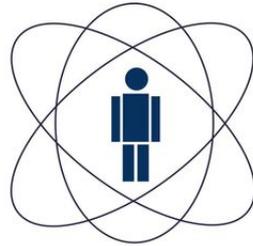


Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Coordenação de Formação Acadêmica
Coordenação de Cosmologia, Astrofísica e Interações
Fundamentais



CBPF

**Centro Brasileiro de
Pesquisas Físicas**

Guilherme Brando de Oliveira

Colapso Gravitacional em Teorias de Brans-Dicke Estendidas

Rio de Janeiro - RJ
17 de outubro de 2018

Guilherme Brando de Oliveira

**Colapso Gravitacional em Teorias de Brans-Dicke
Estendidas**

Dissertação apresentada ao curso de Pós-Graduação em Física do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, como requisito parcial para a obtenção do Título de mestre em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Felipe Tovar Falciano

17 de outubro de 2018

Agradecimentos

Em primeiro lugar gostaria de agradecer toda a minha família pelo apoio e carinho que sempre tiveram comigo. Em especial meu pai, minha mãe, minha irmã, meu cunhado e meu padrasto, que sempre estiveram presentes e muito me ajudaram. Sei a sorte que tive em nascer com condições financeiras e familiares boas que me permitiram trilhar a carreira acadêmica. Gostaria, também, de mencionar minha analista, a qual contribuiu muito para este trabalho.

Agradeço também o meu orientador Felipe Tovar, pela sua orientação, atenção e profissionalismo. Com certeza seus ensinamentos com relação a física, em especial a física brasileira, me marcaram muito. Não posso deixar de mencionar os professores Nelson Pinto Neto e José Helayel, que me deram ótimos cursos e me ensinaram, às suas maneiras, suas respectivas linhas de raciocínio para se fazer pesquisa em física. Meus companheiros e companheira de CBPF também muito me ajudaram e influenciaram na construção desta dissertação, ou com discussões regadas a café ou com a boa e seminal cerveja. Ainda no CBPF gostaria de agradecer aos terceirizados da limpeza que sempre fizeram um trabalho impecável, em especial, ao Dudu no quinto andar, que sempre demonstrou ser uma excelente pessoa além de um ótimo profissional.

Os meus amigos e amigas de longa data também merecem honrosas menções, já que nossa linha do tempo pode ser traçada há alguns anos. Meus amigos e amigas do tempo de colégio e ao pessoal do Grupo do Poker um grande obrigado para vocês, assim como para as amigas e amigos que fiz no período da faculdade, seja no curso de Física, como em outros cursos.

Com certeza não me permitiria deixar de reconhecer aqui uma de minhas maiores paixões, o Botafogo de Futebol e Regatas. Desde sua fundação, por rapazes de 16 anos do bairro de Botafogo, este se tornou paixão de milhões de torcedores anos depois. Neste parágrafo também sou grato ao meu tio que me apresentou ao Botafogo.

Por fim agradeço ao povo brasileiro, que com o suor de seu trabalho, paga seus impostos e nos permite sonhar. Agradeço ao CNPq pelo auxílio financeiro.

À Allegra, minha eterna cãopanhia...

Sumário

Resumo	iv
Abstract	v
1 Teoria de Brans-Dicke	1
1.1 Introdução	1
1.2 Teoria de Brans-Dicke	4
1.3 Transformações Conforme na Teoria de Brans-Dicke	8
1.4 Teorias de Brans-Dicke Generalizadas	13
1.5 PPN	15
1.5.1 O Formalismo PPN	16
1.6 Formalismo PPN de Teorias Escalares Tensoriais	19
2 Colapso Gravitacional na Relatividade Geral	21
2.1 Introdução	21
2.2 Colapso Gravitacional de Poeira	23
2.2.1 Condições de Junção de Israel-Darmois	24
2.3 Colapso Gravitacional de Radiação	35
2.3.1 Superfície de Colagem: Visão Interior	36
2.3.2 Superfície de Colagem: Visão Exterior	37
3 Modelo	40
3.1 Introdução	40
3.2 Ação e Equações de Movimento	40
3.2.1 Análise de $\lim_{\phi \rightarrow \phi_c} \omega(\phi) = \infty$	42
3.3 Análise das Equações de Movimento	45
4 Conclusão	65
4.1 Conclusão e Perspectivas:	65

Resumo

Nesta dissertação, estudamos o colapso gravitacional de estrelas massivas em Teorias de Brans-Dicke Generalizadas. Nosso modelo tem como condição inicial a Relatividade Geral, e investigamos a evolução das equações de movimento da Teoria de Brans-Dicke Generalizada a partir desta condição inicial. Por estarmos partindo da Relatividade Geral, utilizamos as Condições de Junção de Israel-Darmois para fazer a colagem entre os espaços-tempos da estrela com o exterior a estrela.

Palavras-chave: Gravitação, Colapso Gravitacional, Teorias Modificadas de Gravitação.

Abstract

In this masters dissertation we have studied the gravitational collapse of massive stars on the modified gravity theory called Generalized Brans-Dicke. The initial condition of our model is General Relativity, and we investigate the evolutions of the equations of motion within the context of Generalized Brans-Dicke Theory. Since the start of our collapse is described by General Relativity, we have used the Israel-Darmois Junction Conditions to perform the matching between the spacetimes of the star and the exterior of the star.

Capítulo 1

Teoria de Brans-Dicke

1.1 Introdução

A Relatividade Geral(RG) é a melhor descrição clássica da gravitação, a ponto de ser, junto da Teoria Quântica de Campos, um dos pilares da física teórica moderna. Através do uso da geometria diferencial, Einstein conseguiu criar uma teoria dinâmica para o espaço-tempo, onde matéria e geometria são os ingredientes fundamentais para a sua descrição. As Equações de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^3} T_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

nos apresentam um sistema de equações diferenciais parciais não-lineares de até segunda ordem na métrica $g_{\mu\nu}$. Como uma equação tensorial, ela determina a estrutura do espaço-tempo de forma covariante e independente de coordenadas. Como consequência, o método de descrever a gravidade de Einstein deu luz à uma nova concepção de universo, fazendo com que este viesse a ser considerado um sistema dinâmico, sujeito a modelagens matemáticas e medidas físicas.

As primeiras comprovações da teoria de Einstein puderam ser observadas logo quando esta começou a se desenvolver. São exemplos dessas comprovações:

- *Precessão do Periélio de Mercúrio:* Sob a teoria Newtoniana, um sistema de dois corpos consistindo em um objeto solitário orbitando uma distribuição esférica de massa, aquele traçaria uma elipse ao redor desta. A órbita de Mercúrio, no entanto, desviava da precessão prevista por estes efeitos Newtonianos. Einstein, por sua vez, demonstrou que a Relatividade Geral concorda, precisamente, com o desvio observado.
- *Deflexão da Luz pelo Sol:* O campo gravitacional de um corpo celeste faz com que a luz tenha seu percurso alterado, este foi o primeiro efeito da Relatividade Geral a

ser previsto antes de ser observado, e a sua confirmação no eclipse de 1919 tornou-o também o primeiro teste observacional da teoria.

É importante ressaltar que Einstein, mesmo tendo a preocupação de realizar cálculos e previsões que poderiam ser observados e medidos experimentalmente, via os possíveis testes empíricos de sua teoria como questões secundárias, face à elegância e à consistência interna da Relatividade Geral. Em contraste, atualmente, a pesquisa em gravitação experimental é tida como um importante campo de pesquisa em gravitação, caracterizado pelos sucessivos esforços em encontrar impressões de seus efeitos na física de partículas de altas energias. A recente descoberta das ondas gravitacionais reforça a credibilidade da teoria de Einstein.

A história moderna da experimentação da relatividade pode ser separada em quatro períodos:

- 1 *A Gênese (1887-1919)*: Engloba o período dos dois experimentos fundamentais da relatividade restrita, o Experimento de Michelson-Morley e o Experimento de Eötvös, e as confirmações imediatas da Relatividade Geral já citadas anteriormente, o Avanço do Periélio de Mercúrio e o Cálculo da Deflexão da Luz.
- 2 *A Hibernação (1920 – 1960)*: Este é o período no qual o trabalho teórico superou as possibilidades tecnológicas e experimentais. Como consequência, o campo estagnou e foi posto de lado pela física teórica desta época. Destaca-se que a grande contribuição teórica para a gravitação deste período, veio com John Wheeler e seus alunos, que fizeram o primeiro tratamento da Relatividade Geral como uma Teoria de Campos, através de sua Formulação Hamiltoniana nos artigos seminais de Arnowitt-Deser-Misner(ADM) [1].
- 3 *A Era de Ouro (1960 – 1980)*: No início da década de 1960, descobertas astronômicas, a exemplo de, quasares, pulsares e a radiação cósmica de fundo, renovaram o interesse em realizar experimentos na Relatividade Geral. Observou-se, em âmbito mundial, o despontar de teorias modificadas da gravitação, bem como um movimento de contraposição entre as previsões destas e as da Relatividade Geral. Além disto, é importante ressaltar a entrada da escola britânica de gravitação, representada pelo matemático Roger Penrose [39,40], Dennis W. Sciama e seu aluno Stephen Hawking [24], dentre outros. Os trabalhos introduzidos e discutido por estes pesquisadores foram cruciais na introdução de técnicas matemáticas de Geometria e Topologia Diferencial na Relatividade Geral.
- 4 *A Busca pela Gravidade Forte (1980- hoje)*: O período sucessivo à Era de Ouro, é o que se vive atualmente. Especialistas voltam seus experimentos para o estudo de

regiões onde o campo gravitacional é substancialmente forte. As figuras principais que diferenciam os campos gravitacionais são as quantidades: $\varepsilon \sim GM/(Rc^2)$, onde G é a constante gravitacional de Newton, M é a escala de massa característica do fenômeno, R a escala de distância característica e c a velocidade da luz; e a quantidade $\Upsilon \sim M/R^3$. A primeira quantidade é associada ao *redshift*, enquanto a segunda é relacionada ao valor do Tensor de Riemann. O valor desta medida, próximo ao horizonte de eventos de um buraco negro sem rotação, ou para o universo observável em expansão, é da ordem de $\varepsilon \sim 0.5$. Já para estrelas de nêutrons, o valor da medida é da ordem de $\varepsilon \sim 0.2$. Estes são os regimes de gravidade forte, já que para o sistema solar esta quantidade é avaliada em $\varepsilon < 10^{-5}$. É válido comentar a respeito do limite extremo de gravitação forte, que está associado à escala de energia de Planck, onde as pesquisas teóricas de Teorias de Grande Unificação(GUTs) e a Gravitação Quântica são desenvolvidas.

Os obstáculos observados na busca pela teoria quântica da gravitação fizeram com que parte dos esforços em desenvolvê-la fossem redirecionados às teorias extendidas da gravitação. Ou seja, foi dada ênfase em teorias que conseguissem obter a Relatividade Geral a partir de considerações ou imposições nestas teorias, mas que conseguissem modificar os efeitos tanto cinemáticos como dinâmicos da teoria de Einstein. Desse modo, o paradigma deu-se de forma a incluir na famosa ação de Einstein-Hilbert termos invariantes de curvatura maior e campos escalares minimamente e não-minimamente acoplados ao escalar de Ricci. A primeira abordagem é denominada Teorias $f(R)$, nas quais R é o Escalar de Ricci, que não serão, entretanto, tratadas nesta dissertação. A segunda abordagem, por sua vez, é conhecida como Teorias Escalares-Tensoriais. Ambas modificações podem também surgir como limites de baixas energias de Teorias de Grande Unificação, como a chamada Teoria das Cordas. As Teorias Extendidas de Gravitação têm sido, na atualidade, de considerável relevância para o estudo da cosmologia, tendo em vista que apresentam tanto uma maneira de explicar a aceleração do universo, quanto para estudar o universo primordial.

A ideia de iniciar este capítulo introdutório de Teorias Escalares Tensoriais(ET) com uma discussão histórica a respeito de experimentos da Relatividade Geral se dá devido à importância destas teorias para a pesquisa teórica em gravitação clássica. Dentre as teorias alternativas da gravitação, as teorias ET são as que detêm, simultaneamente, baixo teor de complexidade no que tange a produção de previsões e nível de sofisticação suficiente para se gerar uma rica fenomenologia intrínseca.

1.2 Teoria de Brans-Dicke

A Teoria de Jordan-Fierz-Brans-Dicke [10], usualmente conhecida como Teoria de Brans-Dicke(BD), é o protótipo de teorias alternativas para a Relatividade Geral. A ação no chamado referencial de Jordan é,

$$S_{BD} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\phi R - \frac{\omega}{\phi} (\partial\phi)^2 - V(\phi) \right] + S_m \quad (1.2)$$

onde S_m é a ação de matéria e ω é uma constante. O fator ϕ no denominador do segundo termo da ação é introduzido para fazer com que ω seja adimensional. O campo escalar ϕ não é acoplado diretamente à matéria, mas sim ao Escalar de Ricci, o que o torna também um mediador da interação gravitacional. Nessa lógica, a gravitação é mediada por um campo de spin-2 sem massa e por um campo de spin-0, sendo que este último pode possuir massa ou não, dependendo do potencial $V(\phi)$. Este potencial, serve também como uma generalização da constante cosmológica caso tenha uma dependência em ϕ , e geralmente é introduzido em modelos de universo primordial ou de modelos de quintessência.

A motivação original para a Teoria de Brans-Dicke foi a busca por um formalismo que implementasse o Princípio de Mach, o qual não é completamente realizado na Relatividade Geral. De forma sucinta, o Princípio de Mach estabelece que referenciais inerciais são aqueles que não são acelerados em relação às “estrelas fixas”, isto é, são relativos à uma média adequadamente definida de toda a matéria do universo. Portanto as massas fundamentais das partículas elementares não devem ser constantes, mas devem traduzir-se em valores que representem a interação destas partículas com alguma espécie de “campo cósmico”. A escala absoluta das partículas elementares, entretanto, só pode ser avaliada se medirmos as acelerações gravitacionais Gm/r^2 . Uma conclusão equivalente é a de que a constante gravitacional G deve estar ligada ao valor médio de um campo escalar ϕ acoplado à densidade de massa do universo.

Para se obter as equações de campo, varia-se a ação (1.2) com relação à métrica $g_{\mu\nu}$, e se faz uso das identidades:

$$\begin{aligned} \delta(\sqrt{-g}) &= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \\ \delta(\sqrt{-g}R) &= \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} = \sqrt{-g} G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (1.3)$$

onde despreza-se os termos de superfície para encontrar as equações de campo,

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{\phi} T_{\mu\nu}^{(m)} + \frac{\omega}{\phi} \left(\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla^\rho \phi \nabla_\rho \phi \right) + \frac{1}{\phi} (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \square \phi) - \frac{V}{2\phi} g_{\mu\nu} \quad (1.4)$$

onde

$$T_{\mu\nu}^{(m)} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} (\sqrt{-g} \mathcal{L}_m) \quad (1.5)$$

é o Tensor de Energia Momento de matéria e $G_{\mu\nu}$ é o Tensor de Einstein. Para não alterar o sucesso do Princípio de Equivalência, como a igualdade entre massa gravitacional e inercial, Brans e Dicke requeriram que apenas $g_{\mu\nu}$ e não ϕ entrasse nas equações de movimento para partículas e fótons. Nesse sentido, a equação que descreve a troca de energia e momento entre matéria e gravitação é *a mesma* da Teoria de Einstein,

$$\nabla^\nu T_{\mu\nu}^{(m)} = 0 \quad (1.6)$$

que é a equação de conservação do Tensor de Energia Momento da Relatividade Geral.

Da mesma forma, a variação com respeito ao campo escalar ϕ , nos dá a sua equação de movimento ,

$$\frac{2\omega}{\phi} \square \phi + R - \frac{\omega}{\phi^2} \nabla^\rho \phi \nabla_\rho \phi - \frac{dV}{d\phi} = 0 \quad (1.7)$$

É possível, entretanto, tomar o traço de (1.4)

$$R = \frac{-8\pi G T^{(m)}}{\phi} + \frac{\omega}{\phi^2} \nabla^\rho \phi \nabla_\rho \phi + \frac{3\square \phi}{\phi} + 2\frac{V}{2\phi} \quad (1.8)$$

e utilizá-lo para eliminar R de (1.7)

$$\square \phi = \frac{1}{2\omega + 3} \left[8\pi G T^{(m)} + \phi \frac{dV}{d\phi} - 2V \right], \quad (1.9)$$

sendo esta a forma mais frequentemente encontrada na literatura da equação de movimento para o campo escalar.

Esta última equação evidencia, que o campo escalar ϕ possui como fonte matéria não-conforme (e.g. , matéria com traço, $T^{(m)} \neq 0$), embora o campo escalar não esteja diretamente acoplado à $T_{\mu\nu}^{(m)}$ ou $\mathcal{L}_{(m)}$. Ou seja, ele atua na matéria apenas através da métrica $g_{\mu\nu}$, segundo as equações de campo (1.4).

A forma da ação (1.2) ou da equação (1.4) sugere que o campo de Brans-Dicke ϕ

desempenha o papel de inverso do acoplamento gravitacional

$$G_{eff}(\phi) = \frac{1}{\phi} \quad (1.10)$$

se tornando assim uma função do espaço-tempo. Por esta razão, os valores em que $\phi > 0$ correspondentes a uma gravitação atrativa, são usualmente escolhidos. Tendo em vista que o valor do parâmetro de Brans-Dicke ω é arbitrário, uma escolha em que seu valor seja unitário, parece a princípio natural, sendo encontrado em alguns limites de baixa energia de teorias de supercordas. Por outro lado, esse valor é descartado por testes gravitacionais no limite de campo fraco, em teorias com campos escalares sem massa ou com campos escalares leves (i.e. um campo escalar com alcance da ordem do Sistema Solar, ou do laboratório usado para testar a gravidade).

Solução Esfericamente Simétrica e Estática

No artigo original, C. Brans e R. H. Dicke [10] apresentam uma solução exata de sua teoria para estudar a vizinhança de corpos isolados. Trata-se de uma solução esfericamente simétrica e estática, descrevendo se a métrica da seguinte forma

$$ds^2 = -e^{2\alpha} dt^2 + e^{2\beta} (dr^2 + r^2 d\Omega^2) \quad (1.11)$$

onde $\alpha = \alpha(r)$ e $\beta = \beta(r)$, são dadas por uma das quatro funções:

I Funções da Solução I:

$$\begin{aligned} e^\alpha &= e^{\alpha_0} \left[\frac{1 - \frac{B}{r}}{1 + \frac{B}{r}} \right]^{\frac{1}{\lambda}} \\ e^\beta &= e^{\beta_0} \left(1 + \frac{B}{r} \right)^2 \left[\frac{1 - \frac{B}{r}}{1 + \frac{B}{r}} \right]^{\frac{(\lambda - C - 1)}{\lambda}} \\ \phi &= \phi_0 \left[\frac{1 - \frac{B}{r}}{1 + \frac{B}{r}} \right] \end{aligned} \quad (1.12)$$

com a condição de vínculo,

$$\lambda^2 = (C + 1)^2 - C \left(1 - \frac{\omega}{2} \right) > 0 \quad (1.13)$$

II Funções da Solução II:

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_0 + \frac{2}{\Lambda} \tan^{-1} \left(\frac{r}{B} \right) \\ \beta &= \beta_0 - \frac{2(C+1)}{\Lambda} \tan^{-1} \left(\frac{r}{B} \right) - \ln \left[\frac{r^2}{(r^2 + B^2)} \right] \\ \phi &= \phi_0 e^{\frac{2C}{\Lambda} \tan^{-1} \left(\frac{r}{B} \right)}\end{aligned}\tag{1.14}$$

e os parâmetros da solução se relacionam como:

$$\Lambda^2 = C \left(1 - \frac{\omega C}{2} \right) - (C+1)^2 > 0\tag{1.15}$$

III Funções da Solução III:

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_0 - \frac{r}{B} \\ \beta &= \beta_0 - 2 \ln \left(\frac{r}{B} \right) + \frac{(C+1)r}{B} \\ \phi &= \phi_0 e^{-\frac{Cr}{B}}\end{aligned}\tag{1.16}$$

com a constante C dada por,

$$C = \frac{-1 \pm \sqrt{-2\omega - 3}}{\omega + 2}\tag{1.17}$$

IV Funções da Solução IV:

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_0 - \frac{1}{Br} \\ \beta &= \beta_0 + \frac{(C+1)}{Br} \\ \phi &= \phi_0 e^{-\frac{Cr}{B}}\end{aligned}\tag{1.18}$$

com a constante C também dada por,

$$C = \frac{-1 \pm \sqrt{-2\omega - 3}}{\omega + 2}\tag{1.19}$$

em todas as soluções, α_0 , β_0 , ϕ_0 e B são constantes.

É válido apontar as seguintes observações no tangente às soluções apresentadas:

- Enquanto a Solução I é válida para qualquer valor de ω , as soluções II, III e IV são válidas apenas para $\omega < -\frac{3}{2}$.
- Fica demonstrado que estas soluções não são independentes entre si. Através de uma transformação da forma $r \rightarrow 1/r$ e de redefinições de constantes, a solução II

pode ser transformada na solução I no intervalo $\omega < -3/2$. Da mesma maneira, a solução III pode ser transformada na solução IV.

Embora outras soluções esféricas mas não estáticas existam na literatura, optou-se, no presente estudo, por não se aprofundar nesta discussão, uma vez que ela levaria a um afastamento do tema central desta dissertação. Desse modo, será dada continuidade à análise de outros fundamentos das Teorias Escalares Tensoriais.

1.3 Transformações Conforme na Teoria de Brans-Dicke

As transformações conformes representam uma ferramenta matemática que se provou de grande importância no estudo de teorias alternativas da gravidade, assim como na Relatividade Geral [19, 56]. O alicerce destas transformações é a realização de um reescalonamento da métrica do espaço-tempo, $g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu}$. Nesta seção, será discutida de que forma o campo escalar extra, presente na Teoria de Brans-Dicke, redefine-se após uma transformação deste tipo. Ou seja, será explicitada a maneira através da qual o par de variáveis dinâmicas $(g_{\mu\nu}, \phi)$, chamado de Referencial de Jordan (Jordan Frame), muda para $(\tilde{g}_{\mu\nu}, \tilde{\phi})$, chamado de Referencial Conforme de Einstein (Einstein Conformal Frame), e quais são as implicações teóricas destas transformações.

Existe a possibilidade de se introduzir infinitos referenciais conformes nas Teorias Extendidas de Gravitação, o que resulta em diferentes representações das mesmas, consequentemente, provoca amplos debates acerca das interpretações conferidas por esta liberdade. Agora, porém, serão analisadas as propriedades matemáticas destas transformações.

Seja o par $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$ um espaço-tempo, onde \mathcal{M} é uma variedade suave de dimensão $n \geq 2$ e $g_{\mu\nu}$ uma métrica Lorentziana ou Riemanniana em \mathcal{M} . O reescalonamento da métrica dependente do ponto do espaço-tempo é dado por

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu} \tag{1.20}$$

onde $\Omega = \Omega(x)$ é chamado de fator conforme e é uma função não nula em todo seu domínio e regular. Tal transformação é denominada Transformação Conforme. Devido a esta mudança na métrica, as distâncias dos intervalos do tipo espaço ou do tipo tempo, bem como as normas dos vetores tipos espaço e tempo, são alteradas, enquanto que intervalos nulos e as normas dos vetores nulos da métrica $g_{\mu\nu}$ permanecem inalteradas na nova métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$. Além disso tal transformação muda distâncias, mas mantém os ângulos

entre vetores inalterados. Sendo a estrutura do cone de luz dos espaços-tempos $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$ e $(\mathcal{M}, \tilde{g}_{\mu\nu})$ invariante por esta transformação, ambos espaços-tempos possuem a mesma estrutura causal.

