CBPF – Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Dissertação de Mestrado

Testando teorias de gravitação modificada com lentes gravitacionais

Fernanda Araujo de Oliveira

Orientador
Dr. Martin Makler
Coorientador
Dr. Santiago Esteban Perez Bergliaffa

Rio de Janeiro, RJ
2022

CBPF Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
SUBORDINADA AO MCTI

MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÕES

"TESTANDO TEORIAS DE GRAVITAÇÃO MODIFICADA COM LENTES GRAVITACIONAIS"

FERNANDA ARAUJO DE OLIVEIRA

Dissertação de Mestrado em Física apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Ministério da Ciência Tecnologia e Inovação. Fazendo parte da banca examinadora os seguintes professores:

Martin Makler – Orientador/CBPF

Santiago Esteban Perez Bergliaffa – Coorientador/ UERJ

Armando Bartolome Bernui Leo – Observatório Nacional

Felipe Tovar Falciano - CBPF

Rio de Janeiro, 05 de setembro de 2022.

Fernanda Araujo de Oliveira

Testando teorias de gravitação modificada com lentes gravitacionais

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física.

CBPF – Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Orientador: Dr. Martin Makler
Coorientador: Dr. Santiago Esteban Perez Bergliaffa

Rio de Janeiro, RJ
2022

de Oliveira, Fernanda Araujo
Testando teorias de gravitação modificada
com lentes gravitacionais/ Fernanda Araujo de Oliveira. - 2022
46 f. : il.

Dissertação de Mestrado – CBPF – Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas , Rio de Janeiro, RJ, 2022.
Orientador: Dr. Martin Makler

1. Cosmologia. 2. Lenteamento Gravitacional. 3. Teorias de Gravitação Modificada. 4. Teorias Beyond Horndeski. I. Testando teorias de gravitação modificada com lentes gravitacionais
CDU 02:141:005.7

Agradecimentos

À minha mãe, por todo suporte emocional e financeiro ao longo de toda minha vida. Sem ela, eu não estaria aqui hoje, terminando meu mestrado em uma instituição pública de qualidade.

Ao meu orientador Martin Makler e ao meu co-orientador Santiago Esteban Perez Bergliaffa, pela grande ajuda, paciência e orientação.

Ao meu namorado Isaque Porto de Freitas, que está ao meu lado desde o meu primeiro período da faculdade, por toda ajuda em disciplinas e emocional ao longo de todo esse tempo. Obrigada por ser meu grande amigo.

Às minhas amigas da época do colégio, que permanecem comigo até hoje, Paula Sant'ana, Joice Brito, Beatriz Alves e Fernanda Eugênia. Obrigada pelos momentos de distração, diversão e muita reclamação ao longo desses anos na universidade e na pós-graduação.

E, por fim, ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF) e ao seu corpo de pesquisadores pela oportunidade de fazer o mestrado com ótimos profissionais.

"O mundo precisa da ciência e a ciência precisa das mulheres."

Irina Bokova

Resumo

Nesta dissertação apresentaremos um teste de teorias alternativas à Relatividade Geral, em especial as teorias *Beyond Horndeski*, utilizando a combinação do efeito forte de lente gravitacional com a dinâmica estelar de galáxias. Nestas teorias, a razão entre os potenciais Φ e Ψ, que aparecem como perturbações escalares na métrica de FLRW, é diferente de um. A diferença entre esses potenciais pode ser testada comparando a massa inferida a partir dos fótons - massa *lensing* - com a massa inferida do movimento de objetos luminosos - massa dinâmica. Neste trabalho consideraremos, em particular, a medida da dispersão de velocidade estelar de galáxias - sensível apenas ao potencial Φ - e, simultaneamente, o efeito de lente gravitacional - sensível à soma dos dois potenciais. Serão apresentados os cálculos referentes à expressão da dispersão de velocidades e à equação da lente com a inserção de termos oriundos das teorias *Beyond Horndeski*. A partir destas expressões, será obtida uma expressão para a dispersão de velocidades medida em espectros (ou seja, considerando os efeitos observacionais), conectando a dinâmica com o efeito de lentes. Utilizando essa expressão juntamente com medidas da dispersão de velocidades e do raio de Einstein, é possível obter limites sobre parâmetros das teorias de gravidade modificada. Por fim, os dados que podem ser utilizados para uma futura implementação numérica e como sua análise pode ser feita serão discutidos.
Palavras Chaves: Cosmologia; Gravitação Modificada; Lentes Gravitacionais.

Abstract

In this master thesis we will present a test of alternative theories of General Relativity, especially the *Beyond Horndeski* theories, using the combination of strong lensing effect with galaxies stellar dynamics. In these theories, the ratio between the potentials Φ and Ψ, which appear as scalar perturbations in the FLRW metric, is different from one. The difference bewtween these potentials can be tested comparing the mass inferred from the photons - *lensing* mass - with the mass inferred from the movement of luminous objects - dynamical mass. In this work we will consider, in particular, the measure of the stellar velocity dispersion - sensitive only to the Φ potential - and, simultaneously, the gravitational lensing effect - sensitive to the sum of both potentials. We will show the calculations referring to the expressions of velocity dispersion and lens equation with the terms derived from *Beyond Horndeski* theories. From these expressions, it will be obtained an expression for the velocity dispersion measured in spectrum (i.e. considering the observational effects), conecting the dynamics with the lensing effect. Using this expression with measures of the velocity dispersion and the Einstein radius, it is possible to obtain limits on modified gravity parameters. Finally, the data that can be used for a numerical implementation in the future and how its analysis can be done will be shown.
Key-Words: Cosmology; Modified Gravity; Gravitational Lensing.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Lista de abreviaturas e siglas

CBPF	Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
RG	Relatividade Geral
FLRW	Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker
GM	Gravitação Modificada
BH	Beyond Horndeski

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O modelo ΛCDM é o mais utilizado para descrever o Universo devido ao seu bom acordo com dados provenientes de observações em diferentes etapas da evolução do Universo [1]. Este modelo usa a Relatividade Geral como teoria gravitacional e se baseia nas hipóteses de isotropia e homogeneidade em grandes escalas - o Princípio Cosmológico ([2], [3]). Com o sucesso da Relatividade Geral em prever diversos fenômenos, como a deflexão da luz por um campo gravitacional [4] e as ondas gravitacionais [5], pode-se pensar por que seria interessante buscar e testar teorias alternativas de gravitação.

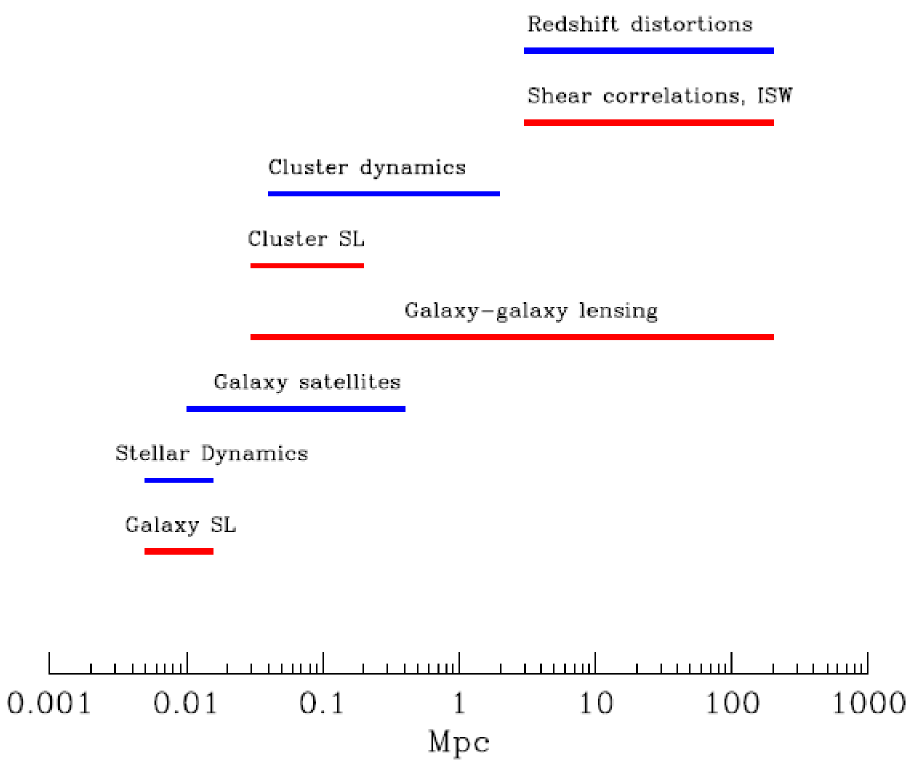
Apesar dos bem sucedidos testes observacionais, o modelo ΛCDM ainda possui problemas em aberto que as teorias alternativas buscam resolver. Entre eles, destacam-se os associados à matéria necessária para descrever a etapa atual de expansão cósmica acelerada e que representa cerca de 70 % do conteúdo de matéria do Universo [1], seja ela a constante cosmológica [6] ou a energia escura [7]. Outro problema em aberto é o da matéria escura, necessária para descrever as curvas de rotação das galáxias e a formação de estruturas [8].

Então, abriram-se possibilidades para teorias alternativas que descrevessem a interação gravitacional - como as teorias $f(R)$ [9, 10], Horndeski [11] e outras - com o objetivo de explicar e resolver os problemas do modelo. Uma das ferramentas que pode ser utilizada para testar a Relatividade Geral e as teorias alternativas são as lentes gravitacionais.

A observação da deflexão da luz por um campo gravitacional durante o eclipse de 1919 em Sobral comprovou a previsão da Relatividade Geral e abriu portas à uma nova área de pesquisa: o lenteamento gravitacional. As lentes gravitacionais são ferramentas com diversas aplicações na astrofísica e cosmologia: permitem mapear a matéria escura e determinar a massa de objetos distantes; determinar a estrutura de galáxias e aglomerados e testar teorias gravitacionais, entre outras aplicações [12].

Além das lentes gravitacionais, existem outras diversas formas de se testar teorias alternativas à RG no regime de curvatura intermediária, como o uso de dinâmica estelar e de distorções de redshift. Neste trabalho utilizaremos as lentes gravitacionais como ferramenta para testar essas teorias por abranger um maior alcance em diferentes escalas, como pode ser visto no gráfico abaixo [13]:

Figura 1.1 – Observáveis possíveis para testar teorias de gravitação modificada



Legenda: A figura mostra os observáveis que podem ser usados para testar gravidade modificada em diferentes escalas. O lenteamento gravitacional é a ferramenta com maior alcance dentre as conhecidas.

Fonte: JAIN; KHOURY, 2010 [13].

As linhas vermelhas mostram observações feitas a partir do uso do lenteamento forte e fraco[1]. As linhas azuis representam medidas dinâmicas baseadas no movimento de estrelas, galáxias ou outros objetos não-relativísticos.

Há alguns anos, estaríamos limitados a realizar o teste de teorias alternativas com poucos sistemas e dados pouco precisos. Ao longo da última década, o número de sistemas de anéis de Einstein disponíveis aumentou consideravelmente através de novas observações, além do avanço tecnológico que permitiu que os novos dados sejam mais precisos que os anteriores.

Neste trabalho, o foco será testar teorias de gravitação modificada - em especial as teorias *Beyond Horndeski* [14] - com o uso de lenteamento gravitacional forte de objetos

[1] A diferença entre lenteamento forte e fraco será abordada posteriormente no capítulo referente às Lentes Gravitacionais.

em escala galáctica, utilizando dados de anéis de Einstein e da dispersão de velocidades estelar obtidos de observações de lentes gravitacionais. A combinação de lenteamento forte e dinâmica para testar teorias gravitacionais pode ser encontrada em trabalhos como [15], [16] e [17].

Uma forma mais geral de ver as assinaturas observáveis das teorias de gravitação modificada é considerar a métrica perturbada de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) [18]:

$$ds^2 = a^2(\tau)[-(1+2\Phi)d\tau^2 + 2w_i dx^i d\tau + [(1-2\Psi)\gamma_{ij} + 2s_{ij}]dx^i dx^j], \tag{1.1}$$

em que Φ é o potencial Newtoniano, Ψ é o potencial de curvatura - ambos associados a perturbações escalares - , w_i é o potencial gravitomagnético - associado à perturbações vetoriais - e s_{ij} é o tensor de ondas gravitacionais - associado à perturbações tensoriais. Somente as perturbações escalares se acoplam com a matéria. Por isso, vamos considerar a métrica perturbada de FLRW somente com esse tipo de perturbação:

$$ds^2 = a^2(\tau)[-(1+2\Phi)d\tau^2 + (1-2\Psi)\gamma_{ij}dx^i dx^j]. \tag{1.2}$$

A métrica (1.2) é chamada de métrica Newtoniana conforme e, quando os potenciais Φ e Ψ são iguais - caso da RG na ausência de tensão anisotrópica - a métrica é conforme à métrica de campo fraco usada no limite Newtoniano. Veremos então como a partículas se deslocam na métrica perturbada de FLRW.

A equação geodésica que descreve o movimento de uma partícula em um espaço-tempo curvo em coordenadas arbitrárias é [19]:

$$\frac{d^2x^m}{d\lambda^2} + \Gamma^m_{kl}\frac{dx^k}{d\lambda}\frac{dx^l}{d\lambda} = 0, \tag{1.3}$$

em que λ é o parâmetro afim. Para partículas com massa, é exigido que $ds/d\lambda$ seja constante ao longo da trajetória da partícula, o que ocorre quando escolhe-se $\lambda = s$. Neste caso, $ds/d\lambda = 1$, obtendo-se a seguinte relação [19]:

$$g_{ik}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 1. \tag{1.4}$$

Esta relação nos fornece a primeira integral da equação geodésica.

No caso dos fótons, partículas sem massa, $ds = 0$.

$$g_{ik}\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^k}{d\lambda} = 0. \tag{1.5}$$

Partículas em queda livre se movem conforme a geodésica (1.3) e obedecem às seguintes equações de movimento [18]:

$$\frac{dx^i}{d\tau} = (1+\Phi+\Psi)v^i, \tag{1.6}$$

$$\frac{1}{\gamma a(1-\Psi)}\frac{d}{d\tau}[\gamma a(1-\Psi)v^i] = -\nabla^i(\Phi + v^2\Psi) - (1+\Phi+\Psi)\gamma^i_{jk}v^j v^k, \tag{1.7}$$

em que a é o fator de escala, v^i é a velocidade tridimensional própria de um observador móvel, $v^2 = \gamma_{ij}v^i v^j$, γ é o fator de Lorentz e γ^i_{jk} é a conexão espacial que é necessária quando se usa coordenadas não-Cartesianas.

As equações de movimento são simplificadas no limite $v \to 0$ (partículas não relativísticas) e $v \to 1$ (partículas sem massa). Para o primeiro caso, temos [18]:

$$\frac{1}{a}\frac{d(a\vec{v})}{d\tau} = -\vec{\nabla}\Phi. \tag{1.8}$$

E, para o segundo caso:

$$\frac{d\vec{v}}{d\tau} = \vec{\nabla}_\perp(\Phi + \Psi), \tag{1.9}$$

em que o gradiente é tomado perpendicularmente ao plano da trajetória do fóton.

$$\nabla^i_\perp = \nabla^i - v^i v_j \nabla^j. \tag{1.10}$$

A partir das equações (1.8) e (1.9), vemos a importância de combinar a dinâmica estelar e o efeito de lenteamento gravitacional para testar teorias de gravitação modificada. Essas equações nos dizem que partículas massivas, ou seja, partículas não relativísticas, são sensíveis somente ao potencial Φ, enquanto que partículas sem massa - relativísticas - são sensíveis à soma dos dois potenciais [18]. Como já abordado, na RG, os potenciais são iguais. Porém, na gravitação modificada, a razão entre estes potenciais pode ser diferente de um.

Precisaremos partir da lagrangiana de uma teoria de gravidade modificada para encontrar as equações de movimento e realizar o teste, buscando as modificações na equação da lente e na expressão referente à dispersão de velocidades observada. Como veremos, surgirão novos termos oriundos de teorias de gravitação modificada. Estes termos possuem valor igual a zero na Relatividade Geral [20] e suas medidas permitem colocar limites nas modificações da gravidade.

