



Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

André Santos

**Geração de ordens radiais na auto modulação  
de fase com vórtices ópticos**

Rio de Janeiro



“GERAÇÃO DE ORDENS RADIAIS NA AUTO-MODULAÇÃO DE FASE  
COM VÓRTICES ÓPTICOS”

**ANDRÉ DE SOUZA SANTOS**

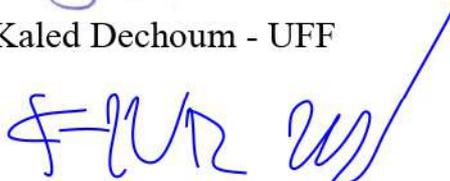
Dissertação de Mestrado em Física apresentada no  
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do  
Ministério da Ciência Tecnologia e Inovação.  
Fazendo parte da banca examinadora os seguintes  
professores:



Antonio Zelaquett Khoury – Presidente/Orientador/CBPF



Kaled Dechoum - UFF



Fernando da Rocha Vaz Bandeira de Melo – CBPF

Rio de Janeiro, 06 de abril de 2022.



# Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Suzana e Carlos, por todo o apoio incondicional prestado por mais esta etapa importante em minha vida.

Agradeço ao meu orientador, Antonio Zelaquett Khoury, pelos diversos ensinamentos durante a orientação e compreensão pela fase difícil em que eu passava. Seus conselhos pessoais e profissionais levarei para o resto da minha jornada.

Ao Leonardo, pelas diversas discussões frutíferas sobre a física e a vida.

Aos meus amigos do grupo <Bra|Kets > pelas inúmeras conversas e distrações sobre a vida, a verdade e o universo e a todos os outros amigos que fazem parte da minha caminhada.

Agradeço ao meu irmão, Andrei, por todo o apoio e encorajamento nesta caminhada. Não tenho dúvidas que sem você minha trajetória seria completamente diferente.

Por fim, agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro essencial para o desenvolvimento deste trabalho.



# Resumo

Neste trabalho, investigamos a dinâmica de vórtices ópticos no fenômeno de auto modulação de fase espacial que ocorre em meios não lineares de terceira ordem. Em particular, estamos interessados no papel do momento angular orbital do feixe durante o processo, e nas correlações com os efeitos transversos em curtas e longas distâncias. Utilizamos um método de aproximação em primeira ordem para investigar mudanças no padrão transversal do feixe em distâncias pequenas. A abordagem de longas distâncias se deu por computação numérica, utilizando a linguagem de programação Python. Identificamos em ambos os cenários a presença de anéis externos concêntricos para o perfil transversal do feixe, indicando um acoplamento radial-angular por intermédio do meio não linear.

**Palavras-chaves:** momento angular orbital, vórtice óptico, meios não lineares, auto modulação de fase.



# Abstract

In this work, we investigate the dynamics of optical vortices in the process of spatial self phase modulation that occurs in third order nonlinear media. In particular, we are interested on the role of the orbital angular momentum in the process and its effects on the transverse pattern at short and long distances. We use a first-order approximation method to investigate the changes in the transverse pattern of the optical beam over small distances. The long-distance approach was done with numerical computation, using the Python language. We identified in both scenarios the presence of concentric external rings for the beam's transverse profile, indicating a radial-angular coupling through the nonlinear media.

**Key-words:** orbital angular momentum, optical vortices, nonlinear media, self phase modulation.



# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>INTRODUÇÃO À ÓPTICA PARAXIAL E O MOMENTO ANGULAR ORBITAL DA LUZ</b>	<b>15</b>
<b>2.1</b>	<b>Equação de onda paraxial</b>	<b>15</b>
<b>2.2</b>	<b>Soluções da equação de onda paraxial</b>	<b>16</b>
2.2.1	Modo Fundamental: Feixe Gaussiano	16
2.2.2	Modo Paraxial: Hermite-Gaussiano	17
2.2.3	Modo Paraxial: Laguerre-Gaussiano	17
<b>2.3</b>	<b>Momento angular orbital da luz</b>	<b>19</b>
2.3.1	Momento Angular Intrínseco e Extrínseco	21
<b>3</b>	<b>INTRODUÇÃO À ÓPTICA NÃO LINEAR</b>	<b>23</b>
<b>3.1</b>	<b>Meios não lineares</b>	<b>24</b>
<b>3.2</b>	<b>Processos não lineares de terceira ordem</b>	<b>28</b>
3.2.1	Mistura de Quatro Ondas	29
3.2.2	Geração de Terceiro Harmônico (GTH)	31
3.2.3	Índice de refração dependente da intensidade	32
3.2.4	Mistura de quatro ondas degenerado	33
<b>4</b>	<b>PROPAGAÇÃO DE VÓRTICES ÓPTICOS EM MEIOS NÃO LINEARES</b>	<b>37</b>
<b>4.1</b>	<b>Equação paraxial em meios não lineares</b>	<b>37</b>
<b>4.2</b>	<b>Constante de Recobrimento</b>	<b>40</b>
<b>4.3</b>	<b>Solução por método perturbativo</b>	<b>43</b>
<b>4.4</b>	<b>Soluções autoguiadas para propagação de vórtices ópticos em meios não lineares</b>	<b>45</b>
4.4.1	Solução numérica	48
	<b>Conclusão</b>	<b>51</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>53</b>

<b>APÊNDICES</b>	<b>55</b>
<b>APÊNDICE A – CONVERSÃO ENTRE MODOS COM PARÂMETROS DE RAYLEIGH DISTINTOS . . . . .</b>	<b>57</b>

# 1 Introdução

"Nós provavelmente não podemos fugir da inferência de que a luz consiste nas ondulações transversas do mesmo meio, o que é a causa dos fenômenos elétricos e magnéticos"(TOLSTOY, 1982). Com essas palavras, James Clerk Maxwell (1831-1879) conclui que a luz é uma onda eletromagnética. Em seu trabalho "A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field"(1865), Maxwell traz unificação da eletricidade com o magnetismo e revela a luz como uma manifestação de uma onda eletromagnética, estabelecendo os fundamentos de sua teoria (MAXWELL, 1865). Podemos dizer que os trabalhos de Maxwell inauguram uma nova era na Física moderna, servindo como base para a relatividade especial, a mecânica quântica e a óptica moderna.

A Óptica é uma linha de pesquisa cujo papel é compreender a natureza de fenômenos envolvendo a luz e sua interação com a matéria. Podemos dizer que sua história começa com os trabalhos sobre lentes pelos antigos egípcios e mesopotâmicos, concomitante aos primeiros trabalhos sobre a luz e a teoria da visão pelos gregos antigos (DARRIGOL, 2012). O período medieval e o começo da idade moderna são marcadas pela fundamentação da óptica geométrica e da compreensão da luz como um ente corpuscular, através dos trabalhos de Descartes, Snell e Newton. Contudo Huygens questiona a natureza corpuscular da luz, trazendo uma interpretação ondulatória explicando fenômenos de difração. Maxwell com a unificação da teoria eletromagnética reforça a visão da luz como ente ondulatório, e traz novas resoluções sobre o espectro eletromagnético.

Em 1900, Max Planck em seu trabalho sobre a radiação de corpo negro inaugura a era da teoria quântica. Ele propõe que a radiação emitida por um corpo negro tivesse energias discretas - introduzindo o conceito de *quantização* - múltiplas de  $hf$ , onde  $h$  é uma constante universal e  $f$  é a frequência de oscilação. Einstein em 1905 estende o conceito de quantização para a própria luz, ao explicar o efeito fotoelétrico introduzindo o conceito de *fótons* - pequenas partículas de luz - com uma energia  $hf$  bem definida, trazendo novamente uma interpretação de natureza corpuscular para a luz. Einstein ainda traz resultados sobre efeitos de emissão estimulada e espontânea da luz. Durante o século XX, muitos trabalhos consolidaram a natureza quântica da luz, levando ao campo conhecido como óptica quântica. Fenômenos como emaranhamento, a descoberta de estados coerentes e comprimidos fazem da luz uma fonte frutífera de descobertas que encantam. Dentre os destaques dos avanços tecnológicos baseados nos avanços sobre a natureza da luz no século XX, temos a invenção do laser em 1960 por Maiman (MAIMAN, 1960). O laser torna-se a principal fonte de luz coerente, possibilitando diversos avanços em outras áreas assim como inaugurando outras, como a óptica não-linear.

Em 1989, Coulet *et. al* (COULLET; GIL; LEGA, 1989) encontram soluções do tipo vórtice para a equação de Maxwell-Bloch introduzindo o conceito de vórtices ópticos, em analogia aos vórtices hidrodinâmicos. Um vórtice óptico é um feixe estruturado de luz, que apresenta consigo uma singularidade de fase, que se manifesta como um ponto de intensidade nula. Um vórtice óptico também apresenta uma carga topológica e uma frente de onda helicoidal. A investigação da óptica de ressoadores ópticos introduz uma série de feixes estruturados distintos como os modos de Hermite-Gauss e Laguerre-Gauss, este último com as mesmas características de um vórtice porém em um regime paraxial. Há ainda os feixes de Bessel e os vórtices vetoriais, que não serão abordados neste trabalho. Em 1992, Allen *et al.* (ALLEN *et al.*, 1992) faz a conexão da carga topológica de feixes com frente de onda helicoidal com o momento angular orbital de valor  $l\hbar$  por fóton, evidenciando novas conexões entre fenômenos macroscópicos da luz e efeitos quânticos como as interações spin-órbita. Por serem facilmente gerados em laboratório, feixes paraxiais como os modos de Laguerre-Gauss são geralmente utilizados como padrões para a investigação de vórtices ópticos, e este trabalho segue esta abordagem.

A motivação do trabalho atual tem origem nos estudos da interação do momento angular orbital (MAO) em processos ópticos não lineares. (BUONO *et al.*, 2014) relata em seu trabalho sobre a geração de segundo harmônico utilizando vórtices ópticos com valores de momento angular orbital diferentes (ou carga topológica), gerando um feixe de saída cujo MAO era resultado da soma das cargas topológica dos vórtices de entrada. Este estudo é realizado utilizando a polarização como parâmetro auxiliar para o processo, incrementando o estado da arte sobre a geração de segundo harmônico com vórtices ópticos. Ainda neste trabalho, é negligenciado a dinâmica envolvendo ordens radiais dos feixes.

A análise da dinâmica de ordens radiais e o papel do momento angular orbital no processo de geração de segundo harmônico utilizando feixes de entrada com cargas topológicas distintas evidencia regras de seleção não triviais para valores de MAO distintos, resultando em feixes cujo perfil transversal era modificado ao longo da propagação (PEREIRA *et al.*, 2017). Utilizando vórtices ópticos podemos observar que o feixe gerado no processo não linear apresentava ordens radiais, indicando uma interação entre os graus de liberdade radial e azimutal da luz. Além disso, a presença de uma integral de recobrimento na análise teórica do processo manifesta uma possível modulação dos feixes de entrada sobre o feixe gerado.

Seguindo esta linha, um segundo trabalho foi desenvolvido dentro do contexto da dinâmica do MAO dos feixes com o objetivo de clarificar o papel do mesmo e a relação com uma modulação de fase e a interação entre os graus de liberdade radial e azimutal. No trabalho de (BUONO *et al.*, 2020) é investigado a conexão entre a quiralidade de vórtices ópticos interagentes e o surgimento de estruturas radiais em misturas de ondas não lineares. Dependendo do sinal das cargas topológicas (isto é, do momento angular orbital

do feixe) a mistura não linear dos vórtices pode gerar um acoplamento radial-azimutal, produzindo uma superposição de modos Laguerre-Gaussianos puros que carrega o MAO resultante e um espectro finito de ordens radiais. Podemos interpretar o surgimento de ordens radiais extras - manifestadas como anéis externos concêntricos ao disco central do feixe - como consequência da interação das distintas fases de Gouy presentes nos feixes de saída. Devido a esse fato temos a transformação de um padrão de distribuição de um formato de disco oco para uma estrutura de anéis externos finitos em um ponto de observação distante. Neste sentido, o aparecimento de modos radiais na mistura de ondas não linear é interpretado como um processo de difração do feixe convertido por uma modulação de fase e amplitude efetiva criada pelos feixes de entrada. Essa interpretação é apoiada pela comparação entre imagens produzidos pelo processo não linear e medidas de difração retiradas de experimentos produzidos em mesas ópticas utilizando moduladores espaciais de luz para simular a modulação de amplitude e fase produzida na mistura não linear.

É nessa interface entre luz estruturada e óptica não linear que essa dissertação se encontra, cujo objetivo é caracterizar fenômenos ópticos em regime clássico, onde o tema central será a luz e a investigação de sua interação com a matéria. Em particular, buscamos estender as análises descritas anteriormente sobre a dinâmica do momento angular orbital de vórtices ópticos para processos não lineares de ordens mais altas. Trazemos resultados sobre a dinâmica de vórtices ópticos em meios não lineares que apresentam efeito Kerr, identificando o papel do momento angular orbital do feixe durante o processo. Evidenciamos que - em uma primeira aproximação - um vórtice óptico propagante ao longo desse meio pode gerar uma estrutura de anéis externos finitos, de quantidade proporcional ao seu momento angular orbital de valor  $l$ .

Por fim, após nos situarmos brevemente sobre o estado da arte sobre a luz e o objetivo deste trabalho, expomos brevemente o que será tratado em cada capítulo a seguir.

No segundo capítulo será apresentado uma introdução aos modos paraxiais da luz, em particular os modos de Hermite-Gaussianos e Laguerre-Gaussianos (sendo este último portador do momento angular orbital da luz e representante dos vórtices ópticos). Expomos ao leitor a aproximação paraxial e como a partir dessa aproximação podemos obter a equação de onda paraxial. Ainda no mesmo capítulo descrevemos sobre o momento angular de campos eletromagnéticos, onde fazemos a distinção entre momento angular de spin e orbital, além do momento angular extrínseco e intrínseco.

No terceiro capítulo fazemos uma introdução a óptica não-linear no qual descrevemos fenômenos de interação entre luz e matéria onde a polarização do sistema material responde de maneira não linear ao campo elétrico da luz. Apresentamos o tensor susceptibilidade óptica - considerado como intermediador da interação - e suas propriedades

de simetria. Obtemos a equação de onda não linear a partir do conjunto de equações de Maxwell em meios materiais. Por fim, descrevemos fenômenos ópticos não lineares de terceira ordem como a mistura de quatro ondas no caso geral e degenerado, a geração de terceiro harmônico e o índice de refração como dependente da intensidade do feixe (efeito Kerr).

No quarto capítulo, reunimos os conhecimentos apresentados nos capítulos anteriores em um trabalho original. Utilizando os modos de Laguerre-Gauss como representantes dos vórtices ópticos, investigamos a dinâmica do momento angular orbital dos feixes durante a propagação em meios não lineares de terceira ordem que apresentam o efeito Kerr. Mostramos que - em uma primeira aproximação - um vórtice óptico com momento angular orbital  $l$  é capaz de modular a própria fase (por intermédio do sistema material) e gerar uma estrutura de anéis externos finitos. Esta dinâmica mostra uma relação radial-azimutal com o momento angular orbital ocupando um papel central no fenômeno.

No quinto e último capítulo, concluimos esta dissertação, discutindo os resultados descritos e indicando perspectivas de como seguir daqui por diante.

## 2 Introdução à Ótica paraxial e o Momento Angular Orbital da luz

Uma onda é dita paraxial se as variações em seu perfil transversal são pequenas ao longo da propagação, isto é, o efeito de difração sobre o perfil transversal é pequeno. Neste capítulo iremos descrever alguns tipos de feixes estruturados que surgem no contexto da aproximação paraxial. Apresentamos também o Momento Angular Orbital (MAO) da luz.

### 2.1 Equação de onda paraxial

A fim de obter as equações que descrevem os perfis de feixes estruturados da luz, em particular os modos paraxiais Hermite-Gaussianos (HG) e Laguerre-Gaussianos (LG), precisamos obter a equação de onda paraxial. Para tal, partimos do conjunto das equações de Maxwell. No vácuo, elas assumem a forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (2.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (2.1d)$$

As equações diferenciais para os campos elétrico  $\mathbf{E}$  e magnético  $\mathbf{B}$  podem ser desacopladas tomando o operador rotacional em ambos os lados da equação (2.1b) ou (2.1d), obtendo

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (2.2)$$

Utilizando as equações (2.1a) e (2.1c) chega-se nas equações de onda

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.3)$$

e

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.4)$$

Para nosso propósito de descrever feixes de luz estruturados e monocromáticos propagantes ao longo de um eixo  $\hat{\mathbf{z}}$ , fazemos uso do *ansatz*

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r})e^{i(kz - \omega t)}\hat{\mathbf{x}}, \quad (2.5)$$

onde  $u(\mathbf{r})e^{i(kz - \omega t)}$  são respectivamente a amplitude e fase da onda,  $e^{-i\omega t}$  o fator de fase temporal,  $\hat{\mathbf{x}}$  o vetor de polarização unitário e  $k = \omega/c$  é o número de onda do feixe.

Inserindo a equação (2.5) na equação de onda (2.3) podemos chegar em

$$\begin{aligned}
& \nabla^2 \left[ u(\mathbf{r}) e^{i(kz - \omega t)} \right] - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(\mathbf{r}) e^{i(kz - \omega t)}}{\partial t^2} \\
&= \left( \nabla^2 [u(\mathbf{r})] + 2\nabla [u(\mathbf{r})] \cdot \nabla [e^{ikz}] + u(\mathbf{r}) \nabla^2 [e^{ikz}] \right) e^{-i\omega t} + k^2 u(\mathbf{r}) e^{i(kz - \omega t)} \\
&= \left( \nabla^2 u(\mathbf{r}) + 2ik\hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla u(\mathbf{r}) \right) e^{i(kz - \omega t)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

No qual podemos inferir que

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}) + 2ik\hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla u(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.6)$$

A separação da amplitude espacial do campo em termos de  $u(\mathbf{r})e^{ikz}$  é interessante pois o fator de fase espacial varia rapidamente em comparação ao envelope  $u(\mathbf{r})$  (por vezes chamado de amplitude lenta por este motivo). A afirmação anterior nos leva a utilizar a *aproximação paraxial*:

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right| \ll \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right| \text{ e } 2ik \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|. \quad (2.7)$$

Usando a aproximação paraxial na equação (2.6) chegamos enfim à *equação de onda paraxial*:

$$\nabla_{\perp}^2 u + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad (2.8)$$

sendo  $\nabla_{\perp}^2$  um operador Laplaciano que atua sobre as coordenadas transversas ao eixo  $\hat{\mathbf{z}}$ . Em coordenadas cartesianas,

$$\nabla_{\perp}^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (2.9)$$

## 2.2 Soluções da equação de onda paraxial

### 2.2.1 Modo Fundamental: Feixe Gaussiano

A equação (2.8) admite uma família infinita de soluções (SIEGMAN, 1986). A solução mais simples e de menor ordem é conhecida como modo gaussiano e é descrito pela equação

$$u(x, y, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w(z)} \exp \left[ -\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)} + ik \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} - i \arctan \left( \frac{z}{z_R} \right) \right], \quad (2.10)$$

onde  $w(z)$  é o diâmetro e diz respeito à largura do feixe no plano transversal ao longo do eixo de propagação

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}}, \quad (2.11)$$

e  $R(z)$  é o raio de curvatura da frente de onda

$$R(z) = z \left( 1 + \frac{z_R^2}{z^2} \right). \quad (2.12)$$

Os parâmetros  $w_0$  e  $z_R = \pi w_0^2/\lambda$  são respectivamente o *diâmetro mínimo* (ou *cintura*) do feixe (definida por  $w_0 = w(z = 0)$ ) e a *distância de Rayleigh* (distância da cintura do feixe, na direção de propagação, na qual o raio do feixe é aumentado por um fator  $\sqrt{2}$ ). Todos esses termos descrevem a maneira como a propagação ocorre ao longo de um eixo.

