10)$$

Isto nos permite escrever o operador de evolução temporal como

$$\hat{U}(t, t_0) = \mathbb{I} - i \int_{t_0}^t dt_1 \hat{H}_I(t_1)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(-i)^2}{2!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 T\{\hat{H}_I(t_1)\hat{H}_I(t_2)\} \\
& + \frac{(-i)^3}{3!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^t dt_3 T\{\hat{H}_I(t_1)\hat{H}_I(t_2)\hat{H}_I(t_3)\} \\
& \quad \vdots \\
& + \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^t dt_n T\{\hat{H}_I(t_1)\hat{H}_I(t_2)\hat{H}_I(t_3) \dots \hat{H}_I(t_n)\} \quad (4.11)
\end{aligned}$$

ou seja

$$\hat{U}(t, t_0) \equiv T \left\{ \exp \left[-i \int_{t_0}^t dt \hat{H}_I(t) \right] \right\}, \quad t \geq t_0. \quad (4.12)$$

Obtemos assim uma expressão que claramente soluciona a equação diferencial (4.6) e satisfaz os limites

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \hat{U}(t, t_0) = \hat{U}(t_0, t_0) = \mathbb{I} \quad (4.13)$$

$$\lim_{\hat{H}_I(t) \rightarrow 0} \hat{U}(t, t_0) = \mathbb{I}. \quad (4.14)$$

A função de correlação da teoria interagente exige que definamos um novo estado de vácuo já que, na representação de interação, possuímos uma equação de evolução para os estados associada apenas ao Hamiltoniano de Interação \hat{H}_I e não ao Hamiltoniano livre \hat{H}_0 . Precisamos de um estado de vácuo na teoria interagente $|\Omega\rangle$ que seja um autoestado do Hamiltoniano completo e não apenas do hamiltoniano de interação, ou seja,

$$\hat{H}|\Omega\rangle = (\hat{H}_0 + \hat{H}_I)|\Omega\rangle = 0|\Omega\rangle = 0. \quad (4.15)$$

É razoável supor que exista alguma superposição entre os estados de vácuo das teorias livre e interagente, já que, os objetos da teoria interagente são construídos como aproximações perturbativas de objetos da teoria livre,

$$\langle \Omega | 0 \rangle \neq 0. \quad (4.16)$$

Assim o conjunto completo de auto estados do hamiltoniano total $\{|n\rangle\}_{n \in \mathbb{Z}}$, $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$, mais a relação de completeza,

$$\mathbb{I} = |\Omega\rangle\langle\Omega| + \sum_{n \neq 0} |n\rangle\langle n| \quad (4.17)$$

permite retratar a evolução temporal do vácuo como

$$e^{-i\hat{H}T}|0\rangle = e^{-iE_0T}|\Omega\rangle\langle\Omega|0\rangle + \sum_{n \neq 0} e^{-iE_nT}|n\rangle\langle n|0\rangle. \quad (4.18)$$

Considerando $\epsilon \ll 1$ e tomando o limite $T \rightarrow \infty(1 - i\epsilon)$, notamos que os termos com $n \neq 0$ podem ser descartados pois sendo $E_n > E_0$ então, $e^{-E_n \infty \epsilon} \ll e^{-E_0 \infty \epsilon}$ [14]. Em outras

palavras, nesse limite o fator $e^{-iE_n T}$ vai a zero mais lentamente para o termo $n = 0$, e consequentemente,

$$|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{e^{-i\hat{H}T}|0\rangle}{e^{-iE_0 T}\langle\Omega|0\rangle}. \quad (4.19)$$

Introduzindo um tempo de referência t_0 temos

$$\begin{aligned} |\Omega\rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{e^{-i\hat{H}(T+t_0)}|0\rangle}{e^{-iE_0(T+t_0)}\langle\Omega|0\rangle} = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{e^{-i\hat{H}(T+t_0)}e^{-i\hat{H}_0(T+t_0)}|0\rangle}{e^{-iE_0(T+t_0)}\langle\Omega|0\rangle} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\hat{U}_I(t_0, -T)|0\rangle}{e^{-iE_0(T+t_0)}\langle\Omega|0\rangle}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Similarmente para $|\Omega\rangle^\dagger = \langle\Omega|$

$$\langle\Omega| = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0|\hat{U}_I(T, t_0)}{e^{-iE_0(T-t_0)}\langle 0|\Omega\rangle} \quad (4.21)$$

Agora possuímos os elementos necessários para calcular a nova função de correlação. Para $x^0 > y^0$

$$\begin{aligned} \langle\Omega|\varphi(x)\varphi(y)|\Omega\rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0|\hat{U}_I(T, t_0)}{e^{-iE_0(T-t_0)}\langle 0|\Omega\rangle} \hat{U}_I^\dagger(x^0, t_0)\varphi_I(x)\hat{U}(x^0, t_0) \\ &\quad \times \hat{U}_I^\dagger(y^0, t_0)\varphi_I(y)\hat{U}(y^0, t_0) \frac{\hat{U}_I(t_0, -T)|0\rangle}{e^{-iE_0(T+t_0)}\langle\Omega|0\rangle} \end{aligned} \quad (4.22)$$

uma vez que

$$\hat{U}(t_1, t_2)\hat{U}(t_2, t_3) = e^{-iE_0(t_1-t_2)}e^{-iE_0(t_2-t_3)} = e^{-iE_0(t_1-t_3)} = \hat{U}(t_1, t_3) \quad (4.23)$$

e já que $\hat{U}(t, t')$ é unitário, $\hat{U}^\dagger(t, t') = \hat{U}^{-1}(t, t')$, ficamos com

$$\langle\Omega|\varphi(x)\varphi(y)|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0|\hat{U}_I(T, x^0)\varphi_I(x)\hat{U}_I(x^0, y^0)\varphi_I(y)\hat{U}_I(y^0, -T)|0\rangle}{e^{-i2E_0 T}|\langle 0|\Omega\rangle|^2}. \quad (4.24)$$

Considerando apenas estados normalizados,

$$1 = \langle\Omega|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0|\hat{U}(T, t_0)\hat{U}(t_0, -T)|0\rangle}{e^{-i2E_0 T}|\langle 0|\Omega\rangle|^2} = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0|\hat{U}(T, -T)|0\rangle}{e^{-i2E_0 T}|\langle 0|\Omega\rangle|^2}. \quad (4.25)$$

Ao substituímos esse resultado no denominador da função de correlação (4.22) obtemos

$$\langle\Omega|\varphi(x)\varphi(y)|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0|\hat{U}_I(T, x^0)\varphi_I(x)\hat{U}_I(x^0, y^0)\varphi_I(y)\hat{U}_I(y^0, -T)|0\rangle}{\langle 0|\hat{U}(T, -T)|0\rangle}. \quad (4.26)$$

Para simplificar um pouco mais essa expressão, notemos que entre os estados de vácuo da teoria livre temos um produto entre operadores quânticos relativísticos. Todo produto desse gênero pode ser simplificado ao atuarmos com o operador de ordenamento temporal. A permutação de operadores submetidos ao ordenamento temporal não afeta o resultado do produto entre esses operadores, ou seja, para os operadores \hat{A} e \hat{B} o produto $T\{\hat{A}\hat{B}\}$ é idêntico

ao produto $T\{\hat{B}\hat{A}\}$. Assim, a expressão (4.26) sujeita ao ordenamento temporal serve para $x^0 > y^0$ e para $y^0 > x^0$. Qualquer permutação é permitida dentro dos colchetes de ordenamento temporal inclusive

$$\varphi_I(x)\varphi_I(y)\hat{U}_I(T, x^0)\hat{U}_I(T, x^0)\hat{U}_I(y^0, -T) = \varphi_I(x)\varphi_I(y)\hat{U}(T, -T), \quad (4.27)$$

de tal maneira que chegamos finalmente à expressão

$$\begin{aligned} \langle \Omega | \varphi(x)\varphi(y) | \Omega \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \{ \varphi_I(x)\varphi_I(y)\hat{U}(T, -T) \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ \hat{U}(T, -T) \} | 0 \rangle} \\ \langle \Omega | T \{ \varphi(x)\varphi(y) \} | \Omega \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \{ \varphi_I(x)\varphi_I(y) \exp \left[-i \int_{-T}^T dt \hat{H}_I(t) \right] \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ \exp \left[-i \int_{-T}^T dt \hat{H}_I(t) \right] \} | 0 \rangle}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Este resultado é o conhecido Teorema de Feynman [14]. A generalização para n pontos é imediata. Sendo $\{x_n\}$ um conjunto de pontos do espaço-tempo e $\hat{O}_H(x_i)$ um operador arbitrário na representação de Heisenberg definido em um ponto $x_i \in \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, temos

$$\langle \Omega | T \{ \hat{O}_H(x_1) \dots \hat{O}_H(x_n) \} | \Omega \rangle = \frac{\langle 0 | T \{ \hat{O}_I(x_1) \dots \hat{O}_I(x_n) \exp \left[-i \int_{-T}^T dt \hat{H}_I(t) \right] \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ \exp \left[-i \int_{-T}^T dt \hat{H}_I(t) \right] \} | 0 \rangle} \quad (4.29)$$

4.2 O TEOREMA DE WICK PARA OS CAMPOS ESCALARES REAIS

A ideia desta seção é simplificar um produto temporalmente ordenado entre os operadores de campo para facilitar os futuros cálculos de espalhamento. Considerando o produto temporalmente ordenado entre dois campos para $x^0 > y^0$ e usando a decomposição

$$\varphi_I(x) = \varphi_I^+(x) + \varphi_I^-(x) \quad (4.30a)$$

$$\varphi_I^+(x) \equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} a(p) e^{-ip \cdot x}, \quad (4.30b)$$

$$\varphi_I^-(x) \equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} a^\dagger(p) e^{ip \cdot x}.$$

temos

$$T\{\varphi_I(x)\varphi_I(y)\} = \varphi_I^+(x)\varphi_I^+(y) + \varphi_I^-(x)\varphi_I^-(y) + \varphi_I^+(x)\varphi_I^-(y) + \varphi_I^-(x)\varphi_I^+(y) \quad (4.31)$$

Junto da identidade $\hat{\varphi}_I^+(x)\varphi_I^-(y) = [\varphi_I^+(x), \varphi_I^-(y)] + \varphi_I^-(y)\varphi_I^+(x)$, o produto acima pode ser escrito como

$$T\{\varphi_I(x)\varphi_I(y)\} = N[\varphi_I(x)\varphi_I(y)] + [\varphi_I^+(x), \varphi_I^-(y)] \quad (4.32)$$

onde o operador N é o ordenamento normal

$$N[\varphi_I(x)\varphi_I(y)] = \varphi_I^+(x)\varphi_I^+(y) + \varphi_I^-(x)\varphi_I^-(y) + \varphi_I^-(x)\varphi_I^+(y) + \varphi_I^-(y)\varphi_I^+(x) \quad (4.33a)$$

$$N[\hat{a}(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}')\hat{a}(\mathbf{p}'')] \equiv \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}')\hat{a}(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p}''). \quad (4.33b)$$

Se tivéssemos considerado $y^0 > x^0$ ao invés de $x^0 > y^0$ obteríamos

$$T\{\varphi_I(x)\varphi_I(y)\} = N[\varphi_I(y)\varphi_I(x)] + [\varphi_I^+(y), \varphi_I^-(x)]. \quad (4.34)$$

Para facilitar a construção do produto temporalmente ordenado entre inúmeros operadores de campo definimos o objeto conhecido como *contração*:

$$\overbrace{\varphi(x)\varphi(y)} = \overbrace{\varphi(x)\varphi(y)} = \begin{cases} [\varphi_I^+(x), \varphi_I^-(y)], & \text{para } x^0 > y^0 \\ [\varphi_I^+(y), \varphi_I^-(x)], & \text{para } y^0 > x^0 \end{cases} \quad (4.35)$$

Agora podemos escrever o produto temporalmente ordenado entre quatro operadores $\varphi(x_i) = \varphi_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, como uma soma de todas as contrações possíveis,

$$T\{\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4\} = N\{\overbrace{\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4} + \overbrace{\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4} + \overbrace{\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4} + \overbrace{\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4} + \overbrace{\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4} \\ + \overbrace{\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4} + \overbrace{\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4} + \overbrace{\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4} + \overbrace{\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4} + \overbrace{\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4}\}.$$

Assim, lembrando que o valor esperado no vácuo de operadores ordenados normalmente é zero, obtemos:

$$\langle 0|T\{\hat{\varphi}_1\hat{\varphi}_2\hat{\varphi}_3\hat{\varphi}_4\}|0\rangle = D_F(x_1 - x_2)D_F(x_3 - x_4) + D_F(x_1 - x_3)D_F(x_2 - x_4) + \\ D_F(x_1 - x_4)D_F(x_2 - x_3)$$

A expansão do produto temporalmente ordenado de um numero arbitrário de campos em termos de todas as contrações possíveis é o que de fato chamamos de *Teorema de Wick*, aqui aplicado à teoria de campos escalares reais,

$$\begin{aligned}
T \prod_{k=i}^m \varphi_I(x_k) &= N \left[T \prod_k^m \varphi_I(x_k) \right] + \sum_{a,b} \overline{\varphi_I(x_a) \varphi_I(x_b)} N \left[T \prod_{k \neq a,b}^m \varphi_I(x_k) \right] + \\
&+ \sum_{(a,b)(c,d)} \overline{\varphi_I(x_a) \varphi_I(x_b) \varphi_I(x_c) \varphi_I(x_d)} N \left[T \prod_{k \neq a,b,c,d}^m \varphi_I(x_k) \right] + \dots
\end{aligned} \quad (4.36)$$

4.3 SEÇÃO DE CHOQUE, TAXA DE DECAIMENTO E A MATRIZ S

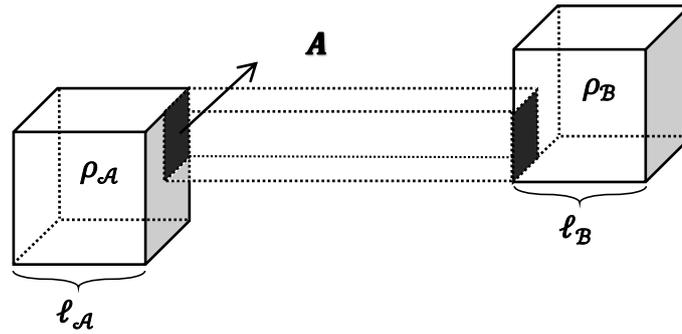
As funções de correlação de n -pontos ainda não são as quantidades efetivamente medidas em um experimento de altas energias. Os objetos que iremos brevemente definir nessa seção farão a conexão entre o formalismo das funções de correlação e o experimento real.