Este trabalho está organizado da seguinte forma:

No Capítulo 2, apresentamos as motivações para buscarmos teorias de gravitação modificada, as características gerais e as lagrangianas das teorias escolhidas, a métrica perturbada de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), onde surgirá uma das principais assinaturas das teorias alternativas à RG, e seus efeitos nas equações de movimento para partículas massivas e sem massa.

No Capítulo 3 será apresentada a ferramenta a ser utilizada para o teste das teorias alternativas neste trabalho, que são as lentes gravitacionais. Apresentaremos algumas variáveis importantes, o modelo de lente fina com perfil de densidade de massa definido por uma lei de potência e obteremos a equação da lente a partir da geometria e da geodésica para os fótons.

No Capítulo 4, mostraremos a equação de Jeans e obteremos uma expressão para a dispersão de velocidades, importante parâmetro a ser utilizado neste trabalho, para o caso do modelo de lente apresentado no capítulo anterior.

No Capítulo 5, serão apresentados os testes de teorias de gravitação modificada presentes na literatura e que serviram de base para este trabalho. Também serão apresentados os resultados obtidos para a equação da lente e a dispersão de velocidades com a inserção dos termos oriundos das teorias Beyond Horndeski - que foram as teorias alternativas à RG escolhidas neste trabalho. Por fim, apresentaremos tabelas com dados de diferentes *surveys* que podem ser usados futuramente para uma implementação numérica da expressão obtida para a dispersão de velocidades e um caminho possível para esta implementação.

Nas Considerações Finais, apresentamos as conclusões deste trabalho e suas possíveis extensões.

Capítulo 2

Gravitação Modificada

A teoria da Relatividade Geral é um dos pilares da física moderna e tem respondido bem aos mais precisos testes. Logo, pode-se pensar no porquê de se buscar teorias alternativas à Relatividade Geral. Como já abordado, o modelo ΛCDM, que adota a RG como teoria gravitacional, apresenta problemas. Um deles é com relação a energia escura. Segundo este modelo, 70% da densidade total de energia corresponde ao vácuo e sua contribuição é representada pela constante cosmológica Λ, que permite ajustar bem os dados de observáveis como as supernovas, a Radiação Cósmica de Fundo, as Oscilações Acústicas de Bárions, etc., mas que apresenta problemas [21]. Uma das possibilidades para resolvê-los é supor que a constante cosmológica é uma quantidade efetiva, consequência da evolução de um campo escalar, por exemplo. Esta é a ideia dos modelos que adotam a energia escura [22].

Contudo, esta interpretação apresenta problemas conceituais, como os associados à constante cosmológica. Nenhuma solução dinâmica para Λ - soluções em que a constante cosmológica dependerá do tempo ou do conteúdo que domina a evolução da Universo - é viável considerando a RG, o que leva que as correções para a RG se voltem para escalas cosmológicas. Isto sugere que a Relatividade Geral deve ser modificada em escalas de baixas curvaturas [23].

Um guia para classificar as teorias clássicas alternativas à RG é o Teorema de Lovelock. Seu enunciado diz [23]: "Em quatro dimensões de espaço-tempo, o único tensor simétrico de ranque-2 livre de divergência construído somente a partir da métrica $g_{\mu\nu}$ e suas derivadas até segunda ordem diferencial, preservando a invariância sob difeomorfismos, é o tensor de Einstein mais um termo cosmológico."

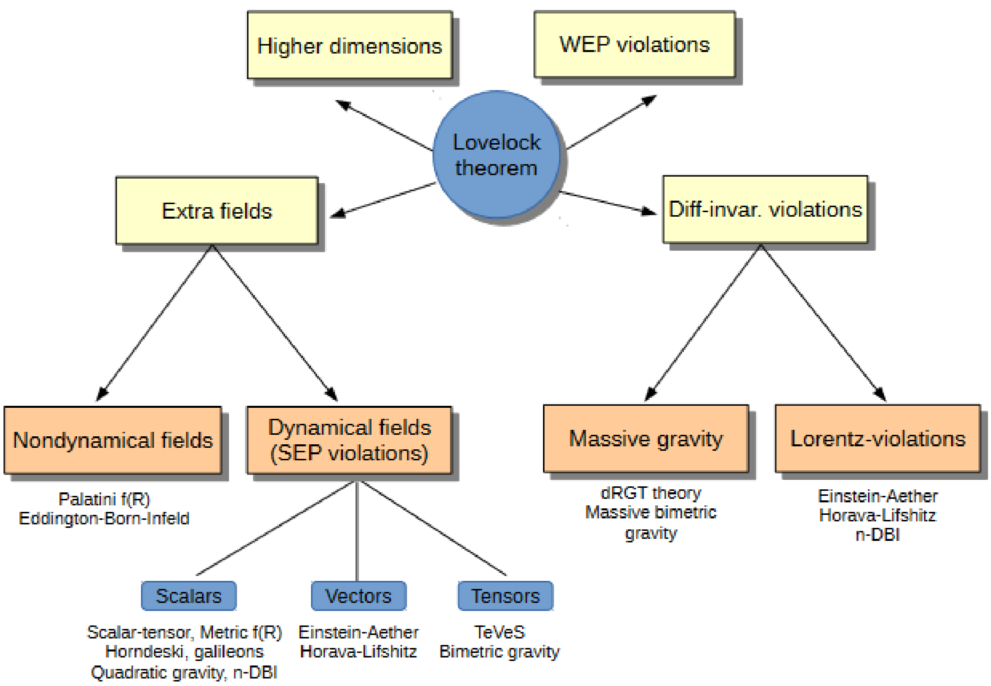
Simplificando, este Teorema afirma que a RG emerge como a única teoria gravitacional sob as suas hipóteses, levando às equações de Einstein [23]:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}. \tag{2.1}$$

em que $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein e $T_{\mu\nu}$ é tensor de energia-momento. O tensor de Einstein possui divergência nula devido às identidades de Bianchi, o que implica que o tensor energia-momento também possui divergência nula. Esta propriedade é importante para a construção das geodésicas e garante a validade do Princípio de Equivalência Fraco [23].

O fluxograma abaixo apresenta hipóteses que modificam a RG, contornando o Teorema de Lovelock [23]. Vamos analisá-las por partes.

Figura 2.1 – Teorema de Lovelock



Legenda: A figura apresenta o fluxograma do Teorema de Lovelock. Cada caixa amarela ligada ao círculo azul representa uma classe de teorias de GM que surge da violação de umas das suposições subjacentes ao teorema.

Fonte: BERTI et al, 2015 [23].

A primeira hipótese se refere a violações de invariância sob difeomorfismo, sendo possíveis duas formas. A primeira diz respeito à violação da invariância de Lorentz, que já foi testada com bastante precisão no Modelo Padrão de Partículas Elementares [24] e é considerada essencial para a construção de uma teoria gravitacional. Entretanto, se assumirmos que a invariância de Lorentz é apenas uma simetria emergente que pode ser quebrada no regime de altas energias no setor gravitacional, novas classes de teorias podem ser construídas. Essas violações costumam ser codificadas em campos extras, o que faz com que as teorias pertencentes a esta classe também pertençam a classe de teorias com campos extras, como, por exemplo, as teorias de Einstein-Aether e as teorias

Khronometricas [23].

A segunda forma de violação de invariância sob difeomorfismos diz respeito à gravidade ser mediada por uma partícula - o gráviton massivo. Porém, entender como esta partícula pode adquirir massa é um problema em aberto e há fortes restrições quanto ao valor de sua massa. As teorias que consideram a gravidade massiva estão sob intensa investigação, principalmente por causa de suas aplicações no contexto do problema da constante cosmológica Λ. Um exemplo de teoria desta classe é a teoria de de Rham-Gabadadze-Tolley (dRGT) [23].

Na segunda hipótese temos teorias que postulam um acoplamento não-mínimo da gravidade ao setor de matéria - violando o princípio de equivalência fraco. Porém, como este princípio já foi testado com bastante precisão [25], estas teorias raramente são investigadas [23].

A terceira hipótese diz respeito à construção de teorias gravitacionais com mais de quatro dimensões. Estas teorias despertam bastante interesse por diversos motivos, como o formalismo da Teoria de Cordas. Contudo, alguns modelos extradimensionais são extremamente restritos do ponto de vista experimental e sua relevância para efeitos além da GR na astrofísica é limitada [23].

A quarta hipótese diz respeito a teorias que inserem campos adicionais na descrição da gravitação. Dentro desta hipótese, há mais duas: inserção de campos dinâmicos ou não dinâmicos. As teorias que inserem campos adicionais não dinâmicos abandonam a suposição de que o tensor de energia-momento entra linearmente nas equações de Einstein, o que torna possível construir o lado esquerdo de (2.1) sendo precisamente $G_{\mu\nu}$ e o lado direito sendo uma combinação não linear de $T_{\mu\nu}$. Essas teorias satisfazem o princípio de equivalência fraco e são equivalentes à RG no vácuo, apenas diferindo no acoplamento com a matéria. Devido a estes acoplamentos não lineares, estas teorias resolvem alguns problemas da RG relacionados à singularidades na curvatura do espaço-tempo e ao Universo primitivo [23]. Um exemplo de teorias desta classe são as teorias $f(R)$ Palatini [10].

A segunda - referente à inserção de campos dinâmicos - consiste em adicionar graus de liberdade extras, o que dá mais opções na construção do lado esquerdo de (2.1). Esta suposição abre espaço para diversas possibilidades em que $g_{\mu\nu}$ é acoplado a campos extras fundamentais, que podem ser escalares, vetoriais ou tensoriais. Por isso, as teorias que presumem a inserção de campos dinâmicos costumam violar o princípio de equivalência forte[1]. Além disto, os graus de liberdade extras assumidos por estas teorias permanecem até hoje não detectados, o que torna um desafio reprimi-los para evitar restrições observacionais [23]. Um exemplo de teorias desta classe são as teorias Beyond Horndeski [14].

[1] O princípio de equivalência forte diz que: o princípio de equivalência é válido tanto para corpos-teste quanto para corpos com interações autogravitantes; o resultado de qualquer experimento local é independente da velocidade do aparelho e de onde e quando no Universo ele é realizado [25].

Pela sua simplicidade relativa, as teorias escalares-tensoriais - pertencentes à classe de teorias que inserem campos dinâmicos adicionais - costumam ser as mais utilizadas como alternativas à RG [26].

As teorias escalares-tensoriais possuem duas importantes características, que são [27]:
1) Geralmente quebram a equivalência entre a distribuição de massa inferida do movimento de estrelas e galáxias - chamada massa dinâmica - e a distribuição inferida a partir dos fótons - chamada massa do lensing. Assim, a comparação de massa dinâmica e de lensing pode produzir assinaturas da gravitação modificada;
2) As teorias alternativas dependem de mecanismos de screening para suprimir graus de liberdade extras no regime de curvatura intermediária, onde a Relatividade Geral é bem testada.

A partir da primeira característica é possível testar a gravidade comparando a massa do lensing com a massa dinâmica de galáxias e aglomerados. Uma forma de realizar este teste é medindo a dispersão de velocidades estelar das galáxias, já que este observável será sensível somente ao potencial Φ e está ligado somente à massa dinâmica, utilizando dados oriundos de lenteamento gravitacional, que serão sensíveis à soma dos potenciais já que estão relacionados à massa do lensing [28]. Este é o meio que será utilizado neste trabalho.

Quanto à segunda característica, os novos graus de liberdade adicionados no setor gravitacional se acoplam à matéria, mediando uma quinta força em diferentes escalas. Como a RG é bem testada no regime intermediário de energia, se faz necessário um mecanismo que esconda estes campos das observações neste regime, ou seja, os graus de liberdade a mais devem ser suprimidos. Este é o chamado mecanismo de screening [27].

Há algumas formas de suprimir estes graus de liberdade [27]:
1) Screening do tipo camaleão: A massa do campo $m(\bar{\phi})$ se torna maior em regiões de alta densidade, reduzindo o alcance da quinta força. Todas as teorias $f(R)$ utilizam este tipo de screening [28];
2) Screening de Vainshtein: A função cinética $Z(\bar{\varphi})$ se torna grande ambientalmente, o que leva a um screening cinético. Este mecanismo age através de uma energia cinética não-canônica, reduzindo efetivamente o acoplamento com a matéria. As teorias Horndeski, Beyond Horndeski e DHOST [26] usam este mecanismo de screening [28].

Recentemente, teorias escalares-tensoriais com lagrangianas com derivadas de segunda ordem do campo escalar têm ganhado uma atenção especial. Estas lagrangianas costumam ter instabilidade devido à presença de um grau de liberdade escalar extra. As teorias escalares-tensoriais com derivadas de segunda ordem mais gerais foram construídas por Horndeski em 1974, exigindo especificamente que as equações de Euler-Lagrange sejam no máximo de segunda ordem.

As teorias Horndeski são escritas em termos de cinco lagrangianas elementares [26]:

$$L_2^H = G_2(\phi, X), \tag{2.2}$$

$$L_3^H = G_3(\phi, X)\Box\phi, \tag{2.3}$$

$$L_4^H = G_4(\phi, X)^{(4)}R - 2G_{4,X}(\phi, X)(\Box\phi^2 - \phi^{\mu\nu}\phi_{\mu\nu}), \tag{2.4}$$

$$L_5^H = G_5(\phi, X)^{(4)}G_{\mu\nu}\phi^{\mu\nu} + \frac{1}{3}G_{5,X}(\phi, X)(\Box\phi^3 - 3\Box\phi\phi_{\mu\nu}\phi^{\mu\nu} + 2\phi_{\mu\nu}\phi^{\mu\sigma}\phi^{\nu}_{\sigma}). \tag{2.5}$$

Em que:

$$\phi_\mu = \nabla_\mu\phi, \qquad \phi_{\mu\nu} = \nabla_\nu\nabla_\mu\phi, \qquad X = \phi^\mu\phi_\mu. \tag{2.6}$$

Cada lagrangiana acima depende de uma função arbitrária de ϕ e X, chamada de $G_A(\phi, X)$. Estas funções devem obedecer a uma relação para que as equações de movimento sejam de segunda ordem [26].

Por muito tempo, acreditou-se que exigir que as equações de movimento fossem no máximo de segunda ordem era necessário para se ter um único grau de liberdade escalar. Porém, posteriormente, foi proposto estender as lagrangianas de Horndeski com mais duas lagrangianas, levando a equações de movimento de terceira ordem. Apesar disso, existem teorias que propagam um único grau de liberdade escalar para combinações apropriadas das sete lagrangianas. Deve-se ressaltar que nem todas as combinações dessas Lagrangianas são permitidas, somente aquelas em que a lagrangiana total é degenerada[2]. As duas lagrangianas adicionais são [26]:

$$L_4^{BH} = F_4(\phi, X)\epsilon^{\mu\nu\rho}_{\sigma}\epsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma}\phi_\mu\phi_{\mu'}\phi_{\nu\nu'}\phi_{\rho\rho'}, \tag{2.7}$$

e

$$L_5^{BH} = F_5(\phi, X)\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma'}\phi_\mu\phi_{\mu'}\phi_{\nu\nu'}\phi_{\rho\rho'}\phi_{\sigma\sigma'}, \tag{2.8}$$

que dependem de duas funções extras $F_4(\phi, X)$ e $F_5(\phi, X)$.

Essa classe estendida de teorias, que inclui as teorias de Horndeski como um caso particular, é geralmente chamada de Beyond Horndeski. Sua generalidade, além de permitir equações de movimento com derivadas de ordem maior, não implica que exista necessariamente um grau de liberdade extra, como acontece com as teorias $f(R)$ métricas - que possuem derivadas de quarta ordem e um grau de liberdade extra.

As teorias Beyond Horndeski englobam uma variedade de modelos de energia escura, sem a necessidade de uma constante cosmológica. Logo, são alternativas viáveis ao Modelo ΛCDM [29].

