

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS  
COSMO

MATHEUS VITOR FERREIRA RAMOS

Utilizando modelo de gravitação modificada para restringir parâmetros cosmológicos

Orientador: Prof. Dr. Felipe Tovar Falciano

RIO DE JANEIRO  
2022

Prof. Dr. Marcio Portes de Albuquerque  
Diretor do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Prof. Dr. Nelson Pinto Neto  
Coordenador da COSMO

MATHEUS VITOR FERREIRA RAMOS

Utilizando modelo de gravitação modificada para restringir parâmetros cosmológicos

Dissertação de mestrado desenvolvida no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas CBPF como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Felipe Tovar Falciano

RIO DE JANEIRO

2022

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Ramos, Matheus Vitor Ferreira

Utilizando modelo de gravitação modificada para restringir parâmetros cosmológicos / Matheus Vitor Ferreira Ramos – Rio de Janeiro, 2022.

115f.: il.; 30 cm

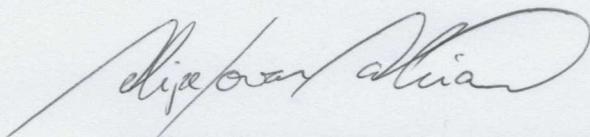
Dissertação de mestrado desenvolvida no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas CBPF como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências. – Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas  
Orientador : Prof. Dr. Felipe Tovar Falciano

1. Cosmologia. 2. Horndeski. 3. Ondas Gravitacionais.  
4. Einstein Telescope.

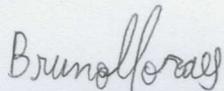
“UTILIZANDO MODELO DE GRAVITAÇÃO MODIFICADA PARA  
RESTRINGIR PARÂMETROS COSMOLÓGICOS”

**MATHEUS VITOR FERREIRA RAMOS**

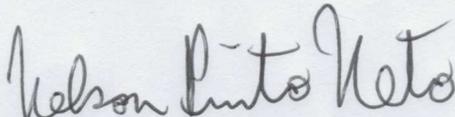
Dissertação de Mestrado em Física apresentada no  
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do  
Ministério da Ciência Tecnologia e Inovação.  
Fazendo parte da banca examinadora os seguintes  
professores:



Felipe Tovar Falciano – Presidente/Orientador/CBPF



Bruno Azevedo Lemos Moraes - UFRJ



Nelson Pinto Neto – CBPF

Rio de Janeiro, 04 de abril de 2022.

Dedico à Haroldo Porto Ramos.

## **AGRADECIMENTOS**

Gostaria de agradecer aos meus pais Haroldo e Isa por todo o apoio emocional e financeiro durante a realização desse importante passo na minha formação. Também gostaria de agradecer aos meus irmãos, Haroldo Júnior e Daniele por estarem presentes e sempre dispostos a ajudar nesses anos tão complicados que passamos.

Tenho meus mais profundos agradecimentos ao meu orientador Prof. Dr. Felipe Tovar Falciano, pela sua paciência e dedicação em ensinar essa ciência tão bela que propõem-se a compreender todo o universo. E também pela amizade que construímos.

Meus agradecimentos aos meus amigos Daniel Braga, Nathalia Dumas, Lucas Raimundo, Mateus Gomes, Denimara Dias e Bruno Fernandes que sempre estiveram presentes nos momentos felizes e nos momentos mais complicados dessa jornada. Que sempre me apoiaram e me motivaram em meio a todos os percalços encontrados no caminho.

Quero agradecer a todos os excelentes professores que tive contato no CBPF assim como na UFF. Graças a professores como Martín Makler, Nelson Pinto, José Helayël, Clécio de Bom, Alexandre Schmidt, Thadeu Penna e José Huguenin mantive meu anseio pela física e pela pesquisa.

Agradeço a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro durante a realização desse trabalho.

Por que eu faço o que faço hoje ?

Porque eu me construí como um fazedor disso, e quero me manter nessa feitura, de modo que eu possa continuar me fazendo.

Deixar de fazê-lo agora seria me desfazer.

Mario Sergio Cortella

## RESUMO

A cosmologia moderna utiliza-se de medidas cada vez mais precisas de observáveis cosmológicos. Dada essa precisão cada vez maior nas medidas, observou-se nos últimos anos uma crescente tensão em alguns parâmetros cosmológicos, como é o caso da constante de Hubble  $H_0$ , no qual medidas em baixos *redshift* diferem em até  $4.4\sigma$  de medidas em altos *redshift* utilizando Radiação Cósmica de Fundo. Considerando que recentemente realizamos as primeiras detecções de ondas gravitacionais, que se mostraram como mais um meio de explorar o universo de maneira independente. A presente dissertação busca utilizar dados atuais de Supernovas Tipo Ia e de Oscilações Acústicas de Bárions atrelado a dados simulados do futuro detector de ondas gravitacionais Einstein Telescope para restringir diferentes modelos cosmológicos e mensurar o impacto que 1000 detecções de Sirenes Padrões sob os parâmetros cosmológicos. Analisamos quatro modelos cosmológicos, onde primeiramente utilizamos o modelo  $\Lambda$ CDM com curvatura livre e obtivemos os seguintes *bestfit* dos parâmetros  $\Omega_K = 0.0305_{-0.0268}^{+0.0272}$ ,  $\Omega_\Lambda = 0.669_{-0.0225}^{+0.0209}$  e  $\Omega_m = 0.301_{-0.0102}^{+0.0101}$ . Em seguida utilizamos um universo plano no qual a constante  $w$  da equação de estado da energia escura não está fixa, denominado  $w$ CDM e obtivemos os seguintes *bestfit* dos parâmetros  $\Omega_m = 0.301_{-0.0112}^{+0.011}$  e  $w = -0.974_{-0.0283}^{+0.0315}$ . No terceiro modelo utilizamos um universo plano onde consideramos a energia escura dinâmica descrito pela parametrização CPL (CHEVALLIER; POLARSKI, 2001) e obtivemos os seguintes *bestfit* dos parâmetros  $\Omega_m = 0.301_{-0.0113}^{+0.0129}$ ,  $w_0 = -0.969_{-0.081}^{+0.0763}$  e  $w_a = -0.0339_{-0.501}^{+0.516}$ . Por fim utilizamos um modelo de gravitação de Horndeski com parametrização proporcional ao fator de escala do universo e obtivemos os seguintes resultados  $\Omega_m = 0.307_{-0.00781}^{+0.00758}$ ,  $\alpha_B = 0.169_{-1.1}^{+2.42}$  e  $\alpha_M = 1.65_{-0.44}^{+1.35}$ . Em média obtivemos um ganho de precisão considerável de 44% ao incluir os dados simulados de ondas gravitacionais aos três primeiros modelos cosmológicos. Porém não obtivemos uma restrição consistente nos parâmetros  $\alpha_M = 1.65_{-0.44}^{+1.35}$  e  $\alpha_B = 0.169_{-1.1}^{+2.42}$  em nossa análise utilizando a parametrização proporcional ao fator de escala.

**Palavras-chave:** Cosmologia, Einstein Telescope, Horndeski, Ondas Gravitacionais.

## ABSTRACT

Modern cosmology uses increasingly accurate measurements of cosmological observables. Considering the increasing precision in the measurements, we have observed in recent years an increasing tension in some parameters, such as the Hubble constant that differs by  $4.4\sigma$  from measurements at high redshifts using CMB and low redshifts using Type Ia Supernova. This dissertation seeks to use current Type Ia Supernova and Baryon Acoustic Oscillation data coupled with simulated data from the future gravitational wave detector Einstein Telescope to constrain different cosmological models and measure the impact of 1000 Standard Siren detections on cosmological parameters. We analyzed four cosmological models, starting with  $\Lambda$ CDM with undefined curvature and we obtained the following bestfit of the parameters  $\Omega_K = 0.0305^{+0.0272}_{-0.0268}$ ,  $\Omega_\Lambda = 0.669^{+0.0209}_{-0.0225}$  e  $\Omega_m = 0.301^{+0.0101}_{-0.0102}$ . Next, we use a flat universe in which the constant  $w$  of the dark energy equation of state is not fixed, called  $w$ CDM and we got the following *bestfit* of the parameters  $\Omega_m = 0.301^{+0.011}_{-0.0112}$  and  $w = -0.974^{+0.0315}_{-0.0283}$ . In the third model we use a flat universe where we consider the dynamic dark energy described by the CPL parameterization (CHEVALLIER; POLARSKI, 2001) and we got the following *bestfit* of the parameters  $\Omega_m = 0.301^{+0.0129}_{-0.0113}$ ,  $w_0 = -0.969^{+0.0763}_{-0.081}$  and  $w_a = -0.0339^{+0.516}_{-0.501}$ . Finally, we used a Horndeski gravitation model with parameterization proportional to the scale factor of the universe and we obtained the following results  $\Omega_m = 0.307^{+0.00758}_{-0.00781}$ ,  $\alpha_B = 0.169^{+2.42}_{-1.1}$  e  $\alpha_M = 1.65^{+1.35}_{-0.44}$ . On average, we obtained a considerable accuracy gain of 44% by including the simulated gravitational wave data in the first three cosmological models. However, we did not obtain a consistent constraints on the parameters  $\alpha_M = 1.65^{+1.35}_{-0.44}$  and  $\alpha_B = 0.169^{+2.42}_{-1.1}$  in our analysis using the parameterization proportional to the scale factor.

**Keywords:** Cosmology, Einstein Telescope, Horndeski, gravitational waves.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Figura que representa a evolução do universo desde a singularidade inicial até os dias atuais. Fonte: NASA/WMAP Science Team. . . . .	17
Figura 2 – Valor estimado de $H_0 = 70.0_{-8.0}^{+12.0} km.s^{-1} Mpc^{-1}$ devido a onda gravitacional GW170817 em relação aos valores obtidos pelo Planck (ADE et al., 2016) e o SHoES (RIESS et al., 2016). A linha tracejada representa o intervalo de confiança de $2\sigma$ e a pontilhada $1\sigma$ . Fonte: (ABBOTT et al., 2017) . . . . .	18
Figura 3 – Exemplo de um Universo puramente homogêneo (esquerda) e um puramente isotrópico em relação ao ponto A (direita). . . . .	20
Figura 4 – Representação bidimensional das curvaturas homogêneas do universo. Em todos os casos um triângulo equilátero é mapeado sobre a superfície com objetivo de demonstrar as trajetórias em cada uma das curvaturas. . . . .	21
Figura 5 – Concepção artística do padrão impresso na distribuição de matéria em larga escalas devido as oscilações acústicas dos bárions, no qual podemos observar que a densidade de matéria é maior nos anéis do que em qualquer outro lugar. Nessa concepção os padrões foram exagerados e simplificados buscando facilitar a compreensão didática. Crédito da imagem: Gabriela Secara, Perimeter Insitute. (BOWN, ) . . . . .	35
Figura 6 – Conceito de régua padrão associado à oscilações acústicas dos bárions. Comparando os padrões em estruturas de larga escala com a radiação cósmica de fundo. Crédito da imagem: NASA, ESA e R. Massey. (ESA, ) . . . . .	36
Figura 7 – Na esquerda temos a curva de luz na banda B de um conjunto de supernovas tipo Ia no qual os dados foram retirados de (HICKEN et al., 2009) e (STRITZINGER et al., 2011). Podemos observar a semelhança na largura da curva e no aumento da magnitude absoluta semelhante em todas as medidas. Na direita essas mesmas curvas foram corrigidas de forma a observarmos seu comportamento sobreposto. Fonte: (ALSABTI A. W., 2017) . . . . .	38
Figura 8 – Modelos de gravitação modificada apresentando as possíveis extensões da relatividade geral e os vínculos impostos em cada pelas detecções de ondas gravitacionais. Fonte: (EZQUIAGA; ZUMALACÁRREGUI, 2018a) . . . . .	42
Figura 9 – Neste gráfico podemos observar a dominância de cada espécie constituinte do universo durante toda a evolução do universo e vemos que estamos justamente em um curto espaço de tempo no qual a contribuição da energia escura e a da matéria são equivalentes. (LINEWEAVER; EGAN, 2007) . . . . .	43
Figura 10 – Evolução histórica dos valores obtidos de $H_0$ e sua barra de erro para diferentes experimentos. Observe que a tensão entre as medidas aumenta apenas se agrava conforme aumenta-se a precisão. (RIESS et al., 2019b) . . . . .	44

Figura 11 – Exemplo de união e interseção de conjuntos. Fonte: (FEIGELSON E., 2012)	56
Figura 12 – A curva azul representa a probabilidade posterior do parâmetro $\lambda$ . E os pontos azuis são amostras de pontos sorteados com base na forma da posterior. Com um número suficiente de amostras teremos que a média e o desvio padrão desse conjunto de amostras será bem próximo ao valores obtidos na curva analítica da distribuição posterior. Fonte: (DODELSON S., 2020)	61
Figura 13 – Figura que representa a evolução dos parâmetros em um algoritmo de Metropolis-Hasting. <b>Esquerda:</b> A cadeia inicia em $\theta_1$ e a proposta de movimento (A) é aceita para o ponto $\theta_2$ . Então é proposto um movimento para a posição $\theta_3$ que é recusada. Novamente no ponto $\theta_2$ é realizada uma proposta (C) para o ponto $\theta_4$ que é aceita. <b>Centro:</b> Exemplo de propostas de movimentos no espaço de fase muito longos. <b>Direita:</b> Exemplo de proposta de movimentos no espaço de fase muito curtos. Nesses dois exemplos o espaço de fase não é explorado corretamente. <b>Fonte:</b> (LECLERCQ; PISANI; WANDEL, 2014)	63
Figura 14 – Sistema binário cujas massas são $m_1$ e $m_2$ separadas pela distância $R$ e observadas à distância $r$ em relação ao eixo $z$ . <b>Fonte:</b> (LI, 2015)	71
Figura 15 – Exemplo de gorjeio do evento GW170817, no qual ocorre a coalescência de duas estrelas de nêutrons. Podemos observar o aumento da frequência com o tempo e que a amplitude também segue esse padrão. <b>Fonte:</b> (Holz; Hughes; Shutz, 2018)	72
Figura 16 – Representação artística do projeto do Einstein Telescope <b>Fonte:</b> (PROJETO...)	73
Figura 17 – Esquematização da configuração geométrica dos interferômetros do Einstein Telescope. <b>Fonte:</b> (REGIMBAU et al., 2012)	74
Figura 18 – Representação dos ângulos $(\theta, \phi)$ que localizam a origem da onda gravitacional e o ângulo $\psi$ que determina a sua polarização. <b>Fonte:</b> (YUNES; SIEMENS, 2013)	75
Figura 19 – Taxa de criação de eventos pela distância em <i>redshift</i> .	77
Figura 20 – Mil eventos distribuídos conforme a curva de probabilidade de detecção do Einstein Telescope, em azul.	78
Figura 21 – Distância luminosidade dos eventos pelo <i>redshift</i> .	78
Figura 22 – Progressão dos erros nas detecções simuladas do Einstein Telescope em função do <i>redshift</i> .	79
Figura 23 – Posterior bidimensional dos parâmetros cosmológicos restritos usando dados do JLA e BAO.	83
Figura 24 – Posterior bidimensional dos parâmetros cosmológicos $\Omega_m$ e $\Omega_\Lambda$ . Utilizando BAO e JLA separados e depois em conjunto.	84

Figura 25 – Posterior bidimensional dos parâmetros cosmológicos $\Omega_m$ e $\Omega_\Lambda$ . Retirada do paper (KOWALSKI et al., 2008), nesse paper não foi utilizado JLA e sim o UNION, mais antigo. . . . .	85
Figura 26 – A esquerda temos a figura 24 para critério de comparação. A direita temos a posterior bidimensional dos parâmetros cosmológicos $\Omega_\Lambda$ e $\Omega_m$ restritos usando dados do JLA+BAO (vermelho) e uma simulação dos dados do Einstein Telescope (azul). . . . .	87
Figura 27 – Posterior bidimensional dos parâmetros cosmológicos restritos usando dados de JLA+BAO no modelo de universo $wCDM$ . . . . .	88
Figura 28 – Posterior bidimensional dos parâmetros cosmológicos $\Omega_m$ e $w_0$ usando dados de JLA e BAO separadamente e em conjunto. . . . .	89
Figura 29 – Posterior bidimensional dos parâmetros cosmológicos $\Omega_m$ e $w$ usando dados de JLA, BAO e CMB separados e conjuntos. Fonte: (KOWALSKI et al., 2008)	90
Figura 30 – Posterior bidimensional dos parâmetros cosmológicos de um universo $wCDM$ restritos usando dados de JLA+BAO+ET. . . . .	91
Figura 31 – Posterior bidimensional dos parâmetros cosmológicos $\Omega_m$ e $w$ usando dados de JLA+BAO, ET separado e ET+JLA+BAO. . . . .	92
Figura 32 – Posterior bidimensional dos parâmetros cosmológicos restritos usando dados do JLA+BAO considerando uma parametrização CPL. . . . .	94
Figura 33 – Posterior bidimensional dos parâmetros cosmológicos $w_0$ e $w_a$ usando dados do JLA+BAO. . . . .	95
Figura 34 – Posterior bidimensional dos parâmetros cosmológicos restritos usando dados do ET+JLA+BAO. . . . .	97
Figura 35 – Posterior bidimensional dos parâmetros cosmológicos $w_0$ e $w_a$ usando dados do Einstein Telescope separadamente e em conjunto com JLA e BAO. . . .	98
Figura 36 – Posterior bidimensional dos parâmetros $w_0$ e $w_a$ da parametrização CPL restritos utilizando um conjunto de 1000 dados simulados do Einstein Telescope separadamente e em conjunto com dados de CMB, BAO e JLA. Fonte: (BELGACEM et al., 2018) . . . . .	99
Figura 37 – Posterior bidimensional dos parâmetros de gravitação modificada de Horndeski usando dados do ET+JLA+BAO. . . . .	101
Figura 38 – Posterior bidimensional dos parâmetros $\alpha_M$ e $\alpha_B$ vinculado pelos dados do ET+JLA+BAO. . . . .	102

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Parâmetros cosmológicos mantidos fixos, segundo os dados do obtidos pela colaboração Planck (AGHANIM et al., 2020), durante o método de análise de MCMC em todos os modelos de universo a menos que seja dito o contrário. . . . .	81
Tabela 2	– <i>Bestfit</i> dos parâmetros cosmológicos do modelo $\Lambda$ CDM com curvatura livre restritos com dados do JLA mais dados de BAO. . . . .	82
Tabela 3	– <i>Bestfit</i> dos parâmetros cosmológicos do modelo $\Lambda$ CDM restritos com dados do JLA+BAO, e JLA+BAO+ET . . . . .	86
Tabela 4	– <i>Bestfit</i> dos parâmetros cosmológicos do modelo $w$ CDM restritos com dados do JLA e dados de BAO. . . . .	88
Tabela 5	– <i>Bestfit</i> dos parâmetros cosmológicos do modelo $w$ CDM restritos com dados do JLA+BAO e dados de ET+JLA+BAO. . . . .	90
Tabela 6	– <i>Bestfit</i> dos parâmetros cosmológicos da parametrização CPL restritos com dados do JLA e dados de BAO. . . . .	93
Tabela 7	– <i>Bestfit</i> dos parâmetros cosmológicos da parametrização CPL restritos com dados do JLA+BAO e ET+JLA+BAO. . . . .	96
Tabela 8	– Valores dos <i>flat priors</i> dos respectivos parâmetros utilizados na restrição das funções livres de Horndeski utilizando dados do Einstein Telescope mais dados de BAO e JLA. . . . .	100
Tabela 9	– <i>Bestfit</i> dos parâmetros cosmológicos utilizando modelo de gravitação de Horndeski com parametrização proporcional ao fator de escala do universo utilizando com dados do JLA, de BAO e dados simulados do Einstein Telescope. . . . .	100

## SUMÁRIO

	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>16</b>
<b>1</b>	<b>MODELO PADRÃO DA COSMOLOGIA</b>	<b>19</b>
1.1	Princípio cosmológico	19
1.2	Métrica de Friedmann Lemaître Robertson Walker	20
1.3	Equações dinâmicas	22
1.4	Conteúdo do universo	25
1.5	Distâncias	29
1.5.1	Distância comóvel	29
1.5.2	Distância própria	29
1.5.3	Distância de diâmetro angular	30
1.5.4	Distância luminosidade	30
1.6	Perturbações lineares	31
1.7	Oscilações Acústicas de Bárions	35
1.8	Medidas utilizando Supernovas tipo Ia	37
<b>2</b>	<b>MODELOS DE GRAVITAÇÃO MODIFICADA</b>	<b>40</b>
2.1	Além do Modelo Padrão	42
2.2	Ação de Einstein-Hilbert	44
2.3	Teoria de Horndeski	47
2.4	Interpretação das funções livres de Horndeski	49
2.5	Parametrizações	53
<b>3</b>	<b>ESTATÍSTICA BAYESIANA</b>	<b>55</b>
3.1	Teorema de Bayes	55
3.2	Função de verossimilhança	58
3.3	Monte Carlo Markov Chain	60
<b>4</b>	<b>SIRENE PADRÃO</b>	<b>64</b>
4.1	Equações de Einstein linearizadas	65
4.2	Propagação de ondas gravitacionais no vácuo	68
4.3	Medidas com ondas gravitacionais	70
4.4	Simulação do Einstein Telescope	73
4.5	Descrição da Likelihood criada	79
<b>5</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO</b>	<b>80</b>
5.1	$\Lambda$ CDM com curvatura livre	81
5.1.1	JLA+BAO	82

5.1.2	ET+JLA+BAO . . . . .	86
5.2	Parametrização $w$ CDM . . . . .	87
5.2.1	BAO+JLA . . . . .	87
5.2.2	BAO+JLA+ET . . . . .	90
5.3	Parametrização CPL . . . . .	92
5.3.1	JLA+BAO . . . . .	92
5.3.2	ET+JLA+BAO . . . . .	95
5.4	Modelo de Horndeski . . . . .	99
5.4.1	ET+JLA+BAO . . . . .	100
6	CONCLUSÃO . . . . .	103
	REFERÊNCIAS . . . . .	105

## INTRODUÇÃO

A cosmologia é o estudo do universo como um todo. Incluindo sua história, evolução, composição e dinâmica. A ferramenta teórica para explorá-lo é a teoria da relatividade geral. A qual descreve a gravitação como a estrutura métrica do espaço-tempo que por sua vez determina o movimento da matéria. Dada que as fontes dessas deformações são atribuídos a própria matéria e energia podemos dizer que a matéria diz como o espaço se curva e o espaço diz como a matéria se move.

Quando a relatividade geral foi desenvolvida, Albert Einstein precisou formular uma teoria geométrica da gravitação, focando na invariância das leis físicas. Esta relação é matematicamente descrita através das equações de Einstein. Como a relatividade geral é uma teoria de campos clássicos as equações de Einstein podem ser obtidas através da variação da ação de Einstein Hilbert.

A relatividade geral marcou o início da cosmologia moderna. Pois a gravitação Newtoniana gera cenários inconsistentes ao descrever fenômenos gravitacionais como por exemplo a órbita de Mercúrio (EINSTEIN, 1915). A relatividade geral também foi capaz de prever novos fenômenos em relação a teoria de gravitação Newtoniana, como por exemplo a deflexão da luz devido o campo gravitacional do sol, fenômeno este que foi comprovado em 1919 (DYSON; EDDINGTON; DAVIDSON, 1920). Atualmente este fenômeno pode ser observado em lentes gravitacionais que são usadas para detectar exoplanetas (BOND et al., 2004) e também estimar as componentes do universo (TAYLOR et al., 2012).

No decorrer dos últimos anos, devido ao avanço tecnológico nas técnicas de medidas, foi possível observar fenômenos como a radiação cósmica de fundo (H.DICKE et al., 1965) (DURRER, 2015) e o afastamento das galáxias ao nosso redor (HUBBLE, 1929a) detectado através do desvio para o vermelho das linhas espectrais dos elementos químicos constituintes dessas galáxias, esse afastamento foi atribuído a expansão do universo. Todos esses fenômenos puderam ser descritos pela relatividade geral, provando a abrangência da teoria. Estas medidas também nos proporcionaram um conhecimento muito maior da história do cosmos e sua composição.

A expansão acelerada do universo foi atribuída a uma componente desconhecida, denominada energia escura que corresponde a 68% do universo. Porém, experimentos mais recentes que medem a taxa de aceleração atual do universo, parâmetro de Hubble nos dias atuais ( $H_0$ ), mostram que ao medi-lo para supernovas tipo Ia obtemos  $74.03 \pm 1.42 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  (RIESS et al., 2019a) e ao calcularmos  $H_0$  baseado nas medidas da radiação cósmica de fundo, obtemos  $67.36 \pm 0.54 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  (COLLABORATION, 2018). Isso gera uma tensão de mais de  $4.4\sigma$  entre as medidas.

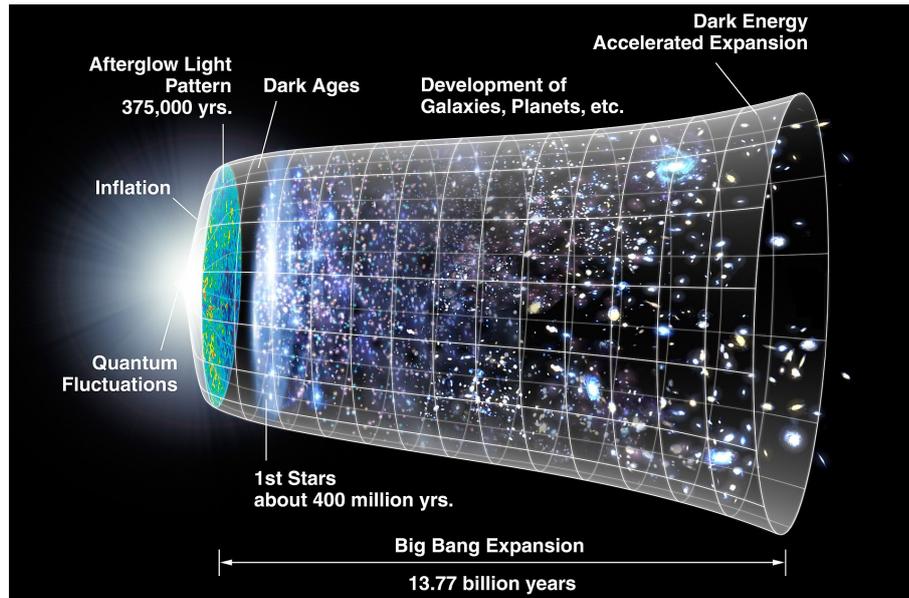


Figura 1 – Figura que representa a evolução do universo desde a singularidade inicial até os dias atuais. Fonte: NASA/WMAP Science Team.

Com isso podemos supor a existência de uma física desconhecida que não é explicada pela relatividade geral. Visando explicar a física por trás deste fenômeno foram utilizados modelos de gravitação modificada que incluem campos escalares dinâmicos que são responsáveis pela expansão do universo, como por exemplo, quintessência (WETTERICH, 1988), k-essência (AMENDARIZ-PICON; MUKHANOV; STEINHARDT, 2001) e Teoria de Brans-Dicke (BRANS; DICKE, 1961) que são exemplos de teorias escalar tensoriais. A teoria mais geral que produz equações de segunda ordem e não sofre de instabilidades de Ostrogradsky é a teoria de Horndeski (HORNDESKI, 1974), (BELLINI; SAWICKI, 2014), (KOBAYASHI, 2019).

Em 2015 ocorreu a primeira detecção de ondas gravitacionais observadas pela colaboração LIGO e Virgo (ABBOTT et al., 2016). Utilizando tais detecções podemos explorar o universo através de uma nova perspectiva pois teremos medidas independentes das ondas eletromagnéticas. Assim como o físico Bernard Schutz previu em 1986 (SCHUTZ, 1986) podemos estimar precisamente a taxa de expansão do universo utilizando ondas gravitacionais.

Com a detecção da onda gravitacional GW170817 (ABBOTT et al., 2017) ocorrida em 2017 foi possível estimar o parâmetro de Hubble graças a sua contraparte eletromagnética. Conforme observamos na figura 2 a estimativa de  $H_0$  através dos dados obtidos por supernovas e a radiação cósmica de fundo são significativamente mais precisas que a estimativa gerada por apenas uma onda gravitacional. Porém, nos próximos anos devemos detectar novos eventos com os atuais interferômetros e projetos em desenvolvimento como o Einstein Telescope (MAGGIORE et al., 2020b) e o LISA (NASA, 2020). Com estas colaborações será possível observar eventos mais distantes e em diferentes frequências.

Tais medidas independentes proporcionarão um excelente instrumento de verificação de teorias de gravitação modificada assim como serão aplicadas à restrição de parâmetros do modelo

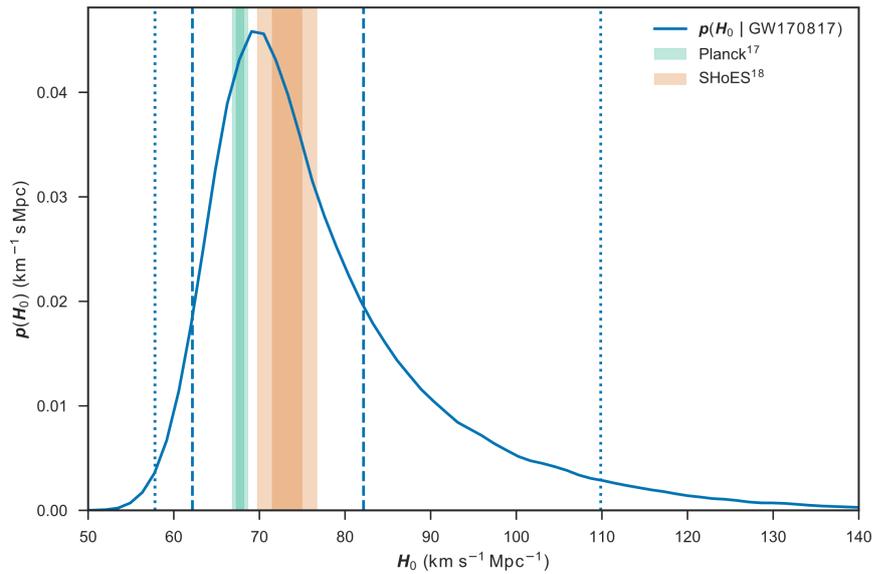


Figura 2 – Valor estimado de  $H_0 = 70.0^{+12.0}_{-8.0} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  devido a onda gravitacional GW170817 em relação aos valores obtidos pelo Planck (ADE et al., 2016) e o SHoES (RIESS et al., 2016). A linha tracejada representa o intervalo de confiança de  $2\sigma$  e a pontilhada  $1\sigma$ . Fonte: (ABBOTT et al., 2017)

$\Lambda$ CDM. Nessa dissertação foi realizado uma simulação de dados obtidos pelo Einstein Telescope e verificado o impacto que esses dados geram na restrição de parâmetros cosmológicos de diferentes modelos.

No capítulo 1 é realizado uma revisão do modelo padrão da cosmologia, como as características da métrica de Friedmann Lemaître Robertson Walker (FLRW) assim como equações dinâmicas dessa métrica. Também é abordado os conceitos de distâncias cosmológicas, principais constituintes do universo e seu comportamento durante a evolução cósmica. Exploramos o conceito de perturbações lineares na estrutura geométrica do universo, o que são as Oscilações Acústicas de Bárions e como são realizadas medidas utilizando Supernovas tipo Ia.

No capítulo 2 abordamos as possibilidades de desenvolver modelos de gravitação modificada. Primeiramente obtemos as equações de Einstein através da Ação de Einstein-Hilbert e assim apresentar a Lagrangiana de Horndeski e a interpretação física das suas funções livres.

No capítulo 3 é apresentado o conceito de estatística de Bayes junto com a noção de função de verossimilhança e do método de Monte Carlo Markov Chain para estimar parâmetros em modelos.

No capítulo 4 definimos o que é uma Sirene Padrão e como podemos realizar medidas cosmológicas através das ondas gravitacionais geradas por esses objetos. Também descrevemos as características do Einstein Telescope e como foi realizado a simulação dos seus futuros dados.

No capítulo 5 analisamos os resultados da implementação desses dados simulados do Einstein Telescope na restrição de parâmetros de diferentes modelos cosmológicos.

## 1 MODELO PADRÃO DA COSMOLOGIA

O modelo físico mais utilizado e aceito pela comunidade científica para descrever o universo e sua evolução é o modelo  $\Lambda$ CDM, que dado a sua ampla utilização também é conhecido como simplesmente Modelo Padrão da Cosmologia. Suas siglas representam algumas características fundamentais do mesmo. A letra grega  $\Lambda$  representa a constante cosmológica e  $CDM$  é a sigla em inglês para Matéria Escura Fria (Cold Dark Matter). O adjetivo "fria" implica em velocidades não relativísticas e sem colisões.

A adoção desse modelo deve-se a ampla concordância que o mesmo tem com medidas cosmológicas, como a expansão do universo (HUBBLE, 1929b), a radiação cósmica de fundo (Penzias; Wilson, 1965a) e suas anisotropias e polarização (Kofman; Gnedin; Bahcall, 1993), abundâncias dos elementos químicos (HARWIT; SPAANS, 2003) e estruturas de larga escala (York et al., 2000). Porém o Modelo Padrão da Cosmologia inclui elementos que não existem no Modelo Padrão da Física de Partícula (GAILLARD; GRANNIS; SCIULLI, 1999). São esses a Matéria Escura e Energia Escura ou Constante Cosmológica, além do mecanismo gerador de pequenas perturbações no universo primordial, o qual é comumente descrito pelo paradigma dos modelos inflacionários.

O Modelo Padrão da cosmologia baseia-se no Princípio Cosmológico ou Princípio de Copérnico. O qual afirma que não vivemos em um lugar privilegiado do universo. Como a radiação cósmica de fundo é isotrópica, apresentando variações em uma parte em cada  $10^5$  (ADAM et al., 2016), é razoável que também seja homogênea.

A métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, abreviada como FLRW, descreve muito bem esse modelo de universo homogêneo e isotrópico. Esta idealização pode ser chamado de fundo cosmológico. Com ele podemos calcular distâncias cosmológicas, a taxa de expansão do universo, sua idade, assim como abundâncias primordiais de elementos leves.

Entretanto devemos considerar algumas perturbações nesse fundo cosmológico pois o universo apresenta inhomogeneidades que podem ser observadas em estruturas como galáxias, estrelas e planetas. Por isso torna-se necessário a introdução de pequenas perturbações na métrica de fundo para obtermos um modelo cosmológico mais condicente com as medidas.

### 1.1 Princípio cosmológico

O Princípio Cosmológico definido por Edward A. Milne pode ser visto como uma extensão do Princípio da Relatividade (EINSTEIN, 1905) que diz que as leis da Física são independentes do sistema de referência adotado. Logo, tais leis devem ser expressas da mesma forma em todos os referenciais inerciais. Em meados dos anos de 1930 Edward A. Milne definiu que a estrutura do Universo em largas escalas, maiores que 100 Mpc, deve ser a mesma para observadores em diferentes referenciais em relação ao fluido cósmico (MILNE, 1935). Logo, em grandes escalas, nosso Universo é homogêneo e isotrópico.

É importante considerar que o Princípio Cosmológico requer que o universo seja isotrópico visto de qualquer posição. Isto automaticamente nos leva a um Universo homogêneo. Porém a homogeneidade em todos os pontos não leva a isotropia do Universo.

Observe a figura 3 onde as linhas podem representar uma distribuição de estruturas em larga escala do Universo. No lado esquerdo temos um Universo homogêneo para os dois pontos A e B, porém não isotrópico. No lado direito temos um Universo isotrópico para o ponto A e não para o ponto B. Mas como não temos distinção entre os pontos, necessariamente o universo também deve ser homogêneo.

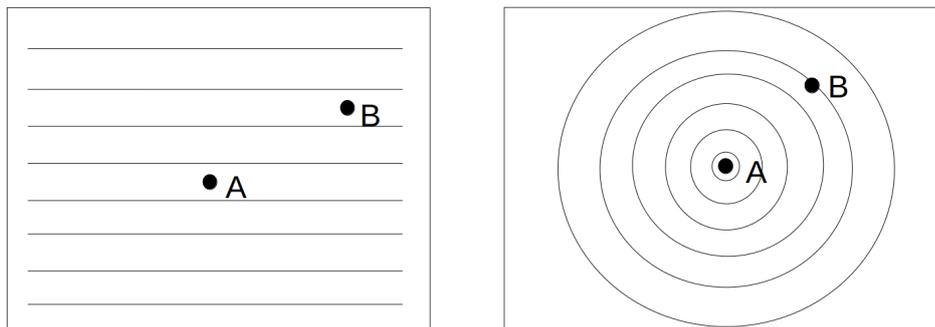


Figura 3 – Exemplo de um Universo puramente homogêneo (esquerda) e um puramente isotrópico em relação ao ponto A (direita).

Esta definição aliada a descoberta de Edwin Hubble em 1929 (HUBBLE, 1929b) na qual foi observado o distanciamento das galáxias em relação à nossa, implica que o Universo como um todo está em expansão e que não existe um centro no qual todas as galáxias se afastam.

Dado que a Relatividade Geral é utilizada na obtenção das equações da Cosmologia. Precisamos transcrever o princípio cosmológico em termos relativísticos. De forma que neste cenário um experimento científico apresente os mesmos resultados independentemente da posição e direção do aparato experimental. Esta descrição relativística de um universo homogêneo e isotrópico é dada pela métrica de FLRW cujo nome é a abreviação dos nomes dos cientistas Alexander Friedmann, Georges Lemaître, Howard P. Robertson e Arthur Geoffrey Walker que a obtiveram de forma independente ao longo das décadas de 1920 e 1930 ((FRIEDMAN, 1922),(FRIEDMANN, 1924),(Lemaître, 1927), (Lemaitre, 1937),(ROBERTSON, 1935),(WALKER, 1937)).

## 1.2 Métrica de Friedmann Lemaître Robertson Walker

Na relatividade geral o espaço e o tempo não podem ser tratados separadamente. Então chamamos essa nova entidade matemática de espaço-tempo a qual codifica as características geométricas curvando-se de determinada forma dada a distribuição de matéria e energia. Essa relação pode ser vista nas equações de Einstein. Para medirmos a distância entre dois pontos nesse espaço-tempo precisamos utilizar o conceito de métrica.