4.3.1 Seção de Choque

O experimento em si é a observação dos espalhamentos entre partículas contidas em dois aglomerados. No referencial do laboratório um dos aglomerados, chamado de feixe, possui velocidade não nula e colide com o outro aglomerado, classificado como alvo, que se encontra em repouso. No referencial do centro de massa do sistema dos dois aglomerados o espalhamento é percebido como a colisão de dois feixes viajando em sentidos opostos.

Chamando os feixes de \mathcal{A} e \mathcal{B} , para elucidar melhor o processo, podemos idealizar os feixes como tendo o formato de caixas cúbicas de arestas ℓ_A e ℓ_B e densidades de partículas ρ_A e ρ_B . Mesmo que os feixes possuam tamanhos idênticos, é impossível precisar que a colisão tenha abrangido completamente as faces das duas caixas. Portanto, é razoável supor que a área da seção transversal das porções das caixas que colidiram, ou seja, a área de impacto, em geral, tem tamanho $A \neq (\ell_{A/B})^2$. Esta área é chamada de área da seção de choque como visto na figura abaixo:

Figura 5 - Área da Seção de Choque



Em um espalhamento, o número total de eventos de espalhamento N_{EV} , deve ser igual ao produto das grandezas ρ_A , ρ_B , ℓ_A , ℓ_B e A a menos de uma constante que chamamos de seção de choque σ , de maneira que

$$\sigma = \frac{N_{EV}}{\rho_A \ell_A \rho_B \ell_B A}. \quad (4.37)$$

A densidade numérica de partículas por feixe varia, de modo que a área da seção de choque e a seção de choque são da forma [3],

$$A = \int d^2x \rho_A(x) \rho_B(x) \quad (4.38)$$

$$\sigma = \frac{N_{EV}}{\rho_A \ell_A \rho_B \ell_B \int d^2x \rho_A(x) \rho_B(x)}. \quad (4.39)$$

Podemos assumir aqui que os feixes são rarefeitos ao ponto das partículas estarem longe o suficiente umas das outras para não interagir [15]. Também consideramos que a largura do feixe é muito maior do que o alcance das interações entre as partículas e da largura dos pacotes de onda individuais.

A seção de choque possui dimensão de área $[\sigma] = 1/[(L/L^3)(L/L^3)L^2] = L^2$, essa área corresponde ao tamanho útil do alvo, ou seja, é a região em torno da partícula alvo na qual a partícula incidente será espalhada e terá seu estado inicial modificado.

Para obter uma expressão para seção de choque consideramos que o produto entre $v =$ *velocidade relativa* a $\rho_B =$ *densidade de partículas no feixe* a $A =$ *área* e $\Delta t =$ *intervalo de tempo* nos dá o número de partículas incidentes

$$\Delta N_{In} = \rho_B v A \Delta t \quad (4.40)$$

e assim definimos o fluxo que é proporcional ao número de partículas espalhadas por unidade de tempo

$$\Phi_0 = \frac{\Delta N_{In}}{A \Delta t} = \frac{\rho_B v A \Delta t}{A \Delta t} = \rho_B v. \quad (4.41)$$

A constante de proporcionalidade é a própria seção de choque, logo,

$$\sigma = \frac{\Delta N_{Ev}/\Delta t}{\Phi_0} = \frac{\Delta N_{Ev}}{\Delta N_{In}/A} = \frac{\Delta N_{Ev}}{n_B} \quad (4.42)$$

onde n_B é a densidade de partículas. Generalizando para o caso de $N = \rho_A \ell_A A$ alvos

$$\sigma = \frac{\Delta N_{Ev}/\Delta t}{N\Phi_0} = \frac{\Delta N_{Ev}}{\rho_B v \Delta t \rho_A \ell_A A} = \frac{\Delta N_{Ev}}{\rho_B \ell_B \rho_A \ell_A A} \quad (4.43)$$

em que $\ell_B = v\Delta t$, obtemos a seção de choque total de forma mais natural.

É comum utilizarmos a seção de choque diferencial com base nos *momenta* das partículas finais,

$$\frac{d\sigma}{dp_1 \dots dp_n}. \quad (4.44)$$

Quando, por exemplo, temos duas partículas no estado final, $n = 2$, temos 6 componentes, somados os dois tri-*momenta*. Porém, em tais processos de espalhamento $2 \rightarrow 2$, possuímos quatro deltas de conservação dos tri-*momenta* e das componentes temporais, restando apenas dois graus de liberdade, isto é, possuímos duas variáveis livres. Podemos considerar que essas variáveis são o ângulo θ entre o momentum e a normal à área da seção de choque e o ângulo azimutal ϕ . Juntos esses ângulos formam o ângulo sólido Ω . O que nos faz definir seção de choque diferencial como [14],

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \text{ onde } d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi \quad (4.45)$$

4.3.2 Taxa de Decaimento

Uma partícula é considerada instável quando decai em duas ou mais partículas com o passar do tempo mesmo sem sofrer nenhum estímulo externo. A razão entre o número total de partículas de um tipo que decaem em um estado final (canal i) por unidade de tempo, e o número total de partículas observadas N é definida como a *taxa de decaimento* para um canal i [3],

$$\Gamma_i = \frac{1}{N} \frac{dN_i}{dt}. \quad (4.46)$$

A taxa total de decaimento é dada por

$$\sum_i \Gamma_i = \Gamma \quad (4.47)$$

e a vida média da partícula é definida como sendo

$$\tau = 1 / \sum_i \Gamma_i = 1/\Gamma. \quad (4.48)$$

Solucionando a equação diferencial (4.46) chega-se à expressão do número de partículas em função do tempo e taxa de decaimento,

$$N = N_0 e^{-\Gamma t} \quad (4.49)$$

O intervalo de tempo, $\tau_{1/2}$, necessário para que $N_0 \rightarrow N_0/2$ é conhecido como *meia vida*.

4.3.3 Ressonâncias

Alguns processos de espalhamento contém partículas que são formadas durante o momento da interação e logo em seguida decaem, como por exemplo, processos que envolvem estados atômicos instáveis. Nesses processos essas partículas instáveis apresentam-se como uma ressonância, de tal maneira que podemos representar a probabilidade de sobrevivência da ressonância em função do tempo como [16]

$$|\psi(t)|^2 = |\psi(0)|^2 |e^{-iE_0 t}|^2 |e^{-(\Gamma t/2)}|^2 \quad (4.50)$$

onde E_0 é a energia de repouso.

No referencial do centro de massa, onde a soma das energias das partículas incidentes é E , o estado da ressonância pode ser escrito como a transformada de Fourier,

$$\varphi(E) = \int \psi(t) e^{iEt} dt = \int \psi(0) e^{i[(E-E_0)-i\Gamma/2]t} dt \propto \frac{1}{(E-E_0) + i\Gamma/2} \quad (4.51)$$

Também chamada de *distribuição de Breit-Wigner*.

A seção de choque do decaimento, neste caso, será proporcional ao pico de ressonância [14],

$$\sigma \propto \frac{1}{(E-E_0)^2 + \Gamma^2/4} \quad (4.52)$$

A distribuição de Breit-Wigner generalizada para o caso de decaimentos de partículas relativísticas na condição de camada de massa (*mass shell*) é [3,14]

$$\frac{1}{p^2 + m^2 - im\Gamma} \cong \frac{-1}{2E_p(p^0 - E_p + im\Gamma/2E_p)} \quad (4.53)$$

4.3.4 A Matriz S

O espalhamento requer uma definição de quem são os nossos estados iniciais antes do espalhamento e nossos estados finais após o espalhamento. Partindo das hipóteses de que o espalhamento seja um fenômeno aproximadamente instantâneo e pontual, adotamos o momento T em que o espalhamento ocorre como tempo de referência. E assumimos que o alcance das

interações é extremamente curto. Dessa maneira, em um experimento, os pacotes de onda iniciais de partículas podem ser preparados suficientemente distantes uns dos outros ao ponto de podermos considerar esses estados como sendo livres. Portanto as partículas no estado inicial estarão livres muito antes do momento do espalhamento, ou seja, no limite $T \rightarrow -\infty$. Chamando tais estados de *estados in*, podemos representá-los respectivamente nas descrições de Heisenberg (H) e de Schrödinger (S) como

$$|\{\mathbf{p}_i\}\rangle_{H,in} = |\{\mathbf{p}_i\}\rangle_{in}, \quad |\{\mathbf{p}_i\}\rangle_{S,in} = e^{-i\hat{H}T} |\{\mathbf{p}_i\}\rangle_{in} \quad (4.54)$$

A representação de Schrödinger de um estado livre nos permite escrever a condição de liberdade dos estados *in* explicitamente,

$$\lim_{T \rightarrow -\infty} e^{-i\hat{H}T} |\{\mathbf{p}_i\}\rangle = |\{\mathbf{p}_i\}\rangle_{in}. \quad (4.55)$$

Durante o pequeno intervalo de tempo em que duram as interações no processo de espalhamento, os pacotes de onda interagem e se sobrepõem dando origem a novos pacotes de onda que são detectados muito tempo depois da interação em um momento em que os novos estados associados estão isolados uns dos outros, ou seja, quando $T \rightarrow +\infty$. Chamamos esses novos estados de *estados out* que nas duas representações são escritos da forma

$$|\{\mathbf{p}_i\}\rangle_{H,out} = |\{\mathbf{p}_i\}\rangle_{out}, \quad |\{\mathbf{p}_i\}\rangle_{S,out} = e^{-i\hat{H}T} |\{\mathbf{p}_i\}\rangle_{out}. \quad (4.56)$$

Ambos os conjuntos de todos os possíveis estados *in* e *out* satisfazem a relação de completudeza, pois formam duas bases completas e distintas do espaço de Hilbert

$$\sum_i |\{\mathbf{p}_i\}\rangle_{in} \langle \{\mathbf{p}_i\} |_{in} = \sum_i |\{\mathbf{p}_i\}\rangle_{out} \langle \{\mathbf{p}_i\} |_{out} = \mathbf{1}. \quad (4.57)$$

O operador que associa elementos dessas duas bases é conhecido como *matriz S* ou *matriz de espalhamento*. A derivação da expressão da matriz S é obtida através da amplitude de transição entre estados *in* e *out*, e com o uso da definição (4.11). Desse modo considerando os estados de uma partícula $|\mathbf{k}_\alpha\rangle_{in}$ e $(|\mathbf{k}_\beta\rangle_{out})^\dagger = {}_{out}\langle \mathbf{k}_\beta|$ temos:

$$\begin{aligned} {}_{out}\langle \mathbf{k}_\alpha | \mathbf{k}_\beta \rangle_{in} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \underbrace{\langle \mathbf{k}_\alpha |}_{T} \underbrace{|\mathbf{k}_\beta\rangle}_{-T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \langle \mathbf{k}_\alpha | e^{-i\hat{H}T} e^{i\hat{H}(-T)} | \mathbf{k}_\beta \rangle \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \langle \mathbf{k}_\alpha | \hat{S} | \mathbf{k}_\beta \rangle. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Na representação de Schrödinger a relação acima tem a forma

$$\begin{aligned} {}_{out}\langle \mathbf{k}_\alpha, T | \mathbf{k}_\beta, -T \rangle_{in} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \langle \mathbf{k}_\alpha, T | e^{-i\hat{H}T} e^{i\hat{H}(-T)} | \mathbf{k}_\beta, -T \rangle \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \langle \mathbf{k}_\alpha, T | \hat{S} | \mathbf{k}_\beta, -T \rangle. \end{aligned} \quad (4.59)$$

A mudança de representação dos estados não interagentes ocorre mediante a atuação do operador unitário associado ao hamiltoniano livre,

$$\begin{aligned}
{}_{out}\langle \mathbf{k}_\alpha, T | \mathbf{k}_\beta, -T \rangle_{in} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \langle \mathbf{k}_\alpha | e^{-i\hat{H}T} e^{i\hat{H}_0 T} e^{i\hat{H}(-T)} e^{-i\hat{H}_0(-T)} | \mathbf{k}_\beta \rangle \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \langle \mathbf{k}_\alpha | \hat{U}^{-1}(T) \hat{U}(-T) | \mathbf{k}_\beta \rangle
\end{aligned} \tag{4.60}$$

e como

$$\hat{U}^{-1}(T) \hat{U}(-T) = T \left\{ \exp \left[-i \int_{-T}^T dt \hat{H}_I(t) \right] \right\} = \hat{U}(T, -T) \tag{4.61}$$

vemos que o operador \hat{S} é equivalente a $\hat{U}(\infty, -\infty)$. Concluimos que a matriz S , de fato, é

$$\hat{S}_{\beta\alpha} = \delta^{(3)}(\mathbf{k}_\beta - \mathbf{k}_\alpha) - i \langle \mathbf{k}_\alpha | \left(\int_{-\infty}^{\infty} dt \hat{H}_I(t) \right) | \mathbf{k}_\beta \rangle + \dots \tag{4.62}$$

Ou, em aproximação de 1^a ordem

$$\hat{S}_{\beta\alpha} \cong \delta^{(3)}(\mathbf{k}_\beta - \mathbf{k}_\alpha) - i \langle \mathbf{k}_\alpha | \left(\int_{-\infty}^{\infty} dt \hat{H}_I(t) \right) | \mathbf{k}_\beta \rangle. \tag{4.63}$$