Para testar estas teorias, devemos obter os parâmetros cujos valores podem ser inferidos pelas observações. Então, considera-se uma teoria escalar-tensorial descrita por uma

[2] A lagrangiana é degenerada quando a ordem das derivadas temporais das equações de movimento é maior do que um, mas as teorias - neste caso, as escalares-tensoriais - possuem apenas um grau de liberdade [26].

ação que inclui todas as combinações possíveis de termos quadráticos até derivadas de segunda ordem do campo ϕ [30]:

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x\mathcal{L} = \int d^4x\sqrt{-g}[P(\phi,X) + Q(\phi,X) + f(\phi,X)^{(4)}R \\ &+ \sum_{I=1}^{5} a_I(\phi,X)L_I(\phi,\phi_{;\nu},\phi_{;\rho\sigma})], \end{aligned} \tag{2.9}$$

em que ${}^{(4)}R$ é o escalar de Ricci em quatro dimensões. As funções $f(\phi,X)$, $P(\phi,X)$, $Q(\phi,X)$ e $a_I(\phi,X)$ que aparecem em (2.9) podem ser escritas em termos das funções $G_A(\phi,X)$ das teorias Horndeski [30]. O ponto e vírgula denotam a derivada covariante, $X = \phi_{;\mu}\phi^{;\mu}/2$ e os L_I são definidos como:

$$L_1 \equiv \phi_{;\mu\nu}\phi^{;\mu\nu}, \tag{2.10}$$

$$L_2 \equiv (\phi^{;\mu}_{;\mu})^2, \tag{2.11}$$

$$L_3 \equiv (\phi^{;\mu}_{;\mu})(\phi^{;\rho}\phi_{;\rho\sigma}\phi^{;\sigma}), \tag{2.12}$$

$$L_4 \equiv \phi^{;\mu}\phi_{;\mu\nu}\phi^{;\nu\rho}\phi_{;\rho}, \tag{2.13}$$

e

$$L_5 \equiv (\phi^{;\rho}\phi_{;\rho\sigma}\phi^{;\sigma})^2. \tag{2.14}$$

Vamos focar nas teorias que satisfazem $a_1 + a_2 = 0$, o que impõe que a velocidade da luz é igual a velocidade das ondas gravitacionais [30].

Para descrever o sistema de interesse, vamos expandir a lagrangiana (2.9) em torno de um fundo FLRW. Consideremos apenas flutuações escalares no calibre Newtoniano, em que $\delta\mathrm{N} = \Phi$, $h_{ij} = a^2(t)(1-2\Psi)\delta_{ij}$ e $N^i = 0$. Sem perda de generalidade, tomemos $\phi = t + \pi(t,\vec{x})$ [30].

Estamos interessados na descrição de fenômenos que acontecem em escalas em que os efeitos relativísticos devidos à expansão do universo são desprezíveis. Tais fenômenos envolvem campos gravitacionais e velocidades não relativísticas. Consequentemente podemos trabalhar no regime quase-estático [31], em que as derivadas temporais podem ser consideradas como sendo muito menores do que as derivadas espaciais. Nesse regime, os termos dominantes são os que têm $2(n-1)$ derivadas espaciais e n campos [32].

Considerando apenas estes termos ao fazer as perturbações descritas acima, é obtida a seguinte ação [30]:

$$\begin{aligned} S_{QS} &= \int d^4x\frac{M^2a}{2}[(c_1\Phi + c_2\Psi + c_3\pi)\nabla^2\pi + c_4\Psi\nabla^2\Phi + c_5\Psi\nabla^2\Psi + c_6\Phi\nabla^2\Phi + \\ &(c_7\dot{\Psi} + c_8\dot{\Phi} + c_9\ddot{\pi})\nabla^2\pi] + \frac{b_1}{a^2}\mathcal{L}_3^{Gal} + \frac{1}{a^2}(b_2\Phi + b_3\Psi)\mathcal{E}_3^{Gal} + \\ &\frac{1}{a^2}(b_4\nabla_i\Psi + b_5\nabla_i\Phi b_6\nabla_i\dot{\pi})\nabla_j\pi\Pi_{ij} + \frac{1}{a^4}(d_1\mathcal{L}_4^{Gal} + d_2\nabla_i\pi\nabla_j\pi\Pi_{ij}^2)], \end{aligned} \tag{2.15}$$

em que foi adotada a seguinte notação: $\Pi_{ij} = \nabla_i \nabla_j \pi$, $\Pi^n_{ij} = \nabla_i \nabla_{k1} \pi \nabla_{k1} \nabla_{k2} \pi ... \nabla_{kn-1} \nabla_j \pi$, $[\Pi^n] = \delta^{ij} \Pi^n_{ij}$, $\mathcal{L}_3^{Gal} = -(\nabla\pi)^2[\Pi]/2$, $\mathcal{L}_4^{Gal} = -(\nabla\pi)^2 \mathcal{E}_3^{Gal}/2$ e $\mathcal{E}_3^{Gal} = [\Pi]^2 - [\Pi^2]$. Os coeficientes c_i, b_i e d_i são funções dependentes do tempo relacionadas às funções P, Q, f e a_i definidas em (2.9), e suas derivadas, avaliadas na solução de fundo. É importante salientar que todos os termos de (2.15) satisfazem a regra de $2(n-1)$ derivadas espaciais para n campos.

Para estudar o comportamento de Φ, Ψ e π em torno de fontes densas de matéria, adicionamos à ação - dada por (2.15) - o acoplamento com a matéria não-relativística cuja densidade de energia é $\rho_m = \bar{\rho}_m(t) + \delta\rho_m(t, \vec{x})$, ou seja [30]:

$$S_m = -\int d^4x a^3 \Phi \delta\rho_m. \tag{2.16}$$

Variando a ação (2.15) somada a (2.16), obtém-se as equações de movimento para as perturbações [32]:

$$\begin{aligned} 0 &= A_{da}\partial^2\varphi_a - \delta_{dl}\frac{\bar{\rho}_m a^2}{2M^2}\delta - \frac{B_{dab}}{4H^2a^2}\epsilon^{ikm}\epsilon^{jlm}\partial_i\partial_j\varphi_a\partial_k\partial_l\varphi_b - \\ &\quad -\frac{C_{dabc}}{12H^4a^4}\epsilon^{ikm}\epsilon^{jln}\partial_i\partial_j\varphi_a\partial_k\partial_l\varphi_b\partial_m\partial_n\varphi_c, \end{aligned} \tag{2.17}$$

em que A, B e C dependem dos coeficientes que aparecerem na lagrangiana (2.15)[3], os δ_{ij} representam deltas de Kronecker e:

$$\varphi_a \equiv \begin{pmatrix} \Phi \\ \Psi \\ \chi \end{pmatrix}, \tag{2.18}$$

em que $\chi \equiv H\pi$, sendo H a função de Hubble [32].

Para descrever a situação de interesse, devemos assumir simetria esférica. Neste caso, todos os campos dependem somente do tempo e da distância até a origem. Assim, definimos as variáveis x, y, z e $\mathcal{A}$ ([30], [32]):

$$x \equiv \frac{\pi'}{\Lambda^3a^2r}, \;\; y \equiv \frac{\Phi'}{\Lambda^3a^2r}, \;\; z \equiv \frac{\Psi'}{\Lambda^3a^2r}, \;\; \mathcal{A} \equiv \frac{m}{8\pi M^2\Lambda^3r^3}. \tag{2.19}$$

Então, assumindo simetria esférica e usando o Teorema de Stokes, devido à simetria de (2.17), chegamos a três equações de movimento para os campos Φ, Ψ e π, dadas respectivamente por [30]:

$$(c_1 - \dot{c}_8 - 3Hc_8)x - 2c_6y + c_4z - c_8\dot{x} + 2\Lambda^3x[(2b_2 - b_5)x - b_5rx'] = 4\mathcal{A}, \tag{2.20}$$

$$(c_2 - \dot{c}_7 - Hc_7)x + c_4y + 2c_5z - c_7\dot{x} + 2\Lambda^3x[(2b_3 - b_4)x - b_4rx'] = 0, \tag{2.21}$$

[3] Os coeficientes A, B e C de [32] estão relacionados aos coeficientes b_i, c_i e d_i de [30].

e

$$\begin{aligned} 0 \;=\;& 2\tilde{c}_3x + \tilde{c}_1y + \tilde{c}_2z + 2\tilde{c}_9\dot{x} + \dot{c}_8y + \dot{c}_7z + 2c_9\ddot{x} + 2\Lambda^3(2\tilde{b}_1x^2 + (6Hb_6 + \dot{b}_6)rxx' + \\ & b_6(5x\dot{x} + 2rx\dot{x}' + r\dot{x}x') + x[(4b_2 + 3b_5)y + (4b_3 + 3b_4)z + b_5ry' + b_4rz') + \\ & 8\Lambda^6[(d_1 + 3d_2)x^3 + d_2x(r^2(x')^2 + rx(6x' + rx''))]. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Os coeficientes com tildes estão relacionados aos sem tildes e suas derivadas temporais, mas as suas expressões explícitas não serão necessárias, por isso não as escrevemos neste trabalho [30].

Como as equações (2.20) e (2.21) são lineares em y e z, estas variáveis podem ser eliminadas de (2.22), o que leva à uma equação polinomial cúbica em x [30]:

$$x^3 + \nu_1x^2 + (\nu_2 + \nu_3\mathcal{A} + \nu_4\mathcal{A}')x + \nu_5\mathcal{A} + \nu_6\dot{\mathcal{A}} = 0. \tag{2.23}$$

em que os coeficientes ν_i estão relacionados aos coeficientes que aparecem em (2.15). Escolhe-se então uma solução apropriada [33], dada por:

$$x^2 \approx -\nu_3\mathcal{A} - \nu_4\mathcal{A}. \tag{2.24}$$

Aplicando esta solução em (2.20) e em (2.21), encontra-se expressões para y e z e, usando (2.19), são obtidas as seguintes expressões para os potenciais Φ e Ψ ([30], [32]):

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{GM(r)}{r^2} + \frac{Y_1G}{4}\frac{d^2M}{dr^2}, \tag{2.25}$$

e

$$\frac{d\Psi}{dr} = \frac{GM(r)}{r^2} - \frac{5Y_2G}{4r}\frac{dM}{dr}, \tag{2.26}$$

em que Y_1 e Y_2 dependem das funções $P(\phi, X)$, $Q(\phi, X)$, $f(\phi, X)$, e $a_I(\phi, X)$ e, consequentemente, são funções do tempo. As funções Y_1 e Y_2 podem ser consideradas constantes caso possuam uma variação desprezível na escala de tempo característica do problema, dada pelo tempo que a luz demora para percorrer a galáxia. Neste trabalho, consideraremos que estas funções são constantes e muito menores do que um por estarmos interessados em pequenas modificações da RG, pois, na escala de interesse, o mecanismo de screening ainda estaria parcialmente atuante.

Como as partículas não-relativísticas são sensíveis somente ao potencial Φ, Y_1 parametriza desvios da RG em sistemas não-relativísticos. Já Y_2 parametriza desvios na trajetória da luz ao redor de objetos não-relativísticos, ou seja, está relacionado à partículas relativísticas, sensíveis a soma dos potenciais Φ e Ψ.

Essas expressões fornecem os dois potenciais dentro de uma fonte de matéria. Longe desta fonte, as derivadas de M são zero e recupera-se $\Phi = \Psi = GM/r$.

No próximo capítulo apresentaremos uma breve introdução às lentes gravitacionais, ferramenta muito importante com muitas aplicações na astrofísica e na cosmologia. Entre elas, testar teorias gravitacionais.

Capítulo 3

Lentes gravitacionais

Como já abordado, as lentes gravitacionais são formadas a partir da deflexão da luz por um campo gravitacional e possuem diversas aplicações na astrofísica e cosmologia[1].

O lenteamento gravitacional pode ser classificado de acordo com sua escala angular e de intensidade. No caso da escala angular, pode ser separado em micro ou macrolenteamento. No caso do microlenteamento, as escalas angulares típicas (forma das imagens, separação entre elas) são pequenas a ponto de não serem observáveis com a instrumentação atual. O que pode ser medido é o efeito da magnificação. Neste caso, os objetos lenteados são estrelas ou quasares e as lentes são planetas ou estrelas. Já no macrolenteamento, as deformações das imagens ou a separação entre elas podem ser medidas. Nesse caso, as lentes são galáxias ou aglomerados de galáxias.

Com relação à intensidade, o lenteamento gravitacional pode ser classificado em forte ou fraco. No regime fraco, há leves distorções na imagem do objeto lenteado e pequena variação no seu brilho. No caso forte, há grandes distorções nas imagens, gerando a formação de imagens múltiplas, grandes magnificações, arcos e anéis de Einstein. Este último caso é formado quando há alinhamento quase perfeito entre observador, lente e fonte.

Neste trabalho, consideraremos objetos em escala galáctica no regime do lenteamento forte para testar teorias de gravitação modificada. Antes de definirmos algumas variáveis e obtermos a equação da lente, é importante discutirmos a distância de diâmetro angular, que é uma das distâncias utilizadas em escalas cosmológicas e é de grande importância nos estudos de lente gravitacional [36].

[1] Para uma introdução histórica, ver [34], [35] e [4].

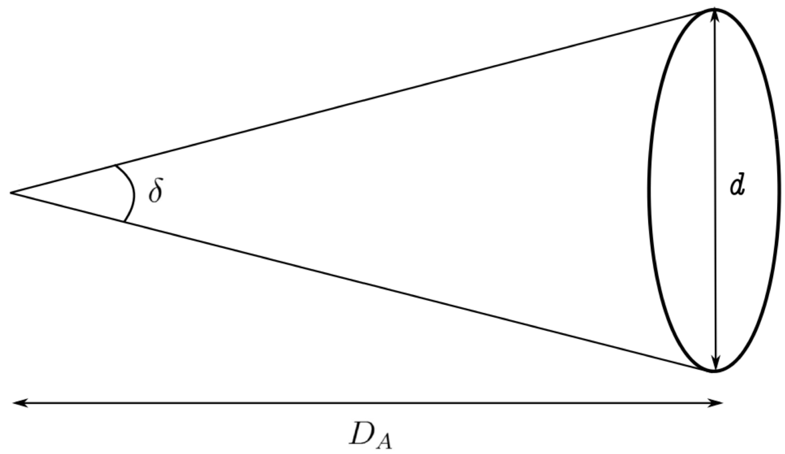
3.1 Distância de diâmetro angular

Antes de abordarmos as lentes gravitacionais, precisamos definir a distância de diâmetro angular, usada para estabelecer relações entre fonte, lente e observador. A distância de diâmetro angular D_A é definida na geometria euclidiana, conhecendo o diâmetro próprio d e o diâmetro angular δ observado de uma fonte, como [36]:

$$D_A = \frac{d}{\delta}, \tag{3.1}$$

para $\delta \ll 1$.

Figura 3.1 – Distância de diâmetro angular



Legenda: A figura apresenta um diagrama para a distância de diâmetro angular (fora de escala, pois $\delta \ll 1$).

Fonte: MAKLER, 2019.

