

Dissertação de
Mestrado

Respostas Fermiônicas à Violação da simetria de Lorentz

João Paulo da Silva Melo

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF
Rio de Janeiro - RJ
Fevereiro de 2022

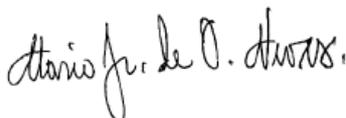
“RESPOSTAS FERMIONICAS À VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE LORENTZ”

João Paulo da Silva Melo

Dissertação de Mestrado em Física apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Ministério da Ciência Tecnologia e Inovação. Fazendo parte da banca examinadora os seguintes professores:



José Abdalla Helayël-Neto – Presidente/Orientador/CBPF



Mário Júnior de Oliveira Neves – UFRRJ



Sebastião Alves Dias – CBPF

Rio de Janeiro, 15 de Março de 2022.

Agradecimentos

Há quem diga que quando Isaac Newton disse algo no sentido de: “se vi mais longe é porque me apoie no ombro de gigantes”, ele estava na verdade desdenhando da baixa estatura de seu rival no campo das ideias, Robert Hooke. Sendo essa versão da história apócrifa ou não, mantenho a visão romântica de que talvez Newton, num ato isolado de humildade e reconhecimento, fizera uma reverência aos esforços daqueles que o antecederam e o deram suporte. É dentro dessa visão romântica que deixo aqui registrado meus agradecimentos aos gigantes os quais, sem duvida alguma, fizeram de seus ombros um suporte para que o presente trabalho chegasse a essa versão final. Os agradecimentos são:

- Antes de quaisquer outros, agradeço à minha forte e amada mãe, Genaina, ao meu exemplo e querido irmão, Jonatas, e ao meu fraterno e presente pai, João Piedade. Estes além de serem os responsáveis por tudo de bom que há em mim, deram, literalmente, suor e sangue para que meu sonho de me tornar um físico se tornasse realidade;
- Agradeço ao meu sempre presente orientador e atencioso professor, Helayël, pela oportunidade de trabalhar junto a ele. De fato um físico formidável e um ser humano de mais alta empatia e humildade. É verdadeiramente difícil mensurar, ou até mesmo descrever, o quanto tenho aprendido com o professor, tanto do ponto de vista da minha formação como físico quanto do ponto de vista humano;
- Agradeço ao professor Edson, que durante a minha graduação me ofertou valiosas oportunidades e, sempre com bastante empolgação, amizade, e uma didática sem igual, aumentou minha cultura em física, me dando todo suporte necessário para que sonho de chegar ao CBPF se tornasse realidade;
- Talvez as melhores partes da minha jornada acadêmica até aqui sejam os valiosos amigos que pude fazer e os divertidos e verdadeiramente engraçados momentos que passamos juntos. Estes amigos são pessoas formidáveis em todos os positivos sentidos desta palavra. Sempre me inspiram a trabalhar duro para poder acompanhá-los. Me sinto bastante privilegiado por tê-los como amigos, e esperançoso em relação ao futuro da ciência no país por causa da competência dos mesmo. Estes são: Samuel William, Letícia Ildefonso, João Batista, Guilherme Yoshi, Isac Max, Rafael Giovanni, Igor Gonçalves, Raul Mendes, Ederson Nery, Igor Peixoto, Publio Rwany e Wagno César;
- Deixo aqui meus agradecimentos à ilustríssima dupla de flamenguistas constituída pelos professores Sebastião e Álvaro. Os cursos que estes senhores ofereceram na pós-graduação do CBPF, sem a menor sombra de dúvidas, moldaram a forma com que olho para a Natureza. Em especial, destaco o curso de Métodos Teóricos para Física de Altas Energias, que sem mais delongas, terá sido o curso mais bonito e rico que terei feito na vida;

- Agradeço ao Professor Leonardo Ospedal pelas valiosas aulas de Eletromagnetismo e Mecânica Quântica ministradas junto ao professor Helayël. Sempre muito paciente, me ajudou muito a dar passos valiosos;
- Registro também meus agradecimentos aos colegas da republica Diracstão do CBPF. Sempre com uma ótima e respeitosa convivência, o ambiente, mesmo que virtual devido as dificuldades do nossos tempos, foi sempre de troca e evolução conjunta;
- Gostaria de deixar registrado também meus agradecimentos a todos os professores e professoras com que tive o privilégio de aprender um pouco nos meus tempos de graduação na UFSJ. Mas especialmente agradeço a professora Ana Cláudia tanto pelas motivadoras conversas, sempre cheias de valiosos conselhos, quanto pelos seus cursos. Também em especial, agradeço o professor Juan, que junto ao professor Edson me deram todo suporte para que chegasse ao CBPF com certa maturidade para realizar um bom trabalho;
- Agradeço ao meu bom e velho professor de matemática dos tempos de ensino fundamental e médio, Aquyqo Franco. Este foi o responsável por fazer aparecer as primeiras centelhas dos meus sonhos e me mostrou o caminho das pedras;
- Não podeira deixar de fora meus agradecimentos a todos os professores e professoras que contribuíram com a minha formação básica, sem eles eu não poderia ter dado os primeiros passos para chegar até aqui;
- Agradeço à todo os funcionários das secretárias, da limpeza, que preparam a comida e de todos os outros serviços essências. Sem eles, este trabalho, e nem qualquer um outro, poderia vir a ser realizado;
- Agradeço ao povo brasileiro em geral, que apesar de tanto preconceito e desigualdade, continuam a pagar seus impostos através do valor do seu trabalho, de forma a manter as instituições publicas funcionando. Como é o caso da CAPES, que me deu apoio financeiro via bolsa de mestrado;
- Por fim, agradeço a todos que de alguma forma, ou de outra, contribuíram positivamente com a minha jornada.

“The mathematician plays a game in which he himself invents the rules while the physicist plays a game in which the rules are provided by nature, but as time goes on it becomes increasingly evident that the rules which the mathematician finds interesting are the same as those which nature has chosen.”

- Paul A. M. Dirac

Resumo

Nesta contribuição, buscamos dar uma contextualização, que parte desde as discussões mais embrionárias até às mais contemporâneas, sobre a evolução das ideias que permeiam cenários em que a violação da simetria de Lorentz pode acontecer com base em alguma teoria mais fundamental. Ao longo do texto, são estudados e discutidos efeitos da violação da simetria de Lorentz no setor fermiônico. Dois aspectos originais destacam-se na Dissertação: o mixing fóton-fotino e o cenário em que há uma anisotropia entre o setor espacial e temporal na equação de Dirac.

Palavras-chave: Violação da Simetria de Lorentz, Supersimetria, Relações de Dispersão Fotônicas, Relações de Dispersão Fermiônicas.

Abstract

Our effort in this contribution is to provide an overview of developments related to the activity known as Lorentz Symmetry Violation (LSV). We start off from the very seminal paper by Paul A. M. Dirac in 1951. Throughout the text, effects of violation of Lorentz symmetry in the fermionic sector are studied and discussed. Two original aspects stand out in the Dissertation: the photon-photino mixing and the scenario in which there is an anisotropy between the spatial and temporal sectors in the Dirac equation.

Keywords: Lorentz Symmetry Violation, Supersymmetry, Photonic Dispersion Relations, Fermionic Dispersion Relations.

Sumário

1	Introdução e contextualização	1
1.1	Supersimetria e violação da simetria de Lorentz	6
2	Violação da simetria de Lorentz e o Mixing Fóton-Fotino	9
2.1	As equações de Maxwell modificadas	11
2.2	A equação de Dirac modificada	12
2.2.1	Decomposição de Gordon	13
2.3	As equações de campo no espaço dos momenta	13
2.4	As massas do Fóton e do Fotino com $(\bar{\psi}\gamma_5\psi) = (\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi) = 0$	13
2.4.1	A massa do Fotino	15
2.4.2	A massa do fóton	18
2.5	As massas do Fóton e do Fotino com $(\bar{\psi}\gamma_5\psi) \neq 0$ e $(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi) \neq 0$	20
2.5.1	A massa do Fotino	20
2.5.2	A massa do Fóton	23
3	Generalização da equação de Dirac	28
4	Caso especial da generalização da equação de Dirac	33
4.1	A relação de dispersão modificada	34
4.2	Velocidade de Grupo	34
4.3	O propagador fermiônico modificado	35
4.4	A decomposição de Gordon	35
4.5	O tensor energia-momento	35
4.6	Soluções para equação de Dirac estendida	36
4.7	O paradoxo de Klein	38
4.8	O <i>Zitterbewegung</i>	43
4.8.1	Definindo um pacote de ondas	43
4.8.2	O termo de corrente para o Pacote de Ondas	45
4.8.3	Determinando os coeficientes b e d^*	47
4.8.4	A oscilação em torno da trajetória clássica	48

5	Uma proposta de assimetria entre o espaço e o tempo na equação de Dirac	50
5.1	As equações de campo	51
5.2	Espectro de energias e a velocidade grupo	51
5.3	O propagador fermiônico	53
5.4	Tensor energia-momento	53
5.5	Introduzindo a interação eletromagnética	54
5.5.1	A equação de Dirac modificada	54
5.5.2	Decomposição de Gordon	55
5.5.3	As equações de Maxwell Modificadas	55
5.5.4	Tensor energia-momento	57
5.6	Soluções da equação de Dirac modificada	57
5.7	Solução para o primeiro caso para $f(z)$	59
5.7.1	Explorando as condições de contorno para soluções com $E^2 - m^2c^4 < 0$	61
5.7.2	A forma das soluções de spin up e down com $E^2 - m^2c^4 < 0$	62
5.7.3	Explorando as condições de contorno para soluções com $E^2 - m^2c^4 > 0$	64
5.7.4	A forma das soluções de spin up e down com $E^2 - m^2c^4 > 0$	65
5.8	Solução para o segundo caso de $f(x)$	66
6	Considerações finais	67
A	Álgebra das matrizes Gama	69
A.1	A covariância da equação de Dirac	71
A.2	A matriz γ_5	73
A.3	Propriedades algébricas das matrizes Gama	74
A.4	Conjugação de carga das matrizes Gama	77
A.5	Rearranjamento de Fierz	78
B	Cálculo da inversa da matriz Ω que advém da equação (2.27)	79
C	Cálculo da inversa do operador D	81
C.1	Testando o Resultado	85
D	Cálculo de decomposições de Gordon	88
D.1	Caso do mixing Fóton-Fotino	88
D.2	Caso da equação de Dirac generalizada	89
D.3	Caso do <i>Zitterbewegung</i>	92
D.4	Caso da derivada modificada	93

E	Cálculo dos tensores energia-momento	97
E.1	Caso da equação de Dirac generalizada	97
E.2	Caso da equação de com derivada modificada	104
F	Soluções da equação de Dirac modificada com $R_\mu = 0$	109
F.1	Soluções de energias positivas no referencial do laboratório	109
F.1.1	Condição de normalização para as soluções de energias positivas	111
F.2	Soluções de energias negativas no referencial do laboratório	113
F.2.1	Condição de normalização para as soluções de energias negativas	115
G	Solução da equação de Dirac modificada (5.59) para o segundo caso de $f(z)$	118
G.1	Explorando as condições de contorno para soluções com $E^2 - m^2c^4 < 0$	120
G.2	A forma das soluções de spin up e down com $E^2 - m^2c^4 < 0$	121
G.3	Explorando as condições de contorno para soluções com $E^2 - m^2c^4 > 0$	123
G.4	A forma das soluções de spin up e down com $E^2 - m^2c^4 > 0$	125
	Referências	127

Capítulo 1

Introdução e contextualização

Num primeiro momento, quando se fala de violação da simetria de Lorentz, do inglês *Lorentz Symmetry Violation*, ou simplesmente LSV, logo pensamos que nos tornamos propensos a desmantelar a Relatividade Restrita, o que seria uma espécie de negação das ideias de Einstein. Mas de certo não é isso o que acontece. A discussão sobre um possível cenário no qual pode haver LSV se inicia com P. A. M. Dirac, em 1951, num trabalho em que ele apresenta a ideia de uma nova eletrodinâmica quântica [1]. Nesta ocasião, Dirac questiona se há um éter, e nesse sentido, segue com a proposição de um vetor de fundo que possui uma direção preferencial de forma a analisar se tal vetor era capaz de revelar a natureza das divergências nas teorias quânticas de campo. Essa forma de atacar as divergências, o que parecia um problema à época[†], caracterizava a quebra da simetria de Lorentz pela presença de um éter, o que se assimila muito como a forma que se propõe cenários de LSV mais recentemente, através da introdução de anisotropias no espaço-tempo. A partir daí, ainda no mesmo ano, houve uma discussão envolvendo H. Bondi e T. Gold, não no sentido de rebater as ideias de Dirac, mas no sentido de mostrar como esse contexto de Dirac também poderia estar ligado com algumas discussões cosmológicas [3]. Este primeiro período, marca o nascimento da discussão sobre até que ponto, ou sob quais perspectivas, as simetrias espaço-temporais descritas pela Relatividade Restrita devem vigorar.

Depois deste período a discussão tem um certo hiato, já que a década de cinquenta do

[†]Por muito tempo, e em alguns casos ainda hoje, o procedimento da renormalização que implementamos para extrair resultados físicos finitos em teoria quântica de campos foi visto como uma forma de "varrer a sujeira para debaixo do tapete". Mas num certo sentido, a renormalização tem um sentido físico mais profundo, porque é a partir da mesma que construímos o grupo de renormalização e chegamos ao *running coupling*, que é essencial para a descrição das interações fortes, por exemplo. Além do mais, G. Scharf, em seu livro "*Finite quantum electrodynamics*", calcula correções perturbativas para os processos da QED sem fazer uso de renormalização [2]. Para isso ele usa de resultados da década de setenta para tratar as distribuições singulares e um critério a mais chamado de critério de causalidade. O mais interessante dessa abordagem, é que em um certo ponto o autor mostra que os seus resultados coincidem perfeitamente com os resultados obtidos via renormalização. Portanto, isso indica que o procedimento de renormalização para tratar divergências em teoria quântica de campos é um direito, se feito de maneira consistente e cuidadosa.

século passado foi muito devotada às interações fortes e fracas. Foi somente no ano de 1963 que J. D. Bjorken publica um trabalho com foco na tentativa de buscar uma origem dinâmica para o campo eletromagnético através da introdução de um modelo de Heisenberg com quatro férmions, chegando a conclusão de que a partir dessa premissa gera-se um estado de vácuo caracterizado por um condensado que não é nulo e que se transforma como vetor. Com isso, Bjorken começa a buscar um eletromagnetismo emergente e faz considerações sobre um possível fóton composto, com tudo isso ocorrendo num cenário de quebra espontânea da simetria de Lorentz [4]. Logo em seguida, em 1966, P. R. Phillips discute o Graviton como se o mesmo fosse um bóson de Goldstone, isso na presença de um vetor de fundo que quebra a simetria de Lorentz [5]. Em 1967, T. G. Pavlopoulos introduz a quebra da simetria de Lorentz no sentido de aprimorar o trabalho Bjorken [6]. Também em 1967, L. B. Rédei relaciona a física de partículas com a LSV estudando o fator $g - 2$ do múon. Ele o faz considerando que o espaço-tempo possui uma anisotropia que se revela para distâncias da ordem de 10^{-16} cm, que era o resultado para escala dos decaimentos fracos à época[‡], e argumentando que até então só havia sido verificado a invariância da simetria de Lorentz para escalas maiores que essa [7]. Estes trabalhos faziam parte de uma busca do entendimento de possíveis situações nas quais a LSV se fazia presente. Busca essa que emergiu do impactante resultado da quebra da simetria de paridade nas interações fracas na segunda metade da década de cinquenta, teoricamente proposta por T.-D. Lee e C.-N. Yang em 1956, e experimentalmente cacificada pela madame C.-S. Wu e seus colaboradores em 1957 [8, 9]. Então, dado o fato de que há violação da simetria de paridade e que essa simetria parecia ser um fato inviolável na natureza, passou-se a questionar se a simetria de Lorentz era um marco tão firme assim ou se poderíamos, de alguma forma, acessar um regime da natureza em que a simetria de Lorentz poderia vir a ser violada, e isso justifica a busca deste cenário na década de sessenta.

Já a década de setenta é aberta com a consolidação da cromodinâmica quântica (QCD) e o trabalho de M. Veltman e G.'tHooft sobre a renormalizabilidade das teorias de Yang-Mills. Então é dentro deste contexto que a cena da LSV se dá na década de setenta, com um trabalho de H. B. Nielsen e M. Ninomiya de 1978, onde os autores procuraram estudar a função Beta de uma teoria de Yang-Mills não covariante, e puderam mostrar que o ponto fixo ocorre num regime em que a simetria de Lorentz é restaurada [10].

Na década de oitenta, a questão central era a Grande Unificação. Neste contexto, nomes como J. Ellis, M. K. Gaillard, D. V. Nanopoulos, S. Rudaz e, de forma independente destes já citados, A. Zee, começam a discutir a possibilidade de que o decaimento do próton, que é previsto pela teoria de Grande Unificação, possa acontecer também com pequenos desvios da simetria de Lorentz [11, 12]. Concomitantemente a estes trabalhos citados, o início da década foi marcado também pela prova dada, em 1982, da finitude das teorias de Yang-Mills $N = 4$ em todas as ordens da expansão perturbativa, mas a demonstração desta prova não era manifestamente Lorentz covariante. Então, partiu-se para uma discussão para verificar até que ponto se poderia levar a simetria de Lorentz, discussão essa que foi marca pelo já citado H. B. Nielsen e seus

[‡]A escala do decaimento fraco hoje, é sabido hoje, que é da ordem de 10^{-18} cm.

colaboradores [13–15].

O trabalho de Dirac e este período citado, de cerca de vinte anos, marcam a discussão embrionária a qual a partir da teoria de cordas ganha consistência e vem a culminar nas discussões sobre a LSV nos dias de hoje. A primeira revolução das cordas acontece em 1984, e já na era das supercordas que aparece o primeiro trabalho V. A. Kostelecký e S. Samuel de 1989, no qual há, no cenário das cordas abertas, campos tensoriais que podem vir a tomar valor esperado no vácuo não trivial [16]. Sendo assim, esses campos tensoriais, que se condensam no vácuo, quebram a simetria de Lorentz. Este é o trabalho que dá partida para a próxima fase da investigação sobre a LSV, uma fase que agora é mais inspirada na teoria de cordas. Ainda no mesmo ano de 1989, estes dois autores publicam um outro trabalho em conjunto que coloca vínculos fenomenológicos da teoria de cordas para o ambiente da quebra da simetria de Lorentz [17].

O ano de 1990 foi o ano da publicação do famoso e importante trabalho de S. M. Carroll, G. B. Field e R. Jackiw. Trabalho este que praticamente se tornou o maior ícone da quebra de simetria de Lorentz [18]. No artigo, Carroll-Field-Jackiw, o simplesmente CFJ, buscam limites na quebra da simetria de Lorentz usando um modelo topológico, que é uma versão em $(1 + 3)D$ do modelo de Chern-Simons em $(1 + 2)D$, descrito pelo termo lagrangiano

$$\mathcal{L} \sim \varepsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} v^\mu A^\nu F^{\kappa\lambda}.$$

Onde A^ν e $F^{\kappa\lambda}$ são o campo do fóton e o *Field Strength* eletromagnético, respectivamente, e v^μ é um campo vetorial de fundo que quebra a simetria de Lorentz e altera as equações de Maxwell. Este modelo de CFJ faz uso de dados astrofísicos para estimar parâmetros da LSV.

Logo em seguida, em 1995, Don Colladay lança o chamado Modelo-Padrão minimamente estendido, do inglês *minimal Standard-Model extension*, ou simplesmente minimal SME, na escola de verão do *Center for Spacetime Symmetries* da universidade de Indiana (IUCSS). Em 1997 e 1998, nasce o famoso modelo padrão estendido, do inglês *Standard-Model extension*, ou de forma mais curta SME, com um par de trabalhos de Don Colladay e V. A. Kostelecký [19, 20]. O SME tem todas as características do modelo-padrão usual - ou seja, as mesmas simetrias internas $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$, livre de derivadas de ordem superiores e é também renormalizável - e da relatividade geral, exceto que a simetria de Lorentz e também a simetria de conjugação de carga, paridade e inversão temporal (CPT), podem vir a ser violadas. De certa forma, dentro da visão da escola de Indiana, a simetria de Lorentz permanece válida uma vez que a teoria se transforma normalmente sob rotações ou *boosts* se essa transformação é feita no referencial do laboratório, e essas são ditas transformações de Lorentz do observador ou passiva. A LSV aparece apenas quando os campos que descrevem as partículas são girados ou aumentados em relação ao valor esperados de tensores que descrevem o estado de vácuo, o que consiste no que se convencionou chamar de transformações de Lorentz de partículas, ou ativa. Dentre as várias abordagens contemporâneas para a investigação da LSV, o SME é o quadro teórico mais difundido para se estudar em múltiplas frentes a fenomenologia da LSV.

O modelo de CFJ e o SME abrem novas janelas de exploração e nos dão a perspectiva de que há situações em que efeitos da LSV possam se manifestar no regime de mais baixas energias, energias acessíveis nos aceleradores e nas observações astrofísicas e cosmológicas disponíveis ou factíveis de construção.

Após o SME, em 1999, N. Seiberg e E. Witten lançam a teoria quântica de campos não comutativas (NCFTs). Onde agora não há, também, comutatividade no espaço-tempo, e assim emerge imediatamente uma quebra da simetria de Lorentz [21]. O limite de baixas energias para teoria de quântica de campos para cordas, deduzido neste trabalho, são as NCFTs, e essa é uma abordagem teórica, menos popular que o SME, para a investigação de modelos com LSV.

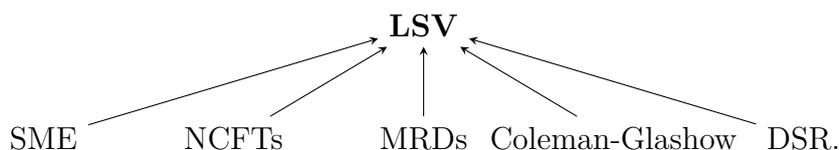
Nos anos de 1997 e 1999 surgiu uma nova discussão para verificação da LSV, guiada pelos trabalhos de G. Abelino-Camelia e dos já citados J. Ellis, N. E. Mavromatos e D. V. Nanopoulos, baseada nas Relações de Dispersão Modificadas (MDRs) para o fóton [22, 23]. MDRs para fótons no vácuo aparecem em várias abordagens teóricas na busca de uma teoria completa para a gravitação quântica. Para fótons de altas energias, que são acessados em medidas astrofísicas, é possível fazer análises de possíveis desvios em comparação com as relações de dispersão padrão, o que poderia estar indicando a presença da LSV ou algum efeito de gravitação quântica, e este é o cenário dos trabalhos citados. Houve, ainda na linha das MRDs, em 1999 a publicação de um importante trabalho escrito por R. Gambini e J. Pullin, o qual não se baseava na teoria de cordas e nem na gravitação quântica usual - isto é, no formalismo de primeira ordem, abordagem semi-classica, etc. - mas sim no contexto da *loop quantum gravity*, e nesse trabalho eles obtêm equações de Maxwell modificadas por efeitos da *loop quantum gravity* e mostram a birrefringência do vácuo [24]. Outros dois trabalhos importantes com relação as MDRs foram publicados um no ano de 2000 por G. Amelino-Camelia e S. Majid [25], e outro no ano de 2002 por J. Alfaro, H. A. Morales-Técolt e L. F. Urrutia [26], e estes consistem numa caracterização de relações de dispersão que podem vir indicar a LSV. Então, dentro deste contexto da gravitação quântica é importante dizer, de forma geral, que os efeitos físicos da LSV relacionados à gravitação quântica formam o que a literatura chama de “*Windows on Quantum Gravity*”, que são situações de possíveis verificações, que seguem: Novas relações de dispersão para o fóton e birrefringência do vácuo da QED; Lapso de tempo (*time delay*) em sinais de GRBs (*gamma-ray bursts*), AGNs (núcleos galácticos ativos), pulsares; *Splitting* do fóton; Decaimento do fóton; Aniquilação de fótons emitidos por *blazars*; Efeito Cherenkov no vácuo; Decaimento de uma partícula de um estado de helicidade para outro.

Ainda no ano de 1999, S. Coleman e S. L. Glashow lançam, a partir de primeiros princípios, a hipótese de que em altas energias, perto da escala de Planck, pode haver LSV [27]. Nesta época, o marco mais próximo da escala de Planck era provido de observações de raios cósmicos ultra energéticos na faixa dos $10^{11}\text{GeV} \sim 10^{-8}M_{Pl}$ [§].

[§]A escala de Planck é caracterizada por energias da ordem de 10^{19}GeV , distâncias em torno de 10^{-35}m , intervalos de tempo da ordem de 10^{-43}s .

