

**CBPF**

Centro Brasileiro de  
Pesquisas Físicas

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Coordenação de Formação Científica

Coordenação de Cosmologia, Astrofísica e Interações

Fundamentais

Luiz Filipe de Oliveira Guimarães

# Universo em contração com as mesmas predições da inflação de Starobinsky

Rio de Janeiro - RJ

6 de julho de 2017

**Luiz Filipe de Oliveira Guimarães**

**Universo em contração com as mesmas previsões da  
inflação de Starobinsky**

Dissertação apresentada ao curso de Pós-Graduação em Física do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, como requisito parcial para a obtenção do Título de mestre em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Felipe Tovar Falciano

6 de julho de 2017

*No início, o universo foi criado. Isso irritou profundamente muitas pessoas e, no geral,  
foi encarado como uma péssima idéia.*

*(O Restaurante no Fim do Universo - Introdução)*

*Existe uma teoria que diz que, se um dia alguém descobrir exatamente para que serve o  
Universo e por que ele está aqui, ele desaparecerá instantaneamente e será substituído  
por algo ainda mais estranho e inexplicável.*

*Existe uma segunda teoria que diz que isso já aconteceu.*

*(O Restaurante no Fim do Universo - Capítulo 1)*

# Agradecimentos

Primeiramente devo agradecer a minha família por todo apoio que me deram durante toda a minha vida. Em especial meu irmão Carlos Augusto, minha mãe, Graça, e meu pai, Carlos Gabriel. Este último que, por sinal, é a minha referência para minha vida acadêmica e profissional;

Às Aves de Rapina e ao Futebol Fróes;

Ao meu orientador, Felipe Tovar, por toda a ajuda e orientação, estar sempre presente. Por ser gente boa, levando a uma interação fácil e sem atritos. Ao prof. Helayël, por me introduzir ao CBPF enquanto ainda na graduação;

A todos que tão bem me acolheram no CBPF. A Laís e Matheus, que primeiramente me acolheram na 515D. Ao FMA e ao Pedro, os outros colegas de sala e primeiros membros do grupo do café (que eu não tomo). Aos integrantes que seguiram, Amanda, Rafael e meu irmão de orientação, Guilherme GB. Discussões interessantes sempre surgiram, o desempenho sempre foi valorizado (kappa). A Cláudia, Vanessa e Arthur, que me tão bem me acolheram no ICRA (COSMO), assim como os outros membros. Em especial o Nelson, que ajudou com a pesquisa e referências. A todos os meus outros colegas, que entraram comigo, antes ou depois, e que estavam sempre lá nos cursos de Tião e Helayël, como o Alexandre, o Gustavo, o Gabriel, dentre tantos outros;

A todos os funcionários do CBPF, seja da limpeza, CFC/COEDU, secretárias, seguranças. Os bons trabalhos foram notados;

Por último agradeço à CAPES pela bolsa de mestrado.

# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>vii</b>
<b>Abstract</b>	<b>ix</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Perturbações Cosmológicas</b>	<b>5</b>
2.1 Introdução . . . . .	5
2.2 Perturbações Newtonianas . . . . .	6
2.3 Perturbações Cosmológicas na R.G. . . . .	8
2.3.1 Perturbações Métricas . . . . .	9
2.3.2 Perturbações de Matéria . . . . .	10
2.3.3 Invariância de Calibre . . . . .	11
2.4 Flutuações de campo escalar . . . . .	12
2.4.1 Perturbações Quânticas . . . . .	13
2.4.2 Estatística de Perturbações Cosmológicas . . . . .	16
2.5 Perturbações em teorias $f(R)$ . . . . .	18
2.5.1 Perturbações Quânticas em $f(R)$ . . . . .	19
2.6 Observações . . . . .	20
<b>3 Universo Primordial</b>	<b>25</b>
3.1 Introdução . . . . .	25
3.2 Modelo de Big-bang . . . . .	27
3.2.1 O paradigma e suas dificuldades . . . . .	27
3.3 Inflação . . . . .	31
3.3.1 Paradigma Inflacionário . . . . .	32

3.3.2	O Inflaton . . . . .	35
3.3.3	Dinâmica do Inflaton . . . . .	36
3.3.4	Fenomenologia da Inflação . . . . .	38
3.3.5	Revisitando Perturbações Cosmológicas . . . . .	41
3.4	Ricochete . . . . .	44
3.4.1	Paradigma do Ricochete . . . . .	44
3.4.2	Cenário de Ricochete de Matéria . . . . .	47
3.4.3	Realizando o Ricochete . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Ricochete de Starobinsky</b>	<b>50</b>
4.1	Introdução . . . . .	50
4.2	Inflação de Starobinsky . . . . .	51
4.3	Dualidade de Wands . . . . .	59
4.4	Reparametrizando a Inflação de Starobinsky . . . . .	62
4.5	Ricochete tipo-Starobinsky . . . . .	64
4.5.1	Dualidade escalar vs. Dualidade tensorial . . . . .	70
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>73</b>
<b>A</b>	<b>Cálculo referentes a <math>z(\eta)</math></b>	<b>75</b>
<b>B</b>	<b>Preliminares de Cosmologia</b>	<b>77</b>

# Lista de Figuras

2.1	Flutuações de temperatura da CMB - Foto: <i>ESA e Planck Collaboration</i> . . . . .	21
2.2	Espectro de potência angular da CMB[1] . . . . .	23
3.1	Tipos de potenciais inflacionários: (a) Inflação Antiga, (b) Nova Inflação (híbrida ou de campo fraco) e (c) Inflação Caótica (campo forte) . . . . .	38
3.2	Nível de confiança em 68% e 95% para $n_s$ e $r$ através da combinação do Planck com BICEP2/Keck Array e dados de BAO, em comparação com resultados teóricos de diferentes modelos inflacionários. . . . .	43
4.1	Poencial do campo escalar para a inflação de Starobinsky no referencial de Einstein . . . . .	55
4.2	Retrato de Fase $\dot{\varphi}$ por $\varphi$ , indicando o atrator em $\dot{\varphi}^2/2 \simeq V$ , (quasi-)dominação de poeira. Foram os usados os valores $\kappa_1 = 1$ , $\kappa_2 = 7$ para construção do gráfico. . . . .	69
4.3	Retrato de Fase $\dot{\varphi}$ por $\varphi$ , mostrando ambos os domínios de $\varphi$ , incluindo um segundo atrator, proveniente do caso de $\varphi > \kappa_2$ . Nesse caso $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$ . . . . .	70



# Resumo

No presente trabalho construímos um universo em contração de mesmas previsões observacionais que o modelo inflacionário de Starobinsky. A escolha deste modelo como base de nossa construção se deve à análise Bayesiana que o prioriza frente a outros [2]. A primeira etapa do trabalho consiste no estudo do modelo de Starobinsky, que distingue-se da Relatividade Geral pela presença de um termo quadrático no escalar de Ricci, passando por uma modificação de caráter fenomenológico em sua dinâmica. Mostramos a partir de seus parâmetros de slow-roll que o espectro de perturbações escalares e tensoriais não é afetado pela modificação. É apenas a partir do modelo modificado que podemos utilizar a dualidade de Wands [3], obtendo a evolução de um universo aproximadamente dominado por poeira, em contração. Este universo produzirá em sua contração o mesmo espectro de perturbações escalares que o modelo de Starobinsky. Dotados da dinâmica escolhemos o cenário de um campo escalar minimamente acoplado a gravitação para descrição efetiva da física deste universo em contração. O potencial deste campo efetivo é calculado assim como sua equação de estado. Uma breve comparação com a dualidade de Wands a partir das perturbações tensoriais também é feita.

**Palavras-chave:** Cosmologia, Inflação, Ricochete.



# Abstract

In the present work we build a contracting universe with the same observational predictions as the Starobinsky model of inflation. The choice of this model as basis of our construction is due to a Bayesian analysis, which prioritizes this model against others [2]. The first stage of the work consists of the study of the Starobinsky Model, which distinguishes itself from General Relativity through the presence of a quadratic term in the Ricci scalar, passing through a modification of phenomenological character of its dynamics. We show through its slow-roll parameters that the scalar and tensor spectrum of perturbations isn't affected by the modification. It's only with the modified model that we can use the Wands' duality [3], obtaining the evolution of a contracting quasi-matter dominated universe. This universe will produce during its contraction the same scalar perturbation spectrum as the Starobinsky model. With this dynamic in hand we choose the minimally coupled scalar field scenario to the effective description of the physics of this contracting universe. The scalar field potential is calculated, as its equation of state. A brief comparison with the Wands' duality for tensorial perturbations is done as well.

**Keywords:** Cosmology; Inflation, Bounce.

# Capítulo 1

## Introdução

Modelos inflacionários ou de ricochete? Qual abordagem ao estudo do universo primordial oferece as melhores explicações para a situação do universo atual? Como tais modelos lidam com física de altas energias? Possuem ambas as classes de modelos as devidas motivações de física fundamental? Poderiam eles prever algum fenômeno ainda não observado? Se buscam responder as mesmas perguntas, afinal, seria possível distingui-los de alguma maneira?

É papel da cosmologia moderna responder a essas perguntas, entre outras. Como não podemos voltar no tempo e observar como foi a infância do universo, precisamos analisar o passado através do que temos hoje em dia. As janelas que permitem essas observações são os telescópios atuais, em especial o Planck. Luz emitida nos primórdios da evolução cosmológica ainda chega até nós – não no espectro visível, mas no de micro-ondas. A radiação cósmica de fundo em micro-ondas, a CMB (do inglês *Cosmic Microwave Background radiation*), é o registro direto mais antigo de que temos acesso sobre o universo primordial, da ordem de seus primeiros 380 mil anos, ao final do período da recombinação. O que procura-se observar na CMB não está relacionado diretamente à física da recombinação, e sim os resultados à época provenientes dos primeiros estágios do crescimento do universo.

Estampadas na CMB estão as marcas das perturbações cosmológicas na distribuição de temperatura de seus fótons. As perturbações, e, portanto, as flutuações de densidade ocasionadas por ela, ocasionam diferenças de temperatura entre os fótons da CMB. Essas flutuações de temperatura por sua vez terão dependência angular, sendo possível obter um espectro de potência. Como as perturbações cosmológicas são produzidas no regime inflacionário ou no período pré-ricochete, será através de seu estudo, somado às previsões

teóricas, que poderemos tentar responder o que aconteceu nos primeiros instantes do universo<sup>1</sup>.

Os sucessos e insucessos de diferentes modelos inflacionários desenvolvidos nas últimas décadas são bem documentados [4]. Devido às mais recentes observações [5] sabe-se o que esperar das perturbações cosmológicas: espectro de potência quase invariante de escala, amplitudes relativamente bem vinculadas, com ondas gravitacionais primordiais suprimidas. Desta forma é possível avaliar os modelos sugeridos e determinar quais são aqueles que melhor correspondem ao detectado.

Uma das primeiras classes de modelos inflacionários construídas, os cenários de inflação caótica [6] são desfavorecidos frente aos resultados mais recentes. Ao contrário do – prematuramente – concluído após os resultados de 2014 do BICEP 2 [7], as já mencionadas ondas gravitacionais primordiais ainda não foram observadas. Diferentemente das astrofísicas, observadas pelo LIGO [8], as primordiais, caso existam, são bem fracas. Devido ao atual elevado grau de sensibilidade do Planck e as mais avançadas técnicas de clareamento do sinal, é possível estabelecer um limite superior para o quanto de ondas gravitacionais espera-se ter sido produzido. E, infelizmente para os percursores da inflação caótica, esse limite está consideravelmente abaixo do que estes modelos prevêem.

Respeitando todos estes limites, o modelo inflacionário de Starobinsky [9] é o o modelo mais favorecido por análise Bayesiana [5, 2]. Curiosamente introduzido antes mesmo da ideia de inflação se consolidar por Guth [10], a inflação de Starobinsky é devida a um termo quadrático no escalar de Ricci na ação de Einstein-Hilbert. Ao contrário de demais modelos  $f(R)$  [11], que enfrentam dificuldades sejam elas observacionais [5] ou pela liberdade de seus parâmetros, a modificação de Starobinsky persiste e é eficaz.

Diversos outros modelos foram construídos, ao passo de que nas últimas décadas o cenário inflacionário tem sido o predominante na literatura. Entretanto, a já indagada questão de se este cenário realmente reflete o acontecido ainda permanece vigente.

Os cenários alternativos à inflação, ao contrário destes, não são tão numerosos. Um avanço recente no entanto veio a alavancar a procura por alternativas, reenergizando este campo de pesquisa. Somada às justificativas para os problemas do modelo de big-bang quente [12], foi mostrada a possibilidade de produção de um espectro (quase) invariante de escala em universos com dominação de matéria. A dualidade de Wands [3] liga então

---

<sup>1</sup>Ou no caso de universos com Ricochete, o que aconteceu antes do Ricochete, há muito tempo atrás.

os modelos inflacionários, de expansão (quasi-)de Sitter, com os modelos que possuem contração (quase) dominada por matéria.

Modelos que possuem um ricochete, realizado após a contração de um universo pre-existente, ganharam tração nas últimas décadas. O conceito de ricochete e a ideia de utilizá-lo não são novos, tendo origem no estudo de modelos de universo cíclico [13]. Um universo em contração, ou que terminasse desta forma, em *Big-Crunch* já era conhecido como solução das equações de Friedmann desde os princípios da cosmologia moderna. A cogitação de um fenômeno que o reexpandisse seguiu naturalmente. Também de forma curiosa, tem-se que a primeira solução exata para um universo com ricochete também precede a introdução do universo inflacionário de Guth, através do trabalho de Novello e Salim [14].

Desta forma, universos dotados do chamado ricochete de matéria [15] foram sendo cada vez mais desenvolvidos. Junto a eles, os chamados modelos ekpyróticos [16], que por sua vez trouxeram consigo a volta de modelos de comportamento cíclico [17]. A principal tarefa da modelagem destes cenários é encontrar o prometido pela dualidade de Wands, um espectro invariante de escala <sup>2</sup>. As condições e situações onde isso viria a acontecer foram estudadas [18], assim como o obstáculo encontrado por modelos com ricochete, a passagem das perturbações por ele [19]. Não seria diferente o fato de que essas abordagens também encontraram sucessos e desventuras [20].

Junto ao desenvolvimento de mais modelos, veio a procura por outras dualidades ligando os cenários inflacionários e de contração de matéria. Afinal, como já mostrava a dualidade de Wands, caso o espectro de potência da CMB fosse exatamente invariante de escala, outras quantidades deveriam ser utilizadas para sabermos o que realmente aconteceu. Haveria a necessidade de quebrar essa degenerescência. Apesar disto não acontecer, diversas abordagens foram concebidas. Universos inflacionários são o foco por serem o cenário vigente, sendo conectados novamente a universos em contração de matéria [21] e cíclicos [22]. Há também as tentativas que se utilizam de reparametrizações dos modelos inflacionários, com intuito de separá-los em classes [23, 24], tarefa essa que caso repetida para modelos de ricochete [25] poderia proporcionar uma conexão entre ambos. Críticas à parte [26], esta área continua sendo trabalhada.

O intuito deste trabalho segue outro caminho: a maquinação de um modelo de uni-

---

<sup>2</sup>Mais precisamente, seguindo as mais recentes observações, quase invariante, ligeiramente desviado para o vermelho.

verso em contração dominado por matéria propositalmente equivalente a um universo inflacionário. Conforme mencionado, o modelo inflacionário de Starobinsky é um dos modelos que melhor se comporta frente às observações. Desta forma ele será o modelo escolhido como base para construção do universo em contração em questão. A motivação deste trabalho é portanto fortemente ligada a fenomenologia, sendo argumentos fenomenológicos utilizados ao longo dele. Novamente, a abordagem terá como lastro a dualidade de Wands, com enfoque nas perturbações escalares. Se até primeira ordem em teoria de perturbações for sempre possível construir um modelo de universo em contração equivalente a um inflacionário, ficará clara a necessidade de distinguir modelos usando ondas gravitacionais ou a (não-)gaussianidade da CMB<sup>3</sup>.

Para isto, será necessário uma breve introdução a cosmologia e modelos  $f(R)$ , pelo fato do modelo de Starobinsky ser uma teoria  $f(R)$ , feitas no próximo capítulo. Em seguida a teoria de perturbações cosmológicas será revisada. Neste capítulo será preciso também apresentar o tratamento de perturbações no contexto de  $f(R)$ . No capítulo 3 será a vez de demonstrar as origens e motivações dos modelos inflacionários e de ricochete, juntamente de seus aspectos fenomenológicos. Por fim, no capítulo seguinte, o modelo inflacionário de Starobinsky será apresentado, da mesma forma que a dualidade de Wands. A modificação do modelo de Starobinsky utilizada a fim de obter seu universo em contração dual a ele será justificada e por fim, conforme prometido, este universo em questão será construído. Por fim, conclusões a respeito desta abordagem e resultados obtidos serão formalizados.

---

<sup>3</sup>Trabalhos a respeito da não-Gaussianidade prevista por modelos de universo em contração já existem [27].

# Capítulo 2

## Perturbações Cosmológicas

Este capítulo consiste primeiramente na apresentação do formalismo de perturbações cosmológicas lineares no contexto da Relatividade Geral e de teorias  $f(R)$ . Em seguida o processo de quantização das perturbações será detalhado assim como a conexão entre os aspectos teóricos e observacionais.

### 2.1 Introdução

Nas últimas décadas, grandes colaborações como o WMAP e o Planck[1] permitiram um enorme avanço na cosmologia observacional. Dados de alta precisão sobre os parâmetros cosmológicos[1], o espectro das flutuações de densidade e anisotropias na CMB [29] inauguraram a era da cosmologia capaz de dados precisos. É a partir do estudo de perturbações cosmológicas que este quadro observacional encontra o paradigma teórico.

A teoria de perturbações cosmológicas [30, 28, 31] compreende diversos tipos de modelos de universo primordial, sejam eles inflacionários [28, 32], de pré-big-bang [33, 34], com ricochete [15, 35, 36, 37], ekpyróticos [38, 39, 40, 41], entre outros. O mecanismo para a geração das perturbações variará entre classes de modelos. O modelo de Starobinsky, tratado no Referencial de Jordan – ou seja, como uma teoria  $f(R)$  – requer o estudo de perturbações nessa teoria modificada para a gravitação [42, 43, 44]. Perturbações em Relatividade Geral são necessárias tanto para o caso de Starobinsky no Referencial de Einstein quanto para modelos gerais de campo escalar minimamente acoplado à gravitação.

A criação e evolução das perturbações cosmológicas ao longo da história do universo compreende diferentes escalas de energia e comprimento. É necessário obter uma teoria

quântica para descrevê-las em sua criação, quando a escala de energia é maior. Nesse regime, tanto a métrica do espaço-tempo quanto os campos de matéria envolvidos sofrem flutuações a nível quântico<sup>1</sup>[31]. O framework da gravitação (seja relatividade geral, ou terias  $f(R)$ ) é o único utilizado no regime de fluido relativístico ou para qualquer fluido com escala acima da escala de Hubble. É possível ainda utilizar apenas mecânica clássica Newtoniana, quando trata-se de escala inferior à de Hubble. Este é o regime predominante na maior parte da história do universo, de amplificação das perturbações para formação das estruturas de larga escala.

As próximas seções visam o detalhamento da teoria de perturbações cosmológicas necessário para o trabalho desenvolvido. O formalismo e raciocínio empregados para o contexto da Relatividade Geral são imediatamente traduzidos na sequência para teorias  $f(R)$ . Por último, a conexão com as observações é explicitada, focando-se na obtenção dos espectros das perturbações. O efeito Sachs-Wolfe é brevemente comentado e as análises do WMAP/Planck são revisadas.

## 2.2 Perturbações Newtonianas

Apesar do foco desta seção ser dado para as perturbações cosmológicas de escala 'super-Hubble' e sua criação a nível quântico, deve-se abrir parênteses para quando as perturbações podem ser descritas pela mecânica clássica. A teoria Newtoniana é aplicada para a evolução das flutuações de densidade em um fundo expandindo ou não<sup>2</sup>, na escala 'sub-Hubble', cenário da evolução de galáxias e clusters. Em outras palavras, esta teoria é utilizada para explicar como as 'sementes cósmicas' – mencionadas nas resoluções do paradigma de Big-Bang quente – tornam-se as estruturas de larga escala.

Pequenas heterogeneidades, tais como as flutuações de densidade, são amplificadas por simples instabilidade gravitacional. Matéria atrai matéria, as flutuações crescem e as estruturas heterogêneas como as galáxias são formadas. A primeira descrição deste fenômeno foi feita pelo Sir James Jeans, que é homenageado através do nome, instabilidade de Jeans. O tipo de perturbação responsável por tais estruturas é denominado perturbação adiabática[31]. Serão as perturbações adiabáticas as estudadas ao longo deste capítulo.

---

<sup>1</sup>Entretanto uma teoria quântica para a gravitação não é necessária, bastando a Relatividade Geral.

<sup>2</sup>Desde que as perturbações tenham comprimento de onda menor que o Horizonte de Partículas, efeitos de Relatividade Geral são desprezíveis

Certas conclusões podem ser obtidas no contexto Newtoniano. Perturbações adiabáticas de matéria crescerão caso possuam comprimento de onda maior que o de Jeans, cujo número de onda é dado por:

$$k_J = \left( \frac{4\pi G \rho_0}{c_s^2} \right)^{1/2} \quad (2.1)$$

O comprimento de Jeans indica a escala até onde efeitos da pressão hidrodinâmica pode reagir frente a mudanças no potencial gravitacional e dominar a dinâmica[31]. A gravitação domina para comprimentos de onda superiores ao de Jeans, por isto as perturbações crescem.

Para a fase de dominação da radiação,  $\lambda_J \approx H_p$ , enquanto para a fase de dominação de matéria  $\lambda_J \rightarrow 0$ . Sendo assim, as flutuações de densidade, que possuem  $\lambda \ll H_p$  só crescerão eficientemente durante a fase de dominação de matéria. Não entrando em maiores detalhes, o 'damping' das perturbações devido à radiação é o chamado Efeito Meszaros. Todavia, apesar de eficiente, a amplitude das perturbações cresce apenas proporcionalmente ao fator de escala[31].

Conclusões sobre a importância da matéria escura para a evolução do universo também podem ser obtidas. Um universo sem matéria escura não-bariônica proporcionaria anisotropias na CMB aproximadamente 30x maiores que o observado[31]. Não só isso, mas a presença de matéria escura ajuda a solucionar o problema descrito anteriormente, quanto ao espectro inicial das perturbações adiabáticas. Caso o valor de sua amplitude seja de fato o favorecido por observações, as heterogeneidades atuais são possíveis caso aproximadamente 30% da densidade crítica do universo seja matéria escura[45].

Conforme mencionado de início, o regime Newtoniano é válido apenas para escalas abaixo da escala de Hubble. Acima, onde é necessário o uso de Relatividade Geral, teremos a dinâmica dominada pelas perturbações métricas, foco das próximas duas seções. Primeiramente será introduzida a caracterização das perturbações da métrica em graus de liberdade. Em seguida, equações de movimento para as perturbações, em especial para quando a componente material – responsável pelo tensor de energia-momento – for um campo escalar. Para teorias  $f(R)$  haverá um grau de liberdade a mais na métrica perturbada [42], fato que nos leva a considerar essas teorias separadamente.

Ao longo de ambas as seções, os respectivos processos de quantização das perturbações serão apresentados. Sendo esses processos relativamente padronizados, maiores detalhes

ficarão restritos ao caso da Relatividade Geral.

## 2.3 Perturbações Cosmológicas na R.G.

Para entender o processo de origem das perturbações detalhadas na seção anterior é preciso ir para o regime quântico. Apesar de não possuímos uma descrição quântica para a gravitação, devemos começar com as perturbações métricas. Em seguida, as perturbações em campos escalares são detalhadas, visto que estes são os campos utilizados para teorias inflacionárias. Na descrição efetiva do fluido material do modelo de ricochete explorada nessa dissertação, um campo escalar também será utilizado.