Em um Universo homogêneo e isotrópico, a distância de diâmetro angular é dada pela expressão [15]:

$$D_A(z_l, z_s) = \frac{c}{H_0}\frac{d(z_l, z_s)}{1+z}, \tag{3.2}$$

em que H_0 é a constante de Hubble e $d(z_l, z_s)$ é uma distância adimensional dada por:

$$d(z_l, z_s) = \frac{1}{\sqrt{|\Omega_k|}} sinn\left[\sqrt{|\Omega_k|}\int_{z_1}^{z_2} \frac{H_0 dz'}{H(z)}\right], \tag{3.3}$$

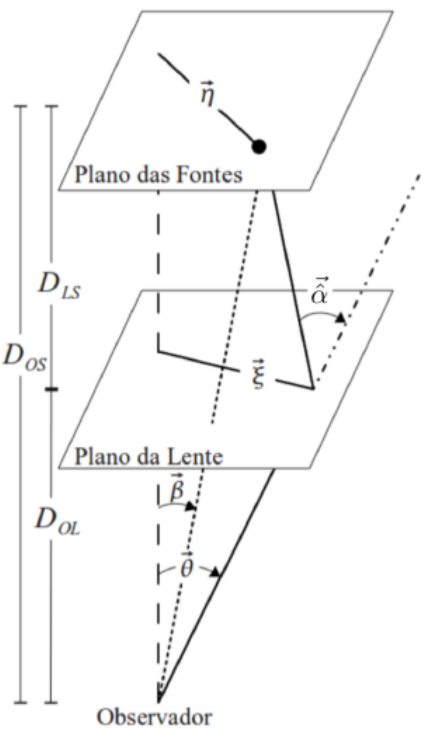
em que $H(z)$ é o parâmetro de Hubble, Ω_k é o parâmetro de densidade de curvatura e a função $sinn(x) = sen(x)$ quando $\Omega_k < 0$, $sinn(x) = x$ quando $\Omega_k = 0$ e $sinn(x) = senh(x)$ quando $\Omega_k > 0$ [15]. As distâncias d podem ser obtidas ajustando um polinômio aos dados das Supernovas do Tipo Ia (SN Ia) Union2.1 no intervalo de $0 < z < 1.414$ [15].

Todas as distâncias a serem apresentadas e citadas neste trabalho se referem à distância de diâmetro angular. Podemos então partir para a obtenção da equação da lente, importante expressão que relaciona quantidades essenciais do lenteamento gravitacional.

3.2 Equação da lente

Para obter a equação da lente, consideremos a aproximação em que a luz se propaga pelo Universo até ser defletida em um único ponto (lente) e segue até o observador. As distâncias entre observador e lente, observador e fonte e lente e fonte são dadas, respectivamente, por: D_{OL}, D_{OS} e D_{LS}. Uma representação desta situação de deflexão está ilustrada na figura abaixo:

Figura 3.2 – Planos da fonte e da lente



Legenda: A figura apresenta uma representação esquemática do lenteamento gravitacional com as variáveis relevantes indicadas. Os ângulos estão bastante exagerados para permitir a visualização.

Fonte: MAKLER, 2019.

O vetor $\vec{\eta}$ representa a posição da fonte no plano das fontes. A reta tracejada é chamada de eixo óptico e foi escolhida como a reta que passa pelo observador e pelo centro da lente.

A luz se propaga até o plano da lente, passando a uma distância ξ do centro da lente e sendo defletida com um ângulo $\hat{\alpha}$ - chamado de ângulo de deflexão. Esse raio de luz atinge o observador com um ângulo θ em relação ao eixo óptico.

Caso não houvesse deflexão, a luz emitida pela fonte seria recebida em uma direção $\vec{\beta}$ em relação ao eixo da lente. Desta forma, $\vec{\beta}$ é a posição angular real da fonte e $\vec{\theta}$ é a posição observada após sofrer uma deflexão $\hat{\alpha}$. A equação da lente fornece uma relação entre $\vec{\beta}$ e $\vec{\theta}$.

Usando a relação (3.1), podemos definir as variáveis angulares a partir das posições da imagem no plano da fonte e da lente:

$$\vec{\theta} = \frac{\vec{\xi}}{D_{OL}}, \tag{3.4}$$

e

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{\eta}}{D_{OS}}. \tag{3.5}$$

Denotando $\vec{\eta'}$ como a distância física no plano das fontes a partir de $\vec{\theta}$:

$$\vec{\eta'} = \vec{\theta} D_{OS}, \tag{3.6}$$

e:

$$\vec{\eta'} - \vec{\eta} = (\vec{\theta} - \vec{\beta}) D_{OS} = \vec{\hat{\alpha}} D_{OL}. \tag{3.7}$$

Obtemos então a equação da lente:

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \vec{\hat{\alpha}} \frac{D_{LS}}{D_{OS}}. \tag{3.8}$$

A expressão de $\vec{\hat{\alpha}}$ dependerá do modelo físico da lente (e da teoria da gravitação). A partir da equação da lente, é possível obter as posições das imagens a partir da posição $\vec{\beta}$ das fontes e da expressão para $\vec{\hat{\alpha}}(\vec{\theta})$. A equação da lente é válida mesmo em escalas cosmológicas, desde que as distâncias usadas sejam as distâncias de diâmetro angular. Em geral: $D_{OS} \neq D_{OL} + D_{LS}$.

Na próxima seção, apresentaremos a dedução da expressão para o ângulo de deflexão.

3.3 O ângulo de deflexão

A deflexão da luz pode ser calculada a partir da geodésica para o caso de partículas sem massa e também pelo princípio de Fermat, levando à uma expressão para $\vec{\hat{\alpha}}$. O princípio de Fermat diz que a luz percorre o caminho no qual o tempo é extremizado entre os dois pontos. A velocidade da luz em um meio com índice de refração n é igual a c/n, em que c é a velocidade da luz.

A luz seguirá um caminho ao longo do qual o tempo de percurso será extremizado [37]:

$$t = \int \frac{n}{c} dl, \tag{3.9}$$

Buscamos por um caminho $\vec{x(l)}$ para o qual a variação:

$$\delta \int_A^B n(\vec{x}(l)) dl = 0, \tag{3.10}$$

entre o ponto inicial A e o ponto final B são fixos.

Para encontrar n, assumimos que as dimensões da lente são muito pequenas quando comparadas com as distâncias entre lente, observador e fonte e consideramos o limite de campo fraco, em que o potencial Newtoniano Φ é muito menor do que c^2. Temos uma perturbação na métrica de Minkowski, que nos leva a uma nova expressão para o elemento de linha ds^2 na RG [37]:

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) (d\vec{x})^2. \tag{3.11}$$

A luz se propaga em $ds = 0$, nos levando a:

$$c' = \frac{d\vec{x}}{dt} \approx c\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right), \tag{3.12}$$

e

$$n = \frac{c}{c'} \approx 1 - \frac{2\Phi}{c^2}. \tag{3.13}$$

O índice de refração normalmente depende da coordenada espacial $\vec{x}$. Seja $\vec{x}$ a trajetória da luz, sua expressão é obtida através de (3.10), o que nos leva ao problema variacional padrão e às conhecidas equações de Euler-Lagrange. Redefinindo dl como [37]:

$$dl = \left|\frac{d\vec{x}}{d\lambda}\right| d\lambda, \tag{3.14}$$

encontramos as seguintes equações de Euler-Langrange:

$$\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} - \frac{\partial L}{d\vec{x}} = 0, \tag{3.15}$$

em que:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = n\frac{\dot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|}, \tag{3.16}$$

e:

$$\frac{\partial L}{d\vec{x}} = (\vec{\nabla} n)\dot{\vec{x}}. \tag{3.17}$$

O vetor $\dot{\vec{x}}$ é tangente à trajetória da luz e podemos assumi-lo como normalizado a partir de uma escolha adequada para o parâmetro λ. Vamos assumir $|\dot{\vec{x}}| = 1$ e redefinir $\vec{e} \equiv \dot{\vec{x}}$. Obtemos então a seguinte equação de movimento [37]:

$$\frac{d}{d\lambda}(n\vec{e}) - \vec{\nabla} n = 0 \Rightarrow n\dot{\vec{e}} = \vec{\nabla} n - \vec{e}(\vec{\nabla}\vec{e}). \tag{3.18}$$

O termo $\vec{\nabla} n - \vec{e}(\vec{\nabla}\vec{e})$ é o gradiente de n perpendicular à trajetória da luz. Logo:

$$\dot{\vec{e}} = \vec{\nabla}_\perp ln(n) \approx -\frac{2}{c^2}\vec{\nabla}_\perp \Phi. \tag{3.19}$$

Por fim, o ângulo de deflexão da luz é a integral de - $\dot{\vec{e}}$ ao longo da trajetória da luz [37]:

$$\hat{\vec{\alpha}} = \frac{2}{c^2}\int \vec{\nabla}_\perp \Phi \, d\lambda. \tag{3.20}$$

Esta é a integral que devemos resolver na RG para obter a expressão para o ângulo de deflexão de acordo com o modelo de lente adotado.

A seguir, apresentaremos o modelo de lente considerado neste trabalho, obtendo o ângulo de deflexão e, posteriormente, a equação da lente e o raio de Einstein.

3.4 Aproximação de lentes finas

A aproximação de lentes finas é baseada no fato de que a extensão da lente costuma ser muito menor do que a distância entre observador e lente e entre lente e fonte. Ou seja, pode-se usar a aproximação de lentes finas quando estas quantidades são muito menores do que a extensão total da trajetória da luz. Logo, a distribuição de massa da lente pode ser projetada ao longo da linha de visão e ser substituída por uma "folha"de massa ortogonal à linha de visão. Esta "folha"de massa é caracterizada pela sua densidade superficial de massa, dada por [38]:

$$\Sigma(\vec{\xi}) = \int \rho(\vec{\xi}, z) dz, \tag{3.21}$$

em que $\vec{\xi}$ é o vetor bidimensional no plano da lente representado na figura (3.2) e z é a direção transversal à lente.

O ângulo de deflexão na posição $\vec{\xi}$ é dado pela soma das deflexões devido a todos os elementos de massa no plano. Sua expressão é [4]:

$$\vec{\hat{\alpha}}(\vec{\xi}) = \frac{4G}{c^2} \int \frac{(\vec{\xi} - \vec{\xi'})\Sigma(\vec{\xi'}) d^2\xi'}{|\vec{\xi} - \vec{\xi'}|^2}. \tag{3.22}$$

Em geral, o ângulo de deflexão é dado por um vetor bidimensional. Ao considerarmos o caso de uma lente esfericamente simétrica, podemos deslocar a origem do sistema de coordenadas para o centro de simetria e reduzir a deflexão da luz a um problema unidimensional. Então, o ângulo de deflexão aponta em direção ao centro de simetria e seu módulo é dado por [38]:

$$\hat{\alpha}(\xi) = \frac{4GM(\xi)}{c^2 \xi}, \tag{3.23}$$

em que a expressão para a massa contida dentro de um raio ξ é [38]:

$$M(\xi) = 2\pi \int_0^{\xi} \Sigma(\xi')\xi' d\xi'. \tag{3.24}$$

Logo, neste caso, a equação da lente tomará a forma:

$$\beta(\theta) = \theta - \frac{D_{LS}}{D_{OS} D_{OL}} \frac{4GM(\theta)}{c^2 \theta}. \tag{3.25}$$

Como abordado, estamos considerando neste trabalho a aproximação de lentes finas com perfil de densidade de massa definida por uma lei de potência. Na próxima seção, apresentaremos o modelo da lei de potência e obteremos uma expressão para a equação de lente e o raio de Einstein a partir destas considerações.

3.5 Modelo de lei de potência

Como visto, a equação da lente é dada pela equação (3.8). Iremos calcular a equação da lente para o caso em que o perfil de densidade de massa é uma lei de potência, pois, observacionalmente, este perfil descreve bem a distribuição de matéria de galáxias elípticas [15].

$$\rho_M(r) = \rho_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\alpha}. \tag{3.26}$$

Para encontrarmos a expressão que desejamos, devemos primeiramente resolver as integrais (3.21) e (3.24). O resultado da primeira é:

$$\Sigma_M(\xi) = \rho_0 r_0^\alpha \sqrt{\pi}\lambda(\alpha)\xi^{1-\alpha}. \tag{3.27}$$

em que λ é a função lambda [39]. Então, a expressão para a massa em função de ξ é:

$$M_M(\xi) = \frac{2\pi^{3/2}\rho_0 r_0^\alpha \lambda(\alpha)}{3-\alpha}\xi^{3-\alpha}. \tag{3.28}$$

Para obtermos a equação da lente, precisamos reescrever M_M em função de θ. Para isso, utilizamos a relação (3.4), obtendo:

$$M_M(\theta) = \frac{2\pi^{3/2}\rho_0 r_0^\alpha \lambda(\alpha)}{3-\alpha}(\theta D_{OL})^{3-\alpha}. \tag{3.29}$$

Logo, podemos colocar (3.29) na expressão para a equação da lente (3.25). Consideraremos o caso da aproximação de lentes finas, que tem a equação da lente dada por (3.25). Obtemos então:

$$\beta = \theta - \frac{D_{LS}}{D_{OS}}\frac{4G}{c^2}\frac{2\pi^{3/2}\rho_0 r_0^\alpha \lambda(\alpha)}{3-\alpha}(\theta D_{OL})^{2-\alpha}. \tag{3.30}$$

Esta expressão acima é a equação da lente para o caso da Relatividade Geral, considerando que a massa é dada pelo perfil de densidade de massa (3.26) e a aproximação de lente fina.

Para obtermos a expressão para o raio de Einstein, precisamos que β seja igual a zero, pois é em $\beta = 0$ que a imagem é formada em $\theta = \theta_E$, gerando um anel. Portanto, a expressão para o raio de Einstein é:

$$\theta_E^{\alpha-1} = \frac{D_{LS}}{D_{OS}}\frac{4G}{c^2}\frac{2\rho_0 r_0 \pi^{3/2}\lambda(\alpha)}{(3-\alpha)}D_{OL}^{2-\alpha}. \tag{3.31}$$

Apresentamos o modelo de lente adotado neste trabalho - o modelo de lentes finas, axialmente simétrico e com perfil de densidade de massa definido por uma lei de potência - e obtivemos uma expressão para a equação da lente e do raio de Einstein.

Na realidade, a maior parte das lentes não é axialmente simétrica e é usual considerar modelos de distribuição de massa elíptica. Com esse tipo de modelo é possível determinar a elipticidade e orientação da distribuição de matéria da lente. Por outro lado, a medida que nos interessa nesta dissertação é o raio de Einstein e a sua conexão com os parâmetros do perfil de densidade. Na prática, a medida de θ_E é bem robusta, mesmo considerando diferentes modelos com elipticidade e diferentes perfis radiais e mesmo quando as imagens não formam um anel perfeito, mas sim arcos e imagens múltiplas. Esta quantidade é usada nas modelagens associadas que estamos considerando neste trabalho e um exemplo pode ser visto nas tabelas 2, 3, 4 e 5, apresentadas na seção 5.1. Portanto, seguiremos aqui utilizando o modelo da lei de potência com simetria axial.

3.6 Massa contida no raio de Einstein

Uma quantidade importante no lenteamento gravitacional é M_E, definida como a massa dentro de um cilindro de raio igual ao raio de Einstein [15]. A lente, simetricamente circular, é considerada um corte neste cilindro. Podemos encontrar uma expressão para M_E a partir de (3.24), redefinindo a variável de integração para R, sabendo que $r^2 = R^2 + Z^2$, em que Z é o eixo da linha de visada e é perpendicular à R, o raio do cilindro.

$$M_E = 2\pi \int_0^{R_E} \Sigma(R) R dR. \tag{3.32}$$

A integral (3.21) também deverá ter sua variável de integração redefinida para R e seu resultado final será:

$$\Sigma(R) = \rho_0 r_0^\alpha R^{1-\alpha} \sqrt{\pi} \lambda(\alpha). \tag{3.33}$$

Logo, a expressão para M_E será:

$$M_E = \frac{2\pi^{3/2} \rho_0 r_0^\alpha \lambda(\alpha)}{3-\alpha} R_E^{3-\alpha}. \tag{3.34}$$

Esta expressão será bastante importante quando formos obter uma expressão que servirá para alcançarmos o nosso objetivo de testar teorias alternativas à RG.

Como já mencionado, para testar teorias de gravidade modificada pode-se comparar a massa do lensing com a massa dinâmica oriunda da matéria luminosa de galáxias e aglomerados. A primeira já foi abordada neste capítulo a partir do estudo da equação da lente. Quanto à massa dinâmica, esta pode ser medida através de observáveis que estão relacionados à matéria luminosa, como é o caso da dispersão de velocidades. No próximo capítulo, estudaremos a equação de Jeans, expressão de onde surgirá a dispersão de velocidades.