Rigorosamente, a métrica fornece a distância física entre dois pontos infinitesimalmente próximos em um determinado sistema de coordenadas.

O conceito de métrica é comumente utilizado em cálculos puramente espaciais. Considere um sistema Cartesiano bidimensional  $(x, y)$  onde a distância entre dois pontos infinitesimalmente próximos é dada pela soma  $(dx)^2 + (dy)^2$ . Ao assumirmos que o sistema de coordenadas é um sistema polar  $(r, \theta)$  temos que a distância infinitesimal entre dois pontos é dada por:  $(dr)^2 + r^2(d\theta)^2$ .

Devemos observar que a distância é a mesma independente do sistema de coordenadas.

Para o espaço-tempo em quatro dimensões temos que a distância invariante pode ser escrita da seguinte maneira,

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.1)$$

onde  $g_{\mu\nu}$  é a métrica e os índices  $\mu$  e  $\nu$  assumem valores entre 0 e 3 no qual sempre o índice zero é reservado para a componente temporal.

As características do modelo  $\Lambda$ CDM impõem algumas restrições à métrica desejada. A isotropia implica que o único movimento possível é uma expansão global ou contração da parte espacial. A homogeneidade implica que a métrica deve ser independente da posição.

Dada essas exigências temos que o espaço Riemanniano que atende esses requisitos é dado pelo elemento de linha,

$$dl^2 = a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (1.2)$$

onde  $a(t)$  é o fator de escala do universo e  $\kappa$  é uma constante que pode assumir os valores  $-1, 0, 1$  e os seus valores estão atrelados a curvatura desse espaço.

Para ajudar na visualização adotamos uma representação bidimensional de um espaço riemanniano para cada uma das possíveis curvaturas. Sobre cada uma das variedades foi traçado um triângulo equilátero em sua superfície. Na superfície de curvatura nula temos que a soma dos ângulos internos é igual a  $\pi$  já na curvatura positiva a soma desses ângulos é maior que  $\pi$ , e para a curvatura negativa a soma é menor que  $\pi$ .



Figura 4 – Representação bidimensional das curvaturas homogêneas do universo. Em todos os casos um triângulo equilátero é mapeado sobre a superfície com objetivo de demonstrar as trajetórias em cada uma das curvaturas.

Ao incluirmos esse espaço tridimensional dentro de uma estrutura espaço-temporal de quatro dimensões, obtemos a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker,

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right] \quad (1.3)$$

Visando facilitar a escrita da métrica faremos as seguintes mudanças de variáveis  $r = \sin \chi$  se  $k = 1$ ,  $r = \chi$  se  $k = 0$  e  $r = \sinh \chi$  se  $k = -1$ , e obter

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) [d\chi^2 + S^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)] \quad (1.4)$$

onde a função  $S(\chi)$ , é dada por,

$$S(\chi) \equiv \begin{cases} \sin(\chi) & \text{se } \kappa = +1 \\ \chi & \text{se } \kappa = 0 \\ \sinh(\chi) & \text{se } \kappa = -1 \end{cases} \quad (1.5)$$

Também podemos realizar uma mudança de variável temporal para o tempo conforme definido por,

$$d\eta(t)^2 = \frac{dt^2}{a(t)^2} \quad (1.6)$$

Assim podemos reescrever a métrica de FLRW em termos de  $\chi$  e  $\eta$ ,

$$ds^2 = a^2(\eta) [-d\eta^2 + d\chi^2 + S^2(\chi)(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2)] \quad (1.7)$$

### 1.3 Equações dinâmicas

A dinâmica do modelo  $\Lambda$ CDM aparece ao incluirmos a métrica de FLRW na equação de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\Lambda \quad (1.8)$$

onde  $T_{\mu\nu}$  é o tensor de energia momento de um fluido perfeito e  $\Lambda$  é a constante cosmológica.

Lembrando que o tensor métrico na sua forma covariante é escrito como,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2(t)}{1 - \kappa r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 a^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 a^2(t) \sin^2\theta \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Já a métrica na sua forma contravariante é dada pela inversa da matriz 1.9,

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1 - \kappa r^2}{a^2(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 a^2(t)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 a^2(t) \sin^2\theta} \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

Com a métrica definida, podemos calcular os símbolos de Christoffel,

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\partial_{\beta}g_{\alpha\nu} + \partial_{\alpha}g_{\beta\nu} - \partial_{\nu}g_{\alpha\beta}), \quad (1.11)$$

em que as componentes não nulas estão listadas abaixo,

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{11}^0 = \frac{a\dot{a}}{1 - \kappa r^2} \quad \Gamma_{22}^0 = r^2 a\dot{a} \quad \Gamma_{33}^0 = r^2 a\dot{a} \sin^2 \theta \\ \Gamma_{01}^1 = \Gamma_{10}^1 = \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{20}^2 = \Gamma_{03}^3 = \Gamma_{30}^3 = \frac{\dot{a}}{a} \\ \Gamma_{11}^1 = \frac{\kappa r}{1 - \kappa r^2} \quad \Gamma_{22}^1 = -r(1 - \kappa r^2) \quad \Gamma_{33}^1 = -r(1 - \kappa r^2) \sin^2 \theta \\ \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r} \quad \Gamma_{33}^2 = -\cos \theta \sin \theta \\ \Gamma_{32}^3 = \Gamma_{23}^3 = \cot \theta \end{array} \right. \quad (1.12)$$

onde o ponto indica derivação total com respeito a coordenada temporal  $t$ .

Com os símbolos de Christoffel calculados podemos obter os elementos do tensor de Ricci por meio da expressão,

$$R_{\mu\nu} = \partial_{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} - \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\nu}^{\beta}. \quad (1.13)$$

Os elementos não nulos são,

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a} \\ R_{11} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\kappa}{1 - \kappa r^2} \\ R_{22} = r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\kappa) \\ R_{33} = r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\kappa) \sin^2(\theta) \end{array} \right. \quad (1.14)$$

Com esse resultado podemos calcular o escalar de Ricci,

$$R = \frac{6}{a^2}(a\ddot{a} + \dot{a}^2 + \kappa) \quad (1.15)$$

Até o momento analisamos apenas as componentes geométricas do espaço-tempo. Porém o universo é constituído de matéria, radiação e outras formas de energia nas quais descrevemos através do tensor de energia momento. As mesmas hipóteses de homogeneidade e isotropia espacial no qual utilizamos para obter a métrica de FLRW também afetam o tensor de energia momento de forma que ele é caracterizado apenas pelos valores médios da densidade de energia e momento dos elementos que afetem de forma relevante o fundo cosmológico.

Este tensor pode ser representado como o de um fluido perfeito,

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^{\mu}u^{\nu} + pg^{\mu\nu} \quad (1.16)$$

onde  $\rho$  é a densidade de energia do fluido e  $p$  a pressão,  $u^{\alpha}$  é a quadrivelocidade e  $g^{\mu\nu}$  é a métrica do espaço-tempo.

No sistema de coordenadas comóvel, o observador está sempre em repouso com respeito ao fluido cosmológico. Logo as suas componentes espaciais da quadrivelocidade serão nulas. Assim podemos escrever o tensor energia momento da seguinte forma,

$$T_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

Antes de prosseguirmos para os cálculos das equações de Friedmann devemos observar que o tensor energia momento de um fluido perfeito satisfaz a seguinte lei de conservação,

$$\nabla_{\mu} T_{\nu}^{\mu} = \partial_{\mu} T_{\nu}^{\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} T_{\alpha}^{\mu} + \Gamma_{\mu\alpha}^{\mu} T_{\nu}^{\alpha} = 0. \quad (1.18)$$

Calculando os termos para a métrica de FLRW e as derivadas do tensor energia momento temos a equação,

$$3\frac{\dot{a}}{a}(p + \rho) + \dot{\rho} = 0. \quad (1.19)$$

Na qual representa a conservação da energia e momento localmente para este fluido. Também podemos pensar nessa equação como equação de continuidade aplicada a relatividade geral.

Tendo determinado todos os componentes do tensor de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (1.20)$$

e também o tensor de energia momento, podemos finalmente utilizar as equações de campo de Einstein para obter as equações dinâmicas da cosmologia.

Sabendo que a equação de Einstein é dado por,

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (1.21)$$

As únicas componentes não nulas dessa equação são as com o mesmo índice devido a métrica ser diagonal. Calculando as componentes temporais temos,

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} + 3\frac{\ddot{a}}{a} + 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 3\frac{\kappa^2}{a^2} - \Lambda = 8\pi\rho. \quad (1.22)$$

Assim obtemos a primeira equação de Friedmann, dada por,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{\kappa^2}{a^2} \quad (1.23)$$

Na equação 1.23 o termo do lado esquerdo é conhecido como parâmetro de Hubble,

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}}{a}. \quad (1.24)$$

As componentes espaciais da equação de Einstein por sua vez fornecem,

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = -4\pi p + \frac{\Lambda}{2} - \frac{\kappa^2}{2a^2}. \quad (1.25)$$

Realizando uma combinação linear entre a equação 1.23 e 1.25 podemos reescrever a equação sem o termo  $\frac{\dot{a}}{a}$ .

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (1.26)$$

Assim obtemos a segunda equação de Friedmann. As duas equações de Friedmann são as duas equações independentes que determinam a dinâmica do fundo cosmológico do modelo padrão.

Definida as equações que determinam o comportamento dinâmico do fator de escala do universo. Devemos caracterizar o comportamento evolutivo da matéria e energia que estão contidos no mesmo. Para isso utilizaremos a equação de conservação 1.19 aplicada a um fluido barotrópico que relaciona a densidade de energia e pressão da seguinte forma,

$$p = w\rho \quad (1.27)$$

onde  $w$  é o parâmetro constante da equação de estado. Com isso podemos reescrever a equação 1.19 como,

$$\dot{\rho} + \frac{3\dot{a}}{a}(1+w)\rho = 0, \quad (1.28)$$

cuja solução é,

$$\rho \propto a^{-3(1+w)}. \quad (1.29)$$

E assim o fator  $w$  da equação de estado caracterizar a evolução da densidade de energia de cada um dos constituintes do universo em relação ao fator de escala.

#### 1.4 Conteúdo do universo

O universo é constituído por um conjunto de elementos com diferentes propriedades e características. Graças a equação 1.19 podemos descrever a evolução da densidade de energia de cada espécie no decorrer do tempo. É útil descrever todas as densidades de energia em uma mesma unidade. Para isso devemos dividir a densidade de energia de cada espécie  $s$  pelo valor crítico de densidade no tempo atual  $\rho_{cr}$ . Conforme a expressão,

$$\Omega_s \equiv \frac{\rho_s(t_0)}{\rho_{cr}}, \quad (1.30)$$

onde  $\rho_{cr}$  é dado por,

$$\rho_{cr} = \frac{3H_0^2}{8\pi}, \quad (1.31)$$

onde  $H_0$  é o parâmetro de Hubble atualmente.

Também podemos escrever o parâmetro de Hubble em função das densidades da seguinte maneira,

$$\frac{H^2(t)}{H_0^2} = \sum_s \Omega_s [a(t)]^{-3(1+w_s)} + \Omega_K [a(t)]^{-2}, \quad (1.32)$$

onde o termo  $\Omega_K$  representa a densidade de curvatura do universo. No modelo  $\Lambda$ CDM consideramos o universo com curvatura nula, ou seja,  $\Omega_K = 0$ .

Assim podemos escrever a densidade de energia para cada espécie  $\rho_s$  em função do fator de escala da seguinte maneira,

$$\rho_s(a) = \Omega_s \rho_{cr} a^{-3(1+w_s)}. \quad (1.33)$$

Nesta seção buscamos caracterizar cada uma das componentes clássicas da cosmologia padrão segundo a evolução da sua densidade de energia em função do fator de escala. Com isso vamos comentar de forma resumida sobre a modelagem dessas componentes segundo a sua equação de estado.

- **Matéria bariônica.** A matéria bariônica é constituída por prótons, nêutrons e elétrons. Em escalas cósmicas temos a distribuição de galáxias e aglomerados de galáxias. Considerando esse conjunto de galáxias como um fluido que percorre o universo observado, temos que esse fluido se comporta de forma similar a um gás ideal dada a grande separação entre as galáxias e sua baixa extensão em relação a escalas cosmológicas.

Um resultado da teoria cinética dos gases nos mostra que a relação entre a temperatura  $T$  e a velocidade quadrática média das partículas do fluido é dada por  $m \langle v^2 \rangle = 3k_b T$ , onde  $k_b$  é a constante de Boltzmann. Utilizando tal expressão podemos reescrever a equação de estado para o fluido galáctico como,

$$p \approx \frac{1}{3} \frac{\langle v^2 \rangle}{c^2} \rho \approx 0 \quad (1.34)$$

onde  $c^2$  é a velocidade da luz no vácuo. Considerando que as galáxias não se movem em velocidades relativísticas temos que a pressão desse fluido cósmico é nula.

Observando a equação de conservação 1.19 e considerando que a pressão é nula temos que,

$$\frac{\partial[\rho_b a^3]}{\partial t} = 0 \quad (1.35)$$

Logo a densidade de energia da matéria bariônica evoluiu de forma inversamente proporcional ao fator de escala elevado ao cubo,

$$\rho_b \propto a^{-3}, \quad (1.36)$$

refletindo a expansão do volume.

Dada a equação 1.36 concluímos que a constante  $w$  da equação de estado para a matéria bariônica é nula.

A matéria bariônica é conhecida como matéria ordinária pois é constituinte das estrelas, planetas, seres humanos e todo objeto que seja feito de átomos. Porém graças a medidas recentes de nucleossíntese primordial (COOKE; PETTINI; STEIDEL, 2018) e radiação cósmica de fundo (ADAM et al., 2016) sabemos que a matéria bariônica representa aproximadamente 5% da energia do universo observado.

- **Matéria Escura não Relativística** Uma outra forma de matéria conhecida é a matéria escura. Seu nome se deve ao fato dela não interagir diretamente com a radiação. Porém, a sua massa curva o espaço-tempo e assim proporciona a sua interação gravitacional com outros elementos.

Graças a essa interação foi possível detectar a discrepância de matéria estimada em um aglomerado de galáxias e a matéria luminosa detectada. Pois analisando a curva de velocidade de rotação de galáxias (Begeman, 1989) é necessário existir uma quantidade consideravelmente maior de matéria.

Atualmente com medidas de lentes gravitacionais (Koopmans et al., 2009) e de formação de estruturas (Jarrett, 2004) somos capazes de mensurar percentualmente a quantidade de matéria escura existente no universo. Temos que aproximadamente 25% de toda a energia do universo é proveniente da matéria escura (AGHANIM et al., 2020).

Do ponto de vista termodinâmico, a matéria escura fria apresenta o mesmo comportamento da matéria bariônica. Logo apresenta a mesma equação de estado no qual a pressão do fluido é nula e a densidade de energia evolui da seguinte forma,

$$\rho_m \propto a^{-3}. \quad (1.37)$$

- **Radiação**

Em 1965 os físicos Arno Allan Penzias e Robert Woodrow Wilson descobriram a existência da radiação cósmica de fundo em micro-ondas (Penzias; Wilson, 1965b) proveniente da era do desacoplamento dos fótons e bárions. Esta radiação permeia todo o universo com uma temperatura média atual de  $2.73K$ .

Esse fundo de radiação pode ser modelado como um gás de fótons em equilíbrio térmico. No qual sua equação de estado é escrita da seguinte forma,

$$p_r = \frac{1}{3}\rho_r. \quad (1.38)$$

Substituindo o valor da pressão para um gás de fótons 1.38 na equação de conservação 1.19 temos,

$$\frac{\partial \rho_r}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a}4\rho_r = a^{-4}\frac{\partial[\rho_r a^4]}{\partial t} = 0. \quad (1.39)$$

Logo a sua densidade de energia evolui em função do fator de escala da seguinte maneira,

$$\rho_r \propto a^{-4}. \quad (1.40)$$

Onde observamos que no início da história cósmica do universo a radiação desempenhava um papel relevante na constituição de energia do universo. Porém, atualmente sua contribuição é desprezível em inúmeros casos devido a baixa densidade de energia dos fótons.

Devemos ressaltar que existem dois tipos de radiação. Os fótons que são partículas não massivas detectadas majoritariamente através da radiação cósmica de fundo. E os neutrinos que são partículas subatômica com massa de repouso muito pequenas, porém, não nulas. Existem três sabores de neutrinos, o neutrino do elétron, do múon e do tau. A densidade de energia dos fótons e dos neutrinos apresentam o mesmo comportamento de evolução no início do universo em relação ao fator de escala e ao longo da evolução os neutrinos tornam-se partículas não relativísticas. Porém, dado que o percentual de energia proveniente dos fótons e neutrinos só são significativos no início do universo iremos considerar fótons e neutrinos como radiação.

- **Energia Escura**

Desde os primórdios da Relatividade Geral, Einstein acreditava que o universo deveria ser estático. E para isso incluiu *ad hoc* um parâmetro repulsivo em sua equação. Poucos anos depois Edwin Hubble verifica o comportamento expansivo do universo e Alexander Friedmann apresenta seu conjunto de soluções dinâmicas para a equação de Einstein condizentes com os dados obtidos por Hubble. Devido a esses acontecimentos Einstein voltou atrás na sua ideia de inserir a constante cosmológica e confidenciou a Gamow que havia sido o maior erro da sua vida. (TAYLOR EDWIN F., 2000)

Com o avanço nas técnicas de medidas de parâmetros cosmológicos ficou evidente que o modelo de universo existente constituído majoritariamente por radiação, matéria bariônica e matéria escura não era capaz de descrever os dados experimentais que indicavam um universo acelerado. Essa energia faltante que proporcionava a expansão acelerada do universo foi chamada de energia escura.

Essa componente misteriosa pode ser caracterizada por sua equação de estado com pressão negativa  $p = -\rho$ . Fazendo com que sua densidade de energia seja constante durante toda expansão do universo.

$$\rho_\Lambda \propto \text{constante}. \quad (1.41)$$

Existem alguns modelos na qual a equação de estado é dinâmica dependendo do fator de escala,

$$p = w(a)\rho(a), \quad (1.42)$$

(MORTONSON; WEINBERG; WHITE, 2013), (CHEVALLIER; POLARSKI, 2001) todas essas parametrizações buscam resolver questões fenomenológicas da energia escura. Porém, a natureza dessa energia ainda é desconhecida. A tal ponto de que existam inúmeros trabalhos que propõem modificações na teoria da gravitação (BRANS; DICKE, 1961), (HORNDENSKI, 1974), (Buchdahl, 1970).

## 1.5 Distâncias

Devido à grandes proporções inerentes a medidas de distâncias astronômicas foram criadas novas unidades de medida visando facilitar a descrição dessas distâncias. Como a Unidade Astronômica (UA), instituída como a distância média entre a Terra e o Sol, cujo valor em metros é  $1,496 \times 10^{11}$ . Também temos o Ano Luz definido como a distância percorrida pela luz no vácuo durante o período de um ano, equivalente à  $9,461 \times 10^{15}$  metros. E o Parsec (pc) é a distância na qual uma UA é vista sob o ângulo de um segundo de arco, cujo valor é  $3,086 \times 10^{16}$  metros.

Porém a métrica de FRLW é dinâmica, de forma que não há uma noção unívoca de distância espacial. Observacionalmente obtemos propriedades e distâncias derivadas do fator de escala do universo e do parâmetro de Hubble em vez dos seus valores em si. Portanto, nosso objetivo nessa seção é abordar quais são essas grandezas que atuam como ponte entre teoria e observação de modelos cosmológicos.

### 1.5.1 Distância comóvel

A distância medida por um observador comóvel ao fluxo de Hubble é conhecida como distância comóvel. Considere um feixe de luz emitido à distância comóvel  $\chi$  chegando na origem do sistema de coordenadas sem variação angular durante o trajeto, ou seja,  $d\theta = d\phi = 0$ . Considerando a métrica de FLRW (1.3) e lembrando que a luz sempre viaja sobre o cone, isto é  $ds = 0$ , temos,

$$d\chi = \frac{dt}{a}. \quad (1.43)$$

Diferenciando a relação que determina o *redshift*,

$$1 + z = \frac{1}{a}, \quad (1.44)$$

em relação ao tempo e identificando o parâmetro de Hubble temos,

$$\frac{dt}{a} = -\frac{dz}{H}. \quad (1.45)$$

Comparando a equação 1.43 com a expressão 1.45, temos que a distância comóvel em função do *redshift* é,

$$\chi = \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (1.46)$$

### 1.5.2 Distância própria

Considerando uma foliação 3+1 do espaço-tempo de FLRW na qual o tempo é constante  $t$ . A distância própria que separa um observador na origem do sistema de coordenadas espacial e outro em uma posição qualquer  $(r, \theta, \phi)$  é dado pelo comprimento da geodésica,  $C$ , que conecta suas linhas de universo.

Reescrevendo a métrica de FLRW para  $dt = 0$ , temos,

$$ds^2 = a^2(t)[d\chi^2 + S^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)]. \quad (1.47)$$

Onde podemos definir um elemento infinitesimal da distância própria  $D_p$  como,

$$dD_p^2 = ds^2. \quad (1.48)$$

Agora podemos observar que existem dois tipos de distâncias próprias, a radial e a transversa.

Na distância própria radial temos que os ângulos  $\theta$  e  $\phi$  são constantes,  $d\theta = d\phi = 0$ , ao longo da geodésica. Logo, da equação 1.48,

$$D_p = a\chi \quad (1.49)$$

onde  $a$  está fixo pois estamos analisando um tempo fixo e  $\chi$  é a distância comóvel.

Já a distância própria transversa consideramos que  $d\chi = d\phi = 0$  e obtemos,

$$dD_p = aS(\chi)d\theta. \quad (1.50)$$

Logo,

$$D_p = aS(\chi)\delta\theta \quad (1.51)$$

onde  $\delta\theta$  é a separação angular dos dois pontos.

### 1.5.3 Distância de diâmetro angular

Considere um objeto retilíneo infinitesimal perpendicular a linha de visada, em repouso em um referencial inercial, com comprimento próprio  $\delta l(t)$  no tempo  $t$ . Para um observador na origem do sistema de coordenadas e o objeto a uma distância  $D_A(t)$  e sabendo que o ângulo de visada subtendido pelo objeto no observador é  $\delta\theta$  temos que a distância angular é,

$$D_A(t) = \frac{\delta l(t)}{\delta\theta} \quad (1.52)$$

O tamanho transversal  $\delta l$  do objeto pode ser obtido através da distância própria transversa e assim escrevemos,

$$D_A(t) = \frac{a(t)S(\chi)\delta\theta}{\delta\theta} = \frac{S(\chi)}{1+z}. \quad (1.53)$$

### 1.5.4 Distância luminosidade

Alguns objetos astrofísicos, como por exemplo as supernovas tipo Ia, têm sua luminosidade absoluta  $L$  conhecida. Sabendo que a luminosidade de um objeto cai com o inverso do quadrado do raio, é possível estimar a distância deste objeto comparando a luminosidade observado com a emitida, que conhecemos previamente. Por essa razão, as supernovas tipo Ia são conhecidas como velas padrões.

Sabe-se que no espaço-tempo de Minkowski a luminosidade ( $L$ ) de uma fonte em repouso relaciona-se com o fluxo observado ( $f$ ) através de uma superfície esférica de raio  $r$  centrada na fonte pela seguinte forma,

$$f = \frac{L}{4\pi r^2}. \quad (1.54)$$

Porém no espaço-tempo de FLRW devemos considerar que a área da esfera na qual os fótons atravessam é dada por  $4\pi S^2(\chi)$  e que os fótons são afetados pela expansão do universo de forma que a expressão será,

$$f = \frac{L}{4\pi S^2(\chi)(1+z)^2} = \frac{L}{4\pi D_L^2}. \quad (1.55)$$

onde definimos a distância luminosidade como,

$$D_L = (1+z)S(\chi) \quad (1.56)$$

onde  $z$  é o *redshift* sofrido pelo fóton.

Existe uma relação entre distância diâmetro angular e distância luminosidade dada por,

$$D_A = \frac{D_L}{(1+z)^2}. \quad (1.57)$$

Esta relação é válida para qualquer métrica na qual o fluxo é conservado (AMENDOLA; TSUJIKAWA, 2010) e não apenas a métrica de FLRW.

## 1.6 Perturbações lineares

Até o presente momento, nossa descrição considera apenas um universo homogêneo e isotrópico, conforme o princípio cosmológico. Esse estudo costuma ser tratado como uma cosmologia de fundo ou *background* descrito pela métrica de FLRW. Porém, sabemos que pequenas perturbações no universo homogêneo e isotrópico são necessárias para proporcionar a criação de estruturas em larga escala. A esse estudo chamamos de teoria de perturbações cosmológicas no qual o fundo cosmológico pode ser visto como uma aproximação de ordem zero dessas perturbações.

Essas perturbações devem ser aplicadas tanto na curvatura do espaço-tempo quanto no tensor energia momento. Para isso decomparamos as quantidades perturbadas em componentes irreduzíveis, conforme a decomposição SVT (*scalar-vector-tensor decomposition*) (Bardeen, 1980).

Uma perturbação genérica na métrica é dado por,

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}^0(\tau) + \delta g_{\alpha\beta}(\vec{x}, \tau), \quad (1.58)$$

onde  $g_{\alpha\beta}^0(\tau)$  é a métrica de FLRW representando o fundo cosmológico e supomos que a perturbação  $\delta g_{\alpha\beta}$  é muito pequena comparada ao fundo, ou seja,  $|g_{\alpha\beta}^0| \ll |\delta g_{\alpha\beta}|$ .

Como as perturbações são gerais, elas não respeitam as simetrias da métrica não perturbada. Mas podemos decompor essas perturbações em componentes independentes que se acoplam a setores independentes da teoria.

Estas perturbações podem ser divididas em três categorias. As perturbações escalares são induzidas por inhomogeneidades na densidade de energia e são responsáveis pela formação de estruturas do universo. As perturbações vetoriais estão relacionadas aos movimentos rotacionais do fluido. Já as perturbações tensoriais descrevem as ondas gravitacionais que na aproximação linear não induzem nenhuma perturbação no fluido perfeito.

O termo perturbado  $\delta g_{00}$  se comporta como um escalar sob rotações e translações espaciais,

$$\delta g_{00} \equiv -2a^2\psi, \quad (1.59)$$

onde  $\psi$  é um escalar.

O termo perturbado vetorial  $\delta g_{0i}$  pode ser escrito da seguinte forma,

$$\delta g_{0i} \equiv a^2(B_{,i} + S_i), \quad (1.60)$$

onde  $B$  é um escalar qualquer e  $S_i$  é um vetor cuja divergência é nula,  $S_{,i}^i = 0$ , considerando que  $S_{,i}^i = \frac{\partial S^i}{\partial x^i}$

Assim podemos decompor as perturbações tensoriais da seguinte maneira,

$$\delta g_{ij} \equiv a^2(2\phi\delta_{ij} + 2E_{,ij} + F_{i,j} + F_{j,i} + h_{ij}), \quad (1.61)$$

onde  $\phi$  e  $E$  são funções escalares e o vetor  $F_i$  tem divergência nula,  $F_{,i}^i = 0$ . O termo  $h_{ij}$  é simétrico e satisfaz os vínculos,

$$h_i^i = 0, \quad h_{j,i}^i = 0. \quad (1.62)$$

Assim podemos escrever o elemento de linha da métrica conforme perturbada como,

$$ds^2 = a^2(\tau)[-(1+2\psi)d\tau^2 + 2(B_{,i} + S_i)d\tau dx^i + ((1+2\phi)\delta_{ij} + 2E_{,ij} + F_{i,j} + F_{j,i} + h_{ij})dx^i dx^j]. \quad (1.63)$$

Visto que no regime linear as perturbações evoluem independentemente podemos analisar apenas as perturbações escalares, pois elas são as responsáveis pela criação das estruturas em larga escalas do universo.

Considerando apenas as perturbações escalares temos que o elemento de linha da métrica é,

$$ds^2 = a^2(\tau)[-(1+2\psi)d\tau^2 + 2B_{,i}d\tau dx^i + ((1+2\phi)\delta_{ij} + 2E_{,ij})dx^i dx^j]. \quad (1.64)$$

Fixando o calibre Newtoniano, onde  $E = B = 0$ , reescrevemos o elemento de linha da métrica perturbada da seguinte maneira,

$$ds^2 = a^2(\tau)[-(1+2\Psi)d\tau^2 + (1+2\Phi)\delta_{ij}dx^i dx^j]. \quad (1.65)$$

Os dois termos escalares que geram as perturbações na métrica são  $\Psi$  e  $\Phi$ . Podemos caracterizar o  $\Psi$  como o responsável pelo movimento não relativístico dos corpos e identifica-lo com o

potencial Newtoniano. Já o termo  $\Phi$  descreve as perturbações nas curvaturas espaciais podendo ser interpretado como uma perturbação local do fator de escala  $a(t) = a(t)\sqrt{1 + \Phi(\vec{x}, t)}$ . Em grande escala, a magnitude típica dessas componentes no nosso Universo é da ordem de  $10^{-4}$ . Por esta razão, podemos considerar apenas termos lineares dessas componentes e de maneira geral reproduzir um modelo cosmológico próximo do observado.

Como abordados anteriormente os elementos que constituem o universo não estão distribuídos de forma completamente uniforme através de todo o espaço, exceto a energia escura que consideramos permear todo o universo uniformemente. Existem equações que determinam a forma que as perturbações de cada espécie de elemento evoluem no tempo, elas são obtidas através da resolução das equações de Boltzmann para cada substância (DODELSON S., 2020) (MA; BERTSCHINGER, 1995).

Uma das equações de perturbações descreve o comportamento dos fótons provenientes da Radiação Cósmica de Fundo.

$$\Theta' + ik\mu\Theta = -\Phi' - ik\mu\Psi - \tau' \left[ \Theta_0 - \Theta + \mu u_b - \frac{1}{2}\mathcal{P}_2(\mu)\Pi \right] \quad (1.66)$$

$$\Pi = \Theta_2 + \Theta_{P,2} + \Theta_{P,0} \quad (1.67)$$

A variável  $\Theta$  está atrelada a perturbação na temperatura,  $\delta T/T$ , dos fótons da radiação cósmica de fundo, permitindo expressar através de  $\Theta$  as inhomogeneidades e anisotropias na distribuição desses fótons. De maneira geral temos que a distribuição dos fótons não depende apenas da posição espacial e do tempo, mas também da direção de propagação do fóton dado por  $\hat{\mathbf{p}}$ . Como as equações de Boltzmann são analisadas no espaço de Fourier temos que a variável  $\Theta$  depende não apenas de  $k$  e do tempo conforme  $\eta$  mas também da variável  $\mu = \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{k}}$ . As variáveis  $\Theta_0$ ,  $\Theta_1$  e  $\Theta_2$  apresentam o monopolo, dipolo e quadrupolo das perturbações na distribuição dos fótons respectivamente. A forma geral de escrever o  $l$ -ésimo multipolo de  $\Theta$  é,

$$\Theta_l(k, \eta) \equiv \frac{1}{(-i)^l} \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{2} \mathcal{P}_l(\mu) \Theta(\mu, k, \eta), \quad (1.68)$$

onde  $\mathcal{P}_l$  é o polinômio de Legendre de ordem  $l$ . Quanto maior a ordem do polinômio maior será a captura de informação sobre pequenas escalas.

As variáveis  $\Theta_{P,0}$  e  $\Theta_{P,2}$  na equação 1.67 representam a decomposição de monopolo e dipolo em polinômios de Legendre do campo de polarização dos fótons  $\Theta_P$ . Por último a variável  $\tau'$  representa a derivada da profundidade óptica,

$$\tau(\eta) \equiv \int_{\eta}^{\eta_0} d\eta' n_e \sigma_T a. \quad (1.69)$$

onde  $\sigma_T$  é a seção de choque de Thomson. Sua derivada em termo do tempo conforme é,

$$\tau' \equiv \frac{d\tau}{d\eta} = -n_e \sigma_T a. \quad (1.70)$$

As outras equações que descrevem a evolução das perturbações para a matéria escura, com o subscrito "c", e matéria bariônica, com o subscrito "b" em termos dos campos escalares descritos anteriormente são,

$$\delta'_c + ik u_c = -3\Phi' \quad (1.71)$$

$$u'_c + \frac{a'}{a} u_c = ik\Psi, \quad (1.72)$$

$$\delta'_b + ik u_b = 3\Phi', \quad (1.73)$$

$$u'_b + \frac{a'}{a} u_b = ik\Psi + \frac{\tau'}{R} [u_b + 3i\Theta_1] \quad (1.74)$$

onde a densidade de fótons por bárions foi substituída por,

$$\frac{1}{R(\eta)} \equiv \frac{4\rho_\gamma(\eta)}{3\rho_b(\eta)}. \quad (1.75)$$

e a variável  $\delta$  representa a densidade de contraste da respectiva substância,

$$\delta_i = \frac{\rho_i - \bar{\rho}_i}{\bar{\rho}_i} \quad (1.76)$$

Por último temos que a equação (DODELSON S., 2020) que determina a evolução das perturbações dos neutrinos  $\mathcal{N}$  é,

$$\mathcal{N}' + ik\mu \frac{p}{E_\nu(p)} \mathcal{N} - Hp \frac{\partial}{\partial p} \mathcal{N} = -\Phi' - ik\mu \frac{E_\nu(p)}{p} \Psi. \quad (1.77)$$

E as equações de Einstein perturbadas que descrevem a evolução dos potenciais escalares  $\Psi$  e  $\Phi$  são,

$$k^2\Phi + 3\frac{a'}{a} \left( \Phi' - \Psi \frac{a'}{a} \right) = 4\pi G a^2 [\rho_m \delta_m + 4\rho_r \Theta_{r,0}] \quad (1.78)$$

$$k^2(\Phi + \Psi) = -32\pi G a^2 \rho_r \Theta_{r,2} \quad (1.79)$$

onde o subscrito "m" e "r" representam respectivamente a soma da matéria bariônica com a matéria escura e radiação com neutrinos,

$$\rho_m \delta_m \equiv \rho_c \delta_c + \rho_b \delta_b; \quad \rho_r \Theta_{r,0} \equiv \rho_\gamma \Theta_0 + \rho_\nu \mathcal{N}_0; \quad (1.80)$$

$$\rho_m u_m \equiv \rho_c u_c + \rho_b u_b; \quad \rho_r \Theta_{r,1} \equiv \rho_\gamma \Theta_1 + \rho_\nu \mathcal{N}_1 \quad (1.81)$$

Solucionando essas equações podemos obter o comportamento das componentes do universo perturbado em primeira ordem. Essa análise é muito mais rica que apenas a análise do fundo cosmológico e existem alguns software específicos na resolução dessas equações como o CLASS (Blas; Lesgourgues; Tram, 2011) que foi utilizado nesta dissertação.

## 1.7 Oscilações Acústicas de Bárions

No universo primordial, devido as altas escalas de energia e densidade, a matéria bariônica e os fótons estavam fortemente acoplados. Esse plasma de bárions e fótons estava sujeito a atração gravitacional que buscava agrupar a matéria. Porém, o calor devido a esse agrupamento de matéria gerou uma pressão contrária a atração gravitacional. Essa competição entre o colapso gravitacional e a pressão de radiação gerou oscilações no plasma similar a ondas acústicas a qual denominamos Oscilações Acústicas de Bárions (*Baryonic Acoustic Oscillations*) ou de forma abreviada *BAO*. A velocidade de propagação dessas ondas no plasma é definida por (AUBOURG et al., 2015),

$$c_s = \frac{c}{\sqrt{3(1 + 3\rho_b/4\rho_\gamma)}}, \quad (1.82)$$

onde  $\rho_b$  e  $\rho_\gamma$  são respectivamente a densidade de matéria bariônica e densidade de radiação.

Quando o universo atingiu a idade aproximada de 380 000 anos, os primeiros átomos foram formados. Isto modificou bruscamente a seção de choque entre os bárions e fótons. Devido ao desacoplamento dos bárions e fótons as oscilações dos bárions cessaram de tal forma que o perfil barotrópico do fluido ficou impresso nas distribuições de matéria no universo.

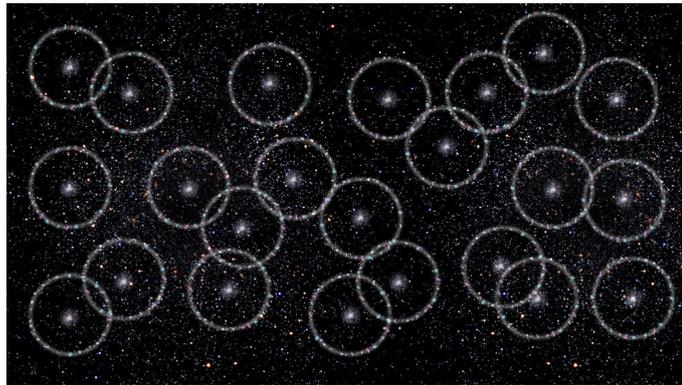


Figura 5 – Concepção artística do padrão impresso na distribuição de matéria em larga escala devido as oscilações acústicas dos bárions, no qual podemos observar que a densidade de matéria é maior nos anéis do que em qualquer outro lugar. Nessa concepção os padrões foram exagerados e simplificados buscando facilitar a compreensão didática. Crédito da imagem: Gabriela Secara, Perimeter Insitute. (BOWN, )

Esses efeitos também podem ser observados através de perturbações na radiação cósmica de fundo para um *redshift* bem determinado. Como no caso das galáxias espera-se que o pico das oscilações varie com o *redshift*. As medidas de oscilações acústicas de bárions tornam-se uma excelente forma de observar a evolução do universo, pois apresenta a distribuição de matéria em diferentes distância, conseqüentemente diferentes períodos da evolução do universo.