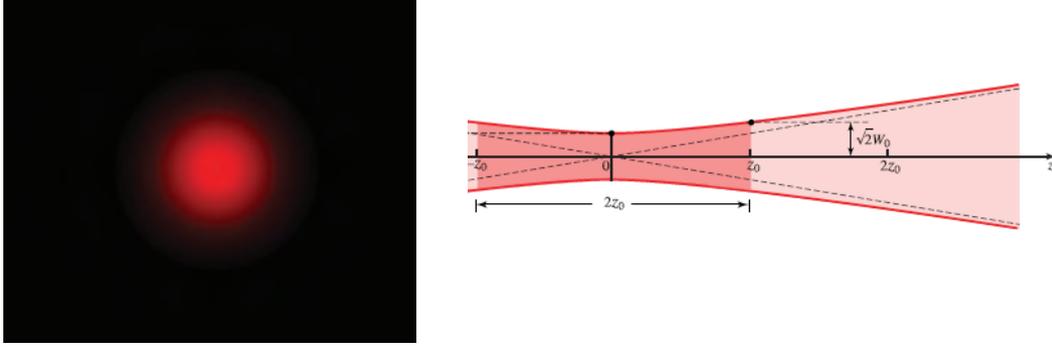


Figura 1 – Perfil transverso (a) e longitudinal (b) do feixe Gaussiano (SALEH; TEICH, 2020).

### 2.2.2 Modo Paraxial: Hermite-Gaussiano

Em geral, uma solução para a equação (2.8) em coordenadas cartesianas produz os modos de Hermite-Gauss, definidos por

$$u_{nm}(x, y, z) = \frac{A_{nm}}{w(z)} H_n \left( \sqrt{2} \frac{x}{w(z)} \right) H_m \left( \sqrt{2} \frac{y}{w(z)} \right) \times \exp \left[ -\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)} + ik \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} - i\phi_{nm}(z) \right]. \quad (2.13)$$

Na expressão acima,  $A_{nm}$  é uma constante de normalização,  $H_m$  é o polinômio de Hermite de ordem  $m$ . O novo parâmetro  $\phi_{nm}$  é denominado fase de Gouy, definida como

$$\phi_{nm} = (n + m + 1) \arctan \left( \frac{z}{z_R} \right). \quad (2.14)$$

A fase de Gouy diz respeito à diferença de fase de um feixe paraxial em relação à frente de onda plana. Repare que este termo também está presente na solução fundamental. A ordem de um modo Hermite-Gaussiano (HG) é definida como  $N = n + m$ . Note que para o caso  $N = 0$ , recuperamos a solução do modo fundamental gaussiano.

### 2.2.3 Modo Paraxial: Laguerre-Gaussiano

A equação (2.8), se solucionada em coordenadas cilíndricas, resulta na família de modos Laguerre-Gaussianos (LG):

$$u_{pl}(r, \phi, z) = \frac{A_{pl}}{w(z)} \left( \frac{\sqrt{2}r}{w(z)} \right)^{|l|} L_p^{|l|} \left( \frac{2r^2}{w^2(z)} \right) \exp \left[ -\frac{r^2}{w^2(z)} \right] \times \exp \left[ ik \frac{r^2}{2R(z)} + il\phi - i\phi_{pl}(z) \right], \quad (2.15)$$

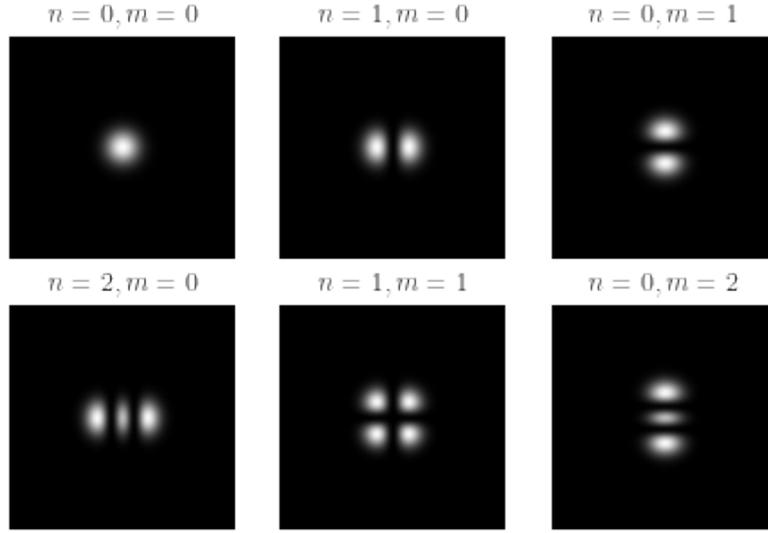


Figura 2 – Perfil de intensidade para os modos Hermite-Gaussianos até ordem  $N = 2$ .

onde  $L_p^{|l|}$  são os polinômios generalizados de Laguerre,  $A_{pl} = \sqrt{2p!/\pi(p+|l|)!}$ , a amplitude de normalização do modo,  $w(z)$  e  $R(z)$  são respectivamente o diâmetro e o raio de curvatura do modo, definidos pelas equações (2.11) e (2.12) anteriormente. Por fim,  $\phi_{pl}(z)$  é a fase de Gouy, dada neste caso de acordo com

$$\phi_{pl}(z) = (2p + |l| + 1) \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right). \quad (2.16)$$

A ordem do modo LG é dada por  $N = 2p + |l|$ . O parâmetro  $p$  é um número natural conhecido como *índice radial* e está associado à presença de anéis concêntricos no perfil de intensidade do modo. O parâmetro  $l$  é um número inteiro conhecido como *helicidade* ou *carga topológica* e está associado ao momento angular orbital do feixe e à dependência azimutal da fase no feixe LG. (ALLEN et al., 1992).

Os modos de HG e LG constituem bases de um espaço vetorial pois são ortonormais entre si e formam um conjunto completo de soluções da equação de onda paraxial. Logo, qualquer combinação linear desses modos também é solução da equação paraxial e existe uma combinação de polinômios de Hermite capaz de gerar um polinômio de Laguerre. Um sistema óptico pode ser usado para transformar um modo Laguerre-Gaussiano em um modo Hermite-Gaussiano reversivelmente (ALLEN et al., 1992). Esta transformação é dada pela seguinte relação,

$$\sum_{k=0}^{n+m} (2i)^k F_k^{n-k, m-k}(0) H_{n+m-k}(x) H_k(y) = 2^{n+m} \times \begin{cases} (-1)^m m! (x + iy)^{n-m} L_n^{n-m}(x^2 + y^2) & \text{para } n \geq m \\ (-1)^n n! (x - iy)^{m-n} L_n^{m-n}(x^2 + y^2) & \text{para } m > n, \end{cases} \quad (2.17)$$

$$\times \begin{cases} (-1)^m m! (x + iy)^{n-m} L_n^{n-m}(x^2 + y^2) & \text{para } n \geq m \\ (-1)^n n! (x - iy)^{m-n} L_n^{m-n}(x^2 + y^2) & \text{para } m > n, \end{cases} \quad (2.18)$$

onde

$$P_k^{n-k,m-k}(0) = \frac{(-1)^k}{2^k k!} \frac{d^k}{dt^k} [(1-t)^m (1+t)^n] \Big|_{t=0} \quad (2.19)$$

são os polinômios de Jacobi.

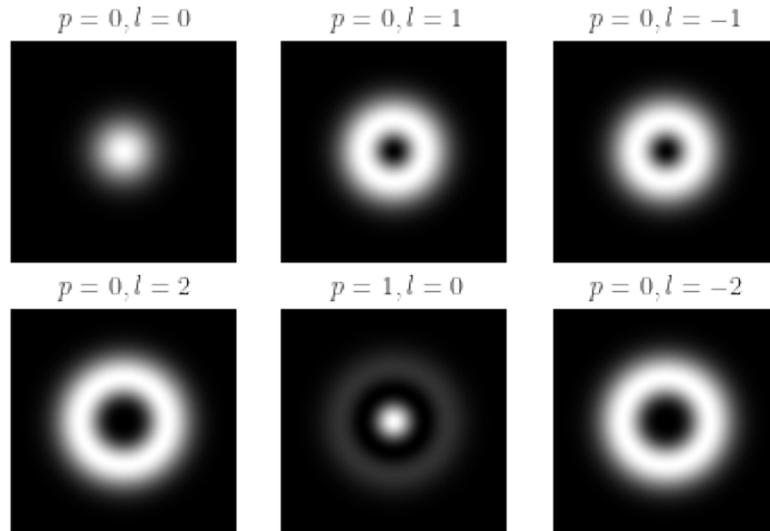


Figura 3 – Perfil de intensidade para os modos Laguerre-Gaussianos até ordem  $N = 2$ .

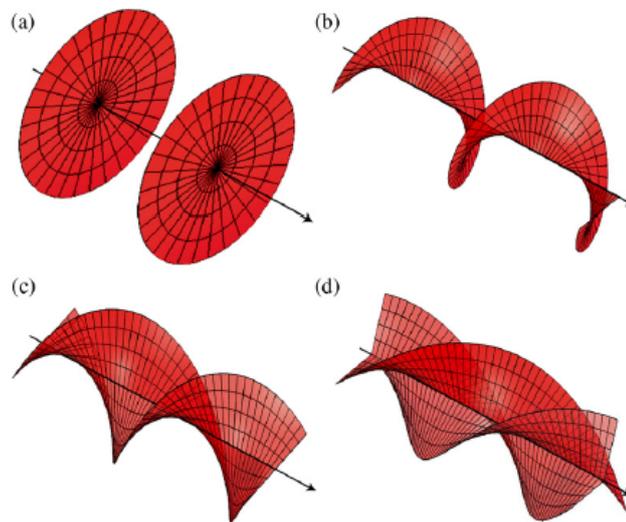


Figura 4 – Frentes de onda de um feixe helicoidal para (a)  $l = 0$ , (b)  $l = 1$ , (c)  $l = 2$ , (d)  $l = 3$  (YAO; PADGETT, 2011).

## 2.3 Momento angular orbital da luz

A dinâmica da radiação eletromagnética, descrita pelas equações de Maxwell, prevê um fluxo de energia e momento para os campos eletromagnéticos. O vetor de Poynting representa a energia por unidade de área e tempo ( ou ainda a densidade de fluxo de

energia), e é definido (no sistema internacional de unidades) pela equação

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = c^2 \epsilon_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{B}). \quad (2.20)$$

A densidade de momento linear, em meios isotrópicos, é proporcional à  $S$ :

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{S}}{c^2} = \epsilon_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (2.21)$$

Integrando (2.21) em todo o espaço obtemos o momento linear total armazenado no campo eletromagnético:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \int_V (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) dV. \quad (2.22)$$

Da mesma forma, podemos definir o momento angular associado ao campo:

$$\mathbf{l}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times \epsilon_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (2.23)$$

é a densidade do momento angular armazenada nos campos e, integrando em todo o espaço podemos obter o momento angular total

$$\mathbf{L}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \int_V \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) dV. \quad (2.24)$$

É conhecido que a luz transporta momento angular orbital e de spin (ALLEN et al., 1992). Considerando campos transversos, localizados e no calibre de Coulomb podemos separar ambos com o auxílio do potencial vetor  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ . O momento angular total pode ser escrito como

$$\mathbf{L}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \int_V \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{A})) dV. \quad (2.25)$$

Utilizando a notação de Einstein para somatórios implícitos, a  $p$ -ésima componente do momento angular é então

$$L_p = \epsilon_0 \left[ \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{A})) \right]_p = -\varepsilon_{pqi} r_q E_j \partial_j A_i + \varepsilon_{pqi} E_j r_q \partial_i A_j. \quad (2.26)$$

onde  $\varepsilon_{pqi}$  é o tensor de Levi-Civita. O primeiro termo no lado direito da equação pode ser substituído utilizando a regra do produto e, observando que  $\partial_j E_j = 0$  e  $\partial_i r_q = \delta_{iq}$ , obtemos

$$\varepsilon_{pqi} r_q E_j (\partial_j A_i) = \varepsilon_{pqi} \partial_j (r_q E_j A_i) - \varepsilon_{pqi} r_q (\partial_j E_j) A_i - \varepsilon_{pqi} (\partial_j r_q) E_j A_i = \varepsilon_{pqi} \partial_j (r_q E_j A_i) - \varepsilon_{pqi} E_q A_i. \quad (2.27)$$

Utilizando o resultado acima, a equação (2.25) é escrita na forma

$$\mathbf{L} = \epsilon_0 \int_V \left[ (\mathbf{E} \times \mathbf{A} - (\nabla \cdot \mathbf{E})(\mathbf{r} \times \mathbf{A}) + E_i (\mathbf{r} \times \nabla) A_i \right] dV \quad (2.28)$$

$$= \epsilon_0 \int_V \left[ (\mathbf{E} \times \mathbf{A} + E_i (\mathbf{r} \times \nabla) A_i \right] dV - \oint_S \mathbf{E} (\mathbf{r} \times \mathbf{A}) dS, \quad (2.29)$$

onde foi usado o teorema de Gauss para transformar o segundo termo presente na integral de volume em uma integral de superfície sobre uma caixa de lado  $L$ . No limite de  $L$

suficientemente grande e para campos localizados, podemos descartar o termo de superfície e o momento angular da luz pode então ser dividido em duas partes,

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_s + \mathbf{L}_o, \quad (2.30)$$

$$\mathbf{L}_s = \epsilon_0 \int_V (\mathbf{E} \times \mathbf{A}) dV, \quad (2.31)$$

$$\mathbf{L}_o = \epsilon_0 \int_V E_i (\mathbf{r} \times \nabla) A_i dV. \quad (2.32)$$

O primeiro termo,  $\mathbf{L}_s$ , representa uma propriedade intrínseca do campo eletromagnético e está associado ao estado de polarização da luz. O segundo termo  $\mathbf{L}_o$ , é associado ao momento angular orbital devido ao aparecimento do operador

$$\hat{\mathbf{L}}_o = (\mathbf{r} \times \nabla). \quad (2.33)$$

Ele está relacionado à circulação de energia causada pela configuração espacial do campo.

### 2.3.1 Momento Angular Intrínseco e Extrínseco

A separação entre momento angular orbital ou de spin não deve ser confundida com a separação entre momento angular de natureza intrínseca e extrínseca. O momento angular de spin é independente do eixo de referência e representa uma propriedade intrínseca do campo (polarização). O momento angular orbital no entanto pode ser de natureza extrínseca ou intrínseca (O'NEIL et al., 2002). Partindo da equação (2.25) calculamos o momento angular total  $\mathbf{L}_0$  em relação a um ponto  $\mathbf{r}_0$  do espaço:

$$\mathbf{L}_0(\mathbf{r}_0) = \epsilon_0 \int_V [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times (\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{A}))] dV \quad (2.34)$$

$$= \epsilon_0 \int_V [(\mathbf{r} \times \mathbf{E}) \times (\nabla \times \mathbf{A})] dV - \epsilon_0 \int_V [(\mathbf{r}_0 \times \mathbf{E}) \times (\nabla \times \mathbf{A})] dV \quad (2.35)$$

$$= \mathbf{L}(0) - \mathbf{r}_0 \times \mathbf{P}. \quad (2.36)$$

Note que o primeiro termo é o mesmo obtido anteriormente. No entanto, surge um segundo termo orbital dependente explicitamente de  $\mathbf{r}_0$ . Da mesma forma, podemos calcular o momento angular para um segundo ponto de referência  $\mathbf{r}_1$  e analisar sua variação

$$\Delta \mathbf{L} = \mathbf{L}(\mathbf{r}_1) - \mathbf{L}(\mathbf{r}_0) = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{P}. \quad (2.37)$$

Para um sistema de eixos coordenados no qual o momento linear  $\mathbf{P}$  é paralelo ao eixo  $z$ , então a componente  $\hat{z}$  da variação do momento angular total do campo é  $\Delta L_z = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{P} \cdot \hat{z} = 0$ . Portanto, para uma mudança do ponto de referência, o momento angular orbital ao longo da direção de  $\mathbf{P}$  permanece inalterada e podemos considerá-la como sendo intrínseca. Em suma, a decomposição do momento angular em extrínseca e intrínseca é

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_e + \mathbf{L}_I, \quad (2.38)$$

$$\mathbf{L}_I = \mathbf{L}_s + \mathbf{L}_0 \cdot \hat{z}, \quad (2.39)$$

$$\mathbf{L}_e = \mathbf{L}_o - \mathbf{L}_0 \cdot \hat{z} \quad (2.40)$$

Vale ressaltar que as propriedades físicas devem ser independentes da escolha de calibre e toda essa demonstração foi realizada sob o calibre de Coulomb. Uma dedução independente da escolha de calibre pode ser encontrada em ([BIALYNICKI-BIRULA; BIALYNICKA-BIRULA, 2011](#)).