Capítulo 4

Equação de Jeans

As estrelas em uma galáxia possuem velocidades orbitais individuais em torno do centro de massa da galáxia, que dependem da sua massa total. Quando medimos a velocidade radial das estrelas, a dispersão de velocidades radial, σ_r, pode ser estimada e utilizada para determinar a sua massa a partir do teorema do virial [40].

Para cada tipo de galáxia, haverá um perfil $\sigma_r = \sigma_r(r)$ em função da distância r ao centro da galáxia. Essa função nos fornece informações sobre a dinâmica da galáxia e sobre como a matéria está distribuída em seu interior.

O comportamento das estrelas em uma galáxia elíptica é o de partículas que não colidem entre si em um potencial gravitacional. A equação que governa a densidade das estrelas em função da posição, velocidade e tempo, ou seja, a densidade do espaço de fase $f(r, v, t)$, é a equação de Boltzmann sem colisão, dada por [41]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} - \nabla\Phi\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0, \tag{4.1}$$

em que $\vec{r}$ e $\vec{v}$ são as coordenadas espacial e de velocidade, respectivamente, e Φ é o potencial Newtoniano, que satisfaz a equação de Poisson (5.13).

4.1 Simetria esférica

Consideremos um caso especial da equação de Boltzmann: um potencial gravitacional $\Phi(r)$ com simetria esférica, no qual as estrelas orbitam. Assumimos que o sistema é estacionário, para que a densidade do espaço de fase seja independente do tempo. A distribuição estelar é assumida como esfericamente simétrica e a distribuição de velocidades no plano perpendicular ao vetor radial deve ser isotrópica. Em coordenadas esféricas, isso significa que a dispersão de velocidades na direção θ deve igual à da direção ϕ, ou seja,

$\sigma_\theta = \sigma_\phi$. Definimos então o parâmetro de anisotropia, dado por [42]:

$$\beta(r) = 1 - \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_r^2}. \tag{4.2}$$

A densidade de estrelas é definida como:

$$n(r) = \int d^3v f(r, \vec{v}). \tag{4.3}$$

A partir de cálculos utilizando as equações acima, obtém-se a equação de Jeans esférica [42]:

$$\frac{1}{n}\frac{d(n\sigma_r^2)}{dr} + 2\beta\frac{\sigma_r^2}{r} = -\frac{d\Phi}{dr}, \tag{4.4}$$

que relaciona a densidade de estrelas $n(r)$ e a distribuição de velocidades ao potencial Newtoniano.

Supondo que a densidade de estrelas é, em média, proporcional à luminosidade - e este último é o que pode ser medido pelas observações - podemos considerar o caso do perfil de densidade ser o perfil de densidade de luminosidade $\nu(r)$ e a equação de Jeans toma a forma [43]:

$$\frac{d}{dr}(\nu(r)\sigma_r^2) + 2\beta\nu(r)\frac{\sigma_r^2}{r} = -\nu(r)\frac{d\Phi}{dr}, \tag{4.5}$$

em que [15]:

$$\nu(r) = \nu_0\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\delta}. \tag{4.6}$$

Consideremos que $\beta(r)$ é independente de r, por simplicidade e dificuldade em medi-la nos dados e simulações, e que a derivada de primeira ordem de Φ se restringe a:

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{GM}{r^2}. \tag{4.7}$$

Para resolver a equação de Jeans e obtermos uma expressão para $\sigma_r^2(r)$, consideremos que esta seja da seguinte forma:

$$\frac{d}{dr}(F(r)\nu(r)\sigma_r^2) = A(r), \tag{4.8}$$

logo:

$$F(r)\frac{d}{dr}(\nu(r)\sigma_r^2) + \frac{dF}{dr}\nu(r)\sigma_r^2 = A(r), \tag{4.9}$$

dividindo por $F(r)$:

$$\frac{d}{dr}(\nu(r)\sigma_r^2) + \frac{1}{F(r)}\frac{dF}{dr}\nu(r)\sigma_r^2 = \frac{A(r)}{F(r)}, \tag{4.10}$$

temos que:

$$\frac{1}{F}\frac{dF}{dr} = \frac{2\beta}{r} \Rightarrow lnF = ln(r^{2\beta}) \Rightarrow F = r^{2\beta}, \tag{4.11}$$

e:

$$\frac{A}{F} = -\nu(r)\frac{GM(r)}{r^2} \Rightarrow \frac{A}{r^{2\beta}} = -\nu(r)\frac{GM(r)}{r^2} \Rightarrow A(r) = -\nu(r)GM(r)r^{2\beta-2}. \tag{4.12}$$

Desta forma, (4.8) se torna:

$$\frac{d}{dr}(r^{2\beta}\nu(r)\sigma_r^2) = -\nu(r)GM(r)r^{2\beta-2}, \tag{4.13}$$

$$r^{2\beta}\nu(r)\sigma_r^2 = -G\int \nu(r)M(r)r^{2\beta-2}. \tag{4.14}$$

Portanto:

$$\sigma_r^2 = \frac{G\int_r^\infty \nu(r)M(r)r^{2\beta-2}}{r^{2\beta}\nu(r)}dr. \tag{4.15}$$

Esta é a equação que deve ser resolvida para obtermos uma expressão para a dispersão de velocidades teórica. Na próxima seção, resolveremos esta equação para o caso de um perfil de densidade de massa dado pela lei de potência (3.26).

Cálculo da dispersão radial de velocidades Como abordado, iremos obter a expressão para a dispersão de velocidades teórica $\sigma_r^2(r)$ considerando que a massa do sistema é dada por um perfil de densidade dado por (3.26).

Para obtermos uma expressão para a massa, devemos resolver a seguinte integral:

$$M_d(r) = \int \rho_M(r)\, dV. \tag{4.16}$$

Como estamos considerando lentes com simetria esférica, o elemento de volume da integral acima será o elemento de volume das coordenadas esféricas. Portanto, a expressão encontrada para a massa em função da coordenada r é:

$$M_d(r) = \frac{4\pi\rho_0 r_0^\alpha}{3-\alpha}r^{3-\alpha}. \tag{4.17}$$

Se dividirmos a expressão acima por (3.34), obteremos a seguinte expressão para a massa [15]:

$$M(r) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\lambda(\alpha)}\left(\frac{r}{R_E}\right)^{3-\alpha}M_E, \tag{4.18}$$

em que $R_E = \theta_E D_{OL}$.

Logo, poderemos resolver (4.15) e encontrar uma expressão para σ_r^2 [15]:

$$\sigma_r^2 = \left[\frac{GM_E}{R_E}\right]\frac{2}{\sqrt{\pi}\lambda(\alpha)(\xi-2\beta)}\left(\frac{r}{R_E}\right)^{2-\alpha}. \tag{4.19}$$

Podemos obter uma relação importante entre $M_d(r)$ (4.17) e a expressão dada por (4.18). Como o fator $r^{3-\alpha}$ é igual nas duas expressões, será necessário somente igualar as constantes. Desta forma, obtemos que:

$$\frac{4\pi\rho_0 r_0^\alpha}{3-\alpha} = \frac{2}{\sqrt{\pi}\lambda(\alpha)}\frac{M_E}{R_E^{3-\alpha}}, \tag{4.20}$$

logo:

$$\frac{M_E}{R_E^{3-\alpha}} = \frac{2\rho_0 r_0^\alpha \pi^{3/2}\lambda(\alpha)}{3-\alpha}. \tag{4.21}$$

4.2 Conexão com as observações

Entretanto, o que realmente queremos é uma nova expressão para a dispersão de velocidades observada, já que este é o parâmetro que pode ser obtido através de dados de espectroscopia.

A dispersão de velocidades observada pode obter um valor diferente do valor previsto teoricamente. Isto ocorre devido ao espalhamento da luz da galáxia-lente devido à atmosfera da Terra. Quando a razão entre o ângulo de abertura da fibra do telescópio - denominado θ_{ap} - e a dispersão devido ao espalhamento da luz pela atmosfera - σ_{atm} - é menor do que 1,5, podemos considerar que a função de abertura fotométrica efetiva é dada pela expressão [16]:

$$w(R) = exp(-R^2/2\tilde{\sigma}^2_{atm}), \tag{4.22}$$

em que $\tilde{\sigma}^2_{atm} \approx \sigma^2_{atm}(1+\chi^2/4+\chi^4/40)$, sendo $\chi = \theta_{ap}/\sigma_{atm}$.

A dispersão de velocidades observada será dada, então, como uma média ponderada pela luminosidade ao longo da linha de visada sobre a abertura fotométrica efetiva. Logo, a expressão para $\sigma_\star$ é dada por [16]:

$$<\sigma^2_\star>= \frac{\int_0^\infty Rw(R)dR \int_{-\infty}^{\infty} dZ\nu(r)\left(1-\frac{\beta R^2}{r^2}\right)\sigma^2_r}{\int_0^\infty Rw(R)dR\int_{-\infty}^{\infty}\nu(r)dZ}, \tag{4.23}$$

em que $r^2 = R^2 + Z^2$.

Nos dados que são usados no tipo de análise que será discutido neste trabalho, utilizam-se medidas da dispersão de velocidade a partir de um espectro para cada galáxia. Ou seja, o que se mede é um valor médio de $\sigma_\star$ em cada espectro. Para obter essa quantidade observada, é necessário fazer as considerações apresentadas no início desta seção.

Logo, para testar teorias gravitacionais a partir de dados que combinam a dinâmica estelar e o efeito de lenteamento, deve-se usar a expressão (4.23). No próximo capítulo, apresentaremos os dados e a análise feita para realizar o teste da Relatividade Geral utilizando o formalismo pós-Newtoniano parametrizado e, por fim, serão feitas as modificações para obter as equações necessárias para testar as teorias BH a partir da inserção dos parâmetros Y_1 e Y_2.

Capítulo 5

Testando a Gravidade

Neste capítulo apresentaremos os testes da Relatividade Geral e das teorias Beyond Horndeski que já foram realizados e serviram de base para este trabalho [16, 15, 20] e mostraremos os cálculos referentes à obtenção das expressões da dispersão de velocidades teórica e observada com os novos termos oriundos das teorias Beyond Horndeski. Primeiramente, falaremos sobre os testes já apresentados na literatura que utilizam o formalismo pós-Newtoniano parametrizado (PPN). Posteriormente apresentaremos o teste que realizamos para testar as teorias BH.

5.1 Formalismo pós-Newtoniano parametrizado

Atualmente, as teorias gravitacionais mais aceitas são as teorias métricas: teorias que possuem uma métrica associada à variedade do espaço-tempo e que satisfazem o princípio de equivalência. Estas teorias diferem nas leis usadas para gerar a métrica. Na RG, a métrica é gerada diretamente do tensor momento-energia. Já nas teorias de Dicke-Brans-Jordan, há um grau de liberdade extra, que tem como fonte a matéria e se acopla com a métrica. [44].

O que também diferencia as teorias métricas é o número e o tipo de campos gravitacionais - escalares, vetoriais, etc - que cada uma contém além da métrica e as equações que determinam a estrutura e a evolução desses campos [25].

A fim de simplificar a comparação entre as teorias métricas e testá-las observacionalmente busca-se considerar o limite de campo-fraco. Essa consideração é conhecida como o limite pós-Newtoniano e é suficientemente precisa para englobar a maioria dos testes no sistema solar. Neste limite, a métrica do espaço-tempo prevista por quase todas as teorias métricas possui a mesma estrutura, em que a métrica pode ser escrita como uma expansão na métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ em termos de potenciais gravitacionais adimensionais [25].

Cada teoria métrica possuirá coeficientes com valores numéricos diferentes dos de outras teorias métricas. O formalismo pós-Newtoniano parametrizado (PPN) introduz parâmetros no lugar desses coeficientes, cujos valores irão variar de acordo com cada teoria. Ao todo, são 10 parâmetros usados, escolhidos de tal forma que medem ou indicam propriedades gerais das teorias métricas. Estes parâmetros são: γ, β, ξ, α_1, α_2, α_3, ζ_1, ζ_2, ζ_3 e ζ_4 [25].

Na tabela 1 seguem seus significados.

Parâmetro	O que medem relativo à RG
γ	Quanto da curvatura do espaço é produzida por unidade de massa inercial?
β	Quanto de não-linearidade há na lei de superposição para a gravidade?
ξ	Há efeitos com localização privilegiada?
α_1, α_2, α_3	Há efeitos em referenciais privilegiados?
α_3, ζ_1, ζ_2, ζ_3 e ζ_4	Há violação da conservação do momento total?

Tabela 1: Os parâmetros PPN e seus significados.

Os parâmetros α_3, ζ_1, ζ_2, ζ_3 e ζ_4 medem se a teoria prevê violações das leis de conservação do momento total. Os parâmetros α_1, α_2, α_3 medem se a teoria prevê efeitos em referenciais privilegiados. Já ξ prevê se há efeitos com localização privilegiada [25].

Os parâmetros γ e β são os únicos parâmetros não nulos na Relatividade Geral e em teorias escalares-tensoriais [25]. Como já abordado, os valores destes parâmetros serão diferentes para cada teoria métrica. Logo, uma das formas de se testar as teorias métricas é buscar inferir valores para estes parâmetros.

Neste formalismo, o sistema de coordenadas adotado é x^μ - em que $\mu = 0, 1, 2, 3$ - e a métrica do espaço-tempo assume a forma [36]:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \tag{5.1}$$

em que:

$$|h_{\alpha\beta}| << 1. \tag{5.2}$$

e $\eta_{\alpha\beta}$ é a métrica de Minkowski.

Vamos considerar o caso de uma fonte estática. Este é um caso especial do caso da fonte estacionária, em que o tensor energia-momento é constante no tempo, ou seja $\partial_0 T^{\mu\nu} = 0$. Na fonte estática, as partículas que a constituem não estão se movendo. Neste caso, a única componente do tensor energia-momento que é diferente de zero é a energia de repouso, dada por [36]:

$$T^{00} = \rho c^2, \tag{5.3}$$

em que $\rho(\vec{x})$ é a distribuição de densidade de matéria da fonte.

Este é o chamado limite Newtoniano da fonte, equivalente ao caso da fonte estacionária com campo de velocidades $u^i(\vec{x}) = 0$, em que u é a velocidade de uma partícula que constitui a fonte e é muito menor do que c. Logo, os elementos não-nulos de $h_{\alpha\beta}$ são [36]:

$$h_{00} = h_{11} = h_{22} = h_{33} = \frac{2\Phi}{c^2}. \tag{5.4}$$

Esta solução se mantém como uma boa aproximação mesmo que as partículas que constituem a fonte estejam se movendo, desde que o tensor energia-momento da fonte seja dominado pela energia de repouso da distribuição de matéria, ou seja, que $|T^{00}| > |T^{0i}|$ e $|T^{00}| > |T^{ij}|$ [36]. O elemento de linha que corresponde aos elementos não-nulos de $h_{\alpha\beta}$ é (3.11).

Vamos considerar o caso de um objeto esférico e estático com massa M, para que o potencial Newtoniano seja:

$$\Phi = \frac{GM}{r}. \tag{5.5}$$

Adotando coordenadas esféricas, teremos que reescrever o elemento como: $d\sigma^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2)$. O que obtemos então é [36]:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) dr^2 + r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2). \tag{5.6}$$

Porém, como já abordado, em teorias alternativas à Relatividade Geral, haverá uma diferença nos potenciais que aparecem na parte temporal e espacial da métrica (3.11). Na primeira, aparecerá o potencial Ψ e na segunda se manterá o potencial Φ. A razão entre estes potenciais é o chamado parâmetro slip [45]:

$$\eta = \frac{\Phi}{\Psi}. \tag{5.7}$$

No caso da RG, $\eta = 1$ já que os potenciais serão iguais.

Na literatura, é muito comum definir $\eta = \gamma$. Porém, é importante frisar que, no geral, estes parâmetros são diferentes e com diferentes implicações físicas. O parâmetro η não possui relação com a deflexão da luz ou com o efeito Shapiro [46], o que já ocorre ao γ. No formalismo pós-Newtoniano, os dois parâmetros coincidem e são constantes [45]. Por isso, neste trabalho, consideraremos que os dois parâmetros são iguais e constantes.