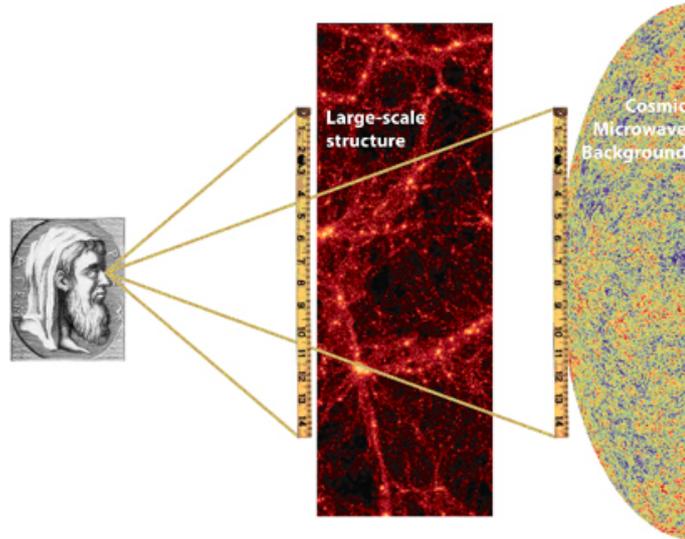


Figura 6 – Conceito de régua padrão associado à oscilações acústicas dos bárions. Comparando os padrões em estruturas de larga escala com a radiação cósmica de fundo. Crédito da imagem: NASA, ESA e R. Massey. (ESA, )

A escala de BAO é definida pelo raio do horizonte sonoro na época conhecida como "*drag epoch*"  $z_d \simeq 1059$ , quando a matéria bariônica é liberada do arrasto dos fótons desacoplados.

$$r_d = \int_{z_d}^{\infty} \frac{c_s(z)}{H(z)} dz, \quad (1.83)$$

Essa escala determina a região de maior densidade na distribuição de bárions, sendo assim mais provável a formação de uma galáxia ocorrer a uma distância  $r_d \approx 147\text{Mpc}$  (AGHANIM et al., 2020) da perturbação inicial do que a outras distâncias. Devemos ressaltar que ocorreram muitas dessas perturbações e nos focamos apenas em uma visando uma abordagem didática. Mas devemos lembrar que o efeito final de todas as perturbações pode ser descrito como uma combinação linear das perturbações individuais.

Com as medidas de BAO podemos estimar a aglomeração de galáxias na direção perpendicular e ao longo da linha de visada. Com essas duas medidas podemos estimar o valor da taxa de expansão do universo  $H(z)$  e da distância diâmetro angular  $D_A(z)$ . Com essas medidas podemos determinar os dois valores,

$$\theta_s(z) = \frac{r_d}{(1+z)D_A(z)}, \quad \delta z_s(z) = r_d H(z). \quad (1.84)$$

O valor  $\theta_s(z)$  caracteriza a distribuição ortogonal de galáxias ao longo da linha de visada e  $\delta z_s(z)$  caracteriza essa oscilação ao longo da linha de visada.

Normalmente as observações não conseguem medir esses parâmetros de forma independente e sim uma combinação entre eles da seguinte maneira,

$$[\theta_s^2(z)\delta z_s(z)]^{1/3} = \frac{r_d}{\left[(1+z)^2 D_A^2(z)/H(z)\right]^{1/3}} \quad (1.85)$$

onde definimos a razão efetiva de distância dada por,

$$D_V(z) = \left[ (1+z)^2 D_A^2(z) \frac{cz}{H(z)} \right]^{1/3}, \quad (1.86)$$

sendo  $D_A$  a distância diâmetro angular,

$$D_A(z) = \frac{1}{z+1} \int \frac{cdz'}{H(z')}. \quad (1.87)$$

Assim podemos escrever a combinação entre  $\theta_s(z)$  e  $\delta z_s(z)$  dada pela equação 1.84 da seguinte maneira,

$$r_{BAO}(z) = \frac{r_d}{D_V(z)}, \quad (1.88)$$

e com essa função podemos determinar a escala de BAO em diferentes *redshift*.

Os parâmetros acústicos  $A(z)$  introduzidos por Eisenstein (EISENSTEIN et al., 2005b) são dados por,

$$A(z) \equiv \frac{100 D_V(z) \sqrt{\Omega_m h^2}}{cz}. \quad (1.89)$$

Repare que a equação 1.89 é independente de  $H_0$  em baixos *redshifts* pois temos que  $D_V \sqrt{\Omega_m h^2} \propto H_0^{-1}$ .

## 1.8 Medidas utilizando Supernovas tipo Ia

Supernova é o nome dado a explosão estelar poderosa que ocorre nos estágios finais da vida de algumas estrelas. Existem dois tipos gerais de supernovas (Dallal; Azzam, 2021). O tipo I é caracterizado pela ausência de linhas de hidrogênio em seu espectro. Este tipo é subdividido em Ia, Ib e Ic devido a detalhes em cada espectro. As supernovas do tipo Ia são caracterizadas pela presença de linhas de silício em 615nm no seu espectro e só ocorre quando a massa da estrela no seu estágio final excede o limite de Chandrasekhar de 1.4 massas solares. Já as supernovas de tipo Ib e Ic são caracterizadas pela presença ou ausência de linhas de hélio, respectivamente. As supernovas do tipo II são caracterizadas pela presença de linhas de hidrogênio em seu espectro. Essas supernovas ocorrem em estrelas massivas cuja massa excede 8 massas solares.

Uma propriedade das supernovas do tipo Ia, também conhecida como SNIa, pode ser visualizado ao analisarmos sua curva de luz no qual temos a evolução da magnitude no tempo.

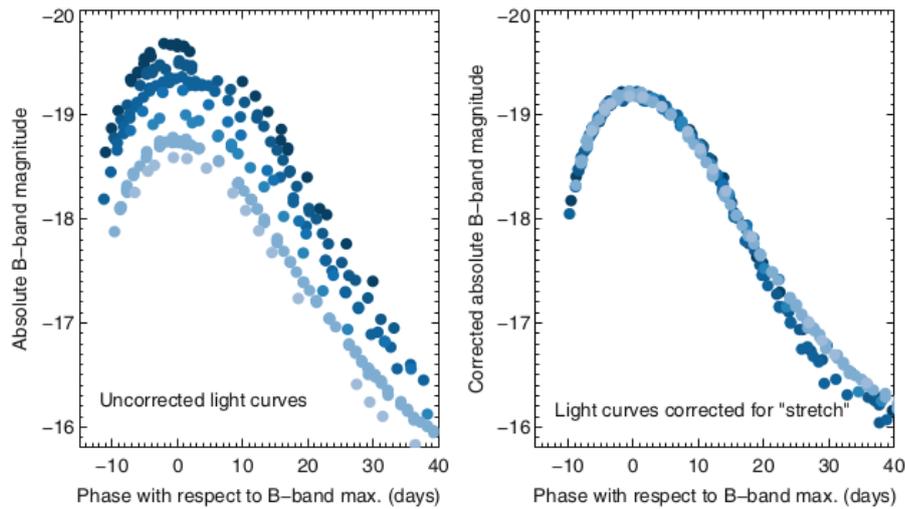


Figura 7 – Na esquerda temos a curva de luz na banda B de um conjunto de supernovas tipo Ia no qual os dados foram retirados de (HICKEN et al., 2009) e (STRITZINGER et al., 2011). Podemos observar a semelhança na largura da curva e no aumento da magnitude absoluta semelhante em todas as medidas. Na direita essas mesmas curvas foram corrigidas de forma a observarmos seu comportamento sobreposto. Fonte: (ALSABTI A. W., 2017)

Tais curvas de luz são obtidas através de grandes colaborações como por exemplo o JLA cujo significado é *Joint Light-Curve Analysis* e trata-se de um esforço conjunto de duas colaborações SNLS (*Supernova Legacy Survey*) e SDSS (*Sloan Digital Sky Survey*), visando obter e utilizar as curvas de luz de SNIa para restringir parâmetros cosmológicos como por exemplo a constante de Hubble. Pois devido a semelhanças na largura e decrescimento da curva de luz as supernovas tipo Ia são ótimos indicadores de distâncias luminosas  $D_L(z)$ , sendo assim chamadas de velas padrão.

Devido a sua enorme luminosidade, podendo ser mais luminosa que a galáxia de origem, podemos observar supernovas tipo Ia a grandes distâncias. Analisando o diagrama Hubble (distância versus *redshift*) para esses objetos astrofísicos, assim determinando a constante de Hubble.

Sabemos que a distância luminosidade depende do fluxo luminoso do objeto astronômico observado conforme equação 1.55. O brilho dos objetos celestes são classificados através de sua magnitude, nessa escala valores maiores são atribuídos a objetos de pouco brilho e valores menores, até mesmo negativos, a objetos de grande brilho. Para critério de comparação temos que a magnitude aparente do sol é aproximadamente  $-26,74$ , assim como da lua cheia  $-12,8$ , Saturno é  $0,6$  e Plutão tem magnitude aparente igual a  $15$ . Podemos classificar magnitude em dois tipos. A magnitude aparente  $m$  dada por,

$$m = -2.5 \log_{10} F + const, \quad (1.90)$$

onde  $F$  é o fluxo luminoso do objeto celeste observado e  $const$  é uma constante que define o zero da escala, normalmente definido de forma que a magnitude aparente da estrela Vega seja nula (OLIVEIRA; SARAIVA, 2014).

Também existe a magnitude absoluta  $M$  que é definida como a magnitude aparente do objeto celeste caso o mesmo estivesse a 10pc de distância. Visto que a luminosidade  $L$  é uma característica inerente ao objeto celeste, a mesma não depende da distância. De forma que podemos relacionar o fluxo luminoso do objeto fonte a uma distância pré estabelecida de 10pc,  $F_{10}$ , com o fluxo do objeto à uma distância arbitrária. Utilizando a equação 1.55 temos que,

$$L = 4\pi D_L^2(1+z)^2 F = 4\pi(10pc)^2(1+z)^2 F_{10}, \quad (1.91)$$

logo, o fluxo à distância de 10pc é,

$$F_{10} = \left( \frac{D_L}{10pc} \right)^2 F. \quad (1.92)$$

Aplicando o conceito de magnitude absoluta na equação 1.90 temos,

$$M = -2.5 \log_{10} F_{10} + const. \quad (1.93)$$

Utilizando a equação 1.92 obtemos,

$$M = -2.5 \log_{10} F + const - 2.5 \log_{10} \left( \frac{D_L}{10pc} \right)^2. \quad (1.94)$$

Comparando a equação 1.94 com 1.90 reescrevemos a magnitude absoluta da seguinte forma,

$$M = m - 5 \log_{10} \frac{D_L}{1Mpc} - 25. \quad (1.95)$$

O fator 25 ocorre devido a mudança de unidades de pc para Mpc.

A diferença entre a magnitude aparente e absoluta é chamado de módulo de distância,

$$\mu = m - M. \quad (1.96)$$

Conforme a equação 1.95 reescrevemos o módulo de distância como,

$$\mu = 5 \log_{10} \left( \frac{D_L}{Mpc} \right) + 25. \quad (1.97)$$

Considerando um universo plano dominado por matéria e energia escura de forma que  $\Omega_\Lambda + \Omega_m = 1$  temos que a distância luminosa é,

$$D_L = \frac{1+z}{H_0} \int_0^z [\Omega_m(1+z')^3 + \Omega_\Lambda]^{-1/2} dz'. \quad (1.98)$$

Uma expressão fenomenológica do módulo da distância observado é dado da seguinte forma,

$$\mu = m - M + \alpha \mathcal{S} - \beta \mathcal{C}, \quad (1.99)$$

onde os termos  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{C}$  são os termos de correção de alongamento e de cor da curva de luz e os termos  $M$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  são considerados parâmetros de *nuisance* os quais devem ser vinculados pelos dados observacionais.

## 2 MODELOS DE GRAVITAÇÃO MODIFICADA

O modelo padrão da cosmologia  $\Lambda$ CDM originou-se como uma extrapolação da relatividade geral para escalas cosmológicas utilizando o princípio cosmológico de isotropia e homogeneidade. Também foi acrescentado a energia escura descrita pela constante cosmológica  $\Lambda$  originalmente posta à mão por Einstein com o intuito de representar um universo estático, porém posteriormente passou a descrever justamente a sua atual expansão acelerada. Outra componente do setor escuro do universo que faz parte do modelo padrão é a matéria escura que representa a segunda maior contribuição de energia neste modelo. Devemos ressaltar que ainda não foram realizados experimentos que fossem capazes de detectar de forma direta a matéria escura ou energia escura, tornando sua natureza ainda desconhecida para os cientistas. O modelo padrão também é caracterizado pelas condições iniciais determinadas por um período muito curto no início do universo, de expansão quase exponencial, conhecido como inflação cósmica. Com esse modelo robusto foi possível descrever inúmeros experimentos cosmológicos durante várias décadas com grande precisão.

Logo após a elaboração da relatividade geral começaram a surgir modelos de gravitação modificada buscando explorar novas possibilidades não abordadas pela teoria de Einstein. Um desses modelos foi proposto em 1921 por Theodor Kaluza e Oskar Klein (KALUZA, 1921) (KALUZA, 2018) o qual propunham uma unificação do eletromagnetismo e gravitação através de uma compactificação de uma quinta dimensão no espaço-tempo. Sua teoria gerava as equações de Einstein da gravitação assim como as equações de Maxwell do eletromagnetismo. Porém, adicionava um quinto elemento na métrica cujo comportamento era similar a um campo escalar. Essa componente as vezes chamada de '*compacton*' pode ser vista como um campo escalar que mede a escala da quinta dimensão.

Desde então os modelos de gravitação modificada não pararam de surgir. Porém, nos últimos anos intensificou-se a busca por modelos mais completos e que possam ser restringidos pelos dados atuais cada vez mais precisos, pois graças a precisão nos dados e avanços em outras áreas da física está sendo possível observar algumas dificuldades no modelo padrão da cosmologia. Como por exemplo, a discrepância de 120 ordens de grandeza na densidade da energia escura medido pela cosmologia e descrito pelo teoria quântica de campos, no qual a energia escura é tratada como a energia do vácuo. Outro parâmetro observacional que apresenta tensão é a taxa de expansão do universo  $H_0$ , cujas medidas locais, diretas, apresentam valores em até  $4.4\sigma$  de discrepância de medidas que utilizam dados do universo primordial no qual são obtidas de forma indireta, pois precisa ser definido um modelo fiducial para estima-las. Também existem o problema da coincidência cósmica e de *fine tuning* (ajuste fino) dos parâmetros iniciais do modelo, que serão tratados mais adiante no capítulo.

A busca por modelos alternativos de gravitação podem ser divididos em modificações na geometria do espaço-tempo ou na introdução de novas componentes no modelo. Assim como John Wheeler resumiu a teoria da gravitação, dizendo que "a matéria diz ao espaço-tempo como se curvar e o espaço-tempo curvado diz como a matéria deve se mover". Utilizando esta ideia

podemos dizer que existem duas formas de modificar a gravitação, fazendo a curvatura interagir de forma diferente à uma mesma densidade de energia ou alterando o próprio comportamento da densidade de energia ao incluir substâncias não pertencentes ao modelo padrão da física de partículas. Iremos caracterizar modelos de gravitação modificada apenas aqueles que alteram o setor geométrico da teoria.

Os modelos de gravitação modificada buscam mitigar nosso desconhecimento sobre a natureza do setor escuro do universo. Porém, cada um tem uma abordagem diferente no qual podem ser agrupados em três grandes tipos.

- **Modelos que quebram suposições fundamentais**

A Relatividade Geral é construída considerando que o espaço-tempo tem quatro dimensões, três espaciais e uma temporal, além de ser uma variedade pseudo-Riemanniana com interações locais que satisfazem a invariância de Lorentz. Qualquer teoria que não respeite esses fundamentos se encontra dentro desse grupo de modelos de gravitação modificada. Como exemplos podemos citar os invariantes de Lovelock (LOVELOCK, 1971), os termo de Gauss-Bonnet (KANTI; RIZOS; TAMVAKIS, 1999) e também as construções de Branais no qual o modelo padrão em 3+1 dimensões está contido em um universo Brana de dimensão superior (ARKANI-HAMED; DIMOPOULOS; DVALI, 1998) como no modelo de Dvali Gabadadze Porrati (DGP) (DVALI; GABADADZE; PORRATI, 2000), (NICOLIS; RATTAZZI, 2004). Os modelos citados são exemplos de teorias com dimensões extras. Também temos exemplos de modelos que quebram a invariância de Lorentz tais como as teorias de Hořava (HOŘAVA, 2009) e Einstein-Aether (JACOBSON, 2007). Também existem as teorias não locais, caracterizadas por envolverem funções do inverso do operador Laplaciano  $f(\square^{-1}R)$  na sua ação. (DESER; WOODARD, 2007), (KOIVISTO, 2008), (MAGGIORE, 2014)

- **Modelos que adicionam novos campos**

Esses modelos estendem a gravidade utilizando a inclusão de campos que interagem diretamente com a métrica (HEISENBERG, 2019). Eles podem ser classificados conforme o tipo de campo utilizado e a forma que interagem com a gravitação. Os modelos escalares são os mais simples pois não tem uma direção preferencial e pode existir tranquilamente no universo sem afetar a sua isotropia, dependendo apenas do tempo. Também temos as teorias que adicionam vetores, como a teoria de Proca (Proca, Al., 1936), (GONDRAN, 2009) e as que adicionam tensores como a TeVeS (*Tensor-Vector-Scalar*) desenvolvida por Bekenstein (BEKENSTEIN, 2004).

- **Modelos que consideram o graviton massivo**

Considerando que a gravidade interage através de uma partícula chamada graviton cuja massa é  $m_g$  e tem spin igual a 2 e 5 estados de polarização. A teoria linear do graviton massivo foi formulada em 1939 por Fierz Pauli (FIERZ; PAULI, 1939). Depois

descobriu-se que todas essas teorias tinham um modo extra, chamado de Boulware-Deser *ghost* que gerava instabilidade. Porém, teorias mais recentes como Rham-Gabadze-Tolley (RHAM; GABADADZE; TOLLEY, 2011) consegue livrar-se dessas instabilidades. E consegue descrever efeitos observados no universo local utilizando mecanismos de Vainshtein (VAINSHTEIN, 1972).

Podemos observar os grupos e subgrupos de extensões da relatividade geral na figura 8.

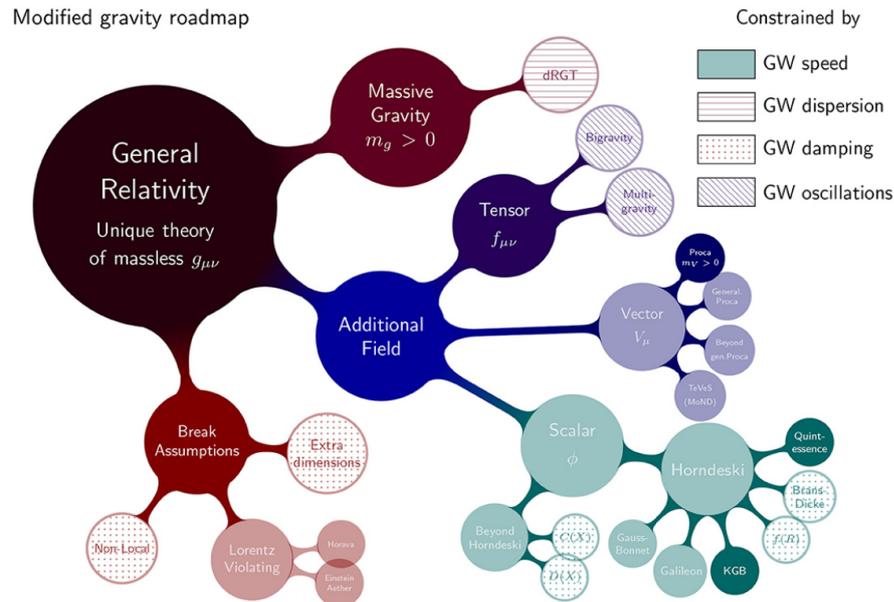


Figura 8 – Modelos de gravitação modificada apresentando as possíveis extensões da relatividade geral e os vínculos impostos em cada pelas detecções de ondas gravitacionais. Fonte: (EZQUIAGA; ZUMALACÁRREGUI, 2018a)

A teoria de Horndeski é a teoria escalar tensorial mais geral possível no qual as equações de movimento são de segunda ordem e livres de instabilidade de Ostrogradsky. Ela pode representar uma gama de modelos de gravitação, como a quintessência, k-essência, gravidade  $f(R)$ , teoria de Brans-Dicke e de Galileons (KASE; TSUJIKAWA, 2014). Devemos reforçar que todas as teorias de gravitação modificada devem reproduzir a relatividade geral em pequenas escalas, como a do nosso sistema solar.

## 2.1 Além do Modelo Padrão

No capítulo anterior analisamos o modelo padrão cosmológico e algumas de suas principais características. Este modelo é dito como "padrão" pois é atualmente o modelo que melhor descreve os dados observacionais obtidos. Porém, apresenta alguns problemas intrínsecos em relação a natureza da energia escura e matéria escura, ambas observadas de forma indireta até o presente momento. Existem modelos teóricos que preveem partículas de matéria escura (BAUDIS, 2018). No qual a suposta partícula de maior notoriedade é chamada de WIMP (QUEIROZ,

2017) , que teoricamente já poderia ser detectado com os experimentos atuais, entretanto, nunca foi observada. O modelo de energia escura mais aceito é descrito pela constante cosmológica  $\Lambda$ , podendo ser mensurada com certa precisão através de observações. Porém, a descrição teórica de maior popularidade associa a constante cosmológica à energia do vácuo quântico (Adler; Casey; Jacob, 1995) e o valor calculado, utilizando teoria quântica de campos, difere do observado de 60 à 120 ordens de grandeza.

Outro problema nesse modelo é o da coincidência cósmica, pois durante uma grande parte da fase inicial da evolução do universo os efeitos da energia escura foram desprezíveis e no futuro ela será o fator dominante na expansão do universo. Durante apenas um curto período, em escalas de tempo cosmológicas, a energia escura e a matéria apresentam densidade de energia da mesma ordem de grandeza. E a grande coincidência é que estamos vivendo justamente este período. Esta coincidência acarreta outra, conhecida como *fine-tuning*, pois implica em ajustes finos nas condições iniciais da constante cosmológica para que estejamos justamente no início da sua era de dominância. (VELTEN; MARTTENS; ZIMDAHL, 2014)

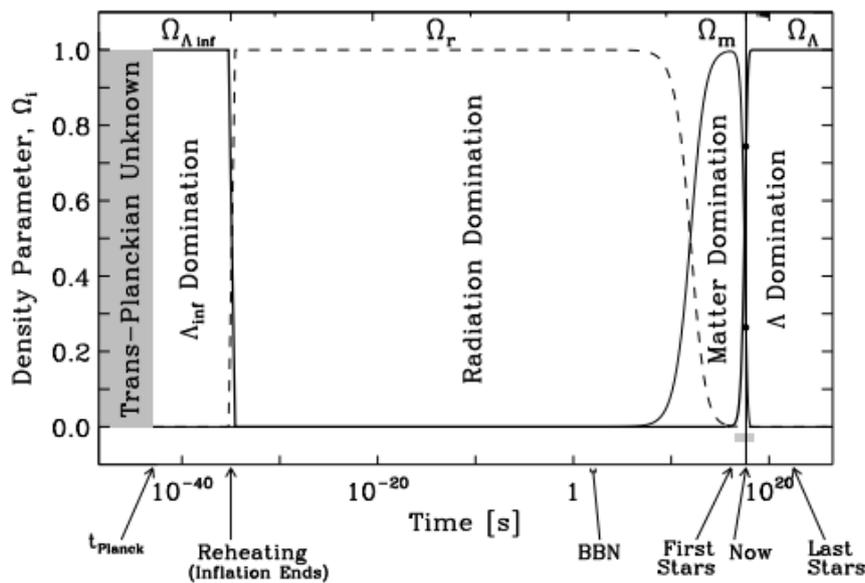


Figura 9 – Neste gráfico podemos observar a dominância de cada espécie constituinte do universo durante toda a evolução do universo e vemos que estamos justamente em um curto espaço de tempo no qual a contribuição da energia escura e a da matéria são equivalentes. (LINEWEAVER; EGAN, 2007)

Todas essas incongruências do modelo  $\Lambda$ CDM são inerentes apenas ao seu setor escuro (matéria e energia escura). Porém, também existem inconsistências em parâmetros observacionais medidos independentemente. Graças ao aumento de precisão em detectores modernos no decorrer dos últimos anos, podemos observar um significativo aumento da tensão no valor da constante de Hubble  $H_0$ . Onde medidas diretas em baixos *redshift* apresentam valores próximos à  $74 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  (RIESS et al., 2019a) e medidas do universo primordial obtidas através da análise da radiação cósmica de fundo apresentam valores próximos à  $68 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  (COL-

LABORATION, 2018) que implica em uma tensão de aproximadamente  $4.4\sigma$  (RIESS et al., 2019b).

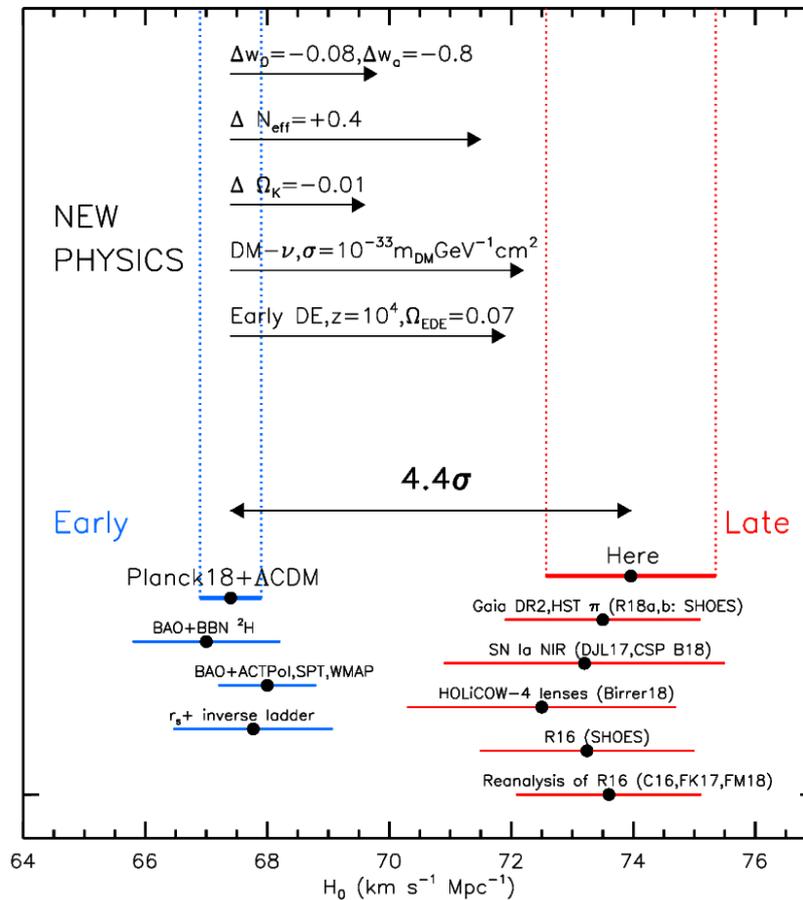


Figura 10 – Evolução histórica dos valores obtidos de  $H_0$  e sua barra de erro para diferentes experimentos. Observe que a tensão entre as medidas aumenta apenas se agrava conforme aumenta-se a precisão. (RIESS et al., 2019b)

Devemos observar que medida de  $H_0$  através da radiação cósmica de fundo é dependente de um modelo fiducial, que no caso é o modelo  $\Lambda$ CDM. E as medidas através de supernovas tipo Ia dependem apenas de uma calibração de distância realizada através de estrelas Cefeidas e da noção de distância em baixos *redshifts*. Com isso temos que o valor de  $H_0$  obtido através de medidas do universo primordial pode ser diferente para cada modelo fiducial escolhido. Mesmo considerando a possibilidade de existir erros sistemáticos em ambos os métodos de medidas, o questionamento sobre a existência de efeitos físicos até então desconhecidos ganhou popularidade. E com isso a busca por novos modelos de gravitação que consigam resolver os problemas inerentes do setor escuro e todas as novas tensões observacionais do mesmo.

## 2.2 Ação de Einstein-Hilbert

O modelo  $\Lambda$ CDM utiliza-se da relatividade geral como seu modelo de gravitação, que é determinada pelas equações de Einstein, pode ser derivada através de uma ação conhecida

como Ação de Einstein-Hilbert. Da mesma forma que na mecânica clássica onde propomos uma ação que produza as equações de movimento para um determinado objeto, o mesmo pode ser realizado com as Equações de Einstein. Este método de obtenção de equações de movimento mostra-se de grande valia na definição de uma teoria de gravitação modificada. Por isso, iremos analisar primeiramente o caso da relatividade geral, onde obtemos as equações de Einstein através da Ação de Einstein-Hilbert.

Supondo uma ação definida no hipervolume  $\Omega$  da seguinte forma:

$$S = \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} R + 2 \int_{\partial\Omega} K, \quad (2.1)$$

onde  $R$  é o escalar de Ricci,  $g$  é o determinante da métrica,  $K$  são elementos de superfície definidos na fronteira  $\partial\Omega$  e por último  $\sqrt{-g}d^4x$  é o elemento de quadrivolume escalar.

Dado o princípio variacional temos,

$$\delta S = \delta \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} R + 2\delta \int_{\partial\Omega} K = 0 \quad (2.2)$$

Sabendo que o escalar de Ricci é uma contração do tensor de Ricci com a métrica e utilizando a propriedade de Leibniz do operador  $\delta$  obtemos,  $\delta S = \delta S_1 + \delta S_2 + \delta S_3 + 2\delta \int_{\partial\Omega} K$  onde,

$$\delta S_1 = \int_{\Omega} d^4x (\delta\sqrt{-g}) g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (2.3)$$

$$\delta S_2 = \int_{\Omega} d^4x (\sqrt{-g}) (\delta g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} \quad (2.4)$$

$$\delta S_3 = \int_{\Omega} d^4x (\sqrt{-g}) g^{\mu\nu} (\delta R_{\mu\nu}) \quad (2.5)$$

Sabemos que a fronteira do hipervolume  $\Omega$  será dada por  $\partial\Omega$  e que  $\delta g^{\mu\nu}$  é arbitrário em  $\Omega$  e zero na fronteira.

Dada a propriedade da métrica,  $g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta_{\nu}^{\mu}$ , obtemos que a variação da métrica pode ser escrita como,

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} \delta g^{\rho\sigma}. \quad (2.6)$$

A variação do tensor de Riemann é,

$$\delta R_{\mu\nu\lambda}{}^{\rho} = \nabla_{\lambda}(\delta\Gamma_{\mu\nu}{}^{\rho}) - \nabla_{\mu}(\delta\Gamma_{\lambda\nu}{}^{\rho}) \quad (2.7)$$

Contraindo o segundo índice com o quarto, obtemos a variação do tensor de Ricci,

$$\delta R_{\mu\lambda\nu}{}^{\lambda} = \delta R_{\mu\nu} = \nabla_{\lambda}(\delta\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda}) - \nabla_{\mu}(\delta\Gamma_{\lambda\nu}{}^{\lambda}). \quad (2.8)$$

Assim, reescrevendo o termo  $\delta S_3$  como,

$$\delta S_3 = \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} \nabla_{\sigma} [(g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\nu\mu}{}^{\sigma}) - (g^{\mu\sigma} \delta\Gamma_{\lambda\mu}{}^{\lambda})]. \quad (2.9)$$

Utilizando a compatibilidade métrica  $\nabla_\lambda g^{\mu\nu} = 0$ , obtemos o termo da variação da conexão,

$$\delta\Gamma_{\alpha\beta}{}^\mu = \frac{1}{2}[-g_{\rho(\alpha}\nabla_{\beta)}\delta g^{\rho\mu} + g_{\alpha\rho}g_{\beta\sigma}\nabla^\mu\delta g^{\rho\sigma}]. \quad (2.10)$$

Assim podemos reescrever o terceiro termo da variação da ação de Einstein Hilbert como,

$$\delta S_3 = \int_\Omega d^4x \sqrt{-g} \nabla_\sigma [g_{\mu\nu} \nabla^\sigma \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\lambda \delta g^{\lambda\sigma}]. \quad (2.11)$$

Observando que a equação 2.11 é a integral no hipervolume da divergência de um tensor, podemos utilizar o teorema de Stokes,

$$\int_\Omega d^4x \sqrt{-g} \nabla_\sigma [g_{\mu\nu} \nabla^\sigma \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\lambda \delta g^{\lambda\sigma}] = \int_{\partial\Omega} d^3x [g_{\mu\nu} \nabla^\sigma \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\lambda \delta g^{\lambda\sigma}]. \quad (2.12)$$

Sabemos que  $\delta g^{\mu\nu}$  é nulo na fronteira  $\partial\Omega$  porém  $\nabla\delta g \neq 0$ . Os termos de superfície  $K$  podem ser escolhidos de maneira a anular essa contribuição (WALD, 1984) de maneira que,

$$\int_\Omega d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\delta R_{\mu\nu}) + 2\delta \int_{\partial\Omega} K = 0. \quad (2.13)$$

Analisando a equação 2.3 sabemos que a métrica, como uma matriz quadrada não singular, respeita a seguinte propriedade,

$$\ln \det(g_{\mu\nu}) = \text{Tr}(\ln g_{\mu\nu}), \quad (2.14)$$

onde  $g_{\mu\nu} = e^{\ln g_{\mu\nu}}$ . Variando ambos os lados,

$$\frac{1}{\det(g_{\mu\nu})} \delta \det(g_{\mu\nu}) = \text{Tr}(g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}). \quad (2.15)$$

Implicando em,

$$\delta g = g(g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}) = g(-g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}). \quad (2.16)$$

Sabendo a variação do determinante da métrica podemos verificar o termo  $\delta\sqrt{-g}$  pertencente a equação 2.3,

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2\sqrt{-g}} g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} = \frac{-1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.17)$$

Reescrevendo a equação 2.3,

$$\delta S_1 = \int_\Omega d^4x g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \left( \frac{-\sqrt{-g}}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right) = \int_\Omega d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{-R}{2} g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.18)$$

Agora podemos escrever a variação da ação de Einstein-Hilbert com todos os termos da seguinte forma,

$$\delta S = \int_\Omega d^4x \sqrt{-g} \left( R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} \right) \delta g^{\mu\nu} = 0. \quad (2.19)$$

Dada a arbitrariedade de  $\delta g^{\mu\nu}$  em  $\Omega$  temos que,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} = 0. \quad (2.20)$$

Deste modo obtemos a equação de Einstein no vácuo sem a constante cosmológica.

Para incluir fontes de campo devemos adicionar à equação 2.1 o termo  $S_M$  que descreve a dinâmica da matéria presente no espaço-tempo. Cujas variações são dadas por,

$$\delta S_M = \frac{1}{2} \int T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.21)$$

definindo assim o tensor de energia-momento  $T^{\mu\nu}$ .

Com este ferramental físico e matemático somos capazes de descrever a cosmologia moderna.

### 2.3 Teoria de Horndeski

Adicionar um campo escalar como grau de liberdade extra na teoria de gravitação pode ser encarado como a modificação mais simples. Pois o campo escalar por definição não tem orientação preferencial e consequentemente não quebra a isotropia do espaço-tempo de FLRW. Esse campo escalar também pode ser utilizado para fazer o papel de energia escura dinâmica. Tornando as teorias de gravitação modificada que utilizam apenas um campo escalar extra serem preteridas no estudo da expansão acelerada do universo.

Podemos classificar essas teorias em três grandes grupos segundo a ordem de suas derivadas na ação e na equação de movimento (EZQUIAGA; ZUMALACÁRREGUI, 2018b).

- **Teoria escalar tensorial à moda antiga**

Essas teorias são caracterizadas por derivadas de primeira ordem na ação e derivadas de segunda ordem nas equações de movimento. Essa teoria inclui modelos de gravitação onde os mais conhecidos são quintessência, k-essência, Brans-Dicke, *Chameleons* (KHOURY; WELTMAN, 2004) e *symmetrons* (HINTERBICHLER; KHOURY, 2010).

- **Teoria de Horndeski**

Essas teorias são caracterizadas por derivadas de segunda ordem tanto na ação quanto nas equações de movimento, cuja principal característica é ser a teoria escalar mais geral no qual suas equações de movimento estão restritas a derivadas segundas e são livres da instabilidade de Ostrogradsky. Essa teoria engloba todas as teorias da categoria acima e outras como gravitação de Dirac-Born-Infeld (RHAM; TOLLEY, 2010) e a Galileon (NICOLIS; RATAZZI; TRINCHERINI, 2009a).

- **Teoria além de Horndeski**

São caracterizadas por derivadas segundas na ação e derivadas de ordens maiores nas equações de movimento. Sua teoria mais conhecida é dada pela ação de Gleyzes-Langlois-Piazza-Vernizzi (GLPV) (GLEYZES et al., 2015).

A teoria de Horndeski foi desenvolvida em 1974 por Gregory Horndeski (Horndeski, 1974), descrevendo de forma mais geral possível todas as teorias escalar tensorial com derivadas segundas nas equações de movimento e livres de instabilidades de Ostrogradsky. Essa instabilidade também chamada de instabilidade do tipo *ghost* ocorre em teorias de segunda ordem ou ordens maiores na ação fazendo com que a mesma não possua um estado de mínima energia, podendo decair até estados infinitamente negativos. Podemos visualizar essa instabilidade utilizando a seguinte Lagrangiana como exemplo,

$$L = \frac{a}{2}\ddot{\phi}^2 - V(\phi), \quad (2.22)$$

onde  $a \neq 0$  e  $V(\phi)$  um potencial arbitrário. Variando a ação associada a esta Lagrangiana obtemos a equação,

$$a\phi^{(4)} - \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (2.23)$$

A equação 2.23 necessita de quatro condições iniciais para obter sua solução, logo ela terá dois graus de liberdade dinâmicos. Com isso podemos decompor a Lagrangiana em dois campos utilizando o campo auxiliar  $\psi$ ,

$$L = a\psi\ddot{\phi} - \frac{a}{2}\psi^2 - V(\phi) \quad (2.24)$$

$$= -a\dot{\psi}\dot{\phi} - \frac{a}{2}\psi^2 - V(\phi) + a\frac{d}{dt}(\psi\dot{\phi}), \quad (2.25)$$

fazendo  $\psi = \ddot{\phi}$  recuperamos a equação 2.22. Considerando que o último termo da equação 2.24 não contribui para a equação de movimento, pois é um termo de superfície, podemos escrever a Lagrangiana em função de  $q = \frac{(\phi + \psi)}{\sqrt{2}}$  e  $Q = \frac{(\phi - \psi)}{\sqrt{2}}$  da seguinte forma,

$$L = -\frac{a}{2}\dot{q}^2 + \frac{a}{2}\dot{Q}^2 - \frac{a}{2}(Q^2 + q^2) + \frac{a}{2}Qq - U(q, Q), \quad (2.26)$$

e obter a mesma equação de movimento. Observe que o sistema tem dois graus de liberdade dinâmicos e que um deles possui um termo cinético com sinal contrário, sinalizando a presença de instabilidade do tipo *ghost*. Este resultado pode ser generalizado para Lagrangeanas de ordem maiores.