Tanto as perturbações nos campos quanto na métrica serão esticadas para além da escala de Hubble nos modelos de universo primordial em questão – na inflação devido ao crescimento exponencial do universo, já no ricochete graças a contração do horizonte. No regime inflacionário, as perturbações congelam ao passarem dessa escala i.e. não evoluem. Desta forma elas preservam suas características durante a inflação. A observação destas perturbações hoje em dia oferece uma janela pro universo primordial.

Ambas as perturbações (na matéria e as métricas) estão intimamente ligadas. Perturbação no campo induz perturbação na métrica – modificação da fonte das equações de Einstein – enquanto por sua vez perturbações métricas modificam a equação de Klein-Gordon [28]. Essa backreaction demonstra a interconectividade entre as duas. Tanto para a componente material quanto para a métrica, as perturbações serão lineares.

Por estarmos no contexto da Relatividade Geral, não há sistema de coordenadas preferível para o estudo das perturbações[45, 28]. A liberdade de calibre existente provoca o aparecimento de perturbações fictícias em determinados sistemas de coordenadas. Serão utilizados o calibre longitudinal e uma abordagem invariante de calibre.

Ao longo da seção, a escala referente ao momento de cruzamento do horizonte de partículas será definida como  $k_* = aH$ . O formalismo é desenvolvido para universos inflacionários e pode ser imediatamente transposto para modelos com ricochete<sup>3</sup>.

---

<sup>3</sup>Algumas diferenças, como os modos de perturbação que são dominantes, serão abordadas individualmente ao longo do capítulo.

### 2.3.1 Perturbações Métricas

A métrica de FLRW perturbada pode ser decomposta de acordo com  $SO(3)$ . Os 6 graus de liberdade da métrica serão então separados em: escalares (spin 0, 2 g.d.l), vetoriais (spin 1, 2 g.d.l) e tensoriais (spin 2, 2 g.d.l). Perturbações vetoriais não serão tratadas porque na inflação não há campos de velocidade rotacional, que seriam os responsáveis por elas [28]. Por isso, decairiam rapidamente com a expansão do universo [45]. As perturbações tensoriais são as ondas gravitacionais de origem primordial, enquanto as escalares estão intimamente relacionadas a flutuações de densidade. Como o tratamento é feito em regime linear, ambas evoluem independentemente e serão estudadas separadamente.

### Perturbações Escalares

Perturbando a métrica de FLRW nos graus de liberdade escalares, obtém-se:

$$ds^2 = a^2 \left[ (1 + 2\phi) d\eta^2 + 2B_{,i} d\eta dx^i - ((1 - 2\psi) \delta_{ij} - 2E_{,ij}) dx^i dx^j \right] \quad (2.2)$$

As 4 funções escalares utilizadas,  $\phi$ ,  $B$ ,  $\psi$  e  $E$  contabilizam 4 graus de liberdade. Devido a transformações de coordenada, pode-se diminuir este número para o previamente dito, restando apenas 2 funções[45]. Estas serão conhecidas como potenciais de Bardeen.

Uma transformação de coordenada geral será do tipo  $x^\alpha \rightarrow \tilde{x}^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha$ , onde  $\xi^\alpha$  são funções infinitesimais. Sob efeito dela, os escalares de 2.2 transformam-se com:

$$\phi \rightarrow \tilde{\phi} = \phi - \frac{1}{a} (a\xi^0) \quad (2.3)$$

$$\psi \rightarrow \tilde{\psi} = \psi + \frac{a'}{a} \xi^0 \quad (2.4)$$

$$B \rightarrow \tilde{B} = B + \bar{\xi}' - \xi^0 \quad (2.5)$$

$$E \rightarrow \tilde{E} = E + \bar{\xi} \quad (2.6)$$

Onde  $\xi^\alpha = (\xi^0, \xi^i) = (\xi^0, \xi_\perp^i + \bar{\xi}^i)$ , sendo  $\bar{\xi}$  um escalar e  $\xi_\perp^i$  um vetor que não possui divergência. Pode-se fazer a redução de 4 para 2 funções porque apenas  $\bar{\xi}$  e  $\xi^0$  participam das transformações 2.3[45]. Podemos construir outras funções invariantes de calibre usando combinações das funções acima. Desta forma os potenciais de Bardeen são definidos como:

$$\Phi \equiv \phi - \frac{1}{a} [a (B - E')] \quad (2.7)$$

$$\Psi \equiv \psi + \frac{a'}{a} (B - E') \quad (2.8)$$

Em um universo plano e em hipersuperfícies à  $\eta$  constante, a curvatura espacial intrínseca é dada por:

$${}^{(3)}R = \frac{4}{a^2} \nabla^2 \psi \quad (2.9)$$

Devido a essa relação, a quantidade  $\psi$  é conhecida como perturbação de curvatura [28]. Será a partir dela que quantidades relevantes serão construídas.

## Perturbações Tensoriais

O elemento de linha para a componente tensorial é:

$$ds^2 = a^2 \left[ d\eta^2 - (\delta_{ij} - h_{ij}) dx^i dx^j \right] \quad (2.10)$$

Transformações de coordenada não possuem g.d.l tensorial, fazendo assim as perturbações tensoriais serem invariantes de calibre. Elas possuem de início apenas 2 graus de liberdade. Isso acontece devido ao fato de  $h_{ij}$  ter traço nulo e ser transversa, reduzindo seus g.d.l de 6 para 2, que são as polarizações das ondas gravitacionais.

### 2.3.2 Perturbações de Matéria

A contribuição dominante ao tensor de momento-energia durante a inflação é proveniente do inflaton. Após o período inflacionário, teremos a separação de  $T_{\mu\nu}$  em suas componentes de densidade, pressão (escalares) e estresse anisotrópico (tensorial). Conforme comentado, são as perturbações nessas quantidades que induzem a formação das perturbações métricas, através das Equações de Einstein – evidentemente, durante a inflação o que importará serão as perturbações no inflaton.

Durante a inflação, estresse anisotrópico não é induzido, que é uma outra justificativa para as perturbações vetoriais não serem tratadas nessa dissertação (porque são induzidas

por componente do estresse anisotrópico). Também por isso as equações referentes às perturbações tensoriais não possuem termo de fonte.

### 2.3.3 Invariância de Calibre

Com exceção das componentes tensoriais e dos potenciais de Bardeen, todas as perturbações mencionadas ao longo das seções anteriores são dependentes do calibre escolhido. Diferentes folheamentos acarretam na definição de diferentes quantidades invariantes de calibre.

No folheamento comóvel, onde observadores não medem fluxo de energia – ou seja, onde o campo  $\varphi$  é constante no espaço – a perturbação de curvatura se transforma de acordo com a mudança no folheamento. Por sua construção, seu resultado é invariante de calibre, a denominada perturbação de curvatura conforme  $\mathcal{R}$ <sup>4</sup>[28]:

$$\psi \rightarrow \psi_{\text{com.}} = \psi + \mathcal{H}\delta\tau = \psi + \mathcal{H}\frac{\delta\varphi}{\varphi'} \quad (2.11)$$

$$\mathcal{R} = \psi + \mathcal{H}\frac{\delta\varphi}{\varphi'} = \psi|_{\delta\varphi=0} \quad (2.12)$$

$\mathcal{R}$  é o potencial gravitacional no folheamento em questão.

Outro folheamento importante é aquele onde não há perturbações de densidade,  $\delta\rho = 0$ . Assim como no comóvel, a transformação da perturbação de curvatura será uma quantidade invariante de calibre, que representará o potencial gravitacional no folheamento[28]:

$$\zeta = \psi + \mathcal{H}\frac{\delta\rho}{\rho'} = \psi|_{\delta\rho=0} \quad (2.13)$$

Por último, existe ainda o calibre plano, definido no folheamento onde  $\psi = 0$ . A quantidade invariante de calibre será a perturbação no inflaton em folheamentos planos:

$$Q = \delta\varphi + \frac{\varphi'}{\mathcal{H}}\psi \quad (2.14)$$

Em escalas de super-horizonte,  $\mathcal{R} = \zeta$ . Este resultado pode ser concluído através das equações de Einstein linearizadas [46], que os relacionam através de:

---

<sup>4</sup>Em 2.11  $\delta\tau$  é o deslocamento temporal para sair de um folheamento genérico para o comóvel.

$$-\zeta = \mathcal{R} + \frac{k^2}{k_*} \frac{2\rho}{3(\rho+p)} \Psi \quad (2.15)$$

Ambas serão iguais também durante o regime inflacionário. Outro resultado crucial para perturbações adiabáticas é a conservação de  $\mathcal{R}$  (logo,  $\zeta$ ) em escalas de super-horizonte [47, 48]. Em outras palavras, as perturbações produzidas durante a inflação não irão evoluir após crescerem acima da escala de Hubble. Esse é o chamado congelamento das perturbações. Sua evolução só acontecerá ao longo da fase de dominação de radiação/matéria quando reentram no horizonte. Desta maneira todas as quantidades calculadas o serão no momento de cruzamento do horizonte, quando as perturbações possuem frequência  $k_* = aH$ .

Quando as perturbações reentram no horizonte elas carregam informação diretamente do período inflacionário. Conforme detalhado em 2.6 é devido a este fato que a CMB possui registros do universo primordial.

## 2.4 Flutuações de campo escalar

Os campos de matéria, ou seja, o tensor de energia-momento e suas fontes, possuirão flutuações. Para o caso da inflação em slow-roll, a componente dominante será o campo escalar massivo responsável pela inflação, o inflaton <sup>5</sup>. O inflaton respeitará a equação de Klein-Gordon em universo em expansão:

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} - \frac{\nabla^2 \varphi}{a^2} + V_{,\varphi} = 0 \quad (2.16)$$

As flutuações do inflaton podem ser expandidas em modos de Fourier:

$$\delta\varphi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \delta\varphi_{\mathbf{k}}(t) \quad (2.17)$$

Que por sua vez, vão obedecer a equação de Klein-Gordon também

---

<sup>5</sup>Maiores detalhes no capítulo "Universo Primordial".

$$\delta\ddot{\varphi} + 3H\delta\dot{\varphi} + \frac{k^2\delta\varphi}{a^2} + V_{,\varphi} = 0 \quad (2.18)$$

Podemos também perturbar a equação de Klein-Gordon assim como a métrica foi perturbada. Este procedimento [28] leva a:

$$\delta\varphi'' + 2\frac{a'}{a}\delta\varphi' - \partial_i\partial^i\delta\varphi - \phi'\varphi' - 3\psi'\phi' - \partial_i\partial^i B\varphi' = -\delta\varphi\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}a^2 - 2\varphi\frac{\partial V}{\partial\varphi} \quad (2.19)$$

### 2.4.1 Perturbações Quânticas

A produção a nível quântico das perturbações cosmológicas escalares é preferencialmente estudada no calibre comóvel. Perturbações tensoriais já são invariantes de calibre, podendo ser estudadas diretamente. Portanto, para a componente escalar, pode-se substituir 2.12 em 2.2 e desconsiderar-se as perturbações  $B$  e  $\phi$  por estarem relacionadas a  $\mathcal{R}$  por equações puramente de vínculo. Expande-se a ação da relatividade geral acoplada minimamente a campo escalar<sup>6</sup> em 2ª ordem em  $\mathcal{R}$ [47]:

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ R - (\nabla\varphi)^2 - 2V(\varphi) \right] \quad (2.20)$$

$$S_{(2)} = \frac{1}{2} \int d^4x a^3 \frac{\dot{\varphi}^2}{H^2} \left[ \dot{\mathcal{R}}^2 - \frac{(\partial_i\mathcal{R})^2}{a^2} \right] \quad (2.21)$$

Duas definições de importância ao longo da dissertação são a variável de Mukhanov  $v$  e a função  $z_s$ :

$$v = z_s \mathcal{R} \quad (2.22)$$

$$z_s = a \frac{\dot{\varphi}}{H} \quad (2.23)$$

Utilizando-as em 2.21 e passando essa ação para o tempo conforme:

---

<sup>6</sup>Se tratando de regime inflacionário em slow-roll o termo cinético é desconsiderado.

$$S_{(2)} = \frac{1}{2} \int d\eta d^3x \left[ v'^2 + (\partial_i v)^2 + \frac{z_s''}{z_s} v^2 \right] \quad (2.24)$$

Após inserção da expansão de Fourier de  $v$  na ação acima, obtém-se a equação de Mukhanov-Sasaki após variação da mesma:

$$v_{\mathbf{k}}'' + \left( k^2 - \frac{z_s''}{z_s} \right) v_{\mathbf{k}} = 0 \quad (2.25)$$

A equação 2.25 é a mesma equação de um oscilador harmônico paramétrico. A dependência temporal provém do termo de massa

$$M_{MS-s} = \frac{z_s''}{z_s}, \quad (2.26)$$

porque  $z_s$  2.23 depende da dinâmica inflacionária<sup>7</sup>. Esse termo de massa 2.26 será a fonte da dualidade de Wands [3], cerne deste projeto.

A função  $z$  será generalizada na seção 2.5, sendo sua forma 2.23 específica para o caso de campo escalar minimamente acoplado à gravitação de Einstein.

Para quantizar o campo  $v$  utiliza-se quantização canônica[47]. O operador  $\hat{v}$  é definido como:

$$\hat{v} = \int \frac{d\mathbf{k}^3}{(2\pi)^3} \left[ v_k(\eta) \hat{a}_{\mathbf{k}} \exp^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + v_k^*(\eta) \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \exp^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right] \quad (2.27)$$

É necessário estabelecer as condições de fronteira para o sistema[47]. Uma provém da normalização dos modos<sup>8</sup>:

$$\langle v_k, v'_k \rangle = \frac{i}{\hbar} \left( v_k^* v'_k - v_k^{*'} v_k \right) = 1 \quad (2.28)$$

A outra condição de fronteira é a escolha do vácuo. Para perturbações escalares o vácuo escolhido é o chamado vácuo de Bunch-Davies[49]. O vácuo de Bunch-Davies é uma solução da equação 2.25 para o limite  $\eta \rightarrow -\infty$ , ou seja, no passado remoto. Neste caso temos  $k \gg 1/|\eta| = 1/aH$  e portanto estamos dentro do Horizonte de Partículas. Desta forma 2.25 torna-se:

<sup>7</sup>Ou, no caso do ricochete, na dinâmica do universo em contração.

<sup>8</sup>Os operadores de aniquilação e criação satisfazem as relações de comutação canônicas devido a essa condição.

$$v_{\mathbf{k}}'' + k^2 v_{\mathbf{k}} = 0 \quad (2.29)$$

No limite trabalhado, a solução de 2.29 estabelece o vácuo de Bunch-Davies como:

$$\lim_{\eta \rightarrow -\infty} v_{\mathbf{k}} \propto \frac{\exp^{-ik\eta}}{\sqrt{2k}} \quad (2.30)$$

Um caso simples e que será citado repetidas vezes é o limite para o regime inflacionário, a expansão de de Sitter <sup>9</sup>. Nesse caso  $z''/z = a''/a$  e portanto:

$$v_{\mathbf{k}}'' + \left(k^2 - \frac{2}{\eta^2}\right) v_{\mathbf{k}} = 0 \quad (2.31)$$

Sua solução, respeitando as condições de contorno 2.28 e 2.30 será:

$$v_{\mathbf{k}} = \frac{\exp^{-ik\eta}}{\sqrt{2k}} \left(1 - \frac{i}{k\eta}\right) \quad (2.32)$$

Para as perturbações tensoriais,  $h_{ij}$ , a expansão em segunda ordem de 2.20 retorna:

$$S_{(2)} = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{8} \int d\eta d^3x a^2 \left[ (h'_{ij})^2 - (\partial_l h_{ij})^2 \right] \quad (2.33)$$

Após expansão em Fourier dos modos de polarização,  $h_{\mathbf{k}}^s$  e definição da variável de Mukhanov  $v_{\mathbf{k}}^s = aM_{\text{Pl}}h_{\mathbf{k}}^s/2$ , obtém-se:

$$S_{(2)} = \sum_s \frac{1}{2} \int d\eta d^3x \left[ (v_{\mathbf{k}}^{s'})^2 - \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right) (v_{\mathbf{k}}^s)^2 \right] \quad (2.34)$$

A equação de Mukhanov-Sasaki resultante para cada polarização e seu termo de massa são:

$$v_{\mathbf{k}}^{s''} + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right) v_{\mathbf{k}}^s = 0 \quad (2.35)$$

$$M_{MS-t} = \frac{a''}{a} \quad (2.36)$$

Novamente deve-se lembrar que o termo de massa mudará para perturbações em  $f(R)$ .

Para o caso de de Sitter, temos que os termos de massa das equações de Mukhanov-

---

<sup>9</sup>Para o caso de quasi-de Sitter recomenda-se [47]

Sasaki são iguais para escalares e tensoriais, tendo assim equações idênticas. Portanto o resultado de 2.32 se mantém para cada polarização.

## 2.4.2 Estatística de Perturbações Cosmológicas

A conexão entre as perturbações e observações por meio da CMB é dada através do estudo de suas funções de correlação. Para modelos inflacionários e de ricochete em geral a mais importante medida estatística é o espectro de potências, de  $\mathcal{R}$  e das perturbações tensoriais. O espectro de potências  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$  é calculado a partir de sua função de correlação de dois pontos. Pela notação seguida ao longo da dissertação[47], temos:

$$\langle \mathcal{R}_{\mathbf{k}} \mathcal{R}_{\mathbf{k}'} \rangle = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_{\mathcal{R}} \quad (2.37)$$

$$\rightarrow \langle |\mathcal{R}|^2 \rangle = \int \frac{d^3k}{2\pi^3} |\mathcal{R}_{\mathbf{k}}|^2 = \int \frac{dk}{k} \frac{k^3}{2\pi^2} |\mathcal{R}_{\mathbf{k}}|^2 \quad (2.38)$$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \frac{k^3}{2\pi^2} |\mathcal{R}|^2 \quad (2.39)$$

Utilizando os resultados da seção anterior, podemos obter o espectro de potência para um universo inflacionário que é na verdade quasi-de Sitter. O regime exatamente de Sitter produz um espectro de potência invariante de escala i.e. independente de  $k$ . O regime de quasi-de Sitter resultará em  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$  dependente de escala devido a diferença de tempo entre as saídas dos modos. Diferentes modos cruzaram o horizonte de partículas à diferentes valores de  $aH$ . Lembrando que todas as quantidades são calculadas no cruzamento do horizonte, teremos que essas quantidades vão evoluir conforme  $aH$  evolui através dos diferentes valores de  $k$ . A expressão do espectro de potência para a perturbação de curvatura comóvel será:

$$\langle \hat{\mathcal{R}}_{\mathbf{k}} \hat{\mathcal{R}}_{\mathbf{k}'} \rangle = \frac{H^2}{\dot{\phi}^2} \langle \hat{v}_{\mathbf{k}} \hat{v}_{\mathbf{k}'} \rangle = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \frac{H^2}{\dot{\phi}^2} \frac{H^2}{2k^3} (1 + k^2 \eta^2) \quad (2.40)$$

$$\langle |\mathcal{R}|^2 \rangle = \frac{H^2}{2k^3} \frac{H^2}{\dot{\phi}^2}, \quad (2.41)$$

onde foram utilizadas a condição de perturbação em super-horizonte,  $|k\eta| \ll 1$  e a

expressão para o fator de escala em de Sitter,  $a = -1/H\eta$ . Sendo assim, por 2.39:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \frac{H^2}{\dot{\varphi}^2} \quad (2.42)$$

A abordagem desta dissertação é focada na fenomenologia dos modelos. Portanto não será explicitamente o cálculo dos espectros de potência que será importante. Será preciso calcular as devidas quantidades relacionadas a observações. Isso será feito a partir dos índices espectrais, que mostram a dependência do espectro de potências escalar com a escala (ou seja, com a frequência  $k$ ):

$$n_{\mathcal{R}} - 1 = \frac{d \log \mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{d \log k} \quad (2.43)$$

$$\rightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{R}} = A_s \left(\frac{k}{k_*}\right)^{n_s-1} \quad (2.44)$$

Para perturbações tensoriais, parte-se diretamente dos modos de polarização[47]:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{T}}(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} \sum_{\lambda} |h_{\mathbf{k}}|^2 = 8 \frac{k^3}{2\pi^2} |v_{\mathbf{k}}|^2 = \frac{8}{M_{\text{Pl}}^2} \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \quad (2.45)$$

$$n_T = \frac{d \log \mathcal{P}_{\mathcal{T}}}{d \log k} \quad (2.46)$$

$$\rightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{T}} = A_t \left(\frac{k}{k_*}\right)^{n_t} \quad (2.47)$$

Entretando, a quantidade mais utilizada para descrever perturbações tensoriais é a razão tensorial-escalar entre os espectros de potência:

$$r = \mathcal{P}_{\mathcal{T}}/\mathcal{P}_{\mathcal{R}} \quad (2.48)$$

Conforme detalhado no capítulo seguinte, para modelos inflacionários, é possível reescrever essas quantidades em função dos chamados Parâmetros de Slow Roll (PSR). A obtenção dos índices espectrais e de  $r$  é imediata após o cálculo dos PSR de um dado modelo.

## 2.5 Perturbações em teorias $f(R)$

Teorias  $f(R)$  possuem um grau de liberdade escalar a mais se comparadas com a Relatividade Geral, sem adição tensorial ou vetorial [42]. Por sua equivalência com teorias escalares-tensoriais têm-se que este grau de liberdade propaga-se com a velocidade da luz, por não ser massivo. Apesar desta diferença, é apenas no contexto de teorias de perturbação que seu efeito é evidenciado. Para a dinâmica de fundo há maneiras de reproduzir a evolução do modelo  $\Lambda$ CDM.

O elemento de linha 2.2 ainda é válido nesse caso. O grau de liberdade escalar adicional não se encontra na métrica. Uma ação geral que inclui teorias  $f(R)$  é [42, 50]:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2\kappa^2} f(R, \varphi) - \frac{1}{2} \omega(\varphi) \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - V(\varphi) \right] \quad (2.49)$$

Quando  $f(R, \varphi) = f(R)$  e  $\varphi = 0$ ,  $\omega = 1$ , recupera-se teorias  $f(R)$  sem campo escalar minimamente acoplado (caso do modelo de Starobinsky [9]). Esse será o caso ao longo da seção.

O grau de liberdade escalar a mais é  $F = \partial f / \partial R$ . Ele será descrito por  $F = \bar{F} + \delta F$ , onde  $\bar{F}$  é seu valor de fundo e  $\delta F$  sua perturbação. É possível então obter as equações de Einstein perturbadas em primeira ordem. Suas expressões são extensas e complicadas, não sendo reproduzidas aqui mas podem ser encontradas nas referências [42, 43, 44]

Todas as quantidades invariantes de calibre descritas em 2.3.3 continuam valendo. Agora, tem-se ainda a variação da perturbação  $\delta F$  e uma quantidade invariante de calibre associada a ela:

$$\delta F = F - \dot{\bar{F}} \xi^0 \quad (2.50)$$

$$\mathcal{R}_{\delta F} = \psi - \frac{H}{\dot{\bar{F}}} \delta F \quad (2.51)$$

Repetindo o procedimento anterior, é possível escolher um calibre no qual  $\delta F = 0$ . Essa escolha fixa o calibre, portanto não há g.d.l. extras. Nesse caso, que é o contexto trabalhado,  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\delta F}$ .