O estado que representa o pacote de onda de duas partículas assintoticamente livres é definido como

$$|\psi_A \psi_B\rangle_{in} = \int \frac{d^3 k_A}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k_B}{(2\pi)^3} \frac{g(\mathbf{k}_A) g(\mathbf{k}_B) e^{-i\mathbf{b} \cdot \mathbf{k}_B}}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} |\mathbf{k}_A \mathbf{k}_B\rangle_{in}. \tag{4.64}$$

O fator $e^{-i\mathbf{b} \cdot \mathbf{k}_B}$ é a distribuição espacial que garante que os centros das duas distribuições não coincidam, sendo \mathbf{b} o vetor perpendicular a direção de propagação conhecido como parâmetro de choque. A distribuição dos momenta é do tipo $g(\mathbf{k}) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$. Um estado cujos momenta estão definidos em um futuro distante é escrito usualmente como

$${}_{out}\langle \psi_1 \psi_2 | = \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \frac{g(\mathbf{k}_1) g(\mathbf{k}_2)}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}_1}} \sqrt{2E_{\mathbf{k}_2}}} {}_{out}\langle \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 |. \tag{4.65}$$

Podemos dizer agora que um estado que produz n partículas é a simples generalização desse estado

$${}_{out}\langle \psi_1 \psi_2, \dots, \psi_n | = \prod_i \int \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^{3n}} \frac{g(\sum_i \mathbf{k}_i)}{(2)^{n/2} \sqrt{\sum_i E_{\mathbf{p}_i}}} {}_{out}\langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n |. \tag{4.66}$$

Todas informações retiradas do espalhamento estão em função de produtos do tipo

$${}_{out}\langle \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 | \psi_A \psi_B \rangle_{in} = \int \frac{d^3 k_A}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k_B}{(2\pi)^3} \frac{g(\mathbf{k}_A) g(\mathbf{k}_B) e^{-i\mathbf{b} \cdot \mathbf{k}_B}}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \lim_{T \rightarrow \infty} \langle \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 | \hat{S} | \mathbf{k}_A \mathbf{k}_B \rangle \tag{4.67}$$

A expressão (4.67) da matriz S descreve não apenas as interações como também descreve propagações livres, já que, existe a possibilidade das partículas não colidirem. Por isso é comum separar a parte interagente da parte livre da seguinte forma:

$$iT = S - \mathbf{1} \tag{4.68}$$

A parte interagente é representada pela matriz T . O momento e a energia total são associadas a deltas de Dirac presentes nas definições tanto de S como de T . Em um processo de espalhamento, com todos os momenta na camada de massa, definimos o que chamamos de elemento de matriz invariante $\mathcal{M}(p_i - p_f)$. Assim, para um decaimento que envolva os estados $\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n |$ e $|\mathbf{k}_A \mathbf{k}_B \rangle$ ficamos com,

$$\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n | i\hat{T} | \mathbf{k}_A \mathbf{k}_B \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(k_A + k_B - \sum p_f \right) \cdot \mathcal{M}(k_A + k_B - p_f). \quad (4.69)$$

Já que iremos computar \mathcal{M} com gráficos de Feynman no decorrer do trabalho, vamos representar a seção de choque e a taxa de decaimento em função do elemento de matriz invariante.

Inicialmente calculamos a probabilidade de um estado $|\psi_A \psi_B \rangle_{in}$ sofrer um espalhamento e tornar-se o estado final de n partículas cujos momenta estão em uma pequena região $d^3 p_1 d^3 p_2 \dots d^3 p_n$ centrada no ponto $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$ [3,16]

$$\mathcal{P}(\mathcal{A}, \mathcal{B} \rightarrow 1, 2, \dots, n) = \left(\prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) |_{out} \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n | \psi_A \psi_B \rangle_{in} |^2. \quad (4.70)$$

Interpretando a partícula \mathcal{A} como o alvo onde estão incidindo inúmeras partículas \mathcal{B} de parâmetros de impacto \mathbf{b} distintos passaremos a ter como número de eventos e seção de choque

$$N = \sum_{\substack{\text{Partículas} \\ \text{Incidentes}}} \mathcal{P}_i = \int d^2 b n_B \mathcal{P}(\mathbf{b}) \quad (4.71)$$

$$\sigma = \frac{N}{n_B N_A} = \frac{N}{n_B \cdot 1} = \int d^2 b \mathcal{P}(\mathbf{b}). \quad (4.72)$$

Aqui n_B é a densidade numérica de partículas, assumida como sendo constante. A equação (4.45) junto das expressões (4.69) e (4.70) exhibe a seção de choque em sua forma diferencial $d\sigma$

$$\begin{aligned} d\sigma &= \left(\prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) \int d^2 b \left(|_{out} \langle \{\mathbf{p}_f\} | \int \frac{d^3 k_A}{(2\pi)^3} \frac{g_A}{\sqrt{2E_A}} \int \frac{d^3 k_B}{(2\pi)^3} \frac{g_B e^{-i\mathbf{b} \cdot \mathbf{k}_B}}{\sqrt{2E_B}} | \{\mathbf{k}_i\} \rangle_{in} \right) \\ &\times \left(|_{out} \langle \{\mathbf{p}_f\} | \int \frac{d^3 \bar{k}_A}{(2\pi)^3} \frac{\bar{g}_A}{\sqrt{2\bar{E}_A}} \int \frac{d^3 \bar{k}_B}{(2\pi)^3} \frac{\bar{g}_B e^{-i\mathbf{b} \cdot \bar{\mathbf{k}}_B}}{\sqrt{2\bar{E}_B}} | \{\bar{\mathbf{k}}_i\} \rangle_{in} \right)^* \\ &= \left(\prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) \prod_{i=\mathcal{A}, \mathcal{B}} \int \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3} \frac{g_i}{\sqrt{2E_i}} \int \frac{d^3 \bar{k}_i}{(2\pi)^3} \frac{\bar{g}_i^*}{\sqrt{2\bar{E}_i}} \end{aligned}$$

$$\times \int d^2 b e^{i b \cdot (\bar{\mathbf{k}}_B - \mathbf{k}_B)} ({}_{out}\langle \{\mathbf{p}_f\} | \{\mathbf{k}_i\} \rangle_{in}) ({}_{out}\langle \{\mathbf{p}_f\} | \bar{\mathbf{k}}_i \rangle_{in})^* \quad (4.73)$$

Ignorando a parte correspondente à não-interação da matriz S

$${}_{out}\langle \{\mathbf{p}_f\} | \{\mathbf{k}_i\} \rangle_{in} = i\mathcal{M}(\{\mathbf{k}_i\} \rightarrow \{\mathbf{p}_f\}) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum \mathbf{k}_i - \sum \mathbf{p}_f) \quad (4.74)$$

$$({}_{out}\langle \{\mathbf{p}_f\} | \bar{\mathbf{k}}_i \rangle_{in})^* = -i\mathcal{M}^*(\{\mathbf{k}_i\} \rightarrow \{\mathbf{p}_f\}) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum \bar{\mathbf{k}}_i - \sum \mathbf{p}_f) \quad (4.75)$$

olhando apenas os termos que envolvam os $\bar{\mathbf{k}}_i$ s e as distribuições \bar{g} e utilizando a definição

$$\int d^2 b e^{i b \cdot (\bar{\mathbf{k}}_B - \mathbf{k}_B)} = (2\pi)^2 \delta^{(2)}(\mathbf{k}_B^\perp - \bar{\mathbf{k}}_B^\perp) \quad (4.76)$$

temos,

$$I \equiv \prod_i \int \frac{d^3 \bar{\mathbf{k}}_i}{(2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum \bar{\mathbf{k}}_i - \sum \mathbf{p}_f) (2\pi)^2 \delta^{(2)}(\mathbf{k}_B^\perp - \bar{\mathbf{k}}_B^\perp) \frac{g_i}{\sqrt{2E_i}} \frac{\bar{g}_i^*}{\sqrt{2\bar{E}_i}}. \quad (4.77)$$

As funções delta sugerem a possibilidade de simplificação desse termo. Todas as condições consideradas para essas simplificações se estenderão aos outros integrandos, assim podemos olhar apenas as integrais das deltas. Decompondo a integral (4.77) em partes transversais, partes paralelas à direção z e partes temporais

$$I^z \equiv \int \frac{d^3 \bar{\mathbf{k}}_{\mathcal{A}}^z}{(2\pi)} \int \frac{d^3 \bar{\mathbf{k}}_B^z}{(2\pi)} \int \frac{d^3 \bar{\mathbf{k}}_{\mathcal{A}}^\perp}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3 \bar{\mathbf{k}}_B^\perp}{(2\pi)^2} (2\pi)^6 \delta^{(2)}(\mathbf{k}_B^\perp - \bar{\mathbf{k}}_B^\perp) \times \delta(\bar{E}_{\mathcal{A}} + \bar{E}_B - \sum E_f) \delta^{(2)}(\bar{\mathbf{k}}_{\mathcal{A}}^\perp + \bar{\mathbf{k}}_B^\perp - \sum \mathbf{p}_f^\perp) \delta(\bar{k}_{\mathcal{A}}^z + \bar{k}_B^z - \sum p_f^z), \quad (4.78)$$

fica evidente que as duas primeiras condições são $\mathbf{k}_B^\perp = \bar{\mathbf{k}}_B^\perp$ e $\bar{\mathbf{k}}_{\mathcal{A}}^\perp = \sum \mathbf{p}_f^\perp - \bar{\mathbf{k}}_B^\perp$, sobrando apenas

$$I^z = \int \frac{d^3 \bar{\mathbf{k}}_{\mathcal{A}}^z}{(2\pi)} \int \frac{d^3 \bar{\mathbf{k}}_B^z}{(2\pi)} (2\pi)^2 \delta(\bar{k}_{\mathcal{A}}^z + \bar{k}_B^z - \sum p_f^z) \delta(\bar{E}_{\mathcal{A}} + \bar{E}_B - \sum E_f) = \int d^3 \bar{\mathbf{k}}_{\mathcal{A}}^z \delta\left(\sqrt{\bar{\mathbf{k}}_{\mathcal{A}}^2 + \bar{m}_{\mathcal{A}}^2} + \sqrt{\bar{\mathbf{k}}_B^2 + \bar{m}_B^2} - \sum E_f\right) \Big|_{\bar{\mathbf{k}}_B^z = \sum p_f^z - \bar{\mathbf{k}}_{\mathcal{A}}^z}. \quad (4.79)$$

Derivando o argumento da delta com relação a $\bar{\mathbf{k}}_{\mathcal{A}}$

$$\begin{aligned} \therefore f(\bar{\mathbf{k}}_{\mathcal{A}}) &= \sqrt{\bar{\mathbf{k}}_{\mathcal{A}}^2 + \bar{m}_{\mathcal{A}}^2} + \sqrt{\bar{\mathbf{k}}_B^2 + \bar{m}_B^2} - \sum E_f \\ \frac{\partial f(\bar{\mathbf{k}}_{\mathcal{A}})}{\partial \bar{\mathbf{k}}_{\mathcal{A}}} &= \frac{2\bar{\mathbf{k}}_{\mathcal{A}}}{\sqrt{\bar{\mathbf{k}}_{\mathcal{A}}^2 + \bar{m}_{\mathcal{A}}^2}} + \frac{2\bar{\mathbf{k}}_B}{\sqrt{\bar{\mathbf{k}}_B^2 + \bar{m}_B^2}} \frac{\partial \bar{\mathbf{k}}_B}{\partial \bar{\mathbf{k}}_{\mathcal{A}}} = \frac{2\bar{\mathbf{k}}_{\mathcal{A}}}{\sqrt{\bar{\mathbf{k}}_{\mathcal{A}}^2 + \bar{m}_{\mathcal{A}}^2}} - \frac{2\bar{\mathbf{k}}_B}{\sqrt{\bar{\mathbf{k}}_B^2 + \bar{m}_B^2}} \end{aligned} \quad (4.80)$$

onde $\bar{\mathbf{k}}_B = (\bar{k}_B^x, \bar{k}_B^y, \sum p_f^z - \bar{k}_{\mathcal{A}}^z)$, podemos utilizar a seguinte propriedade da função delta [16]:

$$\delta f(x) = \sum_i \frac{1}{|f'(x_{0i})|} \delta(x - x_{0i}). \quad (4.81)$$

Agora a integral I^z pode ser rescrita de forma mais simples

$$I^Z = \left(\frac{\bar{\mathbf{k}}_{\mathcal{A}}}{\sqrt{\bar{\mathbf{k}}_{\mathcal{A}}^2 + \bar{m}_{\mathcal{A}}^2}} - \frac{\bar{\mathbf{k}}_{\mathcal{B}}}{\sqrt{\bar{\mathbf{k}}_{\mathcal{B}}^2 + \bar{m}_{\mathcal{B}}^2}} \right)^{-1} = \left| \frac{\bar{\mathbf{k}}_{\mathcal{A}}}{\bar{E}_{\mathcal{A}}} - \frac{\bar{\mathbf{k}}_{\mathcal{B}}}{\bar{E}_{\mathcal{B}}} \right|^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} \quad (4.82)$$

Lembrando que as condições obtidas se estendem aos integrandos em (4.73), chegamos finalmente a uma expressão para a seção de choque diferencial em função do elemento de matriz invariante

$$d\sigma = \left(\prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) \frac{|\mathcal{M}(k_{\mathcal{A}} + k_{\mathcal{B}} \rightarrow \{\mathbf{p}_f\})|^2}{2E_{\mathcal{A}} 2E_{\mathcal{B}} |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} \\ \times \int \frac{d^3 k_{\mathcal{A}}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k_{\mathcal{B}}}{(2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_{\mathcal{A}} + k_{\mathcal{B}} - \sum p_f) |g_{\mathcal{A}}|^2 |g_{\mathcal{B}}|^2 \quad (4.83)$$