Uma outra abordagem para a LSV surge em 2002, a abordagem do já citado G. Abelino-Camelia conhecida como *Doubly-Special Relativity* (DSR) [28]. A qual também teve contribuições de J. Magueijo em um trabalho de 2003 [29]. Essa abordagem consiste de uma teoria da relatividade dupla no sentido de que há agora dois invariantes, a velocidade luz e uma escala de energia, que equivale a uma escala de comprimento mínimo, e essa escala de energia pode ser a escala de Planck. Dentro deste contexto de dois invariantes, temos uma violação da simetria de Lorentz direto na álgebra do grupo de Poincaré devido a presença desta escala mínima de comprimento invariante. Essa modificação da álgebra do grupo de Poincaré é realizada via um procedimento matemático chamado de contração de Wigner-Inönmü, onde se parte de um grupo de Anti-de Sitter, realiza uma contração de Wigner-Inönmü e obtém-se uma chamada κ -Poincaré álgebra. Essa κ -Poincaré álgebra é uma deformação da álgebra de Poincaré usual, onde essa deformação se configura por uma escla de comprimento na álgebra de Poincaré que modifica a conhecida simetria de Lorentz.

De forma a propor uma síntese, se queremos investigar a LSV podemos nos filiar a uma das seguintes frentes:



Contudo, podemos dizer que a postura de trabalho para investigar a LSV, postura essa que vem desde a década de cinquenta do século passado, consiste em sempre manter em mente que a simetria de Lorentz é um fato da natureza indispensável na escala em que vivemos, na escala da física do Modelo-Padrão e funciona muito bem no contexto da Grande Unificação. Mas ainda assim, paira a questão de até em que ponto podemos levar essa simetria, uma vez que temos boas razões para acreditar que a mesma deva se quebrar em escalas muito diminutas de distância e nas de energias muito altas. Sendo assim, no contexto em que vivemos, de baixas energias, é certo que não veremos a violação da simetria de Lorentz de forma plena, a quebra da simetria vai ser manifesta na nossa era através de efeitos muito finos, pequenos, uma vez que estes devem ser efeitos suprimidos por alguma potencia da escala de Planck, por exemplo.

As buscas experimentais e observacionais dos últimos anos para estes efeitos supressos que violam a simetria de Lorentz na nossa era, tem nos dado bons limites para os parâmetros que modulam a quebra. Os resultados mais atuais são publicados anualmente por V. A. Kostelecký e N. Russell num copilado chamado de "*Data Tables for Lorentz and CPT Violation*", que no período que redijo este texto, dezembro de 2021, se encontra em sua sua décima terceira versão [30]. Um outro trabalho interessante, apresentado na conferência DISCRETE em 2018 e publicado em 2020, com autoria de J. Bolmont e C. Perennes, traz uma revisão geral da fenomenologia da LSV e nos dá uma indicação de que dados buscar para estabelecer limites para a LSV [31]. Essas buscas experimentais e observacionais se concentram, em geral, na avaliação

de fenomenologias ligados com a queda de corpos num fundo anisotrópico, relógios atômicos no espaço, birrefringência da luz no vácuo, efeitos de precessão de Spin, *shift* de níveis de energia atômicos, física de neutrinos, avaliação de relações de dispersão modificadas para fótons de altas energias, observação dos *gamma ray burst*, entre outros.

1.1 Supersimetria e violação da simetria de Lorentz

Quando estamos tratando a LSV estamos falando de uma quebra de simetria que deva ser verificada em energias muito altas ou em escalas de distâncias muito pequenas. A Supersimetria (SUSY) é uma simetria que vigora muito bem em regimes de energias elevados. Dessa forma, tornasse um tanto natural começar a se questionar sobre qual a relação da quebra da simetria de Lorentz e a quebra da SUSY, até porque sabemos que a formulação da SUSY padrão é construída a partir da própria simetria de Lorentz[¶]. Então, os trabalhos que marcam essa união datam do ano de 2002, como autoria de M. S. Berger e V. A. Kostelecký, surgindo logo após o estabelecimento do SME [32], e do ano seguinte, 2003, com um trabalho de autoria solo de M. S. Berger [33]. A partir destes trabalhos, a SUSY absorve a LSV introduzindo um novo elemento, que é uma forma de direção privilegiada de fundo, que são objetos tensoriais, na álgebra de Supersimetria.

Logo em seguida, o grupo do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF) entra em cena com um primeiro trabalho publicado em 2003, tendo autoria de nomes como H. Belich, J. L. Boldo, L. P. Collato, J. A. Helayël-Neto e Á. L. M. A. Nogueira [34], e um segundo, de 2004, com autoria de A. P. Baêta Scarpelli e os outros já citados [35]. Estes trabalhos se diferenciam da proposta de M. S. Berger e V. A. Kostelecký porque ao invés de modificar a álgebra, nos remetemos ao fato de que a violação da SUSY é uma violação que ocorre em escalas de energias mais baixas, ela povoa o deserto entre a escala eletrofraca e a escala da grande unificação, e como já argumentamos, a LSV deve ser mais próxima da escala de Placnk. Assim, quando a LSV ocorre, a SUSY deve estar presente. Então, buscou-se uma formulação supersimétrica para o próprio termo de fundo que quebra a simetria de Lorentz, isto é, os parceiros supersimétricos destes termos de fundo. De modo geral, é adotada a premissa fundamental de associar ao fundo que faz com que haja a LSV todo o multiplete de supersimetria, de modo que podemos buscar uma origem microscópica para estes tensores de fundo, uma vez que agora os férmios podem formar bilineares que podem vir a constituir estes tensores de fundo.

Outros trabalhos muito interessantes que sugeriram nessa época dentro deste contexto são os de autoria de P. A. Bolokhov, S. Nibbelink Groot e M. Pospelov em 2005 [36], e outro com autoria de A. Katz e Y. Shadmi em 2006 [37]. No primeiro trabalho citado, é construída uma versão da eletrodinâmica quântica (QED) supersimétrica com presença da LSV e a partir daí é feito um estudo detalhado da birrefringência do vácuo da QED na presença de termos

[¶]De fato há formulações de SUSY não-relativísticas. Talvez o exemplo mais imediato é a formulação de SUSY construída a partir das representações do grupo $SO(3)$.

que quebram a simetria de Lorentz. Já no segundo trabalho, o foco é na quebra da SUSY, implicando que as massa dos pares supersimétricos sofrem um *split* de forma que quebramos a degenerescência supersimétrica, e por consequência a quebra da simetria de Lorentz.

Um trabalho importante também a se citar data de 2012, desenvolvido pelos pesquisadores C. F. Farias, A. C. Lehum, J. R. Nascimento e A. Yu. Petrov, da Universidade Federal da Paraíba (UFPB) [38]. Trabalho este que segue a linha de M. S. Berger e V. A. Kostelecký, introduzindo um fundo etéreo, que gera uma direção privilegiada, na álgebra de supersimetria e construindo a partir daí uma formulação em supercampos.

É dentro de todo este contexto que nessa contribuição buscamos, no Capítulo 2, considerar um modelo supersimétrico que leva em consideração o setor fóton-fotino na presença de um fundo supersimétrico que viola a simetria de Lorentz. Os campos do fóton e do fotino aparecem misturados devido a presença de um campo de fundo constante, descrito por campo fermiônico de Majorana, que, por argumentos advindos da supersimetria, induzem essa mistura. Dois quadri-vetores reais, que representam anisotropias espaço-temporais e portanto violam a simetria de Lorentz, são incluídos e afetam as massas do fóton e do fotino. Neste cenário, deduzimos a expressão do espectro de massa do fóton e do fotino em termos deste fundo e mostramos como a degenerescência de massa fóton-fotino é quebrada. Precisamente, mostramos como todo este fundo que viola a simetria de Lorentz faz com a supersimetria venha a ser quebrada. Dando um passo adiante, procuramos investigar como este fundo afeta as decomposições de Gordon para a corrente de spin do fóton.

Em seguida, nos Capítulos 3 e 4, entramos em uma outra discussão focando nossa atenção em buscar resultados que ilustram como anisotropias espaço-temporais afetam as propriedades usuais dos férmions de Dirac, isso através da análise das relações de dispersão modificadas e velocidade de grupo, derivação dos propagadores fermiônicos estendidos, obtenção das decomposições de Gordon das correntes eletromagnéticas, obtenção das soluções de energia positiva e negativa e a reconsideração do paradoxo de Klein e da fenomenologia do *Zitterbewegung*.

No Capítulo 5, procuramos buscar um entendimento mais fundamental das consequências da proposição de uma assimetria entre o espaço e o tempo na equação de Dirac, em que a derivada espacial aparece na presença de um parâmetro multiplicativo dependente das coordenadas espaço-tempo. Neste cenário, estudamos as soluções da equação de Dirac, obtivemos a decomposição de Gordon da corrente eletromagnética, os efeitos deste cenário nas equações de Maxwell e estudamos o tensor energia-momento.

Logo após, e dando um fechamento ao trabalho, apresentamos um capítulo de considerações finais onde levantamos os pontos fortes e fracos de todo o trabalho realizado. Registramos neste espaço também as perspectivas futuras que emergem do presente texto.

Por fim, apresentamos um conjunto de sete Apêndices dedicados a desenvolvimentos técnicos e alguns pontos conceituais que julgamos importantes mas demasiadamente prolixos para serem apresentados no corpo central do texto. Terminamos apresentando as referências

que serviram de inspiração e apoio.

Capítulo 2

Violação da simetria de Lorentz e o Mixing Fóton-Fotino

Damos início a este capítulo enunciando o fato de que o Modelo-Padrão é a base sólida do nosso conhecimento sobre a física de partículas elementares. A construção e validação experimental do Modelo-Padrão é um esforço colaborativo de décadas e de difícil condensação em um junção curta de parágrafos descritivos. Mas uma boa síntese seria pensar que alma do Modelo-Padrão seria o suprassumo da formulação dos Campos Quânticos Relativísticos (CQR), que advém da forma mais eficiente de se propor uma unificação de dois pilares fundamentais da física como um todo, a Relatividade Restrita e a Mecânica Quântica. Dentro deste ponto de vista, conseguimos uma forma consistente para escrever uma teoria interagente que seja de natureza tanto quântico quanto relativística ao mesmo tempo, com as partículas se manifestam como oscilações destes CQR. Então, sendo os CQR os objetos fundamentais para a construção do Modelo-Padrão, fica evidente, portanto, que a simetria de Lorentz é que rege este contexto todo. De tal forma, cada resultado de experimental de alta precisão que valida o Modelo-Padrão, é também uma consolidação da simetria de Lorentz como fato fundamental da natureza.

Por outro lado, é um fato também que há limitações no Modelo-Padrão que tocam em pontos fundamentais tais como uma descrição da massa dos neutrinos e suas oscilações, a incorporação da matéria escura e a origem da massa do Higgs, para ficar apenas nestes exemplos. Essas limitações podem abrir janelas para novas físicas que vão para além do próprio Modelo-Padrão, físicas em escalas de energias mais altas, como é o caso da SUSY, bem como abrir portar para algumas formulações de SME's que podem descrever manifestações de possíveis cenários que vão para além do Modelo-Padrão e que violam a simetria de Lorentz, violações estas que advém de um contexto mais fundamental, por exemplo contextos ligados com a teoria de cordas, isso se nos atentamos aos resultados da escola de Indiana, de modo que há maneiras de se propor tentativas viáveis para a detecção dessas violações em baixas energias através do desenvolvimento de fenomenologias que levam em considerações efeitos supressos da quebra da

simetria espaço-temporal.

Nesse sentido, seguimos o pensamento bem consolidado de que a própria estrutura do espaço-tempo, vista através da simetria Lorentz, nos dá todas as bases para que possamos entender a existência de uma simetria mais ampla e fundamental que a própria simetria de Lorentz, esta é a chamada SUSY. Nessa linha, podemos estudar qual é a repercussão da SUSY em diferentes escalas de energias. Partindo dessas ideias, dentro do CBPF o pensamento segue no sentido de assumir a percepção de uma física na escala de Planck, onde nada mais garante a simetria de Lorentz como sendo válida, de forma que a medida que as escalas de energias vão se tornando mais baixas, a simetria de Lorentz começa a ser mais perceptível. A partir dantes ponto de vista, segue-se pensando que a quebra da simetria espaço-temporal em altas energias talvez tenha deixado resquícios que podem vir a ser descritos, e detectados, em energias mais baixas. Esses resquícios devem ser descritos sob efeitos bastante supressos de campos vetoriais, ou tensoriais, de fundo. Assim, a visão do grupo do CBPF, enfatiza que na escala de Plank nós ainda temos a SUSY vigorando, de forma que em uma descrição da quebra da simetria de Lorentz parece ser indispensável uma formulação supersimétrica. Com essa ideia de que a SUSY está presente desde o início, afirma-se que os campos de fundo, responsáveis pela violação da simetria de Lorentz, devam ser campos componentes de algum super-multiplete, o qual introduz a necessidade de campos de fundo de natureza fermiônica na forma de parceiros supersimétricos.

Com isso em mente, é construído na tese de doutorado de L. G. D. Bernald, defendida no CBPF em 2015 [39], a seguinte ação:

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{4} v_\mu \varepsilon^{\mu\alpha\beta\nu} F_{\alpha\beta} A_\nu - \frac{i}{2} \bar{\Lambda} \gamma^\mu \partial_\mu \Lambda + M_1 \bar{\Lambda} \Lambda - i M_2 \bar{\Lambda} \gamma_5 \Lambda - \frac{1}{4} R_\mu \bar{\Lambda} \gamma^\mu \gamma_5 \Lambda + \sqrt{2} \bar{\Lambda} \Sigma^{\mu\nu} \gamma_5 \psi F_{\mu\nu} - \sqrt{2} \bar{\psi} \Sigma_{\mu\nu} \gamma_5 \Lambda F_{\mu\nu} \right]. \quad (2.1)$$

Em que Λ descreve o campo do fotino, ψ é um férmion de Majorana constante que constitui a componente fermiônica do super-multiplete de fundo sendo o par supersimétrico do campo vetorial v_μ , que vem do termo de Carroll-Field-Jackiw. Tanto ψ , quanto v_μ , são responsáveis portanto pela violação da simetria de Lorentz. Os termos de massa possuem a forma

$$\begin{cases} M_1 \equiv \text{Re}[F] + \frac{1}{4} \bar{\psi} \psi, \\ M_2 \equiv \text{Im}[F] + \frac{i}{4} \bar{\psi} \gamma_5 \psi, \\ R_\mu \equiv v_\mu + \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi. \end{cases} \quad (2.2)$$

Onde F é um campo escalar auxiliar sem dinâmica e $F_{\mu\nu}$ é o tensor de intensidades eletromagnético.

Essa ação emerge da versão supersimétrica do setor de calibre abeliano da extensão mínima do Modelo-Padrão (*minimal SME*). Este setor tem a forma geral

$$\mathcal{L}_{\text{Abl. } m\text{SME}} \sim -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} (K_F)_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (K_{AF})^\alpha \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} A^\beta F^{\mu\nu}. \quad (2.3)$$

O termo que acompanha $(K_{AF})^\alpha$ é um termo do tipo Carroll-Field-Jackiw que viola tanto a simetria de Lorentz, quanto CPT, e por esta razão damos ao mesmo o nome de CPT-ímpar. Já o termo que acompanha $(K_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$, só viola a simetria de Lorentz e, portanto, é chamado de termo CPT-par por esta razão. De tal forma, a ação que estamos a considerar na equação (2.1) é a versão CPT-ímpar supersimétrica do setor de calibre abeliano do Modelo-Padrão minimamente estendido, desenvolvida na Tese do L. G. D. Bernald.

Nestes moldes, as equações de campo a seguinte forma

- para o campo do fóton, A_ν :

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}v_\mu \varepsilon^{\mu\alpha\beta\nu} F_{\alpha\beta} = 2\sqrt{2}(\partial_\mu \bar{\Lambda})\Sigma^{\mu\nu}\gamma_5\psi. \quad (2.4)$$

Podemos escrever este resultado também sob a forma

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}v_\mu \varepsilon^{\mu\alpha\beta\nu} F_{\alpha\beta} = -2\sqrt{2}\bar{\psi}\Sigma^{\mu\nu}\gamma_5(\partial_\mu \Lambda) = j_{\psi\Lambda}^\nu. \quad (2.5)$$

Em que $j_{\psi\Lambda}^\nu$ é uma corrente neutra para o setor de calibre gerada pelo gárgino e o férmion de background.

- para o campo do fotino, Λ :

$$i\gamma^\mu(\partial_\mu \Lambda) - 2M_1\Lambda + 2iM_2\gamma_5\Lambda + \frac{1}{2}R_\mu\gamma^\mu\gamma_5\Lambda - \sqrt{2}\Sigma^{\mu\nu}\gamma_5\psi F_{\mu\nu} = 0. \quad (2.6)$$

Ou ainda,

$$i(\partial_\mu \bar{\Lambda})\gamma^\mu + 2M_1\bar{\Lambda} - 2iM_2\gamma_5\bar{\Lambda} - \frac{1}{2}R_\mu\bar{\Lambda}\gamma^\mu\gamma_5 - \sqrt{2}\bar{\psi}\Sigma^{\mu\nu}\gamma_5 F_{\mu\nu} = 0. \quad (2.7)$$

Das equações (2.4) e (2.5), podemos tirar as equações de Maxwell modificadas. Já das equações (2.6) e (2.7), podemos tirar a versão modificada da equação de Dirac para Λ .

2.1 As equações de Maxwell modificadas

As leis de Gauss para o campo magnético (livre de monopolo) e de Faraday-Lenz vem da identidade de Bianchi

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \quad (2.8)$$

Tomando $\nu = 0$ vamos ter a versão magnética para a lei de Gauss. Ou seja,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (2.9)$$

Agora tomando $\nu = i$ vamos ter a lei de Faraday-Lenz,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0. \quad (2.10)$$

Já da equação (2.5) com $\nu = 0$, temos a versão da lei de Gaus para o campo elétrico modificada para o presente contexto. Ou seja,

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu 0} + v_\mu \tilde{F}^{\mu 0} + 2\sqrt{2}\bar{\psi}\Sigma^{\mu 0}\gamma_5(\partial_\mu\Lambda) &= \partial_i F^{i0} + v_i \tilde{F}^{i0} + 2\sqrt{2}\bar{\psi}\Sigma^{i0}\gamma_5(\partial_i\Lambda) \\ &= \partial_i \vec{E}_i + (-\vec{v}_i)\vec{B}_i + 2\sqrt{2}\bar{\psi}\left(-\frac{i}{2}\gamma^0\gamma^i\right)\gamma_5\partial_i\Lambda = 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \vec{v} \cdot \vec{B} = i\sqrt{2}\vec{\nabla} \cdot (\bar{\psi}\gamma^0\vec{\gamma}\gamma_5\Lambda). \quad (2.11)$$

Em que assumimos $\vec{\gamma} = \gamma^i = -\gamma_i$.

Por fim, tomando a equação (2.5) com $\nu = i$, vamos chegar na lei de Ampère-Maxwell modificada,

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu i} + v_\mu \tilde{F}^{\mu i} + 2\sqrt{2}\bar{\psi}\Sigma^{\mu i}\gamma_5(\partial_\mu\Lambda) &= \partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ij} + v_0 \tilde{F}^{0i} + v_j \tilde{F}^{ji} + 2\sqrt{2}\bar{\psi}\Sigma^{ji}\gamma_5(\partial_j\Lambda) + \\ &\quad + 2\sqrt{2}\bar{\psi}\Sigma^{0i}\gamma_5(\partial_0\Lambda) \\ &= -\partial_0 \vec{E}_i + \varepsilon_{ijk}\partial_j \vec{B}_k - v^0 \vec{B}_i + \varepsilon_{ijk}v_j \vec{E}_k + i\sqrt{2}\bar{\psi}\gamma^0\vec{\gamma}\gamma_5\partial_t\Lambda - \\ &\quad - 2\sqrt{2}\bar{\psi}\Sigma^{ij}\gamma_5(\partial_j\Lambda). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - v^0 \vec{B} + \vec{v} \times \vec{E} = \partial_t \vec{E} - i\sqrt{2}\bar{\psi}\gamma^0\vec{\gamma}\gamma_5\partial_t\Lambda + 2\sqrt{2}\bar{\psi}\Sigma^{ij}\gamma_5(\partial_j\Lambda). \quad (2.12)$$

Essas equações de Maxwell modificadas nos auxiliarão na obtenção da relação de dispersão associada ao fóton, essa, que quando avaliada, no referencial de repouso, revelará qual o efeito do fundo que viola a simetria de Lorentz no espectro de massa do fóton.

2.2 A equação de Dirac modificada

Da equação (2.6), temos que a equação de Dirac modificada como sendo igual a

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu(\partial_\mu\Lambda) - 2M_1\Lambda + 2iM_2\gamma_5\Lambda + \frac{1}{2}R_\mu\gamma^\mu\gamma_5\Lambda &= \sqrt{2}\Sigma^{\mu\nu}\gamma_5\psi F_{\mu\nu} \\ &= 2\sqrt{2}\Sigma^{0i}\gamma_5\psi \vec{E}_i - \sqrt{2}\Sigma^{ij}\gamma_5\psi \varepsilon_{ijk}\vec{B}_k \\ &= i\frac{\sqrt{2}}{4}\left([\gamma^0, \gamma^i] - [\gamma^i, \gamma^0]\right)\gamma_5\psi \vec{E}_i - \\ &\quad - \sqrt{2}\Sigma^{ij}\gamma_5\psi \varepsilon_{ijk}\vec{B}_k. \end{aligned}$$

E uma vez que $\{\gamma^0, \gamma^i\} = 2\eta^{0i} = 0$, temos que $\gamma^0\gamma^i = -\gamma^i\gamma^0$, e também considerando que $\varepsilon_{ijk}\Sigma^{ij}\gamma_5 = -\gamma^0\gamma_k = +\gamma^0\gamma^k$, vamos ter que

$$i\gamma^\mu(\partial_\mu\Lambda) - 2M_1\Lambda + 2iM_2\gamma_5\Lambda + \frac{1}{2}R_\mu\gamma^\mu\gamma_5\Lambda = -i\sqrt{2}\gamma^0\gamma_5\vec{\gamma}\psi \cdot \vec{E} - \sqrt{2}\gamma^0\vec{\gamma}\psi \cdot \vec{B}. \quad (2.13)$$

Assim como no caso das equações de Mazweel modificas, essa equação de Dirac modificada para o campo do fotino irá nos ajudar na obtenção dos efeitos que o fundo que viola a simetria de Lorentz terá no espectro de massa associado ao fotino.