São apontadas a seguir as propriedades da transformação de algumas quantidades geométricas:

- Dado que a métrica se transforma como (1.20), a inversa da métrica se transforma como

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \Omega^{-2} g^{\mu\nu} \quad (1.21)$$

e o determinante n-dimensional,

$$\tilde{g} = \Omega^{2n} g. \quad (1.22)$$

- A partir da definição do Símbolo de Christoffel,

$$\Gamma_{\beta\lambda}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\kappa} (\partial_{\beta} g_{\kappa\lambda} + \partial_{\lambda} g_{\beta\kappa} - \partial_{\kappa} g_{\beta\lambda}) \quad (1.23)$$

demonstra-se que,

$$\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\lambda} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\lambda} + \frac{1}{\Omega} (\delta^{\alpha}_{\beta} \nabla_{\lambda} \Omega + \delta^{\alpha}_{\lambda} \nabla_{\beta} \Omega - g_{\beta\lambda} \nabla^{\alpha} \Omega) \quad (1.24)$$

- Desta maneira, o Tensor de Riemann, Tensor de Ricci e Escalar de Ricci são reescritos como:

$$\begin{aligned} \tilde{R}^{\gamma}_{\alpha\beta\lambda} &= R^{\gamma}_{\alpha\beta\lambda} + 2\delta^{\gamma}_{[\alpha} \nabla_{\beta]} \nabla_{\lambda} (\ln \Omega) - 2g^{\gamma\sigma} g_{\lambda[\alpha} \nabla_{\beta]} \nabla_{\sigma} (\ln \Omega) \\ &+ 2\nabla_{[\alpha} (\ln \Omega) \delta^{\gamma}_{\beta]} \nabla_{\lambda} (\ln \Omega) - 2\nabla_{[\alpha} (\ln \Omega) g_{\beta]\lambda} g^{\gamma\sigma} \nabla_{\sigma} (\ln \Omega) \\ &- 2g_{\lambda[\alpha} \delta^{\gamma}_{\beta]} g^{\sigma\rho} \nabla_{\sigma} (\ln \Omega) \nabla_{\rho} (\ln \Omega) \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\alpha\beta} &= R_{\alpha\beta} - (n-2) \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} (\ln \Omega) - g_{\alpha\beta} g^{\sigma\rho} \nabla_{\sigma} \nabla_{\rho} (\ln \Omega) \\ &+ (n-2) \nabla_{\alpha} (\ln \Omega) \nabla_{\beta} (\ln \Omega) - (n-2) g_{\alpha\beta} g^{\sigma\rho} \nabla_{\sigma} \nabla_{\rho} (\ln \Omega) \end{aligned} \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= \tilde{g}^{\alpha\beta} \tilde{R}_{\alpha\beta} = \frac{1}{\Omega^2} \left[R - 2(n-1) \square (\ln \Omega) \right. \\ &\left. - (n-1)(n-2) \frac{g^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} \Omega \nabla_{\beta} \Omega}{\Omega^2} \right] \end{aligned} \quad (1.27)$$

que no caso de $n = 4$,

$$\tilde{R} = \frac{1}{\Omega^2} \left[R - \frac{6\square\Omega}{\Omega} \right] \quad (1.28)$$

- Além destas quantidades geométricas, há um tensor importante para a Relatividade

Geral, o Tensor de Weyl, que é invariante conforme quando seu último índice é contravariante e os demais covariantes,

$$C_{\alpha\beta\lambda}{}^\gamma = \tilde{C}_{\alpha\beta\lambda}{}^\gamma, \quad (1.29)$$

entretanto ressalta-se que este tensor não é bem definido para um espaço-tempo bi-dimensional.

Se na métrica original, $g_{\mu\nu}$, temos que $R_{\mu\nu} = 0$, na métrica transformada $\tilde{g}_{\mu\nu}$ este fato não é mais verdadeiro. Nesta métrica o fator Ω desempenhará o papel de uma matéria “efetiva”.

É, também, necessário estudar como a matéria se transforma sob (1.22). É de conhecimento geral que a maioria dos campos de matéria não são invariantes conformes, já que a invariância conforme é uma propriedade muito especial e restritiva. Portanto, em geral, a equação de conservação do Tensor de Energia Momento da Matéria [52, 53]

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu}^{(m)} = 0 \quad (1.30)$$

não é invariante conforme, uma vez que o Tensor de Energia Momento na métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$ transforma-se como,

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{\mu\nu} &= \frac{2}{\sqrt{-\tilde{g}}} \frac{\delta}{\delta \tilde{g}_{\mu\nu}} \left(\sqrt{-\tilde{g}} \Omega^{-n} \mathcal{L}_{(m)} \right) \\ &= \Omega^{-n} \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta g_{\lambda\kappa}}{\delta \tilde{g}_{\mu\nu}} \frac{\delta}{\delta g_{\lambda\kappa}} \left(\sqrt{-g} \mathcal{L}_{(m)} \right) \\ &= \Omega^{-n-2} T_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (1.31)$$

Nesse sentido, $\tilde{T}^{\mu\nu}$ satisfaz a uma nova equação

$$\tilde{\nabla}^\mu \tilde{T}_{\mu\nu}^{(m)} = -\tilde{T} \tilde{\nabla}^\nu (\ln \Omega) \quad (1.32)$$

A equação de conservação (1.30) é invariante conforme para matéria cujo Tensor de Energia Momento é sem traço, como por exemplo radiação. Esta equação (1.32) descreve uma troca de energia e momento entre matéria e o fator conforme Ω , representando o fato de que no Referencial de Einstein matéria e o fator geométrico Ω estão acoplados diretamente.

Além disso, geodésicas de tipo tempo da métrica original $g_{\mu\nu}$ não são geodésicas da métrica reescalada $\tilde{g}_{\mu\nu}$. Partículas em queda livre no espaço-tempo original $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$ sofrerão uma força proporcional ao gradiente do fator geométrico $\nabla^\mu \Omega$ no espaço-tempo $(\mathcal{M}, \tilde{g}_{\mu\nu})$. Isto pode ser visto como uma *quinta força* atuando em todas partículas massivas.

Para ilustrar a discussão anterior, será realizado, em seguida, esta transformação na ação de Brans-Dicke no Referencial de Jordan (3.1), usando o seguinte fator conforme [15],

$$\Omega = \sqrt{G\phi} \quad (1.33)$$

A ação no Referencial de Einstein se reescreve como

$$S = \int d^4x \left\{ \sqrt{-g} \left[\frac{\tilde{R}}{16\pi G} - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\phi} \tilde{\nabla}_\beta \tilde{\phi} - U(\tilde{\phi}) \right] + \exp \left(-8 \sqrt{\frac{\pi G}{2\omega + 3}} \tilde{\phi} \right) \mathcal{L}^{(m)}[\tilde{g}] \right\} \quad (1.34)$$

com o campo escalar redefinido,

$$\tilde{\phi}(\phi) = \sqrt{\frac{2\omega + 3}{16\pi G}} \ln \left(\frac{\phi}{\phi_0} \right) \quad (1.35)$$

e $\phi > 0$, $\omega > -3/2$, $\tilde{\nabla}_\alpha$ a derivada covariante da métrica reescalada $\tilde{g}_{\alpha\beta}$. Adicionalmente a função

$$U(\tilde{\phi}) = V[\phi(\tilde{\phi})] \exp \left(-8 \sqrt{\frac{\pi G}{2\omega + 3}} \tilde{\phi} \right) = \frac{V(\phi)}{(G\phi)^2} \quad (1.36)$$

é o potencial no Referencial de Einstein. Normalmente, a restrição de $\omega > -3/2$ é atribuída à necessidade de garantir que seja possível realizar uma transformação conforme.

O escalar do Referencial de Jordan ϕ possui dimensões de G^{-1} , enquanto que o escalar do Referencial de Einstein $\tilde{\phi}$ de $G^{-1/2}$. No limite da Relatividade Geral em que $\phi \rightarrow \text{cte.}$ os Referenciais coincidem.

Através da inspeção da ação (1.34), despontaram na literatura argumentos de que, no Referencial de Einstein, a gravidade é descrita pela Relatividade Geral. Há, no entanto, duas importantes diferenças entre a Teoria de Brans-Dicke no Referencial de Einstein e a Teoria de Einstein. Primeiramente, o escalar $\tilde{\phi}$, funciona como uma fonte no lado direito das equações de movimento e, assim, as soluções de vácuo $\tilde{R}_{\mu\nu} = 0$ serão diferentes da do vácuo da Relatividade Geral. Isto é uma manifestação da constante gravitacional Efetiva $G_{eff} = 1/\phi$ no Referencial de Jordan da Teoria de Brans-Dicke. A transformação conforme muda o caráter do campo escalar, de variável gravitacional dinâmica no Referencial de Jordan, para matéria no Referencial de Einstein. Porém, caso o campo escalar ϕ seja constante, os dois vácuos se identificam, mesmo na presença de um potencial, o qual desempenha o papel de uma constante cosmológica.

A segunda diferença diz respeito ao acoplamento da matéria com o fator exponencial dependente do campo escalar $\tilde{\phi}$. Este fator indica um acoplamento não usual entre $\mathcal{L}_{(m)}$ e o campo escalar do Referencial de Einstein, já que não há um termo análogo na Relatividade Geral. Esta modificação implicará na mudança da equação da geodésica e no desvio geodético. Por esta razão, será desenvolvido a seguir a equação da geodésica para o caso de um fluido de poeira, $p = 0$.

Seu Tensor de Energia Momento se escreve como:

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = \tilde{\rho}^{(m)} \tilde{u}^\mu \tilde{u}^\nu \quad (1.37)$$

e a equação (1.32) com o fator (1.33),

$$\tilde{\nabla}_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2\tilde{\phi}} \tilde{T}^{(m)} \tilde{\nabla}^\nu \tilde{\phi} \quad (1.38)$$

ou em termos do campo escalar $\tilde{\phi}$,

$$\tilde{\nabla}_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} = -\sqrt{\frac{4\pi G}{2\omega + 3}} \tilde{T}^{(m)} \tilde{\nabla}^\nu \tilde{\phi} \quad (1.39)$$

abrindo as derivadas covariantes desta última equação ficamos com,

$$\tilde{u}_\mu \tilde{u}_\nu \tilde{\nabla}^\nu \tilde{\rho}^{(m)} + \tilde{\rho}^{(m)} \tilde{u}_\mu \tilde{\nabla}^\nu \tilde{u}_\nu + \rho^{(m)} \tilde{u}_\nu \tilde{\nabla}^\nu \tilde{u}_\mu = -\sqrt{\frac{4\pi G}{2\omega + 3}} \tilde{T}^{(m)} \tilde{\nabla}^\nu \tilde{\phi}. \quad (1.40)$$

Ao se usar um parâmetro afim λ para parametrizar as linhas de mundo da poeira, com vetores tangentes \tilde{u}_μ , a equação (1.40) se torna,

$$\tilde{u}_\mu \left[\frac{d\tilde{\rho}^{(m)}}{d\lambda} + \tilde{\rho}^{(m)} \tilde{\nabla}^\nu \tilde{u}_\nu \right] + \tilde{\rho}^{(m)} \left[\frac{d\tilde{u}_\nu}{d\lambda} - \sqrt{\frac{4\pi G}{2\omega + 3}} \tilde{\rho}^{(m)} \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\phi} \right] = 0 \quad (1.41)$$

que é equivalente a,

$$\frac{d\tilde{\rho}^{(m)}}{d\lambda} + \tilde{\rho}^{(m)} = 0 \quad (1.42)$$

e

$$\frac{d\tilde{u}^\mu}{d\lambda} = \sqrt{\frac{4\pi G}{2\omega + 3}} \tilde{\rho}^{(m)} \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\phi} \quad (1.43)$$

sendo esta última justamente a equação da geodésica para o fluido de poeira em questão [12, 13],

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = \sqrt{\frac{4\pi G}{2\omega + 3}} \tilde{\rho}^{(m)} \tilde{\nabla}^\mu \tilde{\phi}. \quad (1.44)$$

O termo do lado direito é chamado de *quinta força*, já que é proporcional ao gradi-

ente $\tilde{\nabla}\tilde{\phi}$, acoplando-se universalmente a partículas massivas. O Princípio de Equivalência Fraco - universalidade da queda livre - segundo o qual todos os corpos caem com a mesma aceleração num campo gravitacional, independentemente de sua massa e composição, é violado por esta correção na equação da geodésica, devido à dependência espaço-temporal do gradiente $\tilde{\nabla}\tilde{\phi}$. Também por causa deste acoplamento, Teorias Escalares Tensoriais no Referencial de Einstein parecem ser teorias não-métricas, já que na literatura é conhecido que a metricidade, ou não metricidade, de uma teoria é uma afirmação direta à violação ou não violação do Princípio de Equivalência em sua forma fraca. Nessa lógica, o caráter métrico de Teorias Extendidas de Gravitação, torna-se uma propriedade dependente da representação do referencial conforme trabalhado, ou seja, deve-se identificar se é o do Referencial de Jordan, que respeita o Princípio de Equivalência Fraco, ou do Referencial de Einstein, que viola o mesmo.

As equações de geodésicas nulas permanecem inalteradas, já que estas são invariantes sob transformações conformes, e assim não recebem o termo adicional da chamada quinta força.

1.4 Teorias de Brans-Dicke Generalizadas

A Teoria de Brans-Dicke original apresentada nas seções anteriores pode ser estendida com intuito de manifestar novas facetas que o campo escalar ϕ pode ter na interação gravitacional. Tais teorias são chamadas de Teorias de Brans-Dicke Generalizadas [19, 46, 54], e sua ação possui a seguinte forma:

$$S = \frac{1}{8\pi G} \int d^4x \left[\frac{f(\phi)R}{2} - \frac{\omega(\phi)}{2}(\nabla\phi)^2 - V(\phi) \right] + S^{(m)} \quad (1.45)$$

onde $S^{(m)} = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{(m)}$, novamente, não depende explicitamente do campo escalar ϕ e a ação se reduz para a de Brans-Dicke original se tomarmos,

$$f(\phi) = \phi \quad , \quad \omega(\phi) = \frac{\omega_{BD}}{\phi} \quad (1.46)$$

Nota-se que a diferença entre (1.45) e (1.2) está na função $\omega(\phi)$, que agora depende dos pontos do espaço-tempo. É usual encontrar na literatura formas diferentes para a ação (1.45):

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\phi R - \frac{\omega(\phi)}{\phi}(\nabla\phi)^2 - V(\phi) \right] + S^{(m)} \quad (1.47)$$

e,

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left[f(\phi)R - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - V(\phi) \right] + S^{(m)} \quad (1.48)$$

Estas duas ações, no entanto, não são independentes entre si e estão relacionadas através de uma redefinição de campo. Se definirmos

$$\varphi = f(\phi) \quad (1.49)$$

e

$$\omega = -\frac{1}{2} \frac{f(\phi)}{\left(\frac{df}{d\phi}\right)^2}, \quad U(\varphi) = V[f(\varphi)] \quad (1.50)$$

em (1.48), a mesma se torna agora a ação (1.47).

Derivando-se as equações de movimento da ação (1.47), ao variar a mesma com relação a métrica e ao campo ϕ , tem-se:

$$G_{\mu\nu} = \frac{\omega(\phi)}{\phi} \left[\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi \right] + \frac{1}{\phi} (\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\square) \phi - \frac{V(\phi)}{2\phi} + \frac{8\pi}{\phi} T_{\mu\nu}^{(m)} \quad (1.51)$$

$$\square\phi = -\frac{\phi}{2\omega(\phi)} \left(R - \frac{dV(\phi)}{d\phi} \right) - \frac{1}{2} (\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi) \left(\frac{1}{\omega(\phi)} \frac{d\omega(\phi)}{d\phi} - \frac{1}{\phi} \right). \quad (1.52)$$

Esta última equação pode ser reescrita ao tomarmos o traço de (1.51),

$$R = -\frac{8\pi}{G} T^{(m)} + \frac{\omega(\phi)}{\phi^2} + 3\frac{\square\phi}{\phi} + \frac{2V}{\phi} \quad (1.53)$$

e substituir em (1.52), ficando com

$$\square\phi = \frac{1}{2\omega(\phi) + 3} \left[8\pi G T^{(m)} - \frac{d\omega(\phi)}{d\phi} \nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi + 2V - \phi \frac{dV(\phi)}{d\phi} \right] \quad (1.54)$$

com matéria ordinária satisfazendo a equação de conservação (1.30). A diferença entre (1.54) e (1.9) são os termos de $d\omega(\phi)/d\phi$.

De forma análoga à seção anterior, será realizada, na sequência, uma transformação conforme na ação,

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{16\pi G} \left[\phi R - \frac{\omega(\phi)}{\phi} (\nabla\phi)^2 \right] - V(\phi) - \alpha_m \mathcal{L}^{(m)} \right\} \quad (1.55)$$

agora com uma pequena diferença: introduziu-se uma constante de acoplamento α_m com a lagrangiana de matéria. É interessante colocar que transformações conformes são utili-

zadas na literatura [4, 5, 23, 36] para gerar soluções exatas da Teoria Escalar Tensorial a partir de soluções conhecidas da Relatividade Geral.

Usando o mesmo fator conforme (1.33), o campo escalar do Referencial de Einstein $\tilde{\phi}$ se reescreve como,

$$d\tilde{\phi} = \sqrt{\frac{2\omega(\phi) + 3}{16\pi G}} \frac{d\phi}{\phi} \quad (1.56)$$

e a ação no Referencial de Einstein se torna,

$$S = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{\tilde{R}}{16\pi G} - \frac{1}{2} (\tilde{\nabla}\tilde{\phi})^2 - U(\tilde{\phi}) + \tilde{\alpha}_m(\tilde{\phi}) \mathcal{L}^{(m)} \right] \quad (1.57)$$

com potencial escalar,

$$U(\tilde{\phi}) = \frac{V[\phi(\tilde{\phi})]}{(G\tilde{\phi})^2} \quad (1.58)$$

e acoplamento,

$$\tilde{\alpha}_m = \frac{\alpha_m}{(G\tilde{\phi})^2}. \quad (1.59)$$

Da mesma forma que na seção anterior, a ação (1.57) pode ser vista como a ação de Einstein-Hilbert da Relatividade Geral, com um termo cinético do campo escalar canônico, que possui densidade de energia cinética positiva definida, mas com uma diferença explícita na Lagrangiana de matéria que é agora multiplicada pelo fator, $\Omega^{-4} = (G\tilde{\phi})^{-2}$.

Quanto à ação (1.45), é possível mapeá-la num Referencial de Einstein, bastando tomar

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = f(\phi)g_{\mu\nu} \quad (1.60)$$

e,

$$d\tilde{\phi} = \frac{d\phi}{f(\phi)} \sqrt{f(\phi) + \frac{3}{2} \left(\frac{df}{d\phi} \right)^2} \quad (1.61)$$

produzindo, dessa maneira, um novo potencial no Referencial de Einstein,

$$U(\tilde{\phi}) = V[\phi(\tilde{\phi})] \exp \left[-8 \sqrt{\frac{\pi G}{2\omega + 3}} \tilde{\phi} \right] = \frac{V[\phi(\tilde{\phi})]}{f(\phi)} \quad (1.62)$$

1.5 PPN

Anteriormente ao fechamento do presente capítulo, cabe dar destaque à discussão que trata da Parametrização Pós Newtoniana (PPN) [57] das teorias escalares tensoriais. Sendo válido lembrar alguns pontos desta aproximação.

A ideia principal do formalismo PPN é construir um método geral que inclua as diferentes teorias gravitacionais e que possua parâmetros que possam ser vinculados por observações de uma forma eficiente, diminuindo assim o trabalho necessário para se discutir a viabilidade e a aplicabilidade destas teorias. Os dados observacionais podem, portanto, ser aplicados de forma direta sem que os aspectos teóricos precisem ser desenvolvidos com exaustão. De maneira análoga, novas teorias podem ser propostas, já com os seus parâmetros calculados e comparados com os da literatura.

1.5.1 O Formalismo PPN

O formalismo PPN é um tratamento perturbativo da gravitação de campo fraco, e que requer um parâmetro a partir do qual seja possível fazer a expansão. Para este propósito, uma ordem de “pequenezas” é definida como:

$$U \sim v^2 \sim \frac{P}{\rho} \sim \Pi \sim \mathcal{O}(2) \quad (1.63)$$

onde, U é o Potencial Newtoniano, v é 3-velocidade do fluido, P é a pressão, ρ é a densidade e Π é a razão entre densidade de energia e massa de repouso do fluido. Derivadas temporais também são consideradas tendo uma ordem de pequenezas com relação às derivadas espaciais:

$$\left| \frac{\partial/\partial t}{\partial/\partial x} \right| \sim \mathcal{O}(1) \quad (1.64)$$

Aqui está implícito que tomou-se $c = 1$. O PPN agora é tratado como uma expansão nesta ordem de pequenezas. Para recuperarmos o limite Newtoniano de uma teoria métrica da gravitação, para partículas de tipo tempo acopladas apenas à métrica, é necessário apenas que g_{00} seja de ordem $\mathcal{O}(2)$. No entanto o limite Pós-Newtoniano requer:

$$\begin{aligned} g_{00} &\sim \mathcal{O}(4) \\ g_{0i} &\sim \mathcal{O}(3) \\ g_{ij} &\sim \mathcal{O}(2) \end{aligned} \quad (1.65)$$

O passo seguinte consiste na identificação dos campos dinâmicos da teoria $g_{\mu\nu}$, ϕ , campos de matéria, e outros, e em os expandir perturbativamente:

$$\begin{aligned} g_{00} &= -1 + h_{00}^{(2)} + h_{00}^{(4)} + \mathcal{O}(6) \\ g_{0i} &= h_{0i}^{(3)} + \mathcal{O}(5) \\ g_{ij} &= \delta_{ij} + h_{ij}^{(2)} + \mathcal{O}(4) \\ \phi &= \phi_0 + \phi^{(2)} + \phi^{(4)} + \mathcal{O}(6) \end{aligned} \quad (1.66)$$

onde ϕ_0 é o valor de ϕ constante no fundo. A mesma lógica se aplicaria a uma teoria que possuísse campos vetoriais e tensoriais extras. O Tensor de Energia Momento no PPN possui a forma de um fluido perfeito:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + \rho\Pi + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu} \quad (1.67)$$

As equações de campo podem, então, ser resolvidas, ordem a ordem, ao se tomar esta expansão do Tensor de Energia-Momento e substituir as expressões perturbativas para os campos dinâmicos. Uma vez escolhido um calibre, ainda há uma liberdade de calibre que permite transformar a métrica na métrica padrão Pós-Newtoniana, a qual os termos espaciais são diagonais e os termos com derivadas temporais são removidos. A solução encontrada então é comparada com a métrica padrão do PPN:

$$\begin{aligned} g_{00} = & -1 + 2U - 2\beta U^2 - 2\xi\Phi_W + (2\gamma + 2 + \alpha_3 + \zeta_1 - 2\xi)\Phi_1 + 2(3\gamma - 2\beta + 1 + \zeta_2 + \xi)\Phi_2 \\ & + 2(1 + \zeta_3)\Phi_3 + 2(3\gamma + 3\zeta_4 - 2\xi)\Phi_4 - (\zeta_1 - 2\xi)A - (\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)\omega^2 U \\ & \alpha_2\omega^i\omega^j U_{ij} + (2\alpha_3 - \alpha_1)\omega^i V_i + \mathcal{O}(3) \end{aligned} \quad (1.68)$$

$$g_{0i} = -\frac{1}{2}(4\gamma + 3\alpha_1 - \alpha_3 + \zeta_1 - 2\xi)V_i = \frac{1}{2}(1 + \alpha_2 - \beta_1 - 2\xi)W_i \quad (1.69)$$

$$g_{ij} = (1 + 2\gamma U)\delta_{ij} \quad (1.70)$$

comparando a solução encontrada com as funções acima, pode se ler diretamente os valores dos parâmetros PPN da teoria. Estes parâmetros representam diferentes propriedades físicas da teoria, e estão resumidos na tabela abaixo.