A teoria de Horndeski também é conhecida como teoria de Galileon Generalizada. As teorias de Galileon (NICOLIS; RATAZZI; TRINCHERINI, 2009b) são utilizadas no espaço-tempo de Minkowski e acrescentam um campo escalar  $\phi$  à teoria de gravitação. O nome Galileon deve-se ao fato da ação obedecer à simetria,

$$\partial_\mu\phi \rightarrow \partial_\mu\phi + c_\mu, \quad c_\mu = \text{constante}, \quad (2.27)$$

visto como uma generalização da invariância de Galileu.

Buscando generalizar a teoria de Galileon para sua forma totalmente covariante, foi necessário adicionar contra termos na Lagrangeana com o intuito de cancelar as derivadas na métrica

superiores a segunda ordem além de outras modificações (KOBAYASHI; YAMAGUCHI; YOKOYAMA, 2011). Assim é obtido a ação de Horndeski,

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \sum_{i=2}^5 \mathcal{L}_i + \mathcal{L}_m(g_{\mu\nu}) \right], \quad (2.28)$$

onde  $\mathcal{L}_m$  descreve o setor de matéria dada pela métrica  $g_{\mu\nu}$ , e os termos  $\mathcal{L}_i$  são,

$$\mathcal{L}_2 = K(\phi, X) \quad (2.29)$$

$$\mathcal{L}_3 = -G_3(\phi, X) \square \phi, \quad (2.30)$$

$$\mathcal{L}_4 = G_4(\phi, X) R + G_{4X} [(\square \phi)^2 - \phi_{;\mu\nu} \phi^{;\mu\nu}], \quad (2.31)$$

$$\mathcal{L}_5 = G_5(\phi, X) G_{\mu\nu} \phi^{;\mu\nu} - \frac{1}{6} G_{5X}(\phi, X) [(\square \phi)^3 + 2\phi_{;\mu}^{\nu} \phi_{;\mu}^{\alpha} \phi_{;\alpha}^{\mu} - 3\phi_{;\mu\nu} \phi^{;\mu\nu} \square \phi], \quad (2.32)$$

onde  $K(\phi, X)$  e  $G_i(\phi, X)$  são funções arbitrárias do campo escalar  $\phi$  e seu termo cinético  $X = \frac{-\dot{\phi}^{\mu} \phi_{;\mu}}{2}$  onde definimos a derivada covariante  $\phi_{i;x} = \phi_{i,x} - \Gamma_{ix}^j \phi_j$  e  $R$  é o escalar de Ricci e  $G_{\mu\nu}$  é o tensor de Einstein.

## 2.4 Interpretação das funções livres de Horndeski

Sabendo que ao analisarmos apenas a evolução histórica do fundo cosmológico não conseguimos especificar o modelo de energia escura. Visto que dois modelos de gravitação diferentes, como por exemplo a quintessência e modelos  $f(R)$ , tem previsão de crescimento de estruturas diferentes, porém com a mesma expansão cósmica.

Para descrever completamente a evolução das perturbações lineares na teoria Horndeski devemos reescrever as suas funções livres em termos de novas quatro funções  $\alpha_i$ , independentes do fundo cosmológico, do setor de matéria e também independentes entre si. As funções  $\alpha_i$  são escolhidas de forma que cada uma represente de maneira independente as propriedades da energia escura.

Estas funções escritas em termos de  $K$  e  $G_i$  são,

$$H M_*^2 \alpha_M \equiv \frac{d}{dt} M_*^2 \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned}
H^2 M_*^2 \alpha_K \equiv & 2X(K_X + 2XK_{XX} - 2G_{3\phi} - 2XG_{3\phi X}) \\
& + 12\dot{\phi}XH(G_{3X} + XG_{3XX} - 3G_{4\phi X} - 2XG_{4\phi XX}) \\
& + 12XH^2(G_{4X} + 8XG_{4XX} + 4X^2G_{4XXX}) \\
& - 12XH^2(G_{5\phi} + 5XG_{5\phi X} + 2X^2G_{5\phi XX}) \\
& + 4\dot{\phi}XH^3(3G_{5X} + 7XG_{5XX} + 2X^2G_{5XXX})
\end{aligned} \tag{2.34}$$

$$\begin{aligned}
HM_*^2 \alpha_B \equiv & 2\dot{\phi}(XG_{3X} - G_{4\phi} - 2XG_{4\phi X}) \\
& + 8XH(G_{4X} + 2XG_{4XX} - G_{5\phi} - XG_{5\phi X}) \\
& + 2\dot{\phi}XH^2(3G_{5X} + 2XG_{5XX})
\end{aligned} \tag{2.35}$$

$$M_*^2 \alpha_T \equiv 2X(2G_{4X} - 2G_{5\phi} - (\ddot{\phi} - \dot{\phi}H)G_{5X}) \tag{2.36}$$

onde  $M_*^2$  é a massa efetiva de Planck dada por,

$$M_*^2(\phi, X, H) \equiv 2(G_4 - 2XG_{4X} + XG_{5\phi} - \dot{\phi}HXG_{5X}). \tag{2.37}$$

A interpretação física dada às funções  $\alpha_i$  pode ser visto de forma simplificada abaixo.

- $\alpha_K$  (**Kineticity**)

Energia cinética proveniente das perturbações escalares. Modulando a "rigidez" do campo escalar, ou seja, determina o quão difícil é excitar uma perturbação em  $\phi$ . A *kineticity* está intimamente atrelada a velocidade de propagação de perturbações escalares. De forma que a velocidade do som pode ser escrita como,

$$c_s^2 \propto \frac{1}{\alpha_K}. \tag{2.38}$$

devemos ressaltar que a expressão 2.38 é válida apenas quando consideramos modelos de gravitação modificada com  $\alpha_K \neq 0$ .

A função  $\alpha_K$  tem contribuição de  $K, G_3, G_4$  e  $G_5$ .

- $\alpha_B$  (**Braiding**)

*Braiding* significa trança em inglês e por isso é utilizado esse nome no termo de mistura entre os termos cinéticos do campo escalar e a métrica. Ele contribui indiretamente para a energia cinética das perturbações escalares, através da reação gravitacional (DEF-FAYET et al., 2010). Também causa o agrupamento de energia escura. Essa função tem contribuição de  $G_3, G_4$  e  $G_5$ .

- $\alpha_M$  (**Planck-mass run rate**)

Taxa de evolução da massa efetiva de Planck. Funciona como um termo de atrito. Essa função se relaciona com a intensidade da gravitação, dada pela massa efetiva de Planck  $M_*^2$ , da seguinte maneira,

$$\alpha_M = \frac{d \log(M_*^2)}{d \log a}. \quad (2.39)$$

Essa função tem contribuição de  $G_4$  e  $G_5$ .

Devemos observar que assim como  $\alpha_T$  o parâmetro  $\alpha_M$  afeta a propagação de ondas gravitacionais. Pois ao adotar um valor não nulo para  $\alpha_M$  implica na variação da massa de Planck no decorrer da evolução do universo. Devemos lembrar que a massa de Planck está relacionada com a constante gravitacional de Newton  $G$  da seguinte forma:  $M_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$  onde  $\hbar$  é a constante de Planck dividida por  $2\pi$ ,  $c$  é a velocidade da luz. Essa modificação em  $G$  pode gerar uma atenuação da onda gravitacional. De forma que dinâmica dessa perturbação tensorial  $h$  no vácuo seja dada por,

$$\ddot{h}_{ij} + (3 + \alpha_M)\dot{h}_{ij} + (1 + \alpha_T)\frac{k^2}{a^2}h_{ij} = 0. \quad (2.40)$$

Fazendo com que a distância luminosidade medida através de sinais eletromagnéticos seja diferente da distância luminosa medida por ondas gravitacionais através de sirenes padrões da seguinte forma,

$$\frac{D_L^{GW}(z)}{D_L^{EM}(z)} = \frac{M_*(0)}{M_*(z)}, \quad (2.41)$$

onde  $M_*(0)$  é a massa de Planck no momento da observação e  $M_*(z)$  é a massa de Planck no momento da emissão. (EZQUIAGA; ZUMALACÁRREGUI, 2018b)

- $\alpha_T$  (**Tensor speed excess**)

Desvio na velocidade de ondas gravitacionais, dado pela seguinte expressão,  $c_g^2 = (1 + \alpha_T)$ . Após o evento GW170817 (KREISCH; KOMATSU, 2018)  $\alpha_T$  foi restrita aos valores,

$$|\alpha_T| \lesssim 10^{-15}, \quad (2.42)$$

ou seja, para efeitos práticos consideramos  $\alpha_T \approx 0$ . Essa função tem contribuição de  $G_4$  e  $G_5$ .

Essas quatro funções estão associadas a quatro tipos de perturbações de ordem linear no tensor de energia momento da energia escura.

As equações de Friedmann para a teoria de Horndeski na presença de matéria são dadas por (BELLINI; SAWICKI, 2014),

$$3H^2 = \tilde{\rho}_m + \tilde{\mathcal{E}} \quad (2.43)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -\tilde{p}_m - \tilde{\mathcal{P}} \quad (2.44)$$

onde  $\tilde{\rho}_m$  e  $\tilde{p}_m$  são a densidade de energia e pressão de todas as componentes de matéria somadas, enquanto  $\tilde{\mathcal{E}}$  e  $\tilde{\mathcal{P}}$  são a densidade de energia e pressão da energia escura. O til representa que a variável foi dividida pela massa efetiva de Planck,  $M_*^2$ .

Os valores explícitos de  $\tilde{\mathcal{E}}$  e  $\tilde{\mathcal{P}}$  são,

$$M_*^2 \tilde{\mathcal{E}} \equiv -K + 2X(K_X - G_{3\phi}) + 6\dot{\phi}H(XG_{3X} - G_{4\phi} - 2XG_{4\phi X}) + 12H^2X(G_{4X} + 2XG_{4XX} - G_{5\phi} - XG_{5\phi X}) + 4\dot{\phi}H^3X(G_{5X} + XG_{5XX}). \quad (2.45)$$

$$M_*^2 \tilde{\mathcal{P}} \equiv K - 2X(G_{3\phi} - 2G_{4\phi\phi}) + 4\dot{\phi}H(G_{4\phi} - 2XG_{4\phi X} + XG_{5\phi\phi}) - M_*^2 \alpha_B H \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} - 4H^2X^2G_{5\phi X} + 2\dot{\phi}H^3XG_{5X}. \quad (2.46)$$

Devemos enfatizar que, apesar de  $\alpha_M$  e  $\alpha_B$  aparecerem nas equações que determinam a evolução do fundo cosmológico, elas só podem ser determinadas analisando a formação de estruturas do universo, pois as funções  $\alpha_i$  afetam apenas as perturbações lineares.

O campo escalar  $\phi$  evolui conforme a equação,

$$\dot{n} + 3Hn = \mathcal{P}_\phi, \quad (2.47)$$

onde  $n$  é a densidade de carga de deslocamento no qual é conservada sempre que a ação exibe uma simetria de Noether,  $\phi \rightarrow \phi + const$ . E  $\mathcal{P}_\phi$  é a derivada parcial da pressão em relação ao campo  $\phi$ , ambas definidas da seguinte forma,

$$n \equiv \dot{\phi}(K_X - 2G_{3\phi}) + 6HX(G_{3X} - 2G_{4\phi X}) + 6H^2\dot{\phi}(G_{4X} + 2XG_{4XX} - G_{5\phi} - XG_{5\phi X}) + 2H^3X(3G_{5X} + 2XG_{5XX}), \quad (2.48)$$

e  $\mathcal{P}_\phi$  é dado por,

$$\mathcal{P}_\phi \equiv K_\phi - 2XG_{3\phi\phi} + 2\ddot{\phi}(XG_{3\phi X} + 3H\phi\dot{X}) + 6\dot{H}G_{4\phi} + 6H^2(2G_{4\phi} + 2XG_{4\phi X} - XG_{5\phi\phi}) + 2H^3\dot{\phi}XG_{5\phi X}. \quad (2.49)$$

Um dos problemas que modelos não canônicos de Horndeski podem apresentar é a instabilidade do fundo cosmológico. Essas instabilidades tornam a solução de fundo não mais

apropriada. Podemos ter dois tipos de instabilidades, as Laplacianas e as *ghost*, já comentada. Para evitar instabilidades do tipo *ghost* nos modos escalares do fundo a seguinte relação deve ser satisfeita,

$$Q_S = \frac{2M_*^2 D}{(2 - \alpha_B)^2} > 0, \quad D \equiv \alpha_K + \frac{3}{2}\alpha_B^2 > 0. \quad (2.50)$$

Já as instabilidades Laplacianas são evitadas se a velocidade do som satisfizer a relação,

$$c_s^2 = - \frac{(2 - \alpha_B) \left[ \dot{H} - \frac{1}{2}H^2\alpha_B(1 + \alpha_T) - H^2(\alpha_M - \alpha_T) \right] - H\dot{\alpha}_B + \tilde{\rho}_m + \tilde{p}_m}{H^2 D} > 0 \quad (2.51)$$

## 2.5 Parametrizações

No modelo padrão da cosmologia a energia escura é descrita como um fluido barotrópico com a seguinte equação de estado,

$$p_{DE} = -\rho_{DE} \quad (2.52)$$

no qual o valor de  $w$  é fixo em  $-1$  durante toda a evolução do universo. Conforme dito na seção 1.4 existem diferentes parametrizações para a equação de estado da energia escura. Essas parametrizações descrevem uma energia escura dinâmica na qual sua equação de estado varia conforme o universo evoluiu. Essa técnica apresenta-se como uma possível solução para a tensão em alguns dados cosmológicos observados, como a taxa de expansão do universo nos dias atuais  $H_0$ .

O modelo de parametrização mais simples e que difere do  $\Lambda$ CDM é o  $w$ CDM onde a energia escura continua sendo caracterizada pela equação,

$$p_{DE} = w\rho_{DE}, \quad (2.53)$$

porém o parâmetro  $w$  será considerado como uma constante livre no qual será determinada pelos dados observados contanto que respeite os seguintes limite  $-1 < w < -1/3$  para que resulte em um universo acelerado e também livre de energias "fantasmas"(CALDWELL; KAMIONKOWSKI; WEINBERG, 2003).

Outra parametrização fenomenológica que considera a equação de estado da energia escura como variável é a parametrização CPL (CHEVALLIER; POLARSKI, 2001) (LINDER, 2003) cujo nome é dado em homenagem aos físicos que a formularam (Chevallier, Polarski, Linder). Esta parametrização pode ser escrita como uma expansão em série de Taylor em torno do fator de escala atual,

$$w(a) = \frac{p_{DE}}{\rho_{DE}} = w_0 + w_a(1 - a) + \mathcal{O}[(1 - a)^2]. \quad (2.54)$$

Ao desconsiderarmos ordens maiores que a quadrática temos,

$$w(z) = w_0 + w_a \frac{z}{1 + z}. \quad (2.55)$$

Observe que o modelo  $w$ CDM pode ser considerado uma aproximação de ordem zero da parametrização CPL e que a mesma deve se aproximar de  $\Lambda$ CDM para  $z \approx 0$  pois as medidas experimentais nessas escalas comprovam a eficiência do modelo padrão.

Todas as parametrizações anteriores descrevem completamente a evolução do fundo cosmológico. Porém, também devemos especificar as parametrizações das funções  $\alpha$  que descrevem a evolução das perturbações cosmológicas. Já existem algumas dessas parametrizações implementadas no `hi_class` (ZUMALACÁRREGUI et al., 2017), iremos destacar duas. A primeira é chamada de *propto\_omega* no qual as funções  $\alpha$  são proporcionais a fração de densidade de energia escura  $\Omega_{DE}$ ,

$$\alpha_i = \hat{\alpha}_i \Omega_{DE}(\tau). \quad (2.56)$$

onde  $\hat{\alpha}_i$  são constantes. A segunda parametrização é a *propto\_scale* onde as funções  $\alpha$  são proporcionais ao fator de escala,

$$\alpha_i = \hat{\alpha}_i a(\tau). \quad (2.57)$$

Observe que todas as parametrizações devem ter que  $\alpha \rightarrow 0$  no universo primordial, condizendo com a expectativa de que a gravitação modificada comporta-se de forma similar a relatividade geral quando a energia escura tinha uma participação ínfima na expansão do universo.

### 3 ESTATÍSTICA BAYESIANA

O principal objetivo dessa dissertação consiste em obter valores de parâmetros  $\theta_i$  de um determinado modelo cosmológico que descrevam da melhor forma um conjunto de observáveis  $x_i$ . Primeiramente devemos especificar a escola de pensamento estatístico que iremos utilizar. As duas abordagens são denominadas como frequentista e bayesiana. A abordagem frequentista baseia-se na lei dos grandes números. A sua ideia de probabilidade é dada pela razão entre a frequência de um determinado evento e a quantidade de medições.

Já a estatística Bayesiana, fundamentada no teorema de Bayes, não necessita de repetições equiprováveis de medidas e sim utiliza-se de conhecimento prévio dos dados observados. Com os dados conhecidos a priori e a especificação de um modelo probabilístico descrito pela função de verossimilhança, podemos determinar a probabilidade posterior, permitindo-nos estimar os parâmetros do modelo com base nos dados observados.

Nas últimas décadas, devido ao avanço tecnológico, foi possível realizar medidas cosmológicas cada vez mais precisas e em maior quantidade. Para analisar essa grande quantidade de dados é comumente utilizado a estatística Bayesiana (GREGORY, 2005). A abordagem bayesiana é particularmente interessante para pesquisa em energia escura pois consegue combinar facilmente o resultado de diferentes observações e comparar diretamente varias parametrizações de energia escura.

#### 3.1 Teorema de Bayes

O teorema de Bayes é uma consequência dos axiomas da teoria da probabilidade. Considere que o espaço de probabilidades é dado pelo espaço amostral  $\Omega$ , pela classe de eventos  $\mathcal{F}$  e pela função  $P$  que calcula a probabilidade de cada evento  $\mathcal{F}$  de forma que respeite os três axiomas.

- **Axioma 1**  $0 \leq P(A) \leq 1$ , para todo evento  $A$
- **Axioma 2**  $P(\Omega) = 1$
- **Axioma 3** Para os eventos mutuamente excludentes  $A_1, A_2, \dots$ ,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots, \quad (3.1)$$

isto é, para todo  $i \neq j$ ,  $A_i \cap A_j = \emptyset$ . De forma geral temos que,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad (3.2)$$

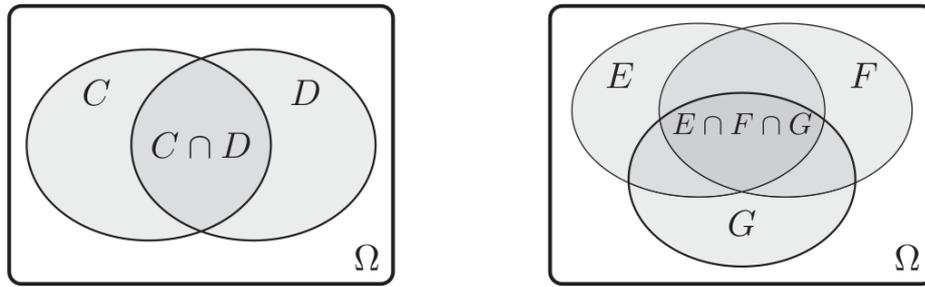


Figura 11 – Exemplo de união e interseção de conjuntos. Fonte: (FEIGELSON E., 2012)

Estes axiomas implicam que dado um evento  $A$ , a probabilidade do seu complementar  $A^c = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$ , é dado por,

$$P(A^c) = 1 - P(A). \quad (3.3)$$

Utilizando esse conceito e observando a figura 11 podemos estabelecer que para dois eventos  $C$  e  $D$ ,

$$P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D). \quad (3.4)$$

Assim como para três eventos  $E, F, G$ ,

$$P(E \cup F \cup G) = P(E) + P(F) + P(G) - P(E \cap F) - P(F \cap G) - P(E \cap G) + P(E \cap F \cap G). \quad (3.5)$$

Essa mesma lógica pode ser usada para  $n$  eventos.

O conceito de probabilidade condicional é de extrema importância na teoria de probabilidade. Assim como na definição do teorema de Bayes. Visando deixar claro esse conceito com base na teoria dos conjuntos utilizaremos um exemplo.

Considere um dado de seis lados, que é lançado apenas uma vez. A probabilidade de obtermos um dos números 1,2,3 é  $1/2$ , dado que cada um dos números são igualmente prováveis. Agora considere que alguém verificou o dado antes de você saber o número e disse que o número é ímpar. Os possíveis números ímpares possíveis constituem o conjunto  $B = 1,3,5$  no qual os números são igualmente prováveis. Considerando a informação prévia, sabemos que a probabilidade do número sorteado fazer parte do conjunto  $B$  é 1 e de seu complementar  $B^c$  é nula. Porém, apenas dois números de  $B$  fazem parte do conjunto  $A$ . Assim podemos escrever que a probabilidade de obtermos um número do conjunto  $A$  dado o conjunto  $B$  é,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad (3.6)$$

cujos resultados são  $2/3$ , no caso do exemplo acima. Porém, a equação 3.6 pode ser considerada uma definição formal de probabilidade condicional, mesmo no caso mais geral em que os resultados podem não ser equiprováveis.

Como consequência da equação 3.6 temos a regra da multiplicação para dois eventos,

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B). \quad (3.7)$$

A regra da multiplicação pode ser estendida para  $n$  eventos da seguinte forma,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)\dots P(A_{n-1}|A_1, \dots, A_{n-2}) \times P(A_n|A_1, \dots, A_{n-1}). \quad (3.8)$$

Antes de definirmos o teorema de Bayes deveremos observar outra regra que é essencial para sua obtenção. Considere a partição  $\Omega$  constituída por um conjunto de  $k$  subpartições  $B_1, \dots, B_k$  que são mutuamente excludentes, isto é,  $B_i \cap B_j = \emptyset$  para todo  $i \neq j$ . Sendo  $A$  um evento em  $\Omega$ , para calcular sua probabilidade  $P(A)$  devemos calcular a probabilidade de  $A$  em cada uma das subpartições  $B_i$  e soma-las,

$$P(A) = P(A \cap B_1) + \dots + P(A \cap B_k). \quad (3.9)$$

Usando a regra da multiplicação 3.8 temos que a  $P(A)$  pode ser escrito como,

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + \dots + P(A|B_k)P(B_k). \quad (3.10)$$

A equação 3.10 conhecida como lei da probabilidade total.

Assim finalmente podemos definir o teorema de Bayes da seguinte forma.

**Teorema de Bayes** Considere  $B_1, B_2, \dots, B_k$  como partições de um espaço amostral, onde  $i = 1, \dots, k$ ,

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A|B_1)P(B_1) + \dots + P(A|B_k)P(B_k)}, \quad (3.11)$$

o qual foi obtido diretamente da aplicação dos três axiomas da probabilidade definidos no início desta seção.

Para as aplicações na cosmologia que desenvolveremos no presente trabalho iremos adotar interpretações mais particulares para as probabilidades. Considere na equação 3.11 que  $A$  represente um observável  $X$  e  $B$  represente o espaço de modelos  $M$  que depende de um vetor de parâmetros  $\theta$ . Portanto, reescrevemos o teorema de Bayes da seguinte forma,

$$P(M_i(\theta)|X) = \frac{P(X|M_i(\theta))P(M_i(\theta))}{P(X|M_1(\theta))P(M_1(\theta)) + \dots + P(X|M_k(\theta))P(M_k(\theta))}. \quad (3.12)$$

Onde as probabilidades podem ser interpretadas da seguinte forma,

- $P(M_i(\theta)|X) \rightarrow$  é a probabilidade condicional de obter os valores dos parâmetros teóricos do  $i$ -ésimo modelo tendo medido o observável  $X$ . Esta distribuição é chamada de probabilidade posterior.
- $P(X|M_i(\theta)) \rightarrow$  é a probabilidade condicional de obter o observável  $X$  para o  $i$ -ésimo modelo. Esta distribuição é chamada de função de verossimilhança ou *Likelihood* em inglês.
- $P(M_i(\theta)) \rightarrow$  é a probabilidade marginal do  $i$ -ésimo modelo. Como ela é dada independente dos dados é conhecida como probabilidade a priori ou simplesmente *prior*.

- O denominador da equação é o fator de normalização também conhecido como evidência Bayesiana. Podendo ser escrito como,

$$P(X) = \sum_{i=1}^k P(X|M_i(\theta))P(M_i(\theta)). \quad (3.13)$$

Assim,  $P(X)$  fornece a probabilidade total de se obter o observável  $X$ .

O teorema de Bayes através de uma sequencia lógica nos permite atualizarmos nosso conhecimento sobre um modelo teórico ao incluirmos novos dados experimentais. Partindo de um estado prévio de conhecimento (a priori) do modelo para um estado novo de conhecimento (a posteriori). Esse processo de atualização de confiança é conhecido como inferência Bayesiana.

A principal crítica feita a abordagem Bayesiana é o subjetivismo, devido à liberdade na escolha dos *priors* e o mesmo ser fundamental na estatística Bayesiana. Porém, devemos tratar essa questão como uma característica da abordagem Bayesiana e não como uma limitação. No nosso caso os *priors* são obtidos através de experimentos prévios. Considere que graças a esses experimentos podemos descartar intervalos nos quais a densidade de matéria atual no universo seja muito pequena,  $\Omega_m^{(0)} < 0.1$ . Assim podemos utilizar essa informação para escrever que,

$$P(\Omega_m^{(0)} < 0.1) = 0. \quad (3.14)$$

Considere também que acreditamos que  $h = 0.72 \pm 0.08$ , então podemos usar  $P(h)$  como uma Gaussiana centrada em 0.72 e desvio padrão de 0.08. Esta seria uma distribuição típica de um *prior*. Também podemos escolher um *prior* uniforme, no qual para um determinado parâmetro  $\theta$  dentro de um intervalo, sua probabilidade é  $P(\theta) = 1$  e fora desse intervalo é nula.

### 3.2 Função de verossimilhança

A inferência de parâmetros consiste basicamente em escolhermos um modelo  $M$  contendo um conjunto de parâmetros  $\theta$ . Os parâmetros devem descrever algum aspecto do modelo e representar alguma quantidade física. Além do modelo devemos especificar os *priors* para cada parâmetro.

Podemos escrever a função de verossimilhança da seguinte forma,

$$\mathcal{L}(\theta|X) = P(X|\theta, M). \quad (3.15)$$

E assim podemos reescrever o teorema de Bayes em função de  $\mathcal{L}(\theta|X)$ ,

$$P(\theta|X, M) = \frac{\mathcal{L}(\theta)P(\theta|M)}{P(X|M)}. \quad (3.16)$$

Normalizando a distribuição posterior à unidade, obtemos a evidência Bayesiana,

$$P(X|M) = \int \mathcal{L}(\theta)P(\theta|M)d\theta. \quad (3.17)$$

Dado que nosso objetivo é a inferência de parâmetros, a probabilidade  $P(X|M)$  não terá grande contribuição pois atua apenas como constante de normalização. Logo,

$$P(\theta|X, M) \propto \mathcal{L}(\theta)P(\theta|M) \quad (3.18)$$

Buscando obter o conjunto de parâmetros teóricos  $\hat{\theta}_i$  que melhor descreva os dados experimentais de maneira global devemos maximizar a função de verossimilhança,

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\theta_i|X)}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.19)$$

onde  $n$  é a quantidade de parâmetros.

Se quisermos maximizar o ajuste de um parâmetro específico,  $\theta_e$ , devemos marginalizar a posterior em relação a todos os outros parâmetros,

$$P(\theta_e|X) = \int \dots \int P(\theta|X) d\theta_1 \dots d\theta_{e-1} d\theta_{e+1} \dots d\theta_n \quad (3.20)$$

As regiões de confiança,  $R(\alpha)$  são determinadas através da integral,

$$\int_{R(\alpha)} \frac{P(\theta_i|X) d\theta_i}{N} = \alpha, \quad (3.21)$$

onde  $N$  é o fator de normalização. Determinado pela integração da posterior sobre todo o espaço de parâmetros,

$$N = \int p(\theta_i|X) d^n \theta_i \quad (3.22)$$

Os valores de  $\alpha$  na equação 3.21 determinam o grau de confiança nas estimativas dos parâmetros para cada  $R(\alpha)$ . Normalmente os valores de  $\alpha$  são determinados em termos de  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  e  $3\sigma$  que são respectivamente 0.683, 0.954, 0.997.

Considerando que os dados  $X$  são obtidos através da medida de uma quantidade física  $\gamma$  com o respectivo desvio padrão  $\sigma$ . No qual podemos definir o valor dessas medidas estipulados pelo modelo,  $\gamma_{teo}$ , assim como o valor observado dessa quantidade física  $\gamma_{obs}$  medido uma quantidade  $m$  de vezes. Se a distribuição dos dados segue uma Gaussiana temos que a função de verossimilhança é dada por,

$$\mathcal{L}(\gamma|\theta) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} |\det C|^{1/2}} \exp \left[ - \frac{(\vec{\gamma}_{obs} - \vec{\gamma}_{teo})^T C^{-1} (\vec{\gamma}_{obs} - \vec{\gamma}_{teo})}{2} \right] \quad (3.23)$$

onde  $C$  é a matriz de covariância desses dados.

Supondo que os dados são não correlacionados, a matriz de covariância é diagonal e dada por  $C_{jj} = 1/\sigma_j^2$ . E assim podemos reescrever sua função de verossimilhança da seguinte forma,

$$\mathcal{L}(\gamma|\theta_i) = \prod_{j=1}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_j^2}} \exp \left[ - \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma_{obs}^j - \gamma_{teo}(\theta_i)}{\sigma_j} \right)^2 \right]. \quad (3.24)$$

No qual o logaritmo dessa função é,

$$\ln \mathcal{L}(\gamma|\theta_i) = - \sum_{j=1}^m \frac{(\gamma_{obs}^j - \gamma_{teo}(\theta_i))^2}{2\sigma_j^2} - \sum_{j=1}^m \ln \sqrt{2\pi\sigma_j^2}. \quad (3.25)$$

Para encontrarmos o conjunto de parâmetros  $\theta_i$  que melhor descreve os dados medidos devemos maximizar a função de verossimilhança ou simplesmente minimizar a função  $\chi^2$  definida como,

$$\chi^2 \equiv -2 \ln \mathcal{L}(\gamma|\theta_i) \equiv \sum_{j=1}^m \frac{(\gamma_{obs}^j - \gamma_{teo}(\theta_i))^2}{\sigma_j^2} \quad (3.26)$$

no qual consideremos que  $\sigma_j$  é independente dos parâmetros  $\theta_i$ .

Minimizando  $\chi^2$  obtemos que o valor de  $\gamma$  que melhor descreve os dados observados é,

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \gamma_{obs}^j. \quad (3.27)$$

O mesmo pode ser dado para a variância,

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (\gamma_{obs}^j - \hat{\gamma})^2. \quad (3.28)$$

### 3.3 Monte Carlo Markov Chain

Na seção anterior aprendemos de forma analítica a maximizar a função de verossimilhança com o intuito de obter os valores dos parâmetros que melhor descrevem um determinado conjunto de dados. Porém, realizar tais cálculos em modelos com um elevado número de parâmetros multidimensionais, torna-se impraticável, mesmo numericamente, devido a enorme quantidade de integrais que devem ser realizadas para explorar todo o espaço de parâmetros.

Neste caso existe um método computacional conhecido como *Monte Carlo Markov Chain* (MCMC), no qual dado uma posterior qualquer, esse método nos retorna um número  $N_{amostras}$  de pontos do espaço de parâmetros  $\{\gamma_{\alpha}^i\}_{i=1}^N$  que são estatisticamente independentes entre si e sua distribuição segue a posterior.

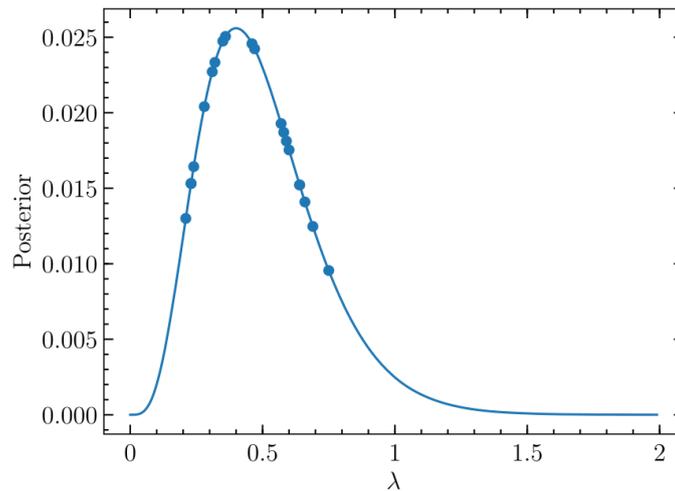


Figura 12 – A curva azul representa a probabilidade posterior do parâmetro  $\lambda$ . E os pontos azuis são amostras de pontos sorteados com base na forma da posterior. Com um número suficiente de amostras teremos que a média e o desvio padrão desse conjunto de amostras será bem próximo ao valores obtidos na curva analítica da distribuição posterior. Fonte: (DODELSON S., 2020)

Considerando essa característica do conjunto de amostras podemos estimar o melhor valor do parâmetro  $\gamma_\alpha$ ,

$$\hat{\gamma}_\alpha = \frac{1}{N_{amostras}} \sum_{i=1}^{N_{amostras}} \gamma_\alpha^i, \quad (3.29)$$

e de sua variância  $\sigma_\alpha$ ,

$$\hat{\sigma}_\alpha = \frac{1}{N_{amostras}} \sum_{i=1}^{N_{amostras}} (\gamma_\alpha^i - \hat{\gamma}_\alpha)^2. \quad (3.30)$$

Devemos notar que no limite em que  $N_{amostras}$  seja muito grande os valores de  $\hat{\gamma}_\alpha$  e  $\hat{\sigma}_\alpha$  convergem para os valores analíticos. Nesse momento podemos considerar esse histograma de amostras como sendo a distribuição de probabilidade do parâmetro  $\gamma$ . Podendo calcular facilmente seu máximo local e também derivar seus intervalos de confiança.

O nome do método de *Monte Carlo Markov Chain* nos dá algumas dicas de como é realizada esse processo de explorar o espaço de parâmetros do modelo. Primeiramente o nome "Monte Carlo" se deve ao fato de utilizarmos um gerador de números aleatórios. Já o nome "Markov Chain" significa que consideramos a evolução do sistema físico como um processo Markoviano, onde cada nova amostra  $\gamma^{i+1}$  do sistema depende apenas da anterior  $\gamma^i$ , por isso o nome "Chain" que em inglês significa cadeia ou corrente.

Considerando essa natureza Markoviana do sistema físico o algoritmo por trás do método de MCMC deve ser completamente descrito pela probabilidade condicional  $K(\gamma'|\gamma)$ , da amostra  $\gamma$  para a seguinte  $\gamma'$ . Esta probabilidade condicional deve obedecer a seguinte condição,

$$P(\gamma)K(\gamma'|\gamma) = P(\gamma')K(\gamma|\gamma'), \quad (3.31)$$

onde  $P(\gamma)$  é a probabilidade posterior de  $\gamma$ .

A expressão 3.31 determina a igualdade de probabilidade de dado a amostra  $\gamma$  obter  $\gamma'$  e vice versa, caracterizando assim um processo reversível típico de sistemas em equilíbrio.

Podemos caracterizar a probabilidade condicional  $K(\gamma|\gamma')$  através do algoritmo de Metropolis-Hasting desenvolvido pelos físicos N. Metropolis, A. Rosenbluth, M. Rosenbluth, A. Telles e E. Telles na década de 1950 como um método de simulação de fluídos. Para selecionar o valor de  $\gamma'$  utilizamos uma distribuição de probabilidade  $g(\gamma', \gamma)$  centrada em  $\gamma$  e simétrica. O exemplo mais simples de função com essas características é a Gaussiana,

$$g(\gamma', \gamma) \propto \exp \frac{-(\gamma - \gamma')^2}{2\sigma^2}. \quad (3.32)$$

Neste caso, temos que a proposta  $\gamma'$  será aceita como o próximo passo na cadeia de Markov com a seguinte probabilidade,

$$p_{ac}(\gamma', \gamma) = \min \left\{ \frac{P(\gamma')}{P(\gamma)}, 1 \right\}. \quad (3.33)$$

A equação 3.33 determina que ao calcular o valor da probabilidade posterior da proposta  $\gamma'$  e do atual valor de  $\gamma$  devemos analisar a razão entre essas probabilidades,

$$\alpha \equiv \frac{P(\gamma')}{P(\gamma)}. \quad (3.34)$$

E caso  $\alpha > 1$  a proposta  $\gamma'$  será aceita como o próximo passo na cadeia. Se  $\alpha < 1$  devemos sortear um número aleatório entre zero e um. Caso esse número sorteado seja menor que  $\alpha$  a proposta  $\gamma'$  será aceita. Caso contrário, a proposta  $\gamma'$  é rejeita e devemos repetir o valor de  $\gamma$  na cadeia e sortear novamente uma nova proposta.

Em alguns casos o algoritmo de Metropolis-Hasting pode ser ineficiente em explorar o espaço de parâmetros devido ao sorteio de propostas  $\gamma'$  gerada pela função  $g(\gamma, \gamma')$  serem rejeitados em grande número. Considere o caso da distribuição Gaussiana, o parâmetro  $\sigma$  na equação 3.32 é livre. Caso o valor de  $\sigma$  seja muito pequeno o algoritmo irá demandar um longo período para mapear a posterior ou até mesmo convergir para um máximo local da posterior, dando uma falsa perspectiva do melhor valor do parâmetro do modelo. Por outro lado se esse valor for muito grande, teremos um grande número de propostas  $\gamma'$  rejeitadas.