Resolvendo (4.23) para o caso do formalismo PPN, considerando que σ_r é dado por (4.19), encontra-se a seguinte expressão para a dispersão de velocidades observada:

$$\begin{aligned} < \sigma_\star^2 > \;\cong\; & \left[\frac{c^2}{4}\frac{D_{OS}}{D_{LS}}\theta_E\right] \frac{2[\lambda(\xi) - \beta\lambda(\xi+2)]}{\sqrt{\pi}\lambda(\alpha)\lambda(\delta)(\xi - 2\beta)} \frac{\Gamma(\frac{3-\xi}{2})}{\Gamma(\frac{3-\delta}{2})} \left(\frac{2\tilde{\sigma}^2_{atm}}{\theta_E^2}\right)^{1-\alpha/2} \times \\ & \left[\frac{2}{1+\gamma}\right]. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Em [16] e [15], foi buscado inferir um valor para o parâmetro PPN γ com o objetivo de testar a RG a partir de (5.8). Abaixo se encontram os 118 sistemas dos surveys SLACS, BELLS, LSD e SL2S coletados por [47] e usados por [16] e [15] para realizar a análise. Estes dados utilizam medidas de $\sigma_\star$ médio em cada espectro, como já abordado anteriormente.

A seguir, seguem as tabelas disponibilizadas por survey em [47] com os nomes dos sistemas - associado às coordenadas celestes espaciais -, os valores do redshift da lente z_l, redshift da fonte z_s, dispersão de velocidades σ_{ap}, raio de Einstein θ_E e ângulo de abertura da fibra θ_{ap}, respectivamente.

Nome	z_l	z_s	σ_{ap} [km/s]	θ_E ["]	θ_{ap} ["]
J0151+0049	0.517	1.364	219 ± 39	0.68	1
J0747+5055	0.438	0.898	328 ± 60	0.75	1
J0747+4448	0.437	0.897	281 ± 52	0.61	1
J0801+4727	0.483	1.518	98 ± 24	0.49	1
J0830+5116	0.53	1.332	268 ± 36	1.14	1
J0944-0147	0.539	1.179	204 ± 34	0.72	1
J1159-0007	0.579	1.346	165 ± 41	0.68	1
J1215+0047	0.642	1.297	262 ± 45	1.37	1
J1221+3806	0.535	1.284	187 ± 48	0.7	1
J1234-0241	0.49	1.016	122 ± 31	0.53	1
J1318-0104	0.659	1.396	177 ± 27	0.68	1
J1337+3620	0.564	1.182	225 ± 35	1.39	1
J1349+3612	0.44	0.893	178 ± 18	0.75	1
J1352+3216	0.463	1.034	161 ± 21	1.82	1
J1522+2910	0.555	1.311	166 ± 27	0.74	1
J1541+1812	0.56	1.113	174 ± 24	0.64	1
J1542+1629	0.352	1.023	210 ± 16	1.04	1
J1545+2748	0.522	1.289	250 ± 37	1.21	1
J1601+2138	0.544	1.446	207 ± 36	0.86	1
J1611+1705	0.477	1.211	109 ± 23	0.58	1
J1631+1854	0.408	1.086	272 ± 14	1.63	1
J1637+1439	0.391	0.874	208 ± 30	0.65	1
J2122+0409	0.626	1.452	324 ± 56	1.58	1
J2125+0411	0.363	0.978	247 ± 17	1.2	1
J2303+0037	0.458	0.936	274 ± 31	1.02	1

Tabela 2. Compilação dos sistemas do BELLS.

Nome	z_l	z_s	σ_{ap} [km/s]	θ_E ["]	θ_{ap} ["]
J0008-0004	0.44	1.192	193 ± 36	1.16	1.5
J0029-0055	0.227	0.931	229 ± 18	0.96	1.5
J0037-0942	0.196	0.632	279 ± 10	1.53	1.5
J0044+0113	0.12	0.196	266 ± 13	0.79	1.5
J0109+1500	0.294	0.525	251 ± 19	0.69	1.5
J0157-0056	0.513	0.924	295 ± 47	0.79	1.5
J0216-0813	0.332	0.524	333 ± 23	1.16	1.5
J0252+0039	0.28	0.982	164 ± 12	1.04	1.5
J0330-0020	0.351	1.071	212 ± 21	1.1	1.5
J0405-0455	0.075	0.81	160 ± 8	0.8	1.5
J0728+3835	0.206	0.688	214 ± 11	1.25	1.5
J0737+3216	0.322	0.581	338 ± 17	1	1.5
J0808+4706	0.219	1.025	236 ± 11	1.23	1.5
J0822+2652	0.241	0.594	259 ± 15	1.17	1.5
J0841+3824	0.116	0.657	225 ± 11	1.41	1.5
J0903+4116	0.43	1.065	223 ± 27	1.29	1.5
J0912+0029	0.164	0.324	326 ± 12	1.63	1.5
J0935-0003	0.348	0.467	396 ± 35	0.87	1.5
J0936+0913	0.19	0.588	243 ± 12	1.09	1.5
J0946+1006	0.222	0.608	263 ± 21	1.38	1.5
J0956+5100	0.24	0.47	334 ± 17	1.33	1.5
J0959+0410	0.126	0.535	197 ± 13	0.99	1.5
J1016+3859	0.168	0.439	247 ± 13	1.09	1.5
J1020+1122	0.282	0.553	282 ± 18	1.2	1.5
J1023+4230	0.191	0.696	242 ± 15	1.41	1.5
J1100+5329	0.317	0.858	187 ± 23	1.52	1.5
J1106+5228	0.096	0.407	262 ± 13	1.23	1.5
J1112+0826	0.273	0.63	320 ± 20	1.49	1.5
J1134+6027	0.153	0.474	239 ± 12	1.1	1.5
J1142+1001	0.222	0.504	221 ± 22	0.98	1.5
J1143-0144	0.106	0.402	269 ± 13	1.68	1.5
J1153+4612	0.18	0.875	226 ± 15	1.05	1.5
J1204+0358	0.164	0.631	267 ± 17	1.31	1.5
J1205+4910	0.215	0.481	281 ± 14	1.22	1.5
J1213+6708	0.123	0.64	292 ± 15	1.42	1.5
J1218+0830	0.135	0.717	219 ± 11	1.45	1.5
J1250+0523	0.232	0.795	252 ± 14	1.13	1.5

Nome	z_l	z_s	σ_{ap} [km/s]	θ_E ["]	θ_{ap} ["]
J1251-0208	0.224	0.784	233 ± 23	0.84	1.5
J1330-0148	0.081	0.712	185 ± 9	0.87	1.5
J1402+6321	0.205	0.481	267 ± 17	1.35	1.5
J1403+0006	0.189	0.473	213 ± 17	0.83	1.5
J1416+5136	0.299	0.811	240 ± 25	1.37	1.5
J1430+4105	0.285	0.575	322 ± 32	1.52	1.5
J1436-0000	0.285	0.805	224 ± 17	1.12	1.5
J1451-0239	0.125	0.52	223 ± 14	1.04	1.5
J1525+3327	0.358	0.717	264 ± 26	1.31	1.5
J1531-0105	0.16	0.744	279 ± 14	1.71	1.5
J1538+5817	0.143	0.531	189 ± 12	1	1.5
J1621+3931	0.245	0.602	236 ± 20	1.29	1.5
J1627-0053	0.208	0.524	290 ± 14	1.23	1.5
J1630+4520	0.248	0.793	276 ± 16	1.78	1.5
J1636+4707	0.228	0.674	231 ± 15	1.09	1.5
J2238-0754	0.137	0.713	198 ± 11	1.27	1.5
J2300+0022	0.228	0.464	279 ± 17	1.24	1.5
J2303+1422	0.155	0.517	255 ± 16	1.62	1.5
J2321-0939	0.082	0.532	249 ± 8	1.6	1.5
J2341+0000	0.186	0.807	207 ± 13	1.44	1.5

Tabela 3. Compilação dos sistemas do SLACS.

Nome	z_l	z_s	σ_{ap} [km/s]	θ_E ["]	θ_{ap} ["]
Q0047-2808	0.485	3.595	229 ± 15	1.34	1.25
CFRS03-1077	0.938	2.941	251 ± 19	1.24	1.25
HST 14176	0.81	3.399	224 ± 15	1.41	1.25
HST 15433	0.497	2.092	116 ± 10	0.36	1.25
MG 2016	1.004	3.263	328 ± 32	1.56	0.65

Tabela 4. Compilação dos sistemas do LSD.

Nome	z_l	z_s	σ_{ap} [km/s]	θ_E ["]	θ_{ap} ["]
J0212-0555	0.75	2.74	273 ± 22	1.27	0.9
J0213-0743	0.717	3.48	293 ± 34	2.39	1
J0214-0405	0.609	1.88	287 ± 47	1.41	1
J0217-0513	0.646	1.847	239 ± 27	1.27	1.5
J0219-0829	0.389	2.15	289 ± 23	1.3	1
J0223-0534	0.499	1.44	288 ± 28	1.22	1
J0225-0454	0.238	1.199	234 ± 21	1.76	1
J0226-0420	0.494	1.232	263 ± 24	1.19	1
J0232-0408	0.352	2.34	281 ± 26	1.04	1
J0848-0351	0.682	1.55	197 ± 21	0.85	0.9
J0849-0412	0.722	1.54	320 ± 24	1.1	0.9
J0849-0251	0.274	2.09	276 ± 35	1.16	0.9
J0850-0347	0.337	3.25	290 ± 24	0.93	0.7
J0855-0147	0.365	3.39	222 ± 25	1.03	0.7
J0855-0409	0.419	2.95	281 ± 22	1.36	0.7
J0904-0059	0.611	2.36	183 ± 21	1.4	0.9
J0959+0206	0.552	3.35	188 ± 22	0.74	0.9
J1359+5535	0.783	2.77	228 ± 29	1.14	1
J1404+5200	0.456	1.59	342 ± 20	2.55	1
J1405+5243	0.526	3.01	284 ± 21	1.51	1
J1406+5226	0.716	1.47	253 ± 19	0.94	1
J1411+5651	0.322	1.42	214 ± 23	0.93	1
J1420+5258	0.38	0.99	246 ± 23	0.96	1
J1420+5630	0.483	3.12	228 ± 19	1.4	1
J2203+0205	0.4	2.15	213 ± 21	1.95	1
J2205+0147	0.476	2.53	317 ± 30	1.66	0.9
J2213-0009	0.338	3.45	165 ± 20	1.07	1
J2219-0017	0.289	1.02	189 ± 20	0.52	0.7
J2220+0106	0.232	1.07	127 ± 15	2.16	1
J2221+0115	0.325	2.35	222 ± 23	1.4	1
J2222+0012	0.436	1.36	221 ± 22	1.44	1

Tabela 5. Compilação dos sistemas do SL2S

Para enfim obter resultados numéricos a partir da expressão (5.8), o caminho mais utilizado é comparar a dispersão de velocidades obtida das observações - σ_{obs}, que, nas tabelas acima, corresponde a σ_{ap} - com a dispersão de velocidades calculada para uma galáxia modelo - $< \sigma_\star >$ ou $\bar{\sigma}_\star$.

Como podemos ver por (5.8), $\bar{\sigma}_\star$ depende de características da lente, características observacionais, distâncias cosmológicas e do parâmetro γ. α, β, δ, θ_E são obtidos através das observações e γ é o desejado. Os erros estatísticos em δ, θ_E e nos redshifts da lente e da fonte podem ser negligenciados em comparação com os erros da dispersão de velocidades e de α e β. Estes dois últimos não podem ser medidos de forma independente para cada sistema, então considera-se que seus valores são obtidos de distribuições gaussianas $P(\alpha)$ e $P(\beta)$ com valores conhecidos de média e espalhamento intrínseco. Em [15] e [16], os valores de α, β e δ foram fixados, a partir do ajuste de dados externos, em:

$$\alpha = 2.00 \pm 0.08, \quad \beta = 0.18 \pm 0.13, \quad \delta = 2.40 \pm 0.11. \tag{5.9}$$

Para obtere valores para γ, considera-se σ_{obs} e sua incerteza ϵ_{obs} como medidas com erros gaussianos tal que a densidade de probabilidade para um valor observado de σ_{obs} dado um valor de $\bar{\sigma}_\star$ é:

$$P(\sigma_{obs}|\bar{\sigma}_\star) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\epsilon_{obs}} exp\left[-\frac{(\bar{\sigma}_\star - \sigma_{obs})^2}{2\epsilon_{obs}^2}\right]. \tag{5.10}$$

Maximizando esta probabilidade, encontra-se valores para γ. Se seu valor for próximo de um, dentro da incerteza encontrada, há a compatibilidade com a Relatividade Geral.

Em [16] e [15] esta foi a análise utilizada.. O valor obtido por [16] foi:

$$\gamma = 1.01 \pm 0.05, \tag{5.11}$$

e o valor obtido por [15] foi:

$$\gamma = 0.995^{+0.037}_{-0.047}. \tag{5.12}$$

Ambos os valores são compatíveis com a Relatividade Geral dentro das incertezas encontradas.

Tendo exposto os testes já apresentados na literatura que utilizam o formalismo PPN, apresentaremos a seguir o teste que realizamos para o caso das teorias BH, uma classe específica de teorias de gravidade modificada.

5.2 Teste das teorias Beyond Horndeski

Nesta seção serão expostos os cálculos referentes às novas expressões para a equação da lente, para o termo M_E e da dispersão de velocidades teórica e observada com os parâmetros Y_1 e Y_2 oriundos das teorias Beyond Horndeski.

5.2.1 Equação da lente modificada

A equação da lente é obtida da expressão da deflexão da luz, oriunda da equação geodésica para os fótons.

A deflexão da luz é causada por uma distribuição de massa que pode ser descrita pela equação de Poisson [4]. No caso da Relatividade Geral, em que os potenciais são iguais, temos:

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho. \tag{5.13}$$

Porém, nas teorias de gravitação modificada, não se pode assumir previamente esta igualdade. Neste caso, como as partículas relativísticas são sensíveis a soma dos potenciais, a equação de Poisson toma a forma dada por:

$$\nabla^2(\Phi + \Psi) = 8\pi G\rho_{tot}, \tag{5.14}$$

em que $\rho_{tot}(r) = \rho_M(r) + \rho_{eff}(r)$. A expressão para a densidade de matéria efetiva será apresentada a seguir e ρ_M é dada por (3.26).

Então, para a obtenção da equação da lente, devem ser consideradas a massa da matéria luminosa e a chamada massa do lensing, que serão diferentes nas teorias de gravitação modificada [28]. Assim, os termos Y_1 e Y_2 - oriundos das teorias Beyond Horndeski - devem ser levados em conta para a obtenção da nova expressão para a equação da lente.

Para inclui-los, devemos considerar que o perfil de densidade de massa total será a soma do perfil de densidade de massa da RG - dado por (3.26) - e do perfil de densidade de massa efetiva, dado por [20]:

$$\rho_{eff}(r) = \frac{1}{8\pi r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{Y_1 r^2}{4}\frac{d^2M}{dr^2} - \frac{5rY_2}{4}\frac{dM}{dr}\right). \tag{5.15}$$

Esta expressão é obtida ao aplicarmos ∇^2 - dependente somente da coordenada r considerando simetria esférica - em (2.25) e em (2.26). Aplicando $M_d(r)$ - (4.17) -, tem-se:

$$\rho_{eff}(r) = \frac{\rho_0 r_0^\alpha}{8}(3-\alpha)[Y_1(2-\alpha) - 5Y_2]r^{-\alpha}. \tag{5.16}$$

Então, como $\rho_{tot}(r) = \rho_M(r) + \rho_{eff}(r)$, temos que:

$$\rho_{tot}(r) = \rho_0 r_0^\alpha\left(1 + \frac{(3-\alpha)}{8}[Y_1(2-\alpha) - 5Y_2]\right)r^{-\alpha}. \tag{5.17}$$

Para encontrarmos a expressão para a massa total M_{tot} em função da variável ξ, precisaremos resolver a integral da massa considerando a aproximação de lentes finas, dada pela equação (3.24).