Parâmetro	Significado com relação a RG	Valor Assumido na RG
γ	Quanto de curvatura espacial é produzida por unidade de massa/repouso	1
β	Quanto de “não-linearidade” na lei de superposição para a gravidade	1
ξ	Efeitos de localização preferencial	0
α_1	Efeitos de referencial privilegiado	0
α_2	Efeitos de referencial privilegiado	0
α_3	Efeitos de referencial privilegiado	0
α_3	Violação de energia momento	0
ζ_1	Violação de energia momento	0
ζ_2	Violação de energia momento	0
ζ_3	Violação de energia momento	0
ζ_4	Violação de energia momento	0

Os potenciais que aparecem nas equações (1.68, 1.69, 1.70) são inspirados no Potencial

Newtoniano e possuem a forma:

$$F(x) = G_N \int d^3y \frac{\rho(y)f}{|x-y|} \quad (1.71)$$

onde G_N é o valor da Constante de Newton atual e as correspondências $F \mapsto f$ são dadas por:

$$\begin{aligned} U &\mapsto 1 & \Phi_1 &\mapsto v_i v_i & \Phi_2 &\mapsto U & \Phi_3 &\mapsto \Pi & \Phi_4 &\mapsto \frac{p}{\rho} \\ \Phi_W &\mapsto \int d^3z \rho(z) \frac{(x_j - y_j)}{|x - y|^2} \left(\frac{(y_j - z_j)}{|x - z|} - \frac{(x_j - z_j)}{|y - z|} \right) & A &\mapsto \frac{(v_i(x_i - y_i))^2}{|x - y|^2} \\ V_i &\mapsto v^i & W_i &\mapsto \frac{v_j(x^j - y^j)(x_i - y_i)}{|x - y|^2} \end{aligned} \quad (1.72)$$

Os campos de matéria carregam as seguintes definições:

- ρ : Densidade de matéria medida por um observador em queda livre comóvel.
- v^i : 3-velocidade da matéria
- ω^i : Velocidade coordenada do sistema de coordenadas do PPN com relação ao sistema de referência em repouso do universo.
- p : Pressão da matéria medida por um observador em queda livre comóvel.
- Π : Energia interna por unidade de massa.

com o Tensor de Energia Momento escrito na sua forma PPN,

$$\begin{aligned} T^{00} &= \rho(1 + \Pi + v^2 + 2U) \\ T^{0i} &= \rho v^i \left(1 + \Pi + v^2 + 2U + \frac{p}{\rho} \right) \\ T^{ij} &= \rho v^i v^j \left(1 + \Pi + v^2 + 2U + \frac{p}{\rho} \right) + p \delta^{ij} (1 - 2\gamma U) \end{aligned} \quad (1.73)$$

Os potenciais U , $\Phi_{1,2,3,4}$ e V_i claramente satisfazem a Equação de Poisson:

$$\nabla^2 F = -4\pi G_N \rho f \quad (1.74)$$

Para definir o calibre PPN, mencionado anteriormente, define-se um “superpotencial”

$$\chi = -G_N \int d^3y \rho |x - y|, \quad (1.75)$$

que satisfaz a

$$\nabla^2 \chi = -2U \quad (1.76)$$

Tal “superpotencial” é associado aos potenciais V_i e W_i através da relação,

$$\chi_{,i0} = V_i - W_i \quad (1.77)$$

que é uma consequência da equação de conservação do fluido,

$$\rho_0 + (\rho v^i)_{,i} = 0 \quad (1.78)$$

e, dessa forma, o Calibre PPN Padrão é definido como aquele em que, no Referencial de Coordenadas Pós-Newtoniano g_{00} e g_{ij} , não possui dependência de $\chi_{,00}$ e $\chi_{,ij}$ respectivamente. Esta fixação elimina a ambiguidade da métrica padrão até a ordem necessária da expansão.

1.6 Formalismo PPN de Teorias Escalares Tensoriais

Com o intuito de concluir o capítulo, serão calculados os parâmetros PPN para a ação (1.45) [57]. Foram selecionadas coordenadas tais que a métrica $g_{\mu\nu}$ seja assintoticamente a métrica de Minkowski, e que ϕ assumo o valor ϕ_0 assintoticamente. Definiu-se então,

$$\begin{aligned} \omega &= \omega(\phi_0) \quad \omega' = \left. \frac{d\omega}{d\phi} \right|_{\phi_0} \\ \Lambda &= \omega'(3 + 2\omega)^{-2}(4 + 2\omega)^{-1} \end{aligned} \quad (1.79)$$

Dando continuidade ao procedimento, foi encontrada para a Métrica Pós-Newtoniana as seguintes identificações,

$$\begin{aligned} g_{00} &= -1 + 2U - 2(1 - \Lambda)U^2 + 4 \left(\frac{3 + 2\omega}{4 + 2\omega} \right) \Phi_1 \\ &+ 4 \left(\frac{1 + 2\omega}{4 + 2\omega} - \Lambda \right) \Phi_2 + 2\Phi_3 + 6 \left(\frac{1 + \omega}{2 + \omega} \right) \Phi_4 \\ g_{0i} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{10 + 7\omega}{2 + \omega} \right) V_i - \frac{1}{2} W_i \\ g_{ij} &= \left[1 + 2 \left(\frac{1 + \omega}{2 + \omega} \right) U \right] \delta_{ij} \end{aligned} \quad (1.80)$$

Assim, os parâmetros PPN podem ser lidos diretamente a partir da equação (1.80), sendo eles

$$\gamma = \frac{1 + \omega(\phi)}{2 + \omega(\phi)}, \quad \beta = 1 + \Lambda = 1 + \frac{d\omega/d\phi}{(4\omega(\phi))(2 + 3\omega(\phi))^2} \quad (1.81)$$

com os outros parâmetros iguais a 0.

São cabíveis as seguintes pontuações no que tange as Teorias Escalares Tensoriais:

- Notamos que estas teorias possuem $(\alpha_i = 0, \zeta_i = 0)$ e não apresentam efeitos de

referenciais preferidos ($\alpha_i = 0$).

- O limite da Relatividade Geral nas Teorias Escalares Tensoriais, tanto a Brans-Dicke padrão, quanto a Brans-Dicke Extendida, é dado para grandes valores de ω .

Portanto, quanto maior ω , mais próxima a teoria está da Relatividade Geral [56]. O limite experimental mais rigoroso de ω foi medido pela sonda Cassini em 2004 [6], $\omega > 40000$. Desse modo, na literatura, é comum tratar o limite $\omega \rightarrow \infty$ em que a Teoria de Brans-Dicke se torna indistinguível da Relatividade Geral. No entanto, há exceções como [42, 43]. Nestes casos, esse comportamento parece estar associado a situações em que o traço do Tensor de Energia Momento da solução é nulo.

Capítulo 2

Colapso Gravitacional na Relatividade Geral

2.1 Introdução

Neste capítulo, pretende-se analisar o colapso gravitacional na Relatividade Geral. No capítulo anterior foi apresentada a Teoria de Brans-Dicke Extendida, dado que esta teoria apresenta um limite em que ela se torna indistinguível da Relatividade Geral, no capítulo seguinte a este, apresentaremos um modelo no qual será imposta a Relatividade Geral como condição inicial. Dessa forma, no presente capítulo, é válido descrever o colapso gravitacional na teoria de Einstein, já que as condições de colagem entre espaços-tempos apresentados agora, serão as mesmas para o nosso modelo.

Quando uma estrela massiva o suficiente (com mais que algumas massas solares) exaure seu combustível nuclear interno, acredita-se que ela entre num estágio de colapso gravitacional sem fim, não possuindo um estado final de equilíbrio [29]. De acordo com a Relatividade Geral, a estrela tem seu raio diminuído progressivamente, enquanto que sua densidade aumenta cada vez mais. O resultado final deste processo é uma das questões centrais para a astrofísica e para teorias gravitacionais.

O resfriamento destas estrelas não é capaz de alcançar uma configuração final de equilíbrio, como por exemplo uma Anã Branca ou uma Estrela de Neutrons. Dessa forma, o tratamento do colapso gravitacional destes corpos astrofísicos apresenta elevado nível de complexidade e sua evolução temporal é dada pelas Equações de Einstein. Neste cenário a superfície da estrela é a interface de colagem entre dois espaços-tempos, um exterior à estrela e outro interior. Como dito anteriormente, o colapso deve prosseguir até que se forme uma singularidade espaço-temporal. Trata-se de uma região em que os parâmetros físicos, como densidade de energia e curvatura do espaço-tempo, tornam-se infinitos. Ao

aproximar-se desta região, é de se esperar que efeitos de gravitação quântica [7, 21] predominem na dinâmica, bem como é possível que estas descrições para os efeitos quânticos resolvam o problema da singularidade. No entanto, enquanto não se tem uma teoria quântica da gravitação, o estudo de singularidades na teoria clássica continua.

As Equações de Einstein, por si só, indicam apenas as relações entre geometria e a distribuição de matéria da nuvem colapsante, sem evidenciar qualquer afirmação sobre o tipo de matéria com a qual se está lidando. De um ponto de vista físico, nem toda matéria deve ser permitida, e algumas restrições sobre os possíveis conteúdos devem ser feitas. Tipicamente, tais restrições vêm sob a forma de condições de energia, que garantem a positividade da densidade de matéria-energia e a soma da pressão exercida pelo fluido com a sua densidade de energia. Desta forma, a matéria deve satisfazer às condições:

- Condição de Energia Fraca:

$$\rho = T_{\alpha\beta}V^\alpha V^\beta \geq 0 \quad (2.1)$$

para qualquer vetor V^α tipo-tempo.

Em palavras, esta condição requer que a densidade de energia medida por um observador tipo-tempo local seja sempre não-negativa.

- Condição de Energia Dominante: A quantidade

$$-T_{\beta}^{\alpha}V^{\beta} \quad (2.2)$$

é um campo vetorial direcionado para o futuro de tipo-tempo ou nulo para qualquer vetor V^α de tipo-tempo direcionado para o futuro.

Fisicamente esta condição impõe que a matéria deve fluir ao longo de linhas de mundo causais, tipo-tempo ou nula, logo, para qualquer observador tipo-tempo o fluxo de energia local é não-espacial, $\rho \geq |p_i|$.

Além de restrições sobre a matéria, que é descrita pelo Tensor de Energia-Momento, também é preciso considerar certas restrições sob a estrutura causal do espaço-tempo. Dentro do escopo da Relatividade Geral, bem como nas condições de energia, há condições de causalidade que dizem respeito ao estudo de variedades de espaços-tempos com assinaturas Lorentzianas [24], como é o caso da Relatividade Geral. As condições causais impostas mais comuns no estudo do colapso gravitacional são,

- Cronologia: Na variedade considerada não existem curvas de tipo-tempo fechadas.
- Causalidade Forte: Dado um ponto $p \in \mathcal{M}$, existe uma vizinhança U em p , tal que não existe uma curva de tipo-tempo que passe por p mais de uma vez.

Uma última consideração a ser feita acerca do colapso gravitacional, diz respeito à descrição geométrica de superfícies que adentram a região que tem por fim a singularidade. Estas superfícies são chamadas de superfícies de aprisionamento, tratando-se de superfícies bidimensionais que se formam dentro do horizonte de eventos. Estas estruturas são tais que as duas famílias de geodésicas nulas, as entrantes e saíntes, emitidas nesta região convergem, de modo que nenhum raio de luz é capaz de sair da região interior da formada pelo horizonte de eventos.

É possível, a partir deste ponto, prosseguir para a discussão sobre a evolução e a dinâmica de dois colapsos gravitacionais com fluidos perfeitos diferentes, poeira e radiação.

Objetiva-se, neste capítulo, descrever como se dá o colapso gravitacional na Relatividade Geral. Dado que esta dissertação trabalhará o colapso gravitacional numa Teoria de Brans-Dicke Extendida, que se inicia na teoria de Einstein, este capítulo possui caráter introdutório em relação às análises do capítulo que segue.

2.2 Colapso Gravitacional de Poeira

Para que se compreenda o estado final de uma estrela massiva, é necessário traçar sua evolução temporal, que é dada pelas Equações de Einstein. A estrela encolhe devido a sua própria força gravitacional, que, ao mesmo tempo em que o seu raio é reduzido, passa a dominar sob as forças forte e fraca que tipicamente mantém a estrela em equilíbrio.

Este problema foi inicialmente tratado em 1939 por J. R. Oppenheimer e seu aluno Hartland Snyder (O-S) [38], que objetivando reduzir a complexidade da situação, consideraram um fluido de poeira homogêneo e sem pressão em toda a estrela. No entanto, as Equações de Einstein não possuem uma solução fechada capaz de descrever todo o processo do colapso. Nesse sentido, conforme mencionado anteriormente, considera-se a superfície da estrela como superfície de colagem para dois espaços-tempos distintos, ambos resultados das Equações de Einstein, e que devem satisfazer a determinadas condições de contorno para se tornarem uma solução completa que descreverá o colapso. No artigo original de O-S, essa junção de métricas é feita de forma diferente da tratada nesta dissertação. Pelo Teorema de Birkhoff, sabe-se que o espaço-tempo fora de uma distribuição de matéria homogênea e sem pressão, é necessariamente a solução de Schwarzschild, enquanto que o interior da estrela é dado pela métrica de FLRW para o fluido em questão. Desta forma, O-S reescreveram ambas as métricas utilizando coordenadas gaussianas, de modo a garantir que as condições de contorno sejam satisfeitas. Nesta dissertação, por outro lado, é utilizado um método mais geral de colagem, que são as condições de Israel-

Darmois [9, 14, 27, 28, 35, 37], para encontrarmos as equações de movimento que dão a evolução temporal do colapso.

2.2.1 Condições de Junção de Israel-Darmois

Nesta seção serão expostas as condições de junção de Israel-Darmois. Tal técnica de colagem de regiões de espaços-tempos diferentes fornece os meios para construção de uma solução global para as Equações de Einstein, que descrevem o colapso gravitacional de uma estrela com diferentes fluidos. Para melhor compreensão deste procedimento é interessante destacar algumas definições de geometria diferencial, e, com essa finalidade, será feito um breve interlúdio matemático.

Interlúdio Matemático: Descrição de Hipersuperfícies

Numa variedade de um espaço-tempo, uma hipersuperfície é uma sub-variedade tri-dimENSIONAL que pode ser de tipo-tempo, tipo-espaço ou nula. Uma hipersuperfície em particular Σ , pode ser selecionada simplesmente ao se restringir as coordenadas a determinada condição:

$$\Phi(x^\alpha) = 0 \quad (2.3)$$

ou ao se determinar uma parametrização genérica para as coordenadas da forma,

$$x^\alpha = x^\alpha(y^a) \quad (2.4)$$

onde $y^a (a = 1, 2, 3)$ representa as coordenadas intrínsecas da sub-variedade em questão. Um exemplo simples é o caso da 2-esfera num espaço tri-dimensional plano, que pode ser descrita como $\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$, com R sendo o raio da 2-esfera, ou como $x = R \cos \theta \sin \varphi$, $y = R \sin \theta \sin \varphi$, $z = R \cos \theta$. Nota-se que as relações $x^\alpha(y^a)$ descrevem curvas restritas a Σ .

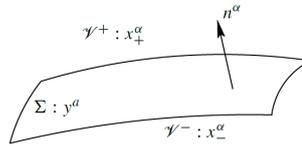


Figura 2.1: Duas porções de um espaço-tempo juntadas numa fronteira comum.

A partir de (2.3), é possível definir um covetor, $\Phi_{,\alpha}$ que será normal à hipersuperfície. Um vetor normal unitário, n_α , pode ser definido caso a sub-variedade não seja nula,

$$n_\alpha n^\alpha = \epsilon = \begin{cases} -1, & \text{se } \Sigma \text{ é tipo-espaço} \\ 1, & \text{se } \Sigma \text{ é tipo-tempo} \end{cases} \quad (2.5)$$

também requeremos que n^α aponte na direção em que Φ aumente: $n^\alpha \Phi_{,\alpha} > 0$. Portanto,

$$n_\alpha = \frac{\epsilon \Phi_{,\alpha}}{|g^{\mu\nu} \Phi_{,\mu} \Phi_{,\nu}|^{1/2}} \quad (2.6)$$

A métrica intrínseca a Σ é obtida ao se restringir o elemento de linha a deslocamentos confinados à hipersuperfície. Lembrando da equação (2.4) tem-se os vetores

$$e_a^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a}, \quad (2.7)$$

que são tangentes às curvas contidas em Σ . Para deslocamentos em Σ , tem-se

$$\begin{aligned} ds_\Sigma^2 &= g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \\ &= g_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} dy^a \right) \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial y^b} dy^b \right) \\ &= h_{ab} dy^a dy^b \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde $h_{ab} = e_a^\alpha e_b^\beta g_{\alpha\beta}$ é a métrica induzida, ou primeira forma fundamental, da hipersuperfície. Tal quantidade geométrica é um escalar com respeito a transformações do tipo $x^\alpha \rightarrow x^{\alpha'}$ das coordenadas do espaço-tempo, mas se comporta como um tensor para transformações $y^a \rightarrow y^{a'}$ das coordenadas da hipersuperfície.

Uma vez definida a primeira forma fundamental, será introduzida, a partir de agora, a segunda forma fundamental de uma sub-variedade, ou a curvatura extrínseca. A rota para que se compreenda a curvatura extrínseca é esclarecida mais facilmente ao se estudar, anteriormente, a noção de curvatura intrínseca numa sub-variedade. A métrica induzida é uma quantidade intrínseca a Σ , e, dessa maneira, pode-se definir uma derivada covariante única, D_a , associada a ela tal que $D_a h_{bc} = 0$. Esta derivada covariante pode ser escrita em termos da derivada covariante espaço temporal, ∇_α como:

$$D_c T_{b_1 \dots b_l}^{a_1 \dots a_k} = h_{\alpha_1}^{a_1} \dots h_{\alpha_k}^{a_k} h_{b_1}^{\beta_1} \dots h_{b_l}^{\beta_l} h_c^\mu \nabla_\mu T_{\beta_1 \dots \beta_l}^{\alpha_1 \dots \alpha_k}. \quad (2.9)$$

Pode se notar que (2.9) satisfaz todos os requerimentos de unicidade da derivada covariante: segue de sua definição que é linear, satisfaz a regra de Leibniz e preserva a métrica induzida. Esta última pode, inclusive ser reescrita como a métrica espaço-temporal e os seus vetores unitários

$$h_a^\alpha h_b^\beta h_c^\mu \nabla_\mu h_{\alpha\beta} = h_a^\alpha h_b^\beta h_c^\mu \nabla_\mu (g_{\alpha\beta} + n_\alpha n_\beta) = 0, \quad (2.10)$$

já que $\nabla_\mu g_{\alpha\beta} = 0$ e, no segundo termo, ao menos um n_α será contraído com $h^{\alpha\beta}$ antes de se usar a regra do produto.

As quantidades

$$D_b A_a = e_a^\alpha e_b^\beta \nabla_\beta A_a \quad (2.11)$$

são as componentes tangenciais do vetor $\nabla_\beta A^\alpha e_b^\beta$. A questão a ser feita é se este vetor possui também uma componente normal. Para respondê-la, reescreve-se o vetor como:

$$\begin{aligned} \nabla_\beta A^\alpha e_b^\beta &= g_\mu^\alpha \nabla_\beta A^\mu e_b^\beta \\ &= (n^\alpha n_\mu + h^{am} e_a^\alpha e_{m\mu}) \nabla_\beta A^\mu e_b^\beta = \\ &= (n_\mu \nabla_\beta A^\mu e_b^\beta) n^\alpha + h^{am} (\nabla_\beta A_\mu e_m^\mu e_b^\beta) e_a^\alpha \end{aligned} \quad (2.12)$$

e vemos que enquanto a segunda parte é tangente à hipersuperfície, o primeiro termo é normal a ela. É possível usar (2.11) e o fato que A^μ é ortogonal a n^μ :

$$\begin{aligned} \nabla_\beta A^\alpha e_b^\beta &= -((\nabla_\beta n_\mu A^\mu e_b^\beta) n^\alpha) + h^{am} D_b A_m e_a^\alpha \\ &= D_b A^a - ((\nabla_\beta n_\mu A^\mu e_b^\beta) n^\alpha) \end{aligned} \quad (2.13)$$

em seguida introduz-se o tensor

$$K_{ab} = \nabla_\beta n_\alpha e_b^\beta e_a^\alpha \quad (2.14)$$

chamado de Curvatura Extrínseca, ou segunda forma fundamental da hipersuperfície Σ , e assim tem-se

$$\nabla_\beta A^\alpha e_b^\beta = D_b A^a e_a^\alpha - A^a K_{ab} n^\alpha. \quad (2.15)$$

De posse do material apresentado acima sobre hipersuperfícies num espaço-tempo, serão explicitadas as Condições de Junção de Israel-Darmois.

Uma hipersuperfície Σ particiona o espaço-tempo em duas regiões, \mathcal{M}^- e \mathcal{M}^+ , como na Figura 2.1. Em \mathcal{M}^+ a métrica $g_{\alpha\beta}^+$ é expressa em termos de um sistema de coordenadas x_+^α , e em \mathcal{M}^- a métrica $g_{\alpha\beta}^-$ em termos de x_-^α . Considera-se, também, que Σ seja uma hipersuperfície de tipo-espaço, sendo que o caso de tipo-tempo é análogo a este, enquanto que o de tipo nulo requer outras definições e discussões mais aprofundadas sobre hipersuperfícies, o que se afastaria do escopo deste trabalho.

A fim de dar continuidade à análise, assume-se que um sistema de coordenadas y^a possa ser definido nos dois lados da hipersuperfície, e determina-se que n^α , o vetor normal unitário de Σ , aponte de \mathcal{M}^- para \mathcal{M}^+ . Supõe-se que um sistema de coordenadas x^α , distinto de x_\pm^α , possa ser introduzido nos dois lados desta hipersuperfície. Este sistema de coordenadas se sobrepõe ao sistema x_+^α numa região aberta de \mathcal{M}^+ que contém Σ e, da mesma forma, sobrepõe-se a x_-^α numa região aberta de \mathcal{M}^- que contém Σ .

O passo seguinte a ser dado, é imaginar que Σ seja perfurada por uma congruência de geodésicas que a intersectam de forma perpendicular. Toma-se ℓ como parâmetro de distância própria(ou tempo próprio para o caso de Σ ser de tipo-tempo) e ajusta-se a parametrização de forma a ter-se $\ell = 0$ quando as geodésicas cruzam a hipersuperfície; a convenção do sentido de n^α faz com que ℓ seja positivo em \mathcal{M}^+ e negativo em \mathcal{M}^- . Pode-se pensar em ℓ como sendo este um campo escalar, e, desse modo, um ponto P identificado pelas coordenadas x^α relaciona-se a Σ por um membro desta congruência de geodésicas e $\ell(x^\alpha)$ é a distância própria(ou tempo-próprio) da hipersuperfície para P ao longo desta geodésica. Esta construção é suficiente para se descrever um deslocamento para longe de Σ ao longo da geodésica, como $dx^\alpha = n^\alpha d\ell$, e que

$$n_\alpha = \epsilon \partial_\alpha \ell \quad (2.16)$$

onde, $n_\alpha n^\alpha = \epsilon$.