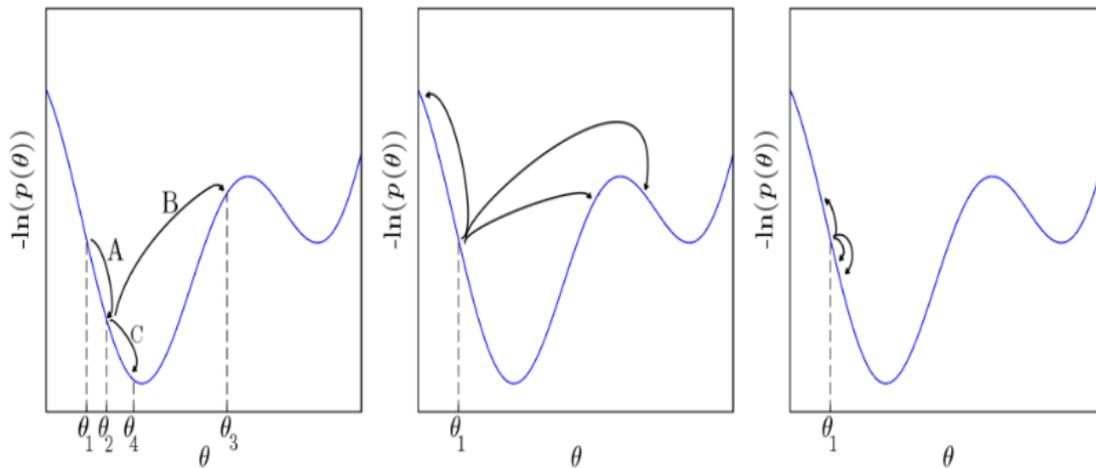


Figura 13 – Figura que representa a evolução dos parâmetros em um algoritmo de Metropolis-Hasting. **Esquerda:** A cadeia inicia em  $\theta_1$  e a proposta de movimento (A) é aceita para o ponto  $\theta_2$ . Então é proposto um movimento para a posição  $\theta_3$  que é recusada. Novamente no ponto  $\theta_2$  é realizada uma proposta (C) para o ponto  $\theta_4$  que é aceita. **Centro:** Exemplo de propostas de movimentos no espaço de fase muito longos. **Direita:** Exemplo de proposta de movimentos no espaço de fase muito curtos. Nesses dois exemplos o espaço de fase não é explorado corretamente. **Fonte:** (LECLERCQ; PISANI; WANDEL, 2014)

Buscando resolver esse problema, algoritmos modernos de Metropolis-Hasting utilizam de uma técnica dinâmica para escolher o tamanho do passo durante o período inicial de estabilização da Cadeia de Markov. Existem outros algoritmos que realizam o método de MCMC porém o Metropolis-Hasting é o algoritmo padrão no software MontePython (BRINCKMANN; LESGOURGUES, 2019). Este software utiliza a técnica de MCMC para inferir parâmetros cosmológicos, no qual utilizamos no decorrer desta dissertação. O MontePython trabalha em conjunto com o software CLASS (*Cosmic Linear Anisotropy Solving System*) (Blas; Lesgourgues; Tram, 2011) e sua extensão HiCLASS (ZUMALACÁRREGUI et al., 2017). Ambos os códigos tem o intuito de calcular a evolução de perturbações cosmológicas no regime linear. Porém, o CLASS considera apenas a Relatividade Geral como modelo de gravitação e o HiCLASS inclui modelos de gravitação de Horndeski.

## 4 SIRENE PADRÃO

Medir distância é um tema central na cosmologia moderna dado que esse ramo da ciência propõe-se a estudar o universo e suas estruturas cuja distância ao nosso planeta são ordens de grandeza maiores que as dimensões comumente analisadas em laboratórios. Como podemos observar no capítulo 1 existem várias definições de distância na cosmologia que levam em consideração a expansão do universo e as ferramentas disponíveis aos cientistas para realizar suas medidas.

Um dos parâmetros que constitui o modelo padrão da cosmologia é a taxa de expansão do universo atualmente, caracterizado pela constante de Hubble. Para medirmos esse parâmetro necessitamos apenas do desvio para o vermelho do comprimento de onda eletromagnética emitido pelo objeto celeste e também de sua distância.

Porém, determinar distâncias de corpos celestes não é uma tarefa simples. Para objetos próximos podemos utilizar o método de paralaxe no qual baseia-se na comparação de duas observações de um corpo celeste feitas a partir da Terra em dois momentos cujo o tempo de observação tenha a diferença de seis meses para obter a diferença angular causada pelo movimento de translação da Terra em relação ao corpo celeste observado. Para objetos mais distantes esse método mostra-se inapropriado pois a paralaxe é extremamente pequena. Então em distâncias maiores podemos utilizar estrelas Cefeidas cuja luminosidade varia de maneira periódica e através da análise dessas variações é possível determinar sua luminosidade intrínseca e assim calcular sua distância luminosidade através da equação 1.55. Para distâncias ainda maiores utilizamos Supernovas Tipo Ia como velas padrões devido ao comportamento bem característico de sua curva de luz. Essas medidas de distância são sempre calibradas utilizando a anterior, por exemplo, algumas estrelas Cefeidas estão próximas o suficiente para sua distância também ser estimada pelo método de paralaxe e assim calibrar o método que utiliza a sua variação de brilho. Da mesma forma podemos utilizar estrelas Cefeidas para calibrar medidas de Supernovas Tipo Ia, esse encadeamento de medidas cada vez mais distantes pode ser visualizado como uma escada cosmológica de medidas.

Em 1986 Bernard F. Schutz previu que com a detecção de ondas gravitacionais geradas pela colisão de duas estrelas de Nêutrons de massa similar a do Sol poderíamos, junto com o *redshift*, determinar com precisão a distância no qual esses objetos se encontram da Terra. Transformando esses eventos em Sirenes Padrões em analogia ao termo Velas Padrões. Porém, apenas em 14 de setembro de 2015 foi detectada a primeira onda gravitacional, que foi gerada pela colisão de dois buracos negros assim não sendo possível detectar a contra parte eletromagnética desse evento.

Em 2017 foi realizado a detecção GW170817 de ondas gravitacionais geradas por um par de estrelas de nêutrons com massa similar a do Sol e também foi medido o *redshift* da fonte emissora dessa onda. Utilizando uma análise Bayesiana desse único evento foi possível estimar a constante de Hubble  $H_0 = 70_{-8}^{+12} km s^{-1} Mpc^{-1}$  (ABBOTT et al., 2017). O erro associado a essa medida ainda é bem grande pois utiliza uma única detecção.

A detecção de ondas gravitacionais expandiu os horizontes da cosmologia moderna pois agora podemos observar eventos antes completamente incapazes de serem detetados e estudados. Visando aumentar nosso conhecimento do universo através das ondas gravitacionais novos detectores foram planejados para serem mais precisos e sensíveis nessas detecções, como o Einstein Telescope (MAGGIORE et al., 2020a) e o LISA (HOLLEY-BOCKELMANN et al., 2020). O primeiro será um detector construído na Terra composto por três interferômetros dispostos de maneira triangular já o segundo projeto pretende ser um interferômetro disposto em órbita da Terra, ambos tem previsão para entrarem em funcionamento na década de 2030.

#### 4.1 Equações de Einstein linearizadas

As equações de campo de Einstein descrevem a interação entre o espaço-tempo e uma determinada distribuição de matéria e energia. Devido a equação utilizar-se de notação tensorial devemos solucionar-lá termo a termo, logo existem um conjunto de 16 equações diferenciais parciais no caso geral. Porém, considerando-se algumas simetrias do espaço-tempo podemos reduzir a quantidade e complexidade dessas equações. A métrica de Schwarzschild assim como a de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker são exemplos de métricas que utilizam-se de simetrias do espaço-tempo para simplificar consideravelmente as equações de Einstein.

Existem eventos no universo de grande complexidade descritiva que inviabilizam a utilização de métricas perfeitamente isotrópicas e homogêneas como a colisão entre buracos negros ou estrelas de nêutrons. Esses eventos de grande energia produzem ondas gravitacionais que se propagam por longas distâncias e podem ser detectadas na Terra. Devido à grande distância que estamos dessas grandes colisões podemos considerar a onda gravitacionais como uma pequena perturbação na métrica de Minkowski, trabalhando assim no regime de campo fraco no qual o espaço-tempo é quase plano.

Ao reescrevermos a equação de Einstein nesse regime de campo fraco com pequenas perturbações podemos mostrar que a equação de Einstein se comporta como uma equação de onda. Com a comprovação experimental de que existem ondas gravitacionais e dada a sua capacidade de ser uma fonte independente de medidas astrofísicas e cosmológicas, novos detectores maiores e mais sensíveis estão sendo projetados para que nas próximas décadas obtenhamos um grande número de medidas de ondas gravitacionais e assim auxiliar no vínculo de parâmetros do modelo cosmológico.

O processo de linearização das equações de Einstein consiste em propor uma pequena perturbação na métrica que seja solução das equações de Einstein. O fato da perturbação ser pequena faz com que termos de ordens maiores que os lineares nas equações de Einstein sejam desconsiderados.

Devemos primeiramente definir a equação de Einstein,

$$G^{\alpha\beta} = 8\pi T^{\alpha\beta}, \quad (4.1)$$

na qual utilizamos unidades geométricas, ou seja,  $G = c = 1$  e consideramos que a constante cosmológica é nula.

Considerando que estamos no regime de campo fraco, propomos uma métrica  $g_{\alpha\beta}$  como a métrica de Minkowski mais uma pequena perturbação,

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad (4.2)$$

onde definimos que está perturbação deva ser pequena de forma que  $|h_{\alpha\beta}| \ll 1$ .

Visando obter um novo sistema de coordenada no qual a equação (4.2) mantenha-se imutável, definimos os conjuntos de coordenadas  $x^{\alpha'}$  em termos da coordenada antiga  $x^\alpha$  somada a função  $\xi^\alpha(x^\beta)$ ,

$$x^{\alpha'} = x^\alpha + \xi^\alpha(x^\beta). \quad (4.3)$$

Exigimos que a perturbação seja pequena de forma que  $|\xi_{,\beta}^\alpha| \ll 1$ , onde a virgula representa a derivada parcial em função dos parâmetros  $x^\beta$ , isto é,  $\xi_{,\beta}^\alpha \equiv \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta}$ .

Seguindo a lei de transformação tensorial temos que a métrica no novo sistema de coordenadas deve ser dada por,

$$g_{\alpha'\beta'} = \Lambda_{\alpha'}^\mu \Lambda_{\beta'}^\nu g_{\mu\nu} \quad (4.4)$$

Analisando a equação 4.3 temos que,

$$\Lambda_{\beta'}^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta} = \delta_{\beta}^{\alpha} + \xi_{,\beta}^{\alpha} \quad (4.5)$$

$$\Lambda_{\beta'}^{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\beta'}} = \delta_{\beta'}^{\alpha} - \xi_{,\beta'}^{\alpha} + O(2) \quad (4.6)$$

Substituindo essas expressões na equação 4.4 e considerando apenas termos em primeira ordem em  $\xi$ ,

$$g_{\alpha'\beta'} = (\delta_{\alpha}^{\mu} - \xi_{,\alpha}^{\mu})(\delta_{\beta}^{\nu} - \xi_{,\beta}^{\nu})(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) \quad (4.7)$$

Considerando apenas termos lineares na perturbação de coordenadas temos que equação (4.2) no novo sistema de coordenadas pode ser escrito como,

$$g_{\alpha'\beta'} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha}, \quad (4.8)$$

Analisando a transformação apenas da métrica perturbada temos que,

$$h_{\alpha\beta} \rightarrow h_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha}. \quad (4.9)$$

O tensor de Riemman, importante constituinte das equações de Einstein, nesse regime linear é dados por,

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}(h_{\alpha\nu,\beta\mu} + h_{\beta\mu,\alpha\nu} - h_{\alpha\mu,\beta\nu} - h_{\beta\nu,\alpha\mu}) \quad (4.10)$$

Dado que o tensor  $h_{\alpha\beta}$  é tratado como apenas uma pequena perturbação na métrica plana de Minkowski podemos realizar levantamento e abaixamento de índices com a métrica de Minkowski,

$$h_{\beta}^{\mu} := \eta^{\mu\alpha} h_{\alpha\beta}, \quad (4.11)$$

$$h^{\mu\nu} := \eta^{\nu\beta} h_{\beta}^{\mu}, \quad (4.12)$$

por definição o traço de  $h_{\alpha\beta}$  é dado pela contração dos seus índices,

$$h := h^{\alpha}_{\alpha}. \quad (4.13)$$

As equações de Einstein podem ser escritas de forma mais compacta se utilizarmos o traço reverso de  $h_{\alpha\beta}$  definido como,

$$\bar{h}^{\alpha\beta} := h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}h. \quad (4.14)$$

Este nome característico pode ser compreendido ao observamos que,

$$\bar{h}^{\alpha\beta} := \bar{h}^{\alpha}_{\alpha} = -h. \quad (4.15)$$

Dada a relação 4.15 podemos escrever a equação 4.14 da seguinte forma,

$$h^{\alpha\beta} = \bar{h}^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\bar{h}. \quad (4.16)$$

Ao escrevermos a perturbação  $h^{\alpha\beta}$  em função de  $\bar{h}^{\alpha\beta}$  podemos escrever o tensor de Einstein da seguinte forma,

$$G_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\left[\bar{h}_{\alpha\beta,\mu}{}^{,\mu} + \eta_{\alpha\beta}\bar{h}_{\mu\nu}{}^{,\mu\nu} - \bar{h}_{\alpha\mu,\beta}{}^{,\mu} - \bar{h}_{\beta\mu,\alpha}{}^{,\mu} + O(h_{\alpha\beta}^2)\right]. \quad (4.17)$$

Devemos notar que a equação 4.17 assume uma forma mais simples se a seguinte condição for satisfeita,

$$\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0. \quad (4.18)$$

Tal condição é conhecida como condição de calibre de Lorentz. Devido a liberdade que temos sobre as funções  $\xi^{\alpha}$  podemos sempre encontrar uma métrica que satisfaça a equação 4.18.

Para mostrar esta propriedade, suponha que em um determinado sistema de coordenada  $\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} \neq 0$ . Sabemos que podemos usar a equação 4.9 para determinar uma nova perturbação  $\check{h}_{\mu\nu}$  da seguinte forma,

$$\check{h}_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu}\xi^{\alpha}{}_{,\alpha}. \quad (4.19)$$

Calculando o divergente dessa equação temos,

$$\check{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = \bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} - \xi^{\mu,\nu}{}_{,\nu} \quad (4.20)$$

Buscando satisfazer a condição do calibre de Lorentz na nova métrica, a função  $\xi^\alpha$  deve satisfazer a seguinte condição,

$$\square \xi^\mu = \xi^{\mu,\nu}{}_{,\nu} = \bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} \quad (4.21)$$

Onde o operador de d'Alembert  $\square$  atuando sobre uma função qualquer  $f$  é descrito da seguinte forma,

$$\square f = \left( -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right) f, \quad (4.22)$$

onde podemos ver que este operador descreve a propagação de uma onda.

Finalmente podemos determinar que no calibre de Lorentz o tensor de Einstein é,

$$G^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \square \bar{h}^{\alpha\beta}. \quad (4.23)$$

E assim podemos escrever as equações de Einstein no regime de campo fraco e calibre de Lorenz como,

$$\square \bar{h}^{\mu\nu} = -16\pi T^{\mu\nu}. \quad (4.24)$$

Onde a métrica  $\bar{h}^{\mu\nu}$  se propaga como uma onda cuja fonte é o tensor de energia momento  $T^{\mu\nu}$ .

## 4.2 Propagação de ondas gravitacionais no vácuo

Sabemos que para analisar a propagação de ondas gravitacionais à grandes distâncias do seu local de origem devemos utilizar as equações de Einstein linearizadas no regime de campo fraco. Nesta seção iremos descrever a solução homogênea da equação 4.24, ou seja, analisaremos a propagação de ondas gravitacionais no vácuo.

Ao fazermos  $T^{\mu\nu} = 0$  na equação 4.24 temos,

$$\left( -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right) \bar{h}^{\alpha\beta} = 0. \quad (4.25)$$

Admitindo uma solução da forma de onda plana,

$$\bar{h}^{\alpha\beta} = \text{Re} \left[ A^{\alpha\beta} \exp(ik_\mu x^\mu) \right], \quad (4.26)$$

onde  $k_\mu$  são constantes reais e  $A^{\alpha\beta}$  são constantes complexas.

Podemos reescrever a equação 4.25 da seguinte forma,

$$\eta^{\mu\nu} \bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\mu\nu} = 0. \quad (4.27)$$

Substituindo a solução de onda plana 4.26 na equação 4.25 temos,

$$\eta^{\mu\nu} \bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\mu\nu} = -\eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu \bar{h}^{\alpha\beta} = 0 \quad (4.28)$$

Como a perturbação  $\bar{h}^{\alpha\beta}$  não pode ser nula. Devemos ter,

$$\eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = k^\nu k_\nu = 0. \quad (4.29)$$

Logo,  $k_\mu$  é um vetor nulo de Minkowski, propagando-se ao longo do cone de luz. É comum escrever o quadrivetor  $k^\mu$  como,

$$k^\mu \rightarrow (\omega, \mathbf{k}) \quad (4.30)$$

Graças a relação de nulidade de  $k_\mu$  descrita na equação 4.29, obtemos a relação de dispersão da onda,

$$\omega^2 = |\mathbf{k}|^2, \quad (4.31)$$

implicando no fato da onda gravitacional se propagar com a mesma velocidade da luz no vácuo.

Também temos o vínculo imposto pela equação de calibre de Lorenz,

$$\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0. \quad (4.32)$$

Ao substituímos a solução de onda plana e exigirmos que seja respeitado o calibre de Lorenz temos que,

$$A^{\alpha\beta} k_\beta = 0, \quad (4.33)$$

determinando que a propagação da onda é ortogonal a sua polarização, ou seja, a onda é transversa à direção de propagação.

Visando restringir os graus de liberdade da onda gravitacional devemos utilizar nossa liberdade de calibre para obtermos um novo sistema de coordenadas no qual,

$$\left( -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right) \xi_\alpha = 0. \quad (4.34)$$

É possível mostrar que no vácuo o calibre de Lorenz tem uma liberdade residual que nos possibilita impor condições extras sobre o tensor  $h^{\mu\nu}$  da seguinte forma,

$$h^i{}_{,i} = 0, \quad h_{\mu 0} = 0, \quad h^{ij}{}_{,i} = 0. \quad (4.35)$$

A equação (4.35) define o calibre transverso de traço nulo, abreviado como TT. Neste calibre temos apenas dois graus de liberdade para uma onda que se propague na direção  $z$ . Da condição de traço nulo, temos  $h_{xx} = -h_{yy} = h_+$  e da simetria da métrica, temos que  $h_{xy} = h_{yx} = h_\times$ . Os modos "+" e "×" correspondem as duas polarizações da onda gravitacional.

Assim podemos escrever o tensor de propagação de uma onda gravitacional na direção  $z$  e no calibre transverso de traço nulo da seguinte forma,

$$h_{\mu\nu}^{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cos[\omega(t - z)]. \quad (4.36)$$

Para analisar como a passagem de uma onda gravitacional interfere no comportamento das partículas devemos considerar duas partículas  $P_1$  e  $P_2$  em repouso. A partícula  $P_1$  encontra-se

na posição  $(t, 0, 0, 0)$  e  $P_2$  na posição  $(t, L, 0, 0)$ . Logo, ambas estão separadas pela distância  $L$  no referencial de calibre transverso de traço nulo.

A distância própria entre elas é,

$$\begin{aligned}
 s &\equiv \int |ds^2|^{1/2} = \int |g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta|^{1/2} & (4.37) \\
 &\equiv \int_0^L dx \sqrt{1 + h_+ \cos \omega t} \\
 &\approx L \left( 1 + \frac{1}{2} h_+ \cos \omega t \right)
 \end{aligned}$$

A equação 4.37 nos permite observar que a distância própria entre essas duas partículas varia em relação ao tempo. Também podemos observar que a variação da distância entre elas é proporcional à distância inicial  $L$ . Por isso os detectores de ondas gravitacionais devem ter comprimentos em escalas de quilômetros. E mesmo assim a oscilação provocada pela passagem da onda gravitacional é da ordem  $10^{-18}$ m, aproximadamente mil vezes menor que o raio de um próton.

### 4.3 Medidas com ondas gravitacionais

Eventos astrofísicos, como a colisão entre duas estrelas de nêutrons, são eventos que emitem uma enorme quantidade de energia nas quais podem ser liberadas de inúmeras formas incluindo a emissão de ondas gravitacionais.

Através da detecção dessas ondas gravitacionais e sua respectiva contraparte eletromagnética é possível determinar com grande precisão a distância luminosa da fonte. Essa característica na detecção de ondas gravitacionais provenientes de colisões de estrelas de nêutrons foi proposta por Bernard F. Schutz em 1986.

Esse sistema pode ser descrito por duas estrelas de massa  $m_1$  e  $m_2$  formando um par binário cuja distância entre eles é dado por  $R$  e o observador está à distância  $r$ . O observador encontra-se no eixo  $z$  e o plano orbital intercepta o eixo  $x$  com inclinação  $\iota$ , conforme figura

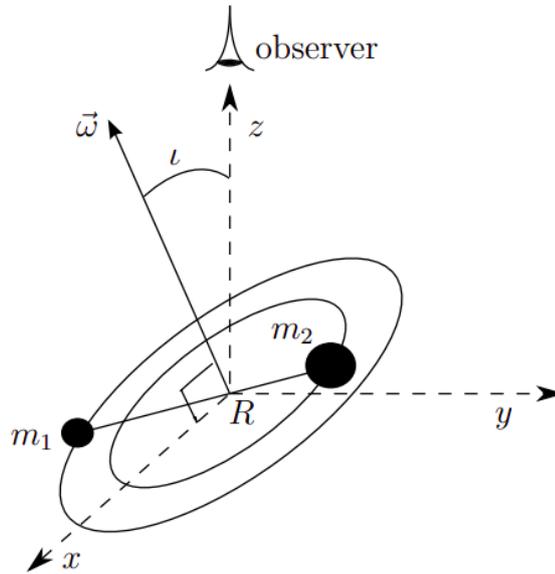


Figura 14 – Sistema binário cujas massas são  $m_1$  e  $m_2$  separadas pela distância  $R$  e observadas à distância  $r$  em relação ao eixo  $z$ . **Fonte:** (LI, 2015)

As duas polarizações geradas por esse sistema binário são (LI, 2015),

$$h_+ = \frac{4G\mathcal{M}_c^{5/3}\omega^{2/3}}{r} \frac{1 + \cos^2 \iota}{2} \cos(2\omega t) \quad (4.38)$$

$$h_\times = \frac{4(G\mathcal{M}_c)^{5/3}\omega^{2/3}}{r} \cos(\iota) \sin(2\omega t) \quad (4.39)$$

onde  $\mathcal{M}_c$  é conhecido como *Chirp Mass* (Massa de Gorjeio) (SATHYAPRAKASH; SCHUTZ, 2009) e definido como,

$$\mathcal{M}_c \equiv \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1 + m_2)^{1/5}}. \quad (4.40)$$

As equações 4.38 e 4.39 são escritas de forma independente de  $R$  graças a uma aproximação Newtoniana que relaciona a frequência orbital com o raio do sistema através da terceira lei de Kepler,

$$\omega^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{R^3}. \quad (4.41)$$

As ondas gravitacionais geradas por esse sistema binário retiram energia da órbita, o que causa a aproximação das componentes  $m_1$  e  $m_2$ , diminuindo o valor de  $R$  e aumentando a frequência orbital e consequentemente aumentando a energia perdida em ondas gravitacionais pelo sistema. Esse aumento da frequência das ondas gravitacionais é acompanhado de um aumento na amplitude das ondas, todo esse processo é chamado de gorjeio.

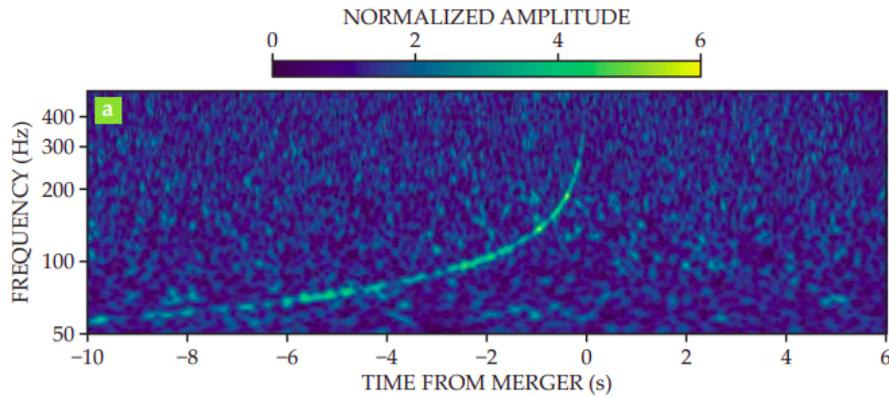


Figura 15 – Exemplo de gorjeio do evento GW170817, no qual ocorre a coalescência de duas estrelas de nêutrons. Podemos observar o aumento da frequência com o tempo e que a amplitude também segue esse padrão. **Fonte:** (Holz; Hughes; Shutz, 2018)

A taxa de variação orbital no tempo é dado por,

$$\dot{f} = \frac{96}{5}\pi^{8/3} f^{11/3} (GM_c)^{5/3} \quad (4.42)$$

onde  $f = \omega/2\pi$ . Realizando a integração obtemos,

$$f_{GW} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{5}{256\tau} \right)^{3/8} (GM_c)^{-5/8}, \quad (4.43)$$

onde  $\tau = t_0 - t$  sendo  $t_0$  o momento da coalescência. Observando a expressão 4.43 vemos que a frequência diverge até o infinito conforme o tempo  $t$  se aproxima do tempo de colisão. Devemos lembrar que esse tratamento é uma aproximação pois utilizamos a mecânica newtoniana e devido a altíssimas velocidades das estrelas durante a coalescência seria necessário um tratamento relativístico completo.

Para fontes que estejam a distâncias cosmológicas em um modelo descrito pela métrica de FLRW com curvatura nula devemos considerar fenômenos de expansão do universo. Logo, a distância  $r$  deve ser substituída por  $a(t_0)r$  e que a frequência também sofra um *redshift*  $\omega_{gw} = (1+z)\omega_{gw}^{obs}$ . E assim reescrevendo as amplitudes, chamadas de  $\mathcal{A}$ , das polarizações 4.38 e 4.39 levando em consideração esses efeitos cosmológicos,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{4(GM_c)^{5/3}(1+z)^{2/3}\omega_{obs}^{2/3}}{a(t_0)r} \\ &= \frac{4(GM_{c,obs})^{5/3}\omega_{obs}^{2/3}}{D_L}, \end{aligned} \quad (4.44)$$

onde a Massa de Gorjeio observada é dada por,

$$\mathcal{M}_{c,obs} \equiv (1+z)\mathcal{M}_c. \quad (4.45)$$

Utilizando a equação 4.44 podemos obter a distância luminosidade do sistema binário através de alguns parâmetros como a amplitude e frequência da onda gravitacional, a massa de

gorjeio e o *redshift* do sistema obtido através da localização da galáxia de origem. A grande importância desse resultado é que ele pode ser obtido por medidas diretas, sem necessidade de uma calibração utilizando outros métodos de medidas astrofísicos. Por esse motivo a detecção de ondas gravitacionais de sistemas binários é conhecido como Sirenes Padrões.

#### 4.4 Simulação do Einstein Telescope

O Einstein Telescope (ET) é uma proposta de observatório de ondas gravitacionais subterrâneo de terceira geração. Estima-se que o ET alcançará uma sensibilidade muito maior que os detectores atuais pois o comprimento dos braços utilizados para a interferometria serão de 10km, outras tecnologias também serão empregadas para aumentar a sensibilidade como a possibilidade de resfriar algumas óticas principais para até 10K e reduzir o ruído produzido por perturbações ambientais.

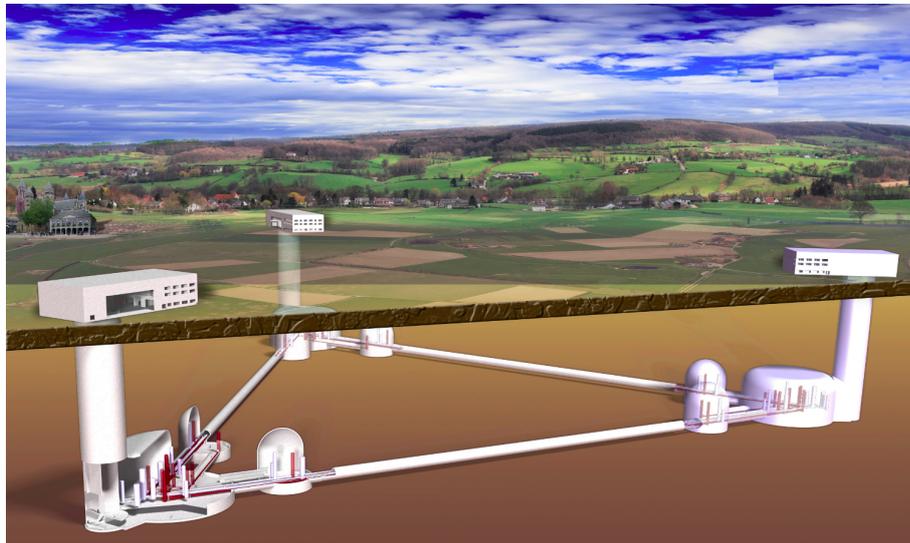


Figura 16 – Representação artística do projeto do Einstein Telescope **Fonte:** (PROJETO..., )

O ET possibilitará explorar o Universo por meio de ondas gravitacionais ao longo de sua história cósmica, esclarecendo questões em aberto na física e na cosmologia. Devido a grande sensibilidade e sua banda de frequências, o ET poderá detectar ondas gravitacionais geradas por colisões de toda a população de buracos negros de massa estelar e intermediária durante toda a evolução do Universo. Também permitirá compreender a natureza da matéria escura e energia escura além de realizar testes de modelos de gravitação modificada em escalas cosmológicas.

A previsão é de que o projeto inicie a fase de construção em 2026 com o objetivo de iniciar as observações em 2035. Porém, com simulações da sensibilidade pretendida desse observatório podemos estimar o quanto conseguiremos restringir parâmetros cosmológicos quando uma certa quantidade de medidas for obtidas. É justamente essa simulação e estimativa que iremos abordar nessa seção.

Uma maneira de verificar a consistência de um modelo de gravitação modificada frente os futuros dados do Einstein Telescope é simulando tais dados sabendo previamente a capacidade projetada do detector e seus possíveis erros instrumentais e inerentes a própria medida.

A primeira coisa que deve ser calculada são os erros de cada detecção. Podemos dividi-los em dois tipos, erro instrumental e erro devido ao lenteamento. O erro devido ao lenteamento (SATHYAPRAKASH; SCHUTZ; BROECK, 2010a) apresenta uma forma bem simples,

$$\sigma_{lens} \approx 0.05zD_L^{GW}, \quad (4.46)$$

onde  $D_L^{GW}$  é a distância luminosidade do evento determinada pela onda gravitacional e  $z$  é o *redshift* associado.

Já o erro instrumental necessita de mais detalhamento. Por isso começaremos com a detecção da onda gravitacional.

As ondas gravitacionais são detectadas pela deformação  $h(t)$  que causam na interferometria. Essa deformação pode ser decomposta em função da polarização da onda e em função da forma do detector,

$$h(t) = F_+(\theta, \phi, \psi)h_+(t) + F_\times(\theta, \phi, \psi)h_\times(t) \quad (4.47)$$

Dado que o Einstein Telescope consiste de três detectores distribuídos na forma de um triângulo equilátero, conforme a imagem abaixo.

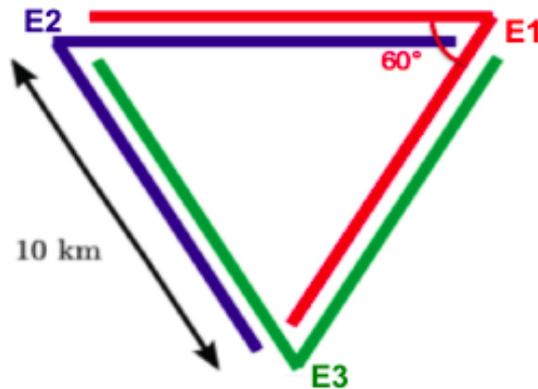


Figura 17 – Esquematização da configuração geométrica dos interferômetros do Einstein Telescope. **Fonte:** (REGIMBAU et al., 2012)

As suas funções  $F_+$  e  $F_\times$  dependem da forma geométrica que os braços dos interferômetros são posicionados e são determinadas da seguinte maneira para cada interferômetro,

$$F_+^{(1)}(\theta, \phi, \psi) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \cos^2 \theta \cos 2\phi \cos 2\psi - \cos \theta \sin 2\phi \sin 2\psi \right) \right] \quad (4.48)$$

$$F_\times^{(1)}(\theta, \phi, \psi) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \cos^2 \theta \cos 2\phi \cos 2\psi + \cos \theta \sin 2\phi \sin 2\psi \right) \right] \quad (4.49)$$

$$F_{+, \times}^{(2)}(\theta, \phi, \psi) = F_{+, \times}^{(1)}\left(\theta, \phi + \frac{2\pi}{3}, \psi\right) \quad (4.50)$$

$$F_{+, \times}^{(3)}(\theta, \phi, \psi) = F_{+, \times}^{(1)}\left(\theta, \phi + \frac{4\pi}{3}, \psi\right) \quad (4.51)$$

onde os ângulos  $\theta$  e  $\phi$  equivalem a posição polar e azimutal da fonte emissora na esfera celeste em relação ao detector, respectivamente. O ângulo  $\psi$  representa a polarização da onda gravitacional.

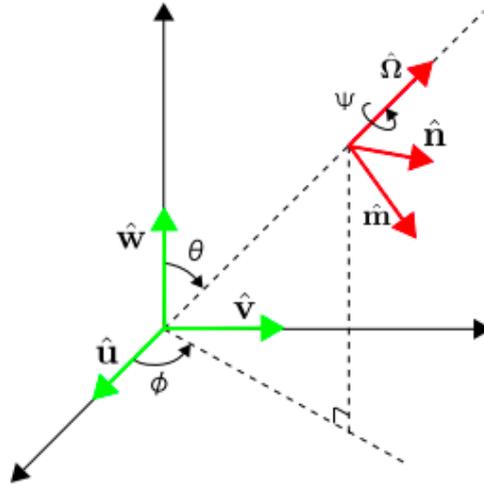


Figura 18 – Representação dos ângulos  $(\theta, \phi)$  que localizam a origem da onda gravitacional e o ângulo  $\psi$  que determina a sua polarização. **Fonte:** (YUNES; SIEMENS, 2013)

Trataremos  $h(t)$  no espaço de Fourier. Sua transformada é (SATHYAPRAKASH; SCHUTZ; BROECK, 2010b), (ZHAO et al., 2011a):

$$\mathcal{H}(f) = Af^{-7/6} \exp \left[ i(2\pi ft_0 - \frac{\pi}{4} + 2\Psi(f/2) - \varphi_{(0,2)}) \right] \quad (4.52)$$

onde  $t_0$  é uma constante dada pelos dados fiduciais e na nossa simulação usamos  $t_0 = 0$ .

A amplitude da onda gravitacional no espaço de Fourier é dado por,

$$A = \frac{1}{D_L^{GW}(z)} \sqrt{F_+^2(1 + \cos^2 \iota)^2 + 4F_\times^2 \cos^2 \iota} \sqrt{\frac{5\pi}{96}} \pi^{-7/6} \mathcal{M}_{c,obs}^{5/6}, \quad (4.53)$$

onde  $\iota$  é inclinação do momento orbital em relação a linha de visada conforme observado na figura 14 e  $\mathcal{M}_{c,obs}$  é a massa de gorjeio observada

$$\mathcal{M}_{c,obs} = (1 + z)\mathcal{M}_c. \quad (4.54)$$

Na equação 4.52 o termo  $\Psi$  é dado por (POISSON; WILL, 1995),

$$\Psi(f) = \psi_0 + \frac{3}{256\eta} \sum_{i=0}^7 \psi_i (2\pi Mf)^{i/3} \quad (4.55)$$

onde  $\psi_i$  são os coeficientes da expansão pós-Newtoniana (BLANCHET, 2014).

Além disso a função  $\varphi_{(2,0)}$  é dada por,

$$\varphi_{(2,0)} = \arctan \left( \frac{-2 \cos \iota F_{\times}}{(1 + \cos^2 \iota F_{+})} \right) \quad (4.56)$$

Assim definimos o erro instrumental da seguinte forma (HOGG; MARTINELLI; NESSE-  
RIS, 2020),

$$\sigma_{inst}(D_L^{GW}) \approx \frac{2D_L^{GW}}{\rho} \quad (4.57)$$

onde  $\rho$  é a combinação do sinal ruído dos três interferômetros do ET, isto é,  $\rho^2 = \sum_i \rho_i^2$  e,

$$\rho_i = \sqrt{\langle \mathcal{H}_i, \mathcal{H}_i \rangle} = \left[ 4 \int_{f_{lower}}^{f_{upper}} \mathcal{H}(f) \mathcal{H}^*(f) \frac{df}{S_h(f)} \right]^{1/2} \quad (4.58)$$

onde os limites de integração são:

$$f_{upper} = 2f_{LSO} = \frac{2}{6^{3/2} 2\pi M_{obs}} \quad (4.59)$$

onde a sigla LSO significa *Last Stable Orbit* e funciona como um limite máximo de corte determinado pelas observações e o limite inferior depende das capacidades e configurações do detector que no caso do Einstein Telescope é tomado por (SATHYAPRAKASH; SCHUTZ; BROECK, 2010b) (ZHAO et al., 2011b),

$$f_{lower} = 1Hz \quad (4.60)$$

A função  $S_h$  designa o espectro de potências do ruído (REGIMBAU et al., 2012),

$$S_h(f) = 10^{-50} h_n(f)^2 Hz^{-1} \quad (4.61)$$

sendo  $h_n$  dado por,

$$h_n(f) = 2.39 \times 10^{-27} x^{-15.64} + 0.349x^{-2.145} + 1.76x^{-0.12} + 0.409x^{1.10} \quad (4.62)$$

onde  $x = f/100Hz$ .