2.2.1 Decomposição de Gordon

A partir destas equação de campo, na sessão D.1 do Apêndice D calculamos a decomposição de Gordon e obtivemos os seguinte resultados:

$$\begin{aligned} (p'_\mu + p_\mu)\bar{\Lambda}(p')\Sigma^{\mu\kappa}\Lambda(p) &= R_\mu\bar{\Lambda}(p')\Sigma^{\mu\kappa}\gamma_5\Lambda(p) \\ &= (v_\mu + \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi)\bar{\Lambda}(p')\Sigma^{\mu\kappa}\gamma_5\Lambda(p) \end{aligned} \quad (2.14)$$

e

$$\begin{aligned} 4iM_2\bar{\Lambda}(p')\gamma^\kappa\gamma_5\Lambda(p) &= (p'^\kappa - p^\kappa)\bar{\Lambda}(p')\Lambda(p) + 2i(p_\mu + p'_\mu)\bar{\Lambda}(p')\Sigma^{\kappa\mu}\Lambda(p) - \\ &\quad - R^\kappa\bar{\Lambda}(p')\gamma_5\Lambda(p) - i2\sqrt{2}\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\Lambda(p)F^{\mu\kappa} - 2\sqrt{2}\bar{\psi}\gamma_\lambda\Lambda(p')\tilde{F}^{\lambda\kappa}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

2.3 As equações de campo no espaço dos momenta

Assumindo solução em ondas planas para \vec{E} , \vec{V} e Λ ,

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}, \\ \vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}, \\ \Lambda = \Lambda e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}, \end{cases} \quad (2.16)$$

as equações de Maxwell tomarão a seguinte forma:

$$\vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0, \quad (2.17)$$

$$\vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega \vec{B}_0 \Rightarrow \vec{B}_0 = \frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{E}_0, \quad (2.18)$$

$$i\vec{k} \cdot \vec{E}_0 - \vec{v} \cdot \vec{B}_0 = -\sqrt{2}\vec{k} \cdot (\bar{\psi}\gamma^0\vec{\gamma}\gamma_5\Lambda), \quad (2.19)$$

$$i\vec{k} \times \vec{B}_0 - v^0\vec{B}_0 = -i\omega\vec{E}_0 - \sqrt{2}\omega\bar{\psi}\vec{\gamma}\gamma_5\Lambda_0 + 2\sqrt{2}ik_j\bar{\psi}\Sigma^{ij}\gamma_5\Lambda_0. \quad (2.20)$$

Já a equação de Dirac tomará a forma:

$$\gamma^\mu k_\mu \Lambda_0 - 2M_1\Lambda_0 + 2iM_2\gamma_5\Lambda_0 + \frac{1}{2}R_\mu\gamma^\mu\gamma_5\Lambda_0 = -i\sqrt{2}\gamma^0\gamma_5\gamma^i\psi(\vec{E}_0)_i - \sqrt{2}\gamma^0\gamma^i\psi\frac{1}{\omega}(\vec{k} \times \vec{E}_0)_i. \quad (2.21)$$

2.4 As massas do Fóton e do Fotino com $(\bar{\psi}\gamma_5\psi) = (\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi) = 0$

Tendo as equações de campo no espaço dos momenta em mãos, podemos construir o espectro de massas para o fotino e para o fóton. Para isso, partimos da substituição da expressão para o campo magnético vinda da lei de Faraday-Lenz (2.18) na equação de Ampère-Maxwell (2.20), o que resulta em

$$\frac{i}{\omega}\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}_0) - \frac{v^0}{\omega}(\vec{k} \times \vec{E}_0) + \vec{v} \times \vec{E}_0 = -i\omega\vec{E}_0 - \sqrt{2}\omega\bar{\psi}\vec{\gamma}\gamma_5\Lambda_0 + 2\sqrt{2}ik_j\bar{\psi}\Sigma^{ij}\gamma_5\Lambda_0, \quad (2.22)$$

o que equivale a escrever

$$i\vec{k} \left(\vec{k} \cdot \vec{E}_0 \right) - i\vec{k}^2 \vec{E}_0 - v^0 \left(\vec{k} \times \vec{E}_0 \right) + \omega \vec{v} \times \vec{E}_0 = -i\omega^2 \vec{E}_0 - \sqrt{2}\omega^2 \bar{\psi} \vec{\gamma} \gamma_5 \Lambda_0 + 2\sqrt{2}i\omega k_j \bar{\psi} \Sigma^{ij} \gamma_5 \Lambda_0. \quad (2.23)$$

Seguindo com a equação de Dirac (2.21), abrindo-a e multiplicando tudo por ω , vamos ter que

$$\begin{aligned} \gamma^0 \omega^2 \Lambda_0 - \omega \vec{\gamma} \cdot \vec{k} - 2\omega M_1 \Lambda_0 + 2i\omega M_2 \gamma_5 \Lambda_0 + \frac{1}{2}\omega R_0 \gamma^0 \gamma_5 \Lambda_0 - \frac{1}{2}\omega \vec{R} \cdot \vec{\gamma} \gamma_5 \Lambda_0 = \\ = -i\sqrt{2}\omega \gamma^0 \gamma_5 \gamma^i \psi \left(\vec{E}_0 \right)_i - \sqrt{2}\gamma^0 \gamma^i \psi \left(\vec{k} \times \vec{E}_0 \right)_i. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Para a análise do espectro de massa, podemos tomar $\vec{k} = \vec{0}$. Assim, obtemos as energias de repouso, ou seja, as próprias massas já que $E = m$. Então, fazendo $\vec{k} = \vec{0}$ na equação (2.23), e trabalhando sempre no sentido de isolar o campo elétrico, emergirá que

$$(\delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk} v_k) (\vec{E}_0)_j = -i\sqrt{2}\omega \bar{\psi} \gamma^0 \gamma_i \gamma_5 \Lambda_0. \quad (2.25)$$

Definindo $\Omega_{ij} = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk} v_k$, vamos poder escrever que

$$\Omega_{ij} (\vec{E}_0)_j = -i\sqrt{2}\omega \bar{\psi} \gamma^0 \gamma_i \gamma_5 \Lambda_0. \quad (2.26)$$

O que nos fornece \vec{E}_0 em termos de Λ_0 ,

$$(\vec{E}_0)_j = -i\sqrt{2}\omega \Omega_{ij}^{-1} \bar{\psi} \gamma^0 \gamma_i \gamma_5 \Lambda_0. \quad (2.27)$$

A inversa da matriz Ω é dada pela equação (B.11) obtida a partir dos cálculos apresentados no apêndice B. Isto é,

$$\Omega_{ij}^{-1} = \frac{\omega}{\omega^2 - \vec{v}^2} \delta_{ij} - \frac{i}{\omega^2 - \vec{v}^2} \varepsilon_{ijk} v_k - \frac{1}{\omega(\omega^2 - \vec{v}^2)} v_i v_j. \quad (2.28)$$

Agora tomando a equação (2.24) com $\vec{k} = 0$ e substituindo a expressão do campo elétrico dada pelo resultado da equação (2.27) neste resultado, vem que

$$\omega \gamma^0 \Lambda_0 - 2M_1 \Lambda_0 + 2iM_2 \gamma_5 \Lambda_0 + \frac{1}{2} R_0 \gamma^0 \gamma_5 \Lambda_0 - \frac{1}{2} \vec{R} \cdot \vec{\gamma} \gamma_5 \Lambda_0 = 2\omega \Omega_{ij}^{-1} \gamma^0 \gamma_5 \gamma_i \psi (\bar{\psi} \gamma^0 \gamma_j \gamma_5 \Lambda_0). \quad (2.29)$$

A ideia agora é trabalhar o lado direito propondo um rearrançamento de Fierz - por favor, veja a sessão A.5 do apêndice A - de forma a criar condensados de ψ e liberar o Λ_0 do condensado entre parênteses. Nesta linha, poderemos trabalhar o rearrançamento de Fierz, pois

$$\begin{aligned} \gamma^0 \gamma_5 \gamma_i \psi (\bar{\psi} \gamma^0 \gamma_j \gamma_5 \Lambda_0) &= (\gamma^0 \gamma_5 \gamma_i)_{\alpha\beta} \psi_{\beta 1} \bar{\psi}_{1\kappa} (\gamma^0 \gamma_j \gamma_5)_{\kappa\lambda} (\Lambda_0)_{\lambda 1} \\ &= -\bar{\psi}_{1\kappa} \psi_{\beta 1} (\gamma^0 \gamma_5 \gamma_i)_{\alpha\beta} (\gamma^0 \gamma_j \gamma_5)_{\kappa\lambda} (\Lambda_0)_{\lambda 1}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Onde o produto tensorial $\bar{\psi}_{1\kappa} \psi_{\beta 1}$ tem uma forma matricial bem definida, $M_{\beta\kappa}$, que por sua vez pode ser escrita na forma que apresentamos na equação (A.66) da sessão A.5 do apêndice A. Ou seja,

$$\bar{\psi}_{1\kappa} \psi_{\beta 1} = M_{\beta\kappa} = \frac{1}{4} M_{\rho\delta} (\Gamma_A)_{\delta\rho} (\Gamma^A)_{\beta\kappa} = \frac{1}{4} \bar{\psi}_{1\delta} \psi_{\rho 1} (\Gamma_A)_{\delta\rho} (\Gamma^A)_{\beta\kappa}. \quad (2.31)$$

Então, se levamos esse resultado (2.31) na igualdade (2.30), vamos poder escrever o seguinte:

$$\begin{aligned}\gamma^0\gamma_5\gamma_i\psi(\bar{\psi}\gamma^0\gamma_j\gamma_5\Lambda_0) &= -\frac{1}{4}\bar{\psi}_{1\delta}\psi_{\rho 1}(\Gamma_A)_{\delta\rho}(\Gamma^A)_{\beta\kappa}(\gamma^0\gamma_5\gamma_i)_{\alpha\beta}(\gamma^0\gamma_j\gamma_5)_{\kappa\lambda}(\Lambda_0)_{\lambda 1} \\ &= -\frac{1}{4}(\bar{\psi}\Gamma_A\psi)\left(\gamma^0\gamma_5\gamma_i\Gamma^A\gamma^0\gamma_j\gamma_5\right)\Lambda_0.\end{aligned}\quad (2.32)$$

Uma vez que ψ é um férmion de Majorana, há uma restrição para quais matrizes Γ^A satisfazem a condição de realidade. São estas:

$$\Gamma_A = \mathbb{1} \quad \Rightarrow \quad \Gamma^A = \mathbb{1}, \quad (2.33)$$

$$\Gamma_A = \gamma_5 \quad \Rightarrow \quad \Gamma^A = \gamma_5, \quad (2.34)$$

$$\Gamma_A = \gamma_\mu\gamma_5 \quad \Rightarrow \quad \Gamma^A = -\gamma^\mu\gamma_5. \quad (2.35)$$

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned}\gamma^0\gamma_5\gamma_i\psi(\bar{\psi}\gamma^0\gamma_j\gamma_5\Lambda_0) &= -\frac{1}{4}(\bar{\psi}\psi)\gamma_i\gamma_j\Lambda_0 - \frac{1}{4}(\bar{\psi}\gamma_5\psi)\gamma_i\gamma_j\gamma_5\Lambda_0 + \\ &\quad + \frac{1}{4}(\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi)\gamma^0\gamma_5\gamma_i\gamma^\mu\gamma^0\gamma_j\Lambda_0.\end{aligned}\quad (2.36)$$

2.4.1 A massa do Fotino

Neste estágio, vamos supor que o fundo seja tal que $(\bar{\psi}\psi)$ seja o único condensado não trivial. Então, neste caso particular, tomamos $(\bar{\psi}\gamma_5\psi) = 0$ e $(\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi) = 0$. Com isso, o resultado (2.36) se reduz a

$$\gamma^0\gamma_5\gamma_i\psi(\bar{\psi}\gamma^0\gamma_j\gamma_5\Lambda_0) = \frac{1}{4}\delta_{ij}(\bar{\psi}\psi)\Lambda_0 + \frac{i}{2}(\bar{\psi}\psi)\Sigma_{ij}\Lambda_0. \quad (2.37)$$

Vamos adotar também que o fundo não quebra a simetria de paridade. Como no caso do Modelo-Padrão, vamos postular que a quebra de P ocorra no setor de matéria, o que não é o caso aqui uma vez que estamos no setor de calibre.

Finalmente, levando à equação (2.29) essas premissas, teremos

$$\begin{aligned}\left(\omega\gamma^0 - 2M_1\Lambda + 2iM_2\gamma_5 + \frac{1}{2}R^0\gamma^0\gamma_5 - \frac{1}{2}\vec{R}\cdot\vec{\gamma}\gamma_5\right)\Lambda_0 &= \\ &= 2\omega(\bar{\psi}\psi)\Omega_{ij}^{-1}\left(\frac{1}{4}\delta_{ij}\Lambda_0 + \frac{i}{2}\Sigma_{ij}\right)\Lambda_0 \\ &= 2\omega\frac{(\bar{\psi}\psi)}{\omega^2 - \vec{v}^2}\left(\frac{3}{4}\omega - \frac{1}{4}\frac{\vec{v}^2}{\omega} + \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}v_k\Sigma_{ij}\right)\Lambda_0 \\ &= \frac{(\bar{\psi}\psi)}{\omega^2 - \vec{v}^2}\left(\frac{3}{2}\omega^2 - \frac{1}{2}\vec{v}^2 - \omega\gamma_0\gamma_5\vec{\gamma}\cdot\vec{v}\right)\Lambda_0.\end{aligned}\quad (2.38)$$

Na última passagem usamos o fato de que $\varepsilon_{ijk}\Sigma_{ij} = -\gamma_0\gamma_k\gamma_5 = -\gamma_0\gamma_5\vec{\gamma}\cdot\vec{v}$. Por fim, podemos escrever a equação desacoplada para Λ_0 como sendo

$$\begin{aligned}\left[\omega\gamma^0 - 2M_1 + 2iM_2\gamma_5 + \frac{1}{2}R_\mu\gamma^\mu\gamma_5 - \frac{(\bar{\psi}\psi)}{\omega^2 - \vec{v}^2}\left(\frac{3}{2}\omega^2 - \frac{1}{2}\vec{v}^2\right) + \right. \\ \left. + (\bar{\psi}\psi)\frac{\omega}{\omega^2 - \vec{v}^2}\varepsilon_{ijk}v_k\Sigma_{ij}\right]\Lambda_0 = 0.\end{aligned}\quad (2.39)$$

Seguimos adiante com as seguintes definições:

$$\begin{cases} \mu \equiv -\frac{1}{2} (\bar{\psi}\psi) \frac{3\omega^2 - \vec{v}^2}{\omega^2 - \vec{v}^2}, \\ \xi_{ij} \equiv (\bar{\psi}\psi) \frac{\omega}{\omega^2 - \vec{v}^2} \varepsilon_{ijk} v_k, \\ D \equiv \omega\gamma^0 + (\mu - 2M_1) + 2iM_2\gamma_5 + \frac{1}{2}R_\mu\gamma^\mu\gamma_5 + \xi_{ij}\Sigma_{ij}. \end{cases} \quad (2.40)$$

De forma que

$$D_{\alpha\beta}(\Lambda_0)_{1\beta} = 0. \quad (2.41)$$

Neste esquema, a relação de dispersão que dará a resposta sobre o espectro de massa sai da condição ($\det D = 0$). Mas antes de prosseguir com o cálculo deste determinante, há outras suposições de natureza física a serem feitas. Já assumimos antes que o fundo não quebra a paridade, admitindo que a violação de P ocorra apenas no setor da matéria fermiônica, como é no Modelo Padrão,. Para além desta suposição, vamos tomar agora o termo de fundo F , bem como v_0 como sendo nulos. Uma vez que podemos fixar o fundo como desejamos, a escolha $F = 0$, que afeta tanto a parte real quanto a imaginária, vem no sentido de restringir o fundo apenas aos férmions já que F só realizaria um *shift* nos condensados que surge. Já a escolha de $v_0 = 0$ tem como motivação resultados e discussões desenvolvidas na tese que motiva este capítulo, de L. G. D. Bernald [39]. O autor mostra que v_0 pode levar a uma quebra da causalidade. Então, em geral, para manter a causalidade, consideramos apenas a parte espacial de v_ν .

Dito isso, seguindo as definições dadas em (2.2), essas considerações implicarão em considerar que: $M_1 = (\bar{\psi}\psi)1/4$; $M_2 = 0$; $R^0 = 0$; $\vec{R} = \vec{v}$. Podemos assim, perceber como $|\vec{v}|$ e o condensado $(\bar{\psi}\psi)$ ocorrem para gerar a massa do fotino. Outra hipótese viável vem do fato de que como os parâmetros da violação da simetria de Lorentz são muito pequenos, é razoável nos concentrarmos apenas nos termos em primeira ordem nestes parâmetros. Logo, estaremos considerando

$$\begin{aligned} \mu &= -\frac{3}{2} (\bar{\psi}\psi) \frac{\omega^2}{\omega^2 - \vec{v}^2} + \frac{1}{2} (\bar{\psi}\psi) \frac{\vec{v}^2}{\omega^2 - \vec{v}^2} = -\frac{3}{2} (\bar{\psi}\psi) \frac{\omega^2}{\omega^2 - \vec{v}^2} + \mathcal{O}(LSV^3) \\ &= -\frac{3}{2} (\bar{\psi}\psi) \left(1 + \frac{\vec{v}^2}{\omega^2 + \vec{v}^2} \right) + \mathcal{O}(LSV^3) \\ &= -\frac{3}{2} (\bar{\psi}\psi) + \mathcal{O}(LSV^3), \end{aligned} \quad (2.42)$$

e

$$\xi_{ij} = (\bar{\psi}\psi) \frac{\omega}{\omega^2 - \vec{v}^2} \varepsilon_{ijk} v_k = \mathcal{O}(LSV^2). \quad (2.43)$$

Com tudo isso, vamos ter que

$$\begin{aligned} D &= \omega\gamma^0 + (\mu - 2M_1) - \frac{1}{2}\vec{v} \cdot \vec{\gamma}\gamma_5 \\ &= \omega\gamma^0 - 2(\bar{\psi}\psi) - \frac{1}{2}v_i\gamma^i\gamma_5. \end{aligned} \quad (2.44)$$

A relação de dispersão sai, então, de

$$\Delta = \det(D) = \det\left(\omega\gamma^0 - 2(\bar{\psi}\psi) - \frac{1}{2}v_i\gamma^i\gamma_5\right) = 0. \quad (2.45)$$

Essa igualdade pode ser escrita sobre a seguinte forma simples

$$\Delta = \det\left(a\mathbb{1} + b\gamma^0 + c_i\gamma^i\gamma_5\right), \quad (2.46)$$

em que no nosso caso, a , b e c_i , são

$$a = -2(\bar{\psi}\psi), \quad b = \omega \quad \text{e} \quad c_i = -\frac{1}{2}v_i. \quad (2.47)$$

Usando a equação (C.28) do apêndice C, podemos escrever que este determinante é

$$\Delta = [(a+b)^2 - \vec{c}^2][(a-b)^2 - \vec{c}^2]. \quad (2.48)$$

Então, portanto, temos

$$\det(D) = \left\{[-2(\bar{\psi}\psi) + \omega]^2 - \frac{1}{2}\vec{v}^2\right\} \left\{[-2(\bar{\psi}\psi) - \omega]^2 - \frac{1}{2}\vec{v}^2\right\} = 0. \quad (2.49)$$

Lembrando que como estamos no referência de repouso, $\vec{k} = 0$, ω corresponde à massa do fotino, e sendo assim, vem que

$$|\omega + 2\bar{\psi}\psi| = \frac{1}{2}|\vec{v}|, \quad (2.50)$$

$$|\omega - 2\bar{\psi}\psi| = \frac{1}{2}|\vec{v}|. \quad (2.51)$$

Como $(\bar{\psi}\psi) \in \mathbb{R}$, mas não necessariamente positivo definido, teremos as seguintes possibilidades para o espectro de massa:

- se $(\omega + 2\bar{\psi}\psi) \geq 0$, implica que

$$\omega + 2\bar{\psi}\psi = \frac{1}{2}|\vec{v}| \Rightarrow \omega_1 = -2\bar{\psi}\psi + \frac{1}{2}|\vec{v}|; \quad (2.52)$$

- se $(\omega + 2\bar{\psi}\psi) < 0$, implica que

$$\omega + 2\bar{\psi}\psi = -\frac{1}{2}|\vec{v}| \Rightarrow \omega_2 = -2\bar{\psi}\psi - \frac{1}{2}|\vec{v}|; \quad (2.53)$$

- se $(\omega - 2\bar{\psi}\psi) \geq 0$, implica que

$$\omega - 2\bar{\psi}\psi = \frac{1}{2}|\vec{v}| \Rightarrow \omega_3 = 2\bar{\psi}\psi + \frac{1}{2}|\vec{v}|; \quad (2.54)$$

- se $(\omega - 2\bar{\psi}\psi) < 0$, implica que

$$\omega - 2\bar{\psi}\psi = -\frac{1}{2}|\vec{v}| \Rightarrow \omega_4 = 2\bar{\psi}\psi - \frac{1}{2}|\vec{v}|. \quad (2.55)$$

De forma geral, podemos notar que

$$\omega_4 = -\omega_1, \quad (2.56)$$

$$\omega_2 = -\omega_3. \quad (2.57)$$

Como o sinal da massa não é relevante no contexto da equação de Dirac, pois podemos redefinir o campo através de uma matriz γ_5 , de tal forma que, por exemplo, $-m\bar{\lambda}\lambda = +m(\overline{\gamma_5\lambda})(\gamma_5\lambda)$, sem alterar nenhum conteúdo físico. Sendo assim, apesar de termos encontrado encontrado quatro valores de massa, apenas dois deste são independentes, que são, por exemplo, ω_3 e ω_4 . Nesses moldes, o espectro de massa para o fotino é completamente descrito por

$$m_{\tilde{\gamma}} = 2\bar{\psi}\psi \pm \frac{1}{2}|\vec{v}|. \quad (2.58)$$

Agora iremos partir para o cálculo da massa fóton sob as mesmas perspectivas. Obtendo este resultado, poderemos perceber como a degenerescência entre as massas do fóton e do fotino são afetadas pelo fundo que viola a simetria de Lorentz e, portanto, se esse fundo quebra a supersimetria ou não.

2.4.2 A massa do fóton

Para encontrar a massa do fóton, partimos da equação de Ampère-Maxwell no referencial de repouso com $\vec{k} = 0$,

$$\vec{v} \times \vec{E}_0 = -\omega \vec{E}_0 - \sqrt{2}\omega\bar{\psi}\gamma^0\vec{\gamma}\gamma_5\Lambda_0, \quad (2.59)$$

e assumimos como sendo válidas todas as hipóteses físicas que fizemos para o caso do fotino. Nestes moldes, para escrever Λ_0 em termo de \vec{E}_0 , podemos considerar a equação de Dirac, na forma que foi escrita em (2.21), sob a perspectiva das hipóteses físicas levantadas e no referencial de repouso. Isto é,

$$\left(\omega\gamma^0 - 2M_1 - \frac{1}{2}\vec{R} \cdot \vec{\gamma}\gamma_5\right)\Lambda_0 = -2\sqrt{2}\gamma^0\gamma_5\gamma^j(\vec{E}_0)_j\psi. \quad (2.60)$$

Definindo

$$\Omega = \left(\omega\gamma^0 - 2M_1 - \frac{1}{2}\vec{R} \cdot \vec{\gamma}\gamma_5\right), \quad (2.61)$$

podemos escrever

$$\Lambda_0 = -i\sqrt{2}\left(\Omega^{-1}\gamma^0\gamma_5\gamma^j\psi\right)(\vec{E}_0)_j. \quad (2.62)$$

A matriz Ω^{-1} é mais facilmente especificada se tomarmos a matriz geral

$$D = a\mathbb{1} + b\gamma^0 + c_i\gamma^i\gamma_5, \quad (2.63)$$

a qual podemos usar os resultados gerais do apêndice C para estudar a mesma. Naturalmente, a inversa, D^{-1} , é dada por

$$D^{-1} = x\mathbb{1} + y\gamma^0 + \alpha c_i \gamma_i \gamma_5 + \beta \varepsilon_{ijk} c_k \Sigma_{ij}. \quad (2.64)$$

Com os coeficientes x , y , α e β especificados pelo apêndice C, e com o determinante sendo dado pela equação (C.28) do mesmo apêndice. Ou seja,

$$\det(D) = \Delta = [(a+b)^2 - \vec{c}^2] [(a-b)^2 - \vec{c}^2], \quad (2.65)$$

$$x = \frac{a}{\Delta} (a^2 - b^2 - \vec{c}^2), \quad (2.66)$$

$$y = \frac{b}{\Delta} (-a^2 + b^2 - \vec{c}^2), \quad (2.67)$$

$$\alpha = \frac{1}{\Delta} (a^2 + b^2 - \vec{c}^2), \quad (2.68)$$

$$\beta = \frac{2ab}{\Delta}. \quad (2.69)$$

De forma que estamos a identificar

$$a = -\frac{1}{2}\bar{\psi}\psi, \quad b = \omega, \quad \vec{c} = -\frac{1}{2}\vec{v}. \quad (2.70)$$

Assim, temos a matriz Ω^{-1} completamente bem especificada. Com este resultado, podemos substituir Λ_0 , dado pela equação (2.62), na equação de Ampère-Maxwell trabalhada (2.59). Então, emerge que

$$i\omega(\vec{E}_0)_i + (\vec{c} \times \vec{E}_0)_i = 2i\omega\bar{\psi}\gamma^0\gamma_i\gamma_5\Omega^{-1}\gamma^0\gamma_5\gamma_j\psi(\vec{E}_0)_j. \quad (2.71)$$

No lado esquerdo temos que desenvolver o seguinte

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\gamma^0\gamma_i\gamma_5\Omega^{-1}\gamma^0\gamma_5\gamma_j\psi &= \bar{\psi}\gamma^0\gamma_i\gamma_5(x\mathbb{1} + y\gamma^0 + \alpha c_i\gamma_i\gamma_5 + \beta\varepsilon_{ijk}c_k\Sigma_{ij})\gamma^0\gamma_5\gamma_j\psi \\ &= x\bar{\psi}\gamma_i\gamma_j\psi + y\bar{\psi}\gamma^0\gamma_i\gamma_j\psi + \alpha c_i\bar{\psi}\gamma_5\gamma_j\psi - \beta\varepsilon_{ijk}c_k\bar{\psi}\gamma^0\gamma_i\Sigma_{ij}\gamma^0\gamma_j\psi. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Onde usamos o fato de que $\{\gamma^0, \gamma^i\} = \{\gamma^0, \gamma^\mu\} = 0$.