A partir de agora, vamos usar a distribuição de Heaviside, $\Theta(\ell)$, com

$$\Theta(\ell) = \begin{cases} +1, & \text{se } \ell > 0 \\ 0, & \text{se } \ell < 0 \\ \text{indeterminada,} & \text{se } \ell = 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

A distribuição de Heaviside possui as seguintes propriedades:

$$\Theta^2(\ell) = \Theta(\ell), \quad \Theta(\ell)\Theta(-\ell) = 0, \quad \frac{d\Theta}{d\ell} = \delta(\ell) \quad (2.18)$$

onde $\delta(\ell)$ é a Delta de Dirac. Devido à forma do deslocamento, $dx^\alpha = n^\alpha d\ell$, e pela continuidade de x^α e ℓ ao cruzar Σ , enxerga-se a relação

$$n_+^\alpha \Big|_\Sigma - n_-^\alpha \Big|_\Sigma = 0 \quad (2.19)$$

enquanto que, já que y^a é definido em toda hipersuperfície,

$$e_a^+ \Big|_\Sigma - e_a^- \Big|_\Sigma = 0. \quad (2.20)$$

Desse momento em diante será introduzida a notação,

$$[A^\alpha] = A^\alpha(\mathcal{M}^+) \Big|_\Sigma - A^\alpha(\mathcal{M}^-) \Big|_\Sigma = A_+^\alpha \Big|_\Sigma - A_-^\alpha \Big|_\Sigma \quad (2.21)$$

com a finalidade de simplificar os cálculos.

Primeira Condição de Junção

Expressa-se a métrica $g_{\alpha\beta}$ em coordenadas x^α como

$$g_{\alpha\beta} = \Theta(\ell)g_{\alpha\beta}^+ + \Theta(-\ell)g_{\alpha\beta}^- \quad (2.22)$$

onde $g_{\alpha\beta}^\pm$ é a métrica em \mathcal{M}^\pm escrita nas coordenadas x^α . Pretendendo-se averiguar se a métrica (2.22) é uma solução das Equações de Einstein, é necessário verificar se objetos construídos a partir dela, como o tensor de Riemman, são propriamente definidos a partir da mesma. Diferenciando (2.22), tem-se

$$\partial_\gamma g_{\alpha\beta} = \Theta(\ell)\partial_\gamma g_{\alpha\beta}^+ + \Theta(-\ell)\partial_\gamma g_{\alpha\beta}^- + \epsilon\delta(\ell)[g_{\alpha\beta}]n_\gamma \quad (2.23)$$

onde foi usado (2.16). A partir de (2.23), calcula-se o Símbolo de Christoffel, e, em função deste, o Tensor de Riemman. O último termo de (2.23), entretanto, é singular, já que ele é proporcional a $\delta(\ell)$. Caso se permitisse que este termo fosse mantido na equação, haveria problemas nesta teoria. Para que este termo desapareça, impõe-se $[g_{\alpha\beta}] = 0$, que só é válido para as coordenadas x^α . Por outro lado, usando (2.20) consegue-se escrever esta afirmação de forma covariante, ou seja, independente do sistema de coordenadas

$$[g_{\alpha\beta}]e_a^\alpha e_b^\beta = [g_{\alpha\beta}e_a^\alpha e_b^\beta] = 0. \quad (2.24)$$

O que segue a partir deste fato é a primeira condição de junção de Israel-Darmois, isto é

$$[h_{ab}] = 0 \quad (2.25)$$

a métrica induzida em ambos os lados de Σ deve ser a mesma. Esta condição independe do sistema de coordenadas, e leva à percepção de que queremos uma geometria global bem definida mesmo seccionada por uma hipersuperfície.

Dando sequência, calcula-se neste momento, explicitamente, o Tensor de Riemman. Partindo do Símbolo de Christoffel

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \Theta(\ell)\Gamma_{\beta\gamma}^{+\alpha} + \Theta(-\ell)\Gamma_{\beta\gamma}^{-\alpha} \quad (2.26)$$

tomamos sua derivada

$$\partial_\delta \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \Theta(\ell)\partial_\delta \Gamma_{\beta\gamma}^{+\alpha} + \Theta(-\ell)\partial_\delta \Gamma_{\beta\gamma}^{-\alpha} + \delta(\ell)[\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha]n_\delta \quad (2.27)$$

e dessa maneira tem-se

$$R_{\beta\gamma\delta}^\alpha = \Theta(\ell)R_{\beta\gamma\delta}^{+\alpha} + \Theta(-\ell)R_{\beta\gamma\delta}^{-\alpha} + \delta(\ell)[A_{\beta\gamma\delta}^\alpha] \quad (2.28)$$

onde

$$A_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} = \epsilon \left([\Gamma_{\beta\delta}^{\alpha}] n_{\gamma} - [\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}] n_{\delta} \right). \quad (2.29)$$

Observa-se que o Tensor de Riemman é propriamente definido a menos do termo multiplicado por $\delta(\ell)$, o que faz com que se tenha uma singularidade de curvatura em Σ . É este termo que a segunda condição de junção deve ser capaz de eliminar.

Segunda Condição de Junção

Mesmo construído de forma diferente do Tensor de Riemman, $A_{\beta\gamma\delta}^{\alpha}$ é de fato um tensor, uma vez que envolve a diferença entre dois Símbolos de Christoffel. Busca-se, agora, a forma explícita deste tensor.

Tendo em vista que a métrica é contínua através de Σ nas coordenadas x^{α} , suas derivadas tangenciais também serão. Isso significa que se $\partial_{\gamma} g_{\alpha\beta}$ é descontínua, a sua parte normal à Σ também a é, existindo, portanto um tensor $\kappa_{\alpha\beta}$ tal que

$$[\partial_{\gamma} g_{\alpha\beta}] = \kappa_{\alpha\beta} n_{\gamma}. \quad (2.30)$$

Esta equação permite calcular $[\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}]$

$$[\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}] = \frac{1}{2} \left(\kappa_{\beta}^{\alpha} n_{\gamma} + \kappa_{\gamma}^{\alpha} n_{\beta} - \kappa_{\beta\gamma} n^{\alpha} \right) \quad (2.31)$$

que, em contrapartida, resulta em

$$A_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} = \frac{\epsilon}{2} \left(\kappa_{\delta}^{\alpha} n_{\beta} n_{\gamma} - \kappa_{\gamma}^{\alpha} n_{\beta} n_{\delta} - \kappa_{\beta\delta} n^{\alpha} n_{\gamma} + \kappa_{\beta\gamma} n^{\alpha} n_{\delta} \right). \quad (2.32)$$

Esta é a parte da distribuição Delta do Tensor de Riemman, a partir da qual contrai seus índices de forma a obter as contribuições proporcionais a $\delta(\ell)$ do Tensor de Ricci, bem como do Escalar de Ricci,

$$A_{\alpha\beta} = A_{\alpha\mu\beta}^{\mu} = \frac{\epsilon}{2} \left(\kappa_{\mu\alpha} n^{\mu} n_{\beta} + \kappa_{\mu\beta} n^{\mu} n_{\alpha} - \kappa n_{\alpha} n_{\beta} - \kappa_{\alpha\beta} \right) \quad (2.33)$$

$$A = A_{\alpha}^{\alpha} = \epsilon \left(\kappa_{\mu\nu} n^{\mu} n^{\nu} - \kappa \right). \quad (2.34)$$

Com estas quantidades, é possível construir a parte proporcional a $\delta(\ell)$ do Tensor de Einstein, e, com isso, após inseri-la nas Equações de Einstein, obtém-se uma expressão para o Tensor de Energia-Momento,

$$T_{\alpha\beta} = \Theta(\ell) T_{\alpha\beta}^{+} + \Theta(-\ell) T_{\alpha\beta}^{-} + \delta(\ell) S_{\alpha\beta} \quad (2.35)$$

com $8\pi S_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} - A g_{\alpha\beta}$.

Os dois primeiros termos correspondem ao Tensor de Energia-Momento para cada uma das porções de espaço-tempo \mathcal{M}^\pm . O termo que contém $\delta(\ell)$ em (2.35) carrega consigo uma interpretação física, sendo associado a uma distribuição fina de matéria - uma *camada de superfície* ou uma *fina camada*. Destaca-se que seu Tensor de Energia Momento é proporcional à $S_{\alpha\beta}$.

Explicitamente, o Tensor de Energia Momento é definido como

$$16\pi S_{\alpha\beta} = \kappa_{\mu\alpha} n^\mu n_\beta + \kappa_{\mu\beta} n^\mu n_\alpha - \kappa n_\alpha n_\beta - \epsilon \kappa_{\alpha\beta} - (\kappa_{\mu\nu} n^\mu n^\nu - \epsilon \kappa) g_{\alpha\beta}. \quad (2.36)$$

Nota-se que, caso se multiplique a equação anterior por n^α , obtem-se que $S_{\alpha\beta} n^\beta = 0$. Ou seja $S_{\alpha\beta}$ é tangente a Σ , e, dessa forma, admite uma decomposição da seguinte maneira:

$$S^{\alpha\beta} = S^{ab} e_a^\alpha e_b^\beta, \quad (2.37)$$

que, quando calculada, resulta em

$$\begin{aligned} 16\pi S_{ab} &= -\kappa_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta - \epsilon (\kappa_{\mu\nu} n^\mu n^\nu - \epsilon \kappa) h_{ab} \\ &= -\kappa_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta - \kappa_{\mu\nu} (g^{\mu\nu} - h^{mn} e_m^\mu e_n^\nu) h_{ab} \\ &= -\kappa_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta + h^{mn} \kappa_{\mu\nu} e_m^\mu e_n^\nu h_{ab} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Calculando-se $[\nabla_\beta n_\alpha]$,

$$\begin{aligned} [\nabla_\beta n_\alpha] &= -[\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma] n_\gamma \\ &= -\frac{1}{2} (\kappa_{\gamma\alpha} n_\beta + \kappa_{\gamma\beta} n_\alpha - \kappa_{\alpha\beta} n_\gamma) n^\gamma \\ &= \frac{1}{2} (\epsilon \kappa_{\alpha\beta} - \kappa_{\gamma\alpha} n_\beta n^\gamma - \kappa_{\gamma\beta} n_\alpha n^\gamma) \end{aligned} \quad (2.39)$$

permite reescrever,

$$[K_{ab}] = [\nabla_\beta n_\alpha] e_a^\alpha e_b^\beta = \frac{\epsilon}{2} \kappa_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta. \quad (2.40)$$

Por fim, ao se coletar todos estes resultados tem-se

$$16\pi S_{\alpha\beta} = -\frac{\epsilon}{2} ([K_{ab}] - [K] h_{ab}) \quad (2.41)$$

que relaciona o Tensor de Energia Momento ao salto da curvatura extrínseca de um lado de Σ para o outro. Nessa lógica, conclui-se que uma transição suave requer $[K_{ab}] = 0$, sendo esta a Segunda Condição de Junção. É válido colocar que uma vez satisfeita esta condição, o tensor de Riemman se torna não singular em Σ . Esta expressão independe do sistema de coordenadas utilizado e, caso ela seja violada, tem-se uma singularidade

em nosso espaço-tempo em Σ . Esta singularidade, contudo, carrega consigo uma interpretação física direta: uma camada de superfície com Tensor de Energia Momento $T_{\Sigma}^{\alpha\beta}$ está presente na hipersuperfície.

Modelo de Oppenheimer-Snyder

Tendo em vista que o Modelo de Oppenheimer-Snyder [7] descreve uma estrela homogênea cercada pelo vácuo, a métrica interior será a solução de FLRW, a qual colaremos com a solução de Schwarzschild no exterior.

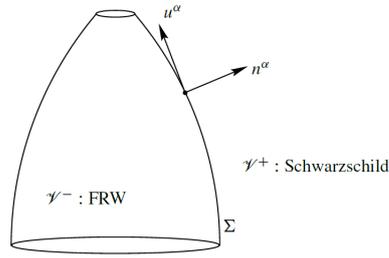


Figura 2.2: Espaço-tempo de Oppenheimer-Snyder.

Para realizar a colagem, será utilizada a métrica de FLRW escrita da seguinte forma:

$$ds_-^2 = -d\tau^2 + X(\tau, r)^2 dr^2 + Y(\tau, r)^2 d\Omega^2 \quad (2.42)$$

onde,

$$X(\tau, r) = \frac{a(\tau)}{\sqrt{1 - kr^2}}, \quad Y(\tau, r) = a(\tau)r. \quad (2.43)$$

Em contraste à um modelo cosmológico, não se utiliza este elemento de linha em todo espaço-tempo. Em vez disso, corta-se o espaço-tempo num valor de $r = R$, e define-se a superfície de colagem Σ , de tipo-tempo, como a fronteira para \mathcal{M}^- . Seu vetor unitário é

$$n_-^a = \frac{1}{X} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^a \quad (2.44)$$

e a métrica induzida interior é

$$h_{ab}^- dx^a dx^b = -d\tau^2 + Y(\tau, r)^2 d\Omega^2. \quad (2.45)$$

Para o espaço-tempo exterior, não se pode usar a métrica de Schwarzschild em sua forma padrão,

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (2.46)$$

onde $f(r) = 1 - \frac{2M}{r}$, já que esta não cobre a região do espaço-tempo dentro do horizonte. Utiliza-se, portanto, a métrica de Schwarzschild escrita na forma de Eddington-

Finkelstein,

$$ds_+^2 = - \left(1 - \frac{2M}{\chi} \right) dv^2 + 2dv d\chi + \chi^2 d\Omega^2 \quad (2.47)$$

Vamos usar apenas a porção $\chi > \chi(v)$ como região exterior para juntar à métrica de FLRW, conforme ilustra a Figura 2.3. A relação $v(\tau)$ e $\chi(\tau)$ em $r = R$, uma vez derivada,

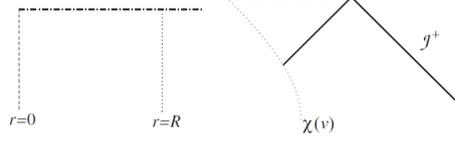


Figura 2.3: Modelo de Oppenheimer-Snyder: Uma porção de um espaço-tempo de FLRW entre $r = 0$ e $r = R$ é colada à uma porção do espaço-tempo de Schwarzschild ao longo de $\chi(v)$.

vai determinar a forma da superfície de colagem em \mathcal{M}_+ . No entanto, estão determinados os ângulos de $d\Omega^2$, dado que ambas as métricas são esféricamente simétricas.

Utilizando-se, então, as condições de junção de Israel-Darmois, iguala-se primeiro as métricas induzidas de ambos os lados da hipersuperfície de colagem:

- $h_{\tau\tau}^+ = h_{\tau\tau}^-$

$$\chi(\tau) = Y(\tau, r) = a(\tau)R \quad (2.48)$$

Esta equação determina $\chi(\tau)$, enquanto que

- $h_{\theta\theta}^+ = h_{\theta\theta}^-$

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2GM}{\chi} \right) \dot{\chi}^2 - 2\dot{\chi}\dot{v} &= 1 \\ \left(\frac{d\chi}{dv} \right)^2 &= \frac{\dot{\chi}^2}{\dot{v}^2} = \dot{a}^2 R^2 \left(1 - \frac{2GM}{\chi} - 2 \frac{d\chi}{dv} \right) \end{aligned} \quad (2.49)$$

resulta em uma equação diferencial para $\chi(v)$.

A relação entre as coordenadas exteriores é, dessa forma, determinada, salvo um valor de R , fixando a superfície de colagem em \mathcal{M}^+ . Para tal, deve-se calcular as curvaturas extrínsecas através de

$$K_{ab}^\pm = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n h_{ab}^\pm = \frac{1}{2} \left(n_\pm^c \partial_c h_{ab}^\pm + h_{cb}^\pm \partial_a n_\pm^c + h_{ac}^\pm \partial_b n_\pm^c \right) \quad (2.50)$$

onde temos como vetores normais para a geometria exterior:

$$n_-^a = \frac{1}{X(\tau, r)} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^a \quad (2.51)$$

e para a geometria interior:

$$n_+^v = \frac{1}{\sqrt{1 - 2M/\chi - 2\dot{\chi}/\dot{v}}}, \quad n_+^\chi = \frac{1 - 2M/\chi - \dot{\chi}/\dot{v}}{\sqrt{1 - 2M/\chi - 2\dot{\chi}/\dot{v}}} \quad (2.52)$$

Desta forma calculamos as curvaturas extrínsecas:

$$K_{\tau\tau}^- = 0 = K_{\theta\tau}^-, \quad K_{\theta\theta}^- = \frac{1}{2}n_-^r \partial_r h_{\theta\theta}^- = \frac{Y \partial_r Y}{X} \quad (2.53)$$

e,

$$K_{\theta\theta}^+ = \frac{1}{2}n_+^\chi \partial_\chi h_{\theta\theta}^+ = \chi \frac{1 - 2GM/\chi - \dot{\chi}/\dot{v}}{\sqrt{1 - 2GM/\chi - 2\dot{\chi}/\dot{v}}} \quad (2.54)$$

$$K_{\tau\tau}^+ = K_{vv} + 2 \frac{d\chi}{dv} K_{v\chi} + \left(\frac{d\chi}{dv} \right)^2 K_{\chi\chi} \quad (2.55)$$

onde para $K_{\tau\tau}^+$ não é preciso calcular, explicitamente, suas componentes devido à colagem das métricas induzidas estarem em função de $\chi(v)$. Verifica-se, então, que:

- $K_{\tau\tau}^+ = K_{\tau\tau}^-$

$$K_{\tau\tau}^+ = K_{vv} + 2 \frac{d\chi}{dv} K_{v\chi} + \left(\frac{d\chi}{dv} \right)^2 K_{\chi\chi} = 0 \quad (2.56)$$

que é satisfeita, automaticamente, pelas (2.48) e (2.49). Obtém-se, também, uma equação final para

- $K_{\theta\theta}^+ = K_{\theta\theta}^-$

$$\chi \frac{1 - 2GM/\chi - \dot{\chi}/\dot{v}}{\sqrt{1 - 2GM/\chi - 2\dot{\chi}/\dot{v}}} = \frac{YY'}{X} \quad (2.57)$$

que resta ser satisfeita em toda superfície de colagem. Utilizando-se o resultado da colagem de $h_{\theta\theta}$, escreve-se $\chi = Y$, que pode reescrever (2.57) como:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{Y'}{X} \right)^2 \left(1 - \frac{2GM}{\chi} - 2 \frac{d\chi}{dv} \right) \\ &= \left(1 - \frac{2GM}{\chi} - \frac{d\chi}{dv} \right)^2 \\ &= \left(1 - \frac{2GM}{Y} \right)^2 - 2 \frac{d\chi}{dv} \left(1 - \frac{2GM}{Y} \right) + \left(\frac{d\chi}{dv} \right)^2 \\ &= \left(1 - \frac{2GM}{Y} \right)^2 - 2 \frac{d\chi}{dv} \left(1 - \frac{2GM}{Y} \right) + \dot{Y}^2 \left(1 - \frac{2GM}{Y} - 2 \frac{d\chi}{dv} \right) \\ &= \left(1 - \frac{2GM}{Y} - 2 \frac{d\chi}{dv} \right) \left(1 - \frac{2GM}{Y} + \dot{Y}^2 \right) \end{aligned} \quad (2.58)$$

onde fez-se uso da colagem $h_{\tau\tau}$, do penúltimo para o último passo. Essa equação pode

ser resolvida para a massa, M ,

$$GM = \frac{1}{2}Y \left(1 + \dot{Y}^2 - \left(\frac{Y'}{X} \right)^2 \right) = \frac{1}{2}aR \left(1 + R^2\dot{a}^2 - (1 - kR^2) \right) \quad (2.59)$$

$$= \frac{1}{2}R^3a(\dot{a}^2 + k)$$

e agora fazendo uso de $X = a/\sqrt{1 - kR^2}$ e $Y = aR$ na superfície de colagem,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{2GM}{a^3R^3} = \frac{8\pi G}{3}\rho \quad (2.60)$$

A equação (2.60) é a Equação de Friedmann, a qual descreve um universo de constante espacial k arbitrária permeado por um fluido de poeira. Desta forma é possível averiguar a maneira através da qual ocorre o colapso gravitacional de uma estrela descrita por um fluido de poeira sem pressão: o seu espaço-tempo exterior é dado pela solução de Schwarzschild e o interior pela métrica de FLRW, formando uma solução única das Equações de Einstein.

A junção de Oppenheimer-Snyder pode ser usada para extrair o diagrama de Carter-Penrose de um colapso gravitacional:

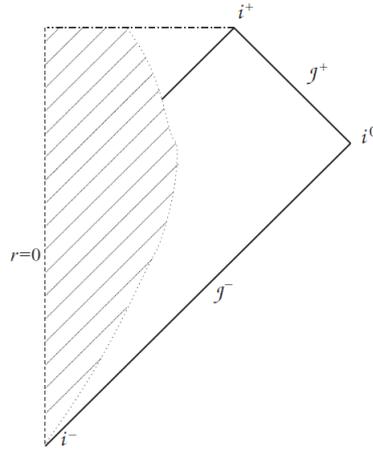


Figura 2.4: Diagrama conforme para o Colapso Gravitacional de Oppenheimer-Snyder. A região hachurada é a o pedaço homogêneo que representa a estrela colapsando, que corta grande parte da extensão de Kruskal da solução de Schwarzschild para o vácuo.

Para o modelo fechado, $k = 1$, por exemplo, a análise inicia-se em um tempo no qual $a(0)$ seja constante, tal que o colapso comece com uma superfície que esteja em repouso. Define-se um raio R que satisfaz $1 - kR^2 > 0$, visando garantir que $R = cte.$ é de fato uma superfície no interior do espaço-tempo de FLRW. Determina-se, também, que $aR > 2GM$ para que se tenha uma superfície inicial fora do horizonte. Para o futuro, tem-se $\dot{a} < 0$ e

a superfície colapsa.

O interior desenvolverá uma singularidade que deve ser a mesma singularidade da geometria de Schwarzschild. Isto ocorre somente se a superfície $r = R$ intersecta o horizonte num tempo em que $2GM = \chi = Y = a(\tau)R$ seja satisfeito. Neste momento, nota-se que:

$$\dot{Y}^2 = \left(\frac{Y'}{X}\right)^2 \quad (2.61)$$

e, assim, $\dot{a}^2 = 1 - kR^2 > 0$, isto é, a camada ainda está colapsando. Do comportamento de modelos isotrópicos de cosmologia, sabe-se que, após $\dot{a} = 0$, \dot{a}^2 cresce monotonicamente e diverge para τ finito. A condição de horizonte $\dot{a}^2 = 1 - kR^2$ é satisfeita apenas uma vez, e assim o horizonte é cruzado uma única vez, sem nunca ocorrer um cruzamento para fora do horizonte.

2.3 Colapso Gravitacional de Radiação

A construção da seção anterior, na qual foram coladas porções de dois espaços-tempo para formar uma única solução das Equações de Einstein, levava em consideração um fluido perfeito de poeira sem pressão. Naquele caso, tomaram-se os espaços-tempo de FRLW e Schwarzschild e construiu-se adequadamente, um processo de colapso gravitacional.

Esta seção se propõe a tratar do colapso gravitacional de um fluido perfeito de radiação [20, 49, 50]. Neste caso, não haverá mais um fluido sem pressão, já que, para radiação, devemos colocar $p_m = \rho_m/3$ na equação de conservação de matéria,

$$\dot{\rho}_m + 3H(\rho_m + 3p_m) = 0. \quad (2.62)$$

Supondo um fluido barotrópico,

$$p_m = (\gamma - 1)\rho_m \quad (2.63)$$

a equação e conservação implica:

$$\rho_m = \frac{\rho_0}{a^{3\gamma}} \quad (2.64)$$

e, assim, para radiação, $\gamma = 4/3$.