Simulamos 1000 eventos assumindo uma distribuição uniforme no céu ( $\theta, \phi$ ) no qual sorteamos aleatoriamente para cada detecção um valor de  $\theta$  dentro do intervalo  $[0, \pi]$  e um valor  $\phi$  no intervalo  $[0, 2\pi]$  representando a localização no céu da fonte de ondas gravitacionais. Para a distribuição desses eventos detectados em função do *redshift*, devemos usar a probabilidade (ZHAO et al., 2011b),

$$P(z) \propto \frac{4\pi r^2(z) R(z)}{H(z)(1+z)} \quad (4.63)$$

onde  $r(z)$  é a distância comóvel, e  $R(z)$  é a taxa de fusão de sistemas binários dada por (SCHNEIDER et al., 2001) (CUTLER; HOLZ, 2009),

$$R(z) = \begin{cases} 1 + 2z & \text{se } z \leq 1 \\ \frac{3}{4}(5 - z) & \text{se } 1 < z < 5 \\ 0 & \text{se } z \geq 5 \end{cases}$$

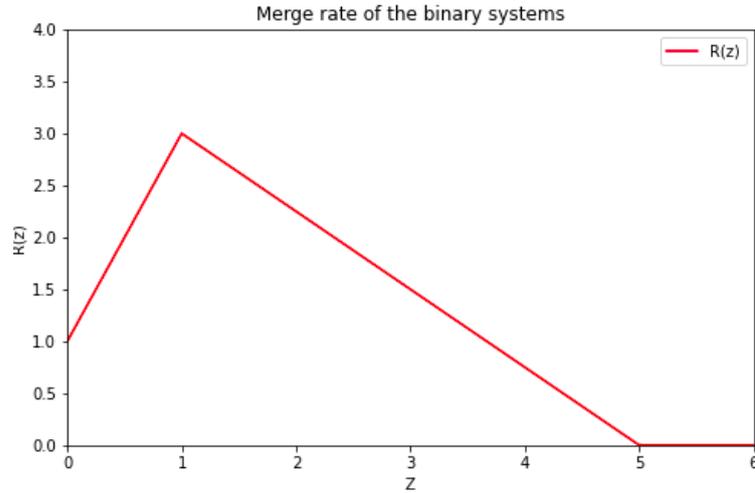


Figura 19 – Taxa de criação de eventos pela distância em *redshift*.

o qual pode ser observada na figura 19.

Sorteamos 1000 eventos com probabilidade  $P(z)$  e assim obtemos os  $z_i$  das observações. Para cada  $z_i$  temos um valor de  $D_L^{GW}$  fiducial. Escrevemos uma Gaussiana centrada em  $D_L^{GW}(z_i)$  com largura  $\sigma(D_L^{GW}) = \sqrt{\sigma_{inst}^2 + \sigma_{lens}^2}$  onde

$$\sigma_{inst} \approx \frac{2D_L^{GW}}{\rho}. \quad (4.64)$$

E como dito anteriormente o erro de lenteamento é dado por,

$$\sigma_{lens} \approx 0.05zD_L^{GW}. \quad (4.65)$$

Algumas pressuposições em relação ao Einstein Telescope foram consideradas no decorrer da simulação.

- Serão detectados 1000 eventos com contraparte eletromagnética em forma de Short  $\gamma$  Ray Bursts (SGRBs). As detecções de (SGRBs) implica que os sistemas estão orientados frente à frente. Por isso assumimos  $\iota = 0$ .

Como estimativa, consideramos que a massa de todos os sistemas detectados será:

$$m_1 = m_2 = 1.4M_\odot \quad (4.66)$$

onde  $M_\odot$  é massa solar.

Primeiramente verificamos o resultado da distribuição discreta  $R(z)$  de eventos.

Em seguida calculamos a função densidade de probabilidade para a criação do evento em determinado *redshift* e sorteamos 1000 eventos com peso  $P(z)$ . Como podemos ver no histograma abaixo.

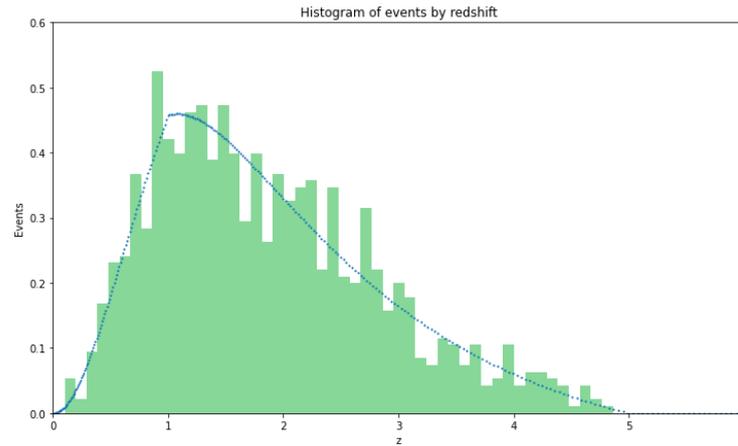


Figura 20 – Mil eventos distribuídos conforme a curva de probabilidade de detecção do Einstein Telescope, em azul.

Finalmente podemos observar os 1000 eventos de detecções de ondas gravitacionais simuladas pelo ET distribuídos em função da distância luminosidade e do *redshift* com suas respectivas barras de erro.

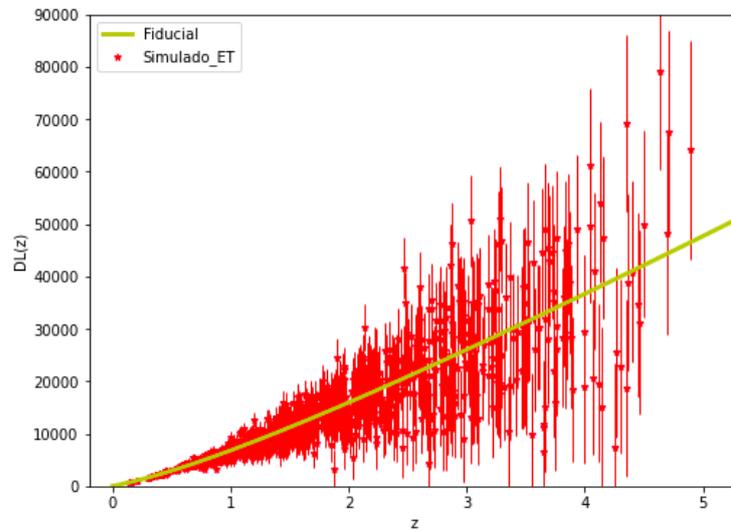


Figura 21 – Distância luminosidade dos eventos pelo *redshift*

Por último analisamos como o erro instrumental e de lente evoluem separadamente conforme o *redshift* aumenta. No gráfico 22 temos o erro instrumental considerando ângulos sorteados e também uma curva na qual consideramos uma média sobre as grandezas angulares e obtemos um erro médio sem flutuações.

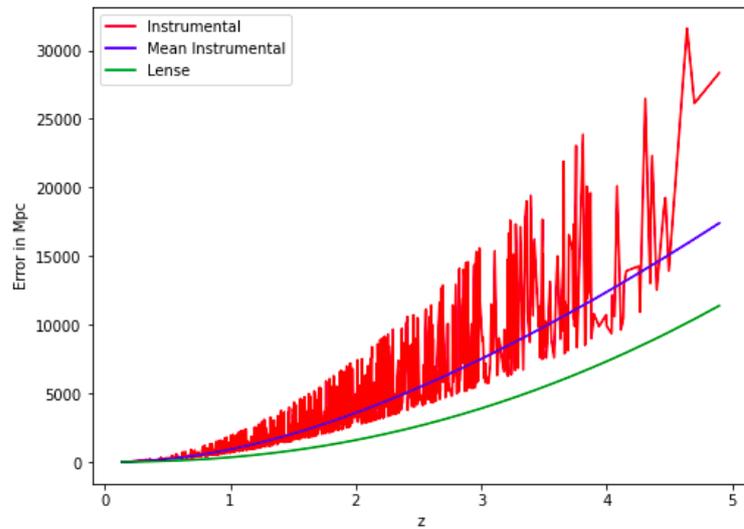


Figura 22 – Progressão dos erros nas detecções simuladas do Einstein Telescope em função do *redshift*.

Observe na figura 22 que o erro instrumental, em vermelho, e a sua média, em azul, são dominantes sob o erro devido ao lenteamento, em verde.

#### 4.5 Descrição da Likelihood criada

Conforme discutido anteriormente no capítulo 3, a *likelihood* ou função de verossimilhança determina a probabilidade condicional de obter um observável X em função de parâmetros de um determinado modelo. No nosso caso, o observável é a distância luminosidade.

Podemos escrever a *likelihood* da seguinte maneira,

$$\mathcal{L}(\gamma|\theta_i) = \prod_{j=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_j^2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{D_{L,mock}^j - D_{L,teo}}{\sigma_j} \right)^2 \right]. \quad (4.67)$$

Como consideramos os erros não correlacionados podemos escrever a matriz de covariância de forma diagonal como sendo,  $C_{jj} = 1/\sigma_j^2$ . Onde  $\sigma_j$  é o valor do erro simulado para cada medida de distância luminosidade do Einstein Telescope  $\sigma(D_L^{GW}) = \sqrt{\sigma_{inst}^2 + \sigma_{lens}^2}$

## 5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo iremos analisar as restrições impostas aos parâmetros cosmológicos de quatro modelos de universo distintos e também como esses parâmetros se comportam ao combinarmos dados reais de duas colaborações com os dados simulados do Einstein Telescope. Os dados reais que foram utilizados são da colaboração JLA (BETOULE et al., 2014b) que obtém distância de supernovas tipo Ia e também utilizamos dados de Oscilações Acústicas de Bárions (BAO).

Os dados de Oscilações Acústicas de Bárions utilizados, foram extraídos do 10° (DR10) e 11° (DR11) *release* do BOSS que faz parte da colaboração Sloan Digital Sky Survey III (SDSS-III). Onde o *release* DR10 (AHN et al., 2014) contém 927.844 espectros de galáxias, 182.009 espectros de quasares, 159.327 espectros estelares distribuídos em uma área do céu de 6373.2 graus quadrados dentro de um intervalo de *redshift* de  $0.15 < z < 3.5$ . Já o *release* DR11 (ANDERSON et al., 2014) contém aproximadamente um milhão de galáxias distribuídas em uma área de aproximadamente 8500 graus quadrados dentro do intervalo de *redshift*  $0.2 < z < 0.7$ .

Os dados de análise de curva de luz de Supernovas tipo Ia, abreviados como JLA, são compostos por dados espectrográficos de 740 supernovas (BETOULE et al., 2014b) obtidos das colaborações SDSS-II e SNLS distribuídos no intervalo de *redshift* de  $0.05 < z < 1$ .

O objetivo é iniciar com o modelo padrão da cosmologia, visando aprender a manipular os softwares Monte Python (BRINCKMANN; LESGOURGUES, 2019) e CLASS (Blas; Lesgourgues; Tram, 2011), visto que já existem trabalhos anteriores para compararmos nosso resultado. E então progredimos adicionando parâmetros extras de expansão do universo nos modelos  $w$ CDM e CPL. E por fim analisamos um modelo de universo descrito pela gravitação de Horndeski na parametrização *propto\_scale*.

Primeiramente utilizamos um modelo similar ao  $\Lambda$ CDM pois a energia escura será tratada como uma constante e nenhum parâmetro extra é acrescentado. A única diferença é que deixamos a densidade de curvatura crítica do universo  $\Omega_k$  livre para ser vinculada pelos dados através do método de MCMC. O segundo modelo é considerado como uma gravitação modificada pois a constante  $w$  da equação de estado da energia escura não é fixada em  $-1$  e deixada livre para ser restrita pelo método de MCMC com a combinação dos três conjuntos de dados já mencionados. No terceiro modelo buscamos restringir os parâmetros  $w_0 - w_a$  da parametrização CPL da energia escura. Por último, utilizamos a gravitação modificada de Horndeski com a parametrização proporcional ao fator de escala do universo (*propto\_scale*). Neste modelo buscamos apenas restringir os valores de  $\alpha_M$  e  $\alpha_B$  utilizando os dados conjuntos de BAO, JLA e da simulação do Einstein Telescope.

Outros parâmetros que são restringidos em todas as análises são os parâmetros de *nuisance* proveniente das medidas de distância através de supernovas tipo Ia conforme equação (1.99). Também restringimos a densidade crítica de matéria  $\Omega_m$  do universo. Representada como a soma da matéria bariônica, fixada em  $\Omega_b = 0.05$ , e a matéria escura  $\Omega_{cdm}$  é livre.

Assim como discutido no capítulo 3 os *priors* são elementos fundamentais no processo de

estimar parâmetros utilizando a estatística Bayesiana e representam sua informação prévia do valor do parâmetro. Devemos ressaltar que utilizamos *flat priors* com todos os parâmetros vinculados, ou seja, a probabilidade é constante durante todo o intervalo estabelecido. E os intervalos dos parâmetros de *nuisance*  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $M$  e  $\Delta_M$  são indefinidos, podendo variar de menos infinito até mais infinito. Esse intervalo foi utilizado em todas as simulações.

Alguns parâmetros cosmológicos foram fixados, seguindo os valores de *bestfit* do Planck (AGHANIM et al., 2020), durante todo o processo de MCMC conforme pode ser observado na tabela 1.

Parâmetros	Valor
$H_0$	67.556 Km s <sup>-1</sup> Mpc <sup>-1</sup>
$\Omega_k$	0.0
$\Omega_b$	0.05
$T_{CMB}$	2.7255 K
$n_s$	0.9619
$\ln(10^{10} A_s)$	3.0980

Tabela 1 – Parâmetros cosmológicos mantidos fixos, segundo os dados obtidos pela colaboração Planck (AGHANIM et al., 2020), durante o método de análise de MCMC em todos os modelos de universo a menos que seja dito o contrário.

Devemos ressaltar que todas as cadeias de MCMC analisadas convergiram dentro do critério de Gelman-Rubin (GELMAN; RUBIN, 1992) onde todos os parâmetros de todos os modelos apresentaram o valor de  $R - 1 < 10^{-2}$ . Esse critério compara as variâncias estimadas de cada parâmetro entre as cadeias e dentro da cadeia. Grandes diferenças nesses valores indicam uma não convergência e pequenos indicam a convergência dos valores. Na literatura (BROOKS; GELMAN, 1998) indicam  $R < 1.2$  como um valor apropriado para garantir a convergência da cadeia.

A impossibilidade de determinar alguns parâmetros com precisão é perfeitamente normal pois alguns conjuntos de dados fornecem informação apenas sobre a expansão do fundo cosmológico e não de estruturas geradas por perturbações. Por isso utilizamos a combinação de dados de BAO com as medidas de distância obtidas por supernovas e sirenes padrões.

## 5.1 $\Lambda$ CDM com curvatura livre

Dentre os três modelos de universo abordados, iniciamos a exploração dos parâmetros com o modelo  $\Lambda$ CDM pois além de ser o modelo padrão da cosmologia, também é o mais didático para compreendermos o poder vinculante dos dados simulados do Einstein Telescope sob os parâmetros  $\Omega_k$ ,  $\Omega_\Lambda$  e  $\Omega_m$ .

O modelo  $\Lambda$ CDM considera que o universo tenha curvatura nula, ou seja, consideramos o universo plano. Porém, nessa seção gostaríamos de explorar o comportamento desse modelo quando não fixamos a curvatura e o quanto podemos vincular esse parâmetro utilizando os

dados de BAO em conjunto com os dados do JLA. E também qual será o acréscimo de precisão ao acrescentar os dados simulados do Einstein Telescope.

Sabemos que alterações na curvatura do universo afetam a medida de distância luminosa, pois a mesma depende da geometria do universo conforme equação 1.56. Curvaturas diferentes também distorcem as anisotropias da radiação cósmica de fundo.

Poderemos observar nas análises abaixo que outros parâmetros além de  $\Omega_k$  também são analisados. Isso é necessário para o funcionamento da análise de MCMC realizada pelo software Monte Python. Os parâmetros  $\Omega_k$  e  $\Omega_{cdm}$  utilizaram um *flat prior* de  $[-\infty, +\infty]$ . Como os parâmetros  $\Omega_m$  e  $\Omega_\Lambda$  são parâmetros derivados não faz sentido estabelecer um prior.

### 5.1.1 JLA+BAO

Utilizando apenas os dados de JLA em conjunto com BAO obtivemos os valores estimados dos parâmetros cosmológicos e seus respectivos erros, conforme tabela 2.

Parâmetros	Valor estimado
$\Omega_{cdm}$	$0.256^{+0.0219}_{-0.0239}$
$\Omega_k$	$0.0351^{+0.0394}_{-0.0437}$
$\alpha$	$0.141^{+0.00676}_{-0.00679}$
$\beta$	$3.1^{+0.0815}_{-0.0847}$
$M$	$-19.1^{+0.0238}_{-0.0243}$
$\Delta_M$	$-0.0708^{+0.0237}_{-0.0236}$
$\Omega_m$	$0.306^{+0.0219}_{-0.0239}$
$\Omega_\Lambda$	$0.658^{+0.0585}_{-0.0519}$

Tabela 2 – *Bestfit* dos parâmetros cosmológicos do modelo  $\Lambda$ CDM com curvatura livre restritos com dados do JLA mais dados de BAO.

Conforme observamos na tabela 2 o erro de  $\Omega_m$  representa aproximadamente 8% do seu valor estimado. Já o parâmetro  $\Omega_k$  apresentou um valor estimado próximo de zero, descrevendo um universo próximo do plano. Porém, o seu erro ainda é proporcionalmente muito grande  $\Omega_k = 0.0351^{+0.0394}_{-0.0437}$ , impossibilitando uma definição no sinal da curvatura do universo. Por fim, o parâmetro  $\Omega_\Lambda = 0.658^{+0.0585}_{-0.0519}$  apresentou um erro percentual de aproximadamente 9%.

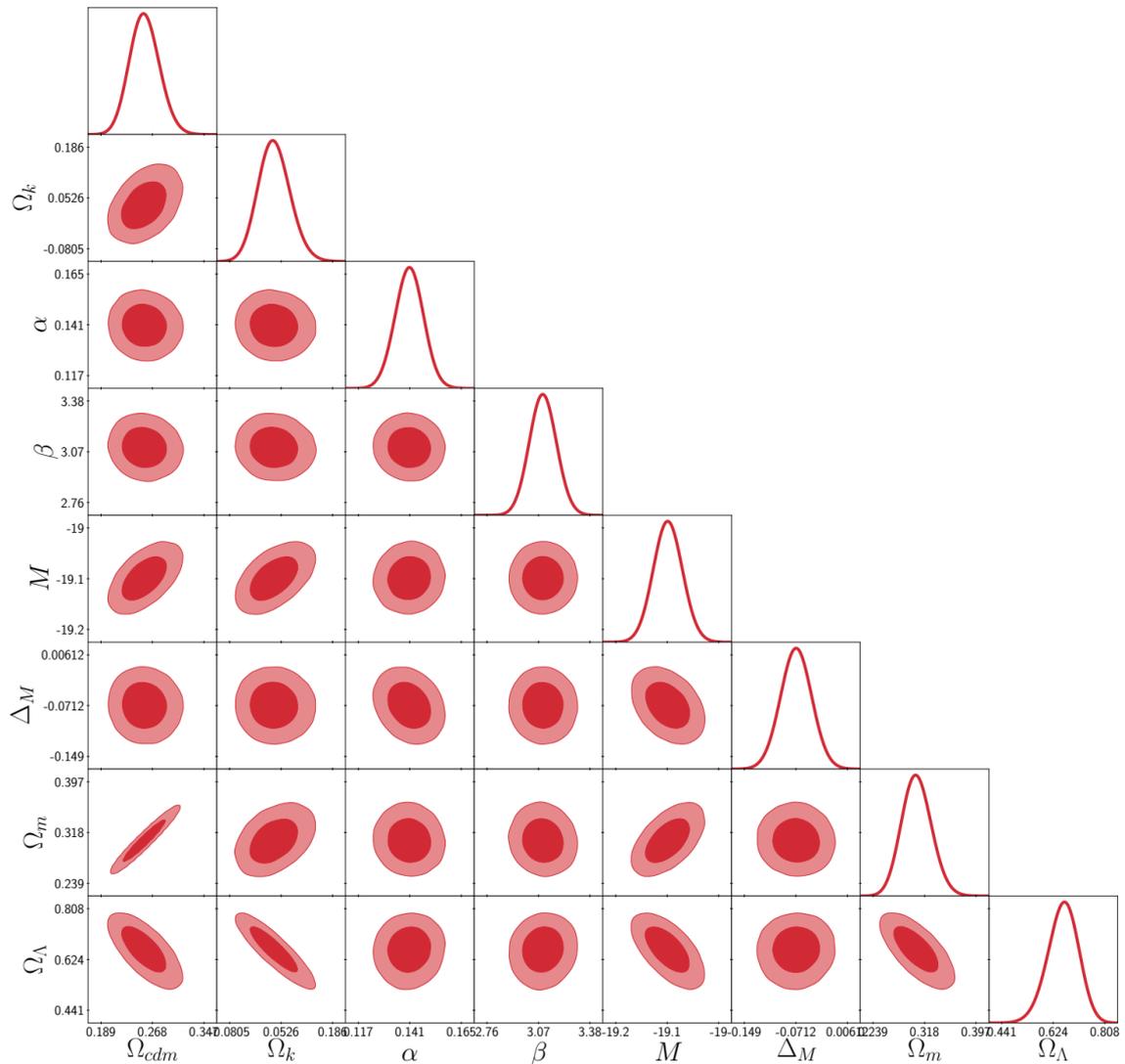


Figura 23 – Posterior bidimensional dos parâmetros cosmológicos restritos usando dados do JLA e BAO.

Na figura 23 é possível observar a posterior bidimensional de todos os parâmetros do modelo e a sua região de confiança estabelecida pela tonalidade das cores, onde o tom mais escuro representa a probabilidade de  $1\sigma$  (68%) e o tom mais claro englobando a região central representa  $2\sigma$  (95%) de probabilidade do valor do parâmetro está dentro dessa região. Adotamos esse sistema de cores para representar as regiões de confiança em todo a dissertação. Também temos nessa figura a posterior unidimensional de cada parâmetro separadamente à direita da pirâmide. Portanto, compreendemos que todos os parâmetros convergiram corretamente para seu valor estimado.

Como estamos interessados nos parâmetros  $\Omega_m$  e  $\Omega_\Lambda$  ressaltamos sua posterior bidimensional com as suas regiões de confiança de  $1\sigma$  e  $2\sigma$  na figura 24.

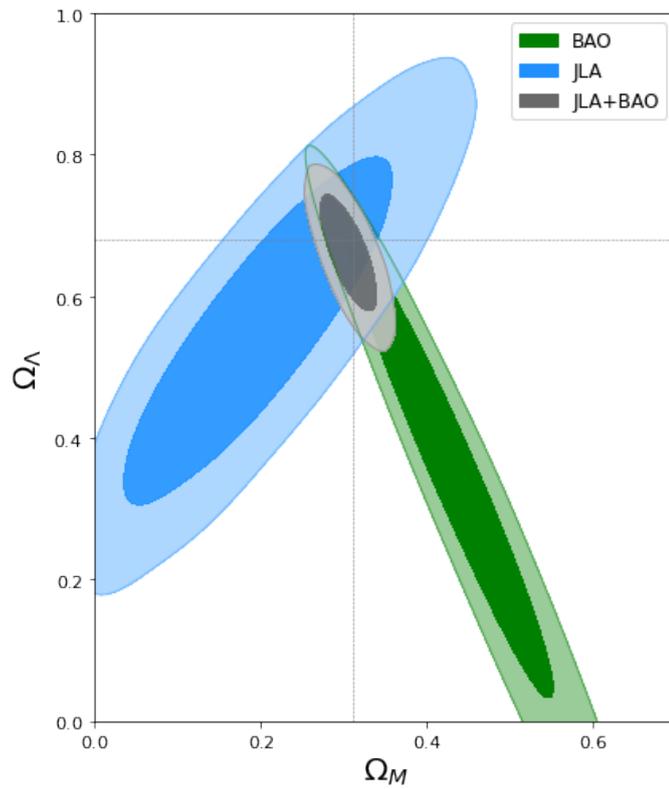


Figura 24 – Posterior bidimensional dos parâmetros cosmológicos  $\Omega_m$  e  $\Omega_\Lambda$ . Utilizando BAO e JLA separados e depois em conjunto.

Podemos observar que a posterior bidimensional em azul que representa os dados do JLA e a posterior em verde que representa os dados de BAO não estão alinhadas, gerando uma pequena interseção, em cinza, dos valores prováveis de  $\Omega_\Lambda$  e  $\Omega_m$ . O poder vinculante ao utilizar a combinação dos dois conjuntos de dados mostra-se maior que ao utiliza-los separadamente, justamente pelas regiões não estarem alinhadas a ortogonalidade das posteriores parciais no espaço paramétrico é que dá o poder vinculante do conjunto de dados.

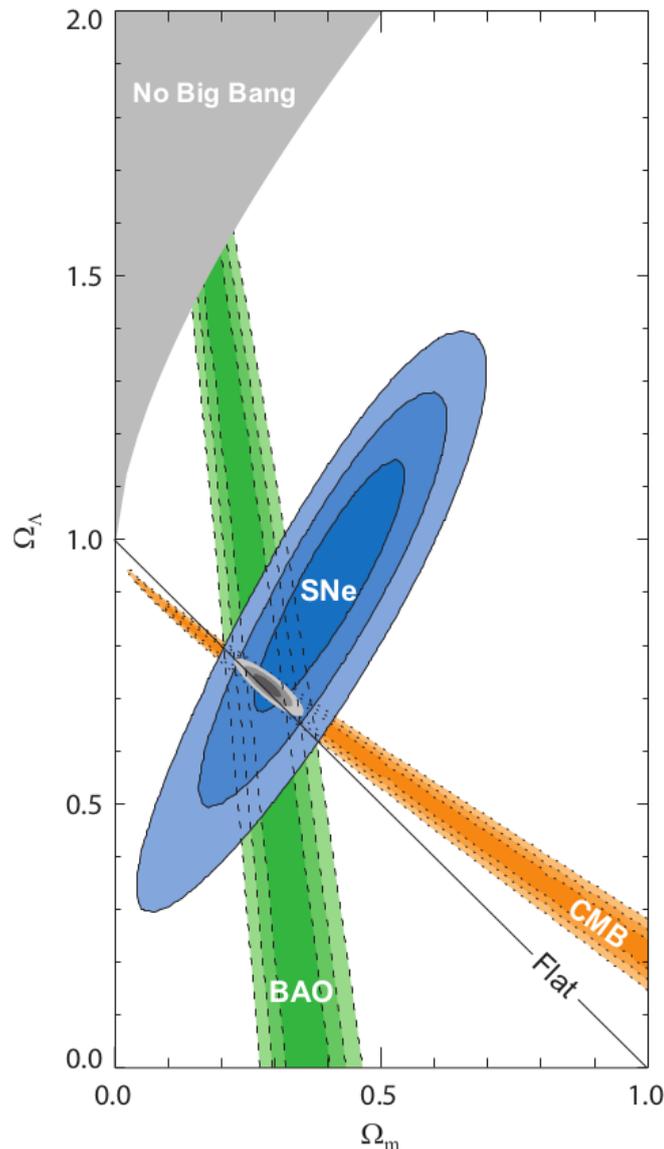


Figura 25 – Posterior bidimensional dos parâmetros cosmológicos  $\Omega_m$  e  $\Omega_\Lambda$ . Retirada do paper (KOWALSKI et al., 2008), nesse paper não foi utilizado JLA e sim o UNION, mais antigo.

Utilizamos o artigo (KOWALSKI et al., 2008) como critério de comparação pois utiliza dados de 414 Supernovas Tipo Ia provenientes da colaboração UNION (SUZUKI et al., 2012) que é constituída por medidas dos experimentos: *Supernova Legacy Survey*, *ESSENCE Survey* e HST. Os dados de BAO utilizados no artigo são provenientes de 46.748 galáxias entre o *redshift*  $0.13 < z < 0.47$  e uma área do céu de 3816 graus quadrados medidos pelo *Sloan Digital Sky Survey* (EISENSTEIN et al., 2005a). Neste artigo utilizando essa combinação de dados mais dados de radiação cósmica de fundo e considerando o modelo  $\Lambda$ CDM com  $\Omega_K$  livre foi obtido os seguintes valores  $\Omega_M = 0.285^{+0.020+0.011}_{-0.019-0.011}$  e  $\Omega_K = -0.009^{+0.009+0.002}_{-0.010-0.003}$ .

Ao compararmos as figuras 25 e 24 podemos observar algumas semelhanças como a inclinação das posteriores dos dados de natureza semelhantes e também vínculos semelhantes ao utilizar ambos os dados. Porém, percebemos que na figura 24 as posteriores de BAO e JLA são

bem mais restritivas. Devemos considerar que estamos utilizando dados mais recentes em ambos os casos. Nas medidas de BAO foram utilizados aproximadamente 40 vezes mais dados de galáxias e as medidas do JLA são aproximadamente 1.8 vezes mais numerosas que do UNION, além de cobrirem uma área maior do céu e detectar objetos mais distantes. Outro fator que deve ser levado em consideração é que os dados provenientes das medidas de BAO obtidas através dos picos acústicos 1.89 são independentes de  $H_0$ . Então medidas de BAO são incapazes de estimar a taxa de expansão do universo. Na simulação realizada na dissertação fixamos o valor de  $H_0$  conforme a tabela 1. Esse fator e a precisão maior nos dados utilizados provavelmente geraram essas diferenças entre os gráficos.

### 5.1.2 ET+JLA+BAO

Nesta subsecção acrescentamos os dados simulados de 1000 detecções de sirenes padrões para o Einstein Telescope. Na tabela 3 verificamos o valor estimado dos parâmetros e seu respectivo erro.

Parâmetros	JLA+BAO	ET+JLA+BAO
$\Omega_{cdm}$	$0.256^{+0.0219}_{-0.0239}$	$0.251^{+0.0101}_{-0.0102}$
$\Omega_k$	$0.0351^{+0.0394}_{-0.0437}$	$0.0305^{+0.0272}_{-0.0268}$
$\alpha$	$0.141^{+0.00676}_{-0.00679}$	$0.141^{+0.00694}_{-0.00654}$
$\beta$	$3.1^{+0.0815}_{-0.0847}$	$3.1^{+0.0818}_{-0.0832}$
$M$	$-19.1^{+0.0238}_{-0.0243}$	$-19.1^{+0.0179}_{-0.0186}$
$\Delta_M$	$-0.0708^{+0.0237}_{-0.0236}$	$-0.0703^{+0.023}_{-0.0238}$
$\Omega_m$	$0.306^{+0.0219}_{-0.0239}$	$0.301^{+0.0101}_{-0.0102}$
$\Omega_\Lambda$	$0.658^{+0.0585}_{-0.0519}$	$0.669^{+0.0209}_{-0.0225}$

Tabela 3 – *Bestfit* dos parâmetros cosmológicos do modelo  $\Lambda$ CDM restritos com dados do JLA+BAO, e JLA+BAO+ET

Ao acrescentarmos os dados simulados do Einstein Telescope aos dados do JLA e BAO obtemos um ganho no poder de restrição dos parâmetros  $\Omega_\Lambda$ ,  $\Omega_k$  e  $\Omega_m$ . Temos que o valor estimado de  $\Omega_k = 0.0305^{+0.0272}_{-0.0268}$  manteve próximo de zero. Porém, agora é possível determinar o sinal positivo da curvatura do universo devido a maior precisão. Já o parâmetro  $\Omega_m = 0.301^{+0.0101}_{-0.0102}$  também se manteve com valor estimado semelhante porém o margem de erro diminuiu aproximadamente 57%. E finalmente analisamos a energia escura através do parâmetro  $\Omega_\Lambda = 0.669^{+0.0209}_{-0.0225}$  que também apresentou uma margem de erro 64% menor.

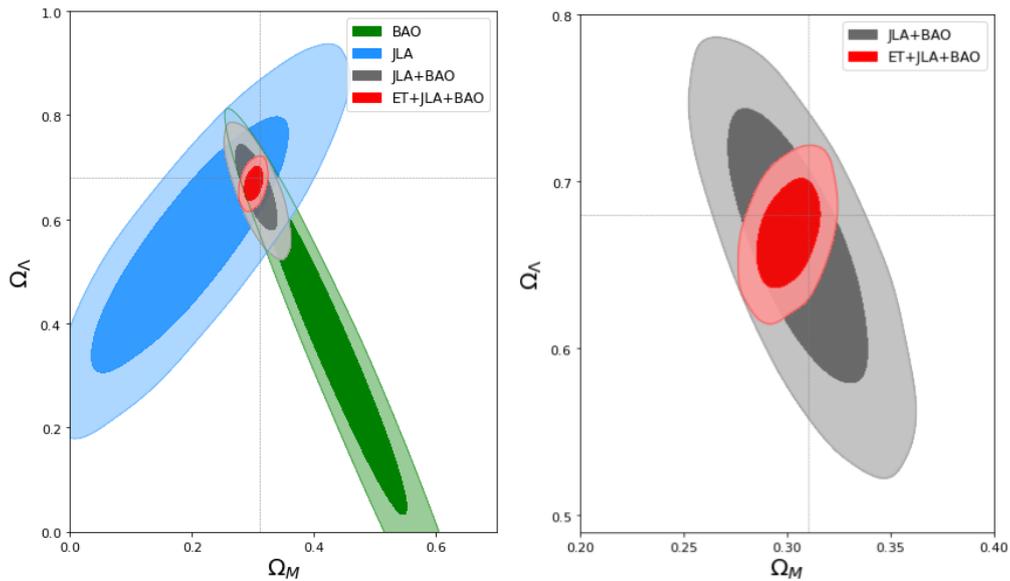


Figura 26 – A esquerda temos a figura 24 para critério de comparação. A direita temos a posterior bidimensional dos parâmetros cosmológicos  $\Omega_\Lambda$  e  $\Omega_m$  restritos usando dados do JLA+BAO (vermelho) e uma simulação dos dados do Einstein Telescope (azul).

Podemos visualizar na figura 26 o quanto os dados de BAO e JLA acrescidos da simulação dos dados do Einstein Telescope conseguem vincular com mais precisão  $\Omega_\Lambda$  e  $\Omega_m$ .

## 5.2 Parametrização $w$ CDM

O segundo modelo de universo explorado irá considerar uma energia escura dinâmica, onde o valor da sua constante  $w$  da equação de estado  $p_{DE} = w\rho_{DE}$  não será fixada em  $w = -1$ . Como esse parâmetro está intimamente ligado a densidade de energia escura,

$$\Omega_{DE} = \frac{\rho_{DE}}{\rho_{cr}} a^{3(1+w)}, \quad (5.1)$$

espera-se que a expansão do universo seja sensível ao parâmetro  $w$ .

O parâmetro  $\Omega_{cdm}$  utilizou um *flat prior* de  $[-\infty, +\infty]$ . Já o parâmetro  $w$  utilizou um *prior* de  $[-2.0, +2.0]$ . Devemos lembrar que consideramos o universo plano  $\Omega_k = 0$ .

### 5.2.1 BAO+JLA

Começamos utilizando os dados de BAO e JLA e obtemos as seguintes restrições nos parâmetros.

Parâmetros	Valor estimado
$\Omega_{cdm}$	$0.254^{+0.0221}_{-0.0229}$
$\alpha$	$0.141^{+0.0068}_{-0.0066}$
$\beta$	$3.1^{+0.081}_{-0.085}$
$M$	$-19.1^{+0.0248}_{-0.0242}$
$\Delta_M$	$-0.0706^{+0.0234}_{-0.0237}$
$w$	$-0.971^{+0.0471}_{-0.0476}$
$\Omega_m$	$0.304^{+0.0221}_{-0.0229}$

Tabela 4 – *Bestfit* dos parâmetros cosmológicos do modelo  $wCDM$  restritos com dados do JLA e dados de BAO.

Podemos observar na tabela 4 que  $w = -0.971^{+0.0471}_{-0.0476}$  se manteve muito próximo ao caso de energia escura constante como no modelo  $\Lambda CD M$ . Seu erro representa aproximadamente 5% do valor estimado. Já o parâmetro  $\Omega_m = 0.304^{+0.0221}_{-0.0229}$  contém um erro de aproximadamente 8% do seu valor.

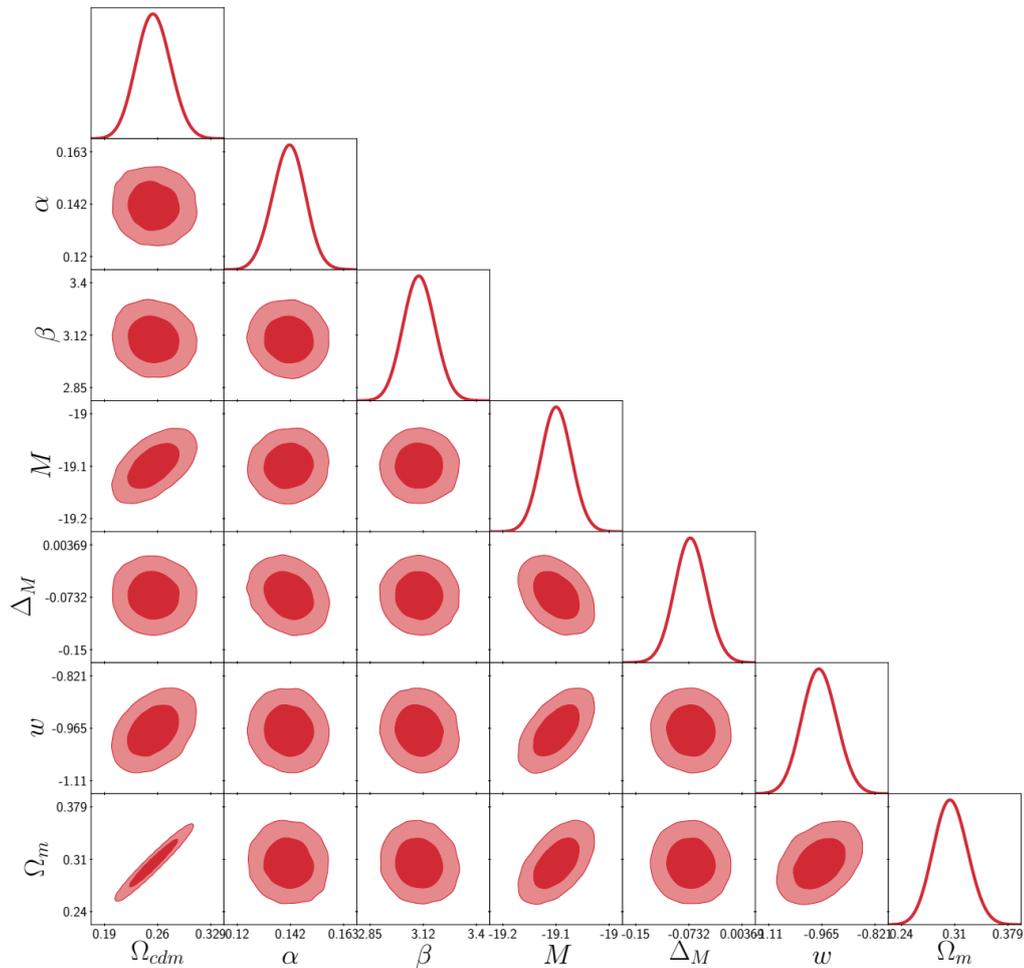


Figura 27 – Posterior bidimensional dos parâmetros cosmológicos restritos usando dados de JLA+BAO no modelo de universo  $wCDM$ .