## 3 Introdução à óptica não linear

### Considerações sobre o tensor susceptibilidade

Óptica não linear é um ramo da óptica que descreve o comportamento da luz em meios não lineares, isto é, meios nos quais a densidade de polarização  $\mathbf{P}$  responde não linearmente ao campo elétrico  $\mathbf{E}$  da luz, modificando as propriedades ópticas do material. Tipicamente, apenas luz laser é intensa o suficiente ao ponto de modificar as propriedades ópticas de um material. Na óptica linear, assumimos que a polarização do meio responde linearmente a um campo aplicado  $\mathbf{E}$ ,

$$\mathbf{P}^{(1)} = \epsilon_0 \chi^{(1)} \mathbf{E}, \quad (3.1)$$

onde  $\epsilon_0$  é a permissividade elétrica no espaço livre e  $\chi^{(1)}$  a susceptibilidade óptica do meio. Por consequência da linearidade do meio material, somos capazes de extrair as leis da óptica geométrica em meios isotrópicos, assim como a birrefringência em meios anisotrópicos. Além disso, as equações de Maxwell levam a um conjunto de equações proporcionais à primeira potência do campo aplicado, resultando no índice de refração como constante do material, independente da intensidade do campo, e o não acoplamento entre campos de frequências diferentes. Veremos que no caso da óptica não linear isso deixa de ser verdade.

Com o advento do laser em 1960 (MAIMAN, 1960), novos efeitos ópticos começaram a surgir. A geração de segundo harmônico (GSH) no ano seguinte (FRANKEN et al., 1961) inaugura a era da óptica não linear e novos fenômenos ópticos como a soma e diferença de frequências e a geração de terceiro harmônico são observados. Para interpretar a nova gama de efeitos ópticos que surgiam a todo vapor após a invenção do laser, a expressão (3.1) para a polarização é substituída por uma série de potências em função do campo elétrico aplicado,

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \left( \chi^{(1)} \mathbf{E} + \chi^{(2)} \mathbf{E}\mathbf{E} + \chi^{(3)} \mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E} + \dots \right). \quad (3.2)$$

$\chi^{(2)}$  representa a susceptibilidade óptica de segunda ordem,  $\chi^{(3)}$  a susceptibilidade óptica de terceira ordem, e assim por diante. São coeficientes que dependem do material e são representados matematicamente em geral por tensores. Em coordenadas cartesianas temos que a componente  $i$  do vetor de Polarização  $P_i$  é dada de acordo com

$$\begin{aligned} P_i &= \epsilon_0 \left( \chi_{ij}^{(1)} E_j + \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l + \dots \right) \\ &= \epsilon_0 \left( P_i^L + P_i^{NL} \right), \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde utilizamos, assim como no capítulo 1, a convenção de soma implícita para índices repetidos. Vemos que componentes distintas do campo elétrico podem contribuir para

a mesma componente de polarização nos casos não lineares. Além disso, a frequência da polarização do meio pode ser resultado de contribuições de frequências distintas do campo elétrico envolvido na dinâmica do processo. As equações de Maxwell, agora com a nova expressão para a polarização, são suficientes para a descrição de muitos fenômenos ópticos não lineares<sup>1</sup>.

### 3.1 Meios não lineares

Meios não lineares são aqueles que apresentam na polarização uma resposta não linear ao campo elétrico aplicado. Essa resposta é dada pelo tensor susceptibilidade óptica. Esse tensor é uma propriedade do sistema material e, dependendo de sua geometria e dos elementos constituintes, pode amplificar ou reduzir efeitos não lineares como a geração de soma ou diferença de frequências, geração de segundo harmônico, entre outros. A forma dos tensores susceptibilidade óptica são restringidas pelas propriedades de simetria do material. O principal caso de interesse desta dissertação é o de terceira ordem ( $\chi^{(3)}$ ). Muitas das propriedades de simetria presentes no tensor de terceira ordem são válidas para tensores de segunda ordem ou de ordem superiores. Entre elas estão a simetria causada pela condição de realidade dos campos ( $\tilde{\mathbf{E}}^* = \tilde{\mathbf{E}}$ ), que diz que

$$\chi_{ijkl}^{(3)}(-\omega_n - \omega_m - \omega_o, -\omega_n, -\omega_m, -\omega_o) = \chi_{ijkl}^{(3)*}(\omega_n + \omega_m + \omega_o, \omega_n, \omega_m, \omega_o). \quad (3.4)$$

A simetria de permutação intrínseca:

$$\begin{aligned} \chi_{ijkl}^{(3)}(\omega_n + \omega_m + \omega_o, \omega_n, \omega_m, \omega_o) &= \chi_{ijlk}^{(3)}(\omega_n + \omega_m + \omega_o, \omega_n, \omega_o, \omega_m) \\ &= \chi_{ikjl}^{(3)}(\omega_n + \omega_m + \omega_o, \omega_m, \omega_n, \omega_o) \\ &= \chi_{iklj}^{(3)}(\omega_n + \omega_m + \omega_o, \omega_m, \omega_o, \omega_n) \\ &= \chi_{iljk}^{(3)}(\omega_n + \omega_m + \omega_o, \omega_o, \omega_n, \omega_m) \\ &= \chi_{ilkj}^{(3)}(\omega_n + \omega_m + \omega_o, \omega_o, \omega_m, \omega_n). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Existe também a simetria de meios sem perda, onde todas as componentes do tensor são reais e as frequências podem ser permutadas livremente desde que acompanhadas pela permutação dos índices correspondentes. Por exemplo:

$$\chi_{ijkl}^{(3)}(\omega_n + \omega_m + \omega_o, \omega_n, \omega_m, \omega_o) = \chi_{lijk}^{(3)}(\omega_o, \omega_n + \omega_m + \omega_o, -\omega_n, -\omega_m). \quad (3.6)$$

Há também a simetria de Kleinman, que é válida quando as frequências das ondas ópticas envolvidas são muito menores que a menor frequência de ressonância do meio material. Sob esta condição, o tensor susceptibilidade óptica é independente da frequência e responde de maneira quase instantânea ao campo aplicado.

<sup>1</sup> Existem fenômenos mais específicos que requerem um tratamento quântico da interação entre luz e matéria, que não serão discutidos aqui, como o espalhamento Raman estimulado, absorção multi fótons, entre outros(HE, 2015).

O tensor susceptibilidade óptica de terceira ordem  $\chi^{(3)}$  pode ser descrito a princípio por 81 elementos. Para sólidos cristalinos com baixa simetria, todos esses 81 elementos são independentes e podem ser diferentes de zero. No entanto, para materiais possuindo alto grau de simetria espacial, o número de elementos independentes é drasticamente reduzido. Para materiais isotrópicos, e utilizando as simetrias vistas anteriormente, há apenas três elementos independentes.

Considere o caso geral no qual as frequências aplicadas são arbitrárias. Representamos a susceptibilidade como  $\chi_{ijkl} \equiv \chi_{ijkl}^{(3)}(\omega_4 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3)$ . Como cada eixo coordenado deve ser equivalente em um material isotrópico, segue que a susceptibilidade deve ter as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}\chi_{1111} &= \chi_{2222} = \chi_{3333}, \\ \chi_{1122} &= \chi_{1133} = \chi_{2211} = \chi_{2233} = \chi_{3311} = \chi_{3322} \\ \chi_{1212} &= \chi_{1313} = \chi_{2323} = \chi_{2121} = \chi_{3131} = \chi_{3232} \\ \chi_{1221} &= \chi_{1331} = \chi_{2112} = \chi_{2332} = \chi_{3113} = \chi_{3223}\end{aligned}\tag{3.7}$$

Os 21 elementos listados acima são os únicos não nulos de  $\chi^{(3)}$ . Além disso, os quatro tipos de elementos que aparecem nas equações (3.7) não são independentes. De fato, são relacionados pela equação

$$\chi_{1111} = \chi_{1122} + \chi_{1212} + \chi_{1221}.\tag{3.8}$$

Esses resultados dados pelas equações (3.7) e (3.8) podem ser usados para expressar a susceptibilidade na forma compacta

$$\chi_{ijkl} = \chi_{1122}\delta_{ij}\delta_{kl} + \chi_{1212}\delta_{ik}\delta_{jl} + \chi_{1221}\delta_{il}\delta_{jk},\tag{3.9}$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker. Essa forma mostra que a susceptibilidade de terceira ordem possui três elementos independentes para o caso geral no qual as frequências dos campos são arbitrárias.

Vamos agora particularizar esse resultado para o caso onde a susceptibilidade óptica é representada por  $\chi_{ijkl}(3\omega = \omega + \omega + \omega)$ . (um tensor deste tipo é responsável pelo processo não linear da geração de terceiro harmônico, como veremos mais adiante). Por consequência da simetria de permutação intrínseca, os elementos do tensor susceptibilidade são relacionados por  $\chi_{1122} = \chi_{1212} = \chi_{1221}$  e portanto a equação 3.9 torna-se

$$\chi_{ijkl}(3\omega = \omega + \omega + \omega) = \chi_{1122}(3\omega = \omega + \omega + \omega)(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\tag{3.10}$$

Nesse caso existe apenas um elemento independente do tensor susceptibilidade que descreve o fenômeno da geração de terceiro harmônico.

Para os casos de efeitos degenerados, a dependência com relação à frequência é dada por  $\chi_{ijkl} = \chi_{ijkl}(\omega = \omega + \omega - \omega)$ . A simetria de permutação intrínseca impõe neste caso que  $\chi_{1122} = \chi_{1212}$ . Logo,  $\chi_{ijkl}$  pode ser representado por

$$\begin{aligned} \chi_{ijkl}(\omega = \omega + \omega - \omega) &= \chi_{1122}(\omega = \omega + \omega - \omega) \\ &\times (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl}) + \chi_{1221}(\omega = \omega + \omega - \omega)(\delta_{il}\delta_{jk}). \end{aligned} \quad (3.11)$$

### Equação de onda na matéria

Em sistemas materiais as equações de Maxwell se transformam, e os campos elétrico e magnético são substituídos respectivamente pelos campos deslocamento elétrico  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{H}$ <sup>2</sup>. Logo, as equações de Maxwell na matéria são

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho; \quad (3.12a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0; \quad (3.12b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad (3.12c)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}, \quad (3.12d)$$

onde

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \text{ e} \quad (3.13a)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}. \quad (3.13b)$$

A princípio, estamos interessados em soluções para as regiões do espaço sem cargas ou correntes livres, tais que

$$\rho = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{J} = 0. \quad (3.14)$$

Assumimos que o material em questão seja não magnético, de forma que

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}. \quad (3.15)$$

Com isso, seguimos tomando o rotacional da equação (3.12c).

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial(\nabla \times \mathbf{B})}{\partial t}; \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} &= -\mu_0 \frac{\partial(\nabla \times \mathbf{H})}{\partial t}; \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} &= -\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (3.16)$$

<sup>2</sup> Existe uma discussão interessante com relação a nomenclatura dos campos  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{H}$  (GRIFFITHS, 2005). Nesta dissertação  $\mathbf{B}$  será chamado de campo magnético e  $\mathbf{H}$  permanecerá sem nome.

Utilizamos agora a equação (3.13a) para obter a relação acima em termos do campo elétrico e da polarização:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}. \quad (3.17)$$

A equação (3.17) é a equação de onda mais geral na óptica não linear. Sob certas condições é possível simplificá-la. Utilizando uma identidade vetorial, podemos escrever o lado esquerdo da equação (3.17) como

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}. \quad (3.18)$$

Na óptica linear em meios isotrópicos e sem cargas livres, o primeiro termo do lado direito da equação desaparece. Porém na óptica não linear mesmo em materiais isotrópicos isso não é necessariamente verdade, devido a relação (3.13a) mais geral entre  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{D}$ . Felizmente, em muitos casos de interesse da óptica não linear podemos descartá-lo. Por exemplo, para o caso onde um campo elétrico  $\mathbf{E}$  é aproximado por uma onda plana monocromática. Também é possível negligenciá-lo no caso onde a aproximação de amplitude lentamente variável é válida. Com isso nossa equação de onda se torna

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}. \quad (3.19)$$

Separando a polarização em sua parte linear e não linear como na equação (3.3) e utilizando a relação (3.1) em (3.19) somos capazes de obter

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\epsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}^{(NL)}}{\partial t^2}, \quad (3.20)$$

onde  $\epsilon_r = 1 + \chi^{(1)}(\omega_n)$  é a permissividade relativa do meio.

A equação (3.20) possui a forma de uma equação de onda com fonte, onde a polarização não linear atua como fonte para o campo elétrico. Uma consequência disso é que aparecerão termos da polarização do meio que serão interpretados como fontes de ondas com frequências diferentes das ondas incidentes. Na ausência do termo de fonte, a equação admite soluções na forma de ondas livres que se propagam com velocidade  $c/n$ , com  $n = \sqrt{\epsilon_r}$  sendo o índice de refração linear do meio.

Em geral é útil escrever o campo elétrico e a polarização como sendo formados pelo produto de dois termos, representando a variação de amplitude lenta e rápida. Também é comum escrevermos os campos como uma soma sobre seus componentes de frequências distintas de acordo com

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_n \mathbf{E}_n(\mathbf{r})e^{-i\omega_n t} + c.c., \quad (3.21)$$

$$\mathbf{P}^{(NL)}(\mathbf{r}, t) = \sum_n \mathbf{P}_n^{(NL)}(\mathbf{r})e^{-i\omega_n t} + c.c. . \quad (3.22)$$

Inserindo as equações (3.21) e (3.22) em (3.20) resulta em uma equação de onda válida para cada componente de frequência do campo:

$$\nabla^2 \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) + \frac{\omega_n^2}{c^2} \varepsilon_r(\omega_n) \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) = -\frac{\omega_n^2}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{P}_n^{(NL)}(\mathbf{r}). \quad (3.23)$$

Constantemente retornaremos à equação (3.23) para estudar os processos ópticos que surgem como consequência da polarização não linear.

## 3.2 Processos não lineares de terceira ordem

Processos não lineares de terceira ordem são consequências da resposta cúbica do meio material sob estímulo de um campo elétrico aplicado. Essa resposta não acontece necessariamente na mesma direção em que o campo incidente está polarizado. Em coordenadas cartesianas a polarização não linear de terceira ordem é dada de acordo com

$$P_i^{(3)}(\omega) = \epsilon_0 \sum_{(nmo)} \sum_{jkl} \chi_{ijkl}^{(3)}(\omega; \omega_n, \omega_m, \omega_o) E_j(\omega_n) E_k(\omega_m) E_l(\omega_o), \quad (3.24)$$

onde  $\omega = \omega_n + \omega_m + \omega_o$  e  $i, j, k, l$  são as coordenadas cartesianas. A notação  $(nmo)$  indica que a soma deve ser performada de forma que a soma  $\omega = \omega_n + \omega_m + \omega_o$  seja mantida fixa, embora cada componente  $\omega_n, \omega_m$  e  $\omega_o$  possa variar de forma separada. Para o campo elétrico, iremos descrevê-lo como

$$E(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} A(\mathbf{r}, t) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + c.c. . \quad (3.25)$$

Utilizando as propriedades vistas anteriormente sobre o tensor susceptibilidade e a equação (3.25) reescrevemos a polarização não linear como

$$P_i^{(3)}(\omega) = \frac{\epsilon_0 D}{4} \sum_{jkl} \chi_{ijkl}^{(3)}(\omega; \omega_n, \omega_m, \omega_o) A_j(\omega_n) A_k(\omega_m) A_l(\omega_o), \quad (3.26)$$

onde  $D$  é conhecido como o fator de degenerescência e é igual ao número de permutações distintas entre  $\omega_n, \omega_m$  e  $\omega_o$ .

De forma geral, podemos ter diferentes conversões paramétricas (i.e, sem trocas de energia com o meio) originadas da interação entre os campos elétricos aplicados. A polarização não linear é proporcional ao cubo do campo total aplicado, o que pode gerar diversas frequências de saída. A Tabela 1 mostra as frequências geradas no processo de

interação do campo com o meio não linear com susceptibilidade óptica  $\chi^{(3)}$ , quando o campo de entrada possui três componentes de frequência distintas, assim como o fator de degenerescência.

Fator de degenerescência $D$	Frequência gerada		
1	$3\omega_1$	$3\omega_2$	$3\omega_3$
3	$2\omega_1 + \omega_2$	$2\omega_1 + \omega_3$	$\omega_1 + 2\omega_3$
	$2\omega_1 - \omega_2$	$2\omega_2 - \omega_3$	$2\omega_2 - 2\omega_3$
	$2\omega_3 + \omega_2$	$2\omega_2 + \omega_1$	$2\omega_2 + \omega_3$
	$2\omega_3 - \omega_2$	$2\omega_2 - \omega_1$	$2\omega_2 - \omega_3$
	$\omega_1 + \omega_1 - \omega_1$	$\omega_2 + \omega_2 - \omega_2$	$\omega_3 + \omega_3 - \omega_3$
6	$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3$	$\omega_1 + \omega_2 - \omega_3$	$\omega_1 + \omega_3 - \omega_2$
	$\omega_2 + \omega_3 - \omega_1$		
	$\omega_1 + \omega_2 - \omega_2$	$\omega_1 + \omega_3 - \omega_3$	$\omega_2 + \omega_1 - \omega_1$
	$\omega_2 + \omega_3 - \omega_3$	$\omega_3 + \omega_1 - \omega_1$	$\omega_3 + \omega_2 - \omega_2$

Tabela 1 – Frequências presentes na polarização não linear em processos  $\chi^{(3)}$ , quando temos três frequências de entrada  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  e  $\omega_3$ . O fator de degenerescência é o número de vezes que um termo particular aparece em  $E^3$ . Pares como  $\omega_2 + \omega_3 - \omega_3$  não são simplificados, de maneira à explicitar sua origem. Adaptado de (POWERS; HAUS, 2017).

Note que tratamos  $\omega$  e  $-\omega$  como frequências distinguíveis, de forma que  $\omega_1 + \omega_1 - \omega_1$  tenha um fator de degenerescência  $D = 3$  e  $\omega_1 + \omega_2 - \omega_2$  com fator de degenerescência  $D = 6$ . Também consideramos campos de polarizações ou vetores de ondas diferentes como distinguíveis. Partiremos agora para a descrição qualitativa de alguns fenômenos não lineares originados de  $P^{(3)}$ . Para simplificar nossa discussão, consideraremos uma situação onde o campo elétrico aplicado e a polarização não linear apontam na mesma direção, de forma que podemos tratá-los como quantidades escalares.