### 2.5.1 Perturbações Quânticas em $f(R)$

A ação expandida em segunda ordem em  $\mathcal{R}$ , através de 2.49 é [42]:

$$S_{(2)} = \int dt d^3x a^3 Q_s \left[ \dot{\mathcal{R}}^2 - \frac{(\partial_i \mathcal{R})^2}{a^2} \right] \quad (2.52)$$

$$Q_s = \frac{3\dot{F}^2/2\kappa^2 F}{\left[ H + \left( \frac{\dot{F}}{2F} \right) \right]^2} \quad (2.53)$$

Reanalizando 2.21 percebe-se que a função  $z_s$  está multiplicando o termo entre colchetes da mesma forma que a função  $Q_s$ . Portanto não surpreende o fato de, ao realizar-se a variação da ação 2.52 obtenha-se:

$$u_{\mathbf{k}}'' + \left( k^2 - \frac{z_f''}{z_f} \right) u_{\mathbf{k}} = 0 \quad (2.54)$$

$$u_{\mathbf{k}} = z_f \mathcal{R}_{\mathbf{k}} \quad (2.55)$$

$$z_f = a\sqrt{Q_s} \quad (2.56)$$

Conforme prometido, a função  $z_s$  é obtida apenas no caso da Relatividade Geral, onde  $F = 1$  e  $Q_s = \dot{\varphi}^2/H^2$ . Podemos identificar o novo termo de massa da equação de Mukhanov-Sasaki:

$$M_{MS-f} = \frac{z_f''}{z_f} \quad (2.57)$$

Novamente este termo dependerá da dinâmica do fundo.

O processo de quantização de  $u$  é idêntico ao realizado em 2.4.1, ou seja, mesmos limites assintóticos, mesma utilização do vácuo de Bunch-Davies. A solução para o caso de de Sitter será similar, com a diferença pela presença de  $Q_s$ , sendo uma generalização do resultado anterior. Portanto, ao calcular-se o espectro de potências escalar, vê-se que ele é dependente de  $Q_s$  [42]:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \frac{k^3}{2\pi^2} |\mathcal{R}|^2 = \frac{k^3}{2\pi^2} \left| \frac{u}{z_f} \right|^2 \quad (2.58)$$

$$= \frac{1}{Q_s} \left( \frac{H}{2\pi} \right)^2 \quad (2.59)$$

Para as perturbações tensoriais o cálculo é completamente análogo. Não há graus de liberdade extras, então as definições das duas polarizações permanecem idênticas ao caso 2.4.1. Assim como no caso escalar, tem-se um termo adicional na ação de  $f(R)$  perturbada, acarretando numa nova definição de  $u_\lambda$ :

$$S_{(2)} = 2.M_{\text{Pl}}^2 \int d\eta dx^3 \frac{a^2}{4} F \left[ (h'_{ij})^2 - (\partial_l h_{ij})^2 \right] \quad (2.60)$$

$$u''_\lambda + \left( k^2 - \frac{z''_t}{z_t} \right) u_\lambda = 0 \quad (2.61)$$

$$u_\lambda = M_{\text{Pl}} z_t h_\lambda \quad (2.62)$$

$$z_t = a\sqrt{F} \quad (2.63)$$

Novamente obtém-se um termo de massa diferente do caso da Relatividade Geral.

## 2.6 Observações

### Radiação Cósmica de Fundo

Concluído o arcabouço teórico para o entendimento da teoria de perturbações cosmológicas, é interessante prosseguir e entender como as quantidades calculadas teoricamente podem ser comparadas com as observações.

Descoberta involuntariamente por Penzias e Wilson, a Radiação Cósmica de Fundo é onde pode-se observar perturbações cosmológicas da forma direta. Formada durante os últimos estágios da Recombinação<sup>10</sup>, a CMB possui seu pico de frequência na faixa do micro-ondas (por isso *Cosmic Microwave Background*) e possui espectro de corpo negro à  $2.72K$ <sup>11</sup>. Todavia a CMB não possui a mesma temperatura em toda sua extensão

<sup>10</sup>Na região chamada de *Last Scattering Surface*, *LSS*

<sup>11</sup>Fato esse mencionado na seção sobre o Problema do Horizonte, por regiões da CMB possuírem a mesma temperatura mesmo não tendo tido, a priori, contato causal

angular. Suas flutuações de temperatura são causadas por distribuição de matéria, as sementes cósmicas, oriundas de perturbações de curvatura produzidas na inflação ou no ricochete.

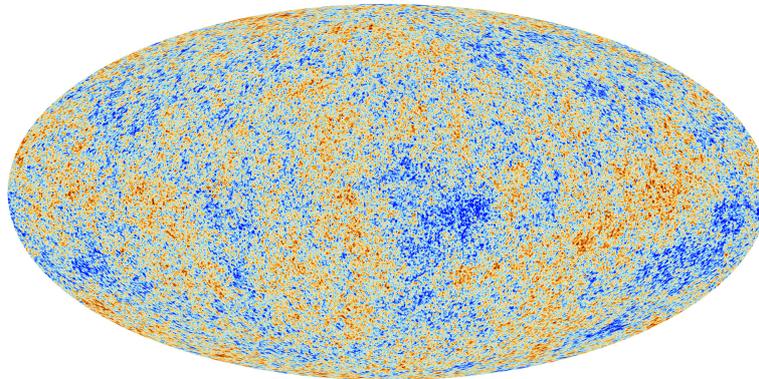


Figura 2.1: Flutuações de temperatura da CMB - Foto: *ESA e Planck Collaboration*

As perturbações cosmológicas responsáveis pelas flutuações de temperatura na CMB haviam tido escala super-Hubble até o período de transição entre a dominação de radiação e matéria. Quando reentraram, evoluíram conforme a teoria de Jeans estabelecida acima (e, portanto, só cresceram durante a fase de dominação de matéria)[47]. Perturbações que reentraram o Horizonte de Partículas durante a fase de radiação e antes da recombinação são responsáveis pelas anisotropias de pequenas escalas angulares <sup>12</sup>. Elas modificam o espectro primordial por terem tido tempo para evoluir. Já as perturbações que adentraram o Horizonte depois da recombinação pouco tempo tiveram até a CMB terminar de se formar, mantendo-se como haviam sido produzidas na inflação/ricochete.

## Efeito Sachs-Wolfe

O processo de criação de flutuações na temperatura devido às perturbações de densidade é conhecido como efeito Sachs-Wolfe. Ele é dominante para as perturbações em grande escala angular, pós-recombinação. A partir da equação de Boltzmann para flutuações de temperatura [47], obtém-se:

$$\frac{\delta T}{T} + \Phi = cte. \quad (2.64)$$

Desconsiderando o termo de monopolo – por ser puro calibre – na direção  $l^i$ , teremos

---

<sup>12</sup>Entretanto outros fenômenos contribuem mais para as anisotropias nessa escala, como flutuações intrínsecas da radiação

que a flutuação de temperatura fracional observada agora pode ser dividida como:

$$\frac{\delta T}{T} = \left( \frac{\delta T}{T} \right)_{LS} + \Phi_{LS} \quad (2.65)$$

As flutuações na superfície de último espalhamento (primeiro termo no lado direito) podem ser obtidas em função das flutuações da densidade de energia dos fótons  $\delta_\gamma$ . Fazendo os devidos matchings para obtenção de  $\delta_\gamma$  (comparando os tensores de energia-momento hidrodinâmico e cinético), a expansão de Fourier de 2.65 é [45]:

$$\frac{\delta T}{T} = \int \left[ \left( \Phi + \frac{\delta_\gamma}{4} \right)_{\mathbf{k}} - \frac{3\delta_\gamma'}{4k^2} \frac{\partial}{\partial \eta_0} \right]_{LS} \exp^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{l}(\eta_{LS} - \eta_0))} \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \quad (2.66)$$

Por sua vez,  $\delta_\gamma$  também pode ser escrita em função do potencial gravitacional:

$$\delta_\gamma \simeq -\frac{8}{3}\Phi_k \ ; \ \delta_\gamma' = 0 \quad (2.67)$$

$$\Rightarrow \frac{\delta T}{T} \simeq \frac{1}{3}\Phi_{LS} = \frac{1}{5}\mathcal{R}_{LS} \quad (2.68)$$

Sendo assim, 2.68 é a expressão que relaciona as flutuações de temperatura na CMB com as perturbações de curvatura<sup>13</sup>.

## Espectro de Potência Angular

As flutuações de temperatura da CMB podem ser expressas em termos de momentos de multipolo (partindo de sua correlação de 2-pontos, ou autocorrelação TT). É a partir deste espectro de potências angular 2.2 que é possível calcular a amplitude e o índice espectral das perturbações escalares,  $A_s$  e  $n_s$ . A sua forma precisa, plotada em 2.2, dependerá dos parâmetros cosmológicos (como  $\Omega_\Lambda$ , etc.) e de  $A_s$  e  $n_s$ .

É possível re-expressar as anisotropias na temperatura em termos de harmônicos esféricos[47]:

---

<sup>13</sup>Desconsiderado os efeitos de Sachs-Wolfe integrados e a influência da densidade de energia dos fótons na curvatura.

$$\frac{\delta T(\theta, \phi)}{T} = \sum_{l,m} a_{l,m} Y_{l,m}(\theta, \phi) \quad (2.69)$$

$$\langle a_{l'm'}^* a_{lm} \rangle = \delta_{l'l'} \delta_{m'm} C_l^{TT} \Leftrightarrow C_l^{TT} = \frac{1}{2l+1} \langle a_{lm}^* a_{lm} \rangle \quad (2.70)$$

$$l(l+1)C_l^{TT} \propto \left( \frac{\delta T(\theta, \phi)}{T} \right)^2 \quad (2.71)$$

Para grandes escalas angulares,  $l \ll 200$ , um espectro invariante de escala  $A_s$  ( $n_s = 1$ ) tem o plateau:

$$l(l+1)C_l^{TT} \simeq \frac{9A_s}{100\pi} \quad (2.72)$$

Apesar o espectro de potência não ser verdadeiramente invariante de escala, conforme explicitado em 2.4.2, o resultado acima pode ser observado em 2.2 <sup>14</sup>.

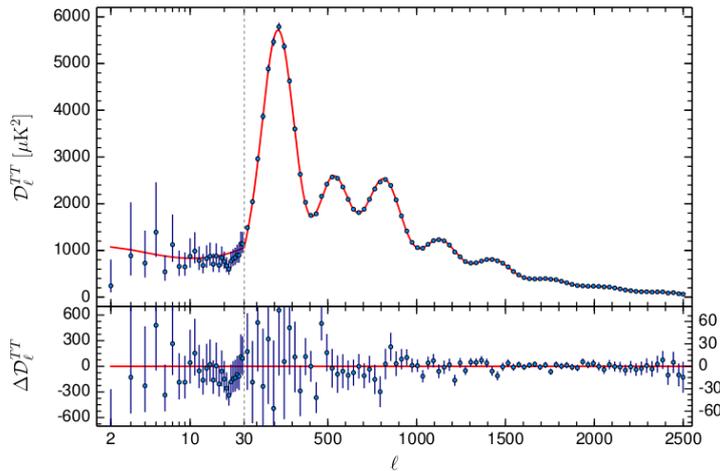


Figura 2.2: Espectro de potência angular da CMB[1]

Para pequenas escalas angulares, como as perturbações evoluem, o cálculo de seus momentos de diplo  $C_l$  é deveras mais complicado e requer o cálculo de funções de transferência [47, 45]. Calculando-os, nota-se a presença de picos em  $l(l+1)C_l$ , os chamados picos acústicos. A previamente comentada determinação de parâmetros cosmológicos é possível a partir da distância relativa entre os picos e suas alturas. Para o espectro de potência  $n_s$ , utiliza-se a razão entre as alturas dos picos 3 (em  $l_3$ ) e 1 (em  $l_1$ ),  $q \equiv h_3/h_1$ :

<sup>14</sup>A função  $l(l+1)C_l$  é da ordem do quadrado das flutuações de temperatura.

$$\frac{\Delta q}{q} \approx 1 - \left(\frac{l_3}{l_1}\right)^{1-n_s} \approx (n_s - 1) \log\left(\frac{l_3}{l_1}\right) \quad (2.73)$$

Apenas as perturbações de densidade (ou seja, escalares) tiveram sua influência na CMB demonstrada acima. Todavia, as perturbações tensoriais também deixam sua marca – caso contrário, não seria possível determinar as quantidades examinadas acima, como  $r$  e  $n_T$ .

## Ondas Gravitacionais Primordiais

No que diz respeito ao espectro de potências da CMB, as perturbações tensoriais são difíceis de serem detectadas. Sua influência nas flutuações de temperatura são inferiores às escalares e começam a decrescer rapidamente em função de  $l$ , sendo difíceis de separar de outros efeitos. A mais provável fonte de observação de perturbações tensoriais é através da polarização da CMB.

A CMB possui dois modos de polarização,  $E$  e  $B$ , geradas por espalhamento Thomson [47, 45]. As perturbações escalares não geram modos  $B$ , enquanto as tensoriais sim<sup>15</sup>. Como a polarização da CMB é um efeito apenas de eventos na recombinação, a detecção de modos  $B$  seria evidência da existência de ondas gravitacionais primordiais.

Infelizmente o sinal da polarização é fraco (chegando a apenas 1% das flutuações de temperatura para grande escala angular). Somado a isso, o modo  $B$  é apenas uma pequena parcela deste sinal para a maior parte dos modelos inflacionários ou de ricochete [45]. Outras dificuldades observacionais são encontradas no processo de filtragem do sinal e identificação do foreground, como evidenciado pela falsa detecção de modos- $B$  pelo BICEP2 em 2014.

É devida a essa não-deteção que missões como o Planck determinam apenas limites superiores para as quantidades associadas a perturbações tensoriais,  $r$  e  $n_T$ . Após os dados serem filtrados e terem estatística estudada, calcula-se qual o máximo possível para  $r$  (usado em preferência à  $n_T$ ) para que nenhum sinal de polarização em modo- $B$  ou outro tenha sido detectado.

---

<sup>15</sup>Perturbações vetoriais também mas conforme mencionado, não são importantes para o trabalho

# Capítulo 3

## Universo Primordial

Este capítulo consiste na apresentação dos modelos de inflação e com ricochete e a motivação para utilizá-los. Modelos inflacionários específicos serão apresentados, tendo como foco o de Starobinsky. O ferramental para o estudo dessas duas classes de modelos será apresentado nas respectivas seções.

### 3.1 Introdução

Por toda a história da civilização humana, em diversas sociedades e grupos, a questão sobre a origem e evolução do universo esteve em debate. Naturalmente as primeiras construções de um panorama sobre o começo do universo partiram do cenário religioso e filosófico, permanecendo assim por milênios. O advento da Relatividade Geral e o consequente desenvolvimento da Cosmologia Relativística permitiram a construção dos primeiros modelos matematicamente rigorosos para a história e evolução do universo. Entretanto problemas e paradoxos logo surgiram.

Dentre diversas alternativas, como o modelo de Einstein e o de universo Estacionário, o modelo de Big-Bang foi o que prevaleceu. As décadas em torno do meado do século XX foram marcadas por alternâncias de preferência quanto ao modelo vigente, com nomes de peso como Bondi e Einstein defendendo diferentes cenários. A consolidação do modelo de Big-Bang foi acontecendo aos poucos e culminou com a descoberta da CMB por Penzias e Wilson.

Diretamente proveniente da análise das soluções das equações de Friedmann, que preveem um universo cada vez menor conforme volta-se no tempo, o modelo de Big-Bang

contém diversos problemas conceituais. Semelhante à Relatividade Geral, a existência de uma singularidade – dessa vez cosmológica – em  $t = 0$  se manifesta de imediato. Todavia os problemas estão concentrados no ajuste fino nas condições iniciais do universo, a fim do seu estado atual ser justificado. Dentre eles estão o problema da Planza, o problema do Horizonte e a origem das flutuações de densidade primordiais<sup>1</sup>.

Ao final da década de 70 e início de 80 houve um crescimento do desenvolvimento de teorias alternativas ao big-bang seguido de universo de FLRW. Alexei Starobinsky [9] em 79 tentou, a partir de modificações da ação de Einstein-Hilbert, evitar a singularidade cosmológica<sup>2</sup>. Apesar deste objetivo não ter sido cumprido, o modelo construído foi bem sucedido em outras frentes. O uso de um universo de de Sitter, no entanto, não passou despercebido. Guth [10] em 1981 notou que a expansão exponencial nesse espaço-tempo seria suficiente para resolver diferentes problemas do modelo de Big-Bang. Novamente, o cenário descrito por Guth possui inconsistências notáveis. A transição de fase requerida por seu modelo ocasionaria em bolhas, essenciais para o reaquecimento do universo. Entretanto, o mecanismo responsável pelo reaquecimento também destruiria a homogeneidade e isotropia do universo. Apesar desses detalhes, seu modelo foi essencial para a evolução da área, culminando no cenário atual.

Concomitantemente, modelos de universo que utilizavam outras ideias para se livrarem dos problemas do modelo de Big-Bang estavam sendo desenvolvidos. Antes mesmo dos artigos de Guth, Novello e Salim [14] obtiveram a primeira solução analítica para um universo que começava grande e sofreria um ricochete. Universos que contraíssem já eram conhecidos, e a possibilidade da existência de um ricochete já havia sido cogitada. Nesse cenário os problemas do modelo de Big-Bang são contornados de forma diferente ao cenário inflacionário. Apesar de pouco estudado nas décadas subsequentes, modelos de universo com ricochete foram resgatados recentemente em diferentes teorias, incluindo cosmologia quântica [36, 35, 52], ricochete de matéria [15, 53], d-branas [54], entre outros [55, 56, 57, 58, 59, 60, 61].

O objetivo das próximas seções será estabelecer o ferramental para tratar-se de modelos de universo inflacionários e de ricochete. Primeiramente será feita uma revisão do modelo de Big-Bang a fim de melhor estabelecer os seus problemas. Em seguida o paradigma

---

<sup>1</sup>Outras dificuldades na interção entre cosmologia e física de partículas elementares podem ser encontradas em [51].

<sup>2</sup>Como veremos na sequência, desenvolvimentos sobre seu modelo levaram ao cenário mais compatível com observações.

inflacionário será detalhado, partindo de como ele resolve os problemas do paradigma anterior e como os modelos podem ser construídos, focando-se no modelo de Starobinsky, objeto base da dissertação. Uma análise de sua fenomenologia também será realizada e será constantemente utilizada nos capítulos seguintes. O processo será repetido para modelos de ricochete, mas desta vez sem foco em um modelo em específico.

## **3.2 Modelo de Big-bang**

Após os trabalhos de Friedmann e outros nos anos 20, mesmo reconhecida a precariedade da Relatividade Geral para tratar de tempos próximos à singularidade cosmológica, o quadro para o universo primordial já estava sendo montado. A academia ainda discutia sobre o cenário mais provável para a infância do universo. Havia modelos de universo primordial frio, como os de Einstein, Milne, o Estacionário. Outras propostas envolviam o universo quente, como o modelo de Big-Bang. Dentro deste contexto as décadas seguintes foram marcadas por trabalhos em física de partículas e grande unificação, que prediziam um universo primordial muito quente, de simetrias restauradas, num grande banho de partículas ultra-relativísticas. A já comentada descoberta da CMB a 2.7K, cuja existência já havia sido prevista por esse modelo de universo quente, consolidou o panorama de Big-Bang quente. O universo começaria bem quente, dominado por radiação, e progressivamente diminuiria sua temperatura, passando à dominação de matéria. Apesar das condições gerais terem sido estabelecidas, o quão precisa deveria ser a determinação de certos valores iniciais, como a curvatura do universo?

As observações à época, mesmo que rudimentares, já davam indícios ou da necessidade de ajuste fino em diversas propriedades do universo primordial ou de uma teoria mais completa que deveria ser capaz de prever valores tão específicos. No final das contas o ajuste que viria a ser necessário em determinados parâmetros tornou-se impossível de ser ignorado, requerendo mudanças no paradigma vigente.

### **3.2.1 O paradigma e suas dificuldades**

Em linhas gerais, os problemas do modelo do Big-Bang estão relacionados à distribuição espacial de matéria, i.e. sua densidade de energia e seu campo de velocidades. Dos problemas citados anteriormente, o problema do Horizonte e das flutuações iniciais são de-

rivados da matéria e sua distribuição espacial, enquanto o problema da Planeza é oriundo da precisão requisitada para as velocidades.

## Problema do Horizonte

Quando fala-se da distribuição de matéria no universo atual em larga escala, dentro do modelo de FLRW, trata-se de um universo homogêneo e isotrópico. Apesar de uma aproximação, por existirem vazios, clusters e galáxias, é bem próxima da realidade. Para o passado remoto, é compreensível que fenômenos físicos tais como produção de partículas, sendo eles isotrópicos, venham a tornar o universo também isotrópico e homogêneo. Entretanto isso é válido apenas para regiões dentro do mesmo horizonte de partículas, que possuem contato causal.

Conforme mencionado na seção sobre Observações, a CMB é altamente homogênea e isotrópica, a menos de pequenas flutuações de temperatura na ordem de  $10^{-5}$ . A conclusão obtida desta constatação é que as regiões presentes na CMB deveriam estar sob contato causal, para poderem ter se homogeneizado. No entanto não é esse o resultado encontrado.

O universo observável atual tem aproximadamente o mesmo raio do Horizonte de Partículas. O limite de observação se dá justamente na CMB. Pode-se então calcular qual era a extensão desse raio quando a CMB se formou, o raio da LSS, em termos da temperatura:

$$R_{LSS} = R_H(t_0) \left( \frac{a_{LSS}}{a_0} \right) = R_H(t_0) \left( \frac{T_0}{T_{LSS}} \right) \quad (3.1)$$

A evolução no tempo do tamanho do Horizonte de Partículas é dada de forma diferente, sendo proporcional a  $H^{-1}$ . Através da dependência no tempo de  $H(t)$  durante a fase de dominação de matéria<sup>3</sup>, novamente em termos da temperatura:

$$H^2 \propto a^{-3} \propto T^3 \quad (3.2)$$

$$R_H(t_{LSS}) = R_H(t_0) \left( \frac{T_0}{T_{LSS}} \right)^{3/2} \quad (3.3)$$

Comparando então o raio da LSS 3.1 com o raio do Horizonte de partículas 3.3, vê-se

---

<sup>3</sup>Entre hoje e a superfície de último espalhamento, a matéria bariônica é a componente dominante na dinâmica

que há mais regiões sem contato causal (fora do horizonte) do que causalmente conectadas!

A razão entre elas é:

$$\frac{R_{LSS}^3}{R_H^3(t_{LSS})} = \left( \frac{T_0}{T_{LSS}} \right)^{-3/2} \approx 10^6 \quad (3.4)$$

Ou seja, do universo observável – e portanto do presente registrado na CMB –  $10^6$  regiões não possuíam contato causal durante a recombinação. Não há como explicar a homogeneidade da CMB quando sua maior parte estava impossibilidade de contactar a outra; não há fenômeno físico capaz dessa proeza. Desta forma, ou o universo já era praticamente homogêneo em toda sua extensão (além de Horizonte de Partículas) e as regiões possuem a mesma temperatura por sorte (probabilidade da ordem de  $10^{-27}$ ) ou a evolução das grandezas calculadas acima é diferente. Neste caso, em algum momento todas essas regiões, toda a CMB, esteve dentro do mesmo Horizonte, possibilitando o equilíbrio térmico observado<sup>4</sup>.

## Flutuações de densidade Primordiais

Dentro do contexto do modelo de Big-Bang não há predição alguma sobre a existência de pequenas heterogeneidades, fontes das flutuações de temperatura da CMB e que viriam a se tornar galáxias e outras grandes estruturas. Não apenas as flutuações deveriam existir de princípio, como ter exatamente o valor obtido por observações, da ordem de  $10^{-5}$ . Deveriam também ser quase invariante de escala.

Essas imposições sobre flutuações novamente deveriam ser compartilhadas por toda a extensão da LSS, maior do que o Horizonte de Partículas da época. Isso faz com que a origem e características das flutuações de densidade sejam fatores que piorem o problema do Horizonte. Além de ser necessário explicar o porquê da temperatura quase homogênea, as dispersões da homogeneidade e seu caráter global também deveriam ser explicadas.