Estamos, agora, sub judice da hipótese que levantamos sobre desprezar termos de ordem $\mathcal{O}(LSV^2)$. Logo, os termos que multiplicam α e β na equação (2.72) são deixados de fora no seguir dos cálculos, uma vez que os mesmo trazem com sigo componentes de \vec{v} , o que nos resulta em algo proporcional a $(\bar{\psi}\psi)v_k$. A partir dessa argumentação, substituindo x e y , e também já eliminando todos os termos de ordem mais alta que dois nos parâmetros que violam a simetria de Lorentz, somente sobra o seguinte

$$\bar{\psi}\gamma^0\gamma_i\gamma_5\Omega^{-1}\gamma^0\gamma_5\gamma_j\psi = \frac{\omega^3}{\Delta}\bar{\psi}\gamma^0\gamma_i\gamma_j\psi = -\frac{\omega^3}{\Delta}\delta_{ij}\bar{\psi}\gamma^0\psi - i\frac{2\omega^3}{\Delta}\bar{\psi}\gamma^0\Sigma_{ij}\psi = 0. \quad (2.73)$$

Estes termo são identicamente nulos porque

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}\gamma^0\psi)^\dagger &= \psi^\dagger(\gamma^0)^\dagger\gamma^0\psi = \bar{\psi}\gamma^0\psi, \\ (\bar{\psi}\gamma^0\psi)^t &= -\psi^t(\gamma^0)^t\bar{\psi}^t = (-\psi^t C^{-1})\left[C(\gamma^0)^t C^{-1}\right](C\bar{\psi}^t) = -\bar{\psi}\gamma^0\psi. \end{aligned}$$

isto é, $\bar{\psi}\gamma^0\psi$ é imaginário puro e, portanto, não satisfaz as condições de um bom férmions de Majorana, e também vamos ter que

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}\gamma^0\Sigma^{ij}\psi)^\dagger &= \psi^\dagger (\Sigma^{ij})^\dagger (\gamma^0)^\dagger \gamma^0\psi = \psi^\dagger\gamma^0 \left[\gamma^0 (\Sigma^{ij})^\dagger \gamma^0 \right] \gamma^0 (\gamma^0)^\dagger \gamma^0\psi = \bar{\psi}\Sigma^{ij}\gamma^0\psi \\ &= (\bar{\psi}\gamma^0\Sigma^{ij}\psi), \\ (\bar{\psi}\gamma^0\Sigma^{ij}\psi)^t &= -\psi^t (\Sigma^{ij})^t (\gamma^0)^t \bar{\psi}^t = (-\psi^t C^{-1}) \left[C (\Sigma^{ij})^\dagger C^{-1} \right] \left[C (\gamma^0)^t C^{-1} \right] (C\bar{\psi}^t) \\ &= -\bar{\psi}\Sigma^{ij}\gamma^0\psi = -(\bar{\psi}\gamma^0\Sigma^{ij}\psi). \end{aligned}$$

ou seja, $\bar{\psi}\gamma^0\Sigma_{ij}\psi$ também é um imaginário puro e, por consequência imediata, não tem validade pois ψ é férmion de Majorana.

Sendo assim, finalmente, retornamos à equação (2.71) com o lado direto sendo igual a zero devido à justificativa dada acima. Ou seja,

$$i\omega(\vec{E}_0)_i + (\vec{c} \times \vec{E}_0)_i = (\omega\delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}v_k)(\vec{E}_0)_j = M_{ij}(\vec{E}_0)_j = 0. \quad (2.74)$$

A relação de dispersão segue de

$$\det(M) = \begin{vmatrix} \omega & iv_3 & -iv_2 \\ -iv_3 & \omega & iv_1 \\ iv_2 & -iv_1 & \omega \end{vmatrix} = \omega(\omega^2 - v_1^2 - v_2^2 - v_3^2) = \omega(\omega^2 - \vec{v}^2) = 0. \quad (2.75)$$

Ficando com a solução não trivial, teremos $\omega = m_\gamma$, que descreve a massa do fóton, tendo valor igual a

$$m_\gamma = |\vec{v}|. \quad (2.76)$$

Então, a partir dos resultados (2.58) e (2.76), podemos perceber o fato de que obtivemos um espectro não degenerado para as massas do fóton e do fotino. Isso indica que a violação da simetria de Lorentz, pelo fundo que estamos a considerar, faz com que a supersimetria também seja violada.

2.5 As massas do Fóton e do Fotino com $(\bar{\psi}\gamma_5\psi) \neq 0$ e $(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi) \neq 0$

Nesta sessão, ao invés de supor que o fundo é tal que $(\bar{\psi}\psi)$ seja o único condensado, desprezando assim os condensados $(\bar{\psi}\gamma_5\psi) = 0$ e $(\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi) = 0$, o que fez com que a equação (2.36) tomasse a forma simples da equação (2.37), vamos considerar agora a contribuição de todos estes condensados para o espectro de massa tanto do fóton, quanto do fotino.

2.5.1 A massa do Fotino

Manipulando as equações de campo, no intuito de achar uma relação de dispersão pro fotino, obtivemos na sessão anterior que

$$\omega\gamma^0\Lambda_0 - 2M_1\Lambda_0 + 2iM_2\gamma_5\Lambda_0 + \frac{1}{2}R^0\gamma^0\gamma_5\Lambda_0 - \frac{1}{2}\vec{R} \cdot \vec{\gamma}\gamma_5\Lambda_0 = 2\omega\Omega_{ji}^{-1}\gamma^0\gamma_5\gamma_i\psi(\bar{\psi}\gamma^0\gamma_j\gamma_5\Lambda_0). \quad (2.77)$$

Trabalhamos o lado direito por rearranjo de Fierz vem que

$$\begin{aligned}
 \spadesuit_{ij}\Lambda_0 &= \gamma^0\gamma_5\gamma_i\psi(\bar{\psi}\gamma^0\gamma_j\gamma_5\Lambda_0) \\
 &= -\frac{1}{4}(\bar{\psi}\psi)\gamma_i\gamma_j\Lambda_0 - \frac{1}{4}(\bar{\psi}\gamma_5\psi)\gamma_i\gamma_j\gamma_5\Lambda_0 + \frac{1}{4}(\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi)\gamma^0\gamma_5\gamma_i\gamma^\mu\gamma^0\gamma_j\Lambda_0 \\
 &= \left[\frac{1}{4}(\bar{\psi}\psi)(\delta_{ij} + 2i\Sigma_{ij}) + \frac{1}{4}(\bar{\psi}\gamma_5\psi)(\delta_{ij} + 2i\Sigma_{ij})\gamma_5 - \frac{1}{4}(\bar{\psi}\gamma_0\gamma_5\psi)(\delta_{ij} + 2i\Sigma_{ij})\gamma_0\gamma_5 - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{4}(\bar{\psi}\gamma_k\gamma_5\psi)(\delta^{ik} + 2i\Sigma^{ik})\gamma_5\gamma^j \right] \Lambda_0. \tag{2.78}
 \end{aligned}$$

Assim vamos ter que

$$\left(\omega\gamma^0 - 2M_1 + 2iM_2\gamma_5 + \frac{1}{2}R_\mu\gamma^\mu\gamma_5 \right) \Lambda_0 = 2\omega\Omega_{ji}^{-1}\spadesuit_{ij}\Lambda_0. \tag{2.79}$$

Já mostramos que

$$\Omega_{ji}^{-1} = \frac{\omega}{\omega^2 - \vec{v}^2}\delta_{ji} - \frac{i}{\omega^2 - \vec{v}^2}\varepsilon_{jik}v_k - \frac{1}{\omega(\omega^2 - \vec{v}^2)}v_jv_i. \tag{2.80}$$

Com estes resultados, o lado direito de (2.79) pode ser escrito sob a forma:

$$\begin{aligned}
 2\omega\Omega_{ji}^{-1}\spadesuit_{ij}\Lambda_0 &= 2\omega \left(\frac{\omega}{\omega^2 - \vec{v}^2}\delta_{ji} - \frac{i}{\omega^2 - \vec{v}^2}\varepsilon_{jik}v_k - \frac{1}{\omega(\omega^2 - \vec{v}^2)}v_jv_i \right) \\
 &\times \left[\frac{1}{4}(\bar{\psi}\psi)(\delta_{ij} + 2i\Sigma_{ij}) + \frac{1}{4}(\bar{\psi}\gamma_5\psi)(\delta_{ij} + 2i\Sigma_{ij})\gamma_5 - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{4}(\bar{\psi}\gamma_0\gamma_5\psi)(\delta_{ij} + 2i\Sigma_{ij})\gamma_0\gamma_5 - \frac{1}{4}(\bar{\psi}\gamma_k\gamma_5\psi)(\delta^{ik} + 2i\Sigma^{ik})\gamma_5\gamma^j \right] \Lambda_0. \tag{2.81}
 \end{aligned}$$

Devemos lembrar, mais uma vez, que os parâmetros que violam a simetria de Lorentz são bem sutis, por essa razão vamos considerar apenas termos de primeira ordem nestes parâmetros.

Sendo assim, vamos ter que

$$\begin{aligned}
 2\omega\Omega_{ji}^{-1}\spadesuit_{ij}\Lambda_0 &= \frac{2\omega^2}{\omega^2 - \vec{v}^2}\delta_{ji} \left[\frac{1}{4}(\bar{\psi}\psi)(\delta_{ij} + 2i\Sigma_{ij}) + \frac{1}{4}(\bar{\psi}\gamma_5\psi)(\delta_{ij} + 2i\Sigma_{ij})\gamma_5 - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{4}(\bar{\psi}\gamma_0\gamma_5\psi)(\delta_{ij} + 2i\Sigma_{ij})\gamma_0\gamma_5 - \frac{1}{4}(\bar{\psi}\gamma_k\gamma_5\psi)(\delta^{ik} + 2i\Sigma^{ik})\gamma_5\gamma^j \right] \Lambda_0 \\
 &= \left[\frac{3}{2}(\bar{\psi}\psi) + \frac{3}{2}(\bar{\psi}\gamma_5\psi)\gamma_5 - \frac{3}{2}(\bar{\psi}\gamma_0\gamma_5\psi)\gamma_0\gamma_5 - \frac{3}{2}(\bar{\psi}\gamma_i\gamma_5\psi)\gamma_i\gamma_5 \right] \Lambda_0. \tag{2.82}
 \end{aligned}$$

Para obter este resultado, usamos o seguinte fato geral para avaliar a passagem mais dificultosa do cálculo:

$$\gamma_5\Sigma^{\mu\nu}\gamma^\rho = -\frac{i}{2}(\eta^{\nu\rho}\gamma^\mu\gamma_5 - \eta^{\mu\rho}\gamma^\nu\gamma_5 + i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_\sigma). \tag{2.83}$$

Para ser consistente com o caso anterior, tomaremos $F = 0$ e $v_0 = 0$. Assim, temos que

$$\begin{cases} M_1 = \frac{1}{4}\bar{\psi}\psi, \\ M_2 = \frac{i}{4}\bar{\psi}\gamma_5\psi, \\ R_\mu = (\bar{\psi}\gamma_0\gamma_5\psi, -\vec{v}_i - \bar{\psi}\gamma_i\gamma_5\psi). \end{cases} \tag{2.84}$$

Substituindo (2.84) em (2.79), e levando (2.82) para lado esquerdo de (2.79), vem que

$$\left[-2(\bar{\psi}\psi) - 2(\bar{\psi}\gamma_5\psi)\gamma_5 + \omega\gamma^0 + 2(\bar{\psi}\gamma_0\gamma_5\psi)\gamma^0\gamma_5 - 2(\bar{\psi}\gamma_i\gamma_5\psi)\gamma^i\gamma_5 - \frac{1}{2}\vec{v}_i\gamma^i\gamma_5 \right] \Lambda_0 = 0, \quad (2.85)$$

resultado que pode ser escrito na forma

$$D\Lambda_0 = 0. \quad (2.86)$$

Com

$$D = (a\mathbb{1} + b\gamma_5 + c_\mu\gamma^\mu + d_\mu\gamma^\mu) \quad (2.87)$$

e

$$a = -2(\bar{\psi}\psi), \quad (2.88)$$

$$b = -2(\bar{\psi}\gamma_5\psi), \quad (2.89)$$

$$c_\mu = (\omega, \vec{0}), \quad (2.90)$$

$$d_\mu = \left(2(\bar{\psi}\gamma_0\gamma_5\psi), -\frac{1}{2}\vec{v}_i - 2(\bar{\psi}\gamma_i\gamma_5\psi) \right). \quad (2.91)$$

Usando os resultados gerais do Apêndice C, a relação de dispersão que trará a massa do fotino será dada por

$$\begin{aligned} \det(D) &= [a^2 - b^2 - c^2 + d^2 - 2(c \cdot d)] [a^2 - b^2 - c^2 + d^2 + 2(c \cdot d)] + 4c^2d^2 \\ &= \left[4(\bar{\psi}\psi)^2 - 4(\bar{\psi}\psi)^2 - \omega^2 + 4(\bar{\psi}\gamma_0\gamma_5\psi)^2 - \left(\frac{1}{2}\vec{v}_i + 2(\bar{\psi}\gamma_i\gamma_5\psi) \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - 4\omega(\bar{\psi}\gamma_0\gamma_5\psi) \right] \times \left[4(\bar{\psi}\psi)^2 - 4(\bar{\psi}\psi)^2 - \omega^2 + 4(\bar{\psi}\gamma_0\gamma_5\psi)^2 - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{2}\vec{v}_i + 2(\bar{\psi}\gamma_i\gamma_5\psi) \right)^2 + 4\omega(\bar{\psi}\gamma_0\gamma_5\psi) \right] + \omega^2 \left[+ 4(\bar{\psi}\gamma_0\gamma_5\psi)^2 - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{2}\vec{v}_i + 2(\bar{\psi}\gamma_i\gamma_5\psi) \right)^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Que quando resolvermos para ω nos leva a escrever as quatro soluções sob a forma

$$\omega_1 = - \left| \frac{\vec{v}_i}{2} + 2(\bar{\psi}\gamma_i\gamma_5\psi) \right| - 2\sqrt{(\bar{\psi}\gamma_0\gamma_5\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_5\psi)^2 + (\bar{\psi}\psi)^2} \quad (2.93)$$

$$\omega_2 = - \left| \frac{\vec{v}_i}{2} + 2(\bar{\psi}\gamma_i\gamma_5\psi) \right| + 2\sqrt{(\bar{\psi}\gamma_0\gamma_5\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_5\psi)^2 + (\bar{\psi}\psi)^2} \quad (2.94)$$

$$\omega_3 = + \left| \frac{\vec{v}_i}{2} + 2(\bar{\psi}\gamma_i\gamma_5\psi) \right| - 2\sqrt{(\bar{\psi}\gamma_0\gamma_5\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_5\psi)^2 + (\bar{\psi}\psi)^2} \quad (2.95)$$

$$\omega_4 = + \left| \frac{\vec{v}_i}{2} + 2(\bar{\psi}\gamma_i\gamma_5\psi) \right| + 2\sqrt{(\bar{\psi}\gamma_0\gamma_5\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_5\psi)^2 + (\bar{\psi}\psi)^2}. \quad (2.96)$$

A partir das mesmas argumentações para o caso da sessão anterior, temos que

$$\omega_4 = -\omega_1 \quad (2.97)$$

$$\omega_2 = -\omega_3. \quad (2.98)$$

Assim, como o sinal da massa não é relevante no contexto da equação de Dirac, o espectro de massa para o Fotino é completamente especificado por

$$m_{\tilde{\gamma}} = 2\sqrt{\left(\bar{\psi}\gamma_0\gamma_5\psi\right)^2 - \left(\bar{\psi}\gamma_5\psi\right)^2 + \left(\bar{\psi}\psi\right)^2} \pm \left|\frac{\vec{v}_i}{2} + 2\left(\bar{\psi}\gamma_i\gamma_5\psi\right)\right|. \quad (2.99)$$

2.5.2 A massa do Fóton

Assim como antes, para escrever a massa do Fóton partimos das equações de Ampère-Maxwell, no referencial de repouso,

$$\vec{v} \times \vec{E}_0 = -i\omega\vec{E}_0 - \sqrt{2}\omega\bar{\psi}\gamma^0\vec{\gamma}\gamma_5\Lambda_0, \quad (2.100)$$

e da equação de Dirac, também no referencial de repouso,

$$\left(\omega\gamma^0 - 2M_1 + 2iM_2\gamma_5 + \frac{1}{2}R_\mu\gamma^\mu\gamma_5\right)\Lambda_0 = \Omega\Lambda_0 = -i\sqrt{2}\gamma^0\gamma_5\gamma^i\psi\left(\vec{E}_0\right)_i, \quad (2.101)$$

de forma a escrever

$$\Lambda_0 = -i\sqrt{2}\left(\Omega^{-1}\gamma^0\gamma_5\gamma^i\psi\right)\left(\vec{E}_0\right)_i \quad (2.102)$$

e levar este resultado em (2.100) para obtermos uma equação inteiramente em termos do campo elétrico de maneira a podermos escrever uma relação de dispersão para o Fóton. Para prosseguir nessa linha, é necessário calcular Ω^{-1} . Então, notemos que

$$\begin{aligned} \Omega &= -\frac{1}{2}\left(\bar{\psi}\psi\right)\mathbb{1} - \frac{1}{2}\left(\bar{\psi}\gamma_5\psi\right)\gamma_5 + \omega\gamma^0 + \frac{1}{2}R_\mu\gamma^\mu\gamma_5 \\ &= a\mathbb{1} + b\gamma_5 + c_\mu\gamma^\mu + d_\mu\gamma^\mu\gamma_5 \end{aligned} \quad (2.103)$$

com

$$a = -\frac{1}{2}\left(\bar{\psi}\psi\right) \quad (2.104)$$

$$b = -\frac{1}{2}\left(\bar{\psi}\gamma_5\psi\right) \quad (2.105)$$

$$c_\mu = \left(\omega, \vec{0}\right) \quad (2.106)$$

$$d_\mu = \frac{1}{2}\left(\left(\bar{\psi}\gamma_0\gamma_5\psi\right), -\vec{v}_i - \left(\bar{\psi}\gamma_i\gamma_5\psi\right)\right). \quad (2.107)$$

Mais uma vez nos apoiando nos resultados do Apêndice C, vamos poder escrever que

$$\Omega^{-1} = x\mathbb{1} + y\gamma_5 + (\alpha c_\mu + \beta d_\mu)\gamma^\mu + (\xi c_\mu + \lambda d_\mu)\gamma^\mu + \left(\rho\theta_{\mu\nu} + \tau\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\theta^{\alpha\beta}\right)\Sigma^{\mu\nu}. \quad (2.108)$$

Lembrando que

$$\theta_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (c_\mu d_\nu - c_\nu d_\mu). \quad (2.109)$$

De forma geral, teremos que os coeficientes são dados por

$$x = -\frac{(\bar{\psi}\psi)}{\Delta} \frac{\Theta}{2} \quad (2.110)$$

$$y = \frac{(\bar{\psi}\gamma_5\psi)}{\Delta} \frac{\Theta}{2} \quad (2.111)$$

$$\alpha = \frac{\Theta}{\Delta} \quad (2.112)$$

$$\beta = -\frac{(\bar{\psi}\gamma_5\psi)\omega}{\Delta} \quad (2.113)$$

$$\xi = \frac{(\bar{\psi}\gamma_5\psi)\omega}{\Delta} \quad (2.114)$$

$$\lambda = -\frac{\Theta}{\Delta} \quad (2.115)$$

$$\rho = -2i \frac{(\bar{\psi}\gamma_5\psi)}{\Delta} \quad (2.116)$$

$$\tau = -\frac{(\bar{\psi}\psi)}{\Delta}. \quad (2.117)$$

em que

$$\begin{aligned} \Delta = & \frac{1}{16} \left[(\bar{\psi}\gamma_0\gamma_5\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_5\psi)^2 - (\vec{v}_i - (\bar{\psi}\gamma_i\gamma_5\psi))^2 + (\bar{\psi}\psi)^2 \right]^2 - \\ & - \frac{1}{2} \left[(\bar{\psi}\gamma_0\gamma_5\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_5\psi)^2 + (\vec{v}_i - (\bar{\psi}\gamma_i\gamma_5\psi))^2 + (\bar{\psi}\psi)^2 \right] \omega^2 + \omega^4 \end{aligned} \quad (2.118)$$

e

$$\Theta = \frac{1}{4} \left[(\bar{\psi}\gamma_0\gamma_5\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_5\psi)^2 - (\vec{v}_i - (\bar{\psi}\gamma_i\gamma_5\psi))^2 + (\bar{\psi}\psi)^2 - 4\omega^2 \right]. \quad (2.119)$$

A partir destes resultados, para escrever a matriz Ω^{-1} devemos notar que

$$\theta_{00} = \frac{1}{2} (c_0 d_0 - c_0 d_0) = 0 \quad (2.120)$$

$$\theta_{i0} = \frac{1}{2} (c_i d_0 - c_0 d_i) = +\frac{1}{4} \omega [\vec{v}_i + (\bar{\psi}\gamma_i\gamma_5\psi)] \quad (2.121)$$

$$\theta_{0i} = \frac{1}{2} (c_0 d_i - c_i d_0) = -\frac{1}{4} \omega [\vec{v}_i + (\bar{\psi}\gamma_i\gamma_5\psi)] \quad (2.122)$$

$$\theta_{ij} = \frac{1}{2} (c_i d_j - c_j d_i) = 0. \quad (2.123)$$

Tendo isso em mente, a matriz Ω^{-1} é completamente especificada pela forma

$$\begin{aligned} \Omega^{-1} = \frac{1}{\Delta} \left\{ -\frac{(\bar{\psi}\psi)\Theta}{2}\mathbb{1} + \frac{(\bar{\psi}\gamma_5\psi)\Theta}{2}\gamma_5 + \omega\Theta\gamma^0 - \frac{\omega}{2}(\bar{\psi}\gamma_5\psi)(\bar{\psi}\gamma_0\gamma_5\psi)\gamma^0 + \right. \\ \left. + \frac{\omega}{2}(\bar{\psi}\gamma_5\psi)[\vec{v}_i + (\bar{\psi}\gamma_i\gamma_5\psi)]\gamma^i + \omega^2(\bar{\psi}\gamma_5\psi)\gamma^0\gamma_5 - \frac{1}{2}(\bar{\psi}\gamma_0\gamma_5\psi)\Theta\gamma^0\gamma_5 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}[\vec{v}_i + (\bar{\psi}\gamma_i\gamma_5\psi)]\Theta\gamma^i\gamma_5 - i\omega(\bar{\psi}\gamma_5\psi)[\vec{v}_i + (\bar{\psi}\gamma_i\gamma_5\psi)]\Sigma^{0i} - \right. \\ \left. - \frac{\omega}{2}(\bar{\psi}\psi)[\vec{v}_k + (\bar{\psi}\gamma_k\gamma_5\psi)]\varepsilon_{ijk}\Sigma^{ij} \right\}. \end{aligned} \quad (2.124)$$

Se desprezamos termos em segunda ordem nos parâmetros que violam a simetria de Lorentz podemos escrever

$$\Theta = -\omega^2. \quad (2.125)$$

Com isso, a matriz Ω^{-1} toma a forma

$$\begin{aligned} \Omega^{-1} = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{\omega^2}{2}(\bar{\psi}\psi)\mathbb{1} - \frac{\omega^2}{2}(\bar{\psi}\gamma_5\psi)\gamma_5 - \omega^3\gamma^0 + \omega^2(\bar{\psi}\gamma_5\psi)\gamma^0\gamma_5 + \frac{\omega^2}{2}(\bar{\psi}\gamma_0\gamma_5\psi)\gamma^0\gamma_5 - \right. \\ \left. - \frac{\omega^2}{2}[\vec{v}_i + (\bar{\psi}\gamma_i\gamma_5\psi)]\gamma^i\gamma_5 \right]. \end{aligned} \quad (2.126)$$

Levando este resultado de Ω^{-1} para equação (2.102), que especifica Λ_0 , teremos

$$\begin{aligned} \Lambda_0 = -i\frac{\sqrt{2}}{\Delta} \left[\frac{\omega^2}{2}(\bar{\psi}\psi)\mathbb{1} - \frac{\omega^2}{2}(\bar{\psi}\gamma_5\psi)\gamma_5 - \omega^3\gamma^0 + \omega^2(\bar{\psi}\gamma_5\psi)\gamma^0\gamma_5 + \right. \\ \left. + \frac{\omega^2}{2}(\bar{\psi}\gamma_0\gamma_5\psi)\gamma^0\gamma_5 - \frac{\omega^2}{2}[\vec{v}_i + (\bar{\psi}\gamma_i\gamma_5\psi)]\gamma^i\gamma_5 \right] \gamma^0\gamma_5\gamma^i\psi (\vec{E}_0)_i. \end{aligned} \quad (2.127)$$