### 3.2.1 Mistura de Quatro Ondas

Considere o caso onde temos para o campo de entrada três feixes de luz de frequências distintas  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  e  $\omega_3$  e vetores de onda  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$  colineares ao longo de um eixo de propagação  $z$ . Podemos representar o campo elétrico total sobre o meio não linear de acordo com

$$E(z, t) = \frac{1}{2}A_1e^{i(k_1z - \omega_1t)} + \frac{1}{2}A_2e^{i(k_2z - \omega_2t)} + \frac{1}{2}A_3e^{i(k_3z - \omega_3t)} + \frac{1}{2}A_4e^{i(k_4z - \omega_4t)} + c.c. . \quad (3.27)$$

Geralmente, podemos ter qualquer polarização cuja frequência esteja presente na tabela 1, sendo esta polarização responsável por ser a fonte do campo gerado. Além disso, temos uma resposta de frequência  $\omega_4 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$  do meio não linear por consequência dos

campos de entrada. Para a frequência  $\omega_4$  gerada, existe 5 possibilidades diferentes:

$$\omega_4 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3, \quad (3.28a)$$

$$\omega_4 = \omega_4 + \omega_4 - \omega_4, \quad (3.28b)$$

$$\omega_4 = \omega_4 + \omega_1 - \omega_1, \quad (3.28c)$$

$$\omega_4 = \omega_4 + \omega_2 - \omega_2, \quad (3.28d)$$

$$\omega_4 = \omega_4 + \omega_3 - \omega_3. \quad (3.28e)$$

A polarização não linear inclui as contribuições de cada uma das possibilidades, de acordo com

$$P^{(3)}(\omega_4) = \frac{3\epsilon_0\chi^{(3)}}{4} \left[ (2|A_1|^2 + 2|A_2|^2 + 2|A_3|^2 + |A_4|^2)A_4e^{ik_4z} + 2A_1A_2A_3e^{i(k_1+k_2+k_3)z} \right]. \quad (3.29)$$

A equação (3.29) mostra dois tipos de contribuição para a polarização não linear. A primeira contribuição presente em (3.29) dada por

$$P^{(3)}(\omega_4) = \frac{6\epsilon_0\chi^{(3)}}{4} A_1A_2A_3e^{i(k_1+k_2+k_3)z}, \quad (3.30)$$

envolve trocas de energia entre os diferentes campos. Esta contribuição para a polarização não linear possui um comprimento de onda determinado por  $k_1 + k_2 + k_3$  que pode ser diferente daquele associado a um campo de frequência  $\omega_4$ .

### Casamento de Fase

Quando  $P^{(3)}$  é interpretada como fonte de um novo campo elétrico, a equação de onda para este campo levará ao surgimento de um termo  $\Delta k$ , e é definida neste caso por

$$\Delta k = k_4 - k_1 - k_2 - k_3. \quad (3.31)$$

Para maximizar um efeito não linear é necessário geralmente que a condição  $\Delta k = 0$  seja atingida. Essa condição é conhecida como *casamento de fase*.

O segundo termo presente na equação (3.29) é proporcional a  $A_4e^{ik_4z}$  e tem o mesmo comprimento de onda que uma onda propagante de frequência  $\omega_4$ . Portanto, estes termos automaticamente possuem casamento de fase. Eles dão origem a processos como auto-modulação de fase e modulação de fase cruzada.

A equação (3.29) mostra que os quatro campos são acoplados uns com os outros. A polarização não linear para as frequências  $\omega_1, \omega_2$  e  $\omega_3$  possuem expressões acopladas similares. As equações acopladas para as amplitudes são obtidas substituindo a polarização não linear de cada frequência em (3.23)

$$\frac{dA_1}{dz} = i \frac{3\omega_1 \chi^{(3)}}{8n_1 c} \left[ (|A_1|^2 + 2|A_2|^2 + 2|A_3|^2 + 2|A_4|^2)A_1 + 2A_2^* A_3^* A_4 e^{i\Delta k z} \right], \quad (3.32a)$$

$$\frac{dA_2}{dz} = i \frac{3\omega_2 \chi^{(3)}}{8n_2 c} \left[ (2|A_1|^2 + |A_2|^2 + 2|A_3|^2 + 2|A_4|^2)A_2 + 2A_1^* A_3^* A_4 e^{i\Delta k z} \right], \quad (3.32b)$$

$$\frac{dA_3}{dz} = i \frac{3\omega_3 \chi^{(3)}}{8n_3 c} \left[ (2|A_1|^2 + 2|A_2|^2 + |A_3|^2 + 2|A_4|^2)A_3 + 2A_1^* A_2^* A_4 e^{i\Delta k z} \right], \quad (3.32c)$$

$$\frac{dA_4}{dz} = i \frac{3\omega_4 \chi^{(3)}}{8n_4 c} \left[ (2|A_1|^2 + |A_2|^2 + 2|A_3|^2 + |A_4|^2)A_4 + 2A_1 A_2 A_3 e^{-i\Delta k z} \right], \quad (3.32d)$$

onde

$$\Delta k = k_4 - k_1 - k_2 - k_3. \quad (3.33)$$

é a condição de casamento de fase. Note que as equações acopladas acima são específicas para os processos descritos por  $\omega_4 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$  e o rearranjo desta relação. Um conjunto de equações acopladas para as amplitudes são encontradas da mesma maneira para as outras combinações de frequência. O conjunto de equações acima descreve a dinâmica de acoplamento entre os campos ao longo do meio não linear.

### 3.2.2 Geração de Terceiro Harmônico (GTH)

A Geração de Terceiro harmônico (GTH) é o nome dado ao processo no qual um campo de entrada de frequência  $\omega$  sobre um meio com resposta não linear  $\chi^{(3)}$  gera uma resposta de frequência  $3\omega$ .

Considere um feixe de entrada monocromático que se propaga ao longo de um eixo  $z$ , de amplitude complexa lentamente variável  $A(z)$  e polarizado linearmente, de acordo com

$$E(z, t) = \frac{1}{2} A(z) e^{i(kz - \omega t)} + c.c. \quad (3.34)$$

A polarização gerada de frequência  $3\omega$  será

$$P^{(3)}(3\omega) = \frac{\epsilon_0 \chi^{(3)}}{4} A^3(z) e^{i(3kz - 3\omega t)} + c.c. \quad (3.35)$$

Como resultado, podemos esperar um campo de frequência  $3\omega$  sendo produzido dentro do meio não linear, dado por

$$E_{3\omega}(z, t) = \frac{1}{2} A_{3\omega}(z) e^{i(k_{3\omega} z - 3\omega t)} + c.c. \quad (3.36)$$

A equação (3.20) nos diz que a polarização não linear atua como fonte do campo elétrico  $E_{3\omega}$ . Logo, utilizando as relações (3.34) a (3.36) obtemos

$$\frac{dA_{3\omega}}{dz} = \frac{-9\omega^3 \chi^{(3)}}{2ikc^2} A^3 e^{i\Delta k z}, \quad (3.37)$$

onde

$$\Delta k = 3k - k_{3\omega}. \quad (3.38)$$

A equação (3.37) descreve o comportamento do campo de terceiro harmônico gerado no meio não linear  $\chi^{(3)}$ . Para um feixe de entrada do tipo gaussiano pode ser resolvida em termos das funções elípticas de Jacobi, porém isso não será feito aqui. Mais detalhes podem ser obtidos na seção 2.10 da referência (BOYD; PRATO, 2008).

### 3.2.3 Índice de refração dependente da intensidade

Por consequência da susceptibilidade óptica  $\chi^{(3)}$ , também é possível observar efeitos auto-induzidos. Considere novamente um campo de entrada dado pela equação (3.34). De acordo com (3.26) e a tabela 1 é possível obter uma polarização de mesma frequência que o campo de entrada, de acordo com

$$\tilde{P}^{(3)}(\omega) = \frac{3\epsilon_0\chi^{(3)}}{4}|A|^2 A e^{i(kz-\omega t)} + c.c. \quad (3.39)$$

Com isso, podemos reobter uma relação linear entre a resposta do meio e o campo elétrico aplicado, por meio de uma susceptibilidade efetiva  $\chi_{ef}$ . A polarização total em um meio centrossimétrico ( $\chi^{(2n)} = 0, n \in \mathbb{N}$ ) será

$$\tilde{P}(\omega) = \tilde{P}^{(1)} + \tilde{P}^{(3)} = \epsilon_0\chi_{ef}\tilde{E}, \quad (3.40)$$

onde

$$\chi_{ef} = \chi^{(1)} + \frac{3\chi^{(3)}}{4}|A|^2. \quad (3.41)$$

Note que devido a presença de  $\chi^{(3)}$ , a equação (3.41) fornece uma correção para o índice de refração do meio,

$$n^2 \equiv \epsilon_r = 1 + \chi^{(1)} + \frac{3\chi^{(3)}}{4}|A|^2. \quad (3.42)$$

Em geral,  $\chi^{(3)}$  é de magnitude pequena em comparação a  $\chi^{(1)}$ , de forma que

$$n = \sqrt{1 + \chi^{(1)} + \frac{3\chi^{(3)}|A|^2}{4}} = \sqrt{1 + \chi^{(1)}} \left( 1 + \frac{3\chi^{(3)}|A|^2}{4(1 + \chi^{(1)})} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.43)$$

$$\approx \sqrt{1 + \chi^{(1)}} \left( 1 + \frac{3\chi^{(3)}|A|^2}{8(1 + \chi^{(1)})} \right) = \sqrt{1 + \chi^{(1)}} + \frac{3\chi^{(3)}|A|^2}{8\sqrt{1 + \chi^{(1)}}}. \quad (3.44)$$

Definindo o índice de refração linear do material como  $n_0 = \sqrt{1 + \chi^{(1)}}$ , Temos

$$n = n_0 + \frac{3\chi^{(3)}|A|^2}{8n_0}. \quad (3.45)$$

A intensidade de um campo incidente sobre o meio é proporcional ao quadrado de sua amplitude (BOYD; PRATO, 2008), dada por

$$I = \frac{1}{2} n_0 c \epsilon_0 |E|^2. \quad (3.46)$$

Desta forma, reescrevemos a equação (3.45) como a soma do índice de refração linear  $n_0$  e a correção não linear  $n_2$  devido a resposta  $\chi^{(3)}$  do meio.

$$n = n_0 + n_2 I, \quad (3.47)$$

onde

$$n_2 = \frac{3}{2n_0^2 \epsilon_0 c} \chi^{(3)}. \quad (3.48)$$

A equação (3.47) mostra a dependência explícita do índice de refração com a intensidade da onda incidente sobre o meio. Como consequência, podemos ter processos como a auto-focalização/de-focalização do feixe, ou auto modulação de fase para o caso de feixes pulsados.

### 3.2.4 Mistura de quatro ondas degenerado

Consideramos agora o caso de mistura de quatro ondas degenerado, onde os campos interagentes possuem a mesma frequência  $\omega$ . A fim de satisfazer a condição de casamento de fase (3.31), podemos considerar o esquema da figura 5. Neste cenário, dois feixes de bombeio contra-propagantes  $\mathbf{E}_1$  e  $\mathbf{E}_2$  com vetores de onda  $\mathbf{k}_1$  e  $\mathbf{k}_2$  respectivamente são injetados em um meio não linear sem perda caracterizado pela susceptibilidade óptica  $\chi^{(3)}$ , junto com uma onda de prova  $\mathbf{E}_3$  com vetor de onda  $\mathbf{k}_3$ . Usualmente, os feixes de bombeio são tomados como sendo ondas planas, porém em geral podem assumir qualquer estrutura de frente de onda, desde que sejam conjugadas entre si. A onda de prova pode assumir uma frente de onda arbitrária.

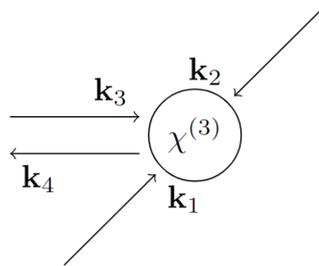


Figura 5 – Representação esquemática dos vetores de onda envolvidos no processo.

Como resultado do acoplamento entre os campos em razão da polarização não linear, uma nova onda  $\mathbf{E}_4$  é gerada, de fase conjugada a onda de prova. Note que com esta

configuração, o casamento de fase ocorre automaticamente. Como os feixes de bombeio são contra propagantes, e a onda gerada é conjugada de fase da onda de prova, temos.

$$\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2, \quad (3.49a)$$

$$\mathbf{k}_4 = -\mathbf{k}_3. \quad (3.49b)$$

Logo,

$$\Delta k = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 = \mathbf{k}_1 + (-\mathbf{k}_1) + \mathbf{k}_3 + (-\mathbf{k}_3) = 0. \quad (3.50)$$

Para obter o conjunto de equações acopladas, escrevemos os campos elétricos envolvidos de acordo com

$$\tilde{\mathbf{E}}_i = \frac{1}{2} \mathbf{A}_i e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + c.c., \quad (3.51)$$

onde  $i = 1, 2, 3, 4$  representam respectivamente os feixes de bombeio 1 e 2, a onda de prova e a onda sinal gerada. As equações acopladas para as amplitudes são obtidas de maneira similar ao conjunto de equações (3.32), contabilizando todos os processos que geram a frequência  $\omega = \omega + \omega - \omega$  correspondente. Tal frequência pode ser gerada pela auto-modulação de fase, modulação de fase cruzada, ou interação paramétrica (trocas de energia) entre os campos envolvidos.

Os campos envolvidos geram uma polarização não linear no meio, dada por

$$P_i^{(3)}(\omega) = \frac{3}{4} \epsilon_0 \chi^{(3)} A A A^* e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} \quad (3.52)$$

onde  $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$  é a amplitude total dos campos envolvidos. A Presença do fator de fase espacial  $e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}}$  é particularmente importante pois age como um termo de fase casada para cada uma das ondas interagentes. A amplitude de polarização para cada onda associada é dada por

$$P_1(\omega) = \frac{3\epsilon_0 \chi^{(3)}}{4} \left[ (|A_1|^2 + 2|A_2|^2 + 2|A_3|^2 + 2|A_4|^2) A_1 + 2A_3 A_4 A_2^* \right] e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}}, \quad (3.53a)$$

$$P_2(\omega) = \frac{3\epsilon_0 \chi^{(3)}}{4} \left[ (2|A_1|^2 + |A_2|^2 + 2|A_3|^2 + 2|A_4|^2) A_2 + 2A_3 A_4 A_1^* \right] e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}}, \quad (3.53b)$$

$$P_3(\omega) = \frac{3\epsilon_0 \chi^{(3)}}{4} \left[ (2|A_1|^2 + 2|A_2|^2 + |A_3|^2 + 2|A_4|^2) A_3 + 2A_1 A_2 A_4^* \right] e^{i\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r}}, \quad (3.53c)$$

$$P_4(\omega) = \frac{3\epsilon_0 \chi^{(3)}}{4} \left[ (2|A_1|^2 + 2|A_2|^2 + 2|A_3|^2 + |A_4|^2) A_4 + 2A_1 A_2 A_3^* \right] e^{i\mathbf{k}_4 \cdot \mathbf{r}}. \quad (3.53d)$$

$$(3.53e)$$

Assumimos a seguir que as amplitudes dos campos  $E_3$  e  $E_4$  são fracas em comparação as amplitudes dos feixes de bombeio  $E_1$  e  $E_2$ . Sendo assim, nas expressões acima eliminamos os termos que contém mais de uma amplitude de campo fraco. Portanto, obtemos

$$P_1(\omega) = \frac{3\epsilon_0\chi^{(3)}}{4} [ |A_1|^2 A_1 + 2|A_2|^2 A_1 ] e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}}, \quad (3.54a)$$

$$P_2(\omega) = \frac{3\epsilon_0\chi^{(3)}}{4} [ |A_2|^2 A_2 + 2|A_1|^2 A_2 ] e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}}, \quad (3.54b)$$

$$P_3(\omega) = \frac{3\epsilon_0\chi^{(3)}}{4} [ 2|A_1|^2 A_3 + 2|A_2|^2 A_3 + A_1 A_2 A_4^* ] e^{i\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r}}, \quad (3.54c)$$

$$P_4(\omega) = \frac{3\epsilon_0\chi^{(3)}}{4} [ 2|A_1|^2 A_4 + 2|A_2|^2 A_4 + A_1 A_2 A_3^* ] e^{i\mathbf{k}_4 \cdot \mathbf{r}}. \quad (3.54d)$$

$$(3.54e)$$

Note que, com base na aproximação utilizada, os campos  $E_3$  e  $E_4$  são dirigidos por uma polarização que depende das amplitudes de todos os campos envolvidos, enquanto que para os campos  $E_1$  e  $E_2$  dependem apenas deles mesmos. Assim, consideramos primeiro o problema de calcular a evolução espacial das amplitudes dos feixes de bombeio  $E_1$  e  $E_2$ . Podemos então utilizar os resultados obtidos para calcular a evolução espacial das ondas de prova e sinal.

Assumimos que cada uma das ondas interagentes obedece à equação da onda na forma

$$\nabla^2 \tilde{E}_i - \frac{\epsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{E}_i}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \tilde{P}_i^{(NL)}}{\partial t^2}. \quad (3.55)$$

Agora introduzimos as equações (3.51) e (3.54) em (3.55) e utilizamos a aproximação de amplitude lentamente variável para obter as equações acopladas para as amplitudes. Além disso, deixamos que  $z'$  seja a direção de propagação dos feixes de bombeio e  $z$  a direção de propagação dos feixes de prova e sinal.

$$\frac{dA_1}{dz'} = \frac{3i\omega}{2nc} \chi^3 [ |A_1|^2 + 2|A_2|^2 ] A_1, \quad (3.56a)$$

$$\frac{dA_2}{dz'} = \frac{3i\omega}{2nc} \chi^3 [ 2|A_1|^2 + |A_2|^2 ] A_2, \quad (3.56b)$$

$$\frac{dA_3}{dz} = \frac{3i\omega}{nc} \chi^3 [ (|A_1|^2 + |A_2|^2) A_3 + A_1 A_2 A_4^* ], \quad (3.56c)$$

$$\frac{dA_4}{dz} = \frac{3i\omega}{nc} \chi^3 [ (|A_1|^2 + |A_2|^2) A_4 + A_1 A_2 A_3^* ]. \quad (3.56d)$$



## 4 Propagação de vórtices ópticos em meios não lineares

O trabalho aqui exposto surge da união dos tópicos apresentados anteriormente. Neste capítulo, faremos a investigação do fenômeno de auto-modulação de fase com vórtices ópticos através de uma abordagem teórica, e com o auxílio de simulações numéricas. Em particular, estamos interessados no papel do momento angular orbital do feixe durante o processo.