## Problema da Planeza

O problema da Planeza vem do fato da curvatura do universo não ser pré-determinada por alguma motivação física. As equações de Friedmann com curvatura genérica em termos dos parâmetros de densidade fornecem:

---

<sup>4</sup>A seção sobre Perturbações Cosmológicas já apresentou esse comportamento, que de fato ocorre, cuja explicação será apresentada a seguir.

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \Omega_{\Lambda,0} + \frac{1 - \Omega_0}{a^2} \quad (3.5)$$

$$1 - \Omega = \frac{-k}{(aH)^2} = \frac{\rho_{\text{crit.}} - \rho}{\rho_{\text{crit.}}} \quad (3.6)$$

Tanto para a fase de dominação de radiação ( $H^2 \propto a^{-4}$ ) quanto matéria ( $H^2 \propto a^{-3}$ ) têm-se que  $1 - \Omega$  cresce com o tempo. Atualmente  $1 - \Omega_0 \approx 10^{-3}$ , o que indica que a tempos remotos este valor era ainda menor. Comparando o valor de agora com o valor durante a nucleossíntese (ambos dominação de matéria):

$$\frac{|1 - \Omega|_{\text{Nucl.}}}{|1 - \Omega|_0} \approx \left( \frac{a_{\text{Nucl.}}^2}{a_0^2} \right) \approx \mathcal{O}(10^{-16}) \quad (3.7)$$

Indo mais além, para a época de grande unificação:

$$\frac{|1 - \Omega|_{\text{GUT}}}{|1 - \Omega|_0} \approx \left( \frac{a_{\text{GUT}}^2}{a_0^2} \right) \approx \mathcal{O}(10^{-55}) \quad (3.8)$$

O comportamento acima demonstra o quão ajustado deve ser o valor de  $1 - \Omega$  para obter-se a curvatura de hoje. Existir vestígios de curvatura hoje implica em um universo ainda mais plano no passado, mas sem ser exatamente plano. O pequeno valor acima/abaixo de zero também mostra que divergências na densidade  $\rho$  algumas ordens de grandeza acima/abaixo de  $\rho_{\text{crit.}}$  – um valor ainda muito pequeno – acarretaria em diferentes evoluções do universo, podendo levar a um rápido colapso/expansão, que não acontece.

O parâmetro de densidade  $\Omega$  pode ser ainda interpretado como a razão entre a energia potencial e a energia cinética no espaço. As condições 3.7 e 3.8 então implicam um elevado grau de semelhança entre ambas as formas de energia. A energia potencial é oriunda da interação gravitacional no fluido da região, enquanto a cinética evidentemente relacionada a velocidade do fluido. Desta forma compreende-se o porquê do Problema da Planeza estar relacionado ao campo de velocidades da matéria.

## Outras dificuldades

As demais problemáticas associadas ao modelo de Big-Bang estão relacionadas à física de partículas e altas energias. Um exemplo de previsão de teorias de unificação e extensões

do modelo padrão são monopólos e outras relíquias térmicas. A ausência de observação dessas entidades significaria uma modificação nas teorias que as preveem ou então algum fenômeno cosmológico que tornaria suas densidades ínfimas.

O problema da planeza tem associado a ele o chamado problema da entropia. Próximo a escala de Planck, sendo o universo dominado por radiação, um processo adiabático à entropia  $S$  levaria a:

$$|1 - \Omega|_{\text{Pl.}} = \frac{1}{S^{2/3}} \approx \mathcal{O}(10^{-68}) \quad (3.9)$$

O problema da planeza pode então ser traduzido no problema do porquê a entropia do universo primordial ser tão alta. A entropia seria a responsável pela proximidade de  $\Omega_0$  a 0.

Desta vez associada à falta de uma teoria fundamental que explique sua existência, a assimetria bariônica é outro fenômeno fora do escopo do modelo de Big-Bang. Não sendo resolvida pelas propostas descritas em seções seguintes, a assimetria bariônica possui diversas tentativas de resolução, pautadas nas propostas de Sakharov [62].

### 3.3 Inflação

É possível resumir as características que o universo precisaria ter para evitar os problemas citados na seção anterior. Estando o problema da Planeza e o problema da entropia intimamente ligados, pode-se concluir que uma fase de expansão não-adiabática resolveria pelo menos parte desses problemas. Um período do universo em que  $|1 - \Omega|$  diminuísse com o tempo também seria solução.

A outra característica está relacionada com o problema do Horizonte. Conforme adiantado anteriormente – e amplamente utilizado no capítulo de Perturbações Cosmológicas – um período onde as perturbações presentes na CMB estiveram em contato causal pode ser suficiente para solucioná-lo. Esse comportamento poderia ser obtido por um período onde escalas físicas crescem além do Horizonte de Partículas, evoluindo mais rapidamente do que ele. Esse período seria o responsável em fazer regiões do universo perderem contato causal para então voltarem a estar sob o mesmo Horizonte em tempos atuais.

Definido o que um determinado período de evolução do universo deveria ter para evitar o ajuste fino das condições iniciais, parte-se para sua descrição matemática. De sua

segunda característica pode-se obter uma condição sob o fator de escala. Escalas físicas evoluem de forma proporcional ao fator de escala,  $\sim a$ , já o Horizonte evolui com  $\sim H^{-1}$ . A evolução no tempo dessa razão deverá crescer:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{a}{H^{-1}} \right) = \frac{d}{dt} (\dot{a}) = \ddot{a} > 0 \quad (3.10)$$

Seguindo o descoberto por Guth[10], uma fase de expansão não só acelerada, mas como também quase exponencial, resolveria os problemas do modelo de Big-Bang. Esse regime ficou conhecido como Inflação.

### 3.3.1 Paradigma Inflacionário

Expansão acelerada não é a única característica definidora do regime inflacionário do universo. A expansão não-adiabática mencionada anteriormente ainda não é efetuada, a inflação é adiabática. No entanto, a proposta inflacionária oferece uma solução natural do problema, no chamado reaquecimento, brevemente comentado na sequência.

A partir da condição de aceleração e das equações de Friedmann, pode-se obter informações sobre o comportamento do fluido dominante na inflação:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{-4\pi G}{3} (\rho + 3p) > 0 \quad (3.11)$$

$$\Rightarrow (\rho + 3p) < 0 \quad (3.12)$$

Ou seja, para a realização da inflação é necessário um fluido de pressão negativa,  $p < -\rho/3$ . Já era conhecido na década de 80 que a energia do vácuo possui equação de estado  $p = -\rho$ , e em seguidas outras configurações de mesma equação de estado foram descobertas<sup>5</sup>.

Um fluido com essa característica dominando o universo satisfaz as condições acima, e configura a chamada expansão de de Sitter. Nela, tem-se que  $\rho$  e  $H$  são constantes. Desta forma:

---

<sup>5</sup>Essas configurações estão presentes em 3.3.2.

$$\frac{\dot{a}}{a} = H_i \quad (3.13)$$

$$\Rightarrow a = a_i \exp^{H_i(t-t_i)}, \quad (3.14)$$

onde  $a_i$  e  $H_i$  são os valores do fator de escala e parâmetro de Hubble ao início da inflação, respectivamente.

O regime de de Sitter é marcado por uma expansão exponencial do fator de escala. Mais precisamente os modelos de inflação propostos seguem uma expansão de quasi-de Sitter. Como no caso exato o parâmetro de Hubble não evolui, não há como sair desse estado. Numa expansão de quasi-de Sitter existe a chamada saída graciosa (*graceful exit*). Em ambos os casos os problemas do modelo de Big-Bang são resolvidos.

## Problema do Horizonte

Conforme adiantado anteriormente, a resolução do problema do Horizonte está na aceleração do universo durante a inflação. Se a escala do horizonte atual tiver estado dentro do horizonte ao início da inflação podemos justificar a homogeneidade de CMB. Utilizando a expansão de de Sitter 3.14 pode-se calcular quanto tempo a inflação deve ter durado para resolver o problema do Horizonte.

O horizonte de partículas ao início da inflação possuía a extensão<sup>6</sup>

$$\lambda_{R_H}(t_i) = H_0^{-1} \left( \frac{a_{t_i}}{a_{t_0}} \right) = H_0^{-1} \left( \frac{a_{t_f}}{a_{t_0}} \right) \left( \frac{a_{t_i}}{a_{t_f}} \right) = H_0^{-1} \left( \frac{T_0}{T_f} \right) e^{-N} \lesssim H_I^{-1} \quad (3.15)$$

$$N = H_I (t_f - t_i) \quad (3.16)$$

onde  $N$  é chamado de número de e-folds. Para o problema do Horizonte ser resolvido e 3.15 satisfeita,  $N \gtrsim 70$ .

Para provar essa afirmação, parte-se de 3.15, aplicando a função logaritmo na desigualdade:

---

<sup>6</sup>Onde usou-se  $R_H \sim H^{-1}$

$$N \geq \log\left(\frac{T_0}{H_0}\right) - \log\left(\frac{T_f}{H_f}\right) \approx 67 + \log\left(\frac{H_f}{T_f}\right) \quad (3.17)$$

## Problema da Planeza

Ao contrário dos regimes de dominação de radiação e matéria, o parâmetro  $|\Omega - 1|$  será inversamente proporcional ao fator de escala, i.e., diminuirá com o tempo ao invés de crescer. Isso pode ser visto a partir de 3.6 com o parâmetro de Hubble constante  $H_I$ :

$$1 - \Omega \propto \frac{1}{a^2} \quad (3.18)$$

No regime utilizado, de de Sitter, a quantidade diminuirá exponencialmente com o tempo. A razão entre esse parâmetro ao início da inflação em relação ao final é dada por:

$$\frac{|1 - \Omega|_{t_f}}{|1 - \Omega|_{t_i}} = \left(\frac{a_i}{a_f}\right)^2 = e^{-2N} \quad (3.19)$$

Comparando com 3.8 e 3.9 obtém-se novamente um valor de  $N \approx 70$ . Desta forma, ao invés de um ajuste fino da ordem de  $10^{60}$  requer-se um "ajuste" de  $N$  apenas da ordem de dezenas. Essa condição permitiria que, mesmo o parâmetro  $|1 - \Omega|$  sendo grande no início da inflação e crescendo novamente durante as fases de dominação de radiação e matéria, poderia ser possível obtê-lo da ordem da unidade hoje em dia. Em outras palavras, a inflação garante um universo bem próximo do plano atualmente.

## Perturbações Primordiais e demais problemas

Todos os problemas do modelo de Big-bang relacionados à densidade de monopólos e outras partículas fundamentais extremamente massivas, defeitos topológicos, etc., são resolvidos pela expansão exponencial. Tal expansão reduziria drasticamente as densidades por um fator da ordem de  $e^{3N}$ .

O problema da entropia é resolvido não durante a inflação, mas após. Tanto esse quanto as flutuações de densidade primordiais têm suas resoluções pautadas no fluido – mais precisamente campo escalar – que domina a evolução do universo na inflação. Conforme comentado no capítulo de perturbações cosmológicas, as flutuações de densidade são produzidas por flutuações do inflaton.

### 3.3.2 O Inflaton

A natureza do fluido dominante na inflação passou por diversos períodos. Gliner (consultar [51]), antes mesmo do desenvolvimento de modelos inflacionários para resolução dos problemas do Big-Bang, já havia sugerido uma fase de de Sitter dominada por matéria superdensa. Em sua proposta, Guth utilizava um estado de vácuo super-resfriado, que viria a diminuir a temperatura do universo. Uma subsequente transição de fase seria responsável pelo aquecimento do universo. Entretanto, problemas relacionados a essa última fase levaram ao abandono da ideia.

Finalmente campos escalares começaram a ser utilizados para realizar a inflação, através de seu acoplamento mínimo com a gravitação. Os primeiros modelos do então chamado novo paradigma inflacionário e, em sequência, dos chamados modelos caóticos foram precursores na utilização desse tipo de campo. A propriedade geral desses modelos é a exigência de que o potencial do campo,  $V(\varphi)$  fosse superior a sua energia cinética,  $\dot{\varphi}$ . Linde liderou o avanço de ambos os paradigmas. Nascia assim o inflaton, o campo escalar responsável pela inflação.

Para a primeira classe mencionada, um campo de Coleman-Weinberg 3.20, associado a quebras de simetrias em teorias de grande unificação fora utilizado. Entretanto transições de fase ainda eram utilizadas, e a temperatura deveria ser baixa como no caso do modelo antigo de Guth. Outras dificuldades incluíam o comportamento do potencial próximo ao vácuo do campo.

$$V(\varphi) = V_0 \left[ \left( \frac{\varphi}{\mu} \right)^4 \left( \log \left( \frac{\varphi}{\mu} \right) - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{4} \right] \quad (3.20)$$

A inflação caótica [6] inaugurou a construção moderna dos modelos inflacionários. O vínculo de exigência do potencial  $V(\varphi)$  do inflaton a baixa temperatura é retirado. Pode-se então ir para a escala de energia de Planck e nos modelos caóticos a inflação pode começar de imediato, sem necessidade da temperatura abaixar. Os modelos de inflação caótica contam geralmente com potenciais  $V(\varphi)$  exponenciais ou em potências de  $\varphi$  3.21. São também chamados de modelos de campo grande. As peculiaridades dos modelos caóticos serão melhor abordadas através de um exemplo, na seção 3.3.5.

$$V(\varphi) = \frac{\lambda\varphi^n}{nM_{\text{Pl}}^{n-4}} \quad (3.21)$$

Dentro da classificação dos modelos a partir de sua energia, os modelos do novo paradigma inflacionário são chamados de modelos de campo pequeno. Há também os modelos híbridos [63], comuns às teorias que envolvem supersimetria. Nesses casos faz-se uso de campos auxiliares, e todos os envolvidos são mais próximos a classe de campo pequeno.

Existem ainda outras formas de realizar a inflação, incluindo o uso de múltiplos campos, acoplamento não-mínimo com a gravitação [64], axions [65], um campo de termo cinético não-canônico [66]. No contexto da teoria de cordas é o principal modelo de universo primordial [67]. Mais importante para a dissertação será o modelo Starobinsky, comentado anteriormente, e sua modificação da Relatividade Geral. Uma boa referência para diferentes modelos inflacionários e sua origem em física de partículas fundamentais é [32]

### 3.3.3 Dinâmica do Inflaton

Resta saber como os diferentes campos escalares mencionados acima poderiam realizar a inflação. Foi antecipado que a condição para que um campo escalar possua equação de estado  $\rho = -p$  é  $V \gg \dot{\varphi}$ . Sendo mais preciso, partindo da ação do inflaton minimamente acoplado a gravitação:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2}R + \frac{1}{2}\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi - V(\varphi) \right] \quad (3.22)$$

Como o espaço-tempo utilizado é o de FLRW, o princípio variacional aplicado na ação acima fornecerá a equação de movimento para o campo escalar em um fundo em expansão:

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V_{,\varphi} = 0, \quad (3.23)$$

onde o subscrito  $_{,\varphi}$  significa derivada em relação a  $\varphi$ .

A partir do tensor de energia-momento também obtido de 3.22 é possível extrair as expressões para densidade de energia e pressão do campo. Para o inflaton em específico é necessário que  $p = -\rho$ .

$$\rho = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + V(\varphi) \quad (3.24)$$

$$p = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} - V(\varphi) \quad (3.25)$$

Portanto o inflaton deverá satisfazer duas condições:

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} \ll V(\varphi) \quad (3.26)$$

A expressão 3.26 é conhecida como condição de rolamento lento, *slow-roll*<sup>7</sup>. O potencial do campo deve dominar em relação a sua energia cinética, por isso o termo rolamento lento: o campo evoluirá lentamente a partir de seu potencial, descendo-o devagar. Outra razão para o comportamento de slow-roll é a própria equação de movimento 3.23: o segundo termo de seu lado esquerdo representa a fricção que o campo sofre para altos valores do potencial. Essa fricção é causada pela expansão do universo, como pode-se ver pelo fato do termo conter a função de Hubble  $H$ .

Quando a condição de slow-roll não for mais satisfeita a inflação chegará ao fim. As perturbações no campo do inflaton não afetarão a dinâmica<sup>8</sup>, sendo assim pode-se expressar a equação de movimento do campo e as equações de Friedmann como:

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V_{,\varphi} = 0 \quad (3.27)$$

$$H^2 = \frac{1}{3} \left( \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + V(\varphi) \right) \quad (3.28)$$

A aplicação da condição de slow-roll nas equações acima permite a construção de um cenário propício para o tratamento da inflação, abordado na sequência.

Os diferentes potenciais possíveis para candidatos a inflaton realizam as condições de slow-roll de diferentes formas. Campos da classe caótica partem de um alto valor do potencial, da ordem de  $M_{\text{Pl}}$  e descem o potencial devagar devido ao termo de fricção. Campos pequenos possuem um potencial de outra forma, geralmente potenciais que pos-

<sup>7</sup>A partir deste ponto essa condição será expressada apenas como slow-roll.

<sup>8</sup>Mais sobre elas no capítulo de Perturbações Cosmológicas.

suem uma fase de pequena variação com o campo, plano (como plateau ou quasi-plateau), ver Figura 3.1.

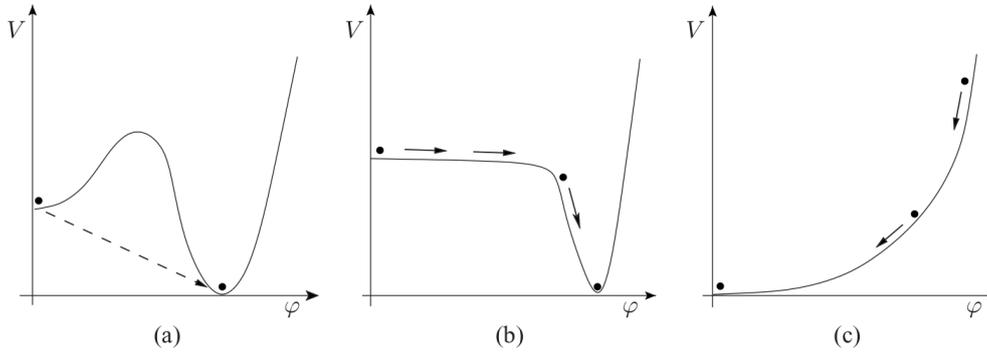


Figura 3.1: Tipos de potenciais inflacionários: (a) Inflação Antiga, (b) Nova Inflação (híbrida ou de campo fraco) e (c) Inflação Caótica (campo forte)

Em ambos os casos, a inflação deve durar ao menos em torno de  $60 \sim 70$  e-folds, a fim de resolver os problemas do modelo de Big-Bang. Quando a inflação está a essa "distância" (60 e-folds) de seu fim, as perturbações da CMB são produzidas.

### 3.3.4 Fenomenologia da Inflação

A fenomenologia do regime inflacionário é focada nas perturbações cosmológicas observadas na CMB. Quantidades como espectro de potência, amplitude das perturbações, entre outros, são determinantes para avaliação dos diferentes candidatos inflacionários.

Conforme brevemente comentado no capítulo de Perturbações Cosmológicas, o espectro de potência da CMB será levemente dependente de escala, devido a inflação não ser exatamente uma expansão de de Sitter. Pode-se expressar este desvio através de definição de novos parâmetros, os chamados Parâmetros de Slow-Roll [68]. Eles também estarão presentes na descrição dos observáveis cosmológicos, proporcionando um arcabouço fenomenológico conciso.

Antes de definir estes parâmetros, é interessante estabelecer a medida do tamanho do regime inflacionário. Anteriormente utilizou-se o conceito de e-folds,  $N$ , para um regime de de Sitter exato. No entanto, sua definição precisa é:

$$dN = H dt \quad (3.29)$$

$$N = \int_{t_i}^{t_f} H dt = \log \left( \frac{a_f}{a_i} \right) \quad (3.30)$$

O número de e-folds é uma quantidade essencial para a abordagem fenomenológica da inflação. Todos os parâmetros de slow-roll detalhados a seguir poderão ser expressos em termos do número de e-folds, e sua dependência com  $N$  variará de modelo para modelo. Por consequência, quantidades observáveis também poderão ser expressas em termos de  $N$ . Desta forma, a aplicação da faixa de e-folds prevista para solucionar os problemas do modelo de Big-Bang (entre  $60 \sim 70$ ) permitirá a previsão dos valores dos observáveis, modelo a modelo.

Os parâmetros de slow-roll de Hubble (abreviados em diante como HSRP, do inglês *Hubble Slow-Roll Parameters*) são exatamente definidos a partir de quantidades geométricas. O primeiro dos parâmetros é  $\epsilon_h$ , definido a partir do desvio do parâmetro de Hubble de uma expansão de de Sitter exata:

$$\epsilon_h = -\frac{\dot{H}}{H^2} \quad (3.31)$$

O parâmetro  $\epsilon_h$  em conjunto com as equações de Friedmann fornece também:

$$\epsilon_h = \frac{3}{2}(\omega + 1) = \frac{1}{2} \frac{\dot{\varphi}^2}{H^2} \quad (3.32)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = H^2(1 + \epsilon_h) \quad (3.33)$$

No caso limite de expansão de de Sitter,  $\epsilon_h \rightarrow 0$ , correspondendo a  $H$  constante, [3.31](#), e  $\omega = -1$ , [3.32](#).

A inflação precisa durar um tempo suficiente, e isso implica em vínculo em [3.27](#): a segunda derivada do tempo do campo precisará ser inexpressiva frente aos demais termos, o de fricção e derivada do potencial. Expressando matematicamente esta condição introduz o segundo HSRP  $\eta_h$ :

$$\eta_h = -\frac{\ddot{\varphi}}{H\dot{\varphi}} = \frac{d \log |\dot{\varphi}|}{dN} \quad (3.34)$$

A definição do número de e-folds pode ser utilizada para reescrever  $\epsilon_h$  e  $\eta_h$ :

$$\epsilon_h = -\frac{d \log H}{dN} \quad (3.35)$$

$$\eta_h = \epsilon_h - \frac{1}{2\epsilon_h} \frac{d\epsilon_h}{dN} \quad (3.36)$$

Em termos dos HSRP, pode-se resumir a aproximação de slow-roll como as exigências:  $\epsilon_h \ll 1$ ,  $|\eta_h| < 1$ . Apenas com estas condições satisfeitas é possível a inflação em slow-roll. Adicionalmente, utiliza-se  $\epsilon_h = 1$  para marcar o fim do período.

Para a completa utilização dos HSRP, seria necessário resolver o sistema de equações para a cosmologia de fundo, 3.27-3.28, dentro do regime de slow-roll. Entretanto é possível simplificar essas expressões. A simplificação delas fornecerá uma aproximação dos HSRP, os chamados parâmetros de slow-roll do potencial (Potential Slow-Roll Parameters, PSRP). Eles recebem esse nome por serem inteiramente definidos em função do potencial do inflaton.