Podemos observar na figura 27 que a posterior bidimensional e unidimensional de todos os parâmetros do modelo  $wCDM$  indicam que seus valores convergiram corretamente.

Destacando a posterior bidimensional dos parâmetros  $\Omega_m$  e  $w$ ,

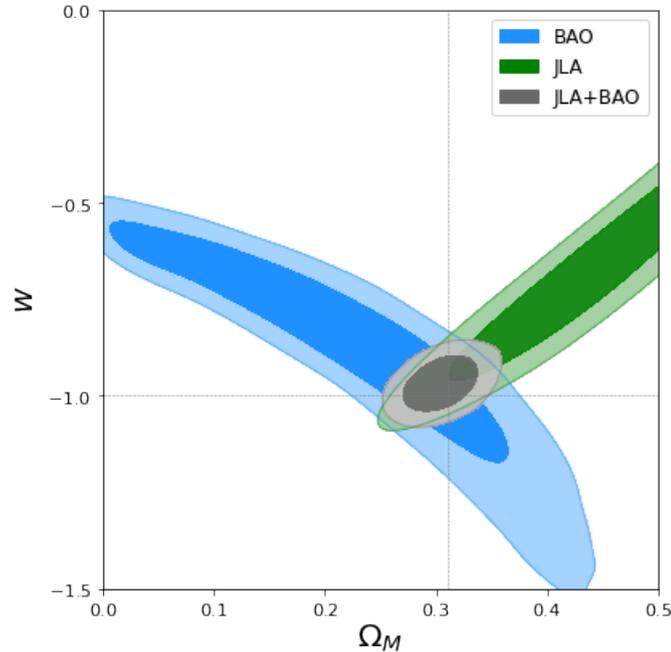


Figura 28 – Posterior bidimensional dos parâmetros cosmológicos  $\Omega_m$  e  $w_0$  usando dados de JLA e BAO separadamente e em conjunto.

Os dados de JLA e BAO isoladamente tem um pequeno poder de restringir os valores de  $\Omega_m$  e  $w$ . Observando apenas BAO vemos que esses parâmetros são degenerados dado que quanto maior a quantidade de matéria no universo menor seria a velocidade de expansão do mesmo, ou seja, maior o valor de  $w$ . Já JLA consegue restringir um pouco mais o valor de  $w$  porém considera plausível um universo com valores extremamente pequenos de matéria visto que seus dados são sensíveis a expansão do universo e não a quantidade de matéria. Ao analisarmos ambos os dados em conjunto temos uma restrição muito maior e próximo dos valores de  $w$  e  $\Omega_m$  do modelo padrão da cosmologia.

Podemos comparar qualitativamente a figura 28 com a figura 29 retirada do artigo (KOWALSKI et al., 2008) e observar que o comportamento da posterior dos dados de supernovas é semelhante ao obtido com os dados do JLA e a curva de BAO mesmo com uma inclinação um pouco diferente, possivelmente graças a quantidade de dados ser 40 vezes menor que a utilizada na figura 28, a análise conjunta gera um vínculo semelhante ao obtido em nossa análise. Os *bestfits* obtidos por eles foram,  $\Omega_m = 0.285^{+0.020+0.011}_{-0.020-0.010}$ ,  $\Omega_K = -0.010^{+0.010+0.006}_{-0.011-0.004}$  e  $w = -1.001^{+0.069+0.080}_{-0.073-0.082}$ .

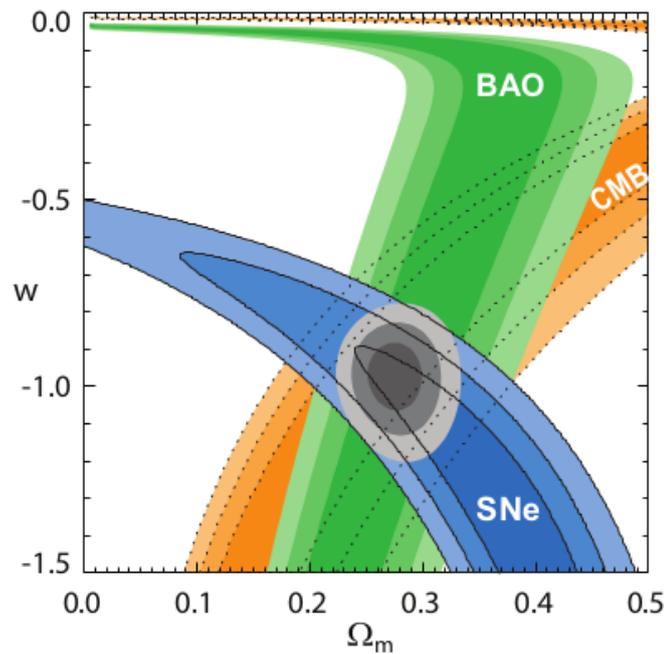


Figura 29 – Posterior bidimensional dos parâmetros cosmológicos  $\Omega_m$  e  $w$  usando dados de JLA, BAO e CMB separados e conjuntos. Fonte: (KOWALSKI et al., 2008)

### 5.2.2 BAO+JLA+ET

Acrescentando os dados simulados do Einstein Telescope vemos os valores estimados na tabela 5.

Parâmetros	JLA+BAO	ET+JLA+BAO
$\Omega_{cdm}$	$0.254^{+0.0221}_{-0.0229}$	$0.251^{+0.011}_{-0.0112}$
$\alpha$	$0.141^{+0.0068}_{-0.0066}$	$0.141^{+0.00683}_{-0.00677}$
$\beta$	$3.1^{+0.081}_{-0.085}$	$3.1^{+0.0798}_{-0.0835}$
$M$	$-19.1^{+0.0248}_{-0.0242}$	$-19.1^{+0.0183}_{-0.0185}$
$\Delta_M$	$-0.0706^{+0.0234}_{-0.0237}$	$-0.0705^{+0.0237}_{-0.0236}$
$w$	$-0.971^{+0.0471}_{-0.0476}$	$-0.974^{+0.0315}_{-0.0283}$
$\Omega_m$	$0.304^{+0.0221}_{-0.0229}$	$0.301^{+0.011}_{-0.0112}$

Tabela 5 – *Bestfit* dos parâmetros cosmológicos do modelo  $wCDM$  restritos com dados do JLA+BAO e dados de ET+JLA+BAO.

Analisando a tabela 5 vemos que os valores estimados de  $\Omega_m$  e  $w$  estão próximos dos obtidos com os dados de JLA e BAO em conjunto. Já os erros percentuais dos parâmetros diminuíram consideravelmente, começando com  $\Omega_m = 0.304^{+0.0221}_{-0.0229}$  temos uma redução de aproximadamente 50% do erro percentual. Já o parâmetro  $w = -0.974^{+0.0315}_{-0.0283}$  obteve uma redução de aproximadamente 45% do erro.

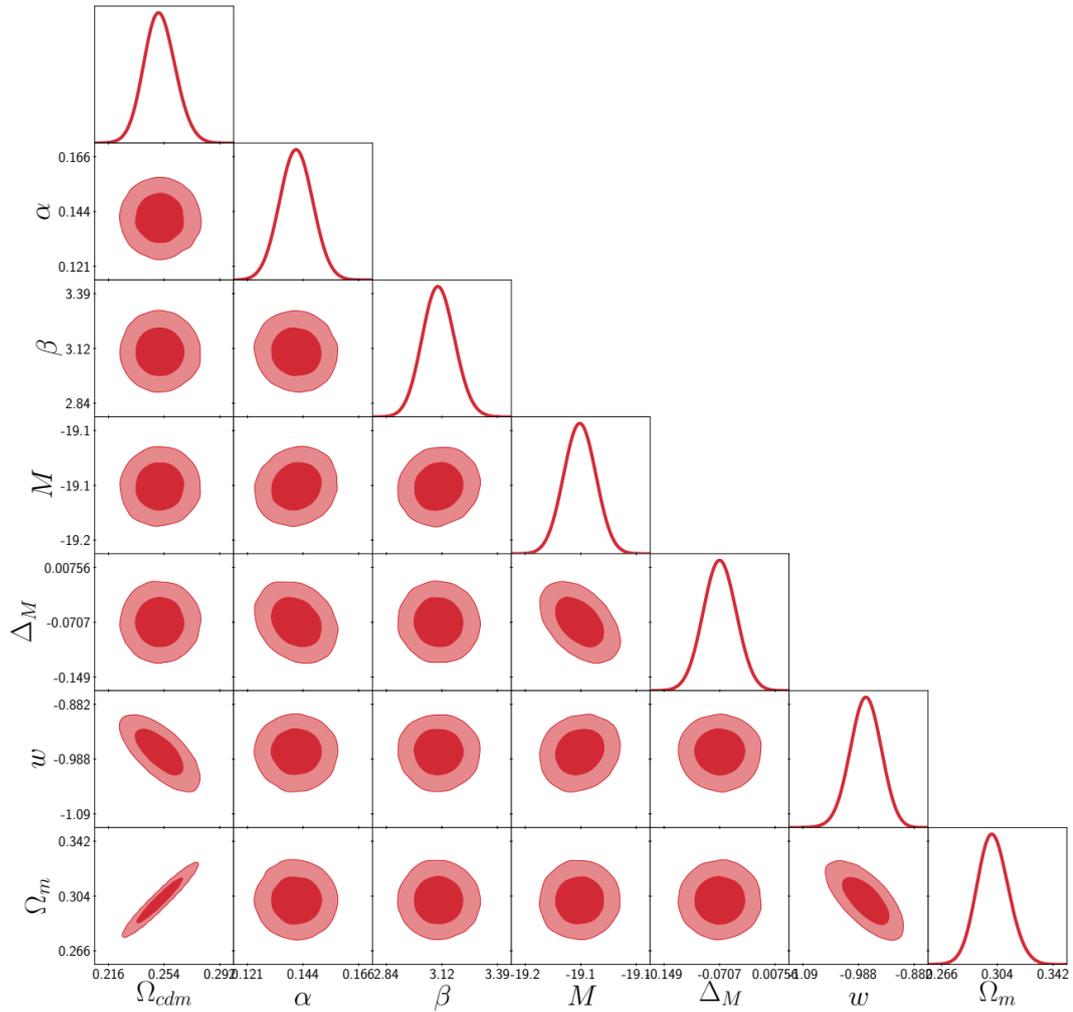


Figura 30 – Posterior bidimensional dos parâmetros cosmológicos de um universo  $wCDM$  restritos usando dados de JLA+BAO+ET.

Na figura 30 vemos a posterior bidimensional de todos os parâmetros analisados e suas respectivas posterior linear à direita da pirâmide.

Observando apenas os parâmetros  $\Omega_m$  e  $w$  temos a seguinte posterior bidimensional.

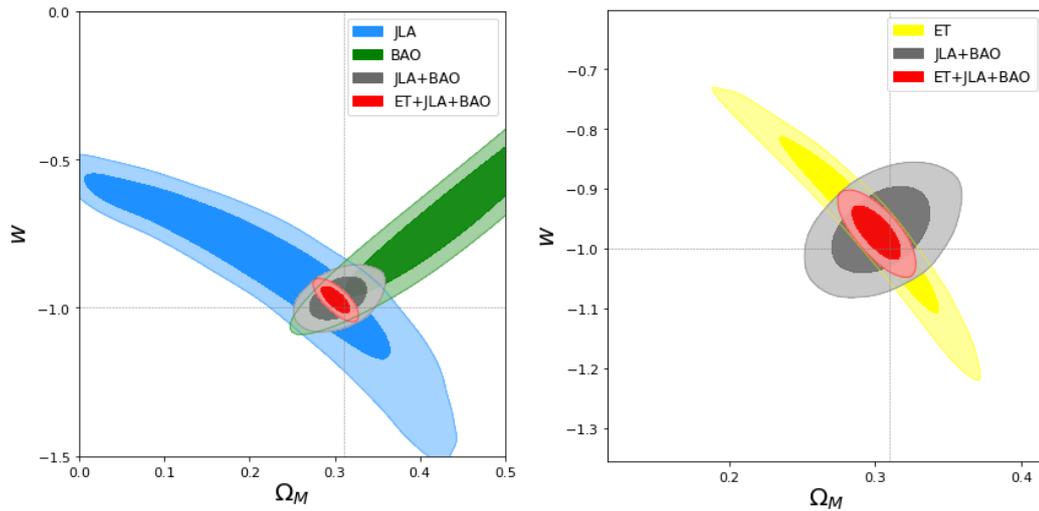


Figura 31 – Posterior bidimensional dos parâmetros cosmológicos  $\Omega_m$  e  $w$  usando dados de JLA+BAO, ET separado e ET+JLA+BAO.

Na figura 31 temos que isoladamente os dados simulados do Einstein Telescope conseguem obter uma restrição muito maior no parâmetro  $\Omega_m$  do que os dados do JLA mesmo ambos sendo degenerados. Também observamos que os dados do ET em amarelo estão basicamente ortogonais aos dados conjuntos do JLA+BAO em cinza, esse fator aumenta ainda mais a precisão nos parâmetros  $\Omega_m$  e  $w$ .

### 5.3 Parametrização CPL

Nesta subseção consideramos novamente um universo com energia escura dinâmica. Porém, dessa vez o valor do parâmetro  $w(z)$  da sua equação de estado  $p_{DE} = w(z)\rho_{DE}$  é dado por uma expansão em série de Taylor até primeira ordem no fator de escala,

$$w(z) \equiv \frac{p_{DE}}{\rho_{DE}} = w_0 + w_a(1 - a) + \mathcal{O}[(1 - a)^2], \quad (5.2)$$

desconsiderando ordens maiores e escrevendo em função de  $z$  temos,

$$w(z) = w_0 + w_a \frac{z}{1 + z}. \quad (5.3)$$

Os parâmetros  $w_0$  e  $w_a$  podem variar conforme a evolução do universo. Porém para  $z = 0$  esperamos obter  $w_0 \approx -1$  e  $w_a \approx 0$  condicentes com o modelo padrão da cosmologia.

Utilizamos *flat prior* de  $[-2.0, 2.0]$  para os parâmetros  $w_0$  e  $w_a$  e o *prior* de  $[-\infty, +\infty]$  para  $\Omega_{cdm}$ .

#### 5.3.1 JLA+BAO

Utilizando os dados conjuntos de JLA e BAO obtemos os valores estimados dos parâmetros cosmológicos conforme a tabela 6.

Parâmetros	Valor estimado
$\Omega_{cdm}$	$0.253^{+0.0211}_{-0.0238}$
$\alpha$	$0.141^{+0.00665}_{-0.00652}$
$\beta$	$3.1^{+0.0854}_{-0.0788}$
$M$	$-19.1^{+0.0269}_{-0.0263}$
$\Delta_M$	$-0.076^{+0.0232}_{-0.0237}$
$w_0$	$-0.957^{+0.101}_{-0.161}$
$w_a$	$-0.115^{+1.12}_{-0.47}$
$\Omega_m$	$0.303^{+0.0211}_{-0.0238}$

Tabela 6 – *Bestfit* dos parâmetros cosmológicos da parametrização CPL restritos com dados do JLA e dados de BAO.

Iremos focar em três parâmetros do modelo, que são  $\Omega_m$ ,  $w_0$  e  $w_a$ . Começando com a densidade de matéria  $\Omega_m = 0.303^{+0.0211}_{-0.0238}$  percebemos que o seu valor estimado se mantém próximo aos valores já obtidos no caso do modelo  $wCDM$  e o seu erro corresponde aproximadamente a 8% do seu valor estimado. Já os parâmetros de energia escura, temos que  $w_0 = -0.957^{+0.101}_{-0.161}$  também similar ao obtido no caso  $wCDM$  porém com um erro de aproximadamente 16% do seu valor estimado. E no caso do parâmetro linear da energia escura dinâmica  $w_a = -0.115^{+1.12}_{-0.47}$  observamos um valor estimado próximo de zero, que é esperado pelo modelo padrão da cosmologia, mas o seu erro é aproximadamente 900% do seu valor. Logo, percebemos que ao acrescentarmos um parâmetro extra na descrição da energia escura dinâmica perdemos o poder vinculante dos dados.

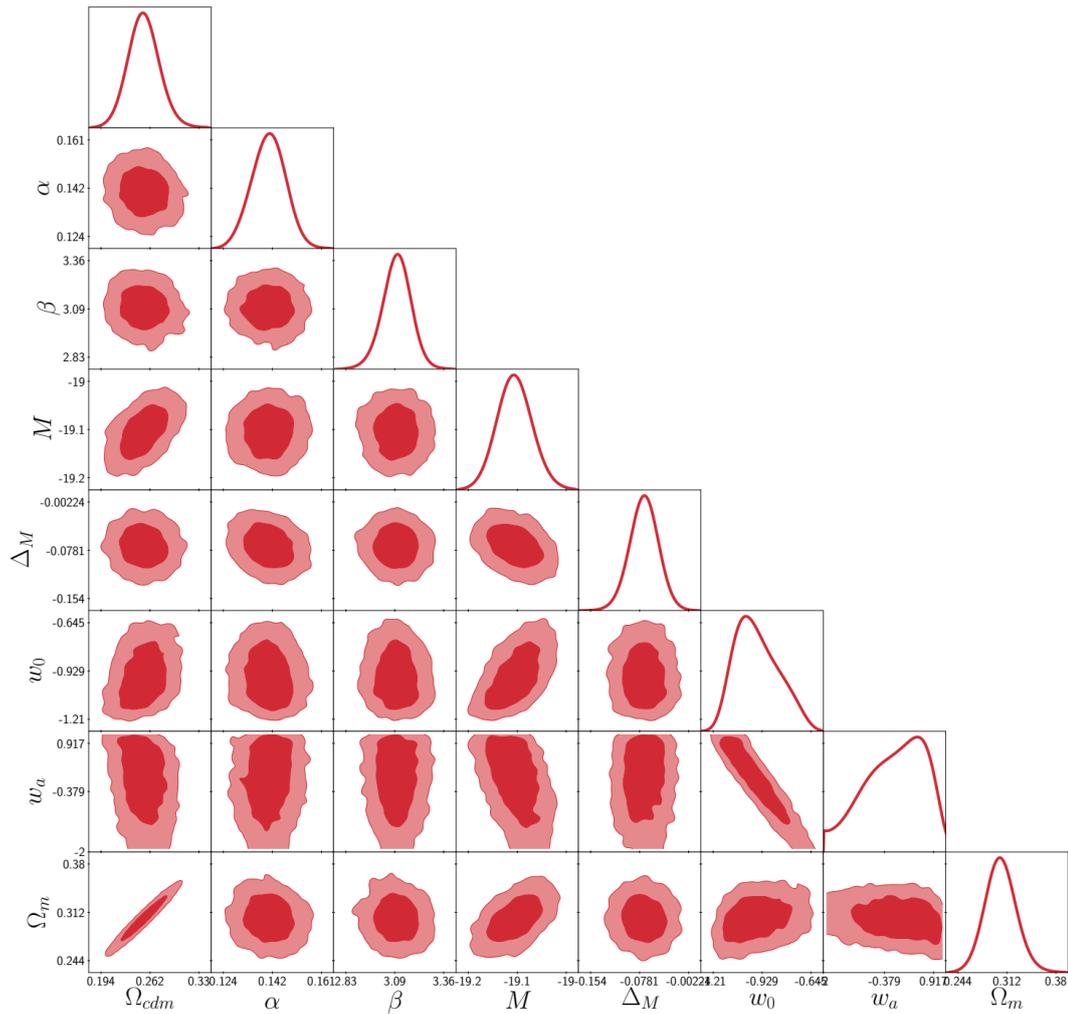


Figura 32 – Posterior bidimensional dos parâmetros cosmológicos restritos usando dados do JLA+BAO considerando uma parametrização CPL.

Na figura 32 observamos as posteriores bidimensionais e unidimensionais de todos os parâmetros analisados através do método de MCMC e que todos convergiram corretamente. Porém,  $w_0$  e  $w_a$  apresentaram maior dificuldade para convergir conforme visualizamos em suas posteriores unidimensionais.

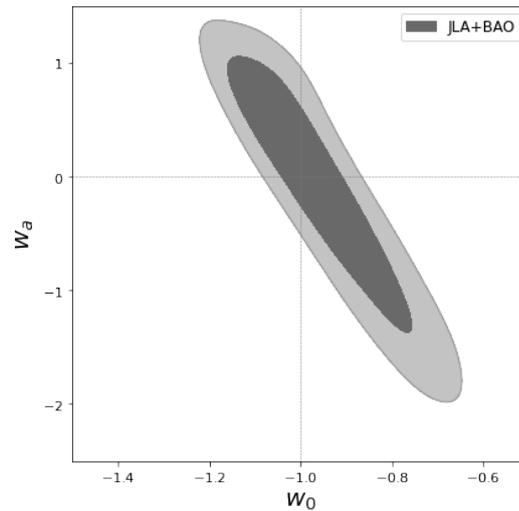


Figura 33 – Posterior bidimensional dos parâmetros cosmológicos  $w_0$  e  $w_a$  usando dados do JLA+BAO.

Na figura 33 observamos separadamente a posterior bidimensional dos parâmetros de expansão  $w_0$  e  $w_a$ . Vemos os valores  $w_0 = -1$  e  $w_a = 0$ , adotados pelo modelo  $\Lambda$ CDM, estão dentro da região de confiança de  $2\sigma$  na análise de MCMC. Também observamos que o poder de restrição dos dados sob  $w_0$  é maior que em  $w_a$ . O que faz sentido visto que  $w_a$  está atrelado ao *redshift* conforme equação,

$$w(z) = w_0 + w_a \frac{z}{1+z}, \quad (5.4)$$

e tanto os dados de JLA como de BAO contém uma maior quantidade de dados para  $z < 1$ . Fazendo com que o último termo a direita na equação 5.4 seja pequeno e permitindo grandes variações em  $w_a$  para afetar o valor de  $w_0$ .

### 5.3.2 ET+JLA+BAO

Acrescentando os dados simulados do Einstein Telescope aos dados do JLA e BAO obtemos os seguintes valores estimados dos parâmetros cosmológicos conforme tabela 7.

Parâmetros	JLA+BAO	ET+JLA+BAO
$\Omega_{cdm}$	$0.253^{+0.0211}_{-0.0238}$	$0.251^{+0.0129}_{-0.0113}$
$\alpha$	$0.141^{+0.00665}_{-0.00652}$	$0.141^{+0.00644}_{-0.00645}$
$\beta$	$3.1^{+0.0854}_{-0.0788}$	$3.1^{+0.0759}_{-0.0904}$
$M$	$-19.1^{+0.0269}_{-0.0263}$	$-19.1^{+0.019}_{-0.0196}$
$\Delta_M$	$-0.076^{+0.0232}_{-0.0237}$	$-0.0699^{+0.0229}_{-0.024}$
$w_0$	$-0.957^{+0.101}_{-0.161}$	$-0.969^{+0.0763}_{-0.081}$
$w_a$	$-0.115^{+1.12}_{-0.47}$	$-0.0339^{+0.516}_{-0.501}$
$\Omega_m$	$0.303^{+0.0211}_{-0.0238}$	$0.301^{+0.0129}_{-0.0113}$

Tabela 7 – *Bestfit* dos parâmetros cosmológicos da parametrização CPL restritos com dados do JLA+BAO e ET+JLA+BAO.

Novamente focando nossa análise nos três parâmetros  $\Omega_m$ ,  $w_0$  e  $w_a$ . Avaliando primeiramente  $\Omega_m = 0.301^{+0.0129}_{-0.0113}$  cujo valor estimado encontra-se bem próximo ao obtido com os dados conjuntos de JLA e BAO porém o seu respectivo erro diminuiu aproximadamente 38%. Já o parâmetro de expansão  $w_0 = -0.969^{+0.0763}_{-0.081}$  apresentou valor estimado bem próximo ao anterior e uma queda no erro de aproximadamente 92%. O segundo parâmetro de expansão  $w_a = -0.0339^{+0.516}_{-0.501}$  obteve um valor estimado uma ordem de grandeza mais próximo de zero e seu erro apresentou uma queda de aproximadamente 50%.

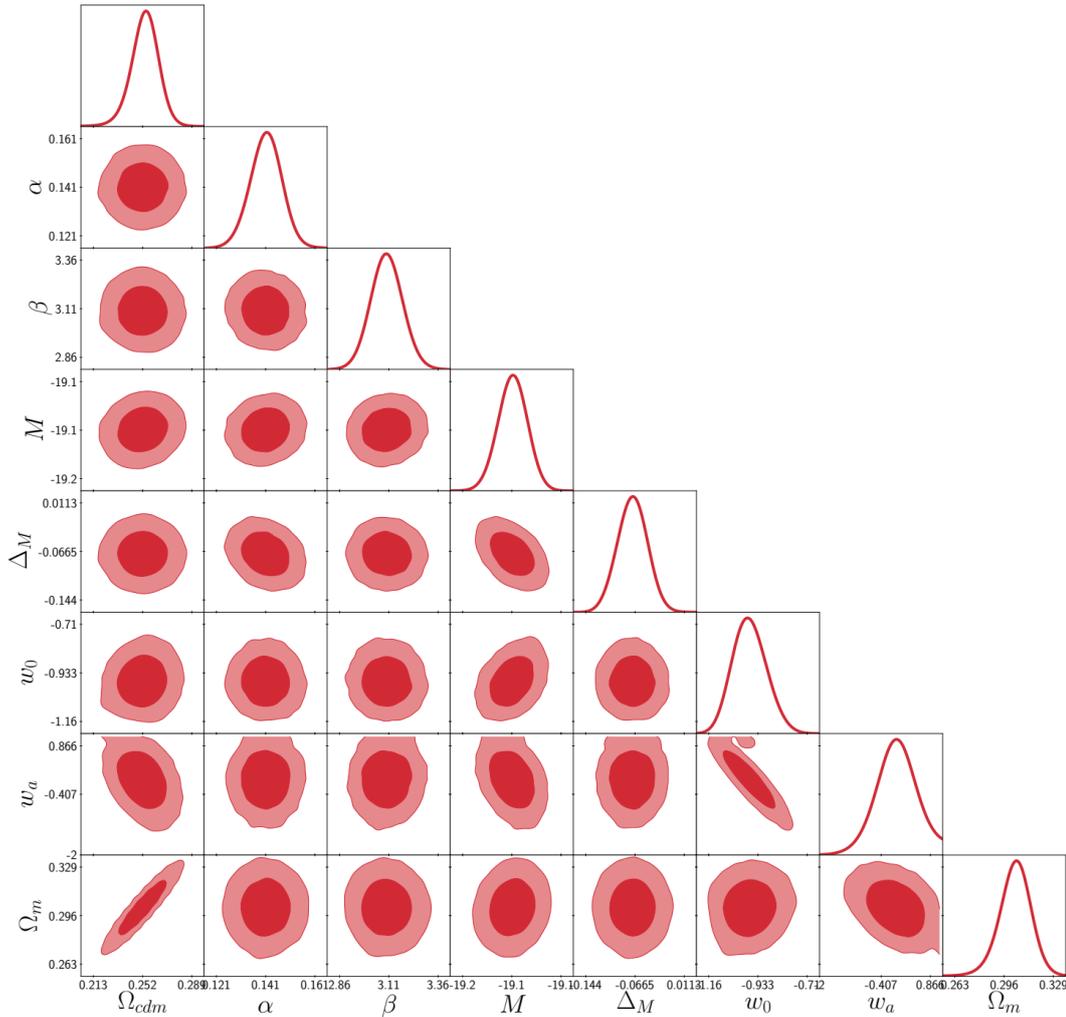


Figura 34 – Posterior bidimensional dos parâmetros cosmológicos restritos usando dados do ET+JLA+BAO.

Na figura 34 temos a posterior bidimensional e unidimensional de todos os parâmetros analisados pelo método de MCMC. Podemos observar que todos convergiram corretamente e que os parâmetros  $w_0$  e  $w_a$  apresentaram uma convergência melhor e seus valores foram mais vinculados ao incluímos os dados do Einstein Telescope.

Destacando a posterior bidimensional de  $w_0$  e  $w_a$  utilizando a combinação dos dados de JLA e BAO somados a simulação do Einstein Telescope reparamos no impacto que esses dados geraram nos parâmetros.

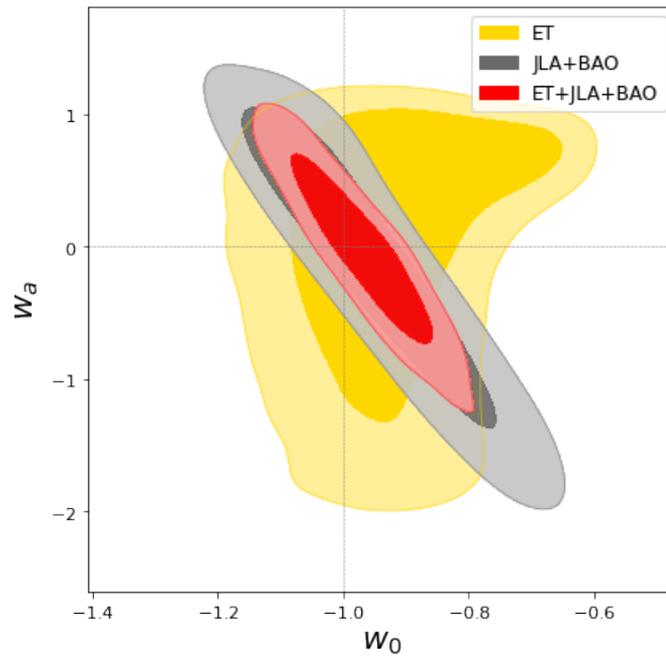


Figura 35 – Posterior bidimensional dos parâmetros cosmológicos  $w_0$  e  $w_a$  usando dados do Einstein Telescope separadamente e em conjunto com JLA e BAO.

Na figura 35 vemos que  $w_a$  ainda apresenta um erro maior que o do parâmetro  $w_0$  mas graças ao acréscimo dos dados simulados do Einstein Telescope seu erro foi o que mais diminuiu. Provavelmente devido as detecções em maior *redshift*, até  $z = 5$ , possíveis com o Einstein Telescope.

Visando compara qualitativamente nosso resultado com outros artigos na área utilizamos a figura 36 do artigo (BELGACEM et al., 2018).

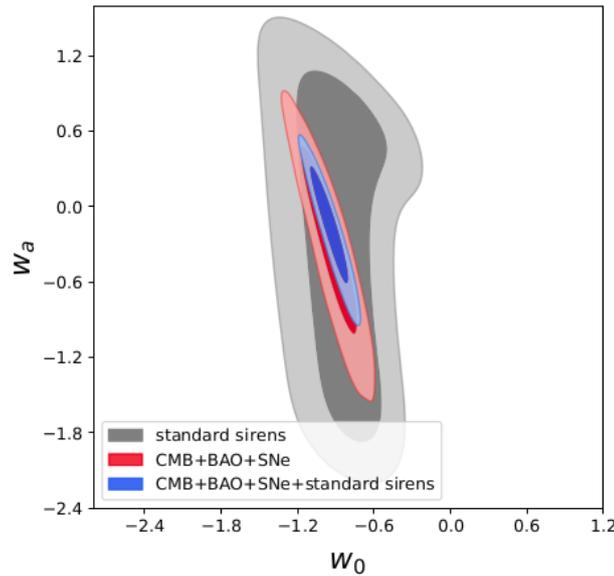


Figura 36 – Posterior bidimensional dos parâmetros  $w_0$  e  $w_a$  da parametrização CPL restritos utilizando um conjunto de 1000 dados simulados do Einstein Telescope separadamente e em conjunto com dados de CMB, BAO e JLA. Fonte: (BELGACEM et al., 2018)

Vemos na figura 36 que o comportamento das posteriores serem mais restritivas em  $w_0$  do que em  $w_a$  se mantém mesmo sendo acrescentando dados de CMB e o impacto dos dados simulados do Einstein Telescope ainda são bem perceptíveis principalmente no valor de  $w_a$ . Este artigo obteve erro aproximado de  $\Delta w_0 = 0.099$  e  $\Delta w_a = 0.313$  para os parâmetros  $w_0$  e  $w_a$  respectivamente e considerando a soma dos dados de CMB, BAO, SNIa e Sirenes Padrões.

Este artigo usou os dados de JLA (BETOULE et al., 2014a) e de BAO proveniente do 6dFGS (BEUTLER et al., 2011a) com *redshift* efetivo  $z_{eff} = 0.106$ , SDSS-MGS DR7 com  $z_{eff} = 0.15$  (ROSS et al., 2015a), BOSS LOWZ com  $z_{eff} = 0.32$  (ANDERSON et al., 2014) e CMASS com  $z_{eff} = 0.57$  (ANDERSON et al., 2014).

#### 5.4 Modelo de Horndeski

Nesta subseção finalmente analisaremos o modelo de universo descrito pela gravitação modificada de Horndeski caracterizado pelas suas funções livres  $\alpha_i$ . Utilizamos a parametrização proporcional ao fator de escala do universo,

$$\alpha_i = \hat{\alpha}_i a(\tau) \quad (5.5)$$

onde  $\hat{\alpha}_i$  são as constantes de sua respectiva função livre. Quando nos referirmos aos valores vinculadores das  $\alpha_i$  estamos nos referindo ao valor das constantes  $\hat{\alpha}_i$ .

Apenas os valores de  $\alpha_M$  e  $\alpha_B$  foram deixados livres para serem vinculados pelo método de MCMC. As outras duas constantes são fixadas em,

$$\hat{\alpha}_T = 0, \quad \hat{\alpha}_K = 0.01. \quad (5.6)$$

Como deixamos  $\alpha_B$  livre para ser vinculado pelos dados, não sabemos seu valor a priori e dado critérios de estabilidade conformes equações 2.48 e 2.49 temos que,

$$\alpha_K + \frac{3}{2}\alpha_B^2 > 0. \quad (5.7)$$

Fixamos o valor de  $\alpha_K$  para evitar uma singularidade de pressão. Os valores do *flat priors* adotados para os parâmetros são especificados na tabela 8.

Parâmetros	Prior
$\Omega_{cdm}$	0.1, 0.4
$\alpha_B$	-3.0, 3.0
$\alpha_M$	-3.0, 3.0

Tabela 8 – Valores dos *flat priors* dos respectivos parâmetros utilizados na restrição das funções livres de Horndeski utilizando dados do Einstein Telescope mais dados de BAO e JLA.

#### 5.4.1 ET+JLA+BAO

Os dados de JLA+BAO não foram capazes de vincular os parâmetros de gravitação modificada de Horndeski. Por isso já iniciamos utilizando esses dados somados das detecções simuladas pelo Einstein Telescope. Também devemos notar que apenas nesse caso utilizamos dados de BAO extraídos do 7º (DR7) *release* do BOSS utilizando galáxias com  $z < 0.2$  (ROSS et al., 2015b). Também foi utilizado dados do 9º (DR9) *release* do BOSS utilizando galáxias com  $0.43 < z < 0.7$  (ANDERSON et al., 2012). Por último, utilizamos dados do (6dFGS) *6dF Galaxy Survey* com  $z_{eff} = 0.106$  (BEUTLER et al., 2011b). Realizamos essa mudança pois com os dados anteriores de BAO não conseguimos obter restrições satisfatórias.

Os valores estimados dos parâmetros cosmológicos utilizando esse conjunto de dados pode ser visto na tabela 9.

Parâmetros	Valor estimado
$\Omega_{cdm}$	$0.257^{+0.00758}_{-0.00781}$
$\alpha$	$0.141^{+0.00674}_{-0.0068}$
$\beta$	$3.1^{+0.0792}_{-0.0837}$
$M$	$-19.1^{+0.0181}_{-0.0184}$
$\Delta_M$	$-0.0704^{+0.0237}_{-0.0237}$
$\alpha_B$	$0.169^{+2.42}_{-1.1}$
$\alpha_M$	$1.65^{+1.35}_{-0.44}$
$\Omega_m$	$0.307^{+0.00758}_{-0.00781}$

Tabela 9 – *Bestfit* dos parâmetros cosmológicos utilizando modelo de gravitação de Horndeski com parametrização proporcional ao fator de escala do universo utilizando com dados do JLA, de BAO e dados simulados do Einstein Telescope.

Focando apenas nos parâmetros  $\Omega_m$ ,  $\alpha_M$  e  $\alpha_B$ . Começando com a densidade crítica de matéria  $\Omega_m = 0.307^{+0.00758}_{-0.00781}$  com erro aproximado de 2.5% do seu valor. Também observamos que o seu valor se encontra próximo ao valor fiducial de  $\Omega_m = 0.311 \pm 0.0056$  estabelecido pelos resultados de 2018 da colaboração Planck (AGHANIM et al., 2020). O parâmetro  $\alpha_M = 1.65^{+1.35}_{-0.44}$  com erro aproximado de 81% do seu valor. Já o parâmetro  $\alpha_B = 0.169^{+2.42}_{-1.1}$  tem erro de aproximadamente 1400% do seu valor.