### 4.1 Equação paraxial em meios não lineares

Como vimos anteriormente na seção 3.1, a propagação do campo eletromagnético em meios não lineares obedece a equação

$$\nabla^2 \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) + \frac{\omega_n^2}{c^2} \varepsilon_r(\omega_n) \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) = -\frac{\omega_n^2}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{P}_n^{(NL)}(\mathbf{r}). \quad (3.23 \text{ revisitada})$$

Tratando-se do processo de auto modulação de fase, estaremos restringindo a análise para materiais não lineares isotrópicos e centrossimétricos, isto é, materiais cuja susceptibilidade não linear de segunda ordem seja nula:

$$\chi^{(2)} = 0. \quad (4.1)$$

Considere um feixe incidente  $\mathbf{E}_R$  que se propaga ao longo de um eixo  $z$  e com uma polarização linear  $\hat{x}$ . Esse campo pode ser escrito como

$$\mathbf{E}_R(\mathbf{r}, z; t) = \mathcal{E}(\mathbf{r}, z) e^{-i\omega t} \hat{x} + c.c., \quad (4.2)$$

onde  $\mathcal{E}(\mathbf{r}, z)$  representa o perfil espacial do campo. Descrevemos tais perfis como sendo a superposição de modos Laguerre-Gaussianos (LG), multiplicados por uma função  $A_{pl}(z)$  chamada de amplitude lentamente variável:

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, z) = e^{ikz} \sum_{pl} A_{pl}(z) u_{pl}(\mathbf{r}, z). \quad (4.3)$$

Inserindo a equação (4.3) na equação de onda (3.23), temos

$$\sum_{pl} \left[ \nabla^2 (A_{pl}(z) u_{pl}(\mathbf{r}, z) e^{ikz}) + k_0^2 A_{pl}(z) u_{pl}(\mathbf{r}, z) e^{ikz} \right] = -\frac{\omega^2}{\epsilon_0 c^2} P^{(3)}. \quad (4.4)$$

Expandindo o lado esquerdo da equação (4.4):

$$\nabla^2(A_{pl}(z)u_{pl}(\mathbf{r}, z)e^{ikz}) + k_0^2 A_{pl}(z)u_{pl}(\mathbf{r}, z)e^{ikz} = \quad (4.5)$$

$$\left[ \left( \frac{d^2 A_{pl}}{dz^2} + 2ik \frac{dA_{pl}}{dz} \right) u_{pl} + 2 \frac{dA_{pl}}{dz} \frac{\partial u_{pl}}{\partial z} \right] e^{ikz} + \quad (4.6)$$

$$+ A_{pl} \left( \nabla_{\perp}^2 u_{pl} + 2ik \frac{\partial u_{pl}}{\partial z} + \frac{\partial^2 u_{pl}}{\partial z^2} \right) e^{ikz}. \quad (4.7)$$

Faremos uso de uma série de aproximações, justificadas pela variação lenta da amplitude complexa  $A_{pl}(z)$  e do modo paraxial  $u_{pl}(r, z)$  ao longo do eixo de propagação. São elas:

$$\left| \frac{\partial^2 u_{pl}(\mathbf{r}, z)}{\partial z^2} \right| \ll 2k \left| \frac{\partial u_{pl}(\mathbf{r}, z)}{\partial z} \right|, \quad (4.8)$$

$$\left| \frac{d^2 A_{pl}(z)}{dz^2} \right| \ll 2k \left| \frac{dA_{pl}(z)}{dz} \right| \text{ e} \quad (4.9)$$

$$\left| \frac{dA_{pl}(z)}{dz} \frac{\partial u_{pl}(\mathbf{r}, z)}{\partial z} \right| \ll k \left| \frac{dA_{pl}(z)}{dz} \right| \text{ ou } k \left| \frac{\partial u_{pl}(\mathbf{r}, z)}{\partial z} \right|. \quad (4.10)$$

Com a utilização das aproximações, o lado esquerdo da equação 4.4 se torna

$$2ik \frac{dA_{pl}(z)}{dz} u_{pl}(\mathbf{r}, z) e^{ikz} = -\frac{\omega^2}{\epsilon_0 c^2} P^{(3)}. \quad (4.11)$$

Aplicando as equações (3.26), (4.3) e com o auxílio da tabela 1, a polarização não linear no contexto da auto modulação de fase é descrita de acordo com a equação

$$P^{(3)} = \frac{3\epsilon_0 \chi^{(3)} e^{ikz}}{4} \sum_{p'l'} \sum_{p''l''} \sum_{p'''l'''} A_{p'l'}(z) A_{p''l''}^*(z) A_{p'''l'''}(z) u_{p'l'}(\mathbf{r}, z) u_{p''l''}^*(\mathbf{r}, z) u_{p'''l'''}(\mathbf{r}, z). \quad (4.12)$$

Para prosseguir, faremos uso da relação de ortogonalidade dos modos paraxiais LG:

$$\int \int u_{pl}(\mathbf{r}, z) u_{p'l'}(\mathbf{r}, z) d^2 \mathbf{r} = \delta_{pp'} \delta_{ll'}. \quad (4.13)$$

Implementando a equação (4.12) na equação (4.11) e fazendo uso da condição (4.13) obtemos a equação dinâmica para a amplitude complexa:

$$\frac{dA_{pl}}{dz}(z) = ig \sum_{p'l'} \sum_{p''l''} \sum_{p'''l'''} \Lambda_{pp'p''p'''}^{ll'l'l''l'''} A_{p'l'}(z) A_{p''l''}^*(z) A_{p'''l'''}(z), \quad (4.14)$$

onde introduzimos o parâmetro

$$g = 3 \frac{\omega^2 \chi^{(3)}}{2kc^2} R_{0000}^{0000}, \quad (4.15)$$

a integral de recobrimento

$$R_{pp'p''p'''}^{ll'l'l''l'''} = \int \int u_{pl}^* u_{p'l'} u_{p''l''}^* u_{p'''l'''} d^2 \mathbf{r}, \quad (4.16)$$

e as constantes de recobrimento normalizadas

$$\Lambda_{pp'p''p'''}^{ll'l''l'''}(z) = \frac{R_{pp'p''p'''}^{ll'l''l'''}}{R_{0000}^{0000}}. \quad (4.17)$$

Em um primeiro momento, estamos interessados em um solução perturbativa para a equação (4.14). Isto é, onde a propagação do feixe ao longo do meio não linear é pequena em comparação à distância de Rayleigh do feixe. Assumimos que a amplitude pode ser escrita como uma expansão em série de Taylor, de acordo com:

$$A_{pl}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n A_{pl}}{dz^n}(0) \frac{z^n}{n!}. \quad (4.18)$$

Em primeira ordem, para um dado comprimento  $L$  que satisfaça a condição de propagação em pequenas distâncias podemos escrever a solução aproximada como

$$A_{pl}(L) \approx A_{pl}(0) + \left. \frac{dA_{pl}}{dz} \right|_{z=0} L. \quad (4.19)$$

A fim de obter uma expressão para  $dA_{pl}/dz$ , utilizamos a equação diferencial (4.14). Para tal, considere um feixe incidente sem ordens radiais ( $p = 0$ ) e de momento angular orbital  $l_0$ . Podemos escrever a amplitude complexa desse feixe matematicamente como

$$A_{pl}(0) = \delta_{p0} \delta_{ll_0} A_{0l_0}(0). \quad (4.20)$$

A equação (4.14) vale para qualquer ponto ao longo do eixo de propagação  $z$ . Em particular, para o ponto  $z = 0$  temos

$$\frac{dA_{pl}}{dz}(0) = ig \sum_{p'l'} \sum_{p''l''} \sum_{p'''l'''} \Lambda_{pp'p''p'''}^{ll'l''l'''}(0) A_{p'l'}(0) A_{p''l''}^*(0) A_{p'''l'''}(0). \quad (4.21)$$

Impondo a condição inicial (4.20) em (4.21) adquirimos uma expressão simplificada para o problema:

$$\frac{dA_{pl}}{dz}(0) = ig \Lambda_{p000}^{l_0 l_0 l_0}(0) |A_{0l_0}|^2(0) A_{0l_0}(0). \quad (4.22)$$

Com a equação (4.22) em mãos, retornamos para (4.19):

$$A_{pl}(L) \approx A_{pl}(0) + ig L \Lambda_{p000}^{l_0 l_0 l_0}(0) |A_{0l_0}|^2(0) A_{0l_0}(0). \quad (4.23)$$

Por fim, retornamos para a expressão do perfil transverso para o campo elétrico. Inserindo a equação (4.23) na expressão (4.3) chegamos na forma

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, L) = e^{ikz} \left( A_{0l_0}(0) u_{0l_0} + ig L |A_{0l_0}|^2(0) A_{0l_0}(0) \sum_{p,l} \Lambda_{p000}^{l_0 l_0 l_0}(0) u_{pl}(\mathbf{r}, L) \right). \quad (4.24)$$

A princípio, podemos ter uma superposição infinita de modos LG para o perfil transverso do feixe durante a dinâmica do processo. No entanto, veremos que fazendo uso de uma renormalização para a distância de Rayleigh somos capazes de obter uma expressão para a constante de recobrimento tal que a soma seja finita, com superposições de modos com a distância de Rayleigh renormalizada.

## 4.2 Constante de Recobrimento

A constante de recobrimento ocupa um papel central na equação (4.24). Podemos dizer que a constante de recobrimento é responsável por acoplar e determinar o peso dos diversos modos para a dinâmica do processo de auto modulação de fase. O que elas fazem, em suma, é quantificar a superposição espacial dos perfis transversos dos modos que a princípio podem ou não estar envolvidos no processo. Quanto maior o valor da constante de recobrimento para um determinado conjunto de índices  $\{p, p', p'', p''', l, l', l'', l'''\}$ , maior será o peso do conjunto  $\{u_{pl}, u_{p'l'}, u_{p''l''}, u_{p'''l'''}\}$  no processo.

A fim de obter uma expressão analítica para a equação (4.17), reescrevemos os modos de Laguerre-Gauss de acordo com

$$u_{pl}(r, z) = \sqrt{\frac{2p!}{\pi w^2 f (p + |l|)!}} \left(\frac{2r^2}{w^2 f}\right)^{\frac{|l|}{2}} L_p^{|l|} \left(\frac{2r^2}{w^2 f}\right) e^{-v^* r^2/w^2} e^{il\phi} e^{i\varphi_{pl}}. \quad (4.25)$$

onde definimos

$$v = 1 + iZ, \quad (4.26)$$

$$f = |v|^2, \quad (4.27)$$

$$\varphi_{pl} = -(2p + |l| + 1) \arctan(Z), \quad (4.28)$$

$$Z = z/z_R. \quad (4.29)$$

A integral de recobrimento fornecida pela equação (4.16) assume então a forma:

$$\begin{aligned} R_{pp'p''p'''}^{ll'l''l'''} &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty r dr \left\{ \sqrt{\frac{2p!}{\pi w^2 f (p + |l|)!}} \left(\frac{2r^2}{w^2 f}\right)^{\frac{|l|}{2}} L_p^{|l|} \left(\frac{2r^2}{w^2 f}\right) e^{-r^2/w^2 f} e^{-ir^2 Z/w^2 f} e^{-i\varphi_{pl}} e^{-il\phi} \right\} \\ &\times \left\{ \sqrt{\frac{2p'!}{\pi w^2 f (p' + |l'|)!}} \left(\frac{2r^2}{w^2 f}\right)^{\frac{|l'|}{2}} L_{p'}^{|l'|} \left(\frac{2r^2}{w^2 f}\right) e^{-r^2/w^2 f} e^{ir^2 Z/w^2 f} e^{i\varphi_{p'l'}} e^{il'\phi} \right\} \\ &\times \left\{ \sqrt{\frac{2p''!}{\pi w^2 f (p'' + |l''|)!}} \left(\frac{2r^2}{w^2 f}\right)^{\frac{|l''|}{2}} L_{p''}^{|l''|} \left(\frac{2r^2}{w^2 f}\right) e^{-r^2/w^2 f} e^{-ir^2 Z/w^2 f} e^{-i\varphi_{p''l''}} e^{-il''\phi} \right\} \\ &\times \left\{ \sqrt{\frac{2p'''!}{\pi w^2 f (p''' + |l'''|)!}} \left(\frac{2r^2}{w^2 f}\right)^{\frac{|l'''|}{2}} L_{p'''}^{|l'''|} \left(\frac{2r^2}{w^2 f}\right) e^{-r^2/w^2 f} e^{ir^2 Z/w^2 f} e^{i\varphi_{p'''l'''}} e^{il'''\phi} \right\}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Começamos simplificando a equação (4.30) com a substituição de variável

$$x = \frac{2r^2}{w^2 f} \implies dx = \frac{4r dr}{w^2 f} \implies r dr = \frac{w^2 f}{4} dx. \quad (4.31)$$

Fazendo as substituições para a integral de recobrimento:

$$\begin{aligned}
R_{pp'p''p'''}^{ll'l''l'''}(z) &= \frac{A}{w^2 f^2 \pi^2 w^2} \sqrt{\frac{p!}{(p+|l|)!}} \sqrt{\frac{p'!}{(p'+|l'|)!}} \sqrt{\frac{p''!}{(p''+|l''|)!}} \sqrt{\frac{p'''!}{(p'''+|l'''|)!}} \\
&\times e^{-i(\varphi_{pl}-\varphi_{p'l'}+\varphi_{p''l''}-\varphi_{p'''l'''})} \int_0^\infty \frac{w^2 f}{4} dx x^{\frac{|l|}{2}+\frac{|l'|}{2}+\frac{|l''|}{2}+\frac{|l'''}{2}} L_p^{|l|}(x) L_{p'}^{|l'|}(x) \\
&\times L_{p''}^{|l''|}(x) L_{p'''}^{|l'''}(x) e^{-v^*x} e^{-vx} \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{i(-l+l'-l''+l''')\phi} d\phi}_{2\pi\delta_{l,l'-l''+l'''}} \\
&= \frac{1}{w^2 \pi^2 f} \sqrt{\frac{p!p'!p''!p'''!}{(p+|l|)!(p'+|l'|)!(p''+|l''|)!(p'''+|l'''|)!}} e^{-i(\varphi_{pl}-\varphi_{p'l'}+\varphi_{p''l''}-\varphi_{p'''l'''})} \\
&\times 2\pi\delta_{l,l'-l''+l'''} \int_0^\infty x^P x^{|l|} L_p^{|l|}(x) L_{p'}^{|l'|}(x) L_{p''}^{|l''|}(x) L_{p'''}^{|l'''}(x) e^{-v^*x} e^{-vx} dx,
\end{aligned} \tag{4.32}$$

onde definimos

$$P \equiv \frac{|l'| + |l''| + |l'''| - |l|}{2}. \tag{4.33}$$

A partir da equação (4.32) obtemos o valor da integral de recobrimento para o caso mais simples:

$$R_{0000}^{0000}(z) = \frac{1}{\pi f w^2}. \tag{4.34}$$

Com o resultado acima, retornamos para a constante de recobrimento:

$$\begin{aligned}
\Lambda_{pp'p''p'''}^{ll'l''l'''}(z) &= 2\delta_{l,l'-l''+l'''} \sqrt{\frac{p!p'!p''!p'''!}{(p+|l|)!(p'+|l'|)!(p''+|l''|)!(p'''+|l'''|)!}} \\
&\times e^{-i(\varphi_{pl}-\varphi_{p'l'}+\varphi_{p''l''}-\varphi_{p'''l'''})} \int_0^\infty x^P x^{|l|} L_p^{|l|}(x) L_{p'}^{|l'|}(x) L_{p''}^{|l''|}(x) L_{p'''}^{|l'''}(x) e^{-\alpha(z)x} dx,
\end{aligned} \tag{4.35}$$

onde definimos

$$\alpha(z) = v^* + v. \tag{4.36}$$

Em particular,

$$\alpha(0) = 2. \tag{4.37}$$

No cenário atual, estamos interessados nos efeitos da auto modulação de fase sobre vórtices ópticos. Para tal, restringimos a constante de recobrimento  $\Lambda_{pp'p''p'''}^{ll'l''l'''}$  para os casos particulares onde  $p' = p'' = p''' = 0$  (isto é, os vórtices de entrada no meio não linear não apresentam ordens radiais). Além disso, o cálculo é feito para a posição  $z = 0$  no eixo de propagação. Justificamos esse último passo pois estamos interessados, a princípio, em uma análise perturbativa da propagação do feixe ao longo do meio não linear. Por fim, multiplicamos o lado direito da equação (4.35) por um parâmetro  $(\eta/\eta)^P$  a ser determinado, com o objetivo de auxiliar na busca por uma expressão final para a constante de recobrimento. Dadas as conjunturas anteriores, temos então:

$$\Lambda_{p000}^{ll'l''l'''}(0) = \delta_{l,l'-l''+l'''} \sqrt{\frac{p!}{(p+|l|)!}} \frac{1}{\sqrt{|l||l'|!|l''|!|l'''|!}} \frac{1}{\eta^P} \int_0^\infty (\eta x)^P x^{|l|} L_p^{|l|}(x) e^{-\alpha(0)x} dx. \tag{4.38}$$

Podemos escrever o monômio  $(\eta x)^P$  como uma combinação linear dos polinômios associados de Laguerre:

$$(\eta x)^P = \sum_{q=0}^P \frac{(-1)^q P!(P+|k|)!}{(P-q)!(q+|k|)!} L_q^k(\eta x). \quad (4.39)$$

Fazendo uso da propriedade (4.39) com  $k = |l|$  na constante de recobrimento e após alguns passos obtemos o resultado parcial

$$\Lambda_{p000}^{ll''l'''}(0) = \eta^{-(P+\frac{|l|}{2})} \delta_{l,l'-l''+l'''} \sqrt{\frac{p!}{(p!+|l|)!}} \frac{1}{\sqrt{|l||l''||l'''|!}} \sum_{q=0}^P \frac{(-1)^q P!(P+|l|)!}{(P-q)!(q+|l|)!} \lambda_{qp}^l(0), \quad (4.40)$$

onde definimos

$$\lambda_{qp}^l(0) = \eta^{\frac{|l|}{2}} \int_0^\infty x^{|l|} L_p^{|l|}(x) L_q^{|l|}(\eta x) e^{-\alpha(0)x} dx. \quad (4.41)$$

Note que a equação (4.41) acima é semelhante à equação (A.16) presente no apêndice A. De fato, se compararmos ambas as equações podemos inferir que a presença do fator  $\alpha(0)$  impõe uma modificação para a distância de Rayleigh  $z_R$  do feixe incidente. Usando as equações (A.16) e (A.17) para a comparação, obtemos um valor numérico para o parâmetro  $\eta$ .