Podemos simplificar ainda mais essa expressão recorrendo a alguns aspectos do aparato de medida [3]. As distribuições são do tipo $g_i = g_i(\mathbf{k}_i) = e^{-i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{x}_i}$, $i = \mathcal{A}, \mathcal{B}$, mas ainda que elas fossem mais complicadas elas estariam definidas em intervalos menores do que a precisão experimental disponível, de sorte que, podemos tratar os momentos distribuídos nesse intervalo como aproximadamente iguais aos valores centrais do intervalo \mathbf{p}_i . Assim podemos substituir as funções de distribuição por deltas $g_i \rightarrow \delta^{(3)}(\mathbf{k}_i - \mathbf{p}_i)$ que fatalmente “eliminam” as integrais nos levando a

$$d\sigma = \left(\prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) \frac{|\mathcal{M}(k_{\mathcal{A}} + k_{\mathcal{B}} \rightarrow \{\mathbf{p}_f\})|^2}{2E_{\mathcal{A}} 2E_{\mathcal{B}} |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_{\mathcal{A}} + k_{\mathcal{B}} - \sum p_f). \quad (4.84)$$

A integral dessa expressão é claramente a seção de choque total

$$\sigma = \frac{1}{2E_{\mathcal{A}} 2E_{\mathcal{B}} |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} |\mathcal{M}(k_{\mathcal{A}} + k_{\mathcal{B}} \rightarrow \{\mathbf{p}_f\})|^2 \left(\int \prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) \\ \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_{\mathcal{A}} + k_{\mathcal{B}} - \sum p_f). \quad (4.85)$$

Como de praxe em regimes relativísticos devemos nos certificar da invariância de Lorentz. A integral sobre os momenta é conhecida como espaço de fase invariante para n corpos [3,15]

$$\int d\Pi_n = \left(\int \prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_{\mathcal{A}} + k_{\mathcal{B}} - \sum p_f). \quad (4.86)$$

A única ressalva a se fazer sobre essa integral é acerca da distinguibilidade das partículas que ela descreve, ou seja, caso essas partículas sejam indiscerníveis devemos multiplicar a integral por $1/n!$ para evitar o excesso de contagem das partículas.

O elemento de matriz invariante \mathcal{M} , como o próprio nome sugere, foi construído sob o princípio da invariância de Lorentz. Resta-nos apenas tecer comentários sobre o fator que multiplica os dois objetos anteriores,

$$\frac{1}{E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}|v_{\mathcal{A}} - v_{\mathcal{B}}|} = \frac{1}{|E_{\mathcal{A}}p_{\mathcal{A}}^z - E_{\mathcal{B}}p_{\mathcal{B}}^z|} = \frac{1}{|\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}p_{\mathcal{A}}^\mu p_{\mathcal{B}}^\nu|} = A^{xy} \quad (4.87)$$

Vemos que esse fator representa uma área efetiva transversal à direção z e, portanto, só é invariante de Lorentz por *boosts* na direção z . Por conta desse fator a seção de choque não é um invariante de Lorentz, no entanto, caso estejamos em uma situação em que $\mathbf{p}_{\mathcal{A}} \parallel \mathbf{p}_{\mathcal{B}}$ (referencial do centro de massa) deixamos de ter uma área transversal e obtemos o fator batizado de fluxo invariante de Moller

$$\frac{1}{E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}|v_{\mathcal{A}} - v_{\mathcal{B}}|} = \frac{1}{F_M} \quad (4.88)$$

$$F_M^2 = (\mathbf{p}_{\mathcal{A}} \cdot \mathbf{p}_{\mathcal{B}})^2 - m_{\mathcal{A}}^2 m_{\mathcal{B}}^2 = |E_{\mathcal{A}}\mathbf{p}_{\mathcal{B}} - E_{\mathcal{B}}\mathbf{p}_{\mathcal{A}}|^2 - |\mathbf{p}_{\mathcal{A}} \times \mathbf{p}_{\mathcal{B}}|^2.$$

Sob tais condições finalmente temos

$$\sigma = \frac{1}{F_M} |\mathcal{M}(k_{\mathcal{A}} + k_{\mathcal{B}} \rightarrow \{\mathbf{p}_f\})|^2 \left(\int \prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) (2\pi)^4 \quad (4.89)$$

$$\times \delta^{(4)}(k_{\mathcal{A}} + k_{\mathcal{B}} - \sum p_f)$$

Para ter uma noção da utilidade dessa expressão vamos aplicá-la ao cálculo do espalhamento do tipo $2 \rightarrow 2$ no referencial do Centro de Massa para momentos bem definidos $\mathbf{k}_{\mathcal{A}}, \mathbf{k}_{\mathcal{B}} \rightarrow \mathbf{p}_B, \mathbf{p}_A$. Nesse referencial $\mathbf{p}_{Tot} = \sum \mathbf{p}_f = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_{\mathcal{A}} + \mathbf{p}_{\mathcal{B}} = 0$, $E_{CM} = E_{\mathcal{A}} + E_{\mathcal{B}}$ e o espaço de fase é da forma

$$\begin{aligned} \int d\Pi_2 &= \int \frac{d^3 p_1 d^3 p_2}{(2\pi)^6} \frac{1}{2E_1 2E_2} (2\pi)^4 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_{\mathcal{A}} + \mathbf{p}_{\mathcal{B}} - \sum \mathbf{p}_f) \delta(E_{CM} - E_1 - E_2) \\ &= \int \frac{dp_1 p_1^2 d\Omega}{16\pi^2} \frac{1}{2E_1 2E_2} \delta(E_{CM} - E_1 - E_2) \Big|_{\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2} = \int \frac{d\Omega p_1^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \frac{1}{\left| \frac{p_1}{E_1} + \frac{p_1}{E_2} \right|} \Big|_{\substack{\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 \\ E_1 + E_2 = E_{CM}}} \\ &= \int d\Omega \frac{|\mathbf{p}_1|}{16\pi^2 E_{CM}}. \end{aligned} \quad (4.90)$$

A seção de choque toma a seguinte expressão

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{CM} = \frac{1}{2E_{\mathcal{A}} 2E_{\mathcal{B}} |v_{\mathcal{A}} - v_{\mathcal{B}}|} \frac{|\mathbf{p}_1|}{(2\pi)^2 4E_{CM}} |\mathcal{M}(k_{\mathcal{A}}, k_{\mathcal{B}} \rightarrow p_1, p_2)|^2. \quad (4.91)$$

Particularizando para o caso em que as partículas envolvidas possuem massas iguais

$$\begin{aligned}
E_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}}|\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}| &= |E_{\mathcal{A}}\mathbf{v}_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}} - E_{\mathcal{A}}\mathbf{v}_{\mathcal{B}}E_{\mathcal{B}}| = |\mathbf{p}_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}} - E_{\mathcal{A}}\mathbf{p}_{\mathcal{B}}| \\
&= |\mathbf{p}_{\mathcal{A}}E_{\mathcal{B}} + (E_{CM} - E_{\mathcal{B}})(\mathbf{p}_{\mathcal{A}})| \\
&= E_{CM}|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}|
\end{aligned} \tag{4.92}$$

pela conservação do momento $|\mathbf{p}_{\mathcal{A}}| = |\mathbf{p}_{\mathcal{B}}| = |\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$ finalmente obtemos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4E_{CM}|\mathbf{p}_1|} \frac{|\mathbf{p}_1|}{(2\pi)^2 4E_{CM}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{64\pi^2 E_{CM}} |\mathcal{M}|^2. \tag{4.93}$$

Chega-se facilmente também a uma expressão para a taxa de decaimento em função de \mathcal{M} partindo da ideia de que a mesma, operacionalmente, é uma seção de choque cujo estado inicial tem uma única partícula em repouso o que significa que a expressão da taxa de decaimento diferencial é obtida da (4.73) impondo $E_{\mathcal{A}} = m_{\mathcal{A}}$,

$$d\Gamma = \left(\int \prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) |\mathcal{M}(m_{\mathcal{A}} \rightarrow \{p_f\})|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_{\mathcal{A}} \rightarrow \Sigma p_f). \tag{4.94}$$

CAPÍTULO 5 O MÉTODO DE FEYNMAN E APLICAÇÕES

Neste capítulo representaremos o formalismo desenvolvido anteriormente através dos diagramas de Feynman. Isto nos fornecerá um processo mais simples de aplicação das interações perturbativas. Mostraremos a utilidade e abrangência de tal formalismo através de exemplos específicos como a obtenção de potencial de Coulomb a partir da amplitude de espalhamento para interações eletromagnéticas, o cálculo da seção de choque para o espalhamento Rutherford e o mesmo para aniquilação de par elétron-pósitron.

5.1 DIAGRAMAS DE FEYNMAN E A MATRIZ S

Na presente seção expressaremos os termos perturbativos dos estados *in* e *out* por meio dos diagramas de Feynman. Em seguida conseguiremos obter a matriz S , a seção de choque σ e a taxa de decaimento Γ em função dos diagramas de Feynman.

Omitindo fases e constantes de normalização, um estado $|\mathbf{k}_A \mathbf{k}_B\rangle_{in}$ expresso perturbativamente de modo similar ao estado de vácuo da teoria interagente é

$$|\mathbf{k}_A \mathbf{k}_B\rangle_{in} \propto \lim_{T \rightarrow \infty (1+i\epsilon)} |\mathbf{k}_A \mathbf{k}_B\rangle_0. \quad (5.1)$$

Assim, para dois estados de pacotes de onda estreitos (localizados)

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | e^{-i\hat{H}(2T)} | \mathbf{p}_A \mathbf{p}_B \rangle &\propto \lim_{T \rightarrow \infty (1+i\epsilon)} {}_0 \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | e^{-i\hat{H}(2T)} | \mathbf{k}_A \mathbf{k}_B \rangle_0 = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty (1+i\epsilon)} {}_0 \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | \times T_w \left\{ -i \int_{-T}^T dt \hat{H}_I(t) \right\} | \mathbf{k}_A \mathbf{k}_B \rangle_0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

onde para não haver confusão T_w é o operador de ordenamento temporal. As constantes de proporcionalidade e fases são obtidas através da fórmula de redução LSZ vista em [15]. No entanto, o processo de normalização cancela tais fatores sem maiores problemas.

Passamos agora à representação gráfica de produtos do tipo (5.2). Para entender esse processo com facilidade vamos considerar os dois primeiros termos da expansão em série de um espalhamento do tipo $2 \rightarrow 2$ na teoria $\lambda\phi^4$,

$$\lim_{T \rightarrow \infty (1+i\epsilon)} {}_0 \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | T_w \left\{ \frac{\lambda}{4!} (-i) \int_{-T}^T dt (\phi(x))^4 \right\} | \mathbf{p}_A \mathbf{p}_B \rangle_0.$$

O primeiro termo é trivial, representa propagações livres

$$\begin{aligned} {}_0 \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | \mathbf{p}_A \mathbf{p}_B \rangle_0 &\equiv \langle 0 | a(\mathbf{p}_1) a(\mathbf{p}_2) \sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}} \sqrt{2E_{\mathbf{p}_2}} \sqrt{2E_{\mathbf{p}_A}} \sqrt{2E_{\mathbf{p}_B}} a^\dagger(\mathbf{p}_A) a^\dagger(\mathbf{p}_B) | 0 \rangle \\ &= 2E_{\mathbf{p}_A} 2E_{\mathbf{p}_B} (2\pi)^6 \left[\delta^{(3)}(\mathbf{p}_A - \mathbf{p}_1) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_2) + \delta^{(3)}(\mathbf{p}_A - \mathbf{p}_2) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_1) \right] \end{aligned}$$

Figura 6

$$= \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ | \quad | \\ \mathcal{A} \quad \mathcal{B} \end{array} + \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \mathcal{A} \quad \mathcal{B} \end{array}$$

A atuação da componente $\varphi_I^+(x)$ do operador $\varphi_I(x)$ sobre o estado $|\mathbf{p}\rangle_0$ pode ser encarada como uma contração,

$$\begin{aligned} \varphi_I^+(x)|\mathbf{p}\rangle_0 &= \left(\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} a(\mathbf{k}) e^{ik \cdot x} \right) \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} \varphi^+(\mathbf{p})|0\rangle \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} e^{ik \cdot x} \left((2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \right) |0\rangle = e^{ik \cdot x} |0\rangle \end{aligned} \quad (5.3)$$

e também

$${}_0\langle \mathbf{p} | \varphi_I^-(x) = {}_0\langle 0 | e^{-ik \cdot x}. \quad (5.4)$$

Os operadores $a^\dagger(\mathbf{p})$ e $a(\mathbf{p})$ são quem de fato atuam sobre os estados, de modo que podemos calcular o termo de segunda ordem em λ de (5.2) explicitando essas atuações

$$\begin{aligned} {}_0\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | T_w \left(\frac{\lambda}{4!} (-i) \int d^4x \varphi_I^4(x) \right) | \mathbf{p}_{\mathcal{A}} \mathbf{p}_{\mathcal{B}} \rangle_0 &= \\ = {}_0\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | N \left(\frac{\lambda}{4!} (-i) \int d^4x \varphi_I^4(x) + \text{contrações} \right) | \mathbf{p}_{\mathcal{A}} \mathbf{p}_{\mathcal{B}} \rangle_0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

As contrações dentro dos parênteses são as contrações decorrentes da aplicação do Teorema de Wick, ou seja, $\overbrace{\varphi_I \varphi_I \varphi_I \varphi_I}$ e $\overbrace{\varphi_I \varphi_I \varphi_I \varphi_I}$. O termo onde todos os campos da interação estão contraídos entre si origina um diagrama de bolha de vácuo multiplicado pelo diagrama de ordem λ^0 [16],