Simplificando 3.27-3.28 através das condições de slow-roll:

$$H^2 \simeq \frac{1}{3}V(\varphi) \quad (3.37)$$

$$3H\dot{\varphi} = -V_{,\varphi} \quad (3.38)$$

As condições 3.26 e  $|\ddot{\varphi}| \ll |3H\dot{\varphi}|$  em união com as expressões acima fornecem:

$$\dot{\varphi}^2 \ll V(\varphi) \Rightarrow \left(\frac{V_{,\varphi}}{V}\right)^2 \ll 1 \quad (3.39)$$

$$|\ddot{\varphi}| \ll |3H\dot{\varphi}| \Rightarrow \frac{V_{,\varphi\varphi}}{V} \ll 1 \quad (3.40)$$

A partir de 3.39 e 3.40 define-se os PSRP:

$$\epsilon_v = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \left( \frac{V_{,\varphi}}{V} \right)^2 \quad (3.41)$$

$$\eta_v = M_{\text{Pl}}^2 \frac{V_{,\varphi\varphi}}{V} \quad (3.42)$$

$$\epsilon_v, |\eta_v| \ll 1 \quad (3.43)$$

Ambos os parâmetros de slow-roll definidos acima, HSRP e PSRP, podem ser expressos em função do outro, aproximação que será válida durante o regime de slow-roll[68]:

$$\epsilon_h \simeq \epsilon_v \quad (3.44)$$

$$\eta_h \simeq \eta_v - \epsilon_v \quad (3.45)$$

### 3.3.5 Revisitando Perturbações Cosmológicas

Os parâmetros de slow-roll podem ser utilizados para reescrever a dependência dos observáveis cosmológicos<sup>9</sup>. Obviamente, todas as quantidades envolvidas são calculadas ao sair do Horizonte,  $k = k_* = aH$ . Das expressões 3.32, 2.42 e 2.45:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \frac{1}{8\pi^2} \frac{H^2}{M_{\text{Pl}}^2} \frac{1}{\epsilon_h} \quad (3.46)$$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{T}} = \frac{2}{\pi^2} \frac{H^2}{M_{\text{Pl}}^2} \quad (3.47)$$

De imediato pode obter-se a expressão da razão tensorial-escalar em termos do HSRP:

$$r = \frac{\mathcal{P}_{\mathcal{T}}}{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}} = 16\epsilon_h \quad (3.48)$$

Para os índices espectrais, começa-se de 2.43 e 2.46, restando apenas a aplicação dos resultados obtidos acima, 3.46 e 3.47.

---

<sup>9</sup>A derivação detalhada do processo, envolvendo a reescrita dos termos de massa em função dos HSRP pode ser encontrada em [28, 47].

$$n_{\mathcal{R}} - 1 = \frac{d \log \mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{d \log k} = \frac{d \log \mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{dN} \frac{dN}{d \log k} \quad (3.49)$$

$$= (-2\epsilon_h - 2(\epsilon_h - \eta_h))(1 + \epsilon_h) \quad (3.50)$$

$$\simeq 2\eta_h - 4\epsilon_h \quad (3.51)$$

$$n_T = \frac{d \log \mathcal{P}_{\mathcal{T}}}{d \log k} = \frac{d \log \mathcal{P}_{\mathcal{T}}}{dN} \frac{dN}{d \log k} \quad (3.52)$$

$$= -2\epsilon_h(1 + \epsilon_h) \quad (3.53)$$

$$\simeq -2\epsilon_h \quad (3.54)$$

Similarmente, pode-se expressar os observáveis em termos dos PSRP. Essas formas são extremamente úteis e permite um cálculo simples para as previsões observacionais de modelos inflacionários.

$$n_{\mathcal{R}} - 1 = 2\eta_v - 6\epsilon_v \quad (3.55)$$

$$n_T = -2\epsilon_v \quad (3.56)$$

$$r = 16\epsilon_v \quad (3.57)$$

Como deveria ser, no limite de de Sitter os parâmetros de slow-roll serão nulos e os índices espectrais acima demonstram invariância de escala.

### Exemplo: Inflação $m^2\varphi^2$

Um dos primeiros modelos de inflação caótica realizado foi o modelo com potencial  $V(\varphi) = m^2\varphi^2/2$ . Seus PSRP e seu número de e-folds são:

$$\epsilon_v(\varphi) = \eta_v(\varphi) = 2 \left( \frac{M_{\text{Pl}}^2}{\varphi} \right)^2 \quad (3.58)$$

$$N(\varphi) = \frac{\varphi^2}{4M_{\text{Pl}}^2} - \frac{1}{2} \quad (3.59)$$

As condições de slow-roll para esse potencial só são satisfeitas quando o campo assume valores super-planckianos, o que pode vir a ser um defeito do modelo [31]. Durante a

formação da CMB, utilizando  $N_{CMB}$  da ordem de 60, o inflaton deveria possuir um valor de  $15M_{Pl}$ .

Os PSRP, e por consequência os observáveis, podem ser reescritos em termos do número de e-folds:

$$\epsilon_v = \eta_v = \frac{1}{2N} \quad (3.60)$$

$$n_R = 1 - \frac{2}{N} \quad (3.61)$$

$$r = \frac{8}{N} \quad (3.62)$$

Novamente utilizando  $N_{CMB}$  da ordem de 60, obtém-se as previsões para o índice espectral,  $n_R \simeq 0.96$  e para a razão tensorial-escalar,  $r \simeq 0.1$ . Apesar do índice espectral estar próximo dos valores obtidos pelo Planck, a previsão para as ondas gravitacionais ultrapassa o medido, com  $r$ , com os modelos quadráticos de inflação caótica possuindo 95% de nível de confiança de não serem corretos[69].

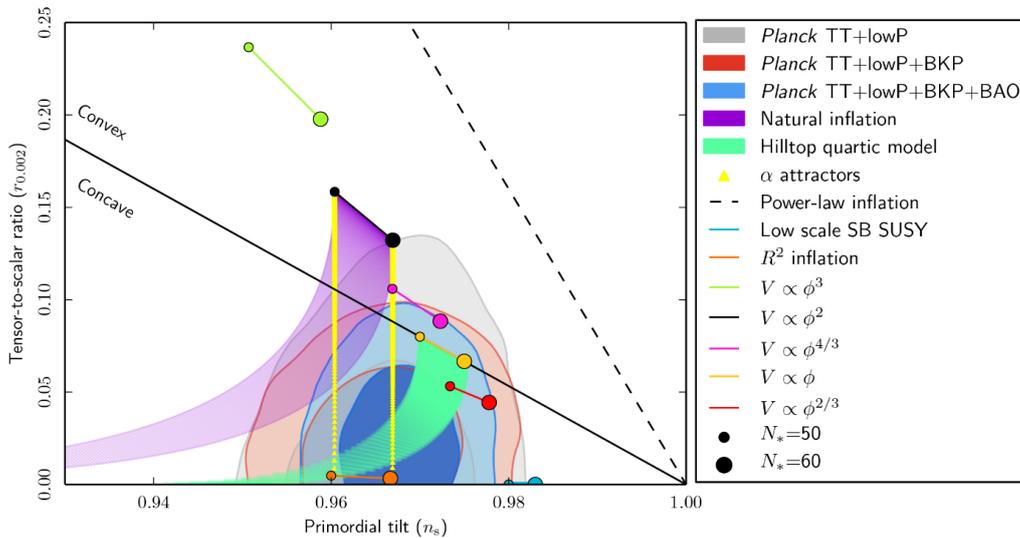


Figura 3.2: Nível de confiança em 68% e 95% para  $n_s$  e  $r$  através da combinação do Planck com BICEP2/Keck Array e dados de BAO, em comparação com resultados teóricos de diferentes modelos inflacionários.

## 3.4 Ricochete

Alternativas ao paradigma inflacionário para o universo primordial são várias [70, 71]. Modelos inflacionários não são livres de problemas ou ajustes finos [72]. Das dificuldades previamente listadas, viu-se que a singularidade cosmológica não é abordada por modelos usuais de inflação [73]. Não à toa propostas de universo não-singulares são realizadas desde o início da cosmologia moderna. Como proporcionar essa não-singularidade ficou em aberto e será explorada posteriormente.

A homogeneidade da CMB é resolvida através da dinâmica de universos eternos ou preexistentes. A resolução deste problema necessita que as regiões dentro do Horizonte de Partículas atual – em suma as regiões que cobrem a CMB – tenham estado sob o mesmo Horizonte num passado remoto. A partir da consideração de um universo preexistente, com o mesmo conteúdo material do atual, é imediata a conclusão de que esta condição descrita é satisfeita. Dado tempo suficiente para o contato causal (um mecanismo específico) homogeneizar a região necessária, escalas físicas que estiverem no Horizonte de hoje terão sua homogeneidade justificada. No entanto é necessário que o período próximo ao ricochete, além do próprio – períodos onde a escala de energia é extremamente alta e a Relatividade Geral pode não ser mais válida – não estraguem a homogeneidade prévia do universo.

Para a Planza do universo atual, busca-se o mesmo do universo inflacionário, uma fase em que  $|1 - \Omega|$  decresça, reduzindo a contribuição da curvatura. Num universo dotado apenas da expansão proporcionada pelas componentes materiais usuais, a única solução é inflacionária. Entretanto um universo prévio oferece uma rota a partir de sua contração.

As propriedades acima levaram à busca, tentativa e construção dos chamados modelos de ricochete não-singular [12]. Um universo em contração seguido de um expandindo-se com FLRW também seria solução para os problemas do modelo de Big-Bang.

### 3.4.1 Paradigma do Ricochete

É possível construir um modelo dentro deste cenário em que a única modificação em relação a FLRW esteja nas proximidades do ricochete. Assim é possível construir um universo homogêneo e isotrópico com ricochete cuja evolução é relativamente simples de ser entendida e estudada. É a explicação sobre o ricochete, seus mecanismos, soluções

e problemas que diferenciarão diferentes classes de modelos. É ele a maior fonte de dificuldades teóricas e operacionais. Uma introdução à essas questões será apresentada em [3.4.3](#).

Sem a adição de constante cosmológica ou outro fluido exótico um universo pré-ricochete possuiria uma evolução similar ao atual, revertida no tempo. O ponto de partida é então um universo em contração, dominado por matéria. Conforme será melhor trabalhado subsequentemente, a dominação de matéria é essencial para as previsões de modelos com ricochete concordarem com as observações atuais. A dualidade de Wands, estabelecida no próximo capítulo, conectará as previsões de universos em expansão de de Sitter com universos dominados por matéria [\[3\]](#).

Assim como no caso da inflação, cuja expansão não é exatamente de Sitter, novamente não teremos um comportamento exatamente tipo poeira. A contração deste universo não será realizada por fluido de equação de estado exatamente de matéria, mas sim próxima [\[15, 25\]](#).

A homogeneidade desse universo pré-ricochete é foco de debate com os proponentes do universo inflacionário [\[20, 74\]](#). No cenário inflacionário, podemos ter que a região que forma o universo atual – e conforme previamente explicado estando em contato causal – era incrivelmente pequena antes do começo da inflação. Este tamanho ínfimo justificaria a sua homogeneidade (uma região tão pequena poderia ser homogênea sem ajuste fino). Enquanto isso, a solução de cenários com ricochete é diametralmente oposta. Ela poderia vir a ser postulada como condição inicial de uma forma menos rígida do que num universo inflacionário, por ser imposta sob um universo muito grande. Possuímos "mais controle" sobre a Física a grandes escalas do que a escalas bem pequenas, onde novos fenômenos poderiam ser importantes.

Não obstante esta proposição não é imune a críticas [\[75\]](#); há discussão sobre se pequenas anisotropias não poderiam estragar todo o cenário [\[20\]](#). Uma fase ekpyrótica poderia vir a ser necessária, que suavizaria as anisotropias [\[38, 76\]](#). A discussão sobre este obstáculo ficará restrita às referências. Pode-se então focar nas resoluções do modelo de Big-Bang a modelos com ricochete.

## Problemas do Modelo de Big-Bang

O problema da homogeneidade, brevemente, comentado anteriormente, pode ser expresso matematicamente. Em um universo em contração dominado por fluido perfeito de equação de estado  $\omega$ , têm-se para o Horizonte de Partículas:

$$R_H = \frac{3(1+\omega)}{1+3\omega} t_f \left[ 1 - \left( \frac{t_i}{t_f} \right)^{\frac{1+3\omega}{3(1+\omega)}} \right], \quad (3.63)$$

onde  $t_i$  e  $t_f < 0$  e marcam o começo e o fim da contração. Dado que  $|t_i| \gg |t_f|$ , quaisquer fluidos de  $\omega > -1/3$  proporcionariam contração com horizonte de tamanho inicial arbitrariamente grande. Assim, contato causal entre regiões da CMB atual seria estabelecido[20].

A resolução do problema da Planza é similar ao obtido pela inflação, no sentido de obtenção de um período onde  $|1 - \Omega|$  decresce. Derivando a definição desse parâmetro 3.6:

$$\frac{d|1 - \Omega|}{dt} = -2|k| \frac{\ddot{a}}{a^3} \quad (3.64)$$

A derivada em questão será negativa durante a contração, caso  $\ddot{a} < 0$  e  $\dot{a} < 0$ . Portanto durante a contração do universo o parâmetro  $|1 - \Omega|$  irá se aproximar de 0 mesmo começando da ordem da unidade. Um diferencial para o caso da inflação é que a contribuição da curvatura torna-se imporante para valores pequenos do fator de escala, devido a sua dependência com  $a^{-2}$ . Desta forma, para obter-se uma curvatura próxima a 0 hoje em dia é preciso que tenha havido mais contração no universo pré-ricochete do que expansão pós-ricochete. Assim estar-se-ia ainda no regime de baixa curvatura, equivalente à região relativamente próxima ao ricochete.

Demais problemas, como a origem das perturbações primordiais, também são solucionados. Nesse caso em específico, elas são originadas no regime de universo bem antigo, quando ainda era extremamente grande. A produção das perturbações se dá dentro da escala de Hubble, ou seja, propagarão até saírem da mesma, em efeito similar ao inflacionário. Uma vantagem deste cenário é a não necessidade de escalas de Planck para criação das perturbações. Entretanto é necessário ter cuidado com o mecanismo de ricochete, que deverá preservar as características das perturbações, como índices espectrais e amplitude. Transfere-se a questão do comportamento das perturbações a altas energias de sua ori-

gem (regime inflacionário) para sua transferência pro ramo de universo atual (cruzando o ricochete) [41, 19, 77, 35, 27].

Modelos de universos em contração com ricochete precisam de uma teoria melhor estabelecida para seu processo de reaquecimento e criação de partículas. Sem esse avanço é impossível analisar a questão das relíquias térmicas e defeitos topológicos. Este assunto tem sido tema de artigos recentes[78].

### 3.4.2 Cenário de Ricochete de Matéria

Antes mesmos dos cenários inflacionários serem desenvolvidos, diversas outras alternativas ao modelo de Big-bang haviam sido propostas. Os primeiros modelos cosmológicos a utilizarem um ricochete – na verdade, inúmeros – para explicar as incongruências no modelo de Big-Bang foram os modelos cíclicos [13]. Das equações de Friedmann para um universo fechado a existência de um Big-Crunch é natural, restando apenas um mecanismo que parasse a contração e o re-expandisse. Propostas incluem tentativas de Tolman e Lemaître. Existem diversos cenários e modelos que justificam o comportamento cíclico, desde os mais antigos [13] a tentativas mais novas, no contexto de mundo-brana e ekpyrose [79, 76, 80, 17, 54]. As condições iniciais do universo e seu ajuste fino resumem os problemas do modelo de Big-bang, e universos cíclicos, eternos, seriam um jeito de diluir o ajuste.

O avanço de teoremas de singularidade na Relatividade Geral afastou a pesquisa de modelos de ricochete não-singulares. No entanto, modificações da mesma, além de outras teorias que utilizam campos que violassem a condição de energia nula (mais à respeito em 3.4.3) resgataram essa linha de pesquisa.

Deve-se reforçar que o universo pré-ricochete teria apenas matéria e radiação (além de eventual curvatura). Sua condição inicial, começando muito grande, indica a dominação de matéria. A dualidade de Wands mencionada acima proporciona uma das maiores motivações para o retorno ao estudos de modelos com ricochete. Explicada no próximo capítulo, a dualidade mostra que simetria na equação de Mukhanov-Sasaki mapeia soluções de (quasi-) de Sitter em soluções de (quasi-) dominação de matéria. Esse mapeamento fortalece o argumento de perturbações originadas no universo antigo, solidificando o cenário [25, 53].

É uma estratégia comum, e que será utilizada no trabalho, a adoção de um campo es-

calar – também denominado  $\varphi$  – para descrição da componente de matéria nesse universo. Sua interpretação pode ser feita como, de fato, a existência de um campo escalar dominando a densidade de energia do universo ou como apenas uma descrição fenomenológica do quê o universo de fato continha.

Desta maneira, continuamos com a ação 3.22 e as equações 3.27 e 3.28. Desta vez, no entanto, as condições impostas ao campo não são de slow-roll. Como que-se obter dominação de matéria,  $p \ll \rho$ , através de suas definições 3.24 e 3.25<sup>10</sup> obtém-se:

$$\dot{\varphi}^2 \simeq 2V \Rightarrow \ddot{\varphi} \simeq V_{,\varphi} \quad (3.65)$$

As condições acima são denominadas condição de quasi-dominância de matéria. Reescrevendo as equações 3.27 e 3.28:

$$H^2 = \frac{2}{3}V \quad (3.66)$$

$$3H\dot{\varphi} + 2V_{,\varphi} = 0 \quad (3.67)$$

O campo escalar que proporciona dominação exata de matéria possui potencial  $V(\varphi) = e^{-\sqrt{3}|\varphi|}$ . Espera-se que campos escalares que possuam dependência em  $\varphi$  parecida induzam equação de estado similar à de matéria.

A teoria de perturbações cosmológicas desenvolvida em seu capítulo específico é imediatamente transferível para o cenário de dominação de matéria. Os mesmos comportamentos obtidos para escalas dentro e fora da escala de Hubble serão encontrados novamente. Ainda, conforme a dualidade de Wands, as soluções da equação de Mukhanov-Sasaki serão as mesmas, induzindo um mesmo espectro para as perturbações.

Todavia, é interessante notar algumas diferenças e questões. O modo das perturbações que será dominante será outro devido à contração do universo ([15]). Essa diferença não ocasiona problemas quanto à dependência do espectro de potência com  $k$  [25]. A fase de contração poderia também levar a perturbações divergentes, mesmo num ricochete não-singular. Entretanto, argumentos defendendo a teoria de perturbações em universo em contração são fortes e podem ser encontrados nas referências [81, 35]. Ainda deve

---

<sup>10</sup>A definição para densidade e pressão são as mesmas do regime inflacionário, já que estamos tratando de um campo escalar minimamente acoplado à gravitação

ser levado em consideração o fato do calibre Newtoniano não ser válido para o ricochete, sendo necessária a escolha de outros, como o síncrono ou o harmônico. Fora do ricochete sua utilização é possível.

### 3.4.3 Realizando o Ricochete

Para evitar a singularidade cosmológica, modelos com ricochete devem basicamente contar com uma das duas condições: modificação da Relatividade Geral ou fluido perfeito que viole a condição de energia nula (NEC). Em outras palavras, é preciso violar as condições impostas pelos teoremas de singularidade de Hawking e Penrose.

A violação da NEC é usualmente acompanhada de campos de energia cinética nula: fantasmas/ghosts. No entanto, há propostas de realização de ricochete através de campos menos ortodoxos, como galileons[20]. Saindo um pouco do cenário padrão há propostas que evitam ghosts motivadas por teoria de cordas, como a Dirac-Born-Infeld [82].

O uso de cosmologia quântica, seja por Wheeler-DeWitt [83] seja por Loop Quantum Cosmology [58, 84, 85], tem sido explorado ao longo de anos recentes, encontrando bons resultados para a produção de ricochetes [71, 86].

As referências [12, 20] contém análises de diversos modelos e como eles podem produzir ricochetes. Um apanhado das dificuldades encontradas por todos esses modelos, e do cenário em geral, também é encontrado no referidos trabalhos.

# Capítulo 4

## Ricochete de Starobinsky

Este capítulo é destinado primeiramente à introdução do modelo inflacionário de Starobinsky. Em seguida, a dualidade de Wands é revisada. A reparametrização da inflação de Starobinsky é feita, para então a dualidade de Wands ser utilizada. Finalmente o universo em contração resultante é detalhado.

### 4.1 Introdução

Teorias  $f(R)$  possuem diversas aplicações na cosmologia [11]. Sua motivação é multifacetada, visto que a Relatividade Geral desde seus princípios enfrenta diversas complicações, como a existência de singularidades. Há também outras descobertas mais recentes, como a aceleração cosmológica, a existência de matéria escura e a necessidade de período inflacionário – ou necessidade do universo possuir um ricochete passado. Apesar do sucesso do modelo  $\Lambda$ CDM, que cada vez mais confere com as observações [1], ainda são realizadas tentativas de explicar os fenômenos acima de outras formas.

Matéria escura [87], energia escura e aceleração cosmológica atual [88, 89] são discutidas dentro do contexto de teorias  $f(R)$ . É digno de nota que a gravitação em  $f(R)$  é equivalente à teorias de Brans-Dicke, escalares-tensoriais<sup>1</sup>. Mais geralmente ambas estão contidas dentro do contexto de teorias de Horndeski [90, 91].

Entretanto é no paradigma inflacionário que teorias  $f(R)$  encontram seu maior sucesso, na forma da inflação de Starobinsky [9]. O cenário cosmológico sem singularidade, desejado por Starobinsky, não foi obtido mas o universo de de Sitter utilizado mostrou-se

---

<sup>1</sup>Este fato deixa clara a existência de um grau de liberdade escalar a mais nas teorias  $f(R)$ , comentada em capítulos anteriores.

útil. O resultante período inflacionário decorrente do modelo de  $f(R)$  de Starobinsky é atualmente o que melhor adequa-se às observações [2]. É por esse motivo que o modelo de Starobinsky será utilizado no trabalho.

Caso um modelo inflacionário coincida bem com as observações, isso o tornaria o único modelo capaz de explicar tais resultados? Haveria algum modelo de universo primordial que não só resolvesse os problemas padrões do modelo de Big-Bang como também predissesse os mesmos resultados observacionais? É através dessas questões que entra a dualidade de Wands [3]. Através da simetria, a ser demonstrada, presente na descrição das perturbações cosmológicas (que provêm os observáveis cosmológicos) seria possível demonstrar a equivalência observacional entre modelos inflacionários e modelos de quasi-dominância de matéria.

Este capítulo contém o procedimento desenvolvido para obter um modelo de universo em contração a partir da inflação de Starobinsky. Uma modificação do modelo de Starobinsky é necessária, e sua motivação fenomenológica e construções são expostas a seguir. A revisão da dualidade de Wands e breves comentários sobre outros mapeamentos entre modelos são abordados na subseção seguinte. Por último a dualidade é utilizada para construção do modelo de ricochete de Starobinsky.

## 4.2 Inflação de Starobinsky

A ação generalizada das teorias  $f(R)$  sem campo escalar acoplado pode ser escrita como:

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + \int d^4x \mathcal{L}_M(g_{\mu\nu}, \Psi_M), \quad (4.1)$$

onde o segundo termo representa a parte de matéria, dependente da métrica  $g_{\mu\nu}$  e dos campos de matéria  $\Psi_M$ . Das equações de movimento<sup>2</sup> conclui-se que para haver solução exata de de Sitter, sem matéria, é necessário que  $f(R) = \alpha R^2$  [42]. A partir do traço da equação de movimento obtida a partir da variação de 4.1 em relação à métrica:

---

<sup>2</sup>As equações de movimento são obtidas no formalismo métrico, que fornece resultados diferentes do de Palatini.

$$F(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R) - \nabla_\mu \nabla_\nu F(R) + g_{\mu\nu} \square F(R) = \kappa^2 T_{\mu\nu} \quad (4.2)$$

$$3\square F(R) + F(R)R - 2f(R) = \kappa T, \quad (4.3)$$

onde  $F(R) = \partial f(R)/\partial R$

Uma solução de de Sitter existe para soluções de vácuo ( $T = 0$ ) para  $R$  constante. Desta forma, a equação 4.3 torna-se:

$$F(R)R - 2f(R) = 0 \quad (4.4)$$

Justificando a afirmação acima,  $f(R) = \alpha R^2$  satisfaz a equação 4.4, sendo sua solução (além desta, há a trivial  $R = 0$ ).