De forma tal que a equação de Ampère-Maxwell (2.100), no referencial de repouso, vai vir a ser escrita de tal maneira que

$$\begin{aligned} (\omega + i\varepsilon_{ijk}\vec{v}_k)(\vec{E}_0)_j = \frac{2\omega}{\Delta}\bar{\psi}\gamma^0\gamma^j\gamma_5 \left[\frac{\omega^2}{2}(\bar{\psi}\psi)\mathbb{1} - \frac{\omega^2}{2}(\bar{\psi}\gamma_5\psi)\gamma_5 - \omega^3\gamma^0 + \omega^2(\bar{\psi}\gamma_5\psi)\gamma^0\gamma_5 + \right. \\ \left. + \frac{\omega^2}{2}(\bar{\psi}\gamma_0\gamma_5\psi)\gamma^0\gamma_5 + \frac{\omega^2}{2}(\bar{\psi}\gamma_0\gamma_5\psi)\gamma^0\gamma_5 \right] \gamma^0\gamma_5\gamma^i\psi (\vec{E}_0)_i \\ = + \frac{2\omega^4}{\Delta} [\delta_{ij}(\bar{\psi}\gamma^0\psi) - 2i(\bar{\psi}\gamma^0\Sigma^{ij}\psi)] (\vec{E}_0)_i \\ + \frac{\omega^3}{\Delta}(\bar{\psi}\psi) [-\delta_{ij}(\bar{\psi}\psi) + 2i(\bar{\psi}\Sigma^{ij}\psi)] (\vec{E}_0)_i \\ - \frac{\omega^3}{\Delta}(\bar{\psi}\gamma_5\psi) [-\delta_{ij}(\bar{\psi}\gamma_5\psi) + 2i(\bar{\psi}\gamma_5\Sigma^{ij}\psi)] (\vec{E}_0)_i \\ + \frac{2\omega^3}{\Delta}(\bar{\psi}\gamma_5\psi) [\delta_{ij}(\bar{\psi}\gamma_5\gamma^0\psi) - 2i(\bar{\psi}\gamma_5\gamma^0\Sigma^{ij}\psi)] (\vec{E}_0)_i \\ + \frac{\omega^3}{\Delta}(\bar{\psi}\gamma_0\gamma_5\psi) [\delta_{ij}(\bar{\psi}\gamma_5\gamma^0\psi) - 2i(\bar{\psi}\gamma_5\gamma^0\Sigma^{ij}\psi)] (\vec{E}_0)_i \\ - \frac{\omega^3}{\Delta}[\vec{v}_k + (\bar{\psi}\gamma_k\gamma_5\psi)] [\delta_{jk}(\bar{\psi}\gamma_5\gamma^i\psi) + 2i(\bar{\psi}\gamma_5\Sigma^{jk}\gamma^i\psi)] (\vec{E}_0)_i. \end{aligned} \quad (2.128)$$

Considerando apenas a primeira ordem na violação da simetria de Lorentz, teremos

$$(\omega + i\varepsilon_{ijk}\vec{v}_k) (\vec{E}_0)_j = \frac{2\omega^4}{\Delta} [\delta_{ij} (\bar{\psi}\gamma^0\psi) - 2i (\bar{\psi}\gamma^0\Sigma^{ij}\psi)] (\vec{E}_0)_i. \quad (2.129)$$

Como ψ é um férmion de Majorana, os condensados $(\bar{\psi}\gamma^0\psi)$ e $(\bar{\psi}\gamma^0\Sigma^{ij}\psi)$ devem ser tomados como triviais. Então, podemos escrever simplesmente que

$$(\omega + i\varepsilon_{ijk}\vec{v}_k) (\vec{E}_0)_j = 0. \quad (2.130)$$

Que é a mesma equação para a massa do fóton que obtivemos anteriormente. Essa equação nos leva ao espectro para a massa do fóton dado pelo resultado (2.76),

$$m_\gamma = \pm|\vec{v}|. \quad (2.131)$$

De forma geral, podemos concluir então que há uma peculiaridade no modelo de Carroll-Field-Jackiw supersimétrico onde aparece o mixing fóton-fotino, tanto na situação com $(\bar{\psi}\gamma_5\psi) = (\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi) \neq 0$ quanto na situação mais trivial em que estes termos são tomados como sendo nulos, peculiaridade essa que reside nos resultados que evidenciam o *splitting* do espectro de massa do fóton e do fotino, que neste caso mais geral é dado pelos resultado (2.99) e (2.131), o que revela uma quebra da supersimetria devido a quebra, anterior, da simetria de Lorentz.

Os resultados para massa do fóton dado tanto por (2.76) quanto por (2.131) podem ser examinados sob o ponto de vista dos limites superiores para o módulo da parte espacial de v_μ e da massa do fóton m_γ encontrados na literatura. A referência [40] apresenta uma tabela com os valores mais atuais para os limites superiores do módulo da parte espacial e da parte temporal de v_μ . Reproduzimos estes resultados aqui na forma da Tabela 1, a partir dos quais podemos, dividindo estes resultados por c^2 , obter um limite para a massa do fóton seguindo a prescrição de (2.76) e (2.131).

Limites superiores do parâmetro v_μ	
$ \vec{v} $ ^a	$< 10^{-19}$ eV = $1,6 \cdot 10^{-29}$ J; $5,1 \cdot 10^{-4}$ m ⁻¹
$ \vec{v} $ ^b	$< 8 \cdot 10^{-14}$ eV = $1,3 \cdot 10^{-32}$ J; $4,1 \cdot 10^{-7}$ m ⁻¹
$ \vec{v} $ ^c	$< 10^{-34}$ eV = $1,6 \cdot 10^{-53}$ J; $5,1 \cdot 10^{-28}$ m ⁻¹
v_0 ^d	$< 10^{-16}$ eV = $1,6 \cdot 10^{-35}$ J; $5,1 \cdot 10^{-10}$ m ⁻¹
v_0 ^e	$< 10^{-34}$ eV = $1,6 \cdot 10^{-53}$ J; $5,1 \cdot 10^{-28}$ m ⁻¹

Tabela 1 – Limites superiores para o termo v_μ que viola a simetria de Lorentz (últimos valores anotados em unidades do SI) apresentada na referência [40]. Em que: ^a vem de *shifts* no espectro de energia do átomo de Hidrogênio [41]; ^{b,d} vem da rotação da polarização da luz in cavidades ressonantes [41]; ^{c,e} vem de observações astrofísicas [42].

Segundo os resultados apresentados no *Particle Data Group* para os limites superiores da massa do fóton, advindos observações astrofísicas, encontramos que $m_\gamma < 1,78 \cdot 10^{-54}$ Kg,

valor que cerva de 24 ordens de grandeza menor que a massa do elétron [43]. Uma referência bastante interessante que mostra como é obtido os limites para a massa do fóton e que traça um histórico da obtenção dos desde o ano de 1940 até 2005, levando-se em consideração observações astrofísicas, é [44]. A referência de 2016 obtém um resultado de $m_\gamma < 4,2 \cdot 10^{-47}$ Kg levando-se em consideração dados advindos de *gamma-ray bursts* [45].

Nesse sentido, nos concentrado nos dados astrofísicos da Tabela 1 e nos resultados para o limite superior da massa do fóton apresentados, percebemos que $|\vec{v}| < 1,6 \cdot 10^{-53}$ J nos leva a um limite para massa do fóton da ordem de $m_\gamma < 5,3 \cdot 10^{-62}$ Kg. O que está dentro dos limites previstos para a massa do fóton.

Capítulo 3

Generalização da equação de Dirac

Para dar início a este capítulo, é importante enfatizar que no contexto de modelos teóricos que buscam uma física que vá além do Modelo-Padrão, um modelo que se destaca é tal que o Modelo-Padrão é generalizado pela adição termos que violam a simetria de Lorentz à ação. Os requerimentos para essa adição são tais que: 1) a simetria de calibre deve ser preservada, para manter intacto os números de grau de liberdade; 2) deve haver renormalizabilidade; 3) livre de derivadas mais altas, para evitar fantasmas. Dentro dessa perspectiva, na referência [46] é mostrado, no espírito do SME construído pela escola de Indiana, como a ação do Modelo-Padrão é estendida com a violação da simetria de Lorentz, levando em conta campos espinoriais e de calibre no setor da eletrodinâmica quântica. Nesse sentido, os autores mostram que a ação tem a forma

$$S = \int d^4x \left[\bar{\psi} (i\Gamma^\mu D_\mu - M) \psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{4} k_{\mu\nu\lambda\rho} F^{\mu\nu} F^{\lambda\rho} + \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} k^\mu A^\nu \partial^\lambda A^\rho \right]. \quad (3.1)$$

Em que o tensor constante de fundo $k_{\mu\nu\lambda\rho}$ é um termo CPT-par e a parcela total que contrai com ele é comumente chamado de termo de éter. O vetor de fundo constante k^μ é um termo CPT-ímpar e a parcela total que o acompanha é o usual termo de Carroll-Field-Jackiw. D_μ tem a forma da derivada covariante usual com acoplamento mínimo e

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu + c^{\mu\nu} \gamma_\nu + d^{\mu\nu} \gamma_\nu \gamma_5 + e^\mu + i f^\mu \gamma_5 + \frac{1}{4} g^{\lambda\nu\mu} \Sigma_{\lambda\nu}, \quad (3.2)$$

$$M = m + a^\mu \gamma^\mu + b_\mu \gamma^\mu \gamma_5 + \frac{1}{4} H_{\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu} + m_5 \gamma_5. \quad (3.3)$$

Todo este contexto relacionado com a violação da simetria de Lorentz, e também o Capítulo anterior onde nos deparamos com alguns bilineares fermiônicos que levaram à quebra da simetria espaço-temporal, nos motivou a trabalhar com um cenário onde consideramos uma generalização da equação de Dirac usual,

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi(x) = 0,$$

com termos que violam explicitamente as simetrias espaço-temporais. Neste capítulo não vamos trabalhar no sistema de unidades naturais em que $\hbar = c = 1$ pensando em futuras comunicações com um cenário de matéria condensada. Sendo assim, nossa proposição segue da seguinte forma

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc - i\zeta\gamma_5 - \xi_\mu\gamma^\mu - R_\mu\gamma^\mu\gamma_5)\psi(x) = 0. \quad (3.4)$$

Que pode ser vista com um caso derivado da ação (3.1) com concentração apenas no termo de massa M , definido em (3.3), com $a_\mu = -\xi_\mu$, $b_\mu = -R_\mu$, $m_5 = -i\zeta$ e o restante sendo casos triviais.

Migrando para o espaço dos momenta com a prescrição da transformada de Fourier sendo adotada de forma que

$$\psi(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi\hbar)^4} \psi(p) e^{-ip_\mu x^\mu/\hbar}, \quad (3.5)$$

podemos escrever

$$(p_\mu\gamma^\mu - mc - i\zeta\gamma_5 - \xi_\mu\gamma^\mu - R_\mu\gamma^\mu\gamma_5)\psi(p) = 0. \quad (3.6)$$

O passo mais natural a se dar no estudo desta equação, é estudar a relação de dispersão modificada definida pelo operador matricial que age no espinor $\psi(p)$ em (3.6). Isto é, seja o operador \mathcal{D} dado por

$$\mathcal{D} = (p_\mu\gamma^\mu - mc - i\zeta\gamma_5 - \xi_\mu\gamma^\mu - R_\mu\gamma^\mu\gamma_5), \quad (3.7)$$

de forma que estamos a procurar por

$$\det(\mathcal{D}) = 0. \quad (3.8)$$

No Apêndice C, apresentamos o cálculo explícito da inversa e do determinante de um operador geral D , que reproduz as condições de \mathcal{D} se identificamos os coeficientes de D como sendo iguais a

$$\begin{cases} a = -mc, \\ b = -i\zeta, \\ c_\mu = p_\mu - \xi_\mu, \\ d_\mu = -R_\mu. \end{cases} \quad (3.9)$$

Então, sob a perspectiva do Apêndice C, teremos que a relação de dispersão, mantendo mente que o link da presente situação com o Apêndice é feita por $\det(\mathcal{D}) = \Delta$, é tal que

$$\det(\mathcal{D}) = (p^2 - m^2c^2 - \zeta^2 + \xi^2 + R^2 - 2p \cdot \xi)^2 - 4[(p \cdot R - \xi \cdot R)^2 - m^2c^2 - \zeta^2] = 0. \quad (3.10)$$

Acontece que essa expressão para a relação de dispersão modificadas não é tratável do ponto de vista analítico se nos propomos resolver a mesma para $p_0 = E/c$. Obtemos um expressão

gigantesca que compreende páginas de termos. Sendo assim, estudaremos casos especiais, mas não menos importantes, nos capítulos que virão.

Explorando um pouco mais os resultados dos desenvolvimentos do Apêndice C, podemos escrever o propagador fermiônico que leva em consideração os termos que quebram a simetria Lorentz em questão. Ou seja,

$$\begin{aligned}
iS(p) = & \frac{i}{(p^2 - m^2c^2 - \zeta^2 + \xi^2 + R^2 - 2p \cdot \xi + i\varepsilon)^2 - 4[(p \cdot R - \xi \cdot R)^2 - m^2c^2 - \zeta^2]} \times \\
& \times \left\{ \left[\not{p} - \not{\xi} - \not{R}\gamma_5 + mc - i\zeta\gamma_5 \right] (p^2 - m^2c^2 - \zeta^2 + \xi^2 - R^2 - 2p \cdot \xi) - \right. \\
& - 2 \left[(\not{p} - \not{\xi}) \gamma_5 + \not{R} \right] (p \cdot R - \xi \cdot R) - 2\zeta \left[(p_\mu - \xi_\mu) R_\nu - (p_\nu - \xi_\nu) R_\mu \right] \Sigma^{\mu\nu} - \\
& \left. - 2mc \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \left[(p^\alpha - \xi^\alpha) R^\beta - (p^\beta - \xi^\beta) R^\alpha \right] \Sigma^{\mu\nu} \right\}. \tag{3.11}
\end{aligned}$$

Ainda que não seja prático trabalhar com a relação de dispersão de forma analítica, podemos obter algumas outras informações bastante interessantes advindas de (3.4). Este é o caso da decomposição de Gordon. Mas para efeitos de generalidade, calculamos a decomposição de Gordon assumindo acoplamento mínimo em (3.4), ou seja,

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + i\frac{eq}{\hbar}A_\mu, \tag{3.12}$$

de tal maneira que

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc - i\zeta\gamma_5 - \xi_\mu\gamma^\mu - R_\mu\gamma^\mu\gamma_5 - eq\gamma^\mu A_\mu)\psi(x) = 0, \tag{3.13}$$

em que eq denota um múltiplo da carga do elétron. Nestes moldes, a decomposição de Gordon, que nos auxiliará no entendimento, em análises futuras, de respostas que estes resultados estão nos dizendo a efeito de fatores de forma, isto é, se estes resultados podem trazer contribuições para o momento de dipolo elétrico ou magnético, ou até, dependendo da situação, a contribuição de um anapolo magnético, etc. - veja por favor a sessão D.2 do Apêndice D para ficar a par dos detalhes técnicos - toma a forma

$$\begin{aligned}
& i\hbar(\partial^\kappa\bar{\psi})\psi - i\hbar\bar{\psi}(\partial^\kappa\psi) + 2\hbar(\partial_\mu\bar{\psi})\Sigma^{\mu\kappa}\psi + 2\hbar\bar{\psi}\Sigma^{\mu\kappa}(\partial_\mu\psi) + 2mc\bar{\psi}\gamma^\kappa\psi + 2\xi^\kappa\bar{\psi}\psi + \\
& + 4iR_\mu\bar{\psi}\Sigma^{\mu\kappa}\gamma_5\psi + 2eqA^\kappa\bar{\psi}\psi = 0 \tag{3.14}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& i\hbar(\partial^\kappa\bar{\psi})\psi + i\hbar\bar{\psi}(\partial^\kappa\psi) + 2\hbar(\partial_\mu\bar{\psi})\Sigma^{\mu\kappa}\psi - 2\hbar\bar{\psi}\Sigma^{\mu\kappa}(\partial_\mu\psi) - 2i\zeta\bar{\psi}\gamma^\kappa\gamma_5\psi - \\
& - 4i\xi_\mu\bar{\psi}\Sigma^{\mu\kappa}\psi - 2R^\kappa\bar{\psi}\gamma_5\psi - 4iqeA_\mu\bar{\psi}\Sigma^{\mu\kappa}\psi = 0. \tag{3.15}
\end{aligned}$$

No espaço dos momenta, temos que

$$\begin{aligned}
 2mc\bar{\psi}(p+q')\gamma^\kappa\psi(p) &= \left[(p+q')^\kappa + p^\kappa - 2\xi^\kappa \right] \bar{\psi}(p+q')\psi(p) - \\
 &\quad - 2i \left[(p+q')^\kappa - p^\kappa \right] \bar{\psi}(p+q')\Sigma^{\mu\kappa}\psi(p) - \\
 &\quad - 4iR_\mu\bar{\psi}(p+q')\Sigma^{\mu\kappa}\gamma_5\psi(p) - \\
 &\quad - 2eq \int \frac{d^4p'}{(2\pi\hbar)^4} \bar{\psi}(p')\psi(p)A^\kappa(p'-p-q')
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

e

$$\begin{aligned}
 2\zeta\bar{\psi}(p+q')\gamma^\kappa\gamma_5\psi(p) &= 2i \left[(p+q')^\mu + p_\mu - 2\xi_\mu \right] \bar{\psi}(p+q')\Sigma^{\mu\kappa}\psi(p) - \\
 &\quad - \left[(p+q')^\kappa - p^\kappa \right] \bar{\psi}(p+q')\psi(p) - \\
 &\quad - 2R^\kappa\bar{\psi}(p+q')\gamma_5\psi(p) - \\
 &\quad - 4iqe \int \frac{d^4p'}{(2\pi\hbar)^4} \bar{\psi}(p')\Sigma^{\mu\kappa}\psi(p)A_\mu(p'-p-q').
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Interessante nestes resultados, é que em (3.16) podemos ver a corrente vetorial decomposta nos termos usuais da Decomposição de Gordon, e podemos notar o surgimento de um termo extra, que acompanha o termo de violação da simetria de Lorentz R_μ e que aparece na forma do dual da corrente de spin, o que sugere que a violação da simetria de Lorentz induz o aparecimento de um momento de dipolo elétrico para o elétron.

Procuramos trabalhar também a forma do tensor energia-momento que advém da equação (3.4). Este trabalho foi realizado de forma generalista, considerando num cenário em que o fundo não é contante. Os detalhes de cálculos podem ser visto no apêndice E, sessão E.1. Com isso, fomos levados a escrever que a quadri-divergência do tensor energia-momento, na sua forma anti-simétrica, tem a forma

$$\begin{aligned}
 \partial_\mu \left[i\hbar \left(\partial_\nu \bar{\psi} \right) \gamma^\mu \psi - i\hbar \bar{\psi} \gamma^\mu \left(\partial_\nu \psi \right) \right] &= -2 \left[\partial_\nu \xi_\mu(x) \right] \bar{\psi} \gamma^\mu \psi - 2i \left[\partial_\nu \zeta(x) \right] \bar{\psi} \gamma_5 \psi - \\
 &\quad - 2 \left[\partial_\nu R_\mu(x) \right] \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi.
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Simetrizando o termo dentro dos colchetes no lado direito, vamos poder escrever o tensor energia-momento simétrico, $\theta^\mu{}_\nu$, sob a forma

$$\begin{aligned}
 \partial_\mu \theta^\mu{}_\nu &= \partial_\mu \left\{ i\hbar \left[\bar{\psi} \left(\gamma^\mu \tilde{\partial}_\nu + \tilde{\partial}^\mu \gamma_\nu - \gamma^\mu \tilde{\partial}_\nu - \tilde{\partial}^\mu \gamma_\nu \right) \psi \right] \right\} = -4 \left[\partial_\nu \xi_\mu(x) \right] \bar{\psi} \gamma^\mu \psi - \\
 &\quad - 4i \left[\partial_\nu \zeta(x) \right] \bar{\psi} \gamma_5 \psi - \\
 &\quad - 4 \left[\partial_\nu R_\mu(x) \right] \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi.
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Para averiguar a licitude do processo de simetrização que nos levou ao resultado (3.19), é necessário um desenvolvimento em detalhes do lado esquerdo de (3.19) de forma a certificar se este lado se iguala ao direito. Ou seja,

$$\begin{aligned}
 \partial_\mu \theta^\mu{}_\nu &= i\hbar \partial_\mu \left[\left(\partial^\mu \bar{\psi} \right) \gamma_\nu \psi - \bar{\psi} \gamma_\nu \left(\partial^\mu \psi \right) \right] - \\
 &\quad - 2 \left[\partial_\nu \xi_\mu(x) \right] \bar{\psi} \gamma^\mu \psi - 2i \left[\partial_\nu \zeta(x) \right] \bar{\psi} \gamma_5 \psi - 2 \left[\partial_\nu R_\mu(x) \right] \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi.
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

De forma que se o ato de simetrizar o tensor energia-momento for válido, o primeiro termo do lado direito de (3.20) deve ter exatamente a forma dos termos restantes que o acompanham na expressão, isso para que o lado direito de (3.19) seja cumprido. Acontece que ao avaliar este primeiro termo do lado direito de (3.20), somos levados a escrever que

$$\begin{aligned}
i\hbar\partial_\mu \left[(\partial^\mu \bar{\psi}) \gamma_\nu \psi - \bar{\psi} \gamma_\nu (\partial^\mu \psi) \right] = & -2 [\partial_\nu \xi_\mu(x)] \bar{\psi} \gamma^\mu \psi - 2i [\partial_\nu \zeta(x)] \bar{\psi} \gamma_5 \psi - \\
& -2 [\partial_\nu R_\mu(x)] \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi - \\
& -2\partial_\mu \left(\xi^\mu \bar{\psi} \gamma_\nu \psi \right) + 2(\partial_\mu \xi_\nu) \left(\bar{\psi} \gamma^\mu \psi \right) - \\
& -2R_\mu \partial_\nu \left(\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi \right) + 2\partial^\kappa \left(R_\nu \bar{\psi} \gamma_\kappa \gamma_5 \psi \right) - \\
& -2(\partial_\kappa R^\kappa) \bar{\psi} \gamma_\nu \gamma_5 \psi + i\varepsilon_{\mu\kappa\nu\sigma} (R^\kappa \partial^\mu - R^\mu \partial^\kappa) \left(\bar{\psi} \gamma^\sigma \psi \right). \quad (3.21)
\end{aligned}$$

Sendo assim, o processo de simetrização não é válido.

Então, a partir destes resultados, percebemos que uma vez que temos um fundo que viola a simetria de Lorentz dependentes das coordenadas do espaço-tempo, temos uma quebra da equação de continuidade que refletiria a conservação do tensor energia-momento.

O encerramento este capítulo fica com citação da Dissertação de Mestrado defendida no CBPF em 2008 por Rodrigo Turcati, o busca-se os limites não relativísticos e suas implicações dessa situação de uma equação de Dirac generalizada por termos que violam a simetria de Lorentz [47].

Capítulo 4

Caso especial da generalização da equação de Dirac

Como argumentamos no capítulo anterior, a obtenção de relações de dispersão modificadas para o caso da equação de Dirac generalizada, na forma que apresentamos na equação (3.4), nos leva a expressões pouco elegantes e intratáveis do ponto de vista analítico. Sendo assim, neste capítulo iremos considerar um caso especial, mas bastante elegante e não menos importante, da equação (3.4). Este caso especial é tal que $R_\mu = 0$. Com esta prescrição em mente, um estudo detalhado da equação de Dirac é proposto, passando pela suas soluções de energias positivas e negativas, obtenção da relação de dispersão modificada e da velocidade de grupo, obtenção da decomposição de Gordon, do tensor energia-momento, uma análise do paradoxo de Klein e obtenção da frequência responsável pelo *Zitterbewegung*.