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{4!} (-i) \int d^4x D_F(x-x) D_F(x-x) \\ \times 2E_{\mathbf{p}_{\mathcal{A}}} 2E_{\mathbf{p}_{\mathcal{B}}} (2\pi)^6 \left[\delta^{(3)}(\mathbf{p}_{\mathcal{A}} + \mathbf{p}_1) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_{\mathcal{B}} + \mathbf{p}_2) \right. \\ \left. + \delta^{(3)}(\mathbf{p}_{\mathcal{A}} + \mathbf{p}_2) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_{\mathcal{B}} + \mathbf{p}_1) \right] \end{aligned} \quad (5.6)$$

Figura 7

$$= \text{loop} \times \left(\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ | \quad | \\ \mathcal{A} \quad \mathcal{B} \end{array} + \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \mathcal{A} \quad \mathcal{B} \end{array} \right)$$

Realizando o produto normalmente ordenado entre as partes não contraídas de $\overbrace{\varphi_I \varphi_I \varphi_I \varphi_I}$ obtemos $(\varphi_I^- \varphi_I^- + 2\varphi_I^- \varphi_I^+ + \varphi_I^+ \varphi_I^+)$, logo olhando as contrações da (5.5) temos

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda}{4!} (-i) \int d^4x \overbrace{\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | \langle \varphi_I^-(x) \varphi_I^-(x) + 2\varphi_I^-(x) \varphi_I^+(x) + \varphi_I^+(x) \varphi_I^+(x) \rangle | \mathbf{p}_A \mathbf{p}_B \rangle_0} \\ & = \frac{\lambda}{4!} (-i) (2\pi)^3 \int d^4x D_F(x-x) D_F(x-x). \end{aligned}$$

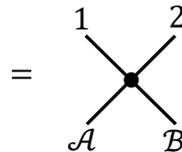
No termo sem nenhuma contração entre os campos,

$${}_0 \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | N \left(\frac{\lambda}{4!} (-i) \int d^4x \varphi_I(x) \varphi_I(x) \varphi_I(x) \varphi_I(x) \right) | \mathbf{p}_A \mathbf{p}_B \rangle_0 \quad (5.7)$$

dois dos campos operam sobre o estado ${}_0 \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 |$ e os outros dois campos restantes operam sobre o estado $| \mathbf{p}_A \mathbf{p}_B \rangle_0$. Também é necessário multiplicar o termo por $4!$ já que existem 4 escolhas para o primeiro campo a ser contraído, vezes 3 escolhas para o segundo campo a ser contraído, vezes 2 escolha para o terceiro campo a ser contraído, vezes 1 escolha para o último campo a ser contraído. Dessa maneira obtém-se

$$4! \cdot \frac{\lambda}{4!} (-i) \int d^4x e^{-i(p_A + p_B - p_1 - p_2) \cdot x} = -i\lambda (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_1 - p_2). \quad (5.8)$$

Figura 8



A delta representa a conservação do momentum total. Como partimos da parte conexa da matriz S para chegar a esse ponto fica claro que

$$-i\lambda (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_1 - p_2) = -i\mathcal{M} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_1 - p_2)$$

ou seja,

$$\lambda = \mathcal{M}. \quad (5.9)$$

Essa igualdade leva automaticamente a linguagem de diagramas à seção de choque diferencial no referencial do centro de massa

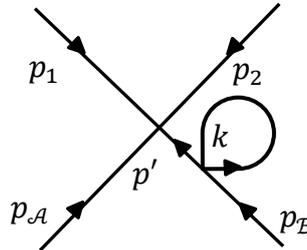
$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{CM} = \frac{\lambda^2}{64\pi^2 E_{CM}}. \quad (5.10)$$

Iremos ver que em outros casos, como sistemas contendo férmions, a seção de choque possuirá dependência angular. No momento este não é o caso de tal maneira que

$$\sigma_{TOT} = \frac{1}{2} \int d\Omega \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{CM} = \frac{1}{2} 4\pi \frac{\lambda^2}{64\pi^2 E_{CM}} = \frac{\lambda^2}{32\pi E_{CM}}. \quad (5.11)$$

Nem todos os diagramas conexos devem ser computados no cálculo da seção de choque, pois alguns nos trarão problemas de divergência. Um exemplo é o gráfico abaixo

Figura 9



Após resolver as integrais dos vértices $\int d^4x \int d^4y$ originamos deltas de conservação na expressão da amplitude associada a esse diagrama, isto é,

$$\frac{1}{2} \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} \frac{i}{p'^2 - m^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} (-i\lambda)(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p' - p_1 - p_2) \quad (5.12)$$

$$\times (-i\lambda)(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_B - p').$$

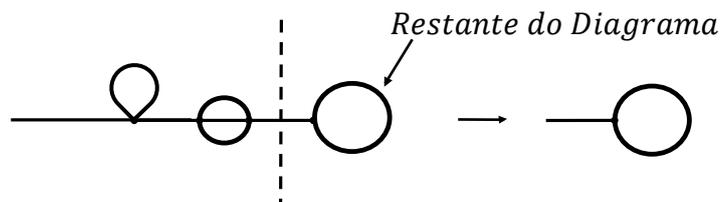
A integral em p' pode ser encontrada com o auxílio da delta $\delta^{(4)}(p_B - p')$, o que nos impõe

$$\frac{1}{p'^2 - m^2} \Big|_{p'=p_B} = \frac{1}{p_B^2 - m^2}. \quad (5.13)$$

Já que o 4-momentum de uma partícula associada a uma linha externa está na camada de massa a expressão acima diverge. Da mesma maneira que bolhas de vácuo representam transições entre $|0\rangle \rightarrow |\Omega\rangle$, Loops em pernas externas representam a transição entre dois estados de partícula única $|p_0\rangle \rightarrow |p\rangle$. Este não é um processo originado do espalhamento e, portanto, não deve ser considerado.

Sempre que houver *loops* nas pernas externas devemos escolher e cortar um dos propagadores intermediários, de modo que apenas com esse único corte todos os loops sejam retirados, por exemplo:

Figura 10



De agora em diante deveremos estar atentos para a necessidade de amputação dos gráficos o que nos leva a

$$i\mathcal{M} = \left(\sum \text{Diagramas Conexos e Amputados} \right) \quad (5.14)$$

5.2 AS REGRAS DE FEYNMAN PARA OS FÉRMIONS

Seguindo nossa apresentação do formalismo que permite calcular processos de espalhamento, vamos mostrar as regras de Feynman para interações que contenham férmions com acoplamentos do tipo Yukawa e para interações que contenham campos de Maxwell. Por fim chegaremos às regras de Feynman para Eletrodinâmica Quântica.

5.2.1 As Regras de Feynman para os férmions na Teoria de Yukawa

Desenvolveremos brevemente o teorema de Wick para campos fermiônicos a fim de facilitar a associação que posteriormente faremos entre a teoria fermiônica e os diagramas de Feynman.

Os operadores de campo que descrevem partículas espinoriais são obtidos da quantização dos campos de Dirac que pode ser vista em [3], o que nos leva a

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \sum_s (a(\mathbf{p}, s)u(p, s)e^{-ip \cdot x} + b^\dagger(\mathbf{p}, s)v(p, s)e^{ip \cdot x}) \quad (5.15)$$

$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \sum_s (b(\mathbf{p}, s)\bar{v}(p, s)e^{-ip \cdot x} + a^\dagger(\mathbf{p}, s)\bar{u}(p, s)e^{ip \cdot x}) \quad (5.16)$$

O ordenamento temporal para dois campos de Dirac é resumidamente

$$T[\overline{\psi(x)\bar{\psi}(y)}] = N[\psi(x)\bar{\psi}(y)] + \psi(x)\bar{\psi}(y), \quad (5.17)$$

sendo que para esses operadores,

$$S_F(x - y) = \overline{\psi(x)\bar{\psi}(y)} \equiv \begin{cases} \{\psi^+(x), \bar{\psi}^-(y)\}, & \text{se } x^0 > y^0 \\ -\{\bar{\psi}^+(y), \psi^-(x)\}, & \text{se } x^0 < y^0 \end{cases} \quad (5.18)$$

A estatística de Fermi-Dirac é resultado da utilização dos anticomutadores na álgebra dos campos de Dirac. Por conta disso, existe a necessidade de multiplicar por -1 o produto normalmente ordenado sempre que dois férmions trocarem de lugar, ou seja,

$$N(\psi_1\psi_2\bar{\psi}_3\bar{\psi}_4) = -\psi_1\bar{\psi}_3N(\psi_2\bar{\psi}_4) = -S_F(x_1 - x_3)N(\psi_2\bar{\psi}_4) \quad (5.19)$$

As atuações dos operadores de campo de Dirac são análogas às atuações dos operadores campo de Klein-Gordon,

$$= \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{2E_p}}{\sqrt{2E_{p'}}} \sum_{s'} a(\mathbf{p}', s') u(p', s') e^{-ip' \cdot x} a^\dagger(\mathbf{p}, s) |0\rangle = e^{-ip \cdot x} u(p, s) |0\rangle \quad (5.20)$$

$$= \langle 0 | b^\dagger(\mathbf{p}, s) \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{2E_p}}{\sqrt{2E_{p'}}} \sum_{s'} b^\dagger(\mathbf{p}', s') v(p', s') e^{ip' \cdot x} = \langle 0 | v(p, s) e^{ip \cdot x} \quad (5.21)$$

$$= \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{2E_p}}{\sqrt{2E_{p'}}} \sum_{s'} b(\mathbf{p}', s') \bar{v}(p', s') e^{-ip' \cdot x} b^\dagger(\mathbf{p}, s) |0\rangle = e^{-ip \cdot x} \bar{v}(p, s) |0\rangle \quad (5.22)$$

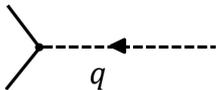
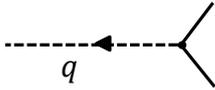
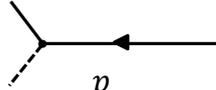
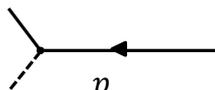
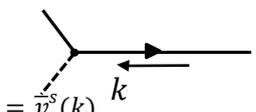
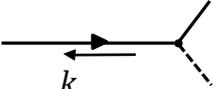
$$= \langle 0 | a(\mathbf{p}, s) \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{2E_p}}{\sqrt{2E_{p'}}} \sum_{s'} a^\dagger(\mathbf{p}', s') \bar{u}(p', s') e^{ip' \cdot x} = \langle 0 | \bar{u}(p, s) e^{ip \cdot x} \quad (5.23)$$

O Hamiltoniano da Teoria de Yukawa nos mostra explicitamente o acoplamento entre campos espinoriais e campos escalares como sendo

$$\hat{H} = \hat{H}_{Dirac} + \hat{H}_{Klein-Gordon} + \int d^3 x g \bar{\psi}_I(x) \psi_I(x) \varphi(x). \quad (5.24)$$

Nesta teoria as contrações de pernas externas são:

Tabela 1 - Contrações de Pernas externas na Teoria de Yukawa

$\varphi \mathbf{q} \rangle =$  $= 1$	$\langle \mathbf{q} \varphi =$  $= 1$
$\psi \mathbf{p}, s \rangle =$  $= u^s(p)$	$\langle \mathbf{k}, s \psi =$  $= \bar{u}^s(p)$
$\bar{\psi} \mathbf{k}, s \rangle =$  $= \bar{v}^s(k)$	$\langle \mathbf{k}, s \bar{\psi} =$  $= u^s(p)$

Os propagadores e vértices são respectivamente representados por:

Tabela 2: Gráficos de Feynman para propagadores e vértices na Teoria de Yukawa.

$$\overbrace{\varphi(x)\varphi(y)} = \text{---}\blacktriangleright\text{---} \underset{p}{=} = i/(q^2 - m_\phi^2 + i\epsilon)$$

$$\overbrace{\psi(x)\bar{\psi}(y)} = \text{---}\blacktriangleleft\text{---} \underset{p}{=} = i(\gamma^\mu \partial_\mu + m)/(q^2 - m^2 + i\epsilon)$$

$$\begin{array}{c} \diagup \blacktriangleright \\ \diagdown \blacktriangleright \\ \text{---}\blacktriangleright \end{array} = -ig$$

É interessante olharmos um espalhamento do tipo $2 \rightarrow 2$ nessa teoria, com dois férmions no estado final e dois férmions no estado inicial. O termo de segunda ordem da expansão da exponencial do Hamiltoniano de interação é quem tem a contribuição dominante

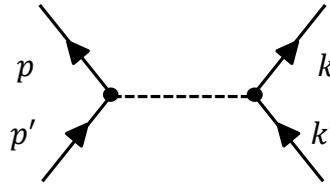
$$\begin{aligned} & \overbrace{\langle \mathbf{p}', \mathbf{k}' | (1/2!) (-ig) \int d^4x \bar{\psi} \psi \phi (-ig) \int d^4y \bar{\psi} \psi \phi | \mathbf{p}, \mathbf{k} \rangle} \\ & \propto \frac{(-ig)^2 2!}{2!} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m_\phi^2} \int d^4x e^{ik' \cdot x} e^{-ik \cdot x} e^{-iq \cdot x} \int d^4y e^{ip' \cdot y} e^{-ip \cdot y} e^{iq \cdot y} \bar{u}(p') u(p) \\ & \propto \frac{(-ig)^2 2!}{2!} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m_\phi^2} \bar{u}(p') u(p) \bar{u}(k') u(k) \int d^4x e^{i(k' - k - q) \cdot x} \int d^4y e^{i(p' - p + q) \cdot y} \\ & \propto (-ig)^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m_\phi^2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' - p + q) \\ & \quad \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k' - k - q) \bar{u}(p') u(p) \bar{u}(k') u(k) \end{aligned} \quad (5.25)$$

A possibilidade de permutação entre os vértices é quem gera um fator $n!$ que elimina o fator $1/n!$ da série de Taylor. Não existem outros fatores de simetria já que os três operadores da interação $(\bar{\psi}, \hat{\psi}, \hat{\phi})$ fazem contrações distintas e não podem substituir uns aos outros. A integral em q pode ser calculada com qualquer uma das deltas originando

$$i\mathcal{M} = \frac{-ig^2}{q^2 - m_\phi^2} \bar{u}(p') u(p) \bar{u}(k') u(k) \Big|_{p-p'=q=k'-k}. \quad (5.26)$$

Observando a Tabela 1 e a Tabela 2 concluímos que o gráfico associado a essa amplitude é

Figura 11



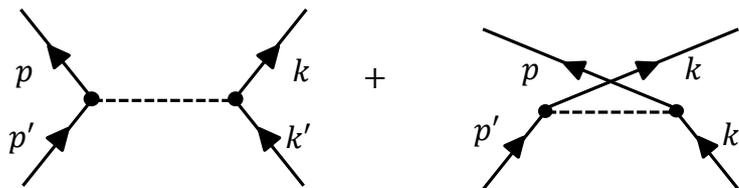
Importante notar que ambas as funções delta que podem ser escolhidas para o cálculo da integral na expressão (5.25) forçam o momentum p ir de um vértice a outro independente do sentido.