Contudo, para resolver (3.24), precisamos primeiramente solucionar a integral (3.21). Para resolvê-la, é necessário realizar uma projeção em que:

$$r = \sqrt{\xi^2 + r_3^2}, \tag{5.18}$$

em que r_3 é uma projeção paralela ao eixo z.

Logo, da expressão (3.21), temos que:

$$\Sigma(\xi) = \rho_0 r_0^\alpha \left(1 + \frac{(3-\alpha)}{8}[Y_1(2-\alpha) - 5Y_2]\right) \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{\xi^2 + r_3^2})^{-\alpha} dr_3. \tag{5.19}$$

Para facilitar as contas, chamaremos as constantes da expressão anterior de K_1:

$$K_1 \equiv \rho_0 r_0^\alpha \left(1 + \frac{(3-\alpha)}{8}[Y_1(2-\alpha) - 5Y_2]\right) \tag{5.20}$$

Temos então:

$$\Sigma(\xi) = \frac{K_1}{\xi^\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dr_3}{(1 + (r_3/\xi)^2)^{\alpha/2}}. \tag{5.21}$$

Para resolver esta integral, faremos a seguinte mudança de variável:

$$y \equiv \frac{r_3}{\xi}, \tag{5.22}$$

Logo:

$$I = \frac{1}{\xi^\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi dy}{(1+y^2)^{\alpha/2}} = \frac{1}{\xi^{\alpha-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(1+y^2)^\beta}. \tag{5.23}$$

A resolução desta integral é dada por:

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{\xi^{\alpha-1}} \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2} + \beta\right)}{\Gamma(\beta)}, \tag{5.24}$$

em que Γ é a função Gamma [39].

Desta forma, podemos obter a expressão para a densidade de massa superficial:

$$\Sigma(\xi) = \frac{K_1\sqrt{\pi}}{\xi^{\alpha-1}} \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}. \tag{5.25}$$

Simplificando:

$$\Sigma(\xi) = \frac{K_1\sqrt{\pi}}{\xi^{\alpha-1}} \lambda(\alpha), \tag{5.26}$$

Então a expressão para a massa se torna:

$$M_{tot}(\xi) = 2K_1 \pi^{3/2} \lambda(\alpha) \frac{\xi^{3-\alpha}}{(3-\alpha)}. \tag{5.27}$$

Voltando com as constantes, a expressão para a massa total será:

$$M_{tot}(\xi) = \frac{2\rho_0 r_0 \pi^{3/2} \lambda(\alpha)}{(3-\alpha)} \left(1 + \frac{(3-\alpha)}{8}[Y_1(2-\alpha) - 5Y_2]\right) \xi^{3-\alpha}. \tag{5.28}$$

Para encontrarmos a equação da lente, passaremos a expressão acima para uma função de θ, utilizando a equação (3.4). Logo, a expressão para a massa total em função de θ é:

$$M_{tot}(\theta) = \frac{2\rho_0 r_0 \pi^{3/2} \lambda(\alpha)}{(3-\alpha)} \left(1 + \frac{(3-\alpha)}{8}[Y_1(2-\alpha) - 5Y_2]\right) (\theta D_{OL})^{3-\alpha}. \tag{5.29}$$

Então, aplicando o resultado na equação (3.8), obtemos a seguinte expressão para a equação da lente:

$$\beta(\theta) = \theta - \frac{D_{LS}}{D_{OS}}\frac{4G}{c^2}\frac{2\rho_0 r_0 \pi^{3/2}\lambda(\alpha)}{(3-\alpha)}\left(1 + \frac{(3-\alpha)}{8}[Y_1(2-\alpha) - 5Y_2]\right)(\theta D_{OL})^{2-\alpha}. \quad (5.30)$$

Como já abordado, para obter a expressão para o raio de Einstein, precisamos que β seja igual a zero. Portanto, a nossa expressão para o raio de Einstein no caso das teorias Beyond Horndeski é:

$$\theta_E^{\alpha-1} = \frac{D_{LS}}{D_{OS}}\frac{4G}{c^2}\frac{2\rho_0 r_0 \pi^{3/2}\lambda(\alpha)}{(3-\alpha)}\left(1 + \frac{(3-\alpha)}{8}[Y_1(2-\alpha) - 5Y_2]\right) D_{OL}^{2-\alpha}. \quad (5.31)$$

Se considerarmos que Y_1 e Y_2 são nulos, obteremos a equação da lente para o caso da Relatividade Geral - dada por (3.31).

Na próxima seção, apresentaremos o cálculo para M_E - que já foi abordado no caso da RG - para o caso das teorias Beyond Horndeski.

5.2.2 Massa contida dentro do raio de Einstein

Assim como a equação da lente e, como será mostrado posteriormente, a expressão para a dispersão de velocidades σ_r^2, a expressão para a massa dentro de um cilindro de raio igual ao raio de Einstein - M_E - também sofrerá mudanças na análise da gravitação modificada. A integral (3.32) continua válida, porém teremos alterações no cálculo da densidade superficial de massa devido ao novo termo na expressão da densidade de massa ρ_{eff}.

No entanto, ao contrário do que ocorre na equação da lente, a matéria luminosa - considerada para o cálculo de M_E - só é sensível ao potencial Φ e, consequentemente, só é parametrizada pelo parâmetro Y_1. Desta forma, a equação de Poisson só dependerá de Φ e da densidade efetiva de massa ρ_{Meff}.

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G \rho_{Meff}. \quad (5.32)$$

Consideremos que ∇^2 dependerá somente da coordenada r, então:

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Phi}{dr}\right), \quad (5.33)$$

em que a derivada de Φ é dada por (2.25).

O que nos leva a:

$$\frac{G}{r^2}\frac{dM}{dr} + \frac{Y_1 G}{4r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d^2M}{dr^2}\right) = 4\pi G\rho_{Meff}. \quad (5.34)$$

Logo, levando em conta que a matéria luminosa é descrita somente pela massa $M(r)$ - dada por (4.18) -, encontramos que:

$$\rho_{Meff} = \rho_0 r_0^{\alpha}\left[1 + \frac{Y_1}{4}(2-\alpha)(3-\alpha)\right] r^{-\alpha}. \quad (5.35)$$

O cálculo para a obtenção do termo M_E é análogo ao que já foi feito anteriormente. Portanto, obtemos a sua expressão considerando os termos das teorias Beyond Horndeski:

$$M_{E_{GM}} = \frac{2\pi^{3/2}\rho_0 r_0^{\alpha}\lambda(\alpha)}{3-\alpha}\left[1+\frac{Y_1}{4}(2-\alpha)(3-\alpha)\right]R_E^{3-\alpha}. \tag{5.36}$$

Logo, podemos encontrar uma relação entre a expressão acima e a expressão para M_E no caso da RG - dada por (3.34).

$$M_{E_{GM}} = \left[1+\frac{Y_1}{4}(2-\alpha)(3-\alpha)\right]M_E. \tag{5.37}$$

Com esta relação acima e a relação entre constantes que obtivemos em (4.21), podemos reescrever a equação da lente modificada - (5.31) - como:

$$\theta^{\alpha-1} = \frac{D_{LS}}{D_{OS}}\frac{4G}{c^2}\frac{M_E}{R_E^{3-\alpha}}D_{OL}^{2-\alpha}[1+F(Y_1,Y_2)]. \tag{5.38}$$

Então, para reescrevermos esta expressão em função de $M_{E_{GM}}$ usamos (5.37), o que nos leva a:

$$\theta^{\alpha-1} = \frac{D_{LS}}{D_{OS}}\frac{4G}{c^2}\frac{M_{E_{GM}}}{R_E}\frac{D_{OL}^{2-\alpha}}{R_E^{2-\alpha}}\frac{[1+F(Y_1,Y_2)]}{1+H(Y_1)}, \tag{5.39}$$

em que:

$$F(Y_1,Y_2) = \frac{(3-\alpha)}{8}[Y_1(2-\alpha)-5Y_2], \tag{5.40}$$

e

$$H(Y_1) = \frac{Y_1}{4}(2-\alpha)(3-\alpha). \tag{5.41}$$

Usando a relação $R_E = \theta_E D_{OL}$, obtemos:

$$\theta_E = \left[\frac{GM_{E_{GM}}}{R_E}\right]\frac{4}{c^2}\frac{D_{LS}}{D_{OS}}\frac{[1+F(Y_1,Y_2)]}{1+H(Y_1)}, \tag{5.42}$$

o que nos leva então à seguinte relação:

$$\frac{GM_{E_{GM}}}{R_E} = \frac{c^2}{4}\frac{D_{OS}}{D_{LS}}\frac{[1+H(Y_1)]}{[1+F(Y_1,Y_2)]}\theta_E \tag{5.43}$$

Esta relação será importante na obtenção da expressão final da dispersão de velocidades observada, que será calculada na próxima seção.

5.2.3 A dispersão de velocidades na gravitação modificada

Como já abordado, para obtermos uma nova expressão para a dispersão de velocidades observada, teremos que inserir os termos das teorias Beyond Horndeski na equação de Jeans para encontrar uma nova expressão para a dispersão de velocidades teórica, dada por $\sigma_r^2(r)$, para posteriormente obtermos a nova expressão para $< \sigma_\star^2 >$.

A dispersão de velocidades teórica só considera a matéria luminosa das galáxias, ou seja, a matéria não-relativística, que é a massa dinâmica. Por isso, a massa que será considerada será somente a massa $M(r)$ dada por (4.18) e a forma da equação de Jeans, dada por (4.5), não se altera. Como a dependência da equação de Jeans está somente na derivada de primeira ordem do potencial Newtoniano Φ, somente o parâmetro Y_1 será adicionado aos cálculos.

Para facilitar as contas, definimos:

$$K \equiv \frac{2M_E}{\sqrt{\pi}\lambda(\alpha)} \left(\frac{1}{R_E}\right)^{3-\alpha} \tag{5.44}$$

Então, considerando que a derivada de primeira ordem de Φ é dada pela expressão (2.25), teremos que:

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{GKr^{3-\alpha}}{r^2} + \frac{Y_1 G}{4} K(3-\alpha)(2-\alpha)r^{1-\alpha}. \tag{5.45}$$

Logo, a nova equação de Jeans será dada por:

$$\frac{d}{dr}(\nu(r)\sigma_r^2) + 2\beta(r)\nu(r)\frac{\sigma_r^2}{r} = -\nu(r)GKr^{1-\alpha} - \nu(r)\frac{Y_1 G}{4} K(3-\alpha)(2-\alpha)r^{1-\alpha}. \tag{5.46}$$

O procedimento para resolvê-la é similar ao feito anteriormente. Supomos que:

$$F = r^{2\beta}, \tag{5.47}$$

então:

$$\frac{A}{F} = -\nu(r)GKr^{1-\alpha}\left[1 + \frac{Y_1 G}{4} K(3-\alpha)(2-\alpha)\right] = \frac{A}{r^{2\beta}}, \tag{5.48}$$

logo, teremos:

$$A(r) = \nu(r)GK\left[1 - \frac{Y_1 G}{4} K(3-\alpha)(2-\alpha)\right] r^{1-\alpha+2\beta}. \tag{5.49}$$

Portanto, encontramos que a nova expressão para σ_r^2 é:

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{\nu(r)r^{2\beta}}\left[1 - \frac{Y_1 G}{4} K(3-\alpha)(2-\alpha)\right] \int_r^\infty \nu(r)GKr^{1-\alpha+2\beta}dr. \tag{5.50}$$

Sabemos que $\nu(r)$ é dado por (4.6). Logo, resolvendo a integral, chegamos a seguinte expressão para σ_r^2:

$$\sigma_r^2 = \frac{r^{2-\alpha}}{2-\alpha+2\beta-\delta}\left[1 - \frac{Y_1 G}{4} K(3-\alpha)(2-\alpha)\right], \tag{5.51}$$

e, sabendo que $\xi = \delta + \alpha - 2$, podemos reescrever a expressão acima como:

$$\sigma_r^2 = \frac{GKr^{2-\alpha}}{\xi - 2\beta}\left[1 + \frac{Y_1}{4}(3-\alpha)(2-\alpha)\right]. \tag{5.52}$$

Esta é a expressão para a dispersão de velocidades teórica considerando os termos oriundos das teorias Beyond Horndeski. Considerando $Y_1 = 0$, retorna-se ao caso da Relatividade Geral.

Aplicando o que encontramos para σ_r^2 - dado por (5.52) - em (4.23), obtemos:

$$< \sigma_\star^2 > \cong \left[1 + \frac{Y_1}{4}(3-\alpha)(2-\alpha)\right] \frac{\int_0^\infty Rw(R)dR \int_{-\infty}^{\infty} dZ\nu(r)\left(1 - \frac{\beta R^2}{r^2}\right)\frac{GKr^{2-\alpha}}{(\xi-2\beta)}}{\int_0^\infty Rw(R)dR \int_{-\infty}^{\infty}\nu(r)dZ} \quad (5.53)$$

Já conhecemos o resultado desta expressão, pois é exatamente o que é calculado em [16] e [15]. Como a expressão (5.53) só difere em constantes das expressões já calculadas, seus resultados serão parecidos. Desta forma, temos:

$$\begin{aligned} < \sigma_\star^2 > \quad \cong \quad & \left[\frac{GM_E}{R_E}\right] \frac{2[\lambda(\xi) - \beta\lambda(\xi+2)]}{\sqrt{\pi}\lambda(\alpha)\lambda(\delta)(\xi-2\beta)} \left(\frac{1}{R_E}\right)^{2-\alpha} (2D_{OL}^2\tilde{\sigma}_{atm}^2)^{1-\alpha/2} \frac{\Gamma(\frac{3-\xi}{2})}{\Gamma(\frac{3-\delta}{2})} \times \\ & \left[1 + \frac{Y_1(3-\alpha)(2-\alpha)}{4}\right] \end{aligned} \quad (5.54)$$

Sabendo que $D_{OL} = R_E/\theta_E$ e utilizando a relação (5.43), podemos reescrever nossa expressão acima como:

$$\begin{aligned} < \sigma_\star^2 > \quad \cong \quad & \left[\frac{c^2}{4}\frac{D_{OS}}{D_{LS}}\frac{\theta_E}{1+F(Y_1,Y_2)}\right] \frac{2[1+H(Y_1)]}{\sqrt{\pi}\lambda(\alpha)(\xi-2\beta)} \frac{[\lambda(\xi) - \beta\lambda(\xi+2)]}{\lambda(\delta)} \times \\ & \frac{\Gamma(\frac{3-\xi}{2})}{\Gamma(\frac{3-\delta}{2})} \left(\frac{2\tilde{\sigma}_{atm}^2}{\theta_E^2}\right)^{1-\alpha/2}. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Como $|Y_1|, |Y_2| << 1$, podemos expandir $[1 + F(Y_1,Y_2)]^{-1}$ em série de Taylor, aproximando para:

$$[1 + F(Y_1,Y_2)]^{-1} \simeq 1 - F(Y_1,Y_2). \quad (5.56)$$

Logo, o que obtemos é:

$$\begin{aligned} < \sigma_\star^2 > \quad \cong \quad & \left[\frac{c^2}{4}\frac{D_{OS}}{D_{LS}}\theta_E\right] \frac{2[\lambda(\xi) - \beta\lambda(\xi+2)]}{\sqrt{\pi}\lambda(\alpha)\lambda(\delta)(\xi-2\beta)} \frac{\Gamma(\frac{3-\xi}{2})}{\Gamma(\frac{3-\delta}{2})} \left(\frac{2\tilde{\sigma}_{atm}^2}{\theta_E^2}\right)^{1-\alpha/2} \times \\ & \left[1 + \frac{Y_1}{4}(2-\alpha)(3-\alpha)\right] \left[1 - \frac{(3-\alpha)}{8}[Y_1(2-\alpha) - 5Y_2]\right]. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Para obter a expressão final, vamos simplificar o produto que se encontra na parte inferior da expressão anterior. Para isso, vamos considerar que os termos quadráticos são nulos, já que são muito menores do que um. Portanto, encontra-se a expressão final para a dispersão de velocidades observada, dada por:

$$\begin{aligned} < \sigma_\star^2 > \quad \cong \quad & \left[\frac{c^2}{4}\frac{D_{OS}}{D_{LS}}\theta_E\right] \frac{2[\lambda(\xi) - \beta\lambda(\xi+2)]}{\sqrt{\pi}\lambda(\alpha)\lambda(\delta)(\xi-2\beta)} \frac{\Gamma(\frac{3-\xi}{2})}{\Gamma(\frac{3-\delta}{2})} \left(\frac{2\tilde{\sigma}_{atm}^2}{\theta_E^2}\right)^{1-\alpha/2} \times \\ & \left[1 + \frac{(3-\alpha)}{8}[(2-\alpha)Y_1 + 5Y_2]\right]. \end{aligned} \quad (5.58)$$

A expressão acima é a que deve ser utilizada para testar as teorias Beyond Horndeski, ou seja, para obter valores para os parâmetros Y_1 e Y_2 através dos dados obtidos das observações, já que todos os outros termos da expressão são ou observáveis ou funções tabeladas. Se considerarmos que Y_1 e Y_2 são nulos em (5.58), retornamos ao caso da Relatividade Geral obtido por [15].