Conforme explicado anteriormente, a solução exata de de Sitter não é a indicada para o regime inflacionário por não permitir conexão (graceful exit) para o universo de FLRW atual. Isso de princípio já não é um problema, porque a Relatividade Geral é descrita pelo termo linear em  $R$ , que não poderia ficar de fora da expressão completa de  $f(R)$ . É o termo linear (quando domina) que terminará o regime inflacionário, e que proporcionará os desvios de de Sitter exato.

Entretanto, não foi pensando em inflação e saída graciosa que o trabalho de Starobinsky foi originado. O objetivo era partir de modificações da Relatividade Geral motivadas por correções a um loop de campos de matéria e obter um universo sem singularidade [9]. Ao final das contas a singularidade não foi evitada mas o regime de de Sitter foi obtido como possível dada as modificações previamente estabelecidas.

Desta forma, retirando o papel da modificação das equações de Einstein dos campos de matéria para a própria forma funcional da ação de Einstein-Hilbert, obtém-se o já mencionado termo  $\alpha R^2$ . Mais precisamente, para a inflação de Starobinsky, têm-se:

$$f(R) = R + \frac{R^2}{6M^2} \quad (4.5)$$

A fim de obter-se as devidas quantidades cosmológicas relevantes, como a evolução

do fator de escala, a função de Hubble, são necessários cálculos que ficarão restritos às referências [30, 9].

É necessário mencionar que a inflação de Starobinsky é descrita tanto no Referencial de Jordan quanto no de Einstein. No primeiro a teoria é descrita pela ação 4.1, enquanto no segundo a inflação é realizada por um campo escalar minimamente acoplado à ação de Einstein-Hilbert. A referência [30] no entanto opta por resolver o fundo a partir do Referencial de Einstein, por estabelecer um mesmo procedimento para todos os modelos de campo escalar geralmente abordados. Este trabalho focará no Referencial de Jordan<sup>3</sup>.

Sendo assim, para o fator de escala inflacionário [30]:

$$a(t)_{R^2} = a_0 (t_s - t)^{1/2} \exp \left[ -\frac{M^2}{12} (t_s - t)^2 \right] \quad (4.6)$$

onde  $t_s$  demarca a escala inflacionária – fim da inflação em  $t \sim t_s$  – e  $(t_s - t)$  é grande, porque  $t_s \gg t$  [92]. O fator de escala 4.6 deixa claro o desvio do regime de de Sitter, que seria puramente exponencial.

Outras quantidades relevantes, e que serão utilizados para a fenomenologia das perturbações cosmológicas na inflação de Starobinsky, são a função de Hubble e sua derivada temporal:

$$H_{R^2} = \frac{-3 + M^2 (t_s - t)^2}{6 (t_s - t)} \quad (4.7)$$

$$\dot{H}_{R^2} = \frac{1}{2 (t_s - t)^2} - \frac{M^2}{6} \quad (4.8)$$

As quantidades acima permitem o cálculo do primeiro parâmetro de slow-roll de Hubble,  $\epsilon_h$ , obtendo-se:

---

<sup>3</sup>O tratamento inflacionário pode ser construído em ambos os Referenciais devido a pouca alteração dos invariantes de curvatura [45], entretanto grandezas físicas são apenas bem estabelecidas no de Jordan [42]. A discussão sobre a validade dos Referenciais é extensa na literatura [92].

$$\epsilon_{h,R^2} = \frac{6 \left( 3 + M^2 (t_s - t)^2 \right)}{\left( 3 - M^2 (t_s - t)^2 \right)^2} \quad (4.9)$$

$$\simeq \frac{M^2}{6H^2} \quad (4.10)$$

Como para a inflação em slow-roll deve-se ter  $\epsilon_h \ll 1$ , chega-se a conclusão que para o começo da inflação  $H^2 \gg M^2$ .

Também é possível obter a equação que descreve a evolução do escalar de curvatura  $R$ . Lembrando, quando  $R^2$  deixa de dominar na ação, a inflação acaba.

$$\ddot{R} + 3H\dot{R} + M^2R = 0 \quad (4.11)$$

$$R \simeq 12H^2 - M^2 \quad (4.12)$$

Utilizando-se a conclusão, acima, de que  $H^2 \gg M^2$ , pode-se utilizar a aproximação  $R \simeq 12H^2$ . Para os valores iniciais das quantidades acima pode-se também tomar aproximações:

$$H_{R^2} \simeq \frac{M^2}{6} (t_s - t) \quad (4.13)$$

$$\dot{H}_{R^2} \simeq -\frac{M^2}{6} \quad (4.14)$$

Indo além na aproximação de slow-roll [93], é possível encontrar uma outra evolução para o fundo inflacionário. As diferenças em termos observacionais são no entanto desprezíveis (a ser demonstrado):

$$a(t)_{O^2R^2} = a_0 (t_s - t)^{-1/6} \exp \left[ -\frac{M^2}{12} (t_s - t)^2 \right] \quad (4.15)$$

$$H_{O^2R^2} = \frac{1 + M^2 (t_s - t)^2}{6 (t_s - t)} \quad (4.16)$$

$$\dot{H}_{O^2R^2} = \frac{1}{6 (t_s - t)^2} - \frac{M^2}{6} \quad (4.17)$$

Pode-se notar o mesmo comportamento do início do regime inflacionário. Isso pode ser compreendido através do fato de única diferença entre os fatores de escala ser o expoente do polinômio multiplicando a exponencial. Será a exponencial que comandará a evolução inflacionária; o termo multiplicativo apenas modifica ligeiramente seu comportamento, todos esses fatores configurando um comportamento de quasi-de Sitter. Esse é um dos princípios utilizados para justificar a modificação da inflação de Starobinsky apresentada futuramente.

Por fins de completeza, é apresentada também a evolução inflacionária no Referencial de Einstein. Com a devida transformação conforme, obtém-se para potencial do campo escalar – o "inflaton" do Referencial de Einstein. Ele se enquadra nos potenciais denominados de 'plateau':

$$V(\varphi) = \frac{3M^2}{4\kappa^2} \left(1 - e^{-\sqrt{2/3}\kappa\varphi}\right)^2 \quad (4.18)$$

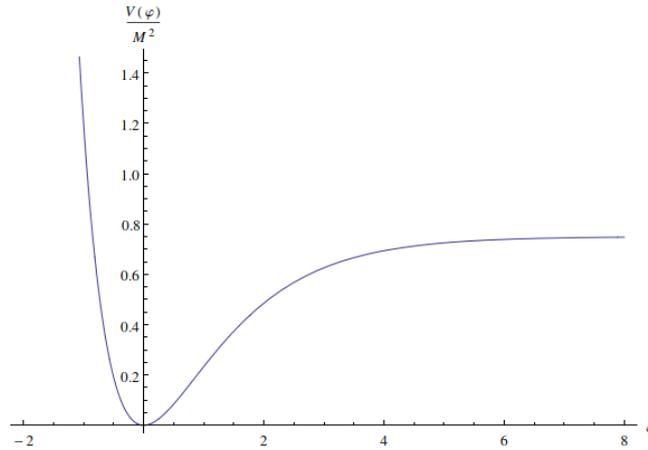


Figura 4.1: Potencial do campo escalar para a inflação de Starobinsky no referencial de Einstein

Novamente, a evolução do fundo será uma expansão de quasi-de Sitter, ou seja, um comportamento modificado da exponencial:

$$\tilde{a}(\tilde{t}) \simeq \left(1 - \frac{M^2}{12H_i^2} M\tilde{t}\right) a_i e^{M\tilde{t}/2} \quad (4.19)$$

onde as quantidades com til são pertencentes ao Referencial de Einstein.

Após o regime inflacionário de Starobinsky, tem-se o reaquecimento (*reheating*) previsto pelo modelo. Em termos do Referencial de Einstein, ele pode ser entendido como a fase quando o campo escalar  $\varphi$  já desceu seu potencial e passa a oscilar em torno de seu mínimo. Para pequenos valores do campo, o potencial da inflação de Starobinsky assemelha-se à forma  $V = \varphi^2$ .

É interessante notar que durante o reheating as diferenças entre a utilização do Referencial de Jordan e de Einstein são marcantes. A equivalência entre ambos durante a inflação ocorria devido a pequena mudança de escalares, como a curvatura de Ricci  $R$ . Entretanto, ao comparar-se sua evolução nos dois referenciais, nota-se uma diferença em como  $R$  decai com o tempo. Maiores detalhes podem ser vistos ao final da seção 7.2 de [30].

Ainda no referencial de Einstein, tem-se que a inflação de Starobinsky é equivalente à inflação de Higgs [94, 69]. A inflação de Higgs, como o nome sugere, tem o campo escalar de Higgs como o inflaton. No entanto, ela não ocorrerá no regime de acoplamento mínimo [64]. Por ser equivalente à de Starobinsky, a inflação de Higgs também é favorecida observacionalmente [4, 2].

## Perturbações e Fenomenologia

O acesso à evolução cosmológica à época da inflação é possível através das perturbações cosmológicas observadas. Para um universo dotado de campo escalar minimamente acoplado à gravitação, a teoria de perturbações em termos dos parâmetros de slow-roll já foi detalhada. Entretanto, para o caso de Starobinsky no Referencial de Jordan são necessárias modificações. Mais parâmetros precisam ser detalhados devido a inexistência de campo escalar no modelo.

Os HSRP são iguais aos descritos no capítulo anterior. Entretanto, define-se outros dois [42]:

$$\epsilon_3 = \frac{\dot{F}}{2HF} \quad (4.20)$$

$$\epsilon_4 = \frac{E}{2HE} \quad (4.21)$$

$$E = F \left[ \omega + \frac{3\dot{F}^2}{2\kappa\dot{\varphi}^2 F} \right] \quad (4.22)$$

Para um regime de quasi-de Sitter o índice espectral escalar pode ser reescrito em termos dos HSRP como [42]:

$$n_{\mathcal{R}} - 1 \simeq -4\epsilon_h - 2\eta_h + 2\epsilon_3 - 2\epsilon_4 \quad (4.23)$$

A inflação de Starobinsky ocorre para um universo sem campo escalar adicional, ou seja, sem outros fluidos importantes para a evolução de fundo. Somado a este fato, por estar-se no começo da inflação:

$$F = 1 + \frac{R}{3M^2} \simeq \frac{4H^2}{M^2} \quad (4.24)$$

Na literatura é comum reescrever os observáveis em termo do número de e-folds. Para a forma da inflação de Starobinsky utilizada até o instante, seguindo 4.6:

$$N_{R^2} = \int_{t_i}^{t_s} H dt = \int_{t_i}^{t_s} \frac{3 - M^2 (t_s - t)^2}{6 (t_s - t)} dt \quad (4.25)$$

$$\simeq \frac{M^2}{12} (t_s - t_i)^2 \quad (4.26)$$

Já para o primeiro parâmetro de slow-roll de Hubble,  $\epsilon_h$ , têm-se:

$$\epsilon_{R^2} = \frac{6 \left( 3 + M^2 (t_s - t)^2 \right)}{\left( 3 - M^2 (t_s - t)^2 \right)^2} \quad (4.27)$$

$$= \frac{1}{2 (t_s - t)^2 H^2} + \frac{M^2}{6H^2} \quad (4.28)$$

$$\simeq \frac{6}{M^2 (t_s - t)^2} = \frac{M^2}{6H^2} \quad (4.29)$$

Finalmente, aplicando-se a definição dos parâmetros de slow-roll acima e das demais, têm-se que  $\epsilon_3 \simeq \epsilon_4$ . Adicionalmente,  $\eta_h = 0$  por não existir campo escalar no modelo. Desta forma o índice espectral pode ser simplificado como:

$$n_{\mathcal{R}} - 1 \simeq -4\epsilon_h = -\frac{2}{N} \quad (4.30)$$

O mesmo pode ser feito para a razão tensorial-escalar:

$$r \simeq 48\epsilon_3 \simeq 48\epsilon_h^2 \simeq \frac{12}{N^2} \quad (4.31)$$

Para o número de e-folds requerido a fim de resolver os problemas do modelo de Big-Bang, o índice espectral 4.30 coincide fortemente com as observações [4, 5], sendo o mesmo válido para  $r$  dado por 4.31. As dependências com o número de e-folds acima é característica da inflação de Starobinsky, sendo novamente encontrada em seus cálculos no Referencial de Einstein.

A equivalência<sup>4</sup> entre 4.15 e 4.6 pode ser também vista a partir da relação aproximada de seus parâmetros  $\epsilon_h$ .

$$\epsilon_{O^2 R^2} = \frac{6 \left( -1 + M^2 (t_s - t)^2 \right)}{\left( 1 + M^2 (t_s - t)^2 \right)^2} \quad (4.32)$$

$$= \frac{-1}{6 (t_s - t)^2 H^2} + \frac{M^2}{6H^2} \quad (4.33)$$

$$\simeq \frac{M^2}{6H^2} \quad (4.34)$$

Por sua vez, o Referencial de Einstein da inflação de Starobinsky permite o ferramental apresentado no capítulo anterior. Utilizando os PSRP, a partir do potencial 4.18:

$$\epsilon_v \simeq \frac{4}{3} \left( e^{-\sqrt{2/3}\kappa\varphi} - 1 \right)^{-2} \quad (4.35)$$

$$\eta_v \simeq -\frac{4}{3} e^{-\sqrt{2/3}\kappa\varphi} \left( 1 - 2e^{-\sqrt{2/3}\kappa\varphi} \right) \quad (4.36)$$

Reescrevendo-os termo do número de e-folds  $N$ :

---

<sup>4</sup>Mais precisamente a equivalência sob a devida aproximação das previsões observacionais de ambas expressões

$$N \simeq \kappa^2 \int_{\varphi_f}^{\varphi_i} \frac{V}{V_{,\varphi}} d\varphi \simeq \frac{3}{4} e^{\sqrt{2/3}\kappa\varphi} \quad (4.37)$$

$$\Rightarrow \epsilon_v \simeq \frac{3}{4N^2} \quad (4.38)$$

$$\Rightarrow \eta_v \simeq -\frac{1}{N} \quad (4.39)$$

Relembrando a expressão para o índice espectral escalar em termos dos PSRP, (2.55), e para a razão tensorial-escalar (2.57) aplicando as definições acima:

$$n_{\mathcal{R}} - 1 \simeq 2\eta_h - 6\epsilon_h \quad (4.40)$$

$$\simeq -\frac{2}{N} \quad (4.41)$$

$$r \simeq 16\epsilon_h \simeq \frac{12}{N^2} \quad (4.42)$$

Conforme mencionado, 4.41 é idêntico a 4.30, e 4.31, idêntico a 4.42.

A partir da amplitude do espectro de potência das perturbações escalares é possível ainda determinar a ordem de grandeza de  $M$  para a inflação de Starobinsky. Pelos valores mais recentes:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} \simeq \frac{N^2}{3\pi} \left( \frac{M^2}{M_{\text{Pl}}} \right)^2 \quad (4.43)$$

$$M \simeq 15 \times 10^{-6} M_{\text{Pl}} \quad (4.44)$$

### 4.3 Dualidade de Wands

A ambiguidade referente à origem do espectro de potência de perturbações cosmológicas descoberta por Wands [3, 95] na virada do século é de suma importância para futuras pesquisas em modelos de universo primordial. Dada uma construção sensata, cenários de quasi-dominância de matéria poderiam ser mapeados em já estudados modelos inflacionários. Essa é a motivação da dissertação e que será explorada nas seções a seguir. Uma pequena introdução baseada no artigo apresentado por Wands será feita abaixo.

De forma simples, a dualidade de Wands pode ser compreendida como a simetria

presente nas equações de Mukhanov-Sasaki para perturbações cosmológicas. Começando pelo caso de perturbações no campo (o tratamento para a perturbação de curvatura é idêntico), partimos da equação de onda:

$$u_{\mathbf{k}}'' + (k^2 + \mu^2) u_{\mathbf{k}} = 0 \quad (4.45)$$

$$\mu^2 \equiv -\frac{a''}{a}, \quad (4.46)$$

onde as condições de contorno explicitadas no capítulo 'Perturbações Cosmológicas' são válidas. No caso do fator de escala ser do tipo lei de potência,  $a(t) \propto t^p$ , ele pode ser reescrito no tempo conforme e então aplicado em 4.45:

$$a(\eta) \propto \eta^{\frac{1}{2}-\nu} \quad (4.47)$$

$$\nu = \frac{3}{2} + \frac{1}{p-1} \quad (4.48)$$

$$\Rightarrow \mu^2 = -\frac{\nu^2 - 1/4}{\eta^2} \quad (4.49)$$

A resolução da equação 4.45 e o subsequente cálculo do espectro de potência (novamente, mesmo procedimento demonstrado no capítulo 'Perturbações Cosmológicas') leva a:

$$\mathcal{P}_u = \frac{C^2(|\nu|)k^2(-k\eta)^{1-2|\nu|}}{4\pi^2}, \quad (4.50)$$

onde  $C^2(|\nu|)$  é um coeficiente numérico.

Como o espectro de potência acima é invariante perante  $\nu \rightarrow -\nu$ , isso implica, via 4.48, invariância em relação a transformação em  $p$ :

$$p \rightarrow \tilde{p} = \frac{1-2p}{2-3p} \quad (4.51)$$

O limite da expansão de de Sitter (obtido para  $p \rightarrow \infty$ ) revela uma simetria entre este cenário e  $p = 2/3$ , um universo dominado por poeira. Isso acontece porque o termo

de massa  $\mu^2$  em ambos esses casos é igual,  $2/\eta^2$ . Desta forma 4.45 resulta nos mesmo espectros, módulo condições iniciais. Nesse caso, para a métrica, a simetria é:

$$a(\eta) \rightarrow \tilde{a}(\eta) \equiv a_B(\eta) = Ca(\eta) \int_{\eta_*}^{\eta} \frac{d\eta'}{a^2(\eta')} \quad (4.52)$$

Desta forma, um mesmo espectro de potência será obtido para a família de soluções à dois parâmetros acima. A constante arbitrária  $C$  apenas reescala a métrica mas sem influência em observações, enquanto  $\eta_*$  define uma família de soluções a um parâmetro.

Para perturbação de curvatura, seguindo a equação de Mukhanov-Sasaki, de mesma estrutura de 4.45 (do capítulo de Perturbações Cosmológicas, 2.25), tem-se a mesma simetria:

$$z(\eta) \rightarrow \tilde{z}(\eta) \equiv z_B(\eta) = Cz(\eta) \int_{\eta_*}^{\eta} \frac{d\eta'}{z^2(\eta')} \quad (4.53)$$

Portanto, um universo inflacionário de função  $z(\eta)$  em termos de perturbações escalares será indistinguível de um universo em contração de função  $z_B(\eta)$ .

Para as perturbações tensoriais, o mesmo raciocínio é válido, vide que a forma funcional da equação de Mukhanov-Sasaki será a mesma. Todavia, não é garantido que universos que possuam o mesmo espectro escalar venham a ter o mesmo espectro tensorial. Para as perturbações tensoriais, a simetria de sua equação de Mukhanov-Sasaki será:

$$z_t(\eta) \rightarrow \tilde{z}_t(\eta) \equiv z_{B-t}(\eta) = Cz_t(\eta) \int_{\eta_*}^{\eta} \frac{d\eta'}{z_t^2(\eta')} \quad (4.54)$$

Para campos escalares minimamente acoplados a gravitação,  $z_s(\eta) \propto a(\eta)$  e  $z_t(\eta) = a(\eta)$  [3]. Esse não será o caso da inflação de Starobinsky e teorias  $f(R)$  em geral. Por isso utiliza-se as funções apresentadas em 2.5. Deve-se reforçar o fato de que, no entanto, a simetria apresentada acima não diz nada a respeito de como as perturbações no universo em quasi-dominância de matéria são produzidas. Apenas a forma funcional de  $z_{s,t}(\eta)$  é definida, podendo ser realizada dentro de diferentes contextos.

## 4.4 Reparametrizando a Inflação de Starobinsky

Todo o procedimento e análise da dualidade de Wands é realizado no tempo conforme. Isto implica na necessidade de obter-se uma nova expressão do fator de escala da inflação de Starobinsky 4.6, porque a passagem deste fator de escala do tempo cósmico  $t$  para o tempo conforme  $\eta$  é impossível. Esta impossibilidade provém da integração de um integrando do tipo  $x^p \exp[ax + bx^2]$ , com  $b > 0$ ,  $p < 0$ , que resulta invariavelmente em integrais complicadas. A integral necessária para a passagem de um tempo para o outro deve ser possível de ser resolvida:

$$\eta = \int \frac{dt}{a(t)} \quad (4.55)$$

A abordagem escolhida foi de modificar o fator de escala 4.6 de tal forma que os observáveis da teoria mudem o menos possível, ou seja, devemos obter parâmetros de slow-roll próximos – iguais em primeira ordem, quando mais relevantes para a inflação, em seu começo.

Conforme demonstrado na seção anterior, a modificação do polinômio que multiplica o fator exponencial de 4.6 é de pouca relevância para a determinação do parâmetro de slow-roll  $\epsilon_h$ . Isso significa que ambos modelos da inflação de Starobinsky 4.6, 4.15 possuem as mesmas previsões observacionais a primeira ordem em slow-roll. Inspirado-se nesse fato, o novo fator de escala para a inflação de Starobinsky terá a mesma exponencial presente em 4.6 – até porque, é nela onde está a informação inerente do modelo, o termo  $M^2$  – mas com outro fator multiplicativo. O polinômio escolhido é tal que a integral 4.55 possa ser resolvida analiticamente. Outras escolhas seriam possíveis mas utilizam polinômios de ordem maior.

Um fator de escala que permite tal integração e que será utilizado daqui em diante é:

$$a(t) = a_0 (t_s - t)^{-1} \exp \left[ -\frac{M^2}{12} (t_s - t)^2 \right] \quad (4.56)$$

Realizando a passagem deste fator de escala em termos do tempo cósmico para o tempo coordenada:

$$\eta = \int \frac{1}{a_0} (t_s - t) \exp \left[ \frac{M^2}{12} (t_s - t)^2 \right] dt \quad (4.57)$$

$$= \frac{-6}{a_0 M^2} \exp \left[ \frac{M^2}{12} (t_s - t)^2 \right] \quad (4.58)$$

$$= \frac{-6}{M^2} \frac{a(t)^{-1}}{(t_s - t)} \quad (4.59)$$

$$\Rightarrow a(\eta) = \frac{\sqrt{3}}{M} \left[ \eta^2 \log \left( \frac{-a_0 M^2 \eta}{6} \right) \right]^{-1/2} \quad (4.60)$$

A partir de agora, utilizaremos a definição  $\bar{\eta} \equiv \frac{-a_0 M^2 \eta}{6}$  a fim de simplificar as expressões utilizadas.

Podemos confirmar que a nova forma para o fator de escala, 4.56, de fato produz observáveis semelhantes ao das prévias expressões 4.6 e 4.15. Para tal calcula-se a função de Hubble correspondente e o subsequente parâmetro  $\epsilon_h$ :

$$H = \frac{6 + M^2 (t_s - t)^2}{6 (t_s - t)} \quad (4.61)$$

$$\epsilon_h = \frac{6 \left( -6 + M^2 (t_s - t)^2 \right)}{\left( 6 + M^2 (t_s - t)^2 \right)^2} \quad (4.62)$$

$$\simeq \frac{6}{M^2 (t_s - t)^2} \quad (4.63)$$

De fato, encontra-se em primeira ordem a mesma expressão para o parâmetro de slow-roll  $\epsilon_h$ , indicando a semelhança observacional desejada.