A indiscernibilidade entre os férmions nesse caso revela que temos na verdade dois gráficos associados às duas possibilidades. Para entender o porquê disso basta desentrelaçar as contrações associadas na amplitude de espalhamento

$$\langle 0 | a^\dagger(\mathbf{k}') a^\dagger(\mathbf{p}') \bar{\psi}_x \psi_x \bar{\psi}_y \psi_y a(\mathbf{p}) a(\mathbf{k}) | 0 \rangle \sim (-1)^2 \langle 0 | a^\dagger(\mathbf{k}') \bar{\psi}_x a^\dagger(\mathbf{p}') \bar{\psi}_y \psi_x \psi_y a(\mathbf{p}) a(\mathbf{k}) | 0 \rangle.$$

O elemento invariante de matriz S é a soma dos gráficos de ambos os produtos

Figura 12



$$= (-ig)^2 \left(\bar{u}(p') u(p) \frac{1}{(p' - p)^2 - m_\phi^2} \bar{u}(k') u(k) - \bar{u}(p') u(k) \frac{1}{(p' - k)^2 - m_\phi^2} \bar{u}(k') u(p) \right)$$

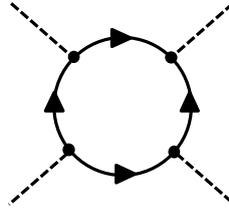
O sinal $(-)$ aparece por conta da estatística de Fermi-Dirac.

Podemos simplificar a determinação dos sinais em diagramas com n férmions pela propriedade de comutação do produto $(\bar{\psi}\psi)$, ou seja,

$$\begin{aligned} \dots (\bar{\psi}\psi)_x (\bar{\psi}\psi)_y (\bar{\psi}\psi)_z (\bar{\psi}\psi)_w \dots &= \dots (+1) (\bar{\psi}\psi)_x (\bar{\psi}\psi)_y (\bar{\psi}\psi)_z (\bar{\psi}\psi)_w \dots \\ &= \dots S_F(x - y) S_F(y - z) S_F(z - w) \dots \end{aligned} \quad (5.27)$$

Nessa teoria, um *loop* que envolve, por exemplo, 4 propagadores é retratado como

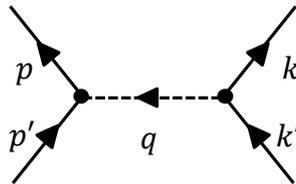
Figura 13



De posse de todas as regras formais necessárias para calcular um espalhamento na teoria de Yukawa, podemos determinar o potencial $V(\mathbf{r})$ gerado pela interação dessa teoria. Para isso vamos associar o diagrama em 1^a ordem com a aproximação de Born da mecânica quântica não relativística [7].

Começamos observando que em um espalhamento $2 \rightarrow 2$ onde as partículas são discerníveis temos apenas um gráfico de Feynman

Figura 14



No limite não relativístico tomam-se apenas os termos de ordem mais baixa nos *momenta* tridimensionais. Com isso temos as relações

$$p = (m, \mathbf{p}), \quad p' = (m, \mathbf{p}'), \quad k = (m, \mathbf{k}), \quad k' = (m, \mathbf{k}')$$

$$(\mathbf{p}' - \mathbf{p})^2 = -|\mathbf{p} - \mathbf{p}'|^2 + \mathcal{O}(\mathbf{p})^4 \simeq -|\mathbf{p} - \mathbf{p}'|^2$$

$$\bar{u}(p', s')u(p, s) = u^\dagger(p', s')(i\gamma^0)u(p, s) = m(\xi^{s'\dagger} + \xi^{s'\dagger}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix} = 2m\delta^{s's}$$

A amplitude em função das relações acima é, portanto,

$$i\mathcal{M} \simeq \frac{ig^2}{|\mathbf{p} - \mathbf{p}'|^2 + m_\phi^2} 2m\delta^{s's} 2m\delta^{r'r}.$$

Descartando os fatores oriundos da normalização relativística ($2m$) podemos comparar a amplitude com a aproximação de Born,

$$\langle p' | iT | p \rangle = -i\mathcal{M}(2\pi)\delta(E_{p'} - E_p),$$

Ou seja,

$$i\tilde{V}(q) = \frac{ig^2}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2}, \quad \mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}, q \equiv |\mathbf{q}|.$$

Para obter esse potencial no espaço das posições fazemos:

$$\begin{aligned}
 V(x) &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{-g^2}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2} e^{q \cdot x} \\
 &= \frac{-g^2}{4\pi^2} \int_0^\infty dq q^2 \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2} = \frac{-g^2}{4\pi^2 ir} \int_{-\infty}^\infty dq \frac{q e^{-iqr}}{|\mathbf{q}|^2 + m_\phi^2}, \\
 &\equiv r|\mathbf{x}|.
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

O calculo dessa integral exige que levemos o domínio de integração para o plano complexo, e fechemos o contorno de integração por cima de modo que este contenha o polo $q = +im_\phi$ [14,15]. Feito isso chegamos a

$$V(x) = \frac{-g^2}{4\pi^2 ir} (2\pi i) \left(\frac{im_\phi e^{-im_\phi r}}{2im_\phi} \right) = \frac{-g}{4\pi |\mathbf{r}|} e^{-m_\phi r}.$$

Este é um potencial de Yukawa do tipo atrativo que envolve dois férmions e tem alcance proporcional a $1/m_\phi$ da partícula escalar.

5.2.2 Regras de Feynman para a Eletrodinâmica Quântica

Nesse momento trataremos de levar os diagramas de Feynman para a Eletrodinâmica Quântica. Não abordamos a quantização canônica do campo eletromagnético nesse trabalho, porém, é possível vê-la em [1]. Iremos mostrar brevemente alguns aspectos interessantes da quantização desses campos. Na sequência iremos intuir as regras de Feynman a partir da teoria de Yukawa.

Na ausência de fontes, a equação $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ pode ser escrita em termos dos campos A^μ

$$\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = 0. \tag{5.29}$$

A equação de campo para A^μ torna-se

$$\partial^2 A_\mu = 0. \tag{5.30}$$

Vê-se que as componentes de A obedecem à equação de Klein-Gordon para $m = 0$. As soluções da equação acima no espaço dos momenta são da forma $\varepsilon_\mu e^{-ip \cdot x}$, onde $p^2 = 0$ e ε_μ é o vetor de polarização do fóton.

Podemos expandir o campo eletromagnético já elevado à categoria de operador em função de operadores de criação e aniquilação apropriados como mostrado na quantização dos campos de Klein-Gordon e de Dirac

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \sum_{r=0}^3 (a(\mathbf{p}, r) \varepsilon_\mu^r e^{-ip \cdot x} + a^\dagger(\mathbf{p}, r) \varepsilon_\mu^{r*} e^{ip \cdot x}) \quad (5.31)$$

sendo que $r = 0, 1, 2, 3$, é o rótulo da base dos vetores de polarização.

A hamiltoniana de interação dessa teoria é da forma

$$\hat{H} = \int d^3x e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu. \quad (5.32)$$

O termo de interação é específico para partículas que contenham carga igual à carga do elétron $e = -1$. Se ao invés disso a partícula tiver um múltiplo da carga do elétron, como o quark *up* que possui carga $Q_u = +2/3$ ou o quark *down* que possui carga $Q_d = -1/3$, consideramos que essa partícula tem uma carga igual ao o módulo da carga do elétron vezes um fator Q qualquer, $Q_l = Q|e|$.

O propagador do fóton tem a forma

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon}. \quad (5.33)$$

O fator (-1) na expressão do propagador do fóton é necessário porque o tensor métrico não é positivo definido. Avaliando a integral do propagador podemos ver isso de um modo mais claro

$$\int \frac{d^4}{(2\pi)^4} \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} e^{-iq \cdot (x-y)} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} g^{\mu\nu} \int \frac{dq^0}{(2\pi i)} \frac{e^{-iq^0(x^0 - y^0)}}{(q^0 - |\mathbf{q}|)(q^0 + |\mathbf{q}|)}. \quad (5.34)$$

Como de costume, o domínio de integração deve ser generalizado para um plano complexo. O contorno de integração deve ser fechado por baixo quando $x^0 > y^0$ ou por cima quando $x^0 < y^0$, produzindo como resultado

$$\begin{aligned} &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} g^{\mu\nu} e^{iq \cdot (x-y)} \frac{(2\pi i)}{(2\pi i)} \frac{e^{-iq^0(x^0 - y^0)}}{2|\mathbf{q}|} \Big|_{q^0=2|\mathbf{q}|} \\ &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{-g^{\mu\nu}}{2|\mathbf{q}|} e^{-iq \cdot (x-y)}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Já que esta é a expressão do propagador ela obviamente deve ser igual a

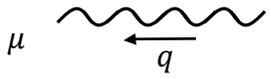
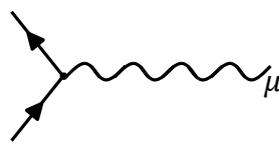
$$\langle 0|T[A_\mu(x)A_\nu(y)]|0\rangle. \quad (5.36)$$

Se fizermos $\mu = \nu$ e tomarmos o limite $x^0 \rightarrow y^0$ por valores positivos, o produto temporalmente ordenado torna-se a norma do vetor de estado $A_\mu(x)|0\rangle$ que é positiva por definição. Os estados criados por qualquer uma das três componentes da parte espacial deste operador $A_i(x)$, $i = 1, 2, 3$, de fato tem norma positiva. Consideramos que os fótons criados por esses operadores são fótons reais. A parte temporal cria estados de norma negativa e por

isso classificamos as partículas criadas por esse operadores como sendo partículas virtuais [3,16].

As regras de Feynman da QED são intuídas da teoria de Yukawa quando trocamos a Hamiltoniana de interação na expressão (5.24) pela Hamiltoniana de interação (5.30). As regras referentes aos férmions permanecem as mesmas. As regras referentes aos operadores de campo A_μ são:

Tabela 3 - Regras de Feynman associadas ao Gauge de Lorentz.

	$= -ig_{\mu\nu}/(q^2 + i\epsilon)$
	$= -ie\gamma^\mu$
	$= \epsilon_\mu(p)$
	$= \epsilon_\mu^*(p)$

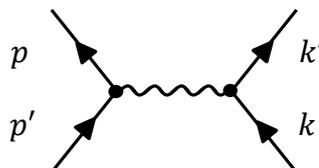
5.3 PROCESSOS DE ESPALHAMENTO NÃO RELATIVÍSTICOS

Passamos agora a aplicações do formalismo desenvolvido. Inicialmente faremos o mesmo que fizemos com o potencial de Yukawa. Vamos utilizar o formalismo para calcular a contribuição dominante para o espalhamento não relativístico. Em seguida iremos calcular processos já conhecidos para entender melhor como é a aplicação de tal formalismo.

5.3.1 O Potencial de Coulomb

Estamos interessados em calcular a amplitude do seguinte diagrama

Figura 15



$$i\mathcal{M} = \bar{u}^{s'}(p')_\alpha (e\gamma_{\alpha\beta}^\mu) u^s(p)_\beta \frac{-ig_{\mu\nu}}{(p' - p)} \bar{u}^{r'}(k')_\rho (e\gamma_{\rho\kappa}^\nu) u^r(k)_\kappa \quad (5.37)$$

Para isso vamos utilizar a mesma lógica de quando obtivemos a amplitude relacionada ao potencial de Yukawa. Considerando o limite não relativístico em que $|\mathbf{p}|$ e $|\mathbf{p}'| \ll m$ temos

$$\bar{u}^{s'}(\mathbf{p}')\gamma^0 u^s(\mathbf{p}) = m(\xi^{\dagger s'} \quad \xi^{\dagger s'}) (i\gamma^0)\gamma^0 \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix} = -2im\delta^{ss'}$$

$$\bar{u}^{s'}(\mathbf{p}')\gamma^i u^s(\mathbf{p}) = m(\xi^{\dagger s'} \quad \xi^{\dagger s'}) \begin{pmatrix} i\sigma^i & 0 \\ 0 & -i\sigma^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix} = 0.$$

A amplitude invariante fica reduzida a

$$i\mathcal{M} = \frac{+ie^2 g_{00}}{-|\mathbf{p}' - \mathbf{p}|} (2m\delta^{ss'}) (2m\delta^{rr'}) = \frac{-ie^2}{|\mathbf{p}' - \mathbf{p}|} (2m\delta^{ss'}) (2m\delta^{rr'}).$$

A única diferença com relação à amplitude para uma massa $m_\phi = 0$ na teoria de Yukawa é o fator (-1) . Significa que temos um potencial repulsivo. Por conta dessa semelhança o potencial de Coulomb é obtido multiplicando o potencial de Yukawa pelo fator (-1) e fazendo $m_\phi = 0$

$$V(r) = \frac{e^2}{(4\pi)} \frac{1}{|\mathbf{r}|} = \frac{\alpha}{r}, \quad \alpha = \frac{e^2}{(4\pi)} \approx \frac{1}{137}. \quad (5.38)$$

Substituir partícula por antipartícula na teoria de Dirac nos leva à troca entre os produtos $\bar{u}^{r'}(k')u^r(k) \leftrightarrow \bar{v}^r(k)v^{r'}(k')$. A princípio esse termo parece ter o sinal oposto ao caso anterior. Porém reorganizando as contrações de $\langle \mathbf{p}', \mathbf{k}' | \bar{\psi}_x \psi_x \bar{\psi}_y \psi_y | \mathbf{p}, \mathbf{k} \rangle$ obtemos um sinal negativo

$$\langle 0 | \overbrace{b_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{p}'}} \overbrace{\bar{\psi}_{z_2} \psi_{z_2}} \overbrace{\bar{\psi}_{z_1} \psi_{z_1}} a_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{k}}^\dagger | 0 \rangle = (-1)^5 \langle 0 | \overbrace{b_{\mathbf{k}'} \psi_{z_2}} \overbrace{a_{\mathbf{p}'}} \overbrace{\bar{\psi}_{z_1} \psi_{z_2}} b_{\mathbf{k}}^\dagger \overbrace{\psi_{z_1} a_{\mathbf{p}}^\dagger} | 0 \rangle.$$

Este novo sinal compensa o sinal da antipartícula. O resultado confirma a interpretação do campo escalar real como sendo um campo neutro. A interação entre partícula e antipartícula, mediada pela troca de uma partícula escalar, possui o mesmo sinal da interação entre partícula e partícula e/ou antipartícula e antipartícula [14].