A presença de uma pressão não nula na fronteira é um impeditivo para se colar um espaço-tempo estático no exterior da estrela, como o de Schwarzschild. Fisicamente, a pressão na superfície da estrela levaria a matéria ser ejetada dela, o que torna o exterior da estrela não mais estático, e sim dinâmico.

Com o intuito de modelar esta situação, o espaço-tempo exterior da estrela será dado pela métrica de Vaidya Generalizada [55]

$$ds_+^2 = -f(v, \chi)dv^2 + 2dv d\chi + \chi^2 d\Omega^2 \quad (2.65)$$

onde, $f(v, \chi) = \left(1 - \frac{2M(v, \chi)}{\chi}\right)$. Esta é a métrica de Vaidya Generalizada devido à dependência da massa $M(v, \chi)$ em χ . A métrica de Vaidya original [48] possui a dependência apenas na coordenada avançada v . Tal métrica de Vaidya Generalizada descreve um fluido de Tipo-2 (cujo Tensor de Energia-Momento possui duas componentes nulas), e é amplamente discutida nos artigos [2, 51, 55]. O espaço-tempo interior será descrito novamente pela métrica de FRLW, mas, agora, o elemento de linha será escrito em coordenadas isotrópicas:

$$ds_-^2 = -d\tau^2 + \frac{a^2(\tau)}{(1 + kr^2/4)^2} (dr^2 + r^2 d\Omega^2) \quad (2.66)$$

Determinou-se que as coordenadas (θ, φ) da 2-esfera seriam as mesmas nas duas métricas. Logicamente, as coordenadas (τ, r) e (v, χ) são diferentes, e, devido a esse fato, a colagem ao longo de uma hipersuperfície Σ de tipo-tempo comum às duas, deve dar conta de relacionar estes dois pares de maneira consistente. Desse modo, há necessidade das métricas induzidas h_{ab}^\pm e das curvaturas extrínsecas K_{ab}^\pm de Σ dos dois lados.

2.3.1 Superfície de Colagem: Visão Interior

Seja a métrica induzida h_{ab}^- de Σ pelo lado de FRLW dada por $r = R$, R constante. Esta é a escolha natural para uma 2-esfera evoluindo ao longo de uma trajetória de tipo-tempo. A métrica induzida é, portanto,

$$h_{ab}^- dx^a dx^b = -d\tau^2 + \frac{a^2 R}{(1 + kR^2/4)^2} d\Omega^2 \quad (2.67)$$

Os vetores unitários de tipo-tempo e tipo-espaço são

$$t_-^a = \left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)^a \quad (2.68)$$

$$n_-^a = \frac{1}{a} \left[1 + \frac{kr^2}{4}\right] \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^a \quad (2.69)$$

Ao se utilizar, novamente, a definição (2.50) calcula-se as componentes da curvatura extrínseca da métrica (2.67),

$$K_{\tau\tau}^- = 0 \quad (2.70)$$

$$K_{\theta}^{-\theta} = K_{\varphi}^{-\varphi} = \frac{1 - kR^2/4}{a(\tau)R} \quad (2.71)$$

2.3.2 Superfície de Colagem: Visão Exterior

Seja a superfície de tipo-tempo do lado exterior dada por $\chi = \chi(\tau)$ e $v = v(\tau)$, onde τ é o tempo próprio coordenado de FRLW. A métrica induzida em Σ do lado exterior é então:

$$h_{ab}^+ dx^a dx^b = - \left[f(v(\tau), \chi(\tau)) \dot{v}^2 - 2\dot{\chi}\dot{v} \right] d\tau^2 + \chi^2(\tau) d\Omega^2 \quad (2.72)$$

onde $\dot{} = \partial_{\tau}$.

Os vetores unitários tipo-tempo e tipo-espaço são respectivamente,

$$t_+^a = \frac{1}{\sqrt{f\dot{v}^2 - 2\dot{\chi}\dot{v}}} \left[\dot{v} \left(\frac{\partial}{\partial v} \right)^a + \dot{\chi} \left(\frac{\partial}{\partial \chi} \right)^a \right] \quad (2.73)$$

$$n_+^a = \frac{1}{\sqrt{f\dot{v}^2 - 2\dot{\chi}\dot{v}}} \left[-\dot{\chi} \left(\frac{\partial}{\partial v} \right)^a + \dot{v} \left(\frac{\partial}{\partial \chi} \right)^a \right] \quad (2.74)$$

E as componentes da curvatura extrínseca,

$$K_{\tau\tau}^+ = K_{ab}^+ t_+^a t_+^b = \frac{\dot{v}^2 (ff_{,\chi}\dot{v} - f_{,v}\dot{v} - 3f_{,\chi}\dot{\chi}) + 4(\ddot{\chi}\dot{v} - \dot{\chi}\ddot{v})}{2(f\dot{v}^2 - 2\dot{\chi}\dot{v})^{3/2}} \quad (2.75)$$

$$K_{\theta}^{+\theta} = K_{\varphi}^{+\varphi} = \frac{f\dot{v}}{\chi(f\dot{v}^2 - 2\dot{\chi}\dot{v})^{1/2}} \quad (2.76)$$

onde $f_{,\chi} = \partial_{\chi}f$ e $f_{,v} = \partial_v f$.

As condições de Israel-Darmois requerem a continuidade da métrica induzida e curvatura extrínseca para não se ter um termo tipo T_{ij} na superfície da estrela. Dessa maneira, colando se as métricas induzidas tem-se,

$$a(\tau) \frac{R}{1 + kR^2/4} = \chi(\tau) \quad (2.77)$$

$$f\dot{v}^2 - 2\dot{\chi}\dot{v} = 1. \quad (2.78)$$

E as curvaturas extrínsecas,

$$\dot{v}^2 [(ff_{,\chi} - f_{,v})\dot{v} - 3f_{,\chi}\dot{\chi}] + 4(\ddot{\chi}\dot{v} - \dot{\chi}\ddot{v}) = 0 \quad (2.79)$$

$$f\dot{v} - \dot{\chi} = \frac{1 - kR^2/4}{1 + kR^2/4}. \quad (2.80)$$

Com base nas equações já expostas, ainda não é possível identificar, precisamente, uma relação direta para o comportamento da massa, $M(v, \chi)$. Todavia, após uma manipulação adequada das equações (2.77 - 2.78), encontra-se:

$$\chi(v) = \frac{Ra(\tau)}{1 + \frac{kR^2}{4}} \quad (2.81)$$

$$\dot{v} = \frac{1 + \frac{kR^2}{4}}{1 - \frac{kR^2}{4} - R\dot{a}} \quad (2.82)$$

$$2M = aR^3 \frac{(\dot{a}^2 + k)}{1 + \frac{kR^2}{4}} \quad (2.83)$$

$$-M_{,v} = \chi_{,vv} + \left(1 - \frac{2M}{\chi} - \chi_{,v}\right) \left(\frac{M}{\chi} - M_{,\chi}\right) \quad (2.84)$$

Finalmente, esse conjunto de equações (2.81 - 2.84) determina completamente a dinâmica da fronteira e da função exterior $M(v, \chi)$: uma fonte de matéria para o interior FRLW determina $a(\tau)$, e, portanto, $\chi(\tau)$ pela equação (2.81). As equações (2.82) e (2.83), por sua vez, determinam:

$$f(\dot{\chi}, v) \Big|_{v=\frac{1-kR^2/4}{1+kR^2/4}} \quad (2.85)$$

e

$$\dot{v}(\dot{\chi}, v) \Big|_{v=\frac{1-kR^2/4}{1+kR^2/4}} \quad (2.86)$$

enquanto que a equação (2.84) requer $f = f(\chi)$ na fronteira. Além disso, as equações (2.82) e (2.83) também apontam a 4-velocidade da fronteira vista do exterior:

$$\begin{aligned} t^\pm &= (\dot{v}, \chi, \dot{\chi}, 0) \\ &= \left(\frac{1}{f} \left(d \pm \sqrt{d^2 - f} \right), \pm \sqrt{d^2 - f}, 0, 0 \right) \end{aligned} \quad (2.87)$$

onde $d = \frac{1-kR^2/4}{1+kR^2/4}$. As soluções \pm correspondem à contração e à expansão, respectiva-

mente. Também é possível notar que, dado que $K_{\tau\tau}^+ = 0$, t^\pm são tangentes à geodésicas radiais do espaço-tempo exterior.

A função $\chi(v)$ dá a trajetória da fronteira de FLRW, e é dada por:

$$\frac{d\chi}{dv} = \frac{\pm f \sqrt{d^2 - f}}{d \pm \sqrt{d^2 - f}}. \quad (2.88)$$

onde se fez uso de (2.87).

Ao contrário do resultado final de um colapso gravitacional de poeira sem pressão, que sempre é um Buraco Negro, o colapso gravitacional de radiação pode possuir soluções nas quais o estado final não é um buraco negro e sim uma singularidade nua. Trata-se de uma singularidade “descoberta” pela estrutura causal de um Horizonte de Evento, que permite que informação seja emitida diretamente para \mathcal{J}^+ , o infinito nulo futuro.

A estrutura causal do colapso de radiação é, portanto, algo que dependerá não só das condições iniciais dadas para a função de massa $M(v, \chi)$ como também do modelo que se está analisando. Na literatura, pode-se encontrar diversos cenários em que mecanismos e campos são adicionados a este colapso, de forma a investigar o estado final do sistema.

A discussão apresentada neste capítulo é suficiente para embasar o conteúdo do próximo. Como no modelo do presente trabalho a Relatividade Geral é a condição inicial, as Condições de Junção de Israel-Darmois dão o formalismo que descreverá o espaço-tempo exterior e interior da estrela para os dois casos que serão analisados: poeira e radiação. Para uma estrela modelada por um fluido de poeira o espaço-tempo exterior é descrito pela solução de Schwarzschild, enquanto que para uma estrela modelada por um fluido de radiação, o espaço-tempo exterior é descrito pela solução de Vaidya Generalizada, para ambas as situações o espaço-tempo interior é descrito pela métrica de FLRW.

Capítulo 3

Modelo

3.1 Introdução

No capítulo anterior, discutiu-se o colapso gravitacional dentro do escopo da Relatividade Geral para dois fluidos perfeitos: poeira e radiação. Além disso, no mesmo capítulo, foram estabelecidas as questões que dizem respeito ao espaço-tempo exterior dos dois fluidos perfeitos. Como será mostrado ao longo deste capítulo, na superfície de colagem, a Relatividade Geral continuará sendo válida, portanto, neste capítulo nos restringiremos apenas a discussão do espaço-tempo interior, descrito pela métrica de FLRW.

No capítulo de Teorias de Brans-Dicke, foi introduzido o ferramental matemático e teórico destas teorias de gravitação modificada. Estes dois capítulos foram necessários para que se chegasse a esta parte da dissertação, na qual se busca “juntar” estas duas ideias numa discussão de um colapso gravitacional que mescla duas teorias de gravitação.

A princípio, a teoria gravitacional que alicerça este trabalho deve iniciar-se no regime da Relatividade Geral, na qual o destino final de um colapso é sempre uma singularidade, seja ela um buraco negro, ou nua. Será verificado se, a partir da evolução temporal desta teoria modificada, este destino pode ser diferente de uma singularidade como, por exemplo, um buraco negro regular ou um ricochete.

3.2 Ação e Equações de Movimento

Nesta seção serão pontuadas algumas características de teorias de Brans-Dicke, já discutidas no primeiro capítulo. A partir da ação de Brans-Dicke Generalizada com

potencial $V(\phi)$ e com S_m sendo a ação de matéria:

$$S_{BD} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\phi R - \frac{\omega(\phi)}{\phi} (\partial\phi)^2 - V(\phi) \right] + S_m \quad (3.1)$$

pode-se variar a ação com relação aos campos dinâmicos, para obter

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\phi} T_{\mu\nu}^{(m)} + \frac{\omega(\phi)}{\phi^2} \left(\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla^\rho \phi \nabla_\rho \phi \right) - \frac{V(\phi)}{2\phi} g_{\mu\nu} + \frac{1}{\phi} (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \square\phi) \quad (3.2)$$

para a métrica,

$$\square\phi = \frac{1}{2\omega(\phi) + 3} \left(T^{(m)} - \frac{d\omega(\phi)}{d\phi} \nabla^\rho \phi \nabla_\rho \phi + \phi \frac{dV}{d\phi} - 2V \right) \quad (3.3)$$

para o campo escalar, e por último a Equação de Conservação do Tensor de Energia e Momento,

$$\nabla^\nu T_{\mu\nu}^{(m)} = 0. \quad (3.4)$$

Trabalhando-se com a métrica de FLRW,

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1+kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \quad (3.5)$$

onde $d\Omega^2$ é o ângulo sólido da 2-esfera. E considerando-se que a matéria contida dentro da estrela é um fluido perfeito barotrópico, o qual possui como equação de estado:

$$p_m = (\gamma - 1)\rho_m \quad (3.6)$$

onde p_m e ρ_m denotam a pressão e a densidade de matéria do fluido respectivamente, e γ é uma constante com $1 \leq \gamma \leq 4/3$. Dessa forma, são reescritas as equações de movimento:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\dot{a}\dot{\phi}}{a\phi} - \frac{\omega(\phi)\dot{\phi}^2}{6\phi^2} - \frac{\rho_m}{3\phi} + \frac{k}{a^2} - \frac{V(\phi)}{2\phi} = 0 \quad (3.7)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - 2\frac{\dot{a}\dot{\phi}}{a\phi} + \frac{\omega(\phi)\dot{\phi}^2}{2\phi^2} + \frac{\rho_m}{\phi} \left(\frac{2 + \gamma\omega(\phi)}{3 + 2\omega(\phi)} \right) - \frac{k}{a^2} - \frac{1}{2(2\omega(\phi) + 3)\phi} \left[\dot{\phi}^2 \frac{d\omega}{d\phi} - 2V(\phi) + \phi \frac{dV}{d\phi} \right] = 0 \quad (3.8)$$

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}\dot{\phi}}{a} - \frac{1}{2\omega + 3} \left[\rho_m(4 - 3\gamma) - \phi \frac{dV}{d\phi} + 2V(\phi) \right] + \frac{\dot{\phi}^2}{2\omega(\phi) + 3} \frac{d\omega}{d\phi} = 0. \quad (3.9)$$

É válido ressaltar que o sistema de equações (3.7-3.9) não é linearmente independente. Dado que (3.7) é uma integral primeira do sistema, a combinação dela com uma das duas outras fornece a informação necessária para que se encontrem as soluções do sistema a

partir de determinadas condições iniciais. Além disso, pela Equação de Conservação do Tensor de Energia Momento da Matéria, (3.4), e pela relação de um fluido barotrópico (3.6), a dependência do fluido pelo fator de escala é dada por,

$$\rho_m = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3\gamma}. \quad (3.10)$$

onde ρ_0 é uma constante positiva.

É útil ressaltar algumas propriedades da função $\omega(\phi)$:

- Conforme ilustrado no capítulo de Teorias Escalares Tensoriais, o limite da Relatividade Geral é tal que,

$$\lim_{\phi \rightarrow \phi_c} \omega(\phi) = \infty. \quad (3.11)$$

- Para qualquer outro valor do campo escalar, essa função é livre para assumir outros valores.
- Uma escolha comum para esta função e que respeita a primeira condição é dada por [3],

$$\omega(\phi) = \beta \left(\frac{\phi_c}{\phi_c - \phi} \right)^{2\alpha} + \omega_0 \quad (3.12)$$

onde α , β e ϕ_c são constantes positivas, e ω_0 pode ser positivo ou negativo, contanto que seja maior que $-3/2$.

3.2.1 Análise de $\lim_{\phi \rightarrow \phi_c} \omega(\phi) = \infty$

Analisando-se as equações (3.7) e (3.9), é possível tomar o limite

$$\lim_{\phi \rightarrow \phi_c} \omega(\phi) = \infty, \quad \text{e} \quad \phi \rightarrow \phi_c = \text{cte}. \quad (3.13)$$

e impô-lo na (3.9):

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} - \frac{1}{2\omega + 3} \left[(4 - 3\gamma)\rho_m + 2V - \phi \frac{dV}{d\phi} \right] + \frac{\dot{\phi}^2}{2\omega + 3} \frac{d\omega}{d\phi} = 0 \quad (3.14)$$

Ao se analisar o primeiro termo entre colchetes:

$$\frac{(4 - 3\gamma)\rho_m}{(2\omega(\phi) + 3)} \quad (3.15)$$

nota-se que se $\omega(\phi) \rightarrow \infty$, este termo vai a zero. Analogamente, o segundo termo entre colchetes

$$\frac{1}{2\omega(\phi) + 3} \left[2V - \phi \frac{dV}{d\phi} \right] \quad (3.16)$$

também vai a zero, a menos que $V(\phi)$ ou $dV/d\phi \rightarrow \infty$ a medida que $\phi \rightarrow \phi_c = cte..$ Portanto (3.36) se reescreve como:

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} + \frac{\dot{\phi}^2}{2\omega + 3} \frac{d\omega}{d\phi} = 0 \quad (3.17)$$

que pode ser integrada,

$$\dot{\phi} = \frac{\sqrt{3}A}{a^3\sqrt{2\omega(\phi) + 3}} \quad (3.18)$$

Substituindo (3.18) em (3.7),

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\dot{a}}{a}\frac{\dot{\phi}}{\phi} - \frac{\omega(\phi)}{(2\omega(\phi) + 3)} \frac{A^2}{2\phi^2 a^6} - \frac{V(\phi)}{6\phi} - \frac{\rho_m}{3\phi} + \frac{k}{a^2} = 0 \quad (3.19)$$

e usando o fato de que se, $\lim_{\phi \rightarrow \phi_c} \omega(\phi) = \infty$ tem-se

$$\lim_{\phi \rightarrow \phi_c} \frac{\omega(\phi)}{2\omega(\phi) + 3} = \frac{1}{2}, \quad (3.20)$$

e, como $\phi \rightarrow cte.$, $\dot{\phi} \approx 0$, (3.19) torna-se

$$\dot{a}^2 = -k + \frac{a^2 \rho_m}{3\phi_c} + \frac{A^2}{4\phi_c^2 a^4} + \frac{V(\phi_c) a^2}{6\phi_c}. \quad (3.21)$$

De forma análoga (3.8) fica,

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{3A^2}{4\phi_c^2 a^6} + \frac{\rho_m \gamma}{6\phi} + \frac{k}{a^2} = 0. \quad (3.22)$$

No limite da Relatividade Geral, observa-se uma correção de matéria dura, $\gamma = 2$, nas equações de Friedmann. Além desta adição de matéria dura, constata-se que o termo de potencial nas equações (3.21,3.22) funciona de forma semelhante a um termo de Constante Cosmológica. Ainda que na literatura se argumente que uma configuração de campo escalar constante aliado a condição $\omega(\phi) \rightarrow \infty$, a Teoria de Brans-Dicke é indistinguível da Relatividade Geral, identifica-se a presença de um fluido de matéria dura adicional, o que modifica o conteúdo de matéria da teoria. No caso de um colapso gravitacional, este termo acentua o colapso quando o fator de escala já está próximo da singularidade, enquanto que num caso de uma expansão cosmológica, o termo de matéria dura seria o dominante no universo para tempos primordiais. Nas próximas seções, será analisado o caso em que não há potencial escalar $V(\phi)$, a menos que se faça menção a algo que ocorra especificamente na presença do potencial.

Outro ponto interessante nesta análise diz respeito ao termo cinético da ação (3.1). Se

for inserido na frente do termo cinético uma função sinal $\epsilon = \pm 1$ da seguinte forma,

$$S_{BD} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\phi R - \epsilon \frac{\omega(\phi)}{\phi} (\partial\phi)^2 - V(\phi) \right] + S_m \quad (3.23)$$

as equações de movimento são reescritas da seguinte maneira:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\dot{a}\dot{\phi}}{a\phi} - \epsilon \frac{\omega(\phi)\dot{\phi}^2}{6\phi^2} - \frac{\rho_m}{3\phi} + \frac{k}{a^2} - \frac{V(\phi)}{2\phi} = 0 \quad (3.24)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - 2\frac{\dot{a}\dot{\phi}}{a\phi} + \epsilon \frac{\omega(\phi)\dot{\phi}^2}{2\phi^2} + \frac{\rho_m}{\phi} \left(\frac{2 + \epsilon\gamma\omega(\phi)}{3 + 2\epsilon\omega(\phi)} \right) - \frac{k}{a^2} - \frac{1}{2(2\epsilon\omega(\phi) + 3)\phi} \left[\dot{\phi}^2 \frac{d\omega}{d\phi} - 2V(\phi) + \phi \frac{dV}{d\phi} \right] = 0 \quad (3.25)$$

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}\dot{\phi}}{a} - \frac{1}{2\epsilon\omega + 3} \left[\rho_m(4 - 3\gamma) - \phi \frac{dV}{d\phi} + 2V(\phi) \right] + \frac{\dot{\phi}^2}{2\epsilon\omega(\phi) + 3} \frac{d\omega}{d\phi} = 0. \quad (3.26)$$

Tomando-se os mesmos limites (3.13), e mantendo-se as mesmas considerações (3.15-3.16), (3.26) pode ser reescrita como:

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}\dot{\phi}}{a} + \frac{\dot{\phi}^2}{2\epsilon\omega + 3} \epsilon \frac{d\omega}{d\phi} = 0 \quad (3.27)$$

que, ao ser integrada nos dá,

$$\dot{\phi} = \frac{\sqrt{3}A}{a^3 \sqrt{2\epsilon\omega(\phi) + 3}}. \quad (3.28)$$

Ao se substituir (3.28) em (3.24) tem-se

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\dot{a}}{a\phi} \frac{\sqrt{3}A}{a^3 \sqrt{2\omega(\phi) + 3}} - \frac{\epsilon\omega(\phi)}{3 + 2\epsilon\omega(\phi)} \frac{A^2}{2\phi^2 a^6} - \frac{\rho_m}{3\phi} + \frac{k}{a^2} - \frac{V(\phi)}{2\phi} = 0 \quad (3.29)$$

e tomando (3.13),

$$\lim_{\phi \rightarrow \phi_c} \frac{\epsilon\omega(\phi)}{3 + 2\epsilon\omega(\phi)} = \frac{\epsilon\omega(\phi)}{2\epsilon\omega(\phi)} = \frac{1}{2} \quad (3.30)$$

(3.24) é reescrita como,

$$\dot{a}^2 = -k + \frac{a^2 \rho_m}{3\phi_c} + \frac{A^2}{4\phi_c^2 a^4} + \frac{V(\phi_c) a^2}{6\phi_c}. \quad (3.31)$$

Ou seja, o sinal do termo cinético não interfere no sinal desta correção de matéria dura, já que o limite (3.30) permanece inalterado devido ao cancelamento da função sinal ϵ . De maneira similar, tem-se:

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{3A^2}{4\phi_c^2 a^6} + \frac{\rho_m \gamma}{6\phi} + \frac{k}{a^2} = 0. \quad (3.32)$$

3.3 Análise das Equações de Movimento

Nesta seção será analisada a possibilidade de se evitar, ou não, a singularidade final num colapso gravitacional, dentro de uma teoria de Brans-Dicke Generalizada. Por simplicidade, considera-se a ação

$$S_{BD} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\phi R - \frac{\omega(\phi)}{\phi} (\partial\phi)^2 \right] + S_m, \quad (3.33)$$

que é a ação (3.1) sem o termo de potencial. As equações de movimento passam a ser,

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\dot{a}\dot{\phi}}{a\phi} - \frac{\omega(\phi)\dot{\phi}^2}{6\phi^2} - \frac{\rho_m}{3\phi} + \frac{k}{a^2} = 0 \quad (3.34)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - 2\frac{\dot{a}\dot{\phi}}{a\phi} + \frac{\omega(\phi)\dot{\phi}^2}{2\phi^2} - \frac{1}{2\phi(2\omega(\phi)+3)} \frac{d\omega}{d\phi} \dot{\phi}^2 + \frac{\rho_m}{\phi} \left(\frac{2+\gamma\omega}{3+2\omega} \right) - \frac{k}{a^2} = 0 \quad (3.35)$$

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}\dot{\phi}}{a} - \frac{1}{2\omega+3} [(4-3\gamma)\rho_m] + \frac{\dot{\phi}^2}{2\omega+3} \frac{d\omega}{d\phi} = 0 \quad (3.36)$$

ou se usarmos $H = \frac{\dot{a}}{a}$,

$$H^2 = \frac{\rho_m}{3\phi} + \frac{\omega\dot{\phi}^2}{6\phi^2} - H\frac{\dot{\phi}}{\phi} - \frac{k}{a^2} \quad (3.37)$$

$$\dot{H} = -\frac{\omega\dot{\phi}^2}{2\phi^2} - \frac{\rho_m}{\phi} \left(\frac{2+\gamma\omega}{3+2\omega} \right) + 2H\frac{\dot{\phi}}{\phi} + \frac{1}{2\phi(2\omega+3)} \frac{d\omega}{d\phi} \dot{\phi}^2 + \frac{k}{a^2} \quad (3.38)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = \frac{1}{2\omega+3} \left[\rho_m(4-3\gamma) - \frac{d\omega}{d\phi} \dot{\phi}^2 \right] \quad (3.39)$$

O ponto de partida da análise será as equações (3.34-3.39), sujeitas às condições iniciais,

$$\phi_i \approx cte., \quad \dot{\phi}_i \approx 0, \quad \omega_i \rightarrow \infty. \quad (3.40)$$

É interessante reiterar que o estudo desta dissertação parte da Relatividade Geral como teoria gravitacional, e após a evolução do sistema, busca-se verificar a possibilidade de evitar que o colapso gravitacional alcance o valor $a = 0$ dentro do cenário de uma Teoria de Brans-Dicke Generalizada, dada pela ação (3.33).