Nesta situação, em que $R_\mu = 0$, a equação de Dirac estendida tem a forma

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc - i\zeta\gamma_5 - \xi_\mu\gamma^\mu)\psi = 0. \quad (4.1)$$

No espaço dos momenta, temos que a mesma se torna

$$(p_\mu\gamma^\mu - mc - i\zeta\gamma_5 - \xi_\mu\gamma^\mu)\psi(p) = 0. \quad (4.2)$$

Nestes moldes, o operador \mathcal{D} é

$$\mathcal{D} = (p_\mu\gamma^\mu - mc - i\zeta\gamma_5 - \xi_\mu\gamma^\mu), \quad (4.3)$$

de tal maneira que nos interessa o resultado de

$$\det(\mathcal{D}) = 0. \quad (4.4)$$

4.1 A relação de dispersão modificada

Levando em consideração os resultados do apêndice C com a prescrição definida em (3.9), temos que para $R_\mu = 0$,

$$\det(\mathcal{D}) = \Delta = \left[\frac{E^2}{c^2} - \vec{p}_i^2 + \xi_0^2 - \vec{\xi}_i^2 - m^2 c^2 - \zeta^2 - 2 \left(\frac{E\xi_0}{c} - \vec{p}_i \vec{\xi}_i \right) \right]^2 = 0. \quad (4.5)$$

Resolvendo para E , teremos que

$$E = c\xi_0 \pm c\sqrt{(\vec{p}_i - \vec{\xi}_i)^2 + m^2 c^2 + \zeta^2}. \quad (4.6)$$

Resultado que nos convida a escrever o espectro sob a seguinte perspectiva:

$$\mathcal{E} = \pm c\sqrt{\vec{\mathcal{P}}_i^2 + m^2 c^2 + \zeta^2}, \quad (4.7)$$

em que identificamos energias e momentos efetivos seguindo a prescrição

$$\mathcal{E} = E - c\xi_0, \quad (4.8)$$

$$\vec{\mathcal{P}}_i = \vec{p}_i - \vec{\xi}_i. \quad (4.9)$$

4.2 Velocidade de Grupo

Com a relação de dispersão dada pela equação (4.5) em mãos, podemos calcular a componente i da velocidade de grupo, que é definida por

$$(\vec{V}_g)_i = \frac{\partial E}{\partial \vec{p}_i}, \quad (4.10)$$

notando que a derivada total da relação de dispersão é

$$d(\Delta) = \frac{\partial \Delta}{\partial E} dE + \frac{\partial \Delta}{\partial \vec{p}_i} d\vec{p}_i = AdE + Bd\vec{p}_i = 0, \quad (4.11)$$

de tal forma que podemos simplesmente escrever

$$(\vec{V}_g)_i = -\frac{B}{A}. \quad (4.12)$$

Assim, teremos

$$A = \frac{4}{c^2} (E - c\xi_0) \left[\frac{E^2}{c^2} - \vec{p}_i^2 - m^2 c^2 - \zeta^2 + \xi^2 - 2 \left(\frac{E\xi_0}{c} - \vec{p}_i \vec{\xi}_i \right) \right] \quad (4.13)$$

e

$$B = -4 (\vec{p}_i - \vec{\xi}_i) \left[\frac{E^2}{c^2} - \vec{p}_i^2 - m^2 c^2 - \zeta^2 + \xi^2 - 2 \left(\frac{E\xi_0}{c} - \vec{p}_i \vec{\xi}_i \right) \right]. \quad (4.14)$$

Então,

$$(\vec{V}_g)_i = \frac{c^2 (\vec{p}_i - \vec{\xi}_i)}{(E - c\xi_0)} = \frac{c^2 \vec{\mathcal{P}}_i}{\mathcal{E}}. \quad (4.15)$$

4.3 O propagador fermiônico modificado

Explorando os resultados do Apêndice C, podemos construir a forma do propagador na situação em que $R_\mu = 0$. Assim sendo, teremos que o propagador toma a forma

$$iS(\mathcal{P}) = \frac{i(\not{p} - \not{\xi} + mc - i\zeta\gamma_5)}{(p^2 - 2p \cdot \xi + \xi^2 - m^2c^2 - \zeta^2)} = \frac{i(\mathcal{P}_\mu\gamma^\mu + mc - i\zeta\gamma_5)}{(\mathcal{P}^2 - m^2c^2 - \zeta^2 + i\varepsilon)}. \quad (4.16)$$

Essa expressão para o propagador fermiônico é bastante parecida com a forma da expressão do propagador fermiônico associado à equação de Dirac usual, sem termos LSV. A diferença reside nos termos proporcionais a ζ .

4.4 A decomposição de Gordon

Para escrever a decomposição de Gordon para o caso em que $R_\mu = 0$, não é necessário grande esforço. Este é um caso especial da expressão geral para a decomposição de Gordon escrita no capítulo anterior, e que foi calculada de forma explícita na sessão D.2 do Apêndice D. De tal maneira, temos que no espaço dos momenta,

$$2m\bar{\psi}(p')\gamma^\kappa\psi(p) = (p'^\kappa + p^\kappa - 2\xi^\kappa)\bar{\psi}(p')\psi(p) - 2i(p'^\kappa - p^\kappa)\bar{\psi}(p')\Sigma^{\mu\kappa}\psi(p) \quad (4.17)$$

e

$$2\zeta\bar{\psi}(p')\gamma^\kappa\gamma_5\psi(p) = 2i(p'^\mu + p^\mu - 2\xi_\mu)\bar{\psi}(p')\Sigma^{\mu\kappa}\psi(p) - (p'^\kappa - p^\kappa)\bar{\psi}(p')\psi(p). \quad (4.18)$$

Como argumentamos no Capítulo anterior, a decomposição de Gordon nos auxiliará no entendimento, em análises futuras, de respostas que estes resultados estão nos dizendo a efeito de fatores de forma, isto é, se estes resultados podem trazer contribuições para o momento de dipolo elétrico ou magnético, ou até, dependendo da situação, a contribuição de um anapolo magnético, etc.

4.5 O tensor energia-momento

O tensor energia-momento também é um caso especial daquele que fora obtido no capítulo anterior para a situação da equação de Dirac mais geral. Então, se tomamos $R_\mu = 0$ na equação (3.18) temos que o tensor energia momento é tal que

$$\partial_\mu [i\hbar(\partial_\nu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi - i\hbar\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\nu\psi)] = -2[\partial_\nu\xi_\mu(x)]\bar{\psi}\gamma^\mu\psi - 2i[\partial_\nu\zeta(x)]\bar{\psi}\gamma_5\psi. \quad (4.19)$$

Simetrizando o lado esquerdo, temos θ^μ_ν de tal maneira que

$$\begin{aligned} \partial_\mu\theta^\mu_\nu = \partial_\mu \{ i\hbar [\bar{\psi} (\gamma^\mu\bar{\partial}_\nu + \bar{\partial}^\mu\gamma_\nu - \gamma^\mu\bar{\partial}_\nu - \bar{\partial}^\mu\gamma_\nu) \psi] \} = & -4[\partial_\nu\xi_\mu(x)]\bar{\psi}\gamma^\mu\psi - \\ & -4i[\partial_\nu\zeta(x)]\bar{\psi}\gamma_5\psi. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Resta agora averiguar se o processo de simetrização é válido. O que consiste em desenvolver em detalhes o lado esquerdo do resultado acima de forma a certificarmos se obtemos exatamente o que se encontra do lado esquerdo. Dito isso, de processos análogos aos presentes no Apêndice E, teremos que

$$\begin{aligned}\partial_\mu \theta^\mu{}_\nu &= -2 [\partial_\nu \xi_\mu(x)] \bar{\psi} \gamma^\mu \psi - 2i [\partial_\nu \zeta(x)] \bar{\psi} \gamma_5 \psi + i\hbar (\square \bar{\psi}) \gamma_\nu \psi - i\hbar \bar{\psi} \gamma_\nu (\square \psi) \\ &= -4 [\partial_\nu \xi_\mu(x)] \bar{\psi} \gamma^\mu \psi - 4i [\partial_\nu \zeta(x)] \bar{\psi} \gamma_5 \psi - 2\partial_\mu (\xi^\mu \bar{\psi} \gamma_\nu \psi) + 2 (\partial_\mu \xi_\nu) (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi).\end{aligned}\quad (4.21)$$

Então, portanto, o procedimento de simetrização não é válido. Mas se nos encontramos numa situação particular em que $\xi_\mu = 0$, termos que a simetrização é válida pois cumprimos que

$$\partial_\mu \theta^\mu{}_\nu = -4i [\partial_\nu \zeta(x)] \bar{\psi} \gamma_5 \psi. \quad (4.22)$$

Mais ainda assim persiste a quebra da equação de continuidade.

4.6 Soluções para equação de Dirac estendida

Neste caso especial de $R_\mu = 0$, as soluções para equação de Dirac estendida (4.1), no referencial do laboratório, são calculadas em detalhes no apêndice F. A forma geral destas soluções são tais que:

- **Soluções de energias positivas**

A solução de energias positivas e spin up, $+s$, no referencial do laboratório, toma a forma

$$\psi_+(\mathcal{P}, +s) = u(\mathcal{P}, +s) e^{-i\mathcal{P}_\mu x^\mu / \hbar} = N_+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c(\vec{\mathcal{P}}_3 - i\zeta)}{\varepsilon + mc^2} \\ \frac{c(\vec{\mathcal{P}}_1 + i\vec{\mathcal{P}}_2)}{\varepsilon + mc^2} \end{pmatrix} e^{-i\mathcal{P}_\mu x^\mu / \hbar}. \quad (4.23)$$

Onde

$$\varepsilon = c\sqrt{\vec{\mathcal{P}}_i^2 + m^2 c^2 - \zeta^2}, \quad (4.24)$$

e N_+ é um coeficiente de normalização a ser determinado.

Já a solução de energias positivas e spin down, $-s$, também no referencial do laboratório, é dada por

$$\psi_+(\mathcal{P}, -s) = u(\mathcal{P}, -s) e^{-i\mathcal{P}_\mu x^\mu / \hbar} = N_- \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c(\vec{\mathcal{P}}_1 - i\vec{\mathcal{P}}_2)}{\varepsilon + mc^2} \\ \frac{-c(\vec{\mathcal{P}}_3 + i\zeta)}{\varepsilon + mc^2} \end{pmatrix} e^{-i\mathcal{P}_\mu x^\mu / \hbar}. \quad (4.25)$$

Onde N_- é outro um coeficiente de normalização a ser determinado.

A determinação do das coeficientes N_+ e N_- é dada a partir das exigências de que

$$\bar{\psi}_+(\mathcal{P}, \pm s)\psi_+(\mathcal{P}, \pm s) = 1 \quad (4.26)$$

e

$$\bar{\psi}_+(\mathcal{P}, \mp s)\psi_+(\mathcal{P}, \pm s) = 0. \quad (4.27)$$

Como mostramos no apêndice F, essas condições nos levam a mostrar que

$$N = N_- = N_+ = \sqrt{\frac{\varepsilon + mc^2}{2mc^2}}. \quad (4.28)$$

Ainda no mesmo apêndice mostramos que isso se refle em $\psi^\dagger(\mathcal{P}, \pm s)\psi(\mathcal{P}, \pm s)$ de tal forma que

$$\psi^\dagger_+(\mathcal{P}, \pm s)\psi_+(\mathcal{P}, \pm s) = \frac{\varepsilon}{mc^2} \quad (4.29)$$

e

$$\psi^\dagger_+(\mathcal{P}, \mp s)\psi(\mathcal{P}, \pm s) = 0. \quad (4.30)$$

• Soluções de energias negativas

No caso da solução de energias negativas e spin up, $+s$, no referencial do laboratório, o apêndice F mostra que

$$\psi_-(\mathcal{P}, +s) = v(\mathcal{P}, +s)e^{i\mathcal{P}_\mu x^\mu/\hbar} = N_+ \begin{pmatrix} \frac{-c(\vec{\mathcal{P}}_3 + i\zeta)}{\varepsilon + mc^2} \\ \frac{-c(\vec{\mathcal{P}}_1 + i\vec{\mathcal{P}}_2)}{\varepsilon + mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\mathcal{P}_\mu x^\mu/\hbar}. \quad (4.31)$$

Em que

$$\mathcal{E} = -\varepsilon, \quad (4.32)$$

e N_+ é um coeficiente de normalização a ser determinado.

A solução de energias negativas e spin down, $-s$, é

$$\psi_-(\mathcal{P}, -s) = v(\mathcal{P}, -s)e^{i\mathcal{P}_\mu x^\mu/\hbar} = N_- \begin{pmatrix} \frac{-c(\vec{\mathcal{P}}_1 - i\vec{\mathcal{P}}_2)}{\varepsilon + mc^2} \\ \frac{-c(-\vec{\mathcal{P}}_3 + i\zeta)}{\varepsilon + mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\mathcal{P}_\mu x^\mu/\hbar}. \quad (4.33)$$

Onde N_- é o coeficiente de normalização a ser determinado.

A determinação dos coeficientes N_+ e N_- é dada a partir das exigências de que

$$\bar{\psi}_-(\mathcal{P}, \pm s)\psi_-(\mathcal{P}, \pm s) = -1 \quad (4.34)$$

e

$$\bar{\psi}_-(\mathcal{P}, \mp s)\psi_-(\mathcal{P}, \pm s) = 0. \quad (4.35)$$

Seguindo os desenvolvimentos do Apêndice F, essas condições nos levam a mostrar que

$$N = N_- = N_+ = \sqrt{\frac{\varepsilon + mc^2}{2mc^2}}. \quad (4.36)$$

Podemos notar também que isso se reflete em $\psi^\dagger(\mathcal{P}, \pm s)\psi(\mathcal{P}, \pm s)$ de tal forma que

$$\psi^\dagger_-(\mathcal{P}, \pm s)\psi_-(\mathcal{P}, \pm s) = \frac{\varepsilon}{mc^2}, \quad (4.37)$$

e

$$\psi^\dagger_-(\mathcal{P}, \mp s)\psi_-(\mathcal{P}, \pm s) = 0. \quad (4.38)$$

4.7 O paradoxo de Klein

Nesta sessão iremos examinar o chamado paradoxo de Klein, que emerge no contexto da equação de Dirac usual na situação em que elétrons incidem em uma barreira de potencial do tipo degrau. De forma mais clara, em 1929 Oskar Klein verificou que na situação em que o potencial é maior que a energia do elétron incidente, o coeficiente de transmissão se torna negativo, o equivalente a dizer que teríamos um coeficiente de reflexão maior que um, o que a priori é um fato paradoxal visto que isso caracteriza uma configuração de elétrons espalhados que viola a conservação da probabilidade [48]. Uma das formas de lidar com este paradoxo, foi a implementação das ideias relacionadas ao mar de Dirac, onde as soluções de energia negativa são tratadas de forma séria.

Já no contexto da Teoria Quântica de Campos, situação bastante diferente do cenário da Mecânica Quântica Relativística, uma vez que temos a possibilidade de tratar situações onde o número de partículas que interagem entre si pode vir a ser não mais conservado, isso porque campos criam e aniquilam partículas. Então se abrimos mão dessa conservação do número de partículas, um cenário relativístico onde, portanto, massa e energia se confundem, podemos perceber que no cenário originalmente estudado por Klein temos energia suficiente para que haja criação e destruição de partículas.

Então, é nesse espírito que buscamos estudar o paradoxo de Klein no contexto da equação de Dirac estendida com $R_\mu = 0$. Para isso, consideramos, como caso ilustrativo, tomar a solução da equação (4.1) na situação de partículas com energias positivas de spin up, de tal maneira

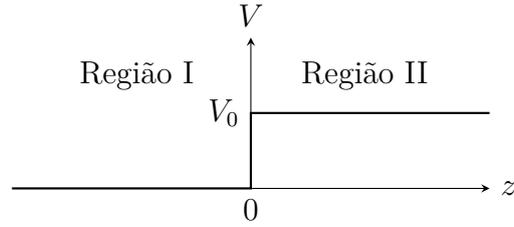


Figura 1 – Potencial degrau em que propomos um elétron viajando da esquerda, Região I, para a direita, Região II. Esse potencial nos auxiliará no estudo do Paradoxo de Klein na situação da equação de Dirac estendida que estamos considerando neste capítulo.

que essa solução descrevam partículas que viajam da esquerda para a direita, interagindo com um potencial degrau que possui a forma

$$V = \begin{cases} 0 & \text{se } z < 0, \\ V_0 & \text{se } z > 0. \end{cases} \quad (4.39)$$

Que graficamente tem a forma apresentada na Figura (1).

Neste cenário, devemos ter um espinor ψ_1 que deve descrever as partículas que estão na Região I, as quais deverão incidir no potencial V quando $x = 0$. Teremos um espinor ψ_1^r que deve descrever as partículas que são refletidas pelo potencial na Região I. Por fim, é indispensável um espinor ψ_2 que deve descrever as partículas que penetram o potencial e se encontram na Região II. Assim, seguimos sob o ponto de vista que adotamos para energias e momentos efetivos, de tal maneira que ψ_1 tem momento $\vec{\mathcal{P}}$ na direção \hat{z} , ψ_1^r tem momento $-\vec{\mathcal{P}}$ na direção \hat{z} e ψ_2 possui momento $\vec{\mathcal{P}}'$, também na direção \hat{z} . Sendo assim, seguindo os resultados sessão 4.6 deste capítulo, podemos escrever que

$$\psi_1 = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-ic\zeta + c\mathcal{P}}{\mathcal{E} + mc^2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\vec{\mathcal{P}}z/\hbar}, \quad (4.40)$$

$$\psi_1^r = B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-ic\zeta - c\mathcal{P}}{\mathcal{E} + mc^2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ip_3z/\hbar} + D \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{-ic\zeta + c\mathcal{P}}{\mathcal{E} + mc^2} \end{pmatrix} e^{-i\vec{\mathcal{P}}z/\hbar} \quad (4.41)$$

e

$$\psi_2 = C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-ic\zeta + c\mathcal{P}'}{(\mathcal{E} - V_0) + mc^2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{ip_3'z/\hbar} + F \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{-ic\zeta - c\mathcal{P}'}{(\mathcal{E} - V_0) + mc^2} \end{pmatrix} e^{i\vec{\mathcal{P}}'z/\hbar}. \quad (4.42)$$

Vamos agora aplicar estas considerações no cenário do potencial descrito em (4.39), assumindo que as partículas de energias positivas e spin up que estão na Região I, deverão incidir no potencial V com momento $\mathcal{P}_3 = \mathcal{P}$ e serão refletidas pelo mesmo com momento $-\mathcal{P}$, podendo assim sofrer um *spin-flip*^{*}, o que explica a generalidade de considerar uma combinação linear duma solução de spin up e outra down no espinor de reflexão. Na Região II, as partículas que penetram o potencial deverão ter momento $\mathcal{P}'_3 = \mathcal{P}'$ e também poderão sofrer um *spin flip* quando bater no potencial, o que explica a combinação linear nesta situação também. Como o movimento é unidimensional, restrito à direção \hat{z} , devemos assumir que $\mathcal{P}_1 = 0$ e $\mathcal{P}_2 = 0$. Isso caracteriza os espinores acima. Usando a relação de de Broglie para o número de onda, \vec{k} e o momento

$$\vec{\mathcal{P}} = \vec{k}\hbar, \quad (4.43)$$

podemos escrever estes espinores de uma forma bem conveniente:

$$\psi_1 = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-ic\zeta + c\mathcal{P}}{\mathcal{E} + mc^2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik_1z}, \quad (4.44)$$

$$\psi_1^r = B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-ic\zeta - c\mathcal{P}}{\mathcal{E} + mc^2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ik_1z} + D \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{-ic\zeta + c\mathcal{P}}{\mathcal{E} + mc^2} \end{pmatrix} e^{-ik_1z}, \quad (4.45)$$

$$\psi_2 = C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-ic\zeta + c\mathcal{P}'}{(\mathcal{E} - V_0) + mc^2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik_2z} + F \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{-ic\zeta - c\mathcal{P}'}{(\mathcal{E} - V_0) + mc^2} \end{pmatrix} e^{ik_2z}. \quad (4.46)$$

Essa forma de escrever os espinores nos permite acessar a reflexão de que se estamos numa situação em que $V_0 > 0$ e $|\mathcal{E} - V_0| < c\sqrt{m^2c^2 + \zeta^2}$, o número de onda na Região II é imaginário, $k_2 = i|k_2|$, de forma que a solução nesta região é uma exponencial que decai de forma a ter uma penetração amortecida na região de potencial. No entanto, se estamos num ambiente em que a barreira de potencial é tal que $V_0 > \mathcal{E} + c\sqrt{m^2c^2 + \zeta^2}$, cenário que o potencial é tal que consegue confinar a partícula, o número de onda então é real e temos soluções oscilatórias na região II. Assim, sob a perspectiva dessas condições, as amplitudes das soluções são fixadas pela continuidade da das mesmos na condição de contorno regida pelo potencial, requerido para que haja conservação de corrente. Então, em $z = 0$ teremos que

$$\psi_1(z = 0) + \psi_1^r(z = 0) = \psi_2(z = 0). \quad (4.47)$$

^{*}Falar do spn-flip

Desta condição, vem que

$$A + B = C, \quad (4.48)$$

$$\frac{-ic\zeta}{\mathcal{E} + mc^2}(A + B) + \frac{c\mathcal{P}}{\mathcal{E} + mc^2}(A - B) = \frac{-ic\zeta + c\mathcal{P}'}{(\mathcal{E} - V_0) + mc^2}C, \quad (4.49)$$

$$D = F \quad (4.50)$$

e

$$-\frac{c(-\mathcal{P} + i\zeta)}{\mathcal{E} + mc^2}D = -\frac{c(\mathcal{P}' + i\zeta)}{(\mathcal{E} - V_0) + mc^2}F. \quad (4.51)$$

Como o resultado (4.50) exige que D seja igual a F , não há outra forma de satisfazer o resultado (4.51) a não ser tomar $D = F = 0$. Isto é, não haverá o *spin flip*.

Notando que

$$c\mathcal{P} = \sqrt{\mathcal{E}^2 - m^2c^4 - c^2\zeta^2}, \quad (4.52)$$

$$c\mathcal{P}' = \sqrt{(\mathcal{E} - V_0)^2 - m^2c^4 - c^2\zeta^2}, \quad (4.53)$$

levando esses resultados na equação (4.49) e trabalhando isso conjunto com (4.48), vamos poder escrever que

$$A - B = \left\{ \frac{ic\zeta - (\mathcal{E} + mc^2) [(\mathcal{E} - V_0)^2 - m^2c^4 - c^2\zeta^2]^{1/2}}{(V_0 - \mathcal{E} - mc^2) (\mathcal{E}^2 - m^2c^4 - c^2\zeta^2)^{1/2}} \right\} C = (i\kappa - \gamma)C, \quad (4.54)$$

em que

$$\kappa = \frac{c\zeta}{(V_0 - \mathcal{E} - mc^2) (\mathcal{E}^2 - m^2c^4 - c^2\zeta^2)^{1/2}} \quad (4.55)$$

$$\gamma = \frac{-(\mathcal{E} + mc^2) [(\mathcal{E} - V_0)^2 - m^2c^4 - c^2\zeta^2]^{1/2}}{(V_0 - \mathcal{E} - mc^2) (\mathcal{E}^2 - m^2c^4 - c^2\zeta^2)^{1/2}}. \quad (4.56)$$

Somando (4.48) e (4.54), teremos

$$A = (1 + i\kappa - \gamma) \frac{C}{2}, \quad (4.57)$$

e fazendo (4.48) menos (4.54), vem que

$$B = (1 - i\kappa + \gamma) \frac{C}{2}, \quad (4.58)$$

de forma que podemos escrever

$$\frac{B}{A} = \frac{(1 - i\kappa + \gamma)}{(1 + i\kappa - \gamma)}. \quad (4.59)$$

Isolando B em (4.59) e levando o resultado em (4.48), podemos escrever

$$\frac{C}{A} = \frac{2}{(1 + i\kappa - \gamma)}. \quad (4.60)$$

Por fim, para especificar por completo os coeficientes de transmissão e reflexão, devemos considerar o termo de corrente

$$\vec{j}_3(z) = [c\psi^\dagger(z)\gamma^0\gamma^i\psi(z)] \hat{z}. \quad (4.61)$$

Considerando que,

$$\gamma^0\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.62)$$

em que estamos na representação de Dirac das matrizes gama[§], vamos ter que

$$(\psi'_1)^\dagger\gamma^0\gamma^i = A^* \left(1, 0, \frac{ic\zeta + c\mathcal{P}}{\mathcal{E} + mc^2}, 0 \right), \quad (4.63)$$

$$(\psi_1^r)^\dagger\gamma^0\gamma^i = B^* \left(1, 0, \frac{ic\zeta - c\mathcal{P}}{\mathcal{E} + mc^2}, 0 \right), \quad (4.64)$$

e

$$(\psi'_2)^\dagger\gamma^0\gamma^i = C^* \left(1, 0, \frac{-ic\zeta - c\mathcal{P}'}{(\mathcal{E} - V_0) + mc^2}, 0 \right). \quad (4.65)$$

De forma que a componente na direção de \hat{z} em cada região tomam a forma

$$(\vec{j}_1)_3 = +AA^* \left(\frac{2c^2\mathcal{P}}{\mathcal{E} + mc^2} \right) \hat{z}, \quad (4.66)$$

$$(\vec{j}_1^r)_3 = -BB^* \left(\frac{2c^2\mathcal{P}}{\mathcal{E} + mc^2} \right) \hat{z}, \quad (4.67)$$

$$(\vec{j}_2)_3 = +CC^* \left(\frac{2c^2\mathcal{P}'}{(\mathcal{E} - V_0) + mc^2} \right) \hat{z}. \quad (4.68)$$

Portanto, o coeficiente de reflexão será

$$R = \frac{|(\vec{j}_1^r)_3|}{|(\vec{j}_1)_3|} = \frac{|-BB^*|}{|AA^*|} = \left(\frac{B}{A} \right)^2 = \frac{(1 - \kappa + \gamma)^2}{(1 + \kappa - \gamma)^2}, \quad (4.69)$$

e o coeficiente de transmissão segue como sendo

$$T = \frac{|(\vec{j}_2)_3|}{|(\vec{j}_1)_3|} = \frac{|CC^*|}{|AA^*|} \frac{\mathcal{P}'}{\mathcal{P}} \left(\frac{\mathcal{E} + mc^2}{-V_0 + \mathcal{E} + mc^2} \right). \quad (4.70)$$

Relembrando rapidamente que

$$c\mathcal{P} = \sqrt{\mathcal{E}^2 - m^2c^4 - c^2\zeta^2},$$

$$c\mathcal{P}' = \sqrt{(\mathcal{E} - V_0)^2 - m^2c^4 - c^2\zeta^2},$$

[§]Veja, por favor, o apêndice A para mais detalhes sobre nossas convenções se for necessário.

temos então que

$$T = \left| \frac{C}{A} \right|^2 \left[\frac{-(\mathcal{E} + mc^2) [(\mathcal{E} - V_0)^2 - m^2c^2 - \zeta^2]^{1/2}}{(V_0 - \mathcal{E} - mc^2) (\mathcal{E}^2 - m^2c^2 - \zeta^2)^{1/2}} \right] = \frac{4\gamma}{|1 + i\kappa - \gamma|^2} < 0. \quad (4.71)$$

Podemos garantir que o coeficiente de transmissão é essencialmente porque o termo γ é negativo, uma vez que assumimos um regime em que $|\mathcal{E} - V_0| < c\sqrt{m^2c^2 + \zeta^2}$. Então, pelo resultado (4.71), podemos notar como o paradoxo de Klein, no contexto da mecânica quântica relativística, é afetado pelo fundo que que viola a simetria de Lorentz.