Um espalhamento na QED do tipo partícula-antipartícula faz com que passemos a ter o produto $\bar{v}^r(k)\gamma^0 v^{r'}(k') = -2im\delta^{rr'}$. Assim como no potencial de Yukawa, as contrações passarão a nos fornecer um sinal (-1) que modifica o sinal global de \mathcal{M} . Neste caso o potencial será um potencial atrativo. Este resultado também é reconfortante por concordar com o que é observado na natureza. A interação eletromagnética é intermediada por uma partícula vetorial carregada, logo o potencial é repulsivo para interações entre dois férmions ou entre dois antiférmions e atrativo para interações férmion-antiférmion.

A natureza atrativa da interação partícula-antipartícula na QED se deve ao fator (g_{00}) na expressão do propagador. Notando essa característica podemos supor como deverá ser uma interação cujo mediador é um tensor de *rank* 2 ao invés de um bóson vetorial. A interação gravitacional, cujo mediador é o gráviton, é uma interação desse tipo. O fato de esse mediador ser um tensor e possuir dois índices, faz com que a propagação se dê entre um ponto de coordenada $\mu\nu$ e um ponto de coordenada $\rho\sigma$, por exemplo. Isto significa que temos um acoplamento do tipo $(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho})$. Esta interação no limite não relativístico fará com que nós tenhamos o fator $(g_{00})^2$ na amplitude, o que mostra que a gravidade gera um potencial atrativo em todos os casos [14].

5.3.2 Espalhamento Rutherford

Através de algumas adaptações da QED vamos calcular a seção de choque do espalhamento de um elétron por uma carga em repouso para obter o mesmo resultado que Rutherford obteve em 1911.

Para conseguirmos o resultado desejado devemos assumir duas coisas:

- O núcleo é muito mais pesado do que o elétron e, portanto, não terá nenhuma característica dinâmica. O núcleo será apenas a fonte do campo elétrico que espalha o elétron incidente.
- Não haverá troca de fótons. Isto faz com que o termo de interação contenha o campo clássico $A_\mu(x)$ ao invés do operador campo $\hat{A}_\mu(x)$.

A primeira contribuição perturbativa para a parte interagente da matriz S nesse espalhamento é

$$\langle p' | iT | p \rangle \cong \langle p' | T_w \{ -i \int d^4x \bar{\psi} i e \gamma^\mu \psi A_\mu(x) \} | p \rangle = e \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) \int d^4x e^{ip \cdot x} e^{-ip' \cdot x} A_\mu(x)$$

$$e \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) \int d^4x e^{ip \cdot x} e^{-ip' \cdot x} A_\mu(x) = e \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) A_\mu(p - p')$$

onde $A_\mu(p - p')$ é a transformada de Fourier de $A_\mu(x)$. Se tomarmos esse campo como independente do tempo a sua transformada de Fourier terá uma delta de Dirac na componente temporal

$$A_\mu(p - p') = A_\mu(\mathbf{p} - \mathbf{p}') 2\pi \delta(E_i - E_r) = A_\mu(\mathbf{q}) 2\pi \delta(E_i - E_r),$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{p}'.$$

Considerando que o potencial é gerado por um campo elétrico clássico de carga Ze , temos

$$A_0(\mathbf{x}) = \frac{Ze}{4\pi r} \leftrightarrow A_0(\mathbf{q}) = \frac{Ze}{|\mathbf{q}|^2}$$

A amplitude é da forma

$$\langle p' | iT | p \rangle = i\mathcal{M}(2\pi)\delta(E_i - E_f),$$

que pode ser representada com o seguinte gráfico de Feynman,

Figura 16



$$= e\gamma^\mu A_\mu(\mathbf{q}).$$

O trabalho é calcular um espalhamento $2 \rightarrow 2$ como fizemos para obter a expressão (4.90) só que dessa vez olhando apenas para uma das duas partículas [14,15]. A probabilidade e a seção de choque diferencial neste caso são

$$\begin{aligned} dP(i \rightarrow f) &= \frac{d^3 p_f}{(2\pi^3)2E_f} |\text{out}\langle p_f | g_i \rangle_{in}|^2 \\ d\sigma &= \int d^2 b d\mathcal{P}(\mathbf{b}) \\ &= \int d^2 b \frac{d^3 p_f}{(2\pi^3)2E_f} \int \frac{d^3 k_i g(\mathbf{k}_i)}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_i}} \int \frac{d^3 \bar{k}_i g(\bar{\mathbf{k}}_i)^*}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{b} \cdot (\mathbf{k}_i - \bar{\mathbf{k}}_i)} \text{out}\langle p_f | g_i \rangle_{in} (\text{out}\langle p_f | \bar{g}_i \rangle_{in})^* \end{aligned} \quad (5.39)$$

Já que

$$\begin{aligned} \text{out}\langle p_f | g_i \rangle_{in} (\text{out}\langle p_f | \bar{g}_i \rangle_{in})^* &= i\mathcal{M}(2\pi)\delta(E_f - E_i) (-i)\mathcal{M}^*(2\pi)\delta(E_f - \bar{E}_i) \\ &\int d^2 b e^{i\mathbf{b} \cdot (\mathbf{k}_i - \bar{\mathbf{k}}_i)} = (2\pi)^2 \delta^2(k_i^\perp - \bar{k}_i^\perp) \\ \delta(E_f - E_i)\delta(E_f - \bar{E}_i) &= \delta(E_f - E_i)\delta(k_i^z - \bar{k}_i^z)/|\bar{k}_i^z/E_i|, \end{aligned}$$

é simples notar que a (4.39) tem a forma

$$\begin{aligned} d\sigma &= \int \frac{d^3 k_i g(\mathbf{k}_i)}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_i}} \int \frac{d^3 \bar{k}_i g(\bar{\mathbf{k}}_i)^*}{(2\pi)^3} \frac{d\Omega}{8\pi^2} \int dp_f p_f \delta(p_f - p_i) \\ &\times |\mathcal{M}|^2 (2\pi)(2\pi)^4 \delta^2(k_i^\perp - \bar{k}_i^\perp) \delta(k_i^z - \bar{k}_i^z) / |\bar{k}_i^z/E_i|. \end{aligned}$$

Lembrando que o aparato de medida tem a limitação abordada na expressão (4.84) podemos novamente assumir que $|g(\mathbf{x}_i)|^2 = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k}_i - \mathbf{p}_i)$ obtendo

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{v_i E_i} \int dp_f p_f \delta(p_f - p_i) |\mathcal{M}(p_i \rightarrow p_f)|^2$$

onde $E_i \simeq m$.

Usando a conservação de energia podemos calcular $i\mathcal{M}$,

$$i\mathcal{M} = e\bar{u}(p_f)\gamma^\mu u(p_i)A_\mu(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i) = Ze^2 \frac{\bar{u}(p_f)\gamma^0 u(p_i)}{|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i|^2}.$$

A expressão acima, no limite relativístico, nos permite escrever

$$i\mathcal{M} = Ze^2 \frac{(-2im\delta^{ss'})}{|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i|^2},$$

logo,

$$|\mathcal{M}|^2 = Z^2 e^4 \frac{4m^2 \delta^{ss'} \delta^{ss'}}{|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i|^4}.$$

Não estamos interessados nos estados de polarização, por isso não consideramos feixes polarizados. Devemos tomar a média sobre os spins iniciais e somar sobre os spins finais,

$$\frac{1}{2} \sum_{ss'} |\mathcal{M}|^2 = Z^2 e^4 \frac{4m^2}{|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i|^4} \frac{1}{2} \sum_{ss'} \delta^{ss'} \delta^{ss'} = Z^2 e^4 \frac{4m^2}{|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i|^4}.$$

Já que $E_f = E_i$ então $|\mathbf{p}_f| = |\mathbf{p}_i|$, logo

$$|\mathbf{p}_f| = |\mathbf{p}_i| \Rightarrow |\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i| = 2|\mathbf{p}_i| \text{sen}(\theta/2) \simeq 2v_i \text{sen}(\theta/2), \quad |\mathbf{v}_i| = v_i$$

finalmente

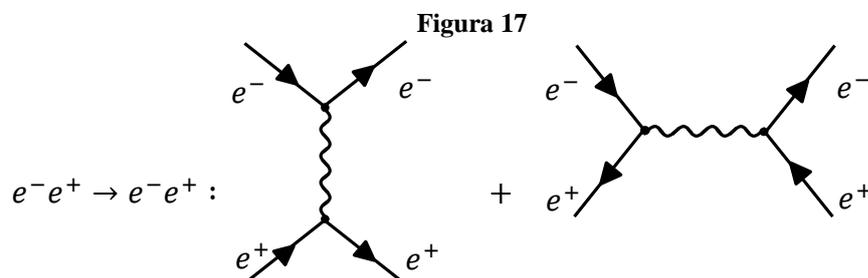
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \simeq \frac{1}{8\pi^2} \frac{mv_i}{v_i 2m} \frac{e^2 4m^2 Z^2 e^2}{16m^4 v_i^4 \text{sen}^4(\theta/2)} = \frac{Z^2 \alpha^2}{4m^2 v_i^4 \text{sen}^4(\theta/2)}.$$

Rutherford foi quem obteve esse resultado no ano de 1911.

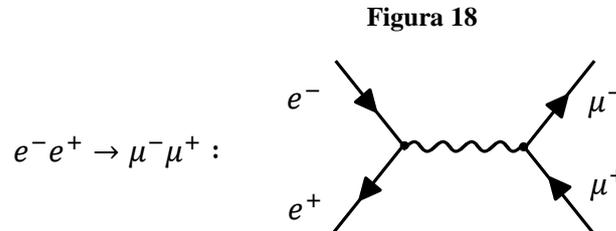
5.4 ESPALHAMENTO $e^+e^- \rightarrow l\bar{l}$ DESPOLARIZADO

Os processos de espalhamento anteriores serviram apenas para apurar as ferramentas e atestar a consistência da teoria quântica de campos com relação a resultados históricos. O espalhamento $e^+e^- \rightarrow l\bar{l}$, classificado como aniquilação elétron-pósitron em léptons, é de natureza quântico-relativística e será abordado na presente seção.

O fato dos neutrinos não possuírem carga elétrica nos impossibilita de considera-los. Automaticamente sobram três léptons, que são o próprio elétron e , o tau τ e o muon μ . Começaremos então pelos diagramas desses espalhamentos. No caso do elétron temos dois diagramas associados à perturbação de segunda ordem



Para qualquer um dos outros dois léptons restantes temos apenas um diagrama, já que ambos são discerníveis com relação ao elétron. No espalhamento $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$ por exemplo o possível diagrama é o seguinte:



Se estivéssemos considerando o tau a única mudança seria com relação à massa.