A equação de movimento para o campo escalar (3.36), pode ser reescrita da seguinte forma,

$$\frac{1}{a^3} \frac{d \left(a^3 \dot{\phi} \sqrt{2\omega+3} \right)}{dt} = \frac{\rho_m(4-3\gamma)}{\sqrt{2\omega+3}}. \quad (3.41)$$

a qual pode ser integrada no tempo,

$$\dot{\phi} = \frac{1}{a^3 \sqrt{2\omega+3}} \left[\int dt \frac{a^3 \rho_m(4-3\gamma)}{\sqrt{2\omega+3}} + cte. \right]. \quad (3.42)$$

O integrando do primeiro termo entre colchetes é o traço do Tensor de Energia Momento do fluido perfeito descrito por (3.6). Para os dois casos estudados no capítulo anterior, radiação e poeira, $\dot{\phi}$ possui os seguintes comportamentos,

- Radiação, $\gamma = 4/3$,

$$\dot{\phi} = \frac{C}{a^3 \sqrt{2\omega + 3}} \quad (3.43)$$

e C é uma constante de integração.

- Poeira, $\gamma = 1$,

$$\dot{\phi} = \frac{1}{a^3 \sqrt{2\omega + 3}} \left[\int dt \frac{\rho_0}{\sqrt{2\omega + 3}} + C \right], \quad (3.44)$$

onde se utiliza (3.10). Pode-se verificar que o integrando para este caso é sempre positivo, já que $\omega(\phi) > -3/2$ e $\rho_0 > 0$.

Nesta última equação, (3.44), a estrela é descrita por um fluido de poeira não-relativístico. Porém, conforme o colapso evolui, as partículas que constituem a estrela tendem a se comportar relativisticamente, isto é, tendem ao comportamento de um fluido relativístico. Com o passar do colapso, o termo constante entre colchetes domina sobre a integral, e, assim, $\dot{\phi}$ ou é igual a (3.43) ou tende a (3.43). Outra questão ressaltada na equação (3.44) é a respeito do sinal de $\dot{\phi}$. Ao inspecionar novamente seus termos entre colchetes, observa-se que o integrando é positivo, já que $\rho_0 > 0$ e $2\omega + 3 > 0$. Nessa lógica, a integral é também positiva. Entretanto, o termo constante pode, a princípio, ser negativo ou positivo e, conforme afirmado anteriormente, este é o termo relacionado ao comportamento de radiação, dado pela equação (3.43). Sendo assim, caso a constante em (3.44) seja negativa, $\dot{\phi}$ para poeira ainda poderia ser positivo num período em que a integral domine sobre o termo constante. Por outro lado, ao colocarmos $C < 0$, $\dot{\phi}$ para radiação é sempre negativo. Isto demonstra uma inconsistência, já que se busca que o campo escalar interaja com fluidos perfeitos da mesma maneira, o que ocorre para o caso em que a constante de integração presente nas duas equações de $\dot{\phi}$, (3.43-3.44), é negativa, uma vez que pode-se ter $\dot{\phi} < 0$ para radiação, enquanto que $\dot{\phi} > 0$ para poeira. Desta forma, é razoável definir que a constante C seja sempre maior ou igual a 0. De posse dos argumentos anteriores, é válido escrever $\dot{\phi}$ da seguinte maneira,

$$\dot{\phi} \rightarrow \frac{C}{a^3 \sqrt{2\omega + 3}}. \quad (3.45)$$

com $C \geq 0$, e assim, serão estudadas as implicações resultantes de $\dot{\phi}$ ser escrito como (3.45) na equação (3.34),

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = -\frac{\dot{a}}{a} \frac{C}{a^3 \phi \sqrt{2\omega + 3}} + \frac{\omega}{6} \frac{C^2}{a^6 (2\omega + 3) \phi^2} + \frac{\rho_m}{3\phi} - \frac{k}{a^2}. \quad (3.46)$$

Observa-se que o caso em que $C = 0$ não evita a singularidade, já que se teria uma configuração de campo escalar constante. Dado que $\phi > 0$, gravitação sempre atrativa, o colapso se daria de forma igual ao colapso gravitacional na Relatividade Geral.

Uma consequência importante da equação (3.46) é a dependência do fator de escala do segundo termo do lado direito. Este termo possui um comportamento tipo de matéria dura ($\propto a^{-6}$) quando $\omega(\phi) > 0$, o qual, para os instantes em que a curvatura do espaço-tempo é muito grande, é o fator de maior contribuição na dinâmica do fator de escala e que domina sob os demais. No colapso $\dot{a} < 0$ e assim o primeiro termo é positivo tal como o terceiro termo, tendo em vista que se considera que ρ_m descreve um fluido perfeito. Desta maneira, caso $\omega(\phi)$ seja sempre positivo, pode-se concluir que para seções do tri-espaço com $k = 0$ ou $k = -1$, (3.46) não possui um ponto de retorno, $\dot{a} = 0$, dado que o lado direito inteiro da equação é positivo. O fato de não existir pontos de retorno está diretamente relacionado com a impossibilidade de se evitar a singularidade $a = 0$, já que é necessário que \dot{a} troque de sinal de $\dot{a} < 0$ para $\dot{a} \geq 0$. Logo, demonstrando-se que $\omega(\phi) > 0$ sempre durante o colapso, mostra-se que não é possível escapar de $a = 0$, para os casos em que $k = 0$ ou $k = -1$. Para $k = +1$ será feita uma análise em separado posteriormente.

A investigação do sinal de $\omega(\phi)$ durante o colapso é feita ao se definir um novo conjunto de variáveis para o sistema (3.37-3.39),

$$x = \frac{\dot{\phi}}{H\phi}, \quad y = \frac{1}{2\omega + 3}, \quad \lambda = \phi \frac{d\omega}{d\phi}, \quad \beta = \frac{k}{H^2 a^2}, \quad n = \ln(a_i/a). \quad (3.47)$$

Tais variáveis são uma generalização das introduzidas no artigo [44]. As diferenças destas variáveis (3.47) para as do artigo citado estão relacionadas à adição da variável β , que permite tratar o sistema para um valor de k arbitrário, bem como à definição da variável n , que, no caso de contração, indica que conforme n cresce, o fator de escala diminui. Dispondo destas novas variáveis, será feita uma análise baseada em sistemas dinâmicos [18, 26, 33, 34, 45] do colapso gravitacional, a partir do sistema (3.37-3.39) reescrito como

$$x' = \frac{1}{8y} \left\{ 24y^2(1 + \beta)(-4 + 3\gamma) + 4xy [2(3 + \beta) - 3(1 + \beta)\gamma + 3y(3 + \beta)(-4 + 3\gamma)] \right. \\ \left. + 2yx^2 [16 - 9\gamma + y(-36 + 27\gamma + 4\lambda)] + x^3 [-2 + \gamma + y(10 - 6\gamma + y(-12 + 9\gamma + 4\lambda))] \right\} \quad (3.48)$$

$$y' = 2xy^2\lambda \quad (3.49)$$

$$\lambda' = -x(\alpha + \beta) \quad (3.50)$$

$$\beta' = \frac{\beta}{4y} \left\{ 4xy(-1 + 3y)(-4 + 3\gamma) + 4y(1 + \beta) [2 - 3\gamma + 3y(-4 + 3\gamma)] \right. \\ \left. + x^2 [-2 + y(10 - 6\gamma) + \gamma + y^2(-12 + 9\gamma + 4\lambda)] \right\} \quad (3.51)$$

onde $' = \frac{d}{dn}$ e $\alpha = \phi^2 \frac{d^2\omega}{d\phi^2}$.

Vale frisar que, para o modelo trabalhado deve-se ter $\lambda \neq 0$, já que se $\lambda = 0$, temos que $\omega(\phi) = cte..$ Deste modo estaríamos com uma teoria diferente da descrita pela ação (3.33).

O primeiro passo é definir os pontos fixos de (3.48-3.51). Para tal, foram igualadas as mesmas equações a 0, e encontraram-se os seguintes valores,

- a) $x_0 = 0, \beta_0 = -1, y_0$ indeterminado e $1 \leq \gamma \leq 4/3$;
- b) $x_0 = 0, \beta_0 = 0, y_0 \rightarrow 0$ e $\gamma \neq 4/3$;
- c) $x_0 = 0, \beta_0 = 0, y_0$ indeterminado e $\gamma = 4/3$;
- d) $x_0 = 0, \beta_0$ indeterminado, $y_0 \rightarrow 0$ e $\gamma = 2/3$.

onde denota-se os valores das variáveis no ponto fixo com um subscrito com o número 0.

Uma vez encontrados os pontos fixos, é possível caracterizar a estabilidade dos mesmos, e, dessa forma desenvolver um estudo qualitativo do comportamento de cada variável, e as suas implicações no colapso gravitacional.

Antes de prosseguir, cabe uma ressalva a respeito do ponto (d). Tal ponto fixo não será analisado nesta dissertação, já que se trata somente de um ponto fixo para $\gamma = 2/3$, enquanto que, nesta dissertação, trabalha-se com distribuições de matéria com $1 \leq \gamma \leq 4/3$, especificamente os casos de poeira, $\gamma = 1$, e radiação, $\gamma = 4/3$. Além disso, o valor da variável λ para cada um dos pontos fixos é arbitrário, já que cada ponto fixo independe deste valor. Nesse sentido, na ocasião em que for realizada a evolução numérica deve-se assumir um valor fixo qualquer para λ_0 no ponto fixo.

O primeiro ponto fixo, é encontrado para seções do tri-espaço abertas, já que o sinal da variável β indica o sinal da constante k . Este ponto fixo, independe do valor da variável y e, conseqüentemente, de $\omega(\phi)$. Entretanto, como no modelo que embasa esta dissertação, possuem-se as condições iniciais (3.40), serão considerados valores iniciais de y com $y \rightarrow 0$, que correspondem a $\omega \rightarrow \infty$.

Os pontos fixos (b) e (c) correspondem a seções do tri-espço planas, já que neles $\beta_0 = 0$. Assim como o ponto fixo (a), (c) independe do valor de y_0 , porém, (b) só é um ponto fixo se tivermos $y_0 \rightarrow 0$. Em todos os pontos críticos, temos a variável x assumindo o valor de $x_0 = 0$.

Dando sequência ao estudo, calcularemos os autovalores das Matrizes Jacobianas associadas a cada um dos pontos fixos.

a) Matriz Jacobiana:

$$J = \begin{bmatrix} 2 + 3y(3\gamma - 4) & 0 & 0 & 3y(3\gamma - 4) \\ 2y^2\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ (-4 + 3\gamma)(1 - 3y) & 0 & 0 & -2 + y(12 - 9\gamma) + 3\gamma \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

cujos autovalores são:

$$j_1 = 2, \quad j_2 = 0, \quad j_3 = 0, \quad j_4 = -2 + 3\gamma. \quad (3.53)$$

b) Matriz Jacobiana:

$$J = \begin{bmatrix} 3 - \frac{3\gamma}{2} & 3(3\gamma - 4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 - 3\gamma \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

cujos autovalores são:

$$j_1 = 0, \quad j_2 = 0, \quad j_3 = 2 - 3\gamma, \quad j_4 = 3 - \frac{3\gamma}{2}. \quad (3.55)$$

c) Matriz Jacobiana:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2y^2\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

cujos autovalores são,

$$j_1 = -2, \quad j_2 = 1, \quad j_3 = 0, \quad j_4 = 0 \quad (3.57)$$

Devido à presença de dois autovalores nulos em cada um dos autovalores das matrizes jacobianas (3.52,3.54,3.56), estes pontos fixos são não-hiperbólicos. Em função disso, a

análise de estabilidade usual, na qual se verifica o sinal das partes reais e imaginárias de cada um dos autovalores, não pode ser realizada, e é preciso empregar outra maneira de se estudar a estabilidade. Um método que vem sendo utilizado na literatura [16, 44], é o de perturbar o sistema por uma pequena quantidade ao redor do ponto fixo, e evoluir numericamente estas perturbações. Este procedimento é o que será utilizado nesta dissertação.

Para cada uma das variáveis (3.47), encontra-se as seguintes equações das perturbações:

$$\begin{aligned} \delta x' = \frac{1}{8y_0} \left\{ 4y_0[(2(3 + \beta_0) - 3(1 + \beta_0)\gamma + 3y_0(3 + \beta_0)(-4 + 3\gamma))\delta x + \right. \\ 6(-4 + 3\gamma)(2(1 + \beta_0)\delta y + y_0\delta\beta)) + 4x_0((2(3 + \beta_0) - 3(1 + \beta_0)\gamma)\delta y + \\ y_0((16 - 9\gamma)\delta x + 6(3 + \beta_0)(-4 + 3\gamma)\delta y + (2 - 3\gamma)\delta\beta) + \\ y_0^2(3(-4 + 3\gamma)(3\delta x + \delta\beta) + 4\delta x\lambda_0)) + \\ 2x_0^3(2y_0^2\delta\lambda + \delta y(5 - 3\gamma + y_0(-12 + 9\gamma + 4\lambda_0))) \\ \left. x_0^2(3\delta x(-2 + \gamma + y_0(10 - 6\gamma + y_0(-12 + 9\gamma + 4\lambda_0))) + \right. \\ \left. 2(4y_0^2\delta\lambda + \delta y(16 - 9\gamma + y_0(-72 + 54\gamma + 8\lambda_0)))) \right\} \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} \delta y' &= 2(x_0y_0^2\delta\lambda + y_0^2\lambda_0\delta x + 2x_0y_0\lambda_0\delta y) \\ &= 2y_0(x_0y_0\delta\lambda + y_0\lambda_0\delta x + 2x_0) \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} \delta\lambda' &= -\alpha\delta x - x_0\delta\lambda - \lambda_0\delta x \\ &= -(\alpha + \lambda_0)\delta x - x_0\delta\lambda \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} \delta\beta' = \frac{1}{4y_0} \left\{ 4(-\beta_0(1 + \beta_0)(-2 + 3\gamma)\delta y + 3y_0^2(-4 + 3\gamma)(\delta\beta + \beta_0(\delta x + 2\beta_0)) + \right. \\ y_0(6\beta_0^2(-4 + 3\gamma)\delta y + (2 - 3\gamma)\delta\beta + \beta_0((4 - 3\gamma)\delta x + 6(-4 + 3\gamma)\delta x + 6(-4 + 3\gamma)\delta y + \\ 4\delta\beta - 6\gamma\delta\beta))) + x_0^2(\delta\beta(-2 + y_0(10 - 6\gamma) + \gamma + y_0^2(-12 + 9\gamma + 4\lambda_0)) + \\ 2\beta_0(2y_0^2\delta\lambda + \delta y(5 - 3\gamma + y_0(-12 + 9\gamma + 4\lambda_0)))) + 2x_0(2y_0(-1 + 3y_0)(-4 + 3\gamma)\delta\beta + \\ \left. \beta_0(2(-1 + 6y_0)(-4 + 3\gamma)\delta y + \delta x(-2 + y_0(10 - 6\gamma) + \gamma + y_0^2(-12 + 9\gamma + 4\lambda_0)))) \right\} \end{aligned} \quad (3.61)$$

Para evoluir numericamente as equações (3.58-3.61), são dados como condições ini-

ciais o valor da variável no ponto fixo mais um pequena perturbação. O sinal de cada perturbação também depende da situação e da interpretação física de cada variável:

- i) Para a variável x , a perturbação deve ser negativa, já que o sinal de x inicial é negativo por se tratar de uma contração, para a qual o fator de Hubble H é negativo.
- ii) Para a variável y , as perturbações devem ser menores em módulo do que o seu valor inicial y_0 , já que pela sua definição em (3.47) $y > 0$ sempre.
- iii) Para a variável β , tem-se duas situações diferentes: para o ponto fixo com $\beta_0 = 0$, as perturbações podem ser positivas ou negativas. Na presente análise, portanto, serão tratados esses dois casos em separado. Para $\beta_0 = -1$, as perturbações devem seguir o mesmo raciocínio das perturbações de δy , $\delta\beta$ deve ser menor em módulo do que o valor inicial $\beta_0 = -1$, já que para este caso deve-se ter apenas valores negativos da variável β , tendo em vista que $k = -1$.
- iv) Para a variável λ , também é possível observar perturbações negativas e positivas e, desse modo, serão analisadas em separado as duas possibilidades.

Desta forma, é dado prosseguimento para a análise das evoluções numéricas dos pontos fixos (a), (b) e (c), resolvendo numericamente o sistema (3.58-3.61), cujas condições iniciais são $\delta x(0)$, $\delta y(0)$, $\delta\lambda(0)$ e $\delta\beta(0)$.

- a) Primeiramente, estuda-se o ponto fixo (a) que possui: $x_0 = 0$, $y_0 \rightarrow 0$, $\lambda_0 = 1$, $\beta_0 = -1$, serão considerados dois fluidos, poeira, $\gamma = 1$, e radiação, $\gamma = 4/3$.

a.1) Poeira $\gamma = 1$:

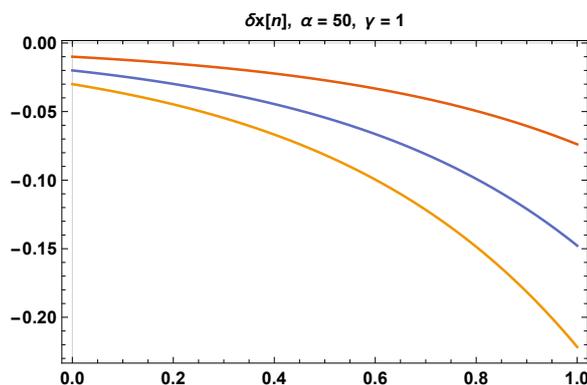


Figura 3.1: Evolução das perturbações em x para poeira. As condições iniciais para os gráficos amarelo, azul e laranja são, $(x_0 - 0.1, y_0 + \frac{y_0}{10}, \lambda_0 - 0.1, \beta_0 - 0.1)$, $(x_0 - 0.2, y_0 - \frac{y_0}{10}, \lambda_0 - 0.2, \beta_0 + 0.1)$ e $(x_0 - 0.3, y_0 + 2\frac{y_0}{10}, \lambda_0 - 0.3, \beta_0 - 0.2)$ respectivamente.

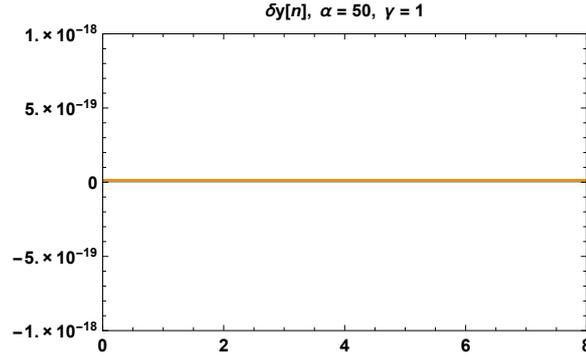


Figura 3.2: Evolução das perturbações em y para poeira. As condições iniciais para os gráficos azul, laranja e amarelo são, $(x_0 - 0.1, y_0 + \frac{y_0}{10}, \lambda_0 - 0.1, \beta_0 - 0.1)$, $(x_0 - 0.2, y_0 - \frac{y_0}{10}, \lambda_0 - 0.2, \beta_0 + 0.1)$ e $(x_0 - 0.3, y_0 + 2\frac{y_0}{10}, \lambda_0 - 0.3, \beta_0 - 0.2)$ respectivamente.

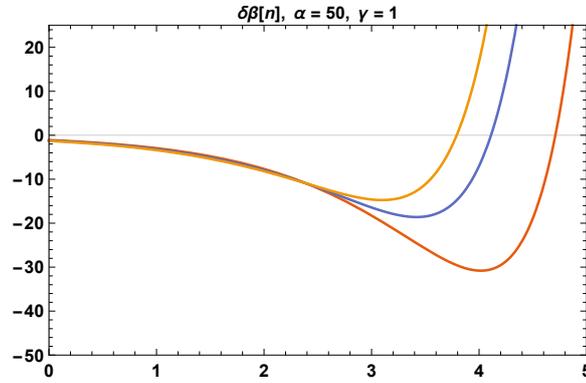


Figura 3.3: Evolução das perturbações em β para poeira. As condições iniciais para os gráficos amarelo, azul e laranja são, $(x_0 - 0.1, y_0 + \frac{y_0}{10}, \lambda_0 - 0.1, \beta_0 - 0.1)$, $(x_0 - 0.2, y_0 - \frac{y_0}{10}, \lambda_0 - 0.2, \beta_0 + 0.1)$ e $(x_0 - 0.3, y_0 + 2\frac{y_0}{10}, \lambda_0 - 0.3, \beta_0 - 0.2)$ respectivamente.

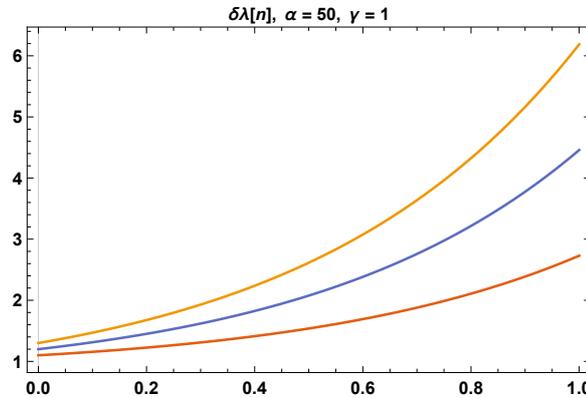


Figura 3.4: Evolução das perturbações positivas em λ para poeira, com $\lambda_0 = 1$. As condições iniciais para os gráficos amarelo, azul e laranja são, $(x_0 - 0.1, y_0 + \frac{y_0}{10}, \lambda_0 + 0.1, \beta_0 - 0.1)$, $(x_0 - 0.2, y_0 - \frac{y_0}{10}, \lambda_0 + 0.2, \beta_0 + 0.1)$ e $(x_0 - 0.3, y_0 + 2\frac{y_0}{10}, \lambda_0 + 0.3, \beta_0 - 0.2)$ respectivamente.