Contudo, por aparecem em um termo somado, há uma degenerescência entre os parâmetros Y_1 e Y_2, o que torna impossível medi-los de forma independente a partir da nossa análise e com os dados que possuímos.

A expressão (5.58) é o resultado principal e original deste trabalho.

Capítulo 6

Conclusões e Considerações Finais

Neste trabalho apresentamos uma das possíveis formas de testar teorias alternativas à Relatividade Geral, em especial as teorias Beyond Horndeski, comparando a massa do lensing com a massa dinâmica oriunda da matéria luminosa em galáxias a partir do uso do lenteamento forte de objetos com escala galáctica.

As teorias de gravitação modificada têm se mostrado alternativas interessantes para explicar e resolver os problemas em aberto do modelo ΛCDM, o mais usado para a descrição do Universo e que adota a Relatividade Geral como teoria gravitacional. Em especial, as teorias escalares-tensoriais costumam ser as mais usadas como alternativas à RG devido a sua simplicidade relativa. Estas teorias modificam a gravidade acrescentando campos dinâmicos, o que leva à adição de graus de liberdade extras. Para reprimir estes graus extras no regime de curvatura intermediária, onde a Relatividade Geral é bem testada, são utilizados mecanismos de screening.

As teorias Beyond Horndeski se encaixam na classe de teorias escalares-tensoriais e adotam o mecanismo de Vainshtein para suprimir os graus de liberdade extras. Essas teorias adicionam mais duas lagrangianas às lagrangianas elementares de Horndeski, levando à equações de movimento com derivadas de terceira ordem, mas sem implicar na existência de um grau de liberdade extra como ocorre com outras teorias dessa classe. As teorias Beyond Horndeski compreendem diversos modelos de energia escura sem a constante cosmológica Λ, o que torna seu estudo interessante, já que a energia escura ainda é uma questão em aberto do Modelo Cosmológico Padrão.

Uma das ferramentas utilizada para testar teorias de gravitação modificada são as lentes gravitacionais, formadas como resultado da deflexão da luz por um campo gravitacional. Seu uso é diverso, com aplicações em várias áreas da astrofísica e cosmologia. Neste trabalho, adotamos o lenteamento gravitacional como ferramenta para testar teorias alternativas por englobarem um alcance maior em diferentes escalas [13].

Para realizar o teste, obtivemos as modificações necessárias na equação da lente -

relacionada à massa lensing - e na expressão para a dispersão de velocidades - relacionada à massa dinâmica e oriunda da equação de Jeans - inserindo os termos das teorias Beyond Horndeski que saem da perturbação da métrica de FLRW. Estes termos são os parâmetros adimensionais Y_1 e Y_2, diretamente relacionados às derivadas dos potenciais associados às perturbações escalares da métrica - Φ e Ψ [20].

A partir das equações de movimento para partículas em queda livre com e sem massa, observa-se que as partículas massivas são sensíveis somente ao potencial Φ, enquanto as partículas sem massa são sensíveis à soma dos potenciais [18]. No caso da Relatividade Geral, os potenciais são iguais, o que já não ocorre obrigatoriamente para as teorias de gravitação modificada. Desta forma, as modificações na equação da lente incluíram a inserção dos parâmetros Y_1 e Y_2 - como pode ser visto na equação (5.31) - , enquanto que na expressão para a dispersão de velocidades - (5.52) - apenas o termo Y_1 foi levado em conta. Por fim, foi obtida a expressão final para a dispersão de velocidades observada (5.58), parâmetro que pode ser medido pela espectroscopia.

Observa-se que há uma relação entre o parâmetro pós-Newtoniano γ e uma combinação de Y_1 e Y_2, pois os resultados obtidos em [15] - apresentado em (5.8) - e neste trabalho na expressão (5.58) podem ser comparados. Em (5.8), a expressão para a dispersão de velocidade é escrita em função do parâmetro pós-Newtoniano γ e, assim, podemos escrever γ em termos de uma combinação de Y_1 e Y_2 como:

$$\gamma = 1 - \frac{(3-\alpha)}{4}[(2-\alpha)Y_1 + 5Y_2]. \tag{6.1}$$

Logo, os limites obtidos para γ podem ser usados para colocar limite sobre uma combinação dos parâmetros Y_1 e Y_2. O que obtemos então é que a análise encontrada neste trabalho para o caso das teorias BH é equivalente à análise do parâmetro γ realizada por [16] e [15] para o caso da RG.

Entretanto, analisando (5.58), percebe-se que há uma degenerescência entre os parâmetros Y_1 e Y_2 das teorias BH. Não é possível medi-los separadamente com os dados que possuímos, que utilizam a combinação do efeito de lenteamento gravitacional com a dinâmica estelar. Isto ocorre porque os dados fornecidos por [47] possuem uma limitação para determinar melhor o perfil de densidade do que uma lei de potência.

Existem dados que combinam dinâmica e lentes gravitacionais que são muito mais detalhados que os apresentados neste trabalho. Há sistemas que têm medidas de dispersão de velocidades não apenas em um ponto, mas em toda a extensão da lente, ou seja, medidas de $\sigma_\star(r)$ [17]. Também existem sistemas na escala galáctica com dezenas ou centenas de imagens múltiplas. Para esses sistemas é possível reconstruir um perfil de densidade massa que vai além de uma lei de potência [48]. Com estes dados mais detalhados, é possível que haja chances de determinar os parâmetros Y_1 e Y_2 separadamente.

Outro exemplo que combina dinâmica estelar e efeito de lenteamento é [20]. Neste trabalho, são ajustados dados de raios-X e dados de lenteamento de aglomerados de galáxias para obter valores para os parâmetros Y_1 e Y_2 das teorias BH. Os resultados obtidos são compatíveis com a RG dentro das incertezas encontradas.

Com dados mais detalhados e sendo possível medir separadamente Y_1 e Y_2, uma possível extensão do trabalho tem relação com o parâmetro Y_3, associado às teorias DHOST ([49], [30]), relacionado à derivada do parâmetro Ψ como:

$$\frac{d\Psi}{dr} = \frac{GM(r)}{r^2} - \frac{5Y_2G}{4r}\frac{dM}{dr} + Y_3G\frac{d^2M}{dr^2}. \tag{6.2}$$

Entretanto, ele foi desconsiderado de nossa análise atual, pois nas teorias BH $Y_3 = 0$ [30]. Em uma possível extensão, é provável que este parâmetro apareça como mais um termo somado na equação da lente - já que está relacionado à derivada de Ψ - e, consequentemente, também na expressão para a dispersão de velocidades observada.

Referências

[1] N. Aghanim et al. Planck 2018 results - iv cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, 641(A6).

[2] Y. Akrami et al. Planck 2018 results. VII. Isotropy and Statistics of the CMB. *Astron. Astrophys.*, 641:A7, 2020.

[3] F. Avila, C. P. Novaes, A. Bernui, E. de Carvalho, and J. P. Nogueira-Cavalcante. The angular scale of homogeneity in the Local Universe with the SDSS blue galaxies. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 488(1):1481–1487, 2019.

[4] Emilio E. Falco Peter Schneider, Jurgen Ehlers. *Gravitational Lenses.* Springer Science, Nova York, 1999.

[5] B. P. Abbott et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Phys. Rev. Lett.*, 116(6):061102, 2016.

[6] Sean M. Carroll. Why is the universe accelerating? *eConf*, C0307282:TTH09, 2003.

[7] Miao Li, Xiao-Dong Li, Shuang Wang, and Yi Wang. Dark Energy. *Commun. Theor. Phys.*, 56:525–604, 2011.

[8] M. Tanabashi et al. Review of Particle Physics. *Phys. Rev. D*, 98(3):030001, 2018.

[9] Antonio De Felice and Shinji Tsujikawa. f(R) theories. *Living Rev. Rel.*, 13:3, 2010.

[10] Thomas P. Sotiriou and Valerio Faraoni. f(R) Theories Of Gravity. *Rev. Mod. Phys.*, 82:451–497, 2010.

[11] Gregory Walter Horndeski. Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space. *Int. J. Theor. Phys.*, 10:363–384, 1974.

[12]

[13] Bhuvnesh Jain and Justin Khoury. Cosmological Tests of Gravity. *Annals Phys.*, 325:1479–1516, 2010.

[14] Jérôme Gleyzes, David Langlois, Federico Piazza, and Filippo Vernizzi. Healthy theories beyond Horndeski. *Phys. Rev. Lett.*, 114(21):211101, 2015.

[15] Shuo Cao, Xiaolei Li, Marek Biesiada, Tengpeng Xu, Yongzhi Cai, and Zong-Hong Zhu. Test of parametrized post-Newtonian gravity with galaxy-scale strong lensing systems. *Astrophys. J.*, 835(1):92, 2017.

[16] Josiah Schwab, Adam S. Bolton, and Saul A. Rappaport. GALAXY-SCALE STRONG-LENSING TESTS OF GRAVITY AND GEOMETRIC COSMOLOGY: CONSTRAINTS AND SYSTEMATIC LIMITATIONS. *The Astrophysical Journal*, 708(1):750–757, dec 2009.

[17] Thomas E. Collett, Lindsay J. Oldham, Russell J. Smith, Matthew W. Auger, Kyle B. Westfall, David Bacon, Robert C. Nichol, Karen L. Masters, Kazuya Koyama, and Remco van den Bosch. A precise extragalactic test of General Relativity. *Science*, 360:1342, 2018.

[18] Edmund Bertschinger. One Gravitational Potential or Two? Forecasts and Tests. *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A*, 369:4947–4961, 2011.

[19] Esteban Roulet Silvia Mollerach. *Gravitational Lensing and Microlensing.* World Scientific, Nova York, 2002.

[20] Jeremy Sakstein, Harry Wilcox, David Bacon, Kazuya Koyama, and Robert C. Nichol. Testing Gravity Using Galaxy Clusters: New Constraints on Beyond Horndeski Theories. *JCAP*, 07:019, 2016.

[21] Saul Perlmutter. Supernovae, dark energy and the accelerating universe. *Physics Today*, 56(53):53–60, apr 2003.

[22] Luca Amendola and Shinji Tsujikawa. *Dark Energy.* Cambridge University Press, New York, 2010.

[23] Emanuele Berti et al. Testing General Relativity with Present and Future Astrophysical Observations. *Class. Quant. Grav.*, 32:243001, 2015.

[24] M. Aker et al. Search for Lorentz-Invariance Violation with the first KATRIN data. 7 2022.

[25] Clifford M. Will. The Confrontation between General Relativity and Experiment. *Living Rev. Rel.*, 17:4, 2014.

[26] David Langlois. Dark energy and modified gravity in degenerate higher-order scalar–tensor (DHOST) theories: A review. *Int. J. Mod. Phys. D*, 28(05):1942006, 2019.

[27] Bhuvnesh Jain et al. Novel Probes of Gravity and Dark Energy. 9 2013.

[28] Lorenzo Pizzuti, Ippocratis D. Saltas, Santiago Casas, Luca Amendola, and Andrea Biviano. Future constraints on the gravitational slip with the mass profiles of galaxy clusters. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 486(1):596–607, 2019.

[29] Kazuya Koyama. Cosmological Tests of Modified Gravity. *Rept. Prog. Phys.*, 79(4):046902, 2016.

[30] Alexandru Dima and Filippo Vernizzi. Vainshtein Screening in Scalar-Tensor Theories before and after GW170817: Constraints on Theories beyond Horndeski. *Phys. Rev. D*, 97(10):101302, 2018.

[31] Ignacy Sawicki and Emilio Bellini. Limits of quasistatic approximation in modified-gravity cosmologies. *Phys. Rev. D*, 92(8):084061, 2015.

[32] Giulia Cusin, Matthew Lewandowski, and Filippo Vernizzi. Nonlinear Effective Theory of Dark Energy. *JCAP*, 04:061, 2018.

[33] Rampei Kimura, Tsutomu Kobayashi, and Kazuhiro Yamamoto. Vainshtein screening in a cosmological background in the most general second-order scalar-tensor theory. *Phys. Rev. D*, 85:024023, 2012.

[34] Vanessa P. de Freitas. *Arcos Gravitacionais na Escala Galáctica: Modelagem Analítica e Seções de Choque*. PhD thesis, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, 2018.

[35] Habib S. D. Montoya. *Modelagens Semianalíticas para Arcos Gravitacionais: Seção de Choque e Método Perturbativo em Lentes Pseudoelípticas*. PhD thesis, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, 2011.

[36] Michael P. Hobson, George P. EFSTATHIOU, and Anthony N LASENBY. *General Relativity*. Cambridge University Press, Nova York, 2006.

[37] Massimo Meneghetti. Light deflection. University Lecture, 2017.

[38] Ramesh Narayan and Matthias Bartelmann. Lectures on gravitational lensing. In *13th Jerusalem Winter School in Theoretical Physics: Formation of Structure in the Universe*, 6 1996.

[39] George Arfken e Hans Weber. *Física matemática*. Elsevier Editora Ltda, Rio de Janeiro, 2007.

[40] Ian Ridpath. *A Dictionary of Astronomy*. Oxford University Press, Oxford, 2012.

[41] Kohji Yoshikawa, Naoki Yoshida, and Masayuki Umemura. Direct Integration of the Collisionless Boltzmann Equation in Six-dimensional Phase Space: Self-gravitating Systems. *Astrophys. J.*, 762:116, 2013.

[42] Peter Schneider. *Extragalactic Astronomy and Cosmology.* Springer, 2015.

[43] Lorenzo Pizzuti, Ippocratis D. Saltas, and Luca Amendola. mg-mamposst: a code to test modifications of gravity with internal kinematics and lensing analyses of galaxy clusters. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 506(1):595–612, 2021.

[44] Charles W. Misner, Kip S. Thorne, and John Archibald Wheeler. *Gravitation.* W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1973.

[45] Júnior D. Toniato and Davi C. Rodrigues. Post-Newtonian γ-like parameters and the gravitational slip in scalar-tensor and f(R) theories. *Phys. Rev. D*, 104(4):044020, 2021.

[46] Markus Pössel. Light, delayed: The Shapiro Effect and the Newtonian Limit. 10 2021.

[47] Shuo Cao, Marek Biesiada, Rapha Gavazzi, Aleksandra Piórkowska, and Zong-Hong Zhu. Cosmology With Strong-lensing Systems. *Astrophys. J.*, 806:185, 2015.

[48] G. B. Caminha et al. Strong lensing models of eight CLASH clusters from extensive spectroscopy: accurate total mass reconstructions in the cores. *Astron. Astrophys.*, 632:A36, 2019.

[49] Jeremy Sakstein. *Astrophysical Tests of Screened Modified Gravity*, pages 195–231. 2020.