Para produzir partículas relativísticas a energia total no referencial do centro de massa precisa ser maior do que a soma das massas das partículas que se deseja produzir. Logo

Tabela 4

<i>Energia Inicial</i>	<i>Estados finais possíveis</i>
$E_{CM} < 2m_\mu$	e^-e^+
$2m_\mu \leq E_{CM} < 2m_\tau$	$e^-e^+; \mu^-\mu^+$
$E_{CM} \geq 2m_\tau$	$e^-e^+; \mu^-\mu^+; \tau^-\tau^+$

Nesse momento o objetivo é calcular a amplitude de espalhamento e seção de choque da aniquilação elétron-pósitron produzindo um par de muons. Usando as regras de Feynman para o diagrama $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$ obtemos

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M} &= \bar{v}^{s'}(p')(e\gamma^\mu)u^s(p) \left(-\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2 - i\epsilon} \right) \bar{u}^r(k)(e\gamma^\nu)(k') \\
 &= -i \frac{e^2}{q^2} \left(\bar{v}^{s'}(p')\gamma^\mu u^s(p) \right) \left(\bar{u}^s(k)\gamma_\mu v^{s'}(k') \right)
 \end{aligned}$$

O termo $i\epsilon$ em $-ig_{\mu\nu}/(q^2 - i\epsilon)$ foi descartado, porque neste caso $q^2 \neq 0$ sempre. O elemento ao quadrado $|\mathcal{M}|^2$ será então

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{M}|^2 &= (-)^2 \frac{e^4}{q^4} \left[\left(\bar{v}^{s'}(p')\gamma^\mu u^s(p) \right) \left(\bar{u}^s(p)\gamma^\nu v^{s'}(p') \right) \right] \\
 &\quad \times \left[\left(\bar{u}^r(k)\gamma_\mu v^{r'}(k') \right) \left(\bar{v}^{r'}(k')\gamma_\nu u^r(k) \right) \right].
 \end{aligned}$$

Somando sobre os spins,

$$\left(\frac{1}{2}\sum_s\right)\left(\frac{1}{2}\sum_{s'}\right)\sum_r\sum_{r'}|\mathcal{M}(s,s'\rightarrow r,r')|^2=\frac{1}{4}\sum_{spins}|\mathcal{M}|^2. \quad (5.40)$$

Tais somas agirão da seguinte maneira sobre os espinores

$$\sum_s u^{s\alpha}(p)\bar{u}_\beta^s(p) = (-i\gamma^\mu p_\mu)^\alpha{}_\beta + m\delta_\beta^\alpha; \quad \sum_s v^{s\alpha}(p)\bar{v}_\beta^s(p) = (-i\gamma^\mu p_\mu)^\alpha{}_\beta - m\delta_\beta^\alpha$$

o que significa que

$$\begin{aligned} \sum_{ss'} \bar{v}_\beta^{s'}(p')(\gamma^\mu)^\alpha{}_\beta u^{s\beta}(p)(\gamma^\nu)^\delta{}_\epsilon v^{s'\epsilon}(p') \\ = (-i\gamma^\mu p_\mu - m_e)^\epsilon{}_\alpha (\gamma^\mu)^\alpha{}_\beta (-i\gamma^\mu p_\mu + m_e)^\beta{}_\delta (\gamma^\mu)^\delta{}_\epsilon \\ = \text{Tr}[(-i\gamma^\mu p'_\mu - m_e)\gamma^\mu(-i\gamma^\mu p_\mu + m_e)\gamma^\nu]. \end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned} \sum_{rr'} [(\bar{u}^r(k)\gamma_\mu v^{r'}(k'))(\bar{v}^{r'}(k')\gamma_\nu u^r(k))] \\ = \text{Tr}[(-i\gamma_\nu k^\nu + m_\mu)\gamma_\mu(-i\gamma_\nu k^{\nu'} - m_\mu)\gamma_\nu] \end{aligned}$$

assim

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\sum_{spins}|\mathcal{M}|^2 &= \frac{e^4}{4q^2}\text{Tr}[(-i\gamma^\mu p'_\mu - m_e)\gamma^\mu(-i\gamma^\mu p_\mu + m_e)\gamma^\nu] \\ &\times \text{Tr}[(-i\gamma_\nu k^\nu + m_\mu)\gamma_\mu(-i\gamma_\nu k^{\nu'} - m_\mu)\gamma_\nu]. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Utilizando as propriedades das matrizes gama de Dirac, que podem ser vistas em [4], podemos simplificar enormemente os traços nesta expressão.

$$\begin{aligned} \text{Tr}[(-i\gamma_\nu k^\nu + m_\mu)\gamma_\mu(-i\gamma_\nu k^{\nu'} - m_\mu)\gamma_\nu] \\ = -k'^\alpha k^\beta \text{Tr}[\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta] - m_\mu^2 \text{Tr}[\gamma_\mu \gamma_\nu] \\ = -4k'^\alpha k^\beta (g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} + g_{\mu\beta} g_{\alpha\nu}) - 4m_\mu^2 g_{\mu\nu} = \\ = 4(-k'_\mu k_\nu + k' \cdot k g_{\mu\nu} - k_\mu k'_\nu - m_\mu^2 g_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (5.42)$$

Similarmente

$$\begin{aligned} \text{Tr}[(-i\gamma^\mu p'_\mu - m_e)\gamma^\mu(-i\gamma^\mu p_\mu + m_e)\gamma^\nu] \\ = 4(-p^\mu p'^\nu - p'^\mu p^\nu + p' \cdot p g_{\mu\nu} - m_e^2 g_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (5.43)$$

A massa do elétron é muito menor do que a massa do muon, $m_e/m_\mu \sim 1/200$, então podemos descartar o termo $-m_e^2 g_{\mu\nu}$. Substituindo as duas identidades dos traços, (5.41) e (5.42), na expressão (5.40)

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{spin} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{4e^4}{q^4} [-p^\mu p'^\nu - p'^\mu p^\nu + p' \cdot p g_{\mu\nu}] [k_\mu k'_\nu + k_\nu k'_\mu + g_{\mu\nu} (-k' \cdot k + m_\mu^2)] \\ &= \frac{8e^4}{q^4} [(p \cdot k)(p' \cdot k') + (p \cdot k')(p' \cdot k) - m_\mu^2 p \cdot p'] \end{aligned}$$

No referencial do centro de massa os cálculos para a seção de choque são enormemente simplificados. Para criar múons precisamos de uma energia da ordem de $2E_e > 2m_\mu \sim 400m_e$, portanto nesse limite estamos lidando com elétrons ultrarelativísticos. Por conta disso podemos desprezar a massa do elétron, ou seja, no referencial do centro de massa,

$$p = (E, E\hat{z}), \quad p' = (E, -E\hat{z}).$$

Partícula e antipartícula possuem massas iguais, e já que a energia é conservada

$$E_{e^+} = E_{e^-} = E_{\mu^+} = E_{\mu^-} = E.$$

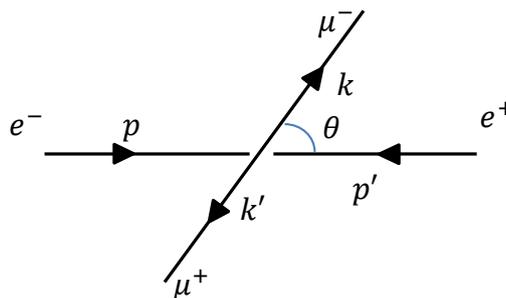
Isso não significa que os múons também sejam ultrarelativísticos, isto é,

$$k = (E, \mathbf{k}), \quad k' = (E, -\mathbf{k})$$

$$|\mathbf{k}| = \sqrt{E^2 - m_\mu^2}.$$

Definimos o ângulo entre os elétrons e os múons como

Figura 19



Assim temos as relações

$$q^2 = (p + p')^2 = p_\mu p^\mu + p'_\mu p'^\mu + 2p_\mu p'^\mu = -4E^2$$

$$p \cdot k = p' \cdot k' = -E^2 + \mathbf{k} \cdot (E\hat{z}) = -E^2 + E|\mathbf{k}| \cos \theta$$

$$p \cdot k' = p' \cdot k = -E^2 - \mathbf{k} \cdot (E\hat{z}) = -E^2 - E|\mathbf{k}| \cos \theta$$

De posse dessas identidades estamos novamente diante de uma seção de choque para dois corpos da eletrodinâmica quântica $\sigma^{QED} = \sigma$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM} = \frac{1}{2E_{\mathcal{A}}2E_{\mathcal{B}}|v_{\mathcal{A}} - v_{\mathcal{B}}|} \frac{|p_1|}{(2\pi)^2 4E_{CM}} \frac{1}{4} \sum_{spins} |\mathcal{M}|^2.$$

Com $2E_{\mathcal{A}}2E_{\mathcal{B}} = 2E = E_{CM}$, $\mathbf{v}_{\mathcal{A}} = \mathbf{p}_{\mathcal{A}}/E_{\mathcal{A}} = \hat{z}$ e $\mathbf{v}_{\mathcal{B}} = \mathbf{p}_{\mathcal{B}}/E_{\mathcal{B}} = -\hat{z}$,

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM} = \frac{1}{2E_{CM}^2} \frac{1}{16\pi^4} \frac{1}{2E} \frac{1}{4} \sum_{spins} |\mathcal{M}|^2$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM} = \frac{\alpha^2}{4E_{CM}^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \left[1 + \frac{m_\mu^2}{E^2} + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \cos^2 \theta\right].$$

Tomando o limite ultra relativístico onde

$$E \gg m_\mu \rightarrow 1 \gg \frac{E}{m_\mu},$$

chegamos à seção de choque diferencial não polarizada para a aniquilação elétron-pósitron em léptons no referencial do centro de massa

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM} = \frac{\alpha^2}{4E_{CM}^2} (1 + \cos \theta).$$

A integração angular nos dá por fim a seção de choque total para o processo $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ no referencial do centro de massa, onde E é a energia do elétron (pósitron) incidente e, portanto $E_{CM} = 2E$,

$$\begin{aligned} \sigma_{tot} &= 2\pi \int d(\cos \theta) \frac{d\sigma}{d\Omega}(\cos \theta) = 2\pi \frac{\alpha^2}{4E_{CM}^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \left[\frac{8}{3} + \frac{4}{3} \frac{m_\mu^2}{E^2} \right] \\ &= \frac{4\pi}{3} \frac{\alpha^2}{E_{CM}^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}} \left[1 + \frac{m_\mu^2}{2E^2} \right]. \end{aligned}$$

Definido o quadrado da energia disponível no C.M. como $s = E_{CM}^2 = 4E^2$ podemos escrever a seção de choque total da eletrodinâmica quântica σ_{tot}^{QED} como

$$\sigma_{tot}^{QED} = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \left[1 + \frac{2m_\mu^2}{s} \right] \left(1 - \frac{4m_\mu^2}{s} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Para unidades de energia em TeV, o fator $4\pi\alpha^2/3s$ vale aproximadamente 87 fb.

Considerando o regime de altas energias onde $s \gg m_\mu$ temos

$$\sigma_{tot}^{QED} = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \left\{ 1 - 2 \left(\frac{m_\mu^2}{s} \right)^2 + \mathcal{O} \left[\left(\frac{m_\mu^2}{s} \right)^3 \right] \right\}.$$

No entanto, para valores tão altos da energia de colisão e^+e^- as intenções relevantes são as eletrofracas, que além do efeito fóton, tem também o bóson Z^0 como mediador. Um cálculo semelhante ao apresentando, mas incluindo as interações eletrofracas, teria nos levado a [5],

$$\sigma_{tot}^{EW} = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \left\{ 1 - \frac{3}{8} \left(\frac{m_\mu^2}{s} \right)^2 + \mathcal{O} \left[\left(\frac{m_\mu^2}{s} \right)^3 \right] \right\}.$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nossa proposta foi a de atingir, a partir de primeiros princípios, um método de cálculo para observáveis em processos envolvendo partículas elementares, sob condições que são possíveis de reprodução experimental. O longo percurso iniciou-se com o método variacional, passando pela quantização de campos. O ambiente de interações perturbativas permitiu o desenvolvimento do método de Feynman como ferramenta de análise dos processos fenomenológicos de espalhamento, estabelecendo o contato com grandezas mensuráveis tais como seções de choque. Tal processo de aprendizado revelou uma Teoria Quântica de Campos que, mesmo rica em detalhes, apresenta-se surpreendentemente simples se considerarmos o escopo vasto de fenômenos que por ela estão cobertos. A analogia com o caso clássico, ressaltada em cada etapa deste trabalho, oferece um apoio frequente à intuição, ao mesmo tempo que evidencia os aspectos novos trazidos pela quantização.

O método apresentado não é único, mas é talvez o mais apropriado para aplicações fenomenológicas como o cálculo de observáveis. Outra maneira de se quantizar uma teoria é através das integrais de trajetória. Tal método é talvez o mais apropriado para um estudo mais detalhado dos aspectos formais e estruturais da Teoria Quântica de Campos, mas está fora do escopo desta dissertação. Isto nos leva a crer que um estudo dos aspectos formais da teoria, através da análise funcional necessária ao método das integrais de trajetória, é um dos objetivos a serem seguidos. Outro é o aprofundamento das aplicações de uso fenomenológico, por exemplo destinado ao teste de modelos de interação dedicados a estender o chamado "Modelo Padrão" das interações fundamentais.

REFERÊNCIAS:

- [1] GREINER, W.; REINHARDT, J. **Field quantization**. 2. ed. Nova Iorque: Springer, 1996.
- [2] NOBREGA, N. **Equações Diferenciais**. Rio de Janeiro Fundação Cecierj / Consórcio Cederj/ UFRJ, 2010. Disponível em: <<http://teca.cecierj.edu.br/popUpVisualizar.php?id=47838>>
- [3] PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D. V. **An Introduction to Quantum Field Theory**. 1. ed. Redwood: Perseus Books, 1995.
- [4] RYDER, L. H. **Quantum Field Theory**. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
- [5] PELÁ, R. R. **Teoria do Funcional da Densidade I**. São José dos Campos: Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2014. Disponível em: <<http://www.ief.ita.br/~rrpela/?q=node/27>>
- [6] NAKAHARA, M. **Geometry, Topology and Physics**. 2. ed. Bristol & Philadelphia: Institute of Physics Publishing, 2003. v. 822
- [7] TONG, D. **Quantum field theory**. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.
- [8] COHEN, C.; TANNOUDJI, B. D.; LALOE, F. **Quantum Mechanics. Volume 1**. Wiley: Hermann, 1991.
- [9] ASMAR, N. H. **Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems**. 2. ed. Nova Jersey: Prentice Hall, 2005.
- [10] ITZYKSON, C.; ZUBER, J.-B. **Quantum Field Theory**. Nova Iorque: Dover Publications, 752.
- [11] MANDL, F.; SHAW, G. **Quantum Field Theory**. 2. ed. Chichester: John Wiley & Son, 2010.
- [12] RUIVO, M. DA CONCEIÇÃO. **Propagadores**. Coimbra: Universidade de Coimbra, 2016.
- [13] BOCCIO, J. R. **Quantum Mechanics Mathematical Structure and Physical Structure Part 2**. Decatur: Swarthmore College Copyright, 2014.
- [14] NASTASE, H. **Introduction to quantum field theory I**. São Paulo: Instituto de Física Teórica, UNESP, 2014.
- [15] D'ELIA, M. R. **Teoria Quântica de Campos I**. São Paulo: Instituto de Física Teórica, UNESP, 2017.
- [16] PADULA, S. S.; NOVAES, S. F. **Teoria Quântica de Campos I**. São Paulo: São Paulo Research and Analysis Center, , 2017. Disponível em: <<https://www.sprace.org.br/slc/>>