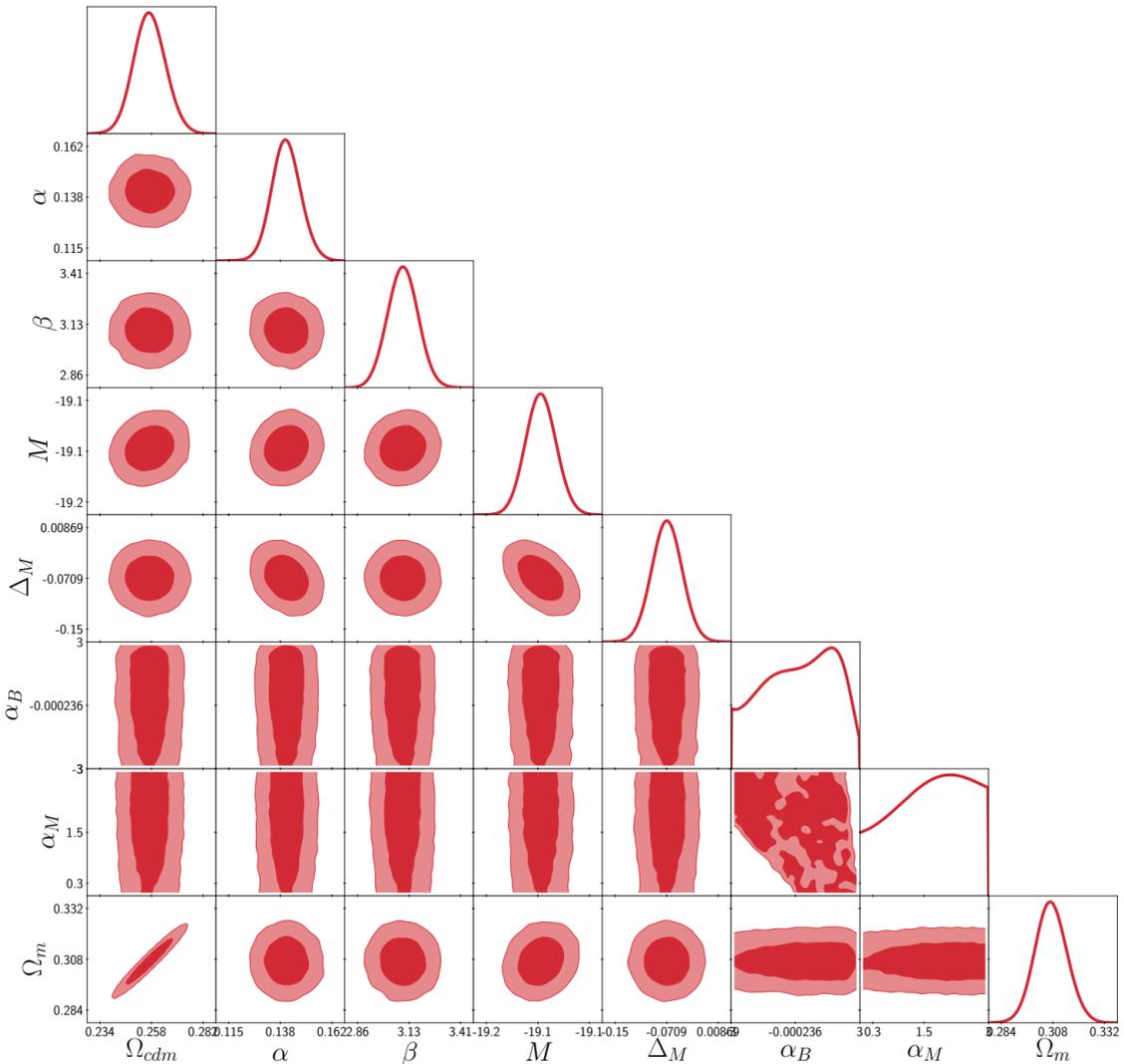


Figura 37 – Posterior bidimensional dos parâmetros de gravitação modificada de Horndeski usando dados do ET+JLA+BAO.

Na figura 37 observamos as posteriores bidimensionais de todos os parâmetros analisados pelo método de MCMC. Visto que os parâmetros  $\alpha_M$  e  $\alpha_B$  tem o mesmo *prior* de  $[-3,3]$ , vemos que os dados tem uma grande dificuldade em estimar seus valores dado a dificuldade de estimar um pico claro nas suas suas posteriores unidimensionais.

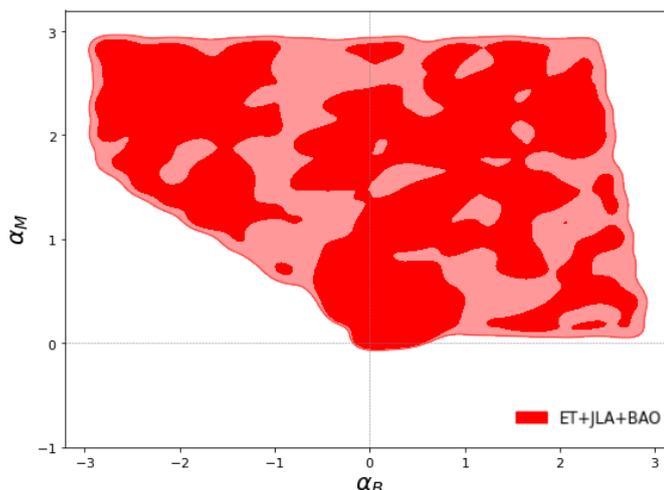


Figura 38 – Posterior bidimensional dos parâmetros  $\alpha_M$  e  $\alpha_B$  vinculado pelos dados do ET+JLA+BAO.

Analisando apenas na posterior bidimensional dos parâmetros  $\alpha_M$  e  $\alpha_B$  conforme figura 38 vemos que o valor  $\alpha_M = 0$  e  $\alpha_B = 0$  são valores prováveis. Estes dois valores são importantes pois quando todos os valores das  $\alpha_i$  são nulos, obtemos a gravitação descrita pela relatividade geral e ao acrescentarmos a constante cosmológica obtemos o modelo  $\Lambda$ CDM. Também devemos observar os cortes nos *priors* e também na região inferior devido critérios de estabilidades, conforme equações 2.48 e 2.49

Então mesmo existindo uma grande dificuldade em vincular os valores de  $\alpha_M$  e  $\alpha_B$  os valores esperados pelo modelo  $\Lambda$ CDM são probabilisticamente possíveis. Demonstrando que não obtivemos um resultado em tensão com do modelo padrão da cosmologia. Porém, também podemos observar que existe a necessidade de utilizar outros dados cosmológicos, como a radiação cósmica de fundo, visando uma maior restrição nos parâmetros  $\alpha_M$  e  $\alpha_B$ .

## 6 CONCLUSÃO

Nesta dissertação exploramos a utilização de medidas de observáveis cosmológicos na restrição de parâmetros de modelos cosmológicos. Para isso realizamos uma revisão sobre o modelo padrão da cosmologia no capítulo 1, incluindo definições de distâncias cosmológicas e uma breve descrição das perturbações lineares. Também no capítulo 1 apresentamos as Oscilações Acústicas dos Bárions e as Supernovas Tipo Ia e como suas medidas são relevantes para a cosmologia moderna.

No segundo capítulo motivamos o estudo de modelos de gravitação modificada e apresentamos as abordagens adotadas pelos principais métodos de modificação da teoria da gravitação. Nele também apresentamos a gravitação de Horndeski e suas funções livres  $\alpha_i$  assim como suas interpretações físicas.

Toda a abordagem de utilizar um conjunto de dados de observáveis cosmológicos para vincular parâmetros utiliza-se da estatística Bayesiana a qual abordamos no capítulo 3. Além disso analisamos o funcionamento do método de Monte Carlo Markov Chain que é utilizado pelo *software* MontePython (BRINCKMANN; LESGOURGUES, 2019) utilizado em todas as nossas análises. No capítulo 4 analisamos as sirenes padrões que são o análogo das SNIa para as ondas gravitacionais as quais são detectadas por grandes interferômetros como o LIGO (ABBOTT et al., 2009) e o VIRGO (BRADASCHIA et al., 1990) capazes de detectar ondas gravitacionais. Nesse capítulo também abordamos a propagação de ondas gravitacionais no vácuo e como estimar a distância luminosa utilizando ondas gravitacionais. Por último, apresentamos como foi feita a simulação dos dados do Einstein Telescope.

No capítulo 5 apresentamos os resultados e analisamos o impacto dos dados de sirenes padrões na restrição de parâmetros de quatro modelos de universo.

Notamos que em todos os cenários de modelos cosmológicos os dados simulados do Einstein Telescope impactaram de maneira significativa os vínculos nos parâmetros explorados. Para o modelo  $\Lambda$ CDM com  $\Omega_K$  livre obtivemos uma redução do erro de aproximadamente 51% nos parâmetros  $\Omega_k$ ,  $\Omega_\Lambda$  e  $\Omega_m$ . Já para o modelo  $w$ CDM obtivemos uma redução de aproximadamente 41% nos parâmetros  $w$  e  $\Omega_m$ . O modelo de energia escura dinâmica utilizando a parametrização CPL obteve um ganho de precisão aproximado de 38% nos parâmetros  $w_0, w_a$  e  $\Omega_m$ . Todos esses três primeiros modelos cosmológicos foram utilizados para ganharmos confiança na utilização do ferramental computacional do CLASS (Blas; Lesgourgues; Tram, 2011), Hi\_CLASS (ZUMALACÁRREGUI et al., 2017) (BELLINI; SAWICKI; ZUMALACÁRREGUI, 2020) e MontePython (BRINCKMANN; LESGOURGUES, 2019).

Finalmente utilizamos os dados de BAO e de Supernovas Tipo Ia acrescidos dos dados simulados de Sirenes Padrões para restringir um modelo de gravitação de Horndeski com parametrização das funções  $\alpha_i$  proporcionais ao fator de escala do universo. E observamos que mesmo mantendo  $\alpha_K$  e  $\alpha_T$  fixas, os vínculos obtidos sob esses parâmetros ainda são muito fracos. Pois obtivemos que  $\alpha_M = 1.65^{+1.35}_{-0.44}$  e  $\alpha_B = 0.169^{+2.42}_{-1.1}$ .

Como perspectivas futuras buscaremos utilizar outras parametrizações nas funções  $\alpha_i$  de

forma que diminua os graus de liberdade da teoria. Como a *No Slip Gravity* (LINDER, 2018) que impõem que  $\alpha_B$  seja proporcional a  $\alpha_M$ . Também pretendemos acrescentar dados recentes de radiação cósmica de fundo.

## REFERÊNCIAS

- ABBOTT, B. P. et al. American Astronomical Society, v. 848, n. 2, p. L12, oct 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.3847/2041-8213/aa91c9>.
- ABBOTT, B P et al. Ligo: the laser interferometer gravitational-wave observatory. *Reports on Progress in Physics*, IOP Publishing, v. 72, n. 7, p. 076901, Jun 2009. ISSN 1361-6633. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1088/0034-4885/72/7/076901>.
- ABBOTT, B. P. et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Phys. Rev. Lett.*, v. 116, n. 6, p. 061102, 2016.
- \_\_\_\_\_. A gravitational-wave standard siren measurement of the Hubble constant. *Nature*, v. 551, n. 7678, p. 85–88, 2017.
- ADAM, R. et al. Planck2015 results. *Astronomy Astrophysics*, EDP Sciences, v. 594, p. A1, Sep 2016. ISSN 1432-0746. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/201527101>.
- ADE, P. A. R. et al. Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters. *Astron. Astrophys.*, v. 594, p. A13, 2016.
- Adler, Ronald J.; Casey, Brendan; Jacob, Ovid C. Vacuum catastrophe: An elementary exposition of the cosmological constant problem. *American Journal of Physics*, v. 63, n. 7, p. 620–626, jul. 1995.
- AGHANIM, N. et al. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. *Astron. Astrophys.*, v. 641, p. A6, 2020. [Erratum: *Astron. Astrophys.* 652, C4 (2021)].
- AHN, Christopher P. et al. The Tenth Data Release of the Sloan Digital Sky Survey: First Spectroscopic Data from the SDSS-III Apache Point Observatory Galactic Evolution Experiment. *Astrophys. J. Suppl.*, v. 211, p. 17, 2014.
- ALSABTI A. W., Murdin P. *Handbook of Supernovae*. [S.l.]: Springer, 2017.
- AMENDARIZ-PICON, C; MUKHANOV, V. F.; STEINHARDT, P. J. Essentials of k-essence. *Physical review D*, v. 63, 2001.
- AMENDOLA, L.; TSUJIKAWA, S. *Dark Energy: Theory and Observations*. Cambridge University Press, 2010. ISBN 9781139488570. Disponível em: [https://books.google.com.br/books?id=Xge0hg\\_AIIYC](https://books.google.com.br/books?id=Xge0hg_AIIYC).
- ANDERSON, L. et al. The clustering of galaxies in the sdss-iii baryon oscillation spectroscopic survey: baryon acoustic oscillations in the data release 9 spectroscopic galaxy sample. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press (OUP), v. 427, n. 4, p. 3435–3467, Dec 2012. ISSN 1365-2966. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-2966.2012.22066.x>.
- ANDERSON, Lauren et al. The clustering of galaxies in the SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: baryon acoustic oscillations in the Data Releases 10 and 11 Galaxy samples. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, v. 441, n. 1, p. 24–62, 2014.
- ARKANI-HAMED, Nima; DIMOPOULOS, Savas; DVALI, Gia. The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter. *Physics Letters B*, Elsevier BV, v. 429, n. 3-4, p. 263–272, Jun 1998. ISSN 0370-2693. Disponível em: [http://dx.doi.org/10.1016/S0370-2693\(98\)00466-3](http://dx.doi.org/10.1016/S0370-2693(98)00466-3).

AUBOURG, Éric et al. Cosmological implications of baryon acoustic oscillation measurements. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 92, n. 12, Dec 2015. ISSN 1550-2368. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.92.123516>>.

Bardeen, James M. Gauge-invariant cosmological perturbations. , v. 22, n. 8, p. 1882–1905, out. 1980.

BAUDIS, Laura. The Search for Dark Matter. 1 2018.

Begeman, K. G. HI rotation curves of spiral galaxies. I. NGC 3198. , v. 223, p. 47–60, out. 1989.

BEKENSTEIN, Jacob D. Relativistic gravitation theory for the MOND paradigm. *Phys. Rev. D*, v. 70, p. 083509, 2004. [Erratum: *Phys.Rev.D* 71, 069901 (2005)].

BELGACEM, Enis et al. Modified gravitational-wave propagation and standard sirens. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 98, n. 2, Jul 2018. ISSN 2470-0029. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.98.023510>>.

BELLINI, E.; SAWICKI, I. Maximal freedom at minimum cost: linear large-scale structure in general modifications of gravity. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2014, p. 1–23, 2014.

BELLINI, Emilio; SAWICKI, Ignacy; ZUMALACÁRREGUI, Miguel. *hi<sub>c</sub>lassbackgroundevolution, initial* 7516. *Disponvelem* : <>.

BETOULE, M. et al. Improved cosmological constraints from a joint analysis of the sdss-ii and snls supernova samples. *Astronomy Astrophysics*, EDP Sciences, v. 568, p. A22, Aug 2014. ISSN 1432-0746. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/201423413>>.

\_\_\_\_\_. Improved cosmological constraints from a joint analysis of the SDSS-II and SNLS supernova samples. *Astron. Astrophys.*, v. 568, p. A22, 2014.

BEUTLER, Florian et al. The 6df galaxy survey: baryon acoustic oscillations and the local hubble constant. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press (OUP), v. 416, n. 4, p. 3017–3032, Jul 2011. ISSN 0035-8711. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-2966.2011.19250.x>>.

\_\_\_\_\_. \_\_\_\_\_. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press (OUP), v. 416, n. 4, p. 3017–3032, Jul 2011. ISSN 0035-8711. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-2966.2011.19250.x>>.

BLANCHET, Luc. Gravitational Radiation from Post-Newtonian Sources and Inspiralling Compact Binaries. *Living Rev. Rel.*, v. 17, p. 2, 2014.

Blas, Diego; Lesgourgues, Julien; Tram, Thomas. The Cosmic Linear Anisotropy Solving System (CLASS). Part II: Approximation schemes. , v. 2011, n. 7, p. 034, jul. 2011.

BOND, I.A. et al. Ogle 2003–blg–235/moa 2003–blg–53: A planetary microlensing event. *Astrophys. J.*, v. 606, p. 1–13, 2004.

BOWN, E. *DESI launches five-year quest to understand the universe*. Disponível em: <<https://insidetheperimeter.ca/desi-launches-five-year-quest-to-understand-the-universe/>>.

BRADASCHIA, C. et al. The virgo project: A wide band antenna for gravitational wave detection. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, v. 289, n. 3, p. 518–525, 1990. ISSN 0168-9002. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/016890029091525G>>.

BRANS, C. H.; DICKE, R. H. Mach' principle and a relativistic theory of gravitation. *Physical Review*, v. 124, p. 925–935, 1961.

BRINCKMANN, Thejs; LESGOURGUES, Julien. MontePython 3: boosted MCMC sampler and other features. *Phys. Dark Univ.*, v. 24, p. 100260, 2019.

BROOKS, S. P.; GELMAN, Andrew. General methods for monitoring convergence of iterative simulations. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, v. 7, p. 434–455, 1998.

Buchdahl, H. A. Non-linear Lagrangians and cosmological theory. , v. 150, p. 1, jan. 1970.

CALDWELL, Robert R.; KAMIONKOWSKI, Marc; WEINBERG, Nevin N. Phantom energy: Dark energy with  $w < -1$  causes a cosmic doomsday. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 91, p. 071301, Aug 2003. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.91.071301>>.

CHEVALLIER, MICHEL; POLARSKI, DAVID. Accelerating universes with scaling dark matter. *International Journal of Modern Physics D*, World Scientific Pub Co Pte Lt, v. 10, n. 02, p. 213–223, Apr 2001. ISSN 1793-6594. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1142/S0218271801000822>>.

COLLABORATION, Planck. Planck 2018 results. vi. cosmological parameters. *Astronomy Astrophysics*, p. 1–72, 2018.

COOKE, Ryan J.; PETTINI, Max; STEIDEL, Charles C. One percent determination of the primordial deuterium abundance. *The Astrophysical Journal*, American Astronomical Society, v. 855, n. 2, p. 102, Mar 2018. ISSN 1538-4357. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/aaab53>>.

CUTLER, Curt; HOLZ, Daniel E. Ultra-high precision cosmology from gravitational waves. *Phys. Rev. D*, v. 80, p. 104009, 2009.

Dallal, S. Al; Azzam, W. A Brief Review of Historical Supernovae. *International Journal of Astronomy and Astrophysics*, v. 11, p. 73–86, 2021.

DEFFAYET, Cédric et al. Imperfect dark energy from kinetic gravity braiding. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2010, n. 10, p. 026–026, Oct 2010. ISSN 1475-7516. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2010/10/026>>.

DESER, S.; WOODARD, R. P. Nonlocal cosmology. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 99, n. 11, Sep 2007. ISSN 1079-7114. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.99.111301>>.

DODELSON S., Schmidt F. *Modern Cosmology*. [S.l.]: Academic Press, 2020.

DURRER, R. The cosmic microwave background: The history of its experimental investigation and its significance for cosmology. *Classical and Quantum Gravity*, v. 32, p. 1–46, 2015.

DVALI, Gia; GABADADZE, Gregory; PORRATI, Massimo. 4d gravity on a brane in 5d minowski space. *Physics Letters B*, Elsevier BV, v. 485, n. 1-3, p. 208–214, Jul 2000. ISSN 0370-2693. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/S0370-2693\(00\)00669-9](http://dx.doi.org/10.1016/S0370-2693(00)00669-9)>.

DYSON, Frank Watson; EDDINGTON, Arthur Stanley; DAVIDSON, C. A determination of the deflection of light by the sun's gravitational field, from observations made at the total eclipse of may 29, 1919. *Royal Society*, v. 220, p. 571–581, 1920.

EINSTEIN, A. Zur elektrodynamik bewegter körper. *Annalen der Physik*, v. 17, p. 891–921, 1905.

\_\_\_\_\_. Explanation of the perihelion motion of mercury from the general theory of relativity. *Sitzungsber.Preuss.Akad.Wiss.Berlin*, v. 49, p. 831–839, 1915.

EISENSTEIN, Daniel J. et al. Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of sdss luminous red galaxies. *Astrophysical Journal Letters*, IOP Publishing Ltd., v. 633, n. 2 I, p. 560–574, nov. 2005. ISSN 2041-8205.

EISENSTEIN, Daniel J. et al. Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of SDSS luminous red galaxies. *The Astrophysical Journal*, American Astronomical Society, v. 633, n. 2, p. 560–574, nov 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1086/466512>>.

ESA. *Baryonic acoustic oscillations*. Disponível em: <<https://sci.esa.int/web/euclid/-/46681-baryonic-acou>>

EZQUIAGA, Jose María; ZUMALACÁRREGUI, Miguel. Dark energy in light of multi-messenger gravitational-wave astronomy. *Frontiers in Astronomy and Space Sciences*, Frontiers Media SA, v. 5, Dec 2018. ISSN 2296-987X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.3389/fspas.2018.00044>>.

EZQUIAGA, J. M.; ZUMALACÁRREGUI, M. Dark energy in light of multi-messenger gravitational-wave astronomy. *Front. Astron. Space Sci.*, v. 44, p. 1–28, 2018.

FEIGELSON E., Babu G. *Modern Statistical Methods for Astronomy: With R Applications*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2012.

FIERZ, M.; PAULI, W. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, v. 173, p. 211–232, 1939.

FRIEDMAN, A. Über die krümmung des raumes. *Zeitschrift für Physik*, v. 10, p. 377–386, 1922. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01332580>>.

FRIEDMANN, A. Über die möglichkeit einer welt mit konstanter negativer krümmung des raumes. *Zeitschrift für Physik*, v. 21, p. 326–332, 1924. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01328280>>.

GAILLARD, Mary K.; GRANNIS, Paul D.; SCIULLI, Frank J. The standard model of particle physics. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 71, p. S96–S111, Mar 1999. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.71.S96>>.

GELMAN, Andrew; RUBIN, Donald B. Inference from Iterative Simulation Using Multiple Sequences. *Statistical Science*, Institute of Mathematical Statistics, v. 7, n. 4, p. 457 – 472, 1992. Disponível em: <<https://doi.org/10.1214/ss/1177011136>>.

GLEYZES, Jérôme et al. New class of consistent scalar-tensor theories. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 114, n. 21, May 2015. ISSN 1079-7114. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.114.211101>>.

GONDRAN, Michel. The proca equations derived from first principles. *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers (AAPT), v. 77, n. 10, p. 925–926, Oct 2009. ISSN 1943-2909. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1119/1.3137042>>.

GREGORY, Phil. Frontmatter. In: \_\_\_\_\_. *Bayesian Logical Data Analysis for the Physical Sciences: A Comparative Approach with Mathematica® Support*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2005.

HARWIT, Martin; SPAANS, Marco. Chemical composition of the early universe. *American Astronomical Society*, v. 589, n. 1, p. 53–57, may 2003. Disponível em: <<https://doi.org/10.1086/374415>>.

H.DICKE, R. et al. Cosmic black-body radiation. *Astrophys. J.*, v. 142, p. 414–419, 1965.

HEISENBERG, Lavinia. A systematic approach to generalisations of general relativity and their cosmological implications. *Physics Reports*, Elsevier BV, v. 796, p. 1–113, Mar 2019. ISSN 0370-1573. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2018.11.006>>.

HICKEN, Malcolm et al. CfA3: 185 TYPE Ia SUPERNOVA LIGHT CURVES FROM THE CfA. *The Astrophysical Journal*, American Astronomical Society, v. 700, n. 1, p. 331–357, jul 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0004-637x/700/1/331>>.

HINTERBICHLER, Kurt; KHOURY, Justin. Screening long-range forces through local symmetry restoration. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 104, n. 23, Jun 2010. ISSN 1079-7114. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.104.231301>>.

HOGG, Natalie B.; MARTINELLI, Matteo; NESSERIS, Savvas. Constraints on the distance duality relation with standard sirens. *JCAP*, v. 12, p. 019, 2020.

HOLLEY-BOCKELMANN, Kelly et al. *Getting Ready for LISA: The Data, Support and Preparation Needed to Maximize US Participation in Space-Based Gravitational Wave Science*. 2020.

Holz, Daniel E.; Hughes, Scott A.; Shutz, Bernard F. Measuring cosmic distances with standard sirens. *Physics Today*, v. 71, p. 34, 2018.

HORNDESKI, G. W. Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space. *International Journal of Theoretical Physics*, v. 10, p. 363–384, 1974.

Horndeski, Gregory Walter. Second-Order Scalar-Tensor Field Equations in a Four-Dimensional Space. *International Journal of Theoretical Physics*, v. 10, n. 6, p. 363–384, set. 1974.

HOŘAVA, Petr. Quantum gravity at a lifshitz point. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 79, n. 8, Apr 2009. ISSN 1550-2368. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.79.084008>>.

HUBBLE, E. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, v. 15, p. 168–173, 1929.

HUBBLE, Edwin. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Academy of Sciences, v. 15, n. 3, p. 168–173, 1929. ISSN 0027-8424. Disponível em: <<https://www.pnas.org/content/15/3/168>>.

JACOBSON, Ted. Einstein-aether gravity: A Status report. *PoS*, QG-PH, p. 020, 2007.

Jarrett, Thomas. Large Scale Structure in the Local Universe - The 2MASS Galaxy Catalog. , v. 21, n. 4, p. 396–403, jan. 2004.

KALUZA, Theodor. Zum unitätsproblem in der physik. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math.Phys)*, 1921.

KALUZA, TH. On the unification problem in physics. *International Journal of Modern Physics D*, World Scientific Pub Co Pte Lt, v. 27, n. 14, p. 1870001, Oct 2018. ISSN 1793-6594. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1142/S0218271818700017>>.

KANTI, P.; RIZOS, J.; TAMVAKIS, K. Singularity-free cosmological solutions in quadratic gravity. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 59, n. 8, Mar 1999. ISSN 1089-4918. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.59.083512>>.

KASE, Ryotaro; TSUJIKAWA, Shinji. Cosmology in generalized horndeski theories with second-order equations of motion. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 90, n. 4, Aug 2014. ISSN 1550-2368. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.90.044073>>.

KHOURY, Justin; WELTMAN, Amanda. Chameleon fields: Awaiting surprises for tests of gravity in space. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 93, n. 17, Oct 2004. ISSN 1079-7114. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.93.171104>>.

KOBAYASHI, T. Horndeski theory and beyond: a review. *Reports on Progress in Physics*, v. 82, p. 1–54, 2019.

KOBAYASHI, Tsutomu; YAMAGUCHI, Masahide; YOKOYAMA, Jun'ichi. Generalized G-Inflation: —Inflation with the Most General Second-Order Field Equations—. *Progress of*

*Theoretical Physics*, v. 126, n. 3, p. 511–529, 09 2011. ISSN 0033-068X. Disponível em: <https://doi.org/10.1143/PTP.126.511>.

Kofman, Lev A.; Gnedin, Nickolay Y.; Bahcall, Neta A. Cosmological Constant, COBE Cosmic Microwave Background Anisotropy, and Large-Scale Clustering. , v. 413, p. 1, ago. 1993.

KOIVISTO, Tomi S. Newtonian limit of nonlocal cosmology. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 78, n. 12, Dec 2008. ISSN 1550-2368. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.78.123505>.

Koopmans, L. V. E. et al. Strong Gravitational Lensing as a Probe of Gravity, Dark-Matter and Super-Massive Black Holes. In: *astro2010: The Astronomy and Astrophysics Decadal Survey*. [S.l.: s.n.], 2009. v. 2010, p. 159.

KOWALSKI, M. et al. Improved Cosmological Constraints from New, Old and Combined Supernova Datasets. *Astrophys. J.*, v. 686, p. 749–778, 2008.

KREISCH, C.D.; KOMATSU, E. Cosmological constraints on horndeski gravity in light of gw170817. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2018, n. 12, p. 030–030, Dec 2018. ISSN 1475-7516. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2018/12/030>.

LECLERCQ, Florent; PISANI, Alice; WANDEL, Benjamin D. Cosmology: from theory to data, from data to theory. *Proc. Int. Sch. Phys. Fermi*, v. 186, p. 189–233, 2014.

Lemaître, G. Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques. *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, v. 47, p. 49–59, jan. 1927.

Lemaitre, G. L'Univers en Expansion. *Publications du Laboratoire d'Astronomie et de Géodesie de l'Université de Louvain*, v. 10, p. 1–19, jan. 1937.

LI, Tjonnie G. F. *Extracting Physics from Gravitational Waves*. Springer Theses, 2015. ISBN 978-3-319-19272-7. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-19273-4>.

LINDER, Eric V. Exploring the expansion history of the universe. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 90, p. 091301, Mar 2003. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.90.091301>.

\_\_\_\_\_. No Slip Gravity. *JCAP*, v. 03, p. 005, 2018.

LINEWEAVER, Charles H.; EGAN, Chas A. The cosmic coincidence as a temporal selection effect produced by the age distribution of terrestrial planets in the universe. *The Astrophysical Journal*, American Astronomical Society, v. 671, n. 1, p. 853–860, Dec 2007. ISSN 1538-4357. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1086/522197>.

LOVELOCK, D. The Einstein tensor and its generalizations. *J. Math. Phys.*, v. 12, p. 498–501, 1971.

MA, Chung-Pei; BERTSCHINGER, Edmund. Cosmological perturbation theory in the synchronous and conformal newtonian gauges. *The Astrophysical Journal*, American Astronomical Society, v. 455, p. 7, Dec 1995. ISSN 1538-4357. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1086/176550>>.

MAGGIORE, Michele. Phantom dark energy from nonlocal infrared modifications of general relativity. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 89, p. 043008, Feb 2014. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.89.043008>>.

MAGGIORE, Michele et al. Science case for the einstein telescope. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2020, n. 03, p. 050–050, Mar 2020. ISSN 1475-7516. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2020/03/050>>.

\_\_\_\_\_. Science Case for the Einstein Telescope. *JCAP*, v. 03, p. 050, 2020.

MILNE, E. A. Relativity, gravitation and world-structure. *Nature*, v. 135, p. 635–636, April 1935. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/135635a0>>.

MORTONSON, Michael J.; WEINBERG, David H.; WHITE, Martin. Dark Energy: A Short Review. 12 2013.

NASA. *Laser Interferometer Space Antenna*. 2020. Disponível em: <<https://lisa.nasa.gov/>>.

NICOLIS, Alberto; RATTAZZI, Riccardo. Classical and quantum consistency of the dgp model. *Journal of High Energy Physics*, Springer Science and Business Media LLC, v. 2004, n. 06, p. 059–059, Jul 2004. ISSN 1029-8479. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/1126-6708/2004/06/059>>.

NICOLIS, Alberto; RATTAZZI, Riccardo; TRINCHERINI, Enrico. Galileon as a local modification of gravity. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 79, n. 6, Mar 2009. ISSN 1550-2368. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.79.064036>>.

\_\_\_\_\_. \_\_\_\_\_. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 79, n. 6, Mar 2009. ISSN 1550-2368. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.79.064036>>.

OLIVEIRA, K. de; SARAIVA, M. de F. *Astronomia Astrofísica*. [S.l.]: Livraria da Física, 2014.

Penzias, A. A.; Wilson, R. W. A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s. , v. 142, p. 419–421, jul. 1965.

\_\_\_\_\_. \_\_\_\_\_. , v. 142, p. 419–421, jul. 1965.

POISSON, Eric; WILL, Clifford M. Gravitational waves from inspiraling compact binaries: Parameter estimation using second-post-newtonian waveforms. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 52, p. 848–855, Jul 1995. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.52.848>>.

Proca, Al. Sur la théorie ondulatoire des électrons positifs et négatifs. *J. Phys. Radium*, v. 7, n. 8, p. 347–353, 1936. Disponível em: <<https://doi.org/10.1051/jphysrad:0193600708034700>>.

PROJETO do Einstein Telescope. <<http://www.et-gw.eu/index.php/etimages>>. Accessed: 2021-12-10.

QUEIROZ, Farinaldo S. WIMP Theory Review. *PoS*, EPS-HEP2017, p. 080, 2017.

REGIMBAU, Tania et al. Mock data challenge for the einstein gravitational-wave telescope. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 86, n. 12, Dec 2012. ISSN 1550-2368. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.86.122001>>.

RHAM, Claudia de; TOLLEY, Andrew J. Dbi and the galileon reunited. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2010, n. 05, p. 015–015, May 2010. ISSN 1475-7516. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2010/05/015>>.

RHAM, Claudia de; GABADADZE, Gregory; TOLLEY, Andrew J. Resummation of Massive Gravity. *Phys. Rev. Lett.*, v. 106, p. 231101, 2011.

RIESS, Adam G. et al. Large Magellanic Cloud Cepheid Standards Provide a 1% Foundation for the Determination of the Hubble Constant and Stronger Evidence for Physics beyond  $\Lambda$ CDM. *Astrophys. J.*, v. 876, n. 1, p. 85, 2019.

\_\_\_\_\_. Large magellanic cloud cepheid standards provide a levidence for physics beyond cdm. *The Astrophysical Journal*, American Astronomical Society, v. 876, n. 1, p. 85, May 2019. ISSN 1538-4357. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/ab1422>>.

\_\_\_\_\_. A 2.4% Determination of the Local Value of the Hubble Constant. *Astrophys. J.*, v. 826, n. 1, p. 56, 2016.

ROBERTSON, Howard Percy. Kinematics and world-structure. *The Astrophysical Journal*, v. 82, p. 284, 1935.

ROSS, Ashley J. et al. The clustering of the sdss dr7 main galaxy sample – i. a 4 per cent distance measure at  $z = 0.15$ . *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press (OUP), v. 449, n. 1, p. 835–847, Mar 2015. ISSN 0035-8711. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1093/mnras/stv154>>.

\_\_\_\_\_. The clustering of the SDSS DR7 main Galaxy sample – I. A 4 per cent distance measure at  $z = 0.15$ . *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, v. 449, n. 1, p. 835–847, 2015.

SATHYAPRAKASH, B. S.; SCHUTZ, B. F. Physics, Astrophysics and Cosmology with Gravitational Waves. *Living Rev. Rel.*, v. 12, p. 2, 2009.

SATHYAPRAKASH, B. S.; SCHUTZ, B. F.; BROECK, C. Van Den. Cosmography with the Einstein Telescope. *Class. Quant. Grav.*, v. 27, p. 215006, 2010.

SATHYAPRAKASH, B S; SCHUTZ, B F; BROECK, C Van Den. Cosmography with the einstein telescope. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 27, n. 21, p. 215006, Sep 2010. ISSN 1361-6382. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/27/21/215006>>.

SCHNEIDER, R. et al. Low-frequency gravitational waves from cosmological compact binaries. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 324, n. 4, p. 797–810, 07 2001. ISSN 0035-8711. Disponível em: <<https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.2001.04217.x>>.

SCHUTZ, Bernard F. Determining the hubble constant from gravitational wave observations. *Nature*, v. 328, p. 310–311, 1986. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/323310a0>>.

STRITZINGER, Maximilian D. et al. THE CARNEGIE SUPERNOVA PROJECT: SECOND PHOTOMETRY DATA RELEASE OF LOW-REDSHIFT TYPE Ia SUPERNOVAE. *The Astronomical Journal*, American Astronomical Society, v. 142, n. 5, p. 156, oct 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0004-6256/142/5/156>>.

SUZUKI, N. et al. The hubble space telescope cluster supernova survey. v. improving the dark-energy constraints above  $z > 1$  and building an early-type-hosted supernova sample. *The Astrophysical Journal*, American Astronomical Society, v. 746, n. 1, p. 85, Jan 2012. ISSN 1538-4357. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/0004-637X/746/1/85>>.

TAYLOR EDWIN F., Wheeler John Archibald. *Exploring Black Holes: Introduction to General Relativity*. 1. ed. [S.l.]: Addison Wesley Longman, 2000.

TAYLOR, James E. et al. Measuring the geometry of the universe from weak gravitational lensing behind galaxy groups in the hst cosmos survey. *The Astrophysical Journal*, v. 749, p. 1–13, 2012.

VAINSHTEIN, A. I. To the problem of nonvanishing gravitation mass. *Phys. Lett. B*, v. 39, p. 393–394, 1972.

VELTEN, H. E. S.; MARTTENS, R. F. vom; ZIMDAHL, W. Aspects of the cosmological “coincidence problem”. *The European Physical Journal C*, Springer Science and Business Media LLC, v. 74, n. 11, Nov 2014. ISSN 1434-6052. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-014-3160-4>>.

WALD, Robert M. *General Relativity*. Chicago, USA: Chicago Univ. Pr., 1984.

WALKER, A. G. On Milne’s Theory of World-Structure\*. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s2-42, n. 1, p. 90–127, 01 1937. ISSN 0024-6115. Disponível em: <<https://doi.org/10.1112/plms/s2-42.1.90>>.

WETTERICH, C. Cosmology and the fate of dilatation symmetry. *Nuclear Physics B*, v. 302, p. 668–696, 1988.

York, Donald G. et al. The Sloan Digital Sky Survey: Technical Summary. , v. 120, n. 3, p. 1579–1587, set. 2000.

YUNES, Nicolás; SIEMENS, Xavier. Gravitational-wave tests of general relativity with ground-based detectors and pulsar-timing arrays. *Living Reviews in Relativity*, Springer Science and Business Media LLC, v. 16, n. 1, Nov 2013. ISSN 1433-8351. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.12942/lrr-2013-9>>.

ZHAO, W. et al. Determination of Dark Energy by the Einstein Telescope: Comparing with CMB, BAO and SNIa Observations. *Phys. Rev. D*, v. 83, p. 023005, 2011.

\_\_\_\_\_. Determination of dark energy by the einstein telescope: Comparing with cmb, bao, and snia observations. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 83, n. 2, Jan 2011. ISSN 1550-2368. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.83.023005>.

ZUMALACÁRREGUI, Miguel et al.  $h_i$  class: Horndeski in the Cosmic Linear Anisotropy Solving System. *JCAP*, v. 08, p. 019, 2017.

ZUMALACÁRREGUI, Miguel et al.  $h_i$  class : Horndeski in the cosmic linear anisotropy solving system. *JCAP*, v. 08, p. 019, 2017. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1705.08217>.