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= \eta, \\ \alpha(0) &= (1+\eta)/2 = 2 \\ \implies 2 &= \frac{1+\eta}{2} \implies \eta = 3. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Por fim, acionando as equações (A.15) e (A.14) obtemos o valor modificado para distância de Rayleigh.

$$\gamma(0) = \frac{z_R}{\tilde{z}_R} = \eta \quad (4.43)$$

$$\implies \tilde{z}_R = \frac{1}{3} z_R. \quad (4.44)$$

Com o valor encontrado para o parâmetro  $\eta$ , as equações (4.41) e (A.16) tornam-se idênticas para a posição  $z = 0$ . Este resultado nos diz que existe uma solução para a constante de recobrimento associado a um feixe com uma distância de Rayleigh modificada. Seguindo esta linha, veremos que a expressão final para a constante de recobrimento nos leva a uma superposição finita de modos LG com a distância de Rayleigh modificada.

Lembremos que, do apêndice A:

$$\begin{aligned} G_{\bar{p}p}^{\bar{l}l}(z) &= G_{\bar{p}p}^{\bar{l}l}(0), \\ G_{\bar{p}p}^{\bar{l}l} &= \delta_{l,\bar{l}} G_{\bar{p}p}^{ll}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Além disso,

$$G_{\bar{p}p}^{ll}(0) = \eta^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\bar{p}!}{(\bar{p}+|l|)!}} \sqrt{\frac{p!}{(p+|l|)!}} \lambda_{\bar{p}p}^l(0) \quad (4.46)$$

$$\implies \lambda_{\bar{p}p}^l(0) = \sqrt{\frac{(p+|l|)!}{p!}} \sqrt{\frac{(\bar{p}+|l|)!}{\bar{p}!}} \eta^{-\frac{1}{2}} G_{\bar{p}p}^{ll}(0). \quad (4.47)$$

Inserindo o resultado (4.47) na equação (4.40) e após alguns passos obtemos uma expressão final para a constante de recobrimento.

$$\Lambda_{p000}^{l'l''l'''}(0) = \delta_{l,l'-l''+l'''} \sum_{q=0}^P \Omega_{l'l''l'''}^q \frac{(-1)^q P!(P+|l|)!}{(P-q)!(q+|l|)!} G_{qp}^{ll}(0), \quad (4.48)$$

onde introduzimos

$$\Omega_{l'l''l'''}^q = \sqrt{\frac{(q+|l|)!}{q!}} \left( \frac{1}{\eta^{P+\frac{|l|}{2}+1}} \right) \frac{1}{\sqrt{|l'|!|l''|!|l'''|!}}. \quad (4.49)$$

Com a expressão final para a constante de recobrimento em mãos, podemos retornar para a equação diferencial em busca de uma solução.

### 4.3 Solução por método perturbativo

Neste momento fazemos uso do resultado final obtido na seção de constante de recobrimento. Inserindo o resultado (4.48) em (4.22) e após alguns passos alcançamos o resultado final

$$\frac{dA_{pl}}{dz}(0) = ig \sum_{q=0}^{|l_0|} \frac{(-1)^q (2|l_0|)!}{(|l_0| - q)!} \frac{|A_{0l_0}|^2 A_{0l_0}}{\sqrt{q!(q+|l_0|)!|l_0|!}} \left( \frac{1}{\eta^{(3|l_0|+1)/2}} \right) \delta_{l_0} G_{qp}^{l_0 l_0}(0). \quad (4.50)$$

Note que na equação acima temos a presença da constante  $G_{qp}^{l_0 l_0}$ . Veremos um pouco mais adiante que esta constante tem relação com a descrição de um novo modo LG com uma distância de Rayleigh modificada. Com a equação (4.50) em mãos, retornamos à descrição (4.19) para amplitude lenta no regime perturbativo:

$$A_{pl}(z) = \delta_{p0} \delta_{l_0} A_{0l_0}(0) + igz \sum_{q=0}^{|l_0|} \frac{(-1)^q (2|l_0|)!}{(|l_0| - q)!} \frac{|A_{0l_0}|^2 A_{0l_0}}{\sqrt{q!(q+|l_0|)!|l_0|!}} \left( \frac{1}{\eta^{(3|l_0|+1)/2}} \right) \delta_{l_0} G_{qp}^{l_0 l_0}(0). \quad (4.51)$$

Por fim, uma vez obtido uma expressão para a amplitude lenta  $A_{pl}(z)$ , estamos prontos para adquirir a expressão final para o perfil espacial  $\mathcal{E}$  do campo elétrico resultado da dinâmica não linear do processo em análise. Lembremos que o perfil espacial  $\mathcal{E}$  do campo elétrico é dado através da equação

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, z) = e^{ikz} \sum_{pl} A_{pl}(z) u_{pl}(\mathbf{r}, z). \quad (4.3 \text{ revisitada})$$

Inserindo o resultado (4.51),

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, z) = \sum_{pl} \left\{ \delta_{p0} \delta_{l_0} A_{0l_0}(0) + igz \sum_{q=0}^{|l_0|} \frac{(-1)^q (2|l_0|)!}{(|l_0| - q)!} \frac{|A_{0l_0}|^2 A_{0l_0}}{\sqrt{q!(q + |l_0|)!|l_0|!}} \left( \frac{1}{\eta^{(3|l_0|+1)/2}} \right) \delta_{l_0} G_{qp}^{l_0} \right\} \times u_{pl}(\mathbf{r}, z) e^{ikz}. \quad (4.52)$$

$$= \left\{ A_{0l_0}(0) u_{0l_0} + igz \sum_{q=0}^{|l_0|} \frac{(-1)^q (2|l_0|)!}{(|l_0| - q)!} \frac{|A_{0l_0}|^2 A_{0l_0}}{\sqrt{q!(q + |l_0|)!|l_0|!}} \left( \frac{1}{\eta^{(3|l_0|+1)/2}} \right) \underbrace{\sum_{pl} \delta_{l_0} G_{qp}^{l_0} u_{pl}}_{\bar{u}_{ql_0}} \right\} e^{ikz}. \quad (4.53)$$

Note que na passagem (4.53) temos a presença do termo  $\sum_{pl} G_{qp}^{l_0} u_{pl}$ . Como vimos no apêndice A, podemos substituí-lo por um modo LG com uma distância de Rayleigh modificada. Desta maneira, somos levados à expressão final para o campo elétrico resultante:

$$E(\mathbf{r}, z; t) = e^{i(kz - \omega t)} \left\{ A_{0l_0}(0) u_{0l_0}(\mathbf{r}, z) + igz \frac{|A_{0l_0}|^2 A_{0l_0}}{\eta^{(3|l_0|+1)/2}} \sum_{q=0}^{|l_0|} \frac{(-1)^q (2|l_0|)!}{(|l_0| - q)!} \frac{\bar{u}_{ql_0}(\mathbf{r}, z)}{\sqrt{q!(q + |l_0|)!|l_0|!}} \right\}. \quad (4.54)$$

O importante resultado acima nos diz que - perturbativamente - o efeito de auto modulação de fase sobre um vórtice óptico com momento angular orbital  $l_0$  resulta em um feixe de saída que apresenta até  $l_0$  ordens radiais e momento angular orbital de mesmo valor, mas com uma distância de Rayleigh modificada.

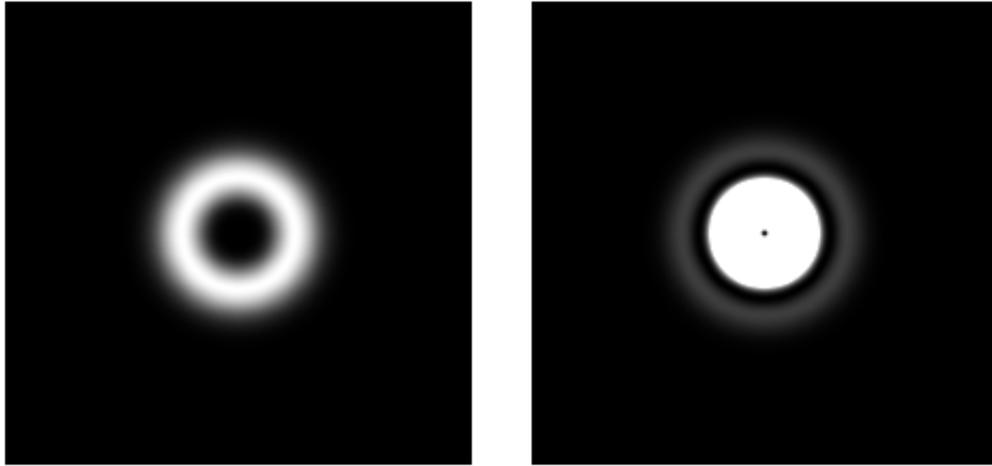


Figura 6 – Imagem da simulação numérica utilizando a equação (4.54) para valor de momento angular orbital  $l = 1$ . Filtramos o feixe inicial e saturamos as imagens intencionalmente a fim de identificar o anel externo.

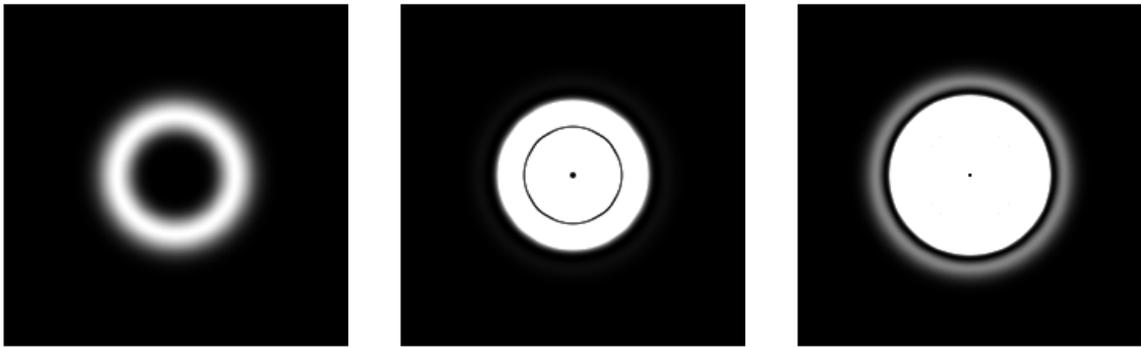


Figura 7 – Imagem da simulação numérica utilizando a equação (4.54) para valor de momento angular orbital  $l = 2$ . Filtramos o feixe inicial e saturamos as imagens intencionalmente a fim de identificar o anel externo.

#### 4.4 Soluções autoguiadas para propagação de vórtices ópticos em meios não lineares

Na seção anterior vimos uma busca por soluções para a equação diferencial (4.14) utilizando uma aproximação perturbativa em primeira ordem para feixes de entrada que apresentam momento angular orbital. Seguimos então com uma abordagem um mais geral, buscando por soluções autoguiadas ao longo do sistema material. Nosso ponto de partida será novamente a equação de onda em meios materiais:

$$\nabla^2 \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) + \frac{\omega_n^2}{c^2} \varepsilon_r(\omega_n) \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) = -\frac{\omega_n^2}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{P}_n^{(NL)}(\mathbf{r}), \quad (3.23 \text{ revisitada})$$

onde permitimos que a seção transversa do feixe de entrada - representada pela função  $F(r, z)$  - seja arbitrária. Impomos novamente que o feixe seja polarizado linearmente, e possua uma carga topológica  $m$ :

$$\mathbf{E}_R = \mathcal{E}(r, \phi, z)e^{i(kz-\omega t)}\hat{x} + \text{c. c.} \equiv F(r, z)e^{im\phi}e^{i(kz-\omega t)}\hat{x} + \text{c. c.} \quad (4.55)$$

Fazendo a substituição (4.55) em (4.4) temos

$$\sum_{pl} \left[ \nabla^2(F(r, z)e^{im\phi}e^{ikz}) + k^2F(r, z)e^{im\phi}e^{ikz} \right] = -\frac{\omega^2}{\epsilon_0 c^2} P^{(3)}. \quad (4.56)$$

Expandimos o lado esquerdo da equação:

$$\nabla^2(F(r, z)e^{im\phi}e^{ikz}) + k^2F(r, z)e^{im\phi}e^{ikz} = \quad (4.57)$$

$$= \left( \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{m^2}{r^2}F + 2ik\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - k^2F + k^2F \right) e^{im\phi}e^{ikz}. \quad (4.58)$$

Faremos uso novamente da aproximação paraxial, justificadas pela variação lenta da amplitude complexa  $F(r, z)$  ao longo do eixo de propagação em comparação com  $e^{i(kz-\omega t)}$ :

$$\left| \frac{\partial^2 F(r, z)}{\partial z^2} \right| \ll 2k \left| \frac{\partial F(r, z)}{\partial z} \right|; \quad (4.59)$$

$$\left| \frac{\partial^2 F(r, z)}{\partial z^2} \right| \ll \left| \frac{\partial^2 F(r, z)}{\partial r^2} \right|; \quad (4.60)$$

$$\left| \frac{\partial^2 F(r, z)}{\partial z^2} \right| \ll \left| \frac{m^2}{r^2}F \right|. \quad (4.61)$$

A polarização não-linear é descrita de acordo com:

$$P^{(3)} = 3\epsilon_0\chi^{(3)}|F|^2F e^{im\phi}e^{ikz}. \quad (4.62)$$

Utilizando (4.58) e (4.62) em (4.56) obtemos uma equação diferencial para o caso de estudo atual:

$$i\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{1}{2k} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} \right) F = -g|F|^2F, \quad (4.63)$$

onde definimos

$$g = \frac{3\omega^2\chi^{(3)}}{2kc^2}. \quad (4.64)$$

Para prosseguir com a análise no caso geral, seguiremos algo semelhante de (GAGNON, 1990). Seja  $\xi = \sqrt{2gkr}$  e  $\zeta = gz$  um novo conjunto de coordenadas. Com as devidas substituições podemos chegar na nova equação:

$$i\frac{\partial F}{\partial \zeta} + \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{m^2}{\xi^2} \right) F = -|F|^2F. \quad (4.65)$$

Inspirados pela forma do feixe de entrada, propomos que a solução  $F(\xi, \zeta)$  tenha uma forma tal que

$$F(\xi, \zeta) = \xi^{|m|} f(\xi, \zeta). \quad (4.66)$$

Inserindo (4.66) em (4.65) obtemos

$$i \frac{\partial f}{\partial \zeta} + \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{(2|m| + 1)}{\xi} \frac{\partial f}{\partial \xi} = -\xi^{2|m|} |f|^2 f. \quad (4.67)$$

Resolvemos a equação (4.67) utilizando o método de separação de variáveis. Seja  $f(\xi, \zeta) = p(\xi)h(\zeta)$ , temos que

$$\frac{i}{h} \frac{dh}{d\zeta} + \frac{1}{p} \frac{d^2 p}{d\xi^2} + \frac{1}{p} \frac{(2|m| + 1)}{\xi} \frac{dp}{d\xi} + \xi^{2|m|} |p|^2 = 0. \quad (4.68)$$

A equação (4.68) é válida apenas se as partes que envolvem as funções  $p(\xi)$  e  $h(\zeta)$  separadamente forem constantes, isto é

$$\begin{cases} \frac{dh}{d\zeta} = -ibh, & (4.69a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 p}{d\xi^2} + \frac{(2m + 1)}{\xi} \frac{dp}{d\xi} + \xi^{2m} |p|^2 p + bp = 0. & (4.69b) \end{cases}$$

onde  $b$  é um parâmetro livre. Note que por consequência da separação de variáveis teremos como solução um perfil de onda autoguiado. Soluções autoguiadas são conhecidos pelo padrão transversal independente da coordenada do eixo de propagação.

Sobre a equação (4.69a), é possível obter uma solução analítica:

$$\frac{dh}{h} = -ibd\zeta, \quad (4.70)$$

$$\int_{h(0)}^h \frac{dh'}{h'} = -ibd \int_0^\zeta \zeta' d\zeta', \quad (4.71)$$

$$\ln \left( \frac{h}{h(0)} \right) = -ibh\zeta, \quad (4.72)$$

$$\implies h(\zeta) = h(0)e^{-ib\zeta}. \quad (4.73)$$

O resultado (4.73) nos diz que - fisicamente - podemos interpretar o parâmetro  $b$  como uma correção para o vetor de onda do feixe de saída por ser proporcional à nova coordenada  $\zeta$  e por conseguinte à coordenada  $z$  de propagação. Sem perda de generalidade, restringimos esta correção impondo  $b = 0$ . Além da restrição imposta sobre a constante de separação  $b$ , iremos simplificar a análise numérica, restringindo  $p(\xi)$  a funções reais. Reescrevendo a equação (4.69b):

$$\frac{d^2 p}{d\xi^2} + \frac{(2m + 1)}{\xi} \frac{dp}{d\xi} + \xi^{2m} p^3 = 0. \quad (4.74)$$

Com a equação diferencial reescrita (4.74), fazemos uso de uma abordagem computacional resolvendo-a numericamente utilizando a linguagem de programação *python* e seus recursos.

#### 4.4.1 Solução numérica

Python é uma linguagem de programação interpretada, multi paradigma, de tipagem dinâmica e orientada a objetos criada em 1991 por Guido Van Rossum. Por sua simplicidade na escrita do código e pelas bibliotecas científicas, é uma linguagem de programação que vem ganhando espaço dentro do meio acadêmico. A fim de resolver a equação diferencial (4.74) numericamente, utilizamos o método **odeint** dentro do módulo **scipy.integrate** da biblioteca de computação científica **scipy**.