4.8 O Zitterbewegung

O termo *Zitterbewegung* vem da língua alemã e numa tradução livre para o português o mesmo pode ser entendido como algo que se refere a um movimento *tremulo* ou *agitado*. No nosso contexto, o termo *Zitterbewegung* estará sempre associado a hipótese de um tipo de oscilação rápida intrínseca de partículas elementares que possuem a sua dinâmica regida pela equação de onda quântica-relativística. Essa ideia surgiu primeiramente em 1930 como um resultado imediato das soluções livres das equação de Dirac para pacotes de onda num trabalho de Erwin Schrödinger [49]. Schrödinger pode perceber uma interferência, entre os estados de energia positiva e negativa, que aparecia na forma de uma oscilação do elétron em torno de sua trajetória clássica com frequência natural que compreendia o valor de $\omega = 2mc^2/\hbar$. Nesta sessão, iremos revisitar o *Zitterbewegung* sob o ponto de vista da equação (4.1).

4.8.1 Definindo um pacote de ondas

A partir dos resultados das soluções da equação (4.1) apresentados acima, definimos um pacote de ondas como sendo tal que

$$\Psi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3\vec{\mathcal{P}}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \sqrt{\frac{mc^2}{\varepsilon(\vec{\mathcal{P}})}} \sum_{\pm s} \left[b(\mathcal{P}, s) u(\mathcal{P}, s) e^{-i\mathcal{P}^\mu x_\mu/\hbar} + d^*(\mathcal{P}, s) v(\mathcal{P}, s) e^{+i\mathcal{P}^\mu x_\mu/\hbar} \right]. \quad (4.72)$$

Em que s computa o spin, up ou down, e o restante da notação é auto explicativo.

A condição de normalização implica que

$$\int d^3\vec{x} \Psi^\dagger(\vec{x}, t) \Psi(\vec{x}, t) = 1. \quad (4.73)$$

Usando a nossa definição de pacote de ondas vamos poder escrever

$$\begin{aligned}
 \int d^3\vec{x} \Psi^\dagger(\vec{x}, t) \Psi(\vec{x}, t) &= \int \int \int \frac{d^3\vec{x} d^3\vec{\mathcal{P}}' d^3\vec{\mathcal{P}}}{(2\pi\hbar)^3} \left(\frac{mc^2}{\sqrt{\varepsilon'(\vec{\mathcal{P}}')\varepsilon(\vec{\mathcal{P}})}} \right) \\
 &\times \sum_{\pm(s',s)} \left[b^*(\mathcal{P}', s') b(\mathcal{P}, s) u^\dagger(\mathcal{P}', s') u(\mathcal{P}, s) e^{-i(\mathcal{P}^\mu - \mathcal{P}'^\mu)x_\mu/\hbar} \right. \\
 &\quad + b^*(\mathcal{P}', s') d^*(p, s) u^\dagger(\mathcal{P}', s') v(\mathcal{P}, s) e^{+i(\mathcal{P}^\mu + \mathcal{P}'^\mu)x_\mu/\hbar} \\
 &\quad + d(\mathcal{P}', s') b(\mathcal{P}, s) v^\dagger(\mathcal{P}', s') u(\mathcal{P}, s) e^{-i(\mathcal{P}^\mu + \mathcal{P}'^\mu)x_\mu/\hbar} \\
 &\quad \left. + d(\mathcal{P}', s') d^*(\mathcal{P}, s) v^\dagger(\mathcal{P}', s') v(\mathcal{P}, s) e^{+i(\mathcal{P}^\mu - \mathcal{P}'^\mu)x_\mu/\hbar} \right]. \quad (4.74)
 \end{aligned}$$

Quando efetuamos a integral e $d^3\vec{x}$ teremos o seguinte resultado:

$$\int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi\hbar)^3} e^{\pm i(\vec{\mathcal{P}} - \vec{\mathcal{P}}') \cdot \vec{x}/\hbar} = \delta^{(3)}(\vec{\mathcal{P}} - \vec{\mathcal{P}}'), \quad (4.75)$$

$$\int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi\hbar)^3} e^{\pm i(\vec{\mathcal{P}} + \vec{\mathcal{P}}') \cdot \vec{x}/\hbar} = \delta^{(3)}(\vec{\mathcal{P}} + \vec{\mathcal{P}}'). \quad (4.76)$$

Retomando a equação (4.74) levando em consideração os efeitos das deltas, vamos ter que

$$\begin{aligned}
 &= \int d^3\vec{\mathcal{P}} \left(\frac{mc^2}{\sqrt{\varepsilon'(-\vec{\mathcal{P}})\varepsilon(\vec{\mathcal{P}})}} \right) \\
 &\times \sum_{\pm(s',s)} \left[b^* \left(\left(p'_0(\vec{\mathcal{P}}), \vec{\mathcal{P}} \right), s' \right) b(p, s) u^\dagger \left(\left(p'_0(\vec{\mathcal{P}}), \vec{\mathcal{P}} \right), s' \right) u(p, s) e^{-i(p_0(\vec{\mathcal{P}}) - p'_0(\vec{\mathcal{P}}))x_0/\hbar} \right. \\
 &\quad + b^* \left(\left(p'_0(-\vec{\mathcal{P}}), -\vec{\mathcal{P}} \right), s' \right) d^*(p, s) u^\dagger \left(\left(p'_0(-\vec{\mathcal{P}}), -\vec{\mathcal{P}} \right), s' \right) v(p, s) e^{i(p_0(\vec{\mathcal{P}}) + p'_0(-\vec{\mathcal{P}}))x_0/\hbar} \\
 &\quad + d \left(\left(p'_0(-\vec{\mathcal{P}}), -\vec{\mathcal{P}} \right), s' \right) b(p, s) v^\dagger \left(\left(p'_0(-\vec{\mathcal{P}}), -\vec{\mathcal{P}} \right), s' \right) u(p, s) e^{-i(p_0(\vec{\mathcal{P}}) + p'_0(-\vec{\mathcal{P}}))x_0/\hbar} \\
 &\quad \left. + d \left(\left(p'_0(\vec{\mathcal{P}}), \vec{\mathcal{P}} \right), s' \right) d^*(p, s) v^\dagger \left(\left(p'_0(\vec{\mathcal{P}}), \vec{\mathcal{P}} \right), s' \right) v(p, s) e^{i(p_0(\vec{\mathcal{P}}) - p'_0(\vec{\mathcal{P}}))x_0/\hbar} \right]. \quad (4.77)
 \end{aligned}$$

De forma geral, temos que

$$\varepsilon(\vec{\mathcal{P}}) = \boxed{\varepsilon'(\vec{\mathcal{P}}') \delta^{(3)}(\vec{\mathcal{P}} \pm \vec{\mathcal{P}}') = c \sqrt{(\pm \vec{\mathcal{P}})^2 + m^2 c^2 + \zeta^2} = \varepsilon'(\pm \vec{\mathcal{P}})}, \quad (4.78)$$

e assim temos como satisfeito que

$$p_0(\vec{\mathcal{P}}) = p'_0(\pm \vec{\mathcal{P}}). \quad (4.79)$$

Sendo assim, teremos que

$$\begin{aligned}
 &= \int d^3 \vec{\mathcal{P}} \left(\frac{mc^2}{\varepsilon(\vec{\mathcal{P}})} \right) \sum_{\pm(s',s)} \left[b^*(\mathcal{P}, s') b(\mathcal{P}, s) u^\dagger(\mathcal{P}, s') u(\mathcal{P}, s) \right. \\
 &\quad + d(\mathcal{P}, s') d^*(\mathcal{P}, s) v^\dagger(\mathcal{P}, s') v(\mathcal{P}, s) \\
 &\quad + b^*(-\mathcal{P}, s') d^*(\mathcal{P}, s) u^\dagger(-\mathcal{P}, s') v(\mathcal{P}, s) e^{2ip_0 x_0 / \hbar} \\
 &\quad \left. + d(-\mathcal{P}, s') b(\mathcal{P}, s) v^\dagger(-\mathcal{P}, s') u(\mathcal{P}, s) e^{-2ip_0 x_0 / \hbar} \right]. \quad (4.80)
 \end{aligned}$$

Das condições de normalização que desenvolvemos vem que

$$\begin{aligned}
 &= \int d^3 \vec{\mathcal{P}} \left(\frac{mc^2}{\varepsilon(\vec{\mathcal{P}})} \right) \sum_{\pm(s',s)} \frac{\varepsilon(\vec{\mathcal{P}})}{mc^2} \delta_{s,s'} \left[b^*(\mathcal{P}, s') b(\mathcal{P}, s) + d^*(\mathcal{P}, s') d(\mathcal{P}, s) \right] \\
 &= \int d^3 \vec{\mathcal{P}} \sum_{\pm s} \left[|b(\mathcal{P}, s)|^2 + |d(\mathcal{P}, s)|^2 \right]. \quad (4.81)
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int d^3 \vec{x} \Psi^\dagger(\vec{x}, t) \Psi(\vec{x}, t) = \int d^3 \vec{\mathcal{P}} \sum_{\pm s} \left[|b(\mathcal{P}, s)|^2 + |d(\mathcal{P}, s)|^2 \right] = 1. \quad (4.82)$$

4.8.2 O termo de corrente para o Pacote de Ondas

Vamos calcular o temor de corrente

$$J^i = \int d^3 \vec{x} \Psi^\dagger(\vec{x}, t) c \alpha^i \Psi(\vec{x}, t) = c \int d^3 \vec{x} \bar{\psi}(\vec{x}, t) \gamma^i \psi(\vec{x}, t). \quad (4.83)$$

Na sessão D.3 do apêndice D mostramos que a componente i do termo de corrente tem a forma

$$c \bar{\psi}(\vec{x}, t) \gamma^i \psi(\vec{x}, t) = \frac{1}{2m} \left[\bar{\psi} \left(\hat{\mathcal{P}}^i \psi \right) - \left(\hat{\mathcal{P}}^i \bar{\psi} \right) \psi - 2i \hat{\mathcal{P}}_\nu \left(\bar{\psi} \Sigma^{i\nu} \psi \right) \right]. \quad (4.84)$$

Sendo assim, podemos escrever que

$$\begin{aligned}
 J^i &= c \int d^3 \vec{x} \bar{\psi}(\vec{x}, t) \gamma^i \psi(\vec{x}, t) = \frac{1}{2m} \int d^3 \vec{x} \left[\bar{\psi} \left(\hat{\mathcal{P}}^i \psi \right) - \left(\hat{\mathcal{P}}^i \bar{\psi} \right) \psi - 2i \hat{\mathcal{P}}_\nu \left(\bar{\psi} \Sigma^{i\nu} \psi \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2m} \int \frac{d^3 \vec{x} d^3 \vec{\mathcal{P}}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \frac{mc^2}{\sqrt{\varepsilon'(\vec{\mathcal{P}}) \varepsilon(\vec{\mathcal{P}})}} \sum_{\pm(s,s')} \left\{ \right. \\
 &\quad \times \left[b^*(\mathcal{P}', s') \bar{u}(\mathcal{P}', s') e^{+i\mathcal{P}'_\mu x^\mu / \hbar} + d(\mathcal{P}', s') \bar{v}(\mathcal{P}', s') e^{-i\mathcal{P}'_\mu x^\mu / \hbar} \right] \\
 &\quad \times \hat{\mathcal{P}}^i \left[b(\mathcal{P}, s) u(\mathcal{P}, s) e^{-i\mathcal{P}^\mu x_\mu / \hbar} + d^*(\mathcal{P}, s) v(\mathcal{P}, s) e^{+i\mathcal{P}^\mu x_\mu / \hbar} \right] \\
 &\quad - \hat{\mathcal{P}}^i \left[b^*(\mathcal{P}', s') \bar{u}(\mathcal{P}', s') e^{+i\mathcal{P}'_\mu x^\mu / \hbar} + d(\mathcal{P}', s') \bar{v}(\mathcal{P}', s') e^{-i\mathcal{P}'_\mu x^\mu / \hbar} \right] \\
 &\quad \times \left[b(\mathcal{P}, s) u(\mathcal{P}, s) e^{-i\mathcal{P}^\mu x_\mu / \hbar} + d^*(\mathcal{P}, s) v(\mathcal{P}, s) e^{+i\mathcal{P}^\mu x_\mu / \hbar} \right] \\
 &\quad - 2i \hat{\mathcal{P}}_\nu \left[b^*(\mathcal{P}', s') \bar{u}(\mathcal{P}', s') e^{+i\mathcal{P}'_\mu x^\mu / \hbar} + d(\mathcal{P}', s') \bar{v}(\mathcal{P}', s') e^{-i\mathcal{P}'_\mu x^\mu / \hbar} \right] \\
 &\quad \times \Sigma^{i\nu} \left[b(\mathcal{P}, s) u(\mathcal{P}, s) e^{-i\mathcal{P}^\mu x_\mu / \hbar} + d^*(\mathcal{P}, s) v(\mathcal{P}, s) e^{+i\mathcal{P}^\mu x_\mu / \hbar} \right] \\
 &\quad - 2i \left[b^*(\mathcal{P}', s') \bar{u}(\mathcal{P}', s') e^{+i\mathcal{P}'_\mu x^\mu / \hbar} + d(\mathcal{P}', s') \bar{v}(\mathcal{P}', s') e^{-i\mathcal{P}'_\mu x^\mu / \hbar} \right] \\
 &\quad \left. \times \Sigma^{i\nu} \hat{\mathcal{P}}_\nu \left[b(\mathcal{P}, s) u(\mathcal{P}, s) e^{-i\mathcal{P}^\mu x_\mu / \hbar} + d^*(\mathcal{P}, s) v(\mathcal{P}, s) e^{+i\mathcal{P}^\mu x_\mu / \hbar} \right] \right\}. \quad (4.85)
 \end{aligned}$$

Os operadores de momento devem atuar nas exponenciais. Fazendo isso e rearranjando o resultado, teremos que

$$\begin{aligned}
 J^i = \frac{1}{2m} \int \frac{d^3 \vec{x} d^3 \vec{\mathcal{P}}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \frac{mc^2}{\sqrt{\varepsilon'(\vec{\mathcal{P}}')\varepsilon(\vec{\mathcal{P}})}} \sum_{\pm(s,s')} \left[\right. \\
 \times b^*(\mathcal{P}', s') b(\mathcal{P}, s) \bar{u}(\mathcal{P}', s') u(\mathcal{P}, s) (\mathcal{P}^i + \mathcal{P}'^i) e^{-i(\mathcal{P}_\mu - \mathcal{P}'_\mu)x^\mu/\hbar} \\
 - b^*(\mathcal{P}', s') d^*(\mathcal{P}, s) \bar{u}(\mathcal{P}', s') v(\mathcal{P}, s) (\mathcal{P}^i - \mathcal{P}'^i) e^{+i(\mathcal{P}_\mu + \mathcal{P}'_\mu)x^\mu/\hbar} \\
 + d(\mathcal{P}', s') b(\mathcal{P}, s) \bar{v}(\mathcal{P}', s') u(\mathcal{P}, s) (\mathcal{P}^i - \mathcal{P}'^i) e^{-i(\mathcal{P}_\mu + \mathcal{P}'_\mu)x^\mu/\hbar} \\
 - d(\mathcal{P}', s') d^*(\mathcal{P}, s) \bar{v}(\mathcal{P}', s') v(\mathcal{P}, s) (\mathcal{P}^i + \mathcal{P}'^i) e^{-i(\mathcal{P}_\mu - \mathcal{P}'_\mu)x^\mu/\hbar} \\
 - 2ib^*(\mathcal{P}', s') b(\mathcal{P}, s) \bar{u}(\mathcal{P}', s') \Sigma^{i\nu} u(\mathcal{P}, s) (\mathcal{P}_\nu - \mathcal{P}'_\nu) e^{-i(\mathcal{P}_\mu - \mathcal{P}'_\mu)x^\mu/\hbar} \\
 + 2ib^*(\mathcal{P}', s') d^*(\mathcal{P}, s) \bar{u}(\mathcal{P}', s') \Sigma^{i\nu} v(\mathcal{P}, s) (\mathcal{P}_\nu + \mathcal{P}'_\nu) e^{+i(\mathcal{P}_\mu + \mathcal{P}'_\mu)x^\mu/\hbar} \\
 - 2id(\mathcal{P}', s') b(\mathcal{P}, s) \bar{v}(\mathcal{P}', s') \Sigma^{i\nu} u(\mathcal{P}, s) (\mathcal{P}_\nu + \mathcal{P}'_\nu) e^{-i(\mathcal{P}_\mu + \mathcal{P}'_\mu)x^\mu/\hbar} \\
 \left. + 2id(\mathcal{P}', s') d^*(\mathcal{P}, s) \bar{v}(\mathcal{P}', s') \Sigma^{i\nu} v(\mathcal{P}, s) (\mathcal{P}_\nu - \mathcal{P}'_\nu) e^{-i(\mathcal{P}_\mu - \mathcal{P}'_\mu)x^\mu/\hbar} \right]. \quad (4.86)
 \end{aligned}$$

Como antes, efetuamos primeiro a integral em $d^3 \vec{x}$, de forma a ter como resultado as deltas $\delta^{(3)}(\vec{\mathcal{P}} - \vec{\mathcal{P}}')$, e em seguida eliminando a integração em $d^3 \vec{\mathcal{P}}'$ com as deltas, obtemos que

$$\begin{aligned}
 J^i = \frac{1}{2m} \int d^3 \vec{\mathcal{P}} \frac{mc^2}{\varepsilon(\vec{\mathcal{P}})} \sum_{\pm(s,s')} \left\{ 2\mathcal{P}^i \left[b^*(\mathcal{P}, s') b(\mathcal{P}, s) \bar{u}(\mathcal{P}, s') u(\mathcal{P}, s) \right. \right. \\
 \left. \left. - d(\mathcal{P}, s') d^*(\mathcal{P}, s) \bar{v}(\mathcal{P}, s') v(\mathcal{P}, s) \right] \right. \\
 + 2\mathcal{P}^i \left[d(-\mathcal{P}, s') b(\mathcal{P}, s) \bar{v}(-\mathcal{P}, s') u(\mathcal{P}, s) e^{-2i\mathcal{P}_0 x_0/\hbar} \right. \\
 \left. - b^*(-\mathcal{P}, s') d^*(\mathcal{P}, s) \bar{u}(-\mathcal{P}, s') v(\mathcal{P}, s) e^{+2i\mathcal{P}_0 x_0/\hbar} \right] \\
 + \frac{4i\varepsilon(\vec{\mathcal{P}})}{d} \left[b^*(-\mathcal{P}, s') d^*(\mathcal{P}, s) \bar{u}(-\mathcal{P}, s') \Sigma^{i0} v(\mathcal{P}, s) e^{+2i\mathcal{P}_0 x_0/\hbar} \right. \\
 \left. - d(-\mathcal{P}, s') b(\mathcal{P}, s) \bar{v}(-\mathcal{P}, s') \Sigma^{i0} u(\mathcal{P}, s) e^{-2i\mathcal{P}_0 x_0/\hbar} \right] \left. \right\}. \quad (4.87)
 \end{aligned}$$

Aplicando as condições de normalização que desenvolvemos vamos, finalmente, poder escrever que

$$\begin{aligned}
 J^i = \int d^3 \vec{\mathcal{P}} \left\{ \sum_{\pm s} \frac{p^i c^2}{\varepsilon(\vec{\mathcal{P}})} \left[|b(\mathcal{P}, s)|^2 + |d(\mathcal{P}, s)|^2 \right] \right. \\
 + ic \sum_{\pm(s,s')} \left[b^*(-\mathcal{P}, s') d^*(\mathcal{P}, s) \bar{u}(-\mathcal{P}, s') \Sigma^{i0} v(\mathcal{P}, s) e^{+2i\mathcal{P}_0 x_0/\hbar} \right. \\
 \left. - d(-\mathcal{P}, s') b(\mathcal{P}, s) \bar{v}(-\mathcal{P}, s') \Sigma^{i0} u(\mathcal{P}, s) e^{-2i\mathcal{P}_0 x_0/\hbar} \right] \left. \right\}. \quad (4.88)
 \end{aligned}$$

Os segundo e terceiro termos são soluções que traduzem um interferência entre estados de energia positiva e negativa, que é o que chamamos de *Zitterbewegung*. Estes termos oscilam

com dependência explícita no tempo com uma frequência dada por

$$\omega_z = \frac{2\mathcal{P}_0 c}{\hbar} = \frac{2\sqrt{\vec{\mathcal{P}}^2 + m^2 c^2 + \zeta^2}}{\hbar} > \frac{2c\sqrt{m^2 c^2 + \zeta^2}}{\hbar}. \quad (4.89)$$

Lembro também que calculamos a velocidade grupo e ela tem a forma

$$(V_g)_i = \frac{c^2}{(E - c\xi_0)} (p_i - \xi_i) = \frac{\mathcal{P}_i c^2}{\varepsilon}. \quad (4.90)$$

que aparece no primeiro termo da corrente acima.