É interessante e será útil ao longo do capítulo o cálculo de todas as quantidades apresentadas no tempo conforme:

$$\mathcal{H}(\eta) = -\frac{1}{\eta} - \frac{1}{2\eta \log(\bar{\eta})} \quad (4.64)$$

$$H(\eta) = \frac{\mathcal{H}(\eta)}{a(\eta)} \quad (4.65)$$

$$= \frac{M}{\sqrt{3}} [\log(\bar{\eta})]^{1/2} + \frac{M}{2\sqrt{3}} [\log(\bar{\eta})]^{-1/2} \quad (4.66)$$

$$\epsilon_h = \frac{-1 + 2 \log(\bar{\eta})}{[1 + 2 \log(\bar{\eta})]^2} \quad (4.67)$$

Nota-se da expressão para a função de Hubble  $H(\eta)$  a sua pequena dependência temporal, ao contrário do obtido no caso de de Sitter exato. Lembrando que, na inflação,  $\eta$  assume valores negativos.

## 4.5 Ricochete tipo-Starobinsky

Dotados da evolução cosmológica de um universo inflacionário tipo-Starobinsky 4.56, dentro do contexto de uma teoria  $f(R)$  de Starobinsky, podemos passar para a fase de obtenção de sua função  $z_s(\eta)$ . Em sequência poderemos utilizar da Dualidade de Wands para construção de um universo equivalente em termos de perturbações escalares.

Relembrando a teoria de perturbações para modelos de  $f(R)$ , têm-se:

$$z_s(t) \equiv a(t) \sqrt{Q_s} \quad (4.68)$$

$$= a(t) \left( \frac{3\dot{F}^2/2\kappa^2 F}{\left[ H + \left( \frac{\dot{F}}{2F} \right)^2 \right]^2} \right)^{1/2} \quad (4.69)$$

$$z_s(\eta) = a(\eta) \left( \frac{3F'^2/2a(\eta)^2\kappa^2 F}{\left[ H(\eta) + \left( \frac{F'}{2a(\eta)F} \right)^2 \right]^2} \right)^{1/2} \quad (4.70)$$

Onde da segunda para a terceira linha foi realizada a passagem das derivadas em relação ao tempo cósmico  $t$  para o tempo conforme  $\eta$ , através da relação  $a d\eta = dt$

Para a função  $F$  utilizaremos a aproximação apresentada na seção anterior  $F(\eta) \cong 4H(\eta)^2/M^2$ , com  $H(\eta) = \mathcal{H}(\eta)/a(\eta)$ . Assim poderemos calcular  $z_s(\eta)$  conforme desejado. Aplicando-se a aproximação em questão na expressão 4.70:

$$z_s(\eta) = a(\eta) \left( \frac{\left[ 3(4H(\eta)^2/M^2)'^2 \right] / \left[ 2a(\eta)^2\kappa^2 4H(\eta)^2/M^2 \right]}{\left[ H(\eta) + \left( \frac{(4H(\eta)^2/M^2)'}{2a(\eta)4H(\eta)^2/M^2} \right)^2 \right]^2} \right)^{1/2} \quad (4.71)$$

Entretanto, ainda será necessário realizarmos aproximações dentro da expressão de  $F$ , não apenas para simplificação dos cálculos seguintes mas para ser possível a realização da integral presente na dualidade de Wands. Como estamos no limite de grande  $\bar{\eta}$ :

$$F \approx \frac{4H(\eta)^2}{M^2} \quad (4.72)$$

$$= \frac{4}{M^2} \left[ \frac{M}{\sqrt{3}} [\log(\bar{\eta})]^{1/2} + \frac{M}{2\sqrt{3}} [\log(\bar{\eta})]^{-1/2} \right]^2 \quad (4.73)$$

$$= \frac{4}{3} [\log(\bar{\eta})]^{-1} \left[ \log(\bar{\eta}) + \frac{1}{2} \right]^2 \quad (4.74)$$

$$\simeq \frac{4}{3} [\log(\bar{\eta})] \quad (4.75)$$

Desta forma, utilizando 4.56, A.9 e os cálculos apresentados no Apêndice, temos para  $z_s(\eta)$

$$z_s(\eta) = a(\eta) \left[ \frac{\frac{2M^2}{3\kappa^2}}{\frac{M^2}{3} \log(\bar{\eta})} \right]^{1/2} \quad (4.76)$$

$$= \frac{-1}{\eta} \frac{\sqrt{3}}{M} [\log(\bar{\eta})]^{-1/2} \frac{\sqrt{2}}{\kappa} [\log(\bar{\eta})]^{-1/2} \quad (4.77)$$

$$= \frac{-\sqrt{6}}{M\kappa} [\eta \log(\bar{\eta})]^{-1} \quad (4.78)$$

Imediatamente podemos calcular  $z_s''(\eta)$  e o correspondente termo de massa para o nosso modelo em questão:

$$z_s''(\eta) = \frac{d^2 z_s(\eta)}{d\eta^2} \quad (4.79)$$

$$= -\frac{\sqrt{6} (2 \log^2(\bar{\eta}) + 3 \log(\bar{\eta}) + 2)}{M\kappa \eta^3 \log^3(\bar{\eta})} \quad (4.80)$$

$$\Rightarrow \frac{z_s''(\eta)}{z_s(\eta)} = \frac{2 \log^2(\bar{\eta}) + 3 \log(\bar{\eta}) + 2}{\eta^2 \log^2(\bar{\eta})} \quad (4.81)$$

$$\simeq \frac{2}{\eta^2} \left[ 1 + \frac{3}{2} \frac{1}{\log(\bar{\eta})} + \frac{1}{\log(\bar{\eta})^2} \right] \quad (4.82)$$

Em seguida, podemos utilizar a dualidade de Wands para obter a função  $z_s^B$ , de um universo com Ricochete<sup>5</sup>. Escolhendo a família de  $\eta^* = 0$ , temos:

<sup>5</sup>O superescrito 'B' foi escolhido para remeter ao termo em inglês, Bounce

$$z_s^B(\eta) = C \cdot z_s(\eta) \int_{\eta^*}^{\eta} \frac{d\eta'}{z_s(\eta')^2} \quad (4.83)$$

$$= C_0 [\eta \log(\bar{\eta})]^{-1} \left[ \frac{2}{27} \eta^3 - \frac{2}{9} \eta^3 \log(\bar{\eta}) + \frac{\eta^3}{3} [\log(\bar{\eta})]^2 \right] \quad (4.84)$$

$$= C_1 \eta^2 \log(\bar{\eta}) + C_2 \eta^2 + C_3 \eta^2 [\log(\bar{\eta})]^{-1} \quad (4.85)$$

Onde as constantes  $C_i$  são apenas o resultado da multiplicação de  $C_0$  pelos fatores presentes dentro dos colchetes de 4.84.

Como podemos ver, o termo dominante é o primeiro para grande  $\eta$ , garantindo  $z_s^B(\eta)$  positivo.

Calculando o termo de massa, obtemos:

$$\frac{z_s^{B''}}{z_s^B} = \frac{4 \log(\bar{\eta})^4 - 6 \log(\bar{\eta})^3 + 18 \log(\bar{\eta})^2 - 27 \log(\bar{\eta}) + 18}{\eta^2 \log(\bar{\eta})^2 (2 \log(\bar{\eta})^2 - 6 \log(\bar{\eta}) + 9)} \quad (4.86)$$

$$\simeq \frac{2}{\eta^2} \left[ 1 + \frac{3}{2} \frac{\log(\bar{\eta})^3}{(\log(\bar{\eta})^4 - 3 \log(\bar{\eta})^3 + \frac{9}{2} \log(\bar{\eta})^2)} + O(\log(\bar{\eta})^{-3}) \right] \quad (4.87)$$

Podemos notar que ambos os termos de massa são iguais até o segundo termo dominante para o limite de  $\eta$  grande, regime de validade da análise. Este resultado fortalece o procedimento utilizado até aqui.

De acordo com o que foi detalhado anteriormente, possuir uma função  $z_s(\eta)$  não é o suficiente para saber em qual tipo de universo em contração se está. É necessário a escolha de um modelo para este universo, seja um universo dotado de campo escalar minimamente acoplado a gravitação – que será o caso trabalhado –, seja um universo com  $f(R)$ ,  $f(T)$ , entre outros.

Para o caso do campo escalar, utilizamos o fato da dualidade de Wands para um universo de de Sitter levar a um universo de dominação de matéria para concluir que, para o modelo de quasi-de Sitter trabalhado, a dualidade de Wands nos leva a um universo de quasi-domação de matéria.

A dominação de matéria é marcada pela equação de estado  $p = 0$ . Para um campo

escalar, seguindo 3.25, temos então que sua energia cinética deve ser igual ao potencial:

$$\dot{\varphi} \simeq \sqrt{2}V^{1/2} \quad (4.88)$$

$$(4.89)$$

Quando esta relação é aplicada nas equações de Friedmann, podemos obter simplificações:

$$H \simeq \frac{\sqrt{2}}{3}V^{1/2} \quad (4.90)$$

$$\dot{\varphi} \simeq 3H \quad (4.91)$$

Lembrando que a função  $z_s(\eta)$  de um universo com campo escalar minimamente acoplado envolve a razão entre  $\dot{\varphi}$  e  $H$ , a função  $z_s(\eta)$  será então proporcional ao fator de escala:

$$z_s(\eta) = a(\eta) \frac{\dot{\varphi}}{H} \quad (4.92)$$

$$z_s(\eta) = 3a(\eta) \quad (4.93)$$

$$\Rightarrow a^B(\eta) = \frac{z_s^B(\eta)}{3} \quad (4.94)$$

Desta forma, para o fator de escala de um universo com quasi-dominância de matéria, que produz as mesmas perturbações escalares que a Inflação tipo-Starobinsky trabalhada:

$$a^B(\eta) = k_1\eta^2 \log(\bar{\eta}) + k_2\eta^2 + k_3\eta^2 [\log(\bar{\eta})]^{-1} \quad (4.95)$$

Assim como  $C_2$ ,  $k_2 < 0$ , já que  $k_i = C_i/3$ , vide 4.85.

Devemos agora construir como deve se comportar o campo escalar responsável por este universo. A evolução deste universo já é imediatamente obtida através de seu fator de escala acima:

$$\mathcal{H} = \frac{a'(\eta)}{a(\eta)} \quad (4.96)$$

$$= \frac{2k_1 \log^3(\bar{\eta}) + (k_1 + 2k_2) \log^2(\bar{\eta}) + 2m \log(\bar{\eta}) - k_3}{\eta \log(\bar{\eta}) (k_1 \log^2(\bar{\eta}) + k_2 \log(\bar{\eta}) + k_3)} \quad (4.97)$$

A partir das condições de quasi-dominância de matéria, pode-se obter o potencial do campo escalar em função do tempo:

$$V(\eta) \simeq \frac{3}{2} \frac{\mathcal{H}^2}{a^2} \quad (4.98)$$

$$= \frac{3 \left( 2k_1 \log^3(\bar{\eta}) + (k_1 + 2k_2) \log^2(\bar{\eta}) + 2k_3 \log(\bar{\eta}) - k_3 \right)^2}{2\eta^6 \left( k_1 \log^2(\bar{\eta}) + k_2 \log(\bar{\eta}) + k_3 \right)^4} \quad (4.99)$$

$$\simeq \frac{6}{k_1^2} \frac{1}{\eta^6 \log^2(\bar{\eta})} \quad (4.100)$$

$$(4.101)$$

No entanto, no que diz respeito à reconstrução do campo escalar desejado, deveremos utilizar algumas aproximações. Para a dependência do campo em respeito ao tempo conforme, utilizaremos que  $\mathcal{H} \approx 2/\eta$ , que é de fato o limite obtido para  $\eta$  grande em 4.97. Desta forma:

$$\varphi \simeq -\sqrt{3} \int \mathcal{H} d\eta \quad (4.102)$$

$$= -\sqrt{12} \log(\eta) \quad (4.103)$$

$$\Rightarrow \eta = \exp \left[ \frac{-\varphi}{\sqrt{12}} \right] \quad (4.104)$$

Finalmente, é possível escrever como se comporta o potencial deste campo escalar, terminando assim a sua descrição:

$$V(\varphi) \approx \frac{6}{k_1^2} \frac{\exp[\sqrt{3}\varphi]}{\left[\log\left(\frac{a_0 M^2}{6}\right) - \frac{\varphi}{\sqrt{12}}\right]^2} \quad (4.105)$$

$$= \kappa_1 \frac{\exp[\sqrt{3}\varphi]}{[\kappa_2 - \varphi]^2}, \quad (4.106)$$

com  $\kappa_1 = 72/k_1^2$  e  $\kappa_2 = \sqrt{12} \log(\bar{\eta})$

Conforme antecipado, vemos que o potencial encontrado possui uma forma muito semelhante ao potencial  $V = \exp[-\sqrt{3}|\varphi|]$ , que é o potencial responsável pela evolução do universo com  $\sim t^{2/3}$ , equivalente à dominação de poeira. A resolução das equações de Friedmann mais a equação de Klein-Gordon para este potencial confirma a afirmação anterior, como evidenciado no retrato de fase abaixo.

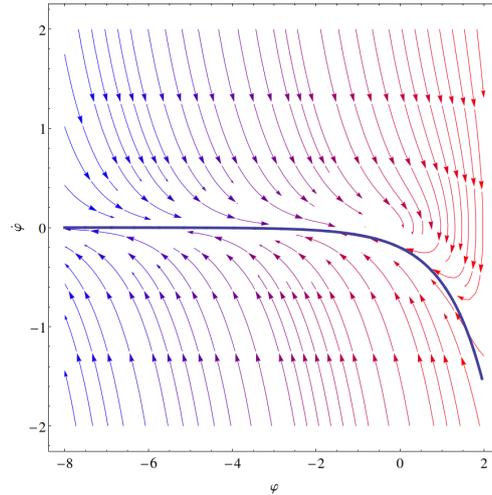


Figura 4.2: Retrato de Fase  $\dot{\varphi}$  por  $\varphi$ , indicando o atrator em  $\dot{\varphi}^2/2 \simeq V$ , (quasi-)dominação de poeira. Foram os usados os valores  $\kappa_1 = 1$ ,  $\kappa_2 = 7$  para construção do gráfico.

O comportamento demonstrado no retrato de fase 4.2, de (quasi-)dominação de poeira é corroborado pelo cálculo da equação de estado efetiva para este potencial. O parâmetro de estado é igual ao parâmetro de quasi-domação de poeira [25], e para o potencial 4.106, vemos que, seguindo o atrator demonstrado acima (módulo do campo crescendo), chega-se ao parâmetro de estado aproximadamente de matéria:

$$\omega \simeq \frac{1}{3} \left( \frac{V_\varphi}{V} \right)^2 - 1 \quad (4.107)$$

$$= \frac{4}{3(\varphi - \kappa_2)^2} - \frac{4}{\sqrt{3}(\varphi - \kappa_2)} \rightarrow 0 \quad (4.108)$$

O campo escalar de potencial 4.106 está descrevendo o comportamento efetivo do fluido material presente no universo em contração. A natureza deste fluido dependeria de uma teoria mais fundamental, fora do escopo tratado, podendo ser inclusive um campo escalar. As condições iniciais do campo também devem ser levadas em conta, como mostra 4.3. Para  $\varphi > \kappa_2$ , há um outro atrator, o indesejado para o caso de dominação de matéria.

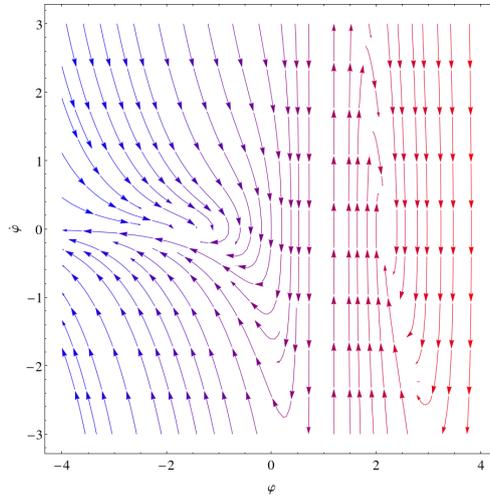


Figura 4.3: Retrato de Fase  $\dot{\varphi}$  por  $\varphi$ , mostrando ambos os domínios de  $\varphi$ , incluindo um segundo atrator, proveniente do caso de  $\varphi > \kappa_2$ . Nesse caso  $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$ .

Para um universo em dominação de matéria, a dependência de  $\log k$  com o tempo conforme é igual a dependência de quando o modelo é inflacionário. Somado a isso temos o que acabamos de mostrar, a obtenção de um mesmo termo de massa para a equação de Mukhanov-Sasaki, o que significa uma mesma solução para as perturbações, mesma dependência do espectro de potência com  $k$  [25]. Desta forma conclui-se que ele terá as mesmas perturbações escalares que no modelo inflacionário tipo-Starobinsky.

#### 4.5.1 Dualidade escalar vs. Dualidade tensorial

Todo o procedimento acima foi realizado utilizando a dualidade de Wands para as perturbações escalares. No universo em contração construído apenas quantidades relacionadas a esse tipo de perturbação serão as mesmas do cenário inflacionário. No entanto, pode-

mos comparar as perturbações tensoriais de três cenários: as perturbações tensoriais do modelo de Starobinsky, do universo em contração acima e do universo em contração caso a dualidade de Wands para as ondas gravitacionais fosse utilizada.

Começando deste último caso, primeiramente precisamos encontrar a função  $z_t''/z_t$ . Ainda considerando a parametrização 4.56 e as mesmas aproximações para  $F$ :

$$z_t(\eta) = a(\eta)\sqrt{F} \simeq \frac{2}{M}\mathcal{H}(\eta) \quad (4.109)$$

$$= \frac{2}{M} \left[ -\frac{1}{\eta} - \frac{1}{\eta \log(\bar{\eta})} \right] \quad (4.110)$$

Podemos assim usar a dualidade de Wands<sup>6</sup>:

$$z_t^B(\eta) = C \cdot z_t(\eta) \int_{\eta^*}^{\eta} \frac{d\eta'}{z_t(\eta')^2} \quad (4.111)$$

$$\simeq \frac{M}{2} \left[ -\frac{1}{\eta} - \frac{1}{\eta \log(\bar{\eta})} \right] \left[ \frac{1}{3}\eta^3 - \frac{\eta^3}{1 + \log(\bar{\eta})} \right] \quad (4.112)$$

$$= l_1\eta^2 - l_2 \frac{\eta^2}{\log(\bar{\eta})} \quad (4.113)$$

Onde  $l_1 = M/6$  e  $l_2 = -M/3$ .

Novamente requerendo um universo em contração dominado por campo escalar minimamente acoplado a gravitação, para perturbações tensoriais têm-se  $a_B^t = z_t^B$

$$\Rightarrow a_t^B = l_1\eta^2 - l_2 \frac{\eta^2}{\log(\bar{\eta})} \quad (4.114)$$

Vê-se que o comportamento deste universo é muito próxima da dominação de poeira exata, indicando a quase invariância de escala desejada. No entanto, difere claramente do caso escalar 4.95.

Em posse deste fator de escala do universo em quase-dominância de poeira, podemos, finalmente, calcular o termo de massa para a equação de Mukhanov-Sasaki para perturbações tensoriais:

---

<sup>6</sup>O cálculo dessa integral contou com uma aproximação a fim de evitar-se a Integral Exponencial

$$\frac{a_t''}{a_t} = \frac{2 \left( \log(\bar{\eta})^3 - 2 \log(\bar{\eta})^2 + 3 \log(\bar{\eta}) - 2 \right)}{\eta^2 (\log(\bar{\eta}) - 2) \log(\bar{\eta})^2} \quad (4.115)$$

$$\simeq \frac{2}{\eta^2} \left[ 1 + \frac{3}{\log(\bar{\eta})} \frac{1}{(-2 + \log(\bar{\eta}))} - \frac{1}{\log(\bar{\eta})^2} \frac{2}{(-2 + \log(\bar{\eta}))} \right] \quad (4.116)$$

Podemos então comparar o quão próximo este termo de massa está do valor obtido para a mesma grandeza quando calculada no universo construído em 4.5, já que ele é o mesmo do caso escalar<sup>7</sup>, simplesmente repetindo 4.87:

$$\frac{a_s''}{a_s} = \frac{4 \log(\bar{\eta})^4 - 6 \log(\bar{\eta})^3 + 18 \log(\bar{\eta})^2 - 27 \log(\bar{\eta}) + 18}{\eta^2 \log(\bar{\eta})^2 (2 \log(\bar{\eta})^2 - 6 \log(\bar{\eta}) + 9)} \quad (4.117)$$

$$\simeq \frac{2}{\eta^2} \left[ 1 + \frac{3}{2} \frac{\log(\bar{\eta})^3}{(\log(\bar{\eta})^4 - 3 \log(\bar{\eta})^3 + \frac{9}{2} \log(\bar{\eta})^2)} + O(\log(\bar{\eta})^{-3}) \right] \quad (4.118)$$

Desta forma, vemos que as modificações de ambos os termos de massa são diferentes. Neste último, já há um desvio do termo de massa invariante de escala na ordem  $O(\log(\bar{\eta})^{-1})$ , enquanto no primeiro, isso só acontece para  $O(\log(\bar{\eta})^{-2})$ . Isso demonstra que ambos os procedimentos apresentarão desvios em seus cálculos do espectro de potência escalar. Este resultado é esperado devido às diferentes dinâmicas apresentadas, oriundas das diferenças provenientes da teoria de perturbação para modelos  $f(R)$ .

---

<sup>7</sup>Para campos escalares,  $z(\eta) \propto a(\eta)$

# Capítulo 5

## Conclusão

A obtenção de um espectro de potência quase invariante de escala por diferentes cenários de universo primordial torna seu estudo relevante. A dualidade de Wands é o que permite essa identificação, através de simetria das equações de perturbação. O cenário de maior aceitação em vigência, o inflacionário, possui diversos modelos que concordam com as observações do Planck. Dentre eles temos o de Starobinsky, o de melhor concordância. Todavia, à medida que outros cenários podem explicar o mesmo que o inflacionário, observações passam a permitir que mais modelos – de diferentes cenários – coincidam com o estampado na CMB.

A fim de obter um modelo que corresponda a essas expectativas, utilizamos a inflação de Starobinsky como molde. Para utilização da dualidade de Wands, primeiramente realizamos uma modificação no modelo de Starobinsky. Para tal, utilizamos uma justificativa fenomenológica, modificando a dinâmica do universo inflacionário em questão, mas mantendo suas previsões em termos de perturbações. Tal modificação tinha em vista a transformação do fator de escala do tempo cósmico para o tempo conforme. Seus parâmetros de slow-roll mantiveram-se aproximadamente constantes, mostrando que este modelo Starobinsky-like, como mencionado, mantivera o previsto para os espectros de potência – escalar e tensorial.

Partindo do modelo Starobinsky-like, pudemos então utilizar a dualidade de Wands e obter a evolução do universo dual a este – ou seja, que produz as mesmas perturbações escalares. Este universo foi então visto como de quasi-dominância de poeira, como previsto. Tendo a evolução deste universo, pudemos então reconstruir o comportamento que um fluido deveria ter para tal dinâmica. Fizemos isso considerando o contexto de campo

escalar minimamente acoplado a gravitação. Obtivemos um potencial para este campo escalar, que demonstrou ter comportamento similar ao que deveria ter caso estivéssemos em um universo dominado exatamente por poeira. Os desvios deste comportamento exato são os necessários para obtenção de um espectro quase invariante de escala. Ao comparar o procedimento utilizado àquele utilizando perturbações tensoriais, uma diferença na evolução dos universos duais foi encontrada. Este resultado é explicado pela forma como as perturbações escalares e tensoriais diferem no contexto de teorias  $f(R)$ .

Tendo em vista que apenas o universo em contração foi construído, é necessário ainda fornecer um mecanismo para o ricochete. Dependendo da forma que a colagem entre o universo em contração e o universo em expansão é feita, é possível haver mudanças no espectro das perturbações cosmológicas. Para tal colagem, será necessário também generalizar o potencial encontrado 4.106, culminando numa total resolução das equações de Mukhanov-Sasaki. Espera-se obter que as perturbações, ao reentrarem no horizonte, permaneçam com o mesmo espectro. Resultados recentes [96, 97] indicam que tal procedimento é possível, dada certas condições. O contexto para realização do ricochete também é importante, porque pode-se escolher realizá-lo através de diferentes modificações da Relatividade Geral [20]. O próximo passo da pesquisa focará no desenvolvimento do ricochete para este universo em contração obtido. A manutenção dos espectros, tanto escalar quanto tensorial, é desejada.