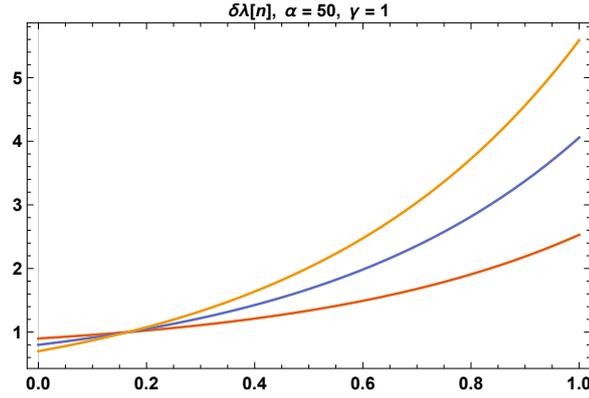


Figura 3.5: Evolução das perturbações negativas em λ para poeira, com $\lambda_0 = 1$. As condições iniciais para os gráficos laranja, azul e amarelo são, $(x_0 - 0.1, y_0 + \frac{y_0}{10}, \lambda_0 - 0.1, \beta_0 - 0.1)$, $(x_0 - 0.2, y_0 - \frac{y_0}{10}, \lambda_0 - 0.2, \beta_0 + 0.1)$ e $(x_0 - 0.3, y_0 + 2\frac{y_0}{10}, \lambda_0 - 0.3, \beta_0 - 0.2)$ respectivamente.

a.2) Radiação, $\gamma = 4/3$:

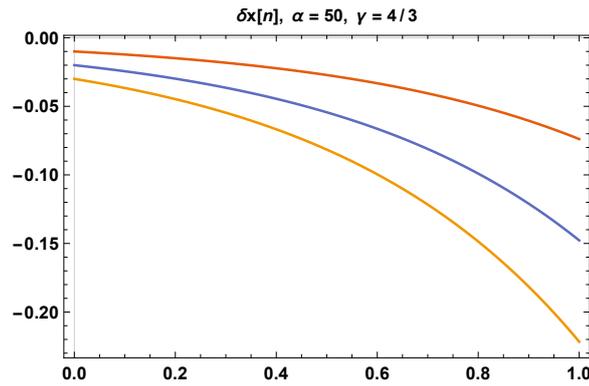


Figura 3.6: Evolução das perturbações em x para radiação. As condições iniciais para os gráficos azul, laranja e amarelo são, $(x_0 - 0.1, y_0 + \frac{y_0}{10}, \lambda_0 - 0.1, \beta_0 - 0.1)$, $(x_0 - 0.2, y_0 - \frac{y_0}{10}, \lambda_0 - 0.2, \beta_0 + 0.1)$ e $(x_0 - 0.3, y_0 + 2\frac{y_0}{10}, \lambda_0 - 0.3, \beta_0 - 0.2)$ respectivamente.

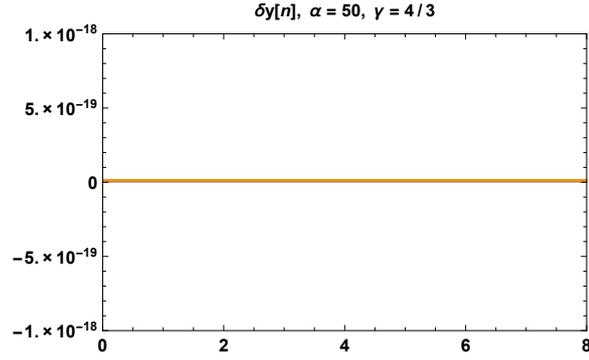


Figura 3.7: Evolução das perturbações em y para radiação. As condições iniciais para os gráficos azul, laranja e amarelo são, $(x_0 - 0.1, y_0 + \frac{y_0}{10}, \lambda_0 - 0.1, \beta_0 - 0.1)$, $(x_0 - 0.2, y_0 - \frac{y_0}{10}, \lambda_0 - 0.2, \beta_0 + 0.1)$ e $(x_0 - 0.3, y_0 + 2\frac{y_0}{10}, \lambda_0 - 0.3, \beta_0 - 0.2)$ respectivamente.

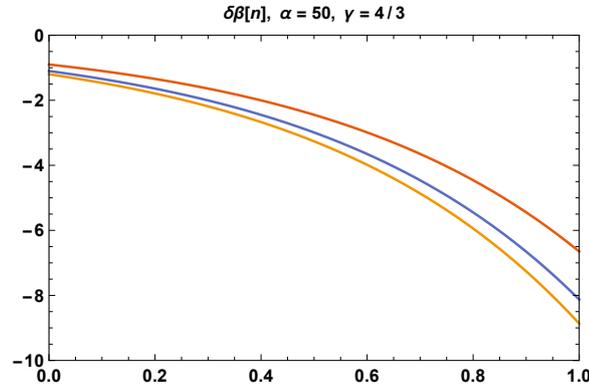


Figura 3.8: Evolução das perturbações em β para radiação. As condições iniciais para os gráficos amarelo, azul e laranja são, $(x_0 - 0.1, y_0 + \frac{y_0}{10}, \lambda_0 - 0.1, \beta_0 - 0.1)$, $(x_0 - 0.2, y_0 - \frac{y_0}{10}, \lambda_0 - 0.2, \beta_0 + 0.1)$ e $(x_0 - 0.3, y_0 + 2\frac{y_0}{10}, \lambda_0 - 0.3, \beta_0 - 0.2)$ respectivamente.

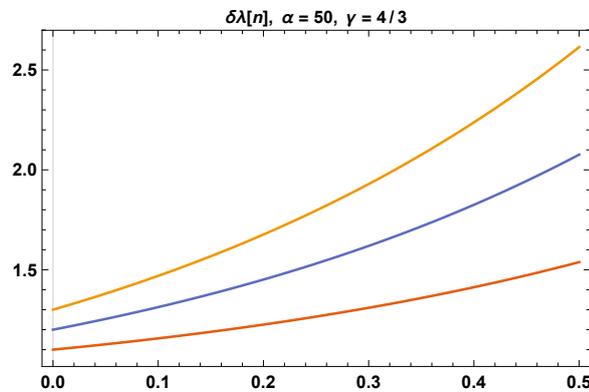


Figura 3.9: Evolução das perturbações positivas em λ para radiação, com $\lambda_0 = 1$. As condições iniciais para os gráficos azul, laranja e amarelo são, $(x_0 - 0.1, y_0 + \frac{y_0}{10}, \lambda_0 + 0.1, \beta_0 - 0.1)$, $(x_0 - 0.2, y_0 - \frac{y_0}{10}, \lambda_0 + 0.2, \beta_0 + 0.1)$ e $(x_0 - 0.3, y_0 + 2\frac{y_0}{10}, \lambda_0 + 0.3, \beta_0 - 0.2)$ respectivamente.

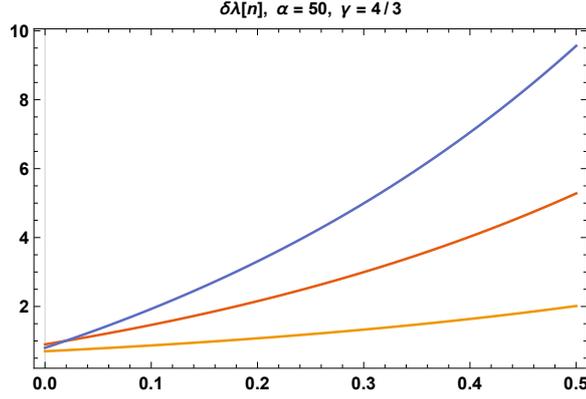


Figura 3.10: Evolução das perturbações negativas em λ para radiação, com $\lambda_0 = 1$. As condições iniciais para os gráficos laranja, azul e amarelo são, $(x_0 - 0.1, y_0 + \frac{y_0}{10}, \lambda_0 - 0.1, \beta_0 - 0.1)$, $(x_0 - 0.2, y_0 - \frac{y_0}{10}, \lambda_0 - 0.2, \beta_0 + 0.1)$ e $(x_0 - 0.3, y_0 + 2\frac{y_0}{10}, \lambda_0 - 0.3, \beta_0 - 0.2)$ respectivamente.

Tendo por base as figuras acima, tanto para poeira como para radiação, é possível ver que a variável x , associada ao inverso do fator de Hubble H , decresce monotonicamente, afastando-se do seu valor inicial, próximo ao ponto fixo $x = 0$. A variável relacionada à curvatura do tri-espaco, β , cresce em módulo para longe de seus valores iniciais, próximos a $\beta = -1$. Nesse sentido, as perturbações destas duas variáveis se afastam de seus valores iniciais, próximos ao ponto fixo, tais quais as da variável λ , associada à derivada da função $\omega(\phi)$. Observa-se ainda que as perturbações em y , referentes ao inverso da função $\omega(\phi)$, permanecem constantes. Esta é a variável mais importante para o trabalho, já que se pretende determinar se $\omega(\phi)$ é capaz de assumir valores negativos com a evolução do colapso.

b) Agora o ponto fixo (b), que possui $x_0 = 0, y_0 \rightarrow 0, \lambda_0 = 1, \beta_0 = 0$ e $\gamma = 1$:

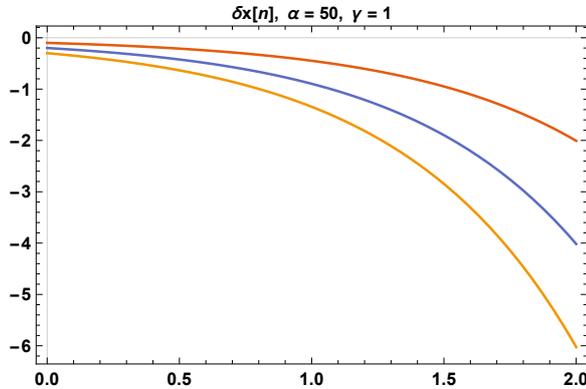


Figura 3.11: Evolução das perturbações em x para poeira. As condições iniciais para os gráficos azul, amarelo e laranja são, $(x_0 - 0.1, y_0 + \frac{y_0}{10}, \lambda_0 - 0.1, \beta_0 - 0.1)$, $(x_0 - 0.2, y_0 - \frac{y_0}{10}, \lambda_0 - 0.2, \beta_0 - 0.2)$ e $(x_0 - 0.3, y_0 + 2\frac{y_0}{10}, \lambda_0 - 0.3, \beta_0 - 0.3)$ respectivamente.

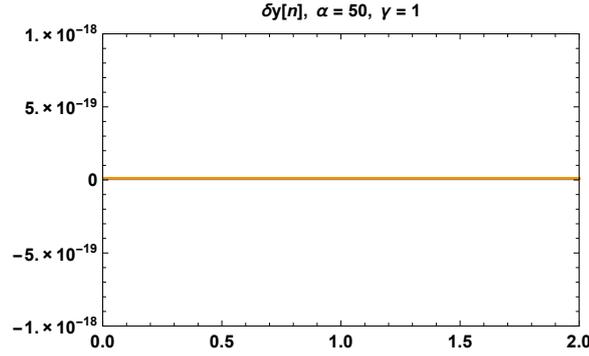


Figura 3.12: Evolução das perturbações em y para poeira. As condições iniciais para os gráficos azul, laranja e amarelo são, $(x_0 - 0.1, y_0 + \frac{y_0}{10}, \lambda_0 - 0.1, \beta_0 - 0.1)$, $(x_0 - 0.2, y_0 - \frac{y_0}{10}, \lambda_0 - 0.2, \beta_0 - 0.2)$ e $(x_0 - 0.3, y_0 + 2\frac{y_0}{10}, \lambda_0 - 0.3, \beta_0 - 0.3)$ respectivamente.

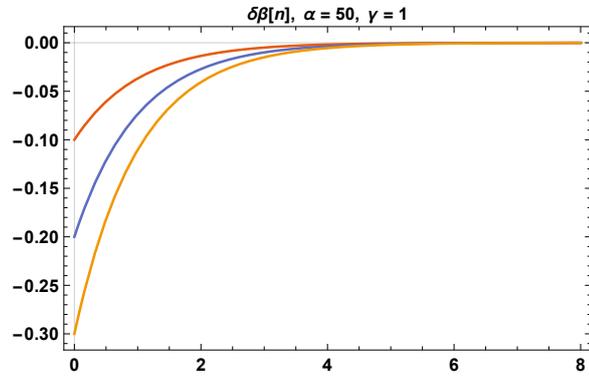


Figura 3.13: Evolução das perturbações negativas em β para poeira. As condições iniciais para os gráficos laranja, azul e amarelo são, $(x_0 - 0.1, y_0 + \frac{y_0}{10}, \lambda_0 - 0.1, \beta_0 - 0.1)$, $(x_0 - 0.2, y_0 - \frac{y_0}{10}, \lambda_0 - 0.2, \beta_0 - 0.2)$ e $(x_0 - 0.3, y_0 + 2\frac{y_0}{10}, \lambda_0 - 0.3, \beta_0 - 0.3)$ respectivamente.

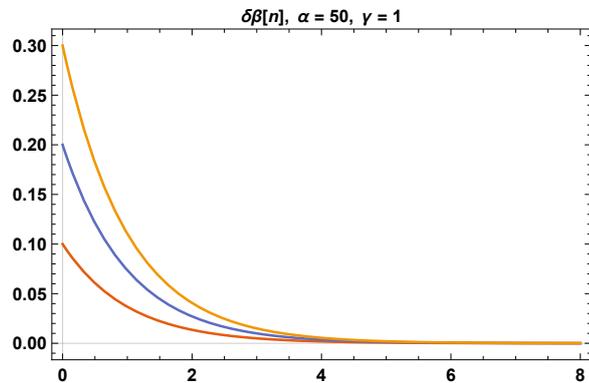


Figura 3.14: Evolução das perturbações positivas em β para poeira. As condições iniciais para os gráficos laranja, azul e amarelo são, $(x_0 - 0.1, y_0 + \frac{y_0}{10}, \lambda_0 - 0.1, \beta_0 + 0.1)$, $(x_0 - 0.2, y_0 - \frac{y_0}{10}, \lambda_0 - 0.2, \beta_0 + 0.2)$ e $(x_0 - 0.3, y_0 + 2\frac{y_0}{10}, \lambda_0 - 0.3, \beta_0 + 0.3)$ respectivamente.

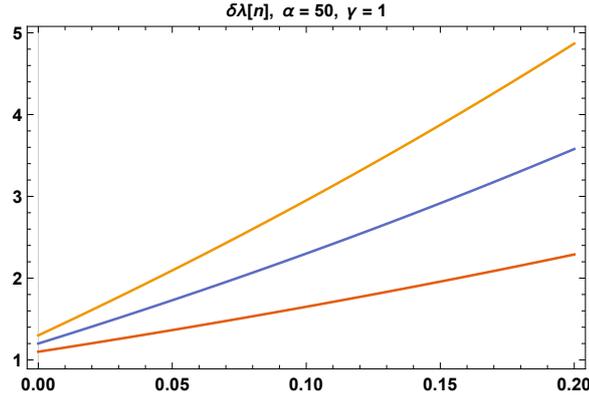


Figura 3.15: Evolução das perturbações positivas em λ para poeira, com $\lambda_0 = 1$. As condições iniciais para os gráficos azul, laranja e amarelo são, $(x_0 - 0.1, y_0 + \frac{y_0}{10}, \lambda_0 + 0.1, \beta_0 - 0.1)$, $(x_0 - 0.2, y_0 - \frac{y_0}{10}, \lambda_0 + 0.2, \beta_0 - 0.2)$ e $(x_0 - 0.3, y_0 + 2\frac{y_0}{10}, \lambda_0 + 0.3, \beta_0 - 0.3)$ respectivamente.

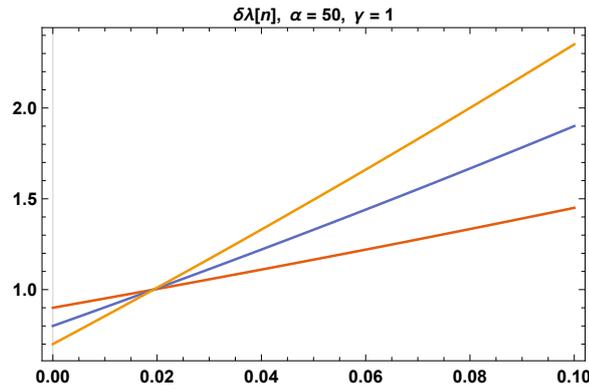


Figura 3.16: Evolução das perturbações negativas em λ para poeira, com $\lambda_0 = 1$. As condições iniciais para os gráficos laranja, azul e amarelo são, $(x_0 - 0.1, y_0 + \frac{y_0}{10}, \lambda_0 - 0.1, \beta_0 - 0.1)$, $(x_0 - 0.2, y_0 - \frac{y_0}{10}, \lambda_0 - 0.2, \beta_0 - 0.2)$ e $(x_0 - 0.3, y_0 + 2\frac{y_0}{10}, \lambda_0 - 0.3, \beta_0 - 0.3)$ respectivamente.

c) E por último o ponto fixo (c), que possui $x_0 = 0, y_0 \rightarrow 0, \lambda_0 = 1, \beta_0 = 0$ e $\gamma = 4/3$:

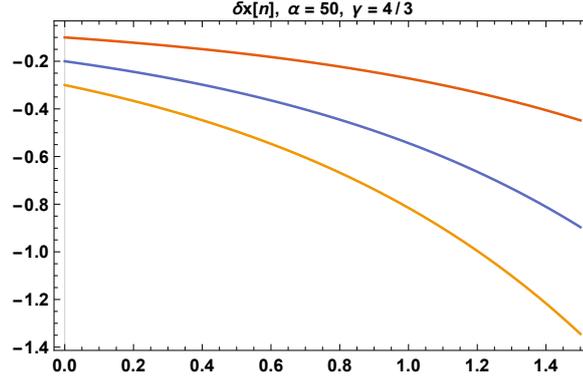


Figura 3.17: Evolução das perturbações em x para radiação. As condições iniciais para os gráficos azul, laranja e amarelo são, $(x_0 - 0.1, y_0 + \frac{y_0}{10}, \lambda_0 - 0.1, \beta_0 - 0.1)$, $(x_0 - 0.2, y_0 - \frac{y_0}{10}, \lambda_0 - 0.2, \beta_0 - 0.2)$ e $(x_0 - 0.3, y_0 + 2\frac{y_0}{10}, \lambda_0 - 0.3, \beta_0 - 0.3)$ respectivamente.

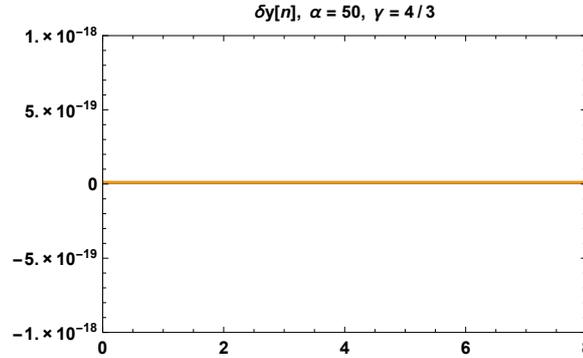


Figura 3.18: Evolução das perturbações em y para radiação. As condições iniciais para os gráficos azul, laranja e amarelo são, $(x_0 - 0.1, y_0 + \frac{y_0}{10}, \lambda_0 - 0.1, \beta_0 - 0.1)$, $(x_0 - 0.2, y_0 - \frac{y_0}{10}, \lambda_0 - 0.2, \beta_0 - 0.2)$ e $(x_0 - 0.3, y_0 + 2\frac{y_0}{10}, \lambda_0 - 0.3, \beta_0 - 0.3)$ respectivamente.

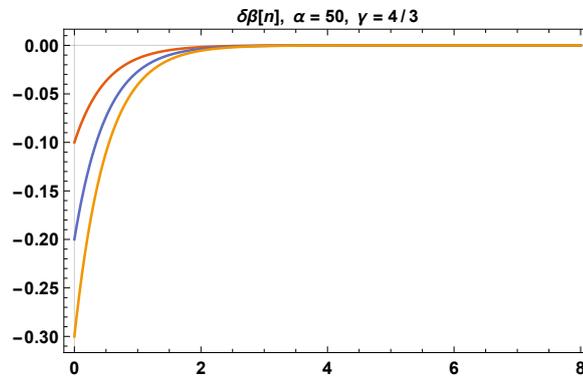


Figura 3.19: Evolução das perturbações negativas em β para radiação. As condições iniciais para os gráficos laranja, azul e amarelo são, $(x_0 - 0.1, y_0 + \frac{y_0}{10}, \lambda_0 - 0.1, \beta_0 - 0.1)$, $(x_0 - 0.2, y_0 - \frac{y_0}{10}, \lambda_0 - 0.2, \beta_0 - 0.2)$ e $(x_0 - 0.3, y_0 + 2\frac{y_0}{10}, \lambda_0 - 0.3, \beta_0 - 0.3)$ respectivamente.

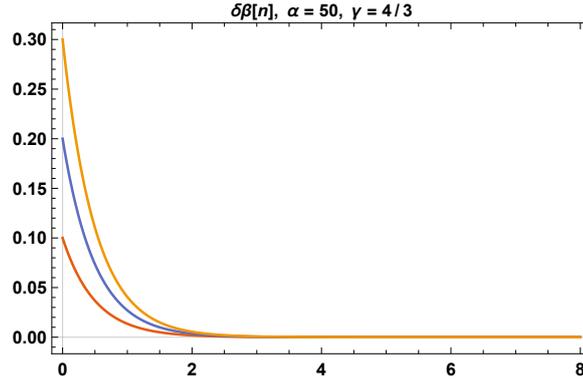


Figura 3.20: Evolução das perturbações positivas em β para poeira. As condições iniciais para os gráficos laranja, azul e amarelo são, $(x_0 - 0.1, y_0 + \frac{y_0}{10}, \lambda_0 - 0.1, \beta_0 + 0.1)$, $(x_0 - 0.2, y_0 - \frac{y_0}{10}, \lambda_0 - 0.2, \beta_0 + 0.2)$ e $(x_0 - 0.3, y_0 + 2\frac{y_0}{10}, \lambda_0 - 0.3, \beta_0 + 0.3)$ respectivamente.

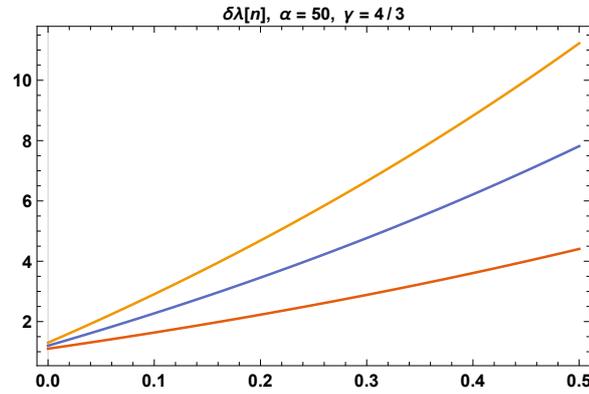


Figura 3.21: Evolução das perturbações positivas em λ para radiação, com $\lambda_0 = 1$. As condições iniciais para os gráficos azul, laranja e amarelo são, $(x_0 - 0.1, y_0 + \frac{y_0}{10}, \lambda_0 + 0.1, \beta_0 - 0.1)$, $(x_0 - 0.2, y_0 - \frac{y_0}{10}, \lambda_0 + 0.2, \beta_0 - 0.2)$ e $(x_0 - 0.3, y_0 + 2\frac{y_0}{10}, \lambda_0 + 0.3, \beta_0 - 0.3)$ respectivamente.