Em geral, **odeint** é um método voltado para solucionar um conjunto de um ou mais equações diferenciais ordinárias (EDOs) de primeira ordem. Adaptamos a equação diferencial (4.74) Para utilizar este método transformando-a em um conjunto de EDOs de primeira ordem:

$$\begin{cases} \frac{dp}{d\xi} = \theta, & (4.75a) \\ \frac{d\theta}{d\xi} = -\frac{2m+1}{\xi}\theta - \xi^{2m}p^3. & (4.75b) \end{cases}$$

Utilizamos como ambiente de desenvolvimento uma plataforma de computação interativa conhecida como **Jupyter notebook**, dentro da distribuição de computação científica **Anaconda**. A figura 8 abaixo resume os resultados obtidos de forma numérica<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> para os curiosos com relação ao código, pode ser encontrado em <[https://github.com/and-santos/solucao\\_numerica](https://github.com/and-santos/solucao_numerica)>

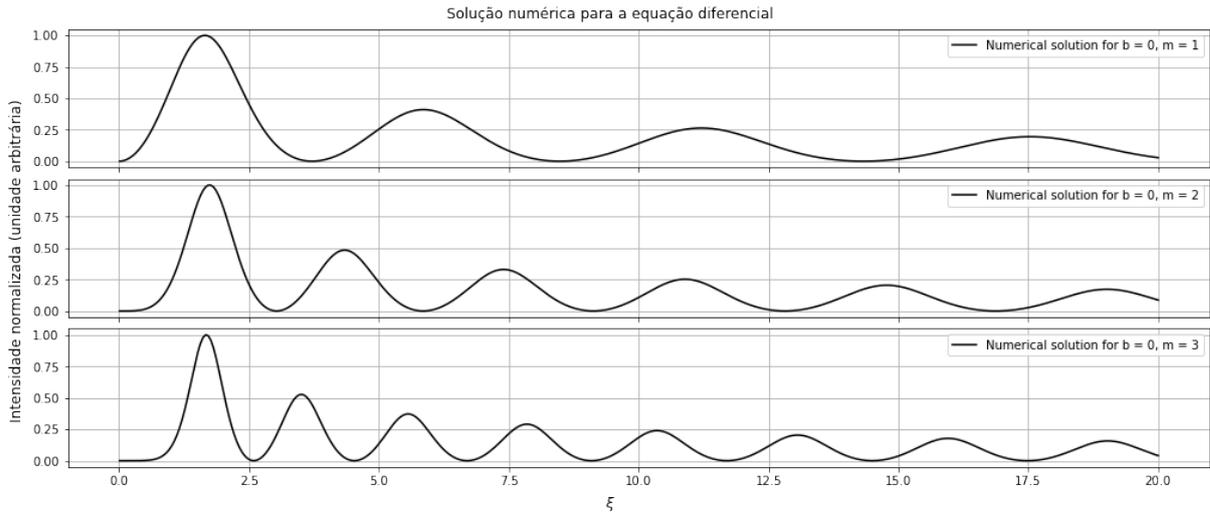


Figura 8 – Grafico resultante da simulação numérica para diferentes valores de momento angular orbital e com o parâmetro  $b = 0$  fixado. Note que temos o surgimento de ordens radiais extras, diferente do cenário perturbativo.

De acordo com a figura podemos visualizar picos de intensidades extras que - pela simetria cilíndrica da coordenada  $\xi$  (definida de forma diretamente proporcional à coordenada  $r$ ) - correspondem a anéis externos para o perfil transversal do feixe. Note que temos uma quantidade de anéis maior que o previsto no caso perturbativo para diferentes valores de momento angular orbital. Além disso, devemos lembrar que o padrão obtido neste cenário é independente do eixo de propagação  $z$ .

Nesta segunda etapa temos, assim como na primeira etapa, o surgimento de anéis externos concêntricos para o perfil transversal do feixe. Apesar da regra para o surgimento dos anéis nesse cenário ainda não ser bem compreendida, atribuímos sua origem ao momento angular orbital, identificando seu papel como uma auto modulação de fase intermediada pelo sistema material. O campo, ao longo de sua propagação pelo meio, é auto-modulado por consequência de como o sistema responde ao estímulo do campo presente. Essa resposta ocorre de maneira diretamente proporcional ao campo injetado. Essa modulação impõe um acoplamento radial-angular entre os graus de liberdade de um vórtice óptico, impondo uma mudança em seu perfil (BUONO et al., 2020).



# Conclusão

Propomos neste trabalho a investigação da auto modulação de fase com a utilização de vórtice ópticos. A princípio, negligenciamos a influência do caráter vetorial da luz, isto é, o papel da polarização durante o processo. Motivado por trabalhos anteriores sobre a interação do momento angular orbital da luz na geração de segundo harmônico e sua relação com uma mudança de perfil transversal, buscamos a compreensão do mesmo em sistemas não lineares de terceira ordem com o objetivo de encontrar semelhanças ou diferenças do que fora anteriormente estudado.

Dividimos a análise em duas etapas. A primeira etapa consistiu em uma inspeção por método perturbativo de primeira ordem para pequenas distâncias de propagação ao longo do sistema material. O objetivo era de identificar mudanças no perfil transversal do campo e o papel do momento angular orbital da luz durante o processo. Identificamos que para um vórtice óptico sem ordens radiais e com um momento angular orbital bem definido como entrada, a auto modulação de fase é responsável por gerar um feixe de saída com a distância de Rayleigh modificada e, além disso, mudanças em seu padrão transversal. Tem-se para o feixe de saída um perfil formado por uma superposição de ordens radiais com um número de modos igual ao valor absoluto do MAO do feixe de entrada.

A segunda etapa tem a meta de investigar o mesmo processo, porém utilizando uma abordagem mais geral. A restrição de pequenas distâncias de propagação é retirada e buscamos soluções exatas auto guiadas. Soluções numéricas foram obtidas utilizando a linguagem de programação *python* com o auxílio de bibliotecas como *numpy* e *scipy*.

Assim como na primeira etapa do trabalho, temos o surgimento de anéis externos concêntricos para o perfil do feixe. Atribuímos a mudança do padrão transversal ao momento angular orbital. A regra para o surgimento de anéis extras para este cenário ainda não é bem compreendida. No entanto, identificamos a causa dos anéis extras como consequência da auto modulação de fase espacial originada pelo MAO do feixe de entrada e intermediada pelo sistema material. O processo não linear em questão impõe um acoplamento radial-angular entre os graus de liberdade de um vórtice óptico visto geralmente como independentes.



# Referências

ALLEN, L. et al. Orbital angular momentum of light and the transformation of laguerre-gaussian laser modes. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 45, p. 8185–8189, Jun 1992. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.45.8185>>. Citado 3 vezes nas páginas 12, 18 e 20.

BIALYNICKI-BIRULA, I.; BIALYNICKA-BIRULA, Z. Canonical separation of angular momentum of light into its orbital and spin parts. *Journal of Optics-nouvelle Revue D Optique - J OPT*, v. 13, 05 2011. Citado na página 22.

BOYD, R.; PRATO, D. *Nonlinear Optics*. Elsevier Science, 2008. ISBN 9780080485966. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=uoRU1Yb7ooC>>. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 33.

BUONO, W. et al. Arbitrary orbital angular momentum addition in second harmonic generation. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 16, n. 9, p. 093041, 2014. Citado na página 12.

BUONO, W. et al. Chiral relations and radial-angular coupling in nonlinear interactions of optical vortices. *Physical Review A*, APS, v. 101, n. 4, p. 043821, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 49.

COULLET, P.; GIL, L.; LEGA, J. Defect-mediated turbulence. *Physical review letters*, APS, v. 62, n. 14, p. 1619, 1989. Citado na página 12.

DARRIGOL, O. *A history of optics from Greek antiquity to the nineteenth century*. [S.l.]: Oxford University Press, 2012. Citado na página 11.

FRANKEN, E. P. et al. Generation of optical harmonics. *Physical Review Letters*, APS, v. 7, n. 4, p. 118, 1961. Citado na página 23.

GAGNON, L. Exact solutions for optical wave propagation including transverse effects. *JOSA B*, Optical Society of America, v. 7, n. 6, p. 1098–1102, 1990. Citado na página 46.

GRIFFITHS, D. J. *Introduction to electrodynamics*. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 2005. Citado na página 26.

HE, G. *Nonlinear Optics and Photonics*. Oxford University Press, 2015. ISBN 9780198702764. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=6Wq6BAAAQBAJ>>. Citado na página 24.

MAIMAN, T. H. Stimulated optical radiation in ruby. *nature*, Nature Publishing Group, v. 187, n. 4736, p. 493–494, 1960. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 23.

MAXWELL, J. C. Viii. a dynamical theory of the electromagnetic field. *Philosophical transactions of the Royal Society of London*, The Royal Society London, n. 155, p. 459–512, 1865. Citado na página 11.

- O'NEIL, A. T. et al. Intrinsic and extrinsic nature of the orbital angular momentum of a light beam. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 88, p. 053601, Jan 2002. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.88.053601>>. Citado na página 21.
- PEREIRA, L. J. et al. Orbital-angular-momentum mixing in type-ii second-harmonic generation. *Physical Review A*, APS, v. 96, n. 5, p. 053856, 2017. Citado na página 12.
- POWERS, P.; HAUS, J. *Fundamentals of Nonlinear Optics*. CRC Press, 2017. ISBN 9781498736862. Disponível em: <[https://books.google.com.br/books?id=m-O\\\_DgAAQBAJ](https://books.google.com.br/books?id=m-O\_DgAAQBAJ)>. Citado na página 29.
- SALEH, B.; TEICH, M. *Fundamentals of Photonics*. Wiley, 2020. (Wiley Series in Pure and Applied Optics). ISBN 9781119702115. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=iozUDwAAQBAJ>>. Citado na página 17.
- SIEGMAN, A. *Lasers*. University Science Books, 1986. (G - Reference, Information and Interdisciplinary Subjects Series). ISBN 9780935702118. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=1BZVwUZLTkAC>>. Citado na página 16.
- TOLSTOY, I. *James Clerk Maxwell: A Biography*. University of Chicago Press, 1982. ISBN 9780226807850. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=oC1nvwEACAAJ>>. Citado na página 11.
- YAO, A. M.; PADGETT, M. J. Orbital angular momentum: origins, behavior and applications. *Advances in optics and photonics*, Optical Society of America, v. 3, n. 2, p. 161–204, 2011. Citado na página 19.

## Apêndices



# APÊNDICE A – Conversão entre modos com parâmetros de Rayleigh distintos

Considere um modo Laguerre-Gaussiano (LG)  $\bar{u}_{\bar{p}\bar{l}}(r, z; \bar{z}_R)$  escrito como uma superposição de modos LG com uma distância de Rayleigh distinta  $z_R$ , como abaixo:

$$\bar{u}_{\bar{p}\bar{l}}(r, z; \bar{z}_R) = \sum_{pl} G_{\bar{p}p}^{\bar{l}l} u_{pl}(r, z; z_R). \quad (\text{A.1})$$

Impondo a condição de ortonormalidade em ambos os lados da igualdade (A.1), obtemos uma relação para as constantes  $G_{\bar{p}p}^{\bar{l}l}$ .

$$\int \bar{u}_{\bar{p}\bar{l}} \bar{u}_{p'l}^* d^2\mathbf{r} = \sum_{pl} G_{\bar{p}p}^{\bar{l}l} \underbrace{\int u_{pl} u_{p'l}^* d^2\mathbf{r}}_{\delta_{pp'} \delta_{ll'}} \quad (\text{A.2})$$

$$\implies G_{\bar{p}p}^{\bar{l}l} = \int \bar{u}_{\bar{p}\bar{l}} \bar{u}_{pl}^* d^2\mathbf{r}. \quad (\text{A.3})$$

Para prosseguir com a equação (A.3), reescrevemos os modos como

$$u_{pl}(r, z) = \sqrt{\frac{2p!}{\pi w^2 f (p + |l|)!}} \left( \frac{\sqrt{2}r}{w|v|} \right)^{|l|} L_p^{|l|} \left( \frac{2r^2}{w^2 f} \right) e^{-v^* r^2 / w^2} e^{il\phi} e^{i\varphi_{pl}}. \quad (\text{A.4})$$

onde

$$v = 1 + iZ, \quad (\text{A.5})$$

$$f = |v|^2, \quad (\text{A.6})$$

$$Z = z/z_R, \quad (\text{A.7})$$

$$\varphi_{pl} = (2p + |l| + 1) \arctan Z \quad (\text{A.8})$$

e  $w$  é o diâmetro mínimo do feixe. Estas definições serão utilizadas para facilitar o acompanhamento das contas que seguem.

Temos então:

$$G_{\bar{p}p}^{\bar{l}l} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty r dr \left\{ \sqrt{\frac{2\bar{p}!}{\pi \bar{w}^2 |\bar{v}|^2 (\bar{p} + |l|)!}} \left( \frac{\sqrt{2}r}{\bar{w}|\bar{v}|} \right)^{|l|} L_{\bar{p}}^{|l|} \left( \frac{2r^2}{\bar{w}^2 |\bar{f}|} \right) e^{-\bar{v}^* r^2 / \bar{w}^2} e^{i\bar{l}\phi} e^{i\bar{\varphi}_{\bar{p}l}} \right\} \times \quad (\text{A.9})$$

$$\times \left\{ \sqrt{\frac{2p!}{\pi w^2 |v|^2 (p + |l|)!}} \left( \frac{\sqrt{2}r}{w|v|} \right)^{|l|} L_p^{|l|} \left( \frac{2r^2}{w^2 |f|} \right) e^{-v r^2 / w^2} e^{-il\phi} e^{-i\varphi_{pl}} \right\}. \quad (\text{A.10})$$

Seja  $x := 2r^2/w^2 f$  e  $\bar{x} := 2r^2/\bar{w}^2 \bar{f}$ . Utilizando estas relações na equação anterior obtemos

$$G_{\bar{p}p}^{\bar{l}l} = \sqrt{\frac{\bar{p}!}{(\bar{p} + \bar{l})!}} \sqrt{\frac{p!}{(p + l)!}} \frac{\mathcal{Z} e^{i(\bar{\varphi}_{pl} - \varphi_{pl})}}{\pi \bar{w} w |\bar{v}| |v|} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi e^{i(\bar{l} - l)\phi}}_{2\pi \delta_{\bar{l}, l}} \int_0^\infty \frac{w^2 |v|^2}{\mathcal{A}} dx(\bar{x})^{|\bar{l}|/2} L_{\bar{p}}^{|\bar{l}|}(\bar{x}) \quad (\text{A.11})$$

$$\times e^{-v^* x/2} (x)^{|l|/2} L_p^{|l|}(x) e^{-vx/2}; \quad (\text{A.12})$$

$$G_{\bar{p}p}^{\bar{l}l} = \delta_{\bar{l}, l} e^{i(\bar{\varphi}_{pl} - \varphi_{pl})} \eta^{1/2} \frac{|v|}{|\bar{v}|} \sqrt{\frac{\bar{p}!}{(\bar{p} + \bar{l})!} \frac{p!}{(p + l)!}} \lambda_{\bar{p}p}^{\bar{l}l}, \quad (\text{A.13})$$

onde definimos

$$\eta = \frac{w^2}{\bar{w}^2} \equiv \frac{z_R}{\bar{z}_R}; \quad (\text{A.14})$$

$$\gamma = \frac{\bar{x}}{x} \equiv \eta \frac{|v|^2}{|\bar{v}|^2}; \quad (\text{A.15})$$

$$\lambda_{\bar{p}p}^{\bar{l}l} = \gamma^{|\bar{l}|/2} \int_0^\infty x^{|\bar{l}|} L_{\bar{p}}^{|\bar{l}|}(\gamma x) L_p^{|l|}(x) e^{-\alpha x}; \quad (\text{A.16})$$

$$\alpha = \frac{\gamma \bar{v}^* + v}{2} \equiv v \left[ \frac{1 + \eta(v^*/v)}{2} \right]. \quad (\text{A.17})$$

Para a continuação, fazemos uma substituição dos polinômios generalizados de Laguerre pela sua função geradora:

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n L_n^{|l|}(x) = \frac{e^{-tx/(1-t)}}{(1-t)^{|l|+1}}. \quad (\text{A.18})$$

$$\lambda_{\bar{p}p}^{\bar{l}l} = \gamma^{|\bar{l}|/2} \int_0^\infty dx x^{|\bar{l}|} \left\{ \frac{1}{\bar{p}!} \frac{\partial^{\bar{p}}}{\partial t'^{\bar{p}}} \left[ \frac{e^{-\gamma x t'/(1-t')}}{(1-t')^{|\bar{l}|+1}} \right] \right\}_{t'=0} \left\{ \frac{1}{p!} \frac{\partial^p}{\partial t^p} \left[ \frac{e^{-\gamma x t/(1-t)}}{(1-t)^{|l|+1}} \right] \right\}_{t=0} \quad (\text{A.19})$$

$$\lambda_{\bar{p}p}^{\bar{l}l} = \frac{\gamma^{|\bar{l}|/2}}{\bar{p}! p!} \frac{\partial^{\bar{p}}}{\partial t'^{\bar{p}}} \frac{\partial^p}{\partial t^p} \left\{ \underbrace{\frac{1}{[(1-t')(1-t)]^{|\bar{l}|+1}} \int_0^\infty x^{|\bar{l}|} e^{-\underbrace{[\gamma t'/(1-t') + t/(1-t) + \alpha]x}_{:=b}} dx}_{:=A} \right\}_{\substack{t'=0 \\ t=0}} \quad (\text{A.20})$$

Realizando os cálculos sobre A:

$$A = \int_0^\infty x^{|\bar{l}|} e^{-bx} dx = \int_0^\infty \left(\frac{y}{b}\right)^{|\bar{l}|} e^{-y} \frac{dy}{b} = \frac{\Gamma(|\bar{l}| + 1)}{b^{|\bar{l}|+1}} = \frac{|\bar{l}|!}{b^{|\bar{l}|+1}} \quad (\text{A.21})$$

Realizando os cálculos sobre b:

$$b = \frac{\gamma t'}{(1-t')} + \frac{t}{(1-t)} + \alpha = \frac{\gamma t'}{(1-t')} + \frac{t}{(1-t)} + \frac{\gamma(1-i\bar{Z})(1+i\bar{Z})}{2} \quad (\text{A.22})$$

$$= \gamma \left\{ \frac{t'}{(1-t')} + \frac{1}{2} \right\} + \left\{ \frac{t}{(1-t)} + \frac{1}{2} \right\} + i \frac{(Z - \gamma\bar{Z})}{2} \quad (\text{A.23})$$

$$= \frac{\gamma}{2} \frac{1+t'}{(1-t')} + \frac{1+t}{2(1-t)} + iZ(1-\gamma\eta) \quad (\text{A.24})$$

$$b = \frac{\gamma(1+t')(1-t') + (1+t)(1-t') + iZ(1-\gamma\eta)(1-t)(1-t')}{2(1-t)(1-t')}. \quad (\text{A.25})$$