# Apêndice A

## Cálculo referentes a $z(\eta)$

Durante o capítulo 'Ricochete de Starobinsky', foi necessário o cálculo da quantidade  $F$ , definida como a derivada de  $f(R)$  em relação a  $R$ , para o modelo tipo-Starobinsky desenvolvido. A partir dessa quantidade, finalmente a função  $z(\eta)$  pôde ser calculada. Para tal, derivadas de  $F$  e demais operações foram necessárias. Elas estão descritas nos cálculos abaixo.

$$F = \frac{4}{3} [\log(\bar{\eta})] \quad (\text{A.1})$$

$$F' = \frac{dF}{d\eta} \quad (\text{A.2})$$

$$= \frac{4}{3\eta} \quad (\text{A.3})$$

$$\rightarrow \frac{F'}{F} = [\eta \log(\bar{\eta})]^{-1} \quad (\text{A.4})$$

$$\rightarrow \frac{F'^2}{F} = \frac{4}{3} [\eta^2 \log(\bar{\eta})]^{-1} \quad (\text{A.5})$$

$$\Rightarrow \frac{F'}{aF} = [\eta \log(\bar{\eta})]^{-1} \frac{M}{\sqrt{3}} [\eta^2 \log(\bar{\eta})]^{1/2} \quad (\text{A.6})$$

$$= \frac{-M}{\sqrt{3}} [\log(\bar{\eta})]^{-1/2} \quad (\text{A.7})$$

$$\Rightarrow \frac{F'^2}{a^2 F} = \frac{4}{3} [\eta^2 \log(\bar{\eta})]^{-1} \frac{M^2}{3} [\eta^2 \log(\bar{\eta})] \quad (\text{A.8})$$

$$= \frac{4M^2}{9} \quad (\text{A.9})$$

Durante todo o procedimento, tomou-se em consideração o fato de estarmos tratando do regime com  $\eta$  grande.

# Apêndice B

## Preliminares de Cosmologia

O objetivo deste apêndice é fazer uma rápida introdução a conceitos básicos de cosmologia.

A cosmologia relativística clássica é oriunda da resolução das equações de campo de Einstein para a métrica de fundo de Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker, FLRW. Esta métrica descreve um universo homogêneo e isotrópico. Para um universo plano, em coordenadas cartesianas:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j \quad (\text{B.1})$$

Generalizando para um universo com curvatura  $k$ , onde  $k = 1, -1, 0$

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d(\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right] \quad (\text{B.2})$$

As equações de Einstein são simplesmente:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu} \quad (\text{B.3})$$

Para um fluido perfeito, caso em questão, o tensor de energia-momento para um observador comóvel pode ser decomposto como:

$$T_{\mu\nu} = (\rho, -p, -p, -p), \quad (\text{B.4})$$

onde  $\rho$  é a densidade de energia e  $p$  a pressão.

As equações de Einstein para um fluido perfeito em FLRW serão as chamadas equações de Friedmann:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{k}{a^2} + \frac{8\pi G}{3}\rho \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \quad (\text{B.6})$$

Introduzindo o parâmetro de Hubble

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} \quad (\text{B.7})$$

reescreve-se a primeira equação de Friedmann como:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}. \quad (\text{B.8})$$

Da conservação do tensor de energia momento, obtém-se:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 \quad (\text{B.9})$$

De acordo com a equação de estado  $\rho = \omega p$ , com  $\omega$  constante, pode-se obter o comportamento da densidade de energia em função do fator de escala:

$$\rho(a) = \rho_0 a^{-3(1+\omega)} \quad (\text{B.10})$$

Sendo assim, para radiação, cujo  $\omega = 1/3$

$$\rho(a)_r = \rho_{r,0} a^{-4} \quad (\text{B.11})$$

Para poeira,  $\omega = 0$

$$\rho(a)_m = \rho_{m,0} a^{-3} \quad (\text{B.12})$$

Para a constante cosmológica  $\Lambda$ , de  $\omega = -1$

$$\rho(a)_\Lambda = \rho_{\Lambda,0} \quad (\text{B.13})$$

Através da definição da quantidade densidade crítica,  $\rho_{\text{crit},0} = 3H_0^2/8\pi G$ , ou seja, a densidade necessária pro universo ser plano ( $k = 0$ ), pode-se reescrever [B.8](#) como:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \Omega_{\Lambda,0} + \frac{1 - \Omega_0}{a^2} \quad (\text{B.14})$$

onde  $\Omega_{i,0} = \rho_{i,0}/\rho_{\text{crit},0}$ .

Em termos do tempo cósmico  $t$ , as equações de Friedmann podem ser solucionadas em função da equação de estado. para  $\omega \neq -1$ :

$$a(t) \propto t^{\frac{2}{3(1+\omega)}} \quad (\text{B.15})$$

No caso de poeira, tem-se que  $a(t) \propto t^{2/3}$ . Para a constante cosmológica:

$$a(t) \propto e^{Ht} \quad (\text{B.16})$$

Esta é a chamada solução de de Sitter, um universo expandindo exponencialmente. Utilizando o tempo conforme  $\eta$  definido a partir de  $d\eta = dt/a(t)$ , reescreve-se as

equações de Friedmann como:

$$a'^2 + ka^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho a^4 \quad (\text{B.17})$$

$$a'' + ka^2 = \frac{4\pi G}{3} (\rho - 3p) a^3 \quad (\text{B.18})$$

Onde o superescrito ' significa derivada em função de  $\eta$ . As equações de Friedmann então poderão ser novamente resolvidas para os diferentes fluidos, como poeira, radiação e constante cosmológica. No caso de poeira,  $p = 0$

$$a(\eta) \propto \eta^2, \quad (\text{B.19})$$

com  $-\infty < \eta < \infty$ . Já para um universo dominado por constante cosmológica ou outro fluido de  $\omega = -1$ , tem-se:

$$a(\eta) \propto -\frac{1}{\eta} \quad (\text{B.20})$$

Onde  $-\infty < \eta < 0$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] ADE, P. A. R. et al. Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters. *Astron. Astrophys.*, v. 594, p. A13, 2016.
- [2] MARTIN, J. et al. The Best Inflationary Models After Planck. *JCAP*, v. 1403, p. 039, 2014.
- [3] WANDS, D. Duality invariance of cosmological perturbation spectra. *Phys. Rev.*, D60, p. 023507, 1999.
- [4] MARTIN, J.; RINGEVAL, C.; VENNIN, V. Encyclopædia Inflationaris. *Phys. Dark Univ.*, v. 5-6, p. 75–235, 2014.
- [5] ADE, P. A. R. et al. Planck 2015 results. XX. Constraints on inflation. *Astron. Astrophys.*, v. 594, p. A20, 2016.
- [6] LINDE, A. D. Chaotic Inflation. *Phys. Lett.*, B129, p. 177–181, 1983.
- [7] ADE, P. A. R. et al. Detection of  $B$ -Mode Polarization at Degree Angular Scales by BICEP2. *Phys. Rev. Lett.*, v. 112, n. 24, p. 241101, 2014.
- [8] ABBOTT, B. P. et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Phys. Rev. Lett.*, v. 116, n. 6, p. 061102, 2016.
- [9] STAROBINSKY, A. A. A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity. *Phys. Lett.*, B91, p. 99–102, 1980.
- [10] GUTH, A. H. The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems. *Phys. Rev.*, D23, p. 347–356, 1981.
- [11] CLIFTON, T. et al. Modified Gravity and Cosmology. *Phys. Rept.*, v. 513, p. 1–189, 2012.

- [12] NOVELLO, M.; BERGLIAFFA, S. E. P. Bouncing Cosmologies. *Phys. Rept.*, v. 463, p. 127–213, 2008.
- [13] LEMAITRE, G. The expanding universe. *Gen. Rel. Grav.*, v. 29, p. 641–680, 1997. [Annales Soc. Sci. Brux. Ser. I Sci. Math. Astron. Phys.A53,51(1933)].
- [14] NOVELLO, M.; SALIM, J. M. NONLINEAR PHOTONS IN THE UNIVERSE. *Phys. Rev.*, D20, p. 377–383, 1979.
- [15] BRANDENBERGER, R. H. The Matter Bounce Alternative to Inflationary Cosmology. 2012.
- [16] KHOURY, J. et al. The Ekpyrotic universe: Colliding branes and the origin of the hot big bang. *Phys. Rev.*, D64, p. 123522, 2001.
- [17] LEHNERS, J.-L. Ekpyrotic and Cyclic Cosmology. *Phys. Rept.*, v. 465, p. 223–263, 2008.
- [18] GRATTON, S. et al. Conditions for generating scale-invariant density perturbations. *Phys. Rev.*, D69, p. 103505, 2004.
- [19] ALLEN, L. E.; WANDS, D. Cosmological perturbations through a simple bounce. *Phys. Rev.*, D70, p. 063515, 2004.
- [20] BATTEFELD, D.; PETER, P. A Critical Review of Classical Bouncing Cosmologies. *Phys. Rept.*, v. 571, p. 1–66, 2015.
- [21] BOYLE, L. A.; STEINHARDT, P. J.; TUROK, N. A New duality relating density perturbations in expanding and contracting Friedmann cosmologies. *Phys. Rev.*, D70, p. 023504, 2004.
- [22] LIDSEY, J. E. Triality between inflation, cyclic and phantom cosmologies. *Phys. Rev.*, D70, p. 041302, 2004.
- [23] MUKHANOV, V. Quantum Cosmological Perturbations: Predictions and Observations. *Eur. Phys. J.*, C73, p. 2486, 2013.
- [24] ROEST, D. Universality classes of inflation. *JCAP*, v. 1401, p. 007, 2014.

- [25] ELIZALDE, E.; HARO, J.; ODINTSOV, S. D. Quasimatter domination parameters in bouncing cosmologies. *Phys. Rev.*, D91, n. 6, p. 063522, 2015.
- [26] MARTIN, J.; RINGEVAL, C.; VENNIN, V. Shortcomings of New Parametrizations of Inflation. *Phys. Rev.*, D94, n. 12, p. 123521, 2016.
- [27] QUINTIN, J. et al. Evolution of cosmological perturbations and the production of non-Gaussianities through a nonsingular bounce: Indications for a no-go theorem in single field matter bounce cosmologies. *Phys. Rev.*, D92, n. 6, p. 063532, 2015.
- [28] RIOTTO, A. Inflation and the theory of cosmological perturbations. In: *Astroparticle physics and cosmology. Proceedings: Summer School, Trieste, Italy, Jun 17-Jul 5 2002*. [S.l.: s.n.], 2002. p. 317–413.
- [29] AGHANIM, N. et al. Planck 2015 results. XI. CMB power spectra, likelihoods, and robustness of parameters. *Astron. Astrophys.*, v. 594, p. A11, 2016.
- [30] MUKHANOV, V. F.; FELDMAN, H. A.; BRANDENBERGER, R. H. Theory of cosmological perturbations. Part 1. Classical perturbations. Part 2. Quantum theory of perturbations. Part 3. Extensions. *Phys. Rept.*, v. 215, p. 203–333, 1992.
- [31] BRANDENBERGER, R. H. Lectures on the theory of cosmological perturbations. *Lect. Notes Phys.*, v. 646, p. 127–167, 2004. [127(2003)].
- [32] LYTH, D. H.; RIOTTO, A. Particle physics models of inflation and the cosmological density perturbation. *Phys. Rept.*, v. 314, p. 1–146, 1999.
- [33] DURRER, R.; VERNIZZI, F. Adiabatic perturbations in pre - big bang models: Matching conditions and scale invariance. *Phys. Rev.*, D66, p. 083503, 2002.
- [34] ENQVIST, K.; SLOTH, M. S. Adiabatic CMB perturbations in pre - big bang string cosmology. *Nucl. Phys.*, B626, p. 395–409, 2002.
- [35] FALCIANO, F. T.; PINTO-NETO, N.; VITENTI, S. D. P. Perturbations Through a Quantum Bounce. In: *Proceedings, 13th Marcel Grossmann Meeting on Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Astrophysics, and Relativistic Field Theories (MG13): Stockholm, Sweden, July 1-7, 2012*. [S.l.: s.n.], 2015. p. 1625–1627.

- [36] FALCIANO, F. T.; PINTO-NETO, N. Scalar Perturbations in Scalar Field Quantum Cosmology. *Phys. Rev.*, D79, p. 023507, 2009.
- [37] PETER, P.; PINTO-NETO, N. Primordial perturbations in a non singular bouncing universe model. *Phys. Rev.*, D66, p. 063509, 2002.
- [38] KHOURY, J. et al. Density perturbations in the ekpyrotic scenario. *Phys. Rev.*, D66, p. 046005, 2002.
- [39] LYTH, D. H. The Primordial curvature perturbation in the ekpyrotic universe. *Phys. Lett.*, B524, p. 1–4, 2002.
- [40] LEHNERS, J.-L. et al. Generating ekpyrotic curvature perturbations before the big bang. *Phys. Rev.*, D76, p. 103501, 2007.
- [41] MARTIN, J. et al. Passing through the bounce in the ekpyrotic models. *Phys. Rev.*, D65, p. 123513, 2002.
- [42] FELICE, A. D.; TSUJIKAWA, S.  $f(R)$  theories. *Living Rev. Rel.*, v. 13, p. 3, 2010.
- [43] HWANG, J.-c. Quantum fluctuations of cosmological perturbations in generalized gravity. *Class. Quant. Grav.*, v. 14, p. 3327–3336, 1997.
- [44] HWANG, J.-c.; NOH, H. Cosmological perturbations in generalized gravity theories. *Phys. Rev.*, D54, p. 1460–1473, 1996.
- [45] MUKHANOV, V. *Physical Foundations of Cosmology*. Oxford: Cambridge University Press, 2005. ISBN 0521563984, 9780521563987. Disponível em: <<http://www-spines.fnal.gov/spines/find/books/www?cl=QB981.M89::2005>>.
- [46] BAUMANN, D. Inflation. In: *Physics of the large and the small, TASI 09, proceedings of the Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics, Boulder, Colorado, USA, 1-26 June 2009*. [s.n.], 2011. p. 523–686. Disponível em: <<http://inspirehep.net/record/827549/files/arXiv:0907.5424.pdf>>.
- [47] BAUMANN, D. The Physics of Inflation. PhD Lecture Notes, Cambridge University, Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics. 2012.
- [48] WEINBERG, S. Adiabatic modes in cosmology. *Phys. Rev.*, D67, p. 123504, 2003.

- [49] BIRRELL, N. D.; DAVIES, P. C. W. *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 1984. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). ISBN 0521278589, 9780521278584, 9780521278584. Disponível em: <<http://www.cambridge.org/mw/academic/subjects/physics/theoretical-physics-and-mathematical-physics/quantum-fields-curved-space?format=PB>>.
- [50] SOTIRIOU, T. P.; FARAONI, V.  $f(R)$  Theories Of Gravity. *Rev. Mod. Phys.*, v. 82, p. 451–497, 2010.
- [51] LINDE, A. D. Particle physics and inflationary cosmology. *Contemp. Concepts Phys.*, v. 5, p. 1–362, 1990.
- [52] PINTO-NETO, N.; FABRIS, J. C. Quantum cosmology from the de Broglie-Bohm perspective. *Class. Quant. Grav.*, v. 30, p. 143001, 2013.
- [53] HARO, J. de; CAI, Y.-F. An Extended Matter Bounce Scenario: current status and challenges. *Gen. Rel. Grav.*, v. 47, n. 8, p. 95, 2015.
- [54] MAIER, R.; PINTO-NETO, N.; SOARES, I. D. Bouncing Model in Brane World Theory. *Phys. Rev.*, D87, n. 4, p. 043528, 2013.
- [55] NOJIRI, S.; ODINTSOV, S. D.; OIKONOMOU, V. K. Bounce universe history from unimodular  $F(R)$  gravity. *Phys. Rev.*, D93, n. 8, p. 084050, 2016.
- [56] BAMBHA, K. et al. Bounce cosmology from  $F(R)$  gravity and  $F(R)$  bigravity. *JCAP*, v. 1401, p. 008, 2014.
- [57] BANERJEE, S.; SARIDAKIS, E. N. Bounce and cyclic cosmology in weakly broken galileon theories. 2016.
- [58] WILSON-EWING, E. The Matter Bounce Scenario in Loop Quantum Cosmology. *JCAP*, v. 1303, p. 026, 2013.
- [59] BRANDENBERGER, R. Matter Bounce in Horava-Lifshitz Cosmology. *Phys. Rev.*, D80, p. 043516, 2009.
- [60] BISWAS, T.; MAZUMDAR, A.; SIEGEL, W. Bouncing universes in string-inspired gravity. *JCAP*, v. 0603, p. 009, 2006.

- [61] LANGLOIS, D.; NARUKO, A. Bouncing cosmologies in massive gravity on de Sitter. *Class. Quant. Grav.*, v. 30, p. 205012, 2013.
- [62] SAKHAROV, A. D. Violation of CP Invariance, c Asymmetry, and Baryon Asymmetry of the Universe. *Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, v. 5, p. 32–35, 1967. [Usp. Fiz. Nauk161,61(1991)].
- [63] LINDE, A. D. Hybrid inflation. *Phys. Rev.*, D49, p. 748–754, 1994.
- [64] BEZRUKOV, F. L.; SHAPOSHNIKOV, M. The Standard Model Higgs boson as the inflaton. *Phys. Lett.*, B659, p. 703–706, 2008.
- [65] LINDE, A. D. Axions in inflationary cosmology. *Phys. Lett.*, B259, p. 38–47, 1991.
- [66] ARMENDARIZ-PICON, C.; DAMOUR, T.; MUKHANOV, V. F. k - inflation. *Phys. Lett.*, B458, p. 209–218, 1999.
- [67] KACHRU, S. et al. Towards inflation in string theory. *JCAP*, v. 0310, p. 013, 2003.
- [68] LIDDLE, A. R.; PARSONS, P.; BARROW, J. D. Formalizing the slow roll approximation in inflation. *Phys. Rev.*, D50, p. 7222–7232, 1994.
- [69] KEHAGIAS, A.; DIZGAH, A. M.; RIOTTO, A. Remarks on the Starobinsky model of inflation and its descendants. *Phys. Rev.*, D89, n. 4, p. 043527, 2014.
- [70] BRANDENBERGER, R. H. Alternatives to the inflationary paradigm of structure formation. *Int. J. Mod. Phys. Conf. Ser.*, v. 01, p. 67–79, 2011.
- [71] PETER, P.; PINTO-NETO, N. Cosmology without inflation. *Phys. Rev.*, D78, p. 063506, 2008.
- [72] BRANDENBERGER, R. Initial Conditions for Inflation - A Short Review. *Int. J. Mod. Phys.*, D26, n. 01, p. 1740002, 2016.
- [73] FALCIANO, F. T.; PINTO-NETO, N.; SANTINI, E. S. An Inflationary Non-singular Quantum Cosmological Model. *Phys. Rev.*, D76, p. 083521, 2007.
- [74] LEVY, A. M. Fine-tuning challenges for the matter bounce scenario. *Phys. Rev.*, D95, n. 2, p. 023522, 2017.

- [75] BRANDENBERGER, R.; PETER, P. Bouncing Cosmologies: Progress and Problems. 2016.
- [76] LINDE, A. D. Inflationary theory versus ekpyrotic / cyclic scenario. In: *Workshop on Conference on the Future of Theoretical Physics and Cosmology in Honor of Steven Hawking's 60th Birthday Cambridge, England, January 7-10, 2002*. [s.n.], 2002. p. 801–838. Disponível em: <<http://alice.cern.ch/format/showfull?sysnb=2312154>>.
- [77] XUE, B. et al. Nonperturbative analysis of the evolution of cosmological perturbations through a nonsingular bounce. *Phys. Rev.*, D88, p. 083509, 2013.
- [78] CELANI, D. C. F.; PINTO-NETO, N.; VITENTI, S. D. P. Particle Creation in Bouncing Cosmologies. *Phys. Rev.*, D95, n. 2, p. 023523, 2017.
- [79] STEINHARDT, P. J.; TUROK, N. Cosmic evolution in a cyclic universe. *Phys. Rev.*, D65, p. 126003, 2002.
- [80] BRAX, P.; BRUCK, C. van de; DAVIS, A.-C. Brane world cosmology. *Rept. Prog. Phys.*, v. 67, p. 2183–2232, 2004.
- [81] FALCIANO, F. T.; LILLEY, M.; PETER, P. A Classical bounce: Constraints and consequences. *Phys. Rev.*, D77, p. 083513, 2008.
- [82] ALISHAHIHA, M.; SILVERSTEIN, E.; TONG, D. DBI in the sky. *Phys. Rev.*, D70, p. 123505, 2004.
- [83] PINTO-NETO, N. et al. The Wheeler-DeWitt Quantization Can Solve the Singularity Problem. *Phys. Rev.*, D86, p. 063504, 2012.
- [84] CAI, Y.-F.; WILSON-EWING, E. Non-singular bounce scenarios in loop quantum cosmology and the effective field description. *JCAP*, v. 1403, p. 026, 2014.
- [85] CAI, Y.-F.; WILSON-EWING, E. A  $\Lambda$ CDM bounce scenario. *JCAP*, v. 1503, n. 03, p. 006, 2015.
- [86] PETER, P.; VITENTI, S. D. P. The simplest possible bouncing quantum cosmological model. *Mod. Phys. Lett.*, A31, n. 21, p. 1640006, 2016.

- [87] BOEHMER, C. G.; HARKO, T.; LOBO, F. S. N. Dark matter as a geometric effect in  $f(R)$  gravity. *Astropart. Phys.*, v. 29, p. 386–392, 2008.
- [88] STAROBINSKY, A. A. Disappearing cosmological constant in  $f(R)$  gravity. *JETP Lett.*, v. 86, p. 157–163, 2007.
- [89] NOJIRI, S.; ODINTSOV, S. D. Dark energy, inflation and dark matter from modified  $F(R)$  gravity. *TSPU Bulletin*, N8(110), p. 7–19, 2011.
- [90] HORNDESKI, G. W. Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space. *Int. J. Theor. Phys.*, v. 10, p. 363–384, 1974.
- [91] GLEYZES, J. et al. Healthy theories beyond Horndeski. *Phys. Rev. Lett.*, v. 114, n. 21, p. 211101, 2015.
- [92] KAMENSHCHIK, A. Yu. et al. Transformations between Jordan and Einstein frames: Bounces, antigravity, and crossing singularities. *Phys. Rev.*, D94, n. 6, p. 063510, 2016.
- [93] KOSHELEV, A. S. et al. Occurrence of exact  $R^2$  inflation in non-local UV-complete gravity. *JHEP*, v. 11, p. 067, 2016.
- [94] BEZRUKOV, F. L.; GORBUNOV, D. S. Distinguishing between  $R^2$ -inflation and Higgs-inflation. *Phys. Lett.*, B713, p. 365–368, 2012.
- [95] BRUSTEIN, R.; GASPERINI, M.; VENEZIANO, G. Duality in cosmological perturbation theory. *Phys. Lett.*, B431, p. 277–285, 1998.
- [96] FINELLI, F.; BRANDENBERGER, R. On the generation of a scale invariant spectrum of adiabatic fluctuations in cosmological models with a contracting phase. *Phys. Rev.*, D65, p. 103522, 2002.
- [97] VITENTI, S. D. P.; PINTO-NETO, N. Large Adiabatic Scalar Perturbations in a Regular Bouncing Universe. *Phys. Rev.*, D85, p. 023524, 2012.