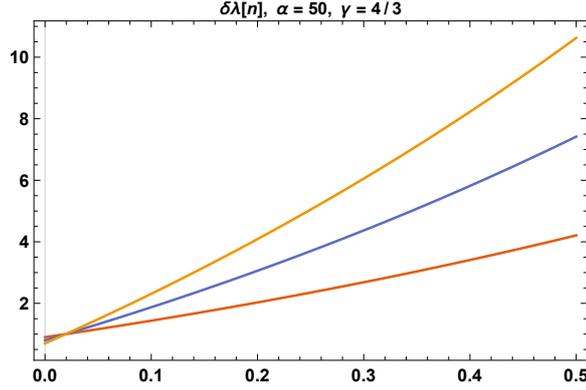


Figura 3.22: Evolução das perturbações negativas em λ para radiação, com $\lambda_0 = 1$. As condições iniciais para os gráficos laranja, azul e amarelo são, $(x_0 - 0.1, y_0 + \frac{y_0}{10}, \lambda_0 - 0.1, \beta_0 - 0.1)$, $(x_0 - 0.2, y_0 - \frac{y_0}{10}, \lambda_0 - 0.2, \beta_0 - 0.2)$ e $(x_0 - 0.3, y_0 + 2\frac{y_0}{10}, \lambda_0 - 0.3, \beta_0 - 0.3)$ respectivamente.

Ao contrário dos pontos fixos anteriores, para este ponto fixo, as seções do tri-espaco são planas, $k = 0$, de forma que os valores iniciais das perturbações da variável β são próximos a $\beta_0 = 0$. Para cada um dos valores iniciais, nota-se que o sistema tende a evoluir para $\beta = 0$. Por este motivo, verifica-se que $\beta = 0$ é estável, o que contrasta com casos anteriores (a.1) e (a.2), nos quais se observa um comportamento instável para β . As perturbações para x , y e λ , mantiveram seus comportamentos anteriores. Para simular essas perturbações foi utilizado o valor de $y_0 = 10^{-20}$.

Diante dos gráficos e comentários anteriores, é possível resumir os comportamentos das variáveis da seguinte forma:

- Variável x :

$x = 0$ é instável para cada um dos pontos fixos, ou seja, as perturbações se afastam de

$$x = \frac{\dot{\phi}}{H\phi} = 0 \Rightarrow \dot{\phi} = 0.$$

Este resultado é diferente daquele encontrado no artigo [44]. Para o caso do colapso gravitacional, o fato de x afastar de zero, implica que se está saindo da Relatividade Geral, já que nesta $\dot{\phi} = 0$. O resultado encontrado no artigo citado acima é o de que o sistema evolui de volta para o valor em que $x = 0$. Ou seja, o sistema evolui para a Relatividade Geral. O cenário estudado no referido artigo, no entanto, é um cenário cosmológico de um universo em expansão, no qual a definição da variável n é a inversa àquela de (3.47). Para os autores, conforme o tempo cresce o fator de escala também cresce. Desta forma, se os autores considerarem um universo em contração anterior ao período de expansão, o resultado encontrado será diferente do trabalho [44].

- Variável β :

O estudo para essa variável também é diferente do artigo [44], já que os autores consideraram apenas o caso de uma métrica de FLRW plana. Para o caso em que perturbou-se o ponto fixo $\beta_0 = -1$, tem-se que as perturbações crescem monotonicamente em módulo para longe de seus valores iniciais. Para $\beta_0 = 0$, há dois resultados consistentes para os dois tipos de perturbação, uma positiva e outra negativa. Para ambas perturbações $\beta = 0$ é um atrator, que é um resultado esperado, tendo em vista que quando se inicia com um universo plano, as perturbações de curvatura devem desaparecer para os dois casos.

- Variável λ :

Em todos os casos, as perturbações em λ crescem monotonicamente.

- Variável y :

É o resultado mais importante para o modelo, uma vez que as suas perturbações se mantiveram constantes e próximas a 0. O motivo para elas estarem em valores diferentes de 0 é uma questão numérica: não se pode colocar diretamente $y_0 = 0$ devido à estrutura das equações (3.58) e (3.61), nas quais y_0 aparece no denominador. É preciso, adicionalmente, destacar que $\omega(\phi)$ *tende* a infinito, portanto, y_0 *tende* a 0. A razão pela qual seu valor é constante pode ser vista a partir da equação (3.59). Esta é a equação de evolução da perturbação em y e, como se pode ver, ela é proporcional ao valor de seu ponto fixo y_0 . Sendo assim, ao se definir um valor inicial de $\delta y(0)$ próximo a y_0 , faz com que as perturbações em y , permaneçam fixas em seus valores iniciais durante todo o colapso, e assim o valor inicial de y não será alterado. Como o modelo exposto neste trabalho se inicia com $\omega(\phi) \rightarrow \infty$, sua tendência após uma pequena perturbação é de manter-se num valor próximo de $\omega(\phi) \rightarrow \infty$, desse modo, permanecerá positivo durante o colapso.

Como consequência, conclui-se que, a partir desta análise de pontos fixos, a função $\omega(\phi)$ se mantém positiva durante o colapso. Conforme colocado anteriormente, o seu sinal positivo contribui para a não existência de pontos de retorno na equação (3.46), não sendo possível evitar a singularidade final para $k = 0$ e $k = -1$.

Para o caso em que as seções do tri-espço são fechadas, $k = 1$, o sistema de equações (3.48-3.51) não possui um ponto fixo com $\beta > 0$ e $1 \leq \gamma \leq 4/3$. Desta forma, não se pode utilizar a abordagem anterior para garantir a impossibilidade de se ocorrer um ricochete, evitando, assim, a singularidade. Retornando-se as análises das equações de movimento, tem-se para $k = 1$

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = -\frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{\phi}}{\phi} + \frac{\omega(\phi)}{6} \frac{\dot{\phi}^2}{\phi} + \frac{\rho_m}{3\phi} - \frac{1}{a^2} \quad (3.62)$$

e,

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} = 2\frac{\dot{a}\dot{\phi}}{a\phi} - \frac{\omega(\phi)\dot{\phi}^2}{2\phi^2} + \frac{1}{2\phi(2\omega(\phi)+3)}\frac{d\omega}{d\phi}\dot{\phi}^2 - \frac{\rho_m}{3\phi}\left(\frac{2+\gamma\omega}{3+2\omega}\right) + \frac{1}{a^2}. \quad (3.63)$$

Escrevendo a equação (3.42) da seguinte maneira,

$$\dot{\phi} = \frac{1}{a^3\sqrt{2\omega+3}} \left[\int dt \frac{a^3\rho_m(4-3\gamma)}{\sqrt{2\omega+3}} + cte. \right] = \frac{B(t)}{a^3} \quad (3.64)$$

onde,

$$B(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega+3}} \left[\int dt \frac{\rho_0 a^{3-3\gamma}(4-3\gamma)}{\sqrt{2\omega+3}} + cte. \right] \quad (3.65)$$

e substituindo-a em (3.62),

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\rho_0}{3\phi a^{3\gamma}} + \frac{\omega}{6\phi^2} \frac{B^2(t)}{a^6} - \frac{\dot{a}B(t)}{\phi a^4} - \frac{1}{a^2} \quad (3.66)$$

pode-se tirar algumas conclusões:

- No caso em que $\omega(\phi) > 0$, o termo

$$\frac{\omega}{6\phi^2} \frac{B^2(t)}{a^6}$$

tem como máximo de contribuição, um comportamento tipo de matéria dura.

- O termo

$$-\frac{\dot{a}B(t)}{\phi a^4}$$

é positivo, já que $\dot{a} < 0$, desta forma ele também contribui para alcançar a singularidade em $a = 0$.

- O termo de matéria ordinária

$$\frac{\rho_0}{3\phi a^{3\gamma}}$$

como já sabemos, é positivo e, como se está tratando de fluidos perfeitos, não é capaz de evitar o colapso.

- Desse modo, o único termo que poderia evitar a singularidade final é proveniente do termo de curvatura

$$-\frac{1}{a^2}$$

que é negativo para $k = +1$. No início, tem-se Relatividade Geral, e a equação de Friedmann (3.37) pode ser escrita como,

$$H_0^2 = \frac{\rho_m}{3\phi_0} - \frac{1}{a_0^2}. \quad (3.67)$$

No entanto, como $H_0^2 \geq 0$, inicialmente, tem-se

$$\frac{\rho_m}{3\phi_0} \geq \frac{1}{a_0^2}. \quad (3.68)$$

Observa-se que o termo da densidade de matéria é maior que o termo de curvatura, inicialmente, e com a evolução do sistema o termo de curvatura nunca poderá ser maior que as outras contribuições, já que todas elas são positivas, contanto que $\omega(\phi) > 0$,

$$\frac{1}{a^2} < \frac{\omega}{6\phi^2} \frac{B^2(t)}{a^6} + \frac{\rho_0}{3\phi a^{3\gamma}} - \frac{\dot{a}B(t)}{\phi a^4}. \quad (3.69)$$

Para mostrarmos a incapacidade de se evitar a singularidade, portanto, deve-se mostrar que o sinal da função $\omega(\phi)$ é sempre positivo durante o colapso.

Ao contrário dos casos $k = 0, -1$, não foi identificado um argumento conclusivo a discussão a respeito do sinal de $\omega(\phi)$ para $k = 1$. Nesse sentido, será apresentada uma discussão a respeito do comportamento da função no início do colapso.

Considerando a equação de movimento para o campo escalar

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} - \frac{1}{2\omega + 3} [(4 - 3\gamma)\rho_m] + \frac{\dot{\phi}\dot{\omega}(\phi)}{2\omega + 3} = 0, \quad (3.70)$$

no começo do colapso, onde se encontra na Relatividade Geral, pode-se argumentar que

$$|\ddot{\phi}| \ll \left| \frac{\dot{a}\dot{\phi}}{a} \right|. \quad (3.71)$$

Ou seja, o termo de fricção da equação (3.70) é muito maior que o termo de segunda derivada do campo escalar, de forma análoga ao encontrado na situação de *slow-roll* na teoria de inflação da cosmologia. Desta maneira, desconsidera-se o primeiro termo de (3.70). Além disso, $\omega_0 \gg 1$, o que permite desconsiderar o terceiro termo da mesma equação, uma vez que todas as outras grandezas neste momento são finitas e menores que o denominador. Como resultado tem-se:

$$\frac{\dot{\omega}}{2\omega + 3} \approx -3\frac{\dot{a}}{a} \quad (3.72)$$

onde o termo do lado direito é sempre positivo durante a contração.

A partir de (3.72) observa-se que, inicialmente, a derivada temporal da função $\omega(\phi)$ é positiva. Em razão disso, a função deverá aumentar ainda mais seu valor inicial, mantendo-se ainda mais próxima de seu valor na Relatividade Geral, contribuindo mais intensamente para o colapso. Conforme exposto, na equação de Friedmann modificada

(3.66), a única possibilidade de se evitar a singularidade final, é caso o termo da função de acoplamento do termo cinético $\omega(\phi)$ assuma valores negativos. A mesma função, todavia, inicia-se já em crescimento tendendo ainda mais para infinito, o que, por consequência, dificultará a mesma assumir valores negativos. Esta discussão não se propõe a ser uma prova final para $k = 1$. Porém, cabe argumentar que este comportamento inicial da função pode ser um indício de que sua tendência não seja diferente dos casos anteriores de $k = 0, -1$.

Capítulo 4

Conclusão

4.1 Conclusão e Perspectivas:

Nessa dissertação estudou-se a viabilidade de um modelo de colapso gravitacional que evite a singularidade, através de uma teoria modificada de gravitação sujeita a determinadas condições iniciais. Há na literatura [8] modelos que evitam o colapso gravitacional por meio de correções quânticas, a maioria destes modelos é proveniente da teoria de gravitação quântica conhecida como Loop Quantum Gravity. O trabalho, primeiramente, focou na ideia de se obter um ricochete para o caso de um colapso gravitacional. A inspiração para isso veio de modelos cosmológicos onde o universo é não-singular. Tais modelos não-singulares existem na literatura para Teorias Escalares Tensoriais e de Brans-Dicke como as soluções [17, 22, 47], no entanto, estes modelos são em teorias que não apresentam em sua evolução nenhum regime de Relatividade Geral. Buscou-se, nesta dissertação, identificar se havia, ou não, dada condição inicial da Relatividade Geral, a possibilidade da teoria evoluir para uma teoria estendida de gravitação, no caso Brans-Dicke Estendida, e assim evitar a singularidade. Esta possibilidade, entretanto, não se concretizou para os casos em que se tem seções do tri-espaco com $k = 0, -1$. Já para o caso $k = 1$, obteve-se apenas indícios deste comportamento, sem que fosse possível fechar um argumento final.

Um resultado interessante da Relatividade Geral que condiciona a existência de um ricochete cosmológico, é o de [41], onde se argumenta não ser possível termos um ricochete apenas com a presença de fluidos perfeitos. Desta forma, pode-se traçar um paralelo com a necessidade apresentada neste trabalho, de se ter a função $\omega(\phi)$ assumindo valores negativos, com o argumento presente no referido artigo. Caso esta função tivesse um sinal negativo, o campo escalar teria densidade de energia negativa, e poderia funcionar como o fluido que causaria o ricochete. Portanto, ao invés de haver a contribuição de matéria dura, como apontou-se no capítulo anterior, teria-se uma contribuição de um fluido com densidade de energia negativa, sendo assim possível a equação (3.46) possuir pontos de

retorno.

Um caminho futuro para o trabalho é a introdução de um termo de potencial na ação da Brans-Dicke Extendida. No estudo citado anteriormente [44], os autores realizam uma análise de sistemas dinâmicos na presença de um potencial lei de potência. A escolha para um potencial deste tipo é motivada pelo tratamento utilizado por eles através da introdução de novas variáveis dinâmicas. A ideia para o prosseguimento da presente dissertação é desenvolver uma análise próxima a dos autores de [44] só que para o caso de um colapso gravitacional e com k arbitrário.

Nesse trabalho foi utilizado somente um cenário de gravitação modificada, ou seja, não se introduziu nenhum mecanismo dinâmico a mais, fora a adição de um campo escalar. Uma possibilidade futura seria o acréscimo de mecanismos que pudessem trocar o sinal do termo de $\omega(\phi)$ em (3.46). Mecanismos de *screening* [11, 30], como modelos de *chameleons* [31, 32] e *symmetrons* [25], se encaixariam bem nesse propósito, pois são frequentemente utilizados na literatura, principalmente no contexto de estudar Energia Escura. Estes mecanismos são introduzidos no Referencial de Einstein, isto é, no referencial onde se tem acoplamento mínimo entre o campo escalar e a métrica, mas o acoplamento com a matéria depende de uma função arbitrária do campo escalar. O mecanismo de *chameleons*, por exemplo, opera sempre quando um campo escalar se acopla com a matéria de maneira não trivial, e assim a sua massa efetiva acaba dependendo da densidade local de matéria. Portanto é interessante estudarmos o sinal que a função $\omega(\phi)$ pode assumir neste cenário.

Referências Bibliográficas

- [1] Richard L. Arnowitt, Stanley Deser, and Charles W. Misner. The Dynamics of general relativity. *Gen. Rel. Grav.*, 40:1997–2027, 2008.
- [2] C. Barrabes and W. Israel. Thin shells in general relativity and cosmology: The Lightlike limit. *Phys. Rev.*, D43:1129–1142, 1991.
- [3] John D. Barrow. Nonsingular scalar - tensor cosmologies. *Phys. Rev.*, D48:3592–3595, 1993.
- [4] John D. Barrow and Kei-ichi Maeda. Extended inflationary universes. *Nucl. Phys.*, B341:294–308, 1990.
- [5] V. A. Belinski and I. M. Khalatnikov. Effect of Scalar and Vector Fields on the Nature of the Cosmological Singularity. *Sov. Phys. JETP*, 36:591, 1973.
- [6] B. Bertotti, L. Iess, and P. Tortora. A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft. *Nature*, 425:374–376, 2003.
- [7] Martin Bojowald. *Canonical Gravity and Applications Cosmology, Black Holes, and Quantum Gravity*. Cambridge University Press, 2010.
- [8] Martin Bojowald, Rituparno Goswami, Roy Maartens, and Parampreet Singh. A Black hole mass threshold from non-singular quantum gravitational collapse. *Phys. Rev. Lett.*, 95:091302, 2005.
- [9] W. B. Bonnor and P. A. Vickers. Junction conditions in general relativity. *General Relativity and Gravitation*, 13(1):29–36, Jan 1981.
- [10] C. Brans and R. H. Dicke. Mach’s principle and a relativistic theory of gravitation. *Phys. Rev.*, 124:925–935, 1961.
- [11] Philippe Brax. Screened modified gravity. *Acta Phys. Polon.*, B43:2307–2329, 2012.
- [12] Y. M. Cho. Reinterpretation of jordan-brans-dicke theory and kaluza-klein cosmology. *Phys. Rev. Lett.*, 68:3133–3136, May 1992.

- [13] Y M Cho. Quantum violation of the equivalence principle in brans - dicke theory. *Classical and Quantum Gravity*, 14(10):2963, 1997.
- [14] G Darmois. Mémorial des sciences mathématiques (gauthier-villars, paris), fasc. 25. *Google Scholar*, 1927.
- [15] R. H. Dicke. Mach's principle and invariance under transformation of units. *Phys. Rev.*, 125:2163–2167, Mar 1962.
- [16] Jibitesh Dutta and H. Zonunmawia. Complete cosmic scenario in the Randall-Sundrum braneworld from the dynamical systems perspective. *Eur. Phys. J. Plus*, 130(11), 2015.
- [17] Júlio C. Fabris, Bertrand Chauvineau, Davi C. Rodrigues, Carla R. Almeida, and Oliver F. Piattella. New views on classical and quantum Brans-Dicke theory. 2016.
- [18] Felipe T. Falciano, Marc Lilley, and Patrick Peter. A Classical bounce: Constraints and consequences. *Phys. Rev.*, D77:083513, 2008.
- [19] Valerio Faraoni and Salvatore Capozziello. *Beyond Einstein Gravity*, volume 170. Springer, Dordrecht, 2011.
- [20] Megan Govender, Sunil Maharaj, and Roy Maartens. A causal model of radiating stellar collapse. *Class. Quant. Grav.*, 15:323, 1998.
- [21] Michael B. Green, J. H. Schwarz, and Edward Witten. *SUPERSTRING THEORY. VOL. 1: INTRODUCTION*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. 1988.
- [22] L. E. Gurevich, A. M. Finkelstein, and V. A. Ruban. On the problem of the initial state in the isotropic scalar-tensor cosmology of brans-dicke. *Astrophysics and Space Science*, 22(2):231–242, Jun 1973.
- [23] Edward R. Harrison. Scalar-tensor theory and general relativity. *Phys. Rev.*, D6:2077–2079, 1972.
- [24] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2011.
- [25] Kurt Hinterbichler, Justin Khoury, Aaron Levy, and Andrew Matas. Symmetron Cosmology. *Phys. Rev.*, D84:103521, 2011.
- [26] Damien J. Holden and David Wands. Phase - plane analysis of Friedmann-Robertson-Walker cosmologies in Brans-Dicke gravity. *Class. Quant. Grav.*, 15:3271–3290, 1998.

- [27] W Israel. Discontinuities in spherically symmetric gravitational fields and shells of radiation. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 248, pages 404–414. The Royal Society, 1958.
- [28] Werner Israel. Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity. *Il Nuovo Cimento B (1965-1970)*, 44(1):1–14, 1966.
- [29] Pankaj S. Joshi. *Gravitational Collapse and Spacetime Singularities*. Cambridge University Press, 2012.
- [30] Justin Khoury. Theories of Dark Energy with Screening Mechanisms. 2010.
- [31] Justin Khoury. Chameleon Field Theories. *Class. Quant. Grav.*, 30:214004, 2013.
- [32] Justin Khoury and Amanda Weltman. Chameleon cosmology. *Phys. Rev.*, D69:044026, 2004.
- [33] Shawn J. Kolitch. Qualitative analysis of Brans-Dicke universes with a cosmological constant. *Annals Phys.*, 246:121–132, 1996.
- [34] Shawn J. Kolitch and Douglas M. Eardley. Behavior of Friedmann-Robertson-Walker cosmological models in scalar - tensor gravity. *Annals Phys.*, 241:128–151, 1995.
- [35] André Lichnerowicz and T Teichmann. Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme. *Physics Today*, 8:24, 1955.
- [36] Dieter Lorenz-Petzold. *Exact Brans-Dicke-Bianchi solutions*, pages 403–435. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1984.
- [37] S O'brien. Synge, j , condition jump and discontinuities in general relativity. com. *Dublin Institute for Advanced Studies, A*, 9, 1952.
- [38] J. R. Oppenheimer and H. Snyder. On Continued gravitational contraction. *Phys. Rev.*, 56:455–459, 1939.
- [39] R. Penrose. Gravitational collapse: The role of general relativity. *Riv. Nuovo Cim.*, 1:252–276, 1969. [Gen. Rel. Grav.34,1141(2002)].
- [40] Roger Penrose. Gravitational collapse and space-time singularities. *Phys. Rev. Lett.*, 14:57–59, 1965.
- [41] Patrick Peter and Nelson Pinto-Neto. Primordial perturbations in a non singular bouncing universe model. *Phys. Rev.*, D66:063509, 2002.
- [42] C. Romero and A. Barros. Brans-Dicke cosmology and the cosmological constant: the spectrum of vacuum solutions. *Astrophys. Space Sci.*, 192:263–274, 1992.

- [43] C. Romero and A. Barros. Does Brans-Dicke theory of gravity go over to the general relativity when $\omega \rightarrow \infty$? *Phys. Lett.*, A173:243–246, 1993.
- [44] Nandan Roy and Narayan Banerjee. Generalized brans-dicke theory: A dynamical systems analysis. *Phys. Rev. D*, 95:064048, Mar 2017.
- [45] Caroline Santos and Ruth Gregory. Cosmology in Brans-Dicke theory with a scalar potential. *Annals Phys.*, 258:111–134, 1997.
- [46] D. W. Sciama. On the origin of inertia. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 113:34, 1953.
- [47] D. A. Tretyakova, A. A. Shatskiy, I. D. Novikov, and S. Alexeyev. Non-singular Brans-Dicke cosmology with cosmological constant. *Phys. Rev.*, D85:124059, 2012.
- [48] P. C. Vaidya. An Analytical Solution for Gravitational Collapse with Radiation. , 144:943, June 1966.
- [49] Vitalii Vertogradov. Gravitational collapse of vaidya spacetime. *International Journal of Modern Physics: Conference Series*, 41:1660124, 2016.
- [50] J. F. Villas da Rocha, Anzhong Wang, and N. O. Santos. Gravitational collapse of perfect fluid. *Phys. Lett.*, A255:213–220, 1999.
- [51] Jaime F Villas da Rocha. Type II fluid solutions to Einstein’s field equations in n -dimensional spherical space-times. *Int. J. Mod. Phys.*, D11:113–124, 2002.
- [52] Robert V. Wagoner. Scalar-tensor theory and gravitational waves. *Phys. Rev. D*, 1:3209–3216, Jun 1970.
- [53] Robert M. Wald. *General Relativity*. 1984.
- [54] David Wands. Extended gravity theories and the Einstein-Hilbert action. *Class. Quant. Grav.*, 11:269–280, 1994.
- [55] Anzhong Wang and Yumei Wu. Generalized Vaidya solutions. *Gen. Rel. Grav.*, 31:107, 1999.
- [56] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology*. John Wiley and Sons, New York, 1972.
- [57] C. M. Will. *Theory and experiment in gravitational physics*. 1993.