Retornando a  $\lambda_{\bar{p}p}^{\bar{l}}$ :

$$\lambda_{\bar{p}p}^{\bar{l}} = \frac{\gamma^{|\bar{l}|/2}}{\bar{p}!p!} \frac{\partial^{\bar{p}}}{\partial t'^{\bar{p}}} \frac{\partial^p}{\partial t^p} \left\{ \frac{|\bar{l}|!}{[(1-t')(1-t)]^{|\bar{l}+1}} \times \right. \\ \left. \times \left[ \frac{2(1-t')(1-t)}{\gamma(1+t')(1-t) + (1+t)(1-t') + iZ(1-\gamma\eta)(1-t)(1-t')} \right]^{|\bar{l}+1} \right\}_{t'=0}^{t=0}$$

$$\lambda_{\bar{p}p}^{\bar{l}} = \frac{2^{|\bar{l}+1}\gamma^{|\bar{l}|/2}|\bar{l}|!}{\bar{p}!p!} \frac{\partial^{\bar{p}}}{\partial t'^{\bar{p}}} \frac{\partial^p}{\partial t^p} \left\{ [\gamma(1+t')(1-t) + (1+t)(1-t') + \right. \\ \left. iZ(1-\gamma\eta)(1-t)(1-t')]^{-(|\bar{l}+1)} \right\}_{t'=0}^{t=0}$$

$$\lambda_{\bar{p}p}^{\bar{l}} = (-1)^{\bar{p}} \frac{2^{|\bar{l}+1}\gamma^{|\bar{l}|/2}|\bar{l}|!}{\bar{p}!p!} \frac{(\bar{p}+|\bar{l}|)!}{|\bar{l}|!} \frac{\partial^p}{\partial t^p} \left\{ [\gamma(1-t) + (1+t) + iZ(1-\gamma\eta)(1-t)]^{-(|\bar{l}+\bar{p}+1)} \times \right. \\ \left. \times [\gamma(1-t) - (1+t) - iZ(1-\gamma\eta)(1-t)]^{\bar{p}} \right\}_{t=0}. \quad (\text{A.26})$$

Para prosseguir com o cálculo de  $\lambda_{\bar{p}p}^{\bar{l}}$ , devemos obter uma expressão para a derivada presente na última linha de (A.26). Seja  $C$  a quantidade definida por

$$C = \frac{\partial^p}{\partial t^p} \left\{ [\gamma(1-t) + (1+t) + iZ(1-\gamma\eta)(1-t)]^{-(|\bar{l}+\bar{p}+1)} [\gamma(1-t) - (1+t) - iZ(1-\gamma\eta)(1-t)]^{\bar{p}} \right\}_{t=0}. \quad (\text{A.27})$$

$$\begin{aligned}
C &= \sum_{n=0}^p \binom{p}{n} \left\{ \frac{\partial^n}{\partial t^n} [\gamma(1-t) - (1+t) - iZ(1-\gamma\eta)(1-t)^{\bar{p}}] \right\}_{t=0} \times \\
&\quad \times \left\{ \frac{\partial^{p-n}}{\partial t^{p-n}} [\gamma(1-t) + (1+t) + iZ(1-\gamma\eta)(1-t)]^{-(|l|+\bar{p}+1)} \right\}_{t=0} \\
&= \sum_{n=0}^p \binom{p}{n} \left\{ \frac{\bar{p}!}{(\bar{p}-n)!} [\gamma - 1 - iZ(1-\gamma\eta)]^{\bar{p}-n} [-\gamma - 1 + iZ(1-\gamma\eta)]^n \right\} \times \\
&\quad \times \left\{ (-1)^{p-n} \frac{\bar{p} + p + |l| - n}{(\bar{p} + |l|)!} [\gamma + 1 + iZ(1-\gamma\eta)]^{-(p+\bar{p}+|l|-n+1)} [-\gamma + 1 - iZ(1-\gamma\eta)]^{p-n} \right\} \\
&= \sum_{n=0}^p \binom{p}{n} \frac{(-1)^n \bar{p}! (\bar{p} + p + |l| - n)!}{(\bar{p} - n)! (\bar{p} + |l|)!} \frac{[(\gamma - 1) - i(Z - \gamma\bar{Z})]^{p-n} [(\gamma + 1) - i(Z - \gamma\bar{Z})]^n}{[(\gamma + 1) + i(Z - \gamma\eta)]^{\bar{p}+p+|l|-n+1} [(\gamma - 1) + i(Z - \gamma\bar{Z})]^{n-p}}. \\
&= \sum_{n=0}^p \binom{p}{n} \left\{ \frac{\partial^n}{\partial t^n} [\gamma(1-t) - (1+t) - iZ(1-\gamma\eta)(1-t)^{\bar{p}}] \right\}_{t=0} \times \\
&\quad \times \left\{ \frac{\partial^{p-n}}{\partial t^{p-n}} [\gamma(1-t) + (1+t) + iZ(1-\gamma\eta)(1-t)]^{-(|l|+\bar{p}+1)} \right\}_{t=0} \\
&= \sum_{n=0}^p \binom{p}{n} \left\{ \frac{\bar{p}!}{(\bar{p}-n)!} [\gamma - 1 - iZ(1-\gamma\eta)]^{\bar{p}-n} [-\gamma - 1 + iZ(1-\gamma\eta)]^n \right\} \times \\
&\quad \times \left\{ (-1)^{p-n} \frac{\bar{p} + p + |l| - n}{(\bar{p} + |l|)!} [\gamma + 1 + iZ(1-\gamma\eta)]^{-(p+\bar{p}+|l|-n+1)} [-\gamma + 1 - iZ(1-\gamma\eta)]^{p-n} \right\} \\
&= \sum_{n=0}^p \binom{p}{n} \frac{(-1)^n \bar{p}! (\bar{p} + p + |l| - n)!}{(\bar{p} - n)! (\bar{p} + |l|)!} \frac{[(\gamma - 1) - i(Z - \gamma\bar{Z})]^{p-n} [(\gamma + 1) - i(Z - \gamma\bar{Z})]^n}{[(\gamma + 1) + i(Z - \gamma\bar{Z})]^{\bar{p}+p+|l|-n+1} [(\gamma - 1) + i(Z - \gamma\bar{Z})]^{n-p}}.
\end{aligned} \tag{A.28}$$

Simplificando algumas coisas:

$$\begin{aligned}
(\gamma + 1) + i(Z - \gamma\bar{Z}) &= (1 + iZ) + \gamma(1 - i\bar{Z}) = v + \gamma\bar{v}^* = v + \eta \frac{v^*v}{\bar{v}^*\bar{v}} \bar{v}^* \\
&= \frac{v}{|\bar{v}|^2} \{\bar{v}^* + \bar{v} + \eta v^* \bar{v}^*\} = \frac{v\bar{v}^*}{|\bar{v}|^2} \{\bar{v} + \eta v^*\} = \frac{v\bar{v}^*}{|\bar{v}^*|^2} \left\{ (1 + i\bar{Z}) + (\eta - i\bar{Z}) \right\}.
\end{aligned} \tag{A.29}$$

Com base nos cálculos acima podemos concluir que

$$(\gamma + 1) + i(Z - \gamma\bar{Z}) = (1 + \eta) \frac{v\bar{v}^*}{|\bar{v}^*|^2}. \tag{A.30}$$

Tomando o conjugado complexo da equação (A.30) obtemos

$$(\gamma + 1) - i(Z - \gamma\bar{Z}) = (1 + \eta) \frac{\bar{v}v^*}{|\bar{v}|^2}. \tag{A.31}$$

$$\begin{aligned}
(\gamma - 1) + i(1 - \gamma\bar{Z}) &= -(1 - iZ) + \gamma(1 - i\bar{Z}) = -v^* + \gamma\bar{v}^* = -v^* + \eta \frac{v^*v\bar{v}^*}{\bar{v}^*\bar{v}} \\
&= -\frac{v^*}{|\bar{v}|^2} \{\bar{v}^*\bar{v} - \eta v\bar{v}^*\} = -\frac{v^*\bar{v}^*}{|\bar{v}^2|} \{\bar{v} - \eta v\} = \frac{v^*\bar{v}^*}{|\bar{v}^2|} \left\{ (1 + i\bar{Z}) - (\eta + i\bar{Z}) \right\}
\end{aligned} \tag{A.32}$$

onde concluímos que

$$(\gamma - 1) + i(Z - \gamma\bar{Z}) = -(1 - \eta) \frac{\bar{v}^* v^*}{|\bar{v}|^2}. \quad (\text{A.33})$$

O conjugado complexo da equação (A.33) é portanto

$$(\gamma - 1) - i(Z - \gamma\bar{Z}) = -(1 - \eta) \frac{\bar{v}v}{|\bar{v}|^2}. \quad (\text{A.34})$$

Fazendo uso dos resultados (A.30), (A.31), (A.33) e (A.34) temos que

$$\begin{aligned} C &= \sum_{n=0}^p \binom{p}{n} \frac{(-1)^{\bar{p}+p-n} p! (\bar{p} + p + |l| - n)!}{(\bar{p} - n)! (\bar{p} + |l|)!} \frac{(1 - \eta)^{\bar{p}+p-2n}}{(1 + \eta)^{p+\bar{p}+|l|-2n+1}} \left(\frac{v^*}{v}\right)^p \left(\frac{\bar{v}}{\bar{v}^*}\right)^{\bar{p}} \frac{|\bar{v}|^{2(|l|+1)}}{v^{|l|+1} \bar{v}^{*|l|+1}} \\ &= \frac{(-1)^{\bar{p}+p} \bar{p}!}{(\bar{p} + |l|)!} \left(\frac{v^*}{v}\right)^p \left(\frac{\bar{v}}{\bar{v}^*}\right)^{\bar{p}} \left(\frac{|\bar{v}|^2}{v\bar{v}^*}\right)^{|l|+1} \sum_{n=0}^p \binom{p}{n} \frac{(\bar{p} + p + |l| - n)! (1 - \eta)^{\bar{p}+p-2n} (-1)^n}{(\bar{p} + |l|)! (1 + \eta)^{p+\bar{p}+|l|-2n+1}}. \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Com o valor obtido para  $C$ , retornamos para os cálculos de  $\lambda_{\bar{p}p}^{\bar{l}}$  :

$$\begin{aligned} \lambda_{\bar{p}p}^{\bar{l}} &= \frac{2^{|l|+1} \gamma^{\frac{|l|}{2}} (-1)^p (\bar{p} + |l|)! (-1)^{\bar{p}+p} \bar{p}!}{\bar{p}! p! (\bar{p} + |l|)!} \left(\frac{v^*}{v}\right)^p \left(\frac{\bar{v}}{\bar{v}^*}\right)^{\bar{p}} \left(\frac{|\bar{v}|^2}{v\bar{v}^*}\right) \times \\ &\quad \times \left\{ \sum_{n=0}^p (-1)^n \binom{p}{n} \frac{(\bar{p} + p + |l| - n)!}{(\bar{p} + |l|)!} \frac{(1 - \eta)^{\bar{p}+p-2n}}{(1 + \eta)^{p+\bar{p}+|l|-2n+1}} \right\} \\ \lambda_{\bar{p}p}^{\bar{l}} &= \frac{(-1)^p}{p!} \left(\frac{v^*}{v}\right)^p \left(\frac{\bar{v}}{\bar{v}^*}\right)^{\bar{p}} \left(\frac{|\bar{v}|^2}{v\bar{v}^*}\right)^{|l|+1} 2^{|l|+1} \left(\frac{|v|}{\bar{v}}\right)^{|l|} \eta^{|l|/2} \times \\ &\quad \times \sum_{n=0}^p (-1)^n \binom{p}{n} \frac{(\bar{p} + p + |l| - n)!}{(\bar{p} + |l|)!} \frac{(1 - \eta)^{\bar{p}+p-2n}}{(1 + \eta)^{p+\bar{p}+|l|-2n+1}} \quad (\text{A.36}) \\ &= \frac{(-1)^p}{p!} \left(\frac{v^*}{v}\right)^p \left(\frac{\bar{v}}{\bar{v}^*}\right)^{\bar{p}} \left(\frac{2|\bar{v}|^2}{v\bar{v}^*}\right) \underbrace{\left(\frac{2|\bar{v}|^2 |v|}{v\bar{v}^* \bar{p}!}\right)^{|l|}}_{\equiv D} \eta^{|l|/2} \times \\ &\quad \times \sum_{n=0}^p (-1)^n \binom{p}{n} \frac{(\bar{p} + p + |l| - n)!}{(\bar{p} + |l|)!} \frac{(1 - \eta)^{\bar{p}+p-2n}}{(1 + \eta)^{p+\bar{p}+|l|-2n+1}} \end{aligned}$$

Simplificando a quantidade D:

$$D = \left(\frac{2|\bar{v}||v|}{v\bar{v}^*}\right)^{|l|} = \left(\frac{4|\bar{v}|^2 |v|^2}{v^2 \bar{v}^{*2}}\right)^{\frac{|l|}{2}} = \left(\frac{4\bar{v}\bar{p}^* v v^*}{v\bar{v}^* \bar{p}^*}\right)^{\frac{|l|}{2}} = \left(4 \frac{v^*}{v} \frac{\bar{v}}{\bar{v}^*}\right)^{\frac{|l|}{2}} = 2^{|l|} \left(\frac{v^*}{v}\right)^{\frac{|l|}{2}} \left(\frac{\bar{v}}{\bar{v}^*}\right)^{\frac{|l|}{2}}. \quad (\text{A.37})$$

Inserindo a simplificação (A.37) na expressão para  $\lambda_{\bar{p}p}^{\bar{l}}$  temos então

$$\begin{aligned} \lambda_{\bar{p}p}^{\bar{l}} &= \frac{(-1)^p}{p!} \eta^{\frac{|l|}{2}} 2^{|l|+1} \left(\frac{|\bar{v}|^2}{v\bar{v}^*}\right) \left(\frac{v^*}{v}\right)^{p+\frac{|l|}{2}} \left(\frac{\bar{v}}{\bar{v}^*}\right)^{\bar{p}+\frac{|l|}{2}} \times \\ &\quad \times \sum_{n=0}^p \binom{p}{n} \frac{(\bar{p} + p + |l| - n)!}{(\bar{p} + |l|)!} \times \frac{(1 - \eta)^{\bar{p}+p-2n} (-1)^n}{(1 + \eta)^{p+\bar{p}+|l|-2n+1}} \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

Sobre a fase de Gouy:

$$e^{i\varphi_{pl}} = e^{-i(2p+|l|+1)\tan^{-1}(Z)} = (e^{-i2\tan^{-1}(Z)})^{p+\frac{|l|+1}{2}} \quad (\text{A.39})$$

$$\begin{aligned} e^{-i2\tan^{-1}(Z)} &= \cos(2\tan^{-1}(Z)) - i\sin(2\tan^{-1}(Z)) \\ &= \frac{1 - \tan^2(\tan^{-1}(Z))}{1 + \tan^2(\tan^{-1}(Z))} - \frac{i2\tan(\tan^{-1}(Z))}{1 + \tan^2(\tan^{-1}(Z))} \\ &= \frac{1 - Z^2 - i2Z}{1 + Z^2} = \frac{(1 - iZ)^2}{(1 + iZ)(1 - iZ)} = \frac{(1 - iZ)}{(1 + iZ)} \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

Somos então levados a concluir que

$$e^{i\varphi_{pl}} = \left(\frac{v^*}{v}\right)^{p+\frac{|l|+1}{2}} \quad (\text{A.41})$$

Utilizando as equações (A.38) e (A.41) retornamos a constante  $G_{\bar{p}p}^{\bar{l}}$ :

$$\begin{aligned} G_{\bar{p}p}^{\bar{l}} &= \delta_{\bar{l}} \left(\frac{\bar{v}^*}{\bar{v}}\right)^{\bar{p}+\frac{|l|+1}{2}} \left(\frac{v^*}{v}\right)^{p-\frac{|l|+1}{2}} \eta^{1/2} \frac{|v|}{|\bar{v}|} \sqrt{\frac{\bar{p}!}{(\bar{p}+|l|)!} \frac{p!}{(p+|l|)!}} \times \\ &\times \left\{ \frac{(-1)^p}{p!} \eta^{\frac{|l|}{2}} 2^{|l|+1} \left(\frac{|\bar{v}|^2}{v\bar{v}^*}\right) \left(\frac{v^*}{v}\right)^{p+\frac{|l|}{2}} \left(\frac{\bar{v}}{\bar{v}^*}\right)^{p+\frac{|l|}{2}} \right\} \times \\ &\times \sum_{n=0}^p \binom{p}{n} \frac{(p+\bar{p}+|l|-n)!}{(\bar{p}-n)!} (-1)^n \frac{(1-\eta)^{p+\bar{p}-2n}}{(1+\eta)^{p+\bar{p}+|l|-2n+1}} \\ &= \delta_{\bar{l}} \frac{(-1)^p}{p!} \eta^{(|l|+1)/2} 2^{|l|+1} \left(\frac{|\bar{v}||v|}{v\bar{v}^*}\right) \left(\frac{\bar{v}^*}{\bar{v}}\right)^{1/2} \left(\frac{v^*}{v}\right)^{-1/2} \sqrt{\frac{\bar{p}!}{(\bar{p}+|l|)!} \frac{p!}{(p+|l|)!}} \times \\ &\times \sum_{n=0}^p \binom{p}{n} \frac{(p+\bar{p}+|l|-n)!}{(\bar{p}-n)!} (-1)^n \frac{(1-\eta)^{p+\bar{p}-2n}}{(1+\eta)^{p+\bar{p}+|l|-2n+1}} \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

Por fim,

$$G_{\bar{p}p}^{\bar{l}} = \delta_{\bar{l}} (-1)^p \left(\frac{2\sqrt{\eta}}{1+\eta}\right)^{|l|+1} \sqrt{\frac{\bar{p}!}{(\bar{p}+|l|)!} \frac{p!}{(p+|l|)!}} \sum_{n=0}^p \frac{(p+\bar{p}+|l|-n)!}{n!(\bar{p}-n)!(p-n)!} (-1)^n \left(\frac{1-\eta}{1+\eta}\right)^{p+\bar{p}-2n} \quad (\text{A.43})$$

Com o resultado acima, podemos concluir que a constante  $G_{\bar{p}p}^{\bar{l}}$  é independente de do eixo de propagação  $z$  e não-nula apenas se  $\bar{l} = l$ , indicando a conservação do momento angular.

$$G_{\bar{p}p}^{\bar{l}}(z) = G_{\bar{p}p}^{\bar{l}}(0), \quad (\text{A.44})$$

$$G_{\bar{p}p}^{\bar{l}} = G_{\bar{p}p}^{ll}. \quad (\text{A.45})$$

Além disso, um modo  $\bar{u}_{\bar{p}\bar{l}}$  com uma distância de Rayleigh  $z_R$  pode ser descrito como uma superposição sobre as ordens radiais de modos com uma distância de Rayleigh distinta e mesmo momento angular  $l$ :

$$\bar{u}_{\bar{p}\bar{l}}(z) = \sum_p G_{\bar{p}p}^{ll} u_{pl}. \quad (\text{A.46})$$