4.8.3 Determinando os coeficientes b e d^*

No tempo $t = 0$, podemos definir um pacote de ondas com uma distribuição gaussiana com uma largura d e centrada na origem da seguinte forma

$$\Psi_g(\vec{x}, 0, s) = \frac{1}{(4\pi d^2)^{3/4}} e^{-|\vec{x}|^2/2d} \omega(0). \quad (4.91)$$

$\omega(0)$ é um espinor a ser determinado. Essa definição serve de condição de contorno para a nossa definição de pacote de ondas (4.72),

$$\Psi(\vec{x}, t, s) = \int \frac{d^3 \vec{\mathcal{P}}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \sqrt{\frac{mc^2}{\varepsilon(\vec{\mathcal{P}})}} \sum_{\pm s} \left[b(\mathcal{P}, s) u(\mathcal{P}, s) e^{-i(\varepsilon t - \vec{\mathcal{P}} \cdot \vec{x})/\hbar} + d^*(\mathcal{P}, s) v(\mathcal{P}, s) e^{+i(\varepsilon t - \vec{\mathcal{P}} \cdot \vec{x})/\hbar} \right],$$

em $t = 0$. Ou seja:

$$\Psi_g(\vec{x}, 0, s) = \Psi(\vec{x}, 0, s). \quad (4.92)$$

A partir dessa igualdade, podemos determinar os coeficientes b e d^* assumindo que

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^3 \vec{\mathcal{P}}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \sqrt{\frac{mc^2}{\varepsilon(\vec{\mathcal{P}})}} \sum_{\pm s} \left[b(\mathcal{P}, s) u(\mathcal{P}, s) e^{-i(\varepsilon t - \vec{\mathcal{P}} \cdot \vec{x})/\hbar} \right] \\ &= \int \frac{d^3 \vec{\mathcal{P}}'}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \sqrt{\frac{mc^2}{\varepsilon(\vec{\mathcal{P}}')}} \sum_{\pm s} \left[d^*(\mathcal{P}', s) v(\mathcal{P}', s) e^{+i(\varepsilon t - \vec{\mathcal{P}}' \cdot \vec{x})/\hbar} \right], \end{aligned} \quad (4.93)$$

onde consideramos que $\mathcal{P}'_\mu = -\mathcal{P}_\mu$. Nestes moldes, vamos ter que

$$\int \frac{d^3 \vec{\mathcal{P}}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \sqrt{\frac{mc^2}{\varepsilon(\vec{\mathcal{P}})}} \sum_{\pm s} \left[b(\mathcal{P}, s) u(\mathcal{P}, s) + d^*(-\mathcal{P}, s) v(-\mathcal{P}, s) \right] e^{+i\vec{\mathcal{P}} \cdot \vec{x}} = \frac{1}{(4\pi d^2)^{3/4}} e^{-|\vec{x}|^2/2d} \omega(0), \quad (4.94)$$

Tomando uma transformada de Fourier inversa em ambos os lados, podemos escrever

$$\sqrt{\frac{mc^2}{\varepsilon(\vec{\mathcal{P}})}} \sum_{\pm s} \left[b(\mathcal{P}, s) u(\mathcal{P}, s) + d^*(-\mathcal{P}, s) v(-\mathcal{P}, s) \right] = \int \frac{d^3 \vec{x}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \frac{1}{(4\pi d^2)^{3/4}} e^{-|\vec{x}|^2/2d} e^{-i\vec{\mathcal{P}} \cdot \vec{x}} \omega(0). \quad (4.95)$$

Em que teremos

$$\int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \frac{1}{(4\pi d^2)^{3/4}} e^{-|\vec{x}|^2/2d} e^{-i\vec{\mathcal{P}}\cdot\vec{x}} = \frac{1}{\pi^{3/4}} \left(\frac{d}{\hbar}\right)^{3/2} e^{-|\vec{\mathcal{P}}|d^2/2\hbar^2}. \quad (4.96)$$

Então,

$$\sqrt{\frac{mc^2}{\varepsilon(\vec{\mathcal{P}})}} \sum_{\pm s} [b(\mathcal{P}, s)u(\mathcal{P}, s) + d^*(-\mathcal{P}, s)v(-\mathcal{P}, s)] = \left(\frac{d^2}{\pi\hbar^2}\right)^{3/4} e^{-|\vec{\mathcal{P}}|d^2/2\hbar^2} \omega(0). \quad (4.97)$$

Multiplicando este resultado à esquerda por

$$\sqrt{\frac{mc^2}{\varepsilon(\vec{\mathcal{P}})}} u^\dagger(\mathcal{P}, s')$$

e explorando as condições de normalização, vamos poder escrever

$$b(\mathcal{P}, s) = \sqrt{\frac{mc^2}{\varepsilon(\vec{\mathcal{P}})}} \left(\frac{d^2}{\pi\hbar^2}\right)^{3/4} u^\dagger(\mathcal{P}, s') \omega(0). \quad (4.98)$$

Agora se multiplicamos o resultado à esquerda por

$$\sqrt{\frac{mc^2}{\varepsilon(\vec{\mathcal{P}})}} v^\dagger(-\mathcal{P}, s')$$

e explorando mais uma vez as condições de normalização, vamos poder escrever

$$d^s(-\mathcal{P}, s) = \sqrt{\frac{mc^2}{\varepsilon(\vec{\mathcal{P}})}} \left(\frac{d^2}{\pi\hbar^2}\right)^{3/4} v^\dagger(-\mathcal{P}, s') \omega(0). \quad (4.99)$$

4.8.4 A oscilação em torno da trajetória clássica

Vamos trabalhar agora a obtenção do *Zitterbewegung* no contexto da equação de Dirac,

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc - i\zeta\gamma_5 - \xi_\mu\gamma^\mu) \psi = 0. \quad (4.100)$$

Abrindo as componente e multiplicando toda equação à esquerda por $c\gamma^0$, vem que

$$i\hbar\partial_t\psi = (i\hbar c\gamma^0\gamma^i\partial_i + \gamma^0 mc^2 + ic\zeta\gamma^0\gamma^5 + c\xi_0 - c\xi_i\gamma^0\gamma^i) \psi. \quad (4.101)$$

Definindo

$$\beta = \gamma^0 \quad (4.102)$$

$$\vec{\alpha} = \gamma^0\gamma^i, \quad (4.103)$$

vamos poder e escrever a equação (4.101) na forma

$$i\hbar\partial_t\psi = H\psi, \quad (4.104)$$

em que

$$H = c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc^2 + c\xi_0 - c\vec{\alpha} \cdot \vec{\xi}. \quad (4.105)$$

Na representação de Heisenberg, a equação de movimento para a posição é

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\vec{x}, H] = c\vec{\alpha}, \quad (4.106)$$

onde estamos a considerar que $[\vec{c}, \vec{\xi}] = 0$ uma vez que o fundo é tomado constante. Então, a evolução temporal de $\vec{\alpha}$ é

$$\frac{d\vec{\alpha}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\vec{\alpha}, H] = \frac{i}{\hbar} \{H, \vec{\alpha}\} - \frac{2i}{\hbar} \vec{\alpha}H = \frac{2ic}{\hbar} (\vec{p} - \vec{\xi}) - \frac{2i}{\hbar} \vec{\alpha}H, \quad (4.107)$$

em que nos atemos ao fato de que

$$\{\vec{\alpha}, \beta\} = 0. \quad (4.108)$$

Integrando no tempo o resultado (4.107), vem que

$$\int_{\vec{\alpha}(0)}^{\vec{\alpha}(t)} \frac{d\vec{\alpha}}{\vec{\alpha} - \frac{c}{H} (\vec{p} - \vec{\xi})} = -\frac{2iH}{\hbar} \int_{t'=0}^{t'=t} dt', \quad (4.109)$$

e daí teremos

$$\vec{\alpha}(t) = \left[\vec{\alpha}(0) - \frac{c}{H} (\vec{p} - \vec{\xi}) \right] e^{-2iHt/\hbar} + \frac{c}{H} (\vec{p} - \vec{\xi}). \quad (4.110)$$

Levando (4.110) em (4.106), vamos ter que

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = c \left\{ \left[\vec{\alpha}(0) - \frac{c}{H} (\vec{p} - \vec{\xi}) \right] e^{-2iHt/\hbar} + \frac{c}{H} (\vec{p} - \vec{\xi}) \right\}, \quad (4.111)$$

e se integramos no tempo podemos escrever

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(0) + \frac{c}{H} (\vec{p} - \vec{\xi}) t + \frac{i\hbar c}{2H} \left[\vec{\alpha}(0) - \frac{c}{H} (\vec{p} - \vec{\xi}) \right] (e^{-2iHt/\hbar} - 1). \quad (4.112)$$

Ou ainda,

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(0) + \frac{c}{H} \vec{\mathcal{P}} t + \frac{i\hbar c}{2H} \left[\vec{\alpha}(0) - \frac{c}{H} \vec{\mathcal{P}} \right] (e^{-2iHt/\hbar} - 1). \quad (4.113)$$

Então, temos o movimento de uma partícula fermiônica descrito por uma posição inicial seguido dum termo termo de velocidade vezes tempo, onde o termo de velocidade tem a forma da velocidade de grupo, mais um termo que oscilatório, responsável pelo *Zitterbewegung*, que quebra a forma cinemática usual da equação de movimento. Ou seja, temos, de fato, um férmion que oscila entre os estados de energia positiva e negativa a medida que segue a sua trajetória clássica.

Capítulo 5

Uma proposta de assimetria entre o espaço e o tempo na equação de Dirac

O conteúdo deste capítulo tem inspiração numa discussão realizada em um trabalho de Hiroki Isobe e Naoto Nagaosa, datado de 2012 [50]. Este trabalho busca estudar teoricamente o fenômeno quântico crítico da transição de fase entre o isolante trivial e o isolante topológico em $(3 + 1)$ dimensões, que é descrito por um férmion de Dirac acoplado ao campo eletromagnético. No modelo considerado, a invariância de Lorentz não é presente a nível de lagrangiano. A violação da simetria de Lorentz no modelo é devida a presença de um fator constante que multiplica, por definição, a derivada espacial. Neste sentido, estaremos a considerar algo semelhante ao modelo que foi proposto no trabalho de Isobe e Nagaosa, procurando estudar a situação a fundo, ao considerar o seguinte lagrangiano,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{i\hbar}{2c} \bar{\psi} \gamma^0 (\partial_t \psi) - \frac{i\hbar}{2c} (\partial_t \bar{\psi}) \gamma^0 \psi - \frac{i}{2} \xi \hbar \bar{\psi} \gamma^i (\partial_i \psi) + \frac{i}{2} \xi \hbar (\partial_i \bar{\psi}) \gamma^i \psi - mc \bar{\psi} \psi \\ &= i\hbar \bar{\psi} \left(\gamma^0 \partial_0 - \xi \gamma^i \partial_i - mc \right) \psi - \frac{i\hbar}{2} (\partial_i \xi) \bar{\psi} \gamma^i \psi. \end{aligned} \quad (5.1)$$

De forma que se ξ não for constante, mas sim uma gradeza real dependente das coordenadas do espaço-tempo, não obtemos uma ação real. Para contornar esta inconsistência, assumimos que na situação em que ξ não é constante, este parâmetro toma valores sobre os complexos. Nessa linha, escrevemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{i\hbar}{2c} \bar{\psi} \gamma^0 (\partial_t \psi) - \frac{i\hbar}{2c} (\partial_t \bar{\psi}) \gamma^0 \psi - \frac{i}{2} \xi \hbar \bar{\psi} \gamma^i (\partial_i \psi) + \frac{i}{2} \xi^* \hbar (\partial_i \bar{\psi}) \gamma^i \psi - mc \bar{\psi} \psi \\ &= i\hbar \bar{\psi} \left[\gamma^0 \partial_0 - \frac{1}{2} (\xi + \xi^*) \gamma^i \partial_i \right] \psi - mc \bar{\psi} \psi - \frac{i\hbar}{2} (\partial_i \xi^*) \bar{\psi} \gamma^i \psi. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Para que a condição de realidade da ação seja verificamos que o termo

$$\xi + \xi^* = \text{Re}(\xi) + i\text{Im}(\xi) + \text{Re}(\xi) - i\text{Im}(\xi) = 2\text{Re}(\xi) \in \mathbb{R}. \quad (5.3)$$

O outro termo a ser analisado, $\partial_i \xi^*$, para que a realidade da ação seja satisfeita deve ser visto de tal forma que

$$\partial_i \xi^* = \partial_i (\text{Re}(\xi) - i\text{Im}(\xi)) \in \mathbb{C}, \quad (5.4)$$

com $\text{Re}(\xi)$ sendo uma constante real e $i\text{Im}(\xi)$ carregando toda a dependência espaço-temporal de ξ . Ou seja

$$\partial_i \xi^* = -\partial_i [i\text{Im}(\xi(x))]. \quad (5.5)$$

Nestes moldes, podemos escrevemos o lagrangiano que leva a uma ação real como sendo

$$\mathcal{L} = i\hbar\bar{\psi}(\gamma^0\partial_0 - \text{Re}(\xi)\gamma^i\partial_i)\psi + \frac{i\hbar}{2}\partial_i [i\text{Im}(\xi(x))] \bar{\psi}\gamma^i\psi - mc\bar{\psi}\psi. \quad (5.6)$$

5.1 As equações de campo

Mantendo em mente o ponto de vista do princípio da mínima ação, poderemos escrever

- Para ψ :

$$\left\{ \frac{i\hbar}{c}\gamma^0\partial_t - i\hbar\text{Re}(\xi)\gamma^i\partial_i - mc + \frac{i\hbar}{2}\partial_i [i\text{Im}(\xi(x))] \gamma^i \right\} \psi = 0. \quad (5.7)$$

- Para $\bar{\psi}$:

$$\bar{\psi} \left\{ \frac{i\hbar}{c}\gamma^0\bar{\partial}_t - i\hbar\text{Re}(\xi)\gamma^i\bar{\partial}_i + mc - \frac{i\hbar}{2}\partial_i [i\text{Im}(\xi(x))] \gamma^i \right\} = 0. \quad (5.8)$$

5.2 Espectro de energias e a velocidade grupo

Propondo uma dependência espaço-temporal linear para $\text{Im}(\xi(x))$,

$$i\text{Im}(\xi(x)) = i\alpha - iw_\mu x^\mu, \quad (5.9)$$

com α e w_μ sendo uma constante real e um vetor constante real, respectivamente, teremos que

$$i\partial_i \text{Im}(\xi(x)) = i\partial_i (\alpha - w_0 x^0 + i\vec{w}_j \vec{x}_j) = i\vec{w}_j \delta_{ij} = i\vec{w}_i. \quad (5.10)$$

De forma que agora podemos escrever a equação de Dirac modificada no espaço dos momenta como sendo

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[\frac{i\hbar}{c}\gamma^0\partial_t - i\hbar\text{Re}(\xi)\gamma^i\partial_i - mc - \frac{\hbar}{2}\vec{w}_i\gamma^i \right] \psi(p)e^{-\frac{i}{\hbar}p_\mu x^\mu} = 0. \quad (5.11)$$

O que nos leva a escrever

$$\left[p_0\gamma^0 - \text{Re}(\xi)\vec{p}_i\gamma^i - mc - \frac{\hbar}{2}\vec{w}_i\gamma^i \right] \psi(p) = D\psi(p) = 0. \quad (5.12)$$

Podemos reescrever D como sendo

$$D = a\mathbb{1} + b_\mu\gamma^\mu, \quad (5.13)$$

com

$$\begin{cases} a = -mc, \\ b_\mu = \left(\frac{E}{c}, -\text{Re}(\xi)\vec{p}_i - \frac{\hbar}{2}\vec{w}_i \right). \end{cases} \quad (5.14)$$

Então,

$$b^2 = \frac{E^2}{c^2} - \text{Re}(\xi)^2\vec{p}_i^2 - \frac{\hbar^2}{4}\vec{w}_i^2 - \hbar\text{Re}(\xi)\vec{w}_i\vec{p}_i = \frac{E^2}{c^2} - \left(\text{Re}(\xi)\vec{p}_i + \frac{\hbar}{2}\vec{w}_i \right)^2. \quad (5.15)$$

Assim sendo, a partir dos resultados do Apêndice C, temos

$$D^{-1} = \frac{1}{\Delta} (b_\mu\gamma^\mu - a) (b^2 - a^2). \quad (5.16)$$

Em que

$$\Delta = \det(D) = (b^2 - a^2)^2. \quad (5.17)$$

Contudo, teremos que a relação de dispersão modificada será tal que

$$\det(D) = \left[\frac{E^2}{c^2} - \left(\text{Re}(\xi)\vec{p}_i + \frac{\hbar}{2}\vec{w}_i \right)^2 - m^2c^2 \right]^2 = 0, \quad (5.18)$$

ou ainda, de maneira equivalente,

$$\frac{E^2}{c^2} - \left(\text{Re}(\xi)\vec{p}_i + \frac{\hbar}{2}\vec{w}_i \right)^2 - m^2c^2 = 0. \quad (5.19)$$

O que nos leva a escrever

$$E = \pm c\sqrt{\left(\text{Re}(\xi)\vec{p}_i + \frac{\hbar}{2}\vec{w}_i \right)^2 + m^2c^2}. \quad (5.20)$$

Então, portanto, a energia de repouso, tomando $\vec{p}_i = 0$, é tal que

$$E = \pm c\sqrt{\frac{\hbar^2}{4}\vec{w}_i^2 + m^2c^2}. \quad (5.21)$$

De forma que a massa de repouso, do elétron por exemplo, é modifica de tal maneira que

$$E = c^2\sqrt{m^2 + \frac{\hbar^2}{4c^2}\vec{w}_i^2}. \quad (5.22)$$

Podemos ainda escrever a velocidade grupo para o presente caso sob a prescrição

$$d(\Delta) = \frac{\partial\Delta}{\partial E}dE + \frac{\partial\Delta}{\partial\vec{p}_i}d\vec{p}_i = AdE + Bd\vec{p}_i = 0, \quad (5.23)$$

e com isso podemos simplesmente escrever

$$(\vec{v}_g)_i = -\frac{B}{A}. \quad (5.24)$$

Temos então que

$$A = \frac{4\Delta}{c^2} E, \quad (5.25)$$

$$B = -4\Delta \left[\text{Re}(\xi)^2 \vec{p}_i + \frac{\hbar}{4} \text{Re}(\xi) \vec{w}_i \right]. \quad (5.26)$$

Portanto,

$$(\vec{v}_g)_i = \frac{c^2}{E} \left[\text{Re}(\xi)^2 \vec{p}_i + \frac{\hbar}{4} \text{Re}(\xi) \vec{w}_i \right]. \quad (5.27)$$

5.3 O propagador fermiônico

Trabalhando melhor a equação (5.16) poderemos escrever o propagador fermiônico deste modelo. Ou seja,

$$\begin{aligned} D^{-1} &= \frac{1}{\Delta} (b_\mu \gamma^\mu - a) (b^2 - a^2) = \frac{(b_\mu \gamma^\mu - a)}{(b^2 - a^2)} \\ &= \frac{\tilde{p}_\mu \gamma^\mu - (\hbar/2) \vec{w}_i \gamma^i + mc}{p_0^2 - \text{Re}(\xi)^2 \vec{p}_i^2 - \hbar \text{Re}(\xi) \vec{p} \cdot \vec{w} - (\hbar^2/4) \vec{w}^2 - m^2 c^2} \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$= \frac{\tilde{p}_\mu \gamma^\mu - (\hbar/2) \vec{w}_i \gamma^i + mc}{p_0^2 - [\text{Re}(\xi) \vec{p}_i + (\hbar/2) \vec{w}_i]^2 - m^2 c^2}. \quad (5.29)$$

Com \tilde{p}_μ sendo igual a

$$\tilde{p}_\mu = \left(p_0, -\text{Re}(\xi) \vec{p}_i \right). \quad (5.30)$$

Portanto o propagador fermiônico pode ser escrito como sendo

$$iS(\tilde{p}) = i \frac{\tilde{p}_\mu \gamma^\mu - (\hbar/2) \vec{w}_i \gamma^i + mc}{p_0^2 - [\text{Re}(\xi) \vec{p}_i + (\hbar/2) \vec{w}_i]^2 - m^2 c^2 + i\varepsilon}. \quad (5.31)$$

5.4 Tensor energia-momento

A partir dos desenvolvimentos da sessão E.2 do Apêndice E, a quadri-divergência do tensor energia momento tem a forma

$$i\hbar \partial_\mu \left[(\partial_\nu \bar{\psi}) \tilde{\gamma}^\mu \psi - \bar{\psi} \tilde{\gamma}^\mu (\partial_\nu \psi) \right] = -\hbar \left[\partial_\nu \partial_i \text{Im}(\xi(x)) \right] \bar{\psi} \gamma^i \psi. \quad (5.32)$$

Em que

$$\tilde{\gamma}^\mu = \left(\gamma^0, \text{Re}(\xi) \gamma^i \right). \quad (5.33)$$

Como estamos a considerar que

$$i\partial_i \text{Im}(\xi(x)) = i\vec{w}_i, \quad (5.34)$$

podemos escrever

$$i\hbar\partial_\mu \left[(\partial_\nu \bar{\psi}) \tilde{\gamma}^\mu \psi - \bar{\psi} \tilde{\gamma}^\mu (\partial_\nu \psi) \right] = -\hbar (\partial_\nu \vec{w}_i) \bar{\psi} \gamma^i \psi. \quad (5.35)$$

De forma que procedimento de simetrização não é válido. E temos também uma quebra da conservação do tensor energia-momento.

5.5 Introduzindo a interação eletromagnética

Para introduzir a interação eletromagnética no modelo, via acoplamento mínimo, tomamos a seguinte prescrição na quadri-divergência que acompanham o termo de Dirac

$$\partial_0 = \frac{1}{c} \partial_t \rightarrow \frac{1}{c} \partial_t + i \frac{qe}{\hbar} A_0 \quad (5.36)$$

$$\partial_i \rightarrow \partial_i + i \frac{qe}{\hbar} \vec{A}_i. \quad (5.37)$$

E se introduzimos também o termos de Maxwell, teremos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i\hbar\bar{\psi} \left(\gamma^0 \partial_0 - \text{Re}(\xi) \gamma^i \partial_i \right) \psi + \frac{i\hbar}{2} \partial_i \left[i \text{Im}(\xi(x)) \right] \bar{\psi} \gamma^i \psi - \\ &\quad - mc\bar{\psi}\psi - qeA_0\bar{\psi}\gamma^0\psi + qe\vec{A}_i \text{Re}(\xi) \bar{\psi} \gamma^i \psi \\ &= -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i\hbar\bar{\psi} \left(\gamma^\mu \tilde{\partial}_\mu \right) \psi + \frac{i\hbar}{2} \partial_i \left[i \text{Im}(\xi(x)) \right] \bar{\psi} \gamma^i \psi - mc\bar{\psi}\psi - \\ &\quad - qe\vec{A}_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \\ &= -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} \left[i\hbar\gamma^\mu \tilde{\partial}_\mu - mc - \frac{\hbar}{2} \left(\partial_i \text{Im}(\xi(x)) \right) \gamma^i - qe\vec{A}_\mu \gamma^\mu \right] \psi. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Com

$$\vec{A}_\mu = \left(A_0, -\text{Re}(\xi) \vec{A}_i \right). \quad (5.39)$$

5.5.1 A equação de Dirac modificada

Do princípio da mínima ação temos que a equação de Dirac modificada com acoplamento mínimo é

$$\left[i\hbar\gamma^\mu \tilde{\partial}_\mu - mc - \frac{\hbar}{2} \left(\partial_i \text{Im}(\xi(x)) \right) \gamma^i - qe\vec{A}_\mu \gamma^\mu \right] \psi = 0. \quad (5.40)$$

Com seu conjugado de Dirac sendo

$$i\hbar\gamma^\mu \left(\tilde{\partial}_\mu \bar{\psi} \right) + \bar{\psi} \left[mc + \frac{\hbar}{2} \left(\partial_i \text{Im}(\xi(x)) \right) \gamma^i + qe\vec{A}_\mu \gamma^\mu \right] = 0. \quad (5.41)$$

5.5.2 Decomposição de Gordon

Seguindo os desenvolvimentos da sessão D.4 do Apêndice D, temos que a decomposição de Gordon, no espaço dos momenta, toma a forma

$$\begin{aligned} 2mc\bar{\psi}(p+q')\gamma^\kappa\psi(p) &= \left[(\tilde{p} + \tilde{q}')^\kappa + \tilde{p}^\kappa + \hbar w^\kappa \right] \bar{\psi}(p+q')\psi(p) + \\ &+ 2i \left[(\tilde{p} + \tilde{q}')_\mu - \tilde{p}_\mu \right] \bar{\psi}(p+q')\Sigma^{\mu\kappa}\psi(p) + \\ &+ 2qe \int \frac{d^4p'}{(2\pi\hbar)^4} \tilde{A}^\kappa(p' - p - q') \bar{\psi}(p')\psi(p) \end{aligned} \quad (5.42)$$

e

$$\begin{aligned} - \left((\tilde{p} + \tilde{q})^\kappa - \tilde{p}^\kappa \right) \bar{\psi}(p+q)\psi(p) + 2i \left((\tilde{p} + \tilde{q})_\mu + \tilde{p}_\mu \right) \bar{\psi}(p+q)\Sigma^{\mu\kappa}\psi(p) - \\ - 2i\hbar\vec{w}_i\bar{\psi}(p+q)\Sigma^{\kappa i}\psi(p) - 4iqe \int \frac{d^4p'}{(2\pi\hbar)^4} \tilde{A}_\mu(p' - p - q)\bar{\psi}(p')\Sigma^{\mu\kappa}\psi(p) = 0. \end{aligned} \quad (5.43)$$

5.5.3 As equações de Maxwell Modificadas

Para escrever as equações de Maxwell, devemos nos concentrar nos termos de Maxwell e de interação do lagrangiano de partida,

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - qeA_0\bar{\psi}\gamma^0\psi + qe\text{Re}(\xi)\vec{A}_i\bar{\psi}\gamma^i\psi. \quad (5.44)$$

Este que pode ser escrito na forma

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \tilde{J}^\nu A_\nu, \quad (5.45)$$

onde estamos a identificar \tilde{j}^ν como sendo

$$\tilde{J}^\nu = (J^0, \text{Re}(\xi)\vec{J}_i) = qe \left(\bar{\psi}\gamma^0\psi, \text{Re}(\xi)\bar{\psi}\gamma^i\psi \right). \quad (5.46)$$

Então, do princípio da mínima ação, teremos

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_M &= -\frac{2}{4\mu_0} F^{\mu\nu} (\delta F_{\mu\nu}) - \tilde{J}^\nu \delta A_\nu \\ &= -\frac{2}{2\mu_0} F^{\mu\nu} (\delta\partial_\mu A_\nu) - \tilde{J}^\nu \delta A_\nu \\ &= -\partial_\mu \left(\frac{1}{1\mu_0} F^{\mu\nu} \delta A_\nu \right) + \frac{1}{1\mu_0} (\partial_\mu F^{\mu\nu}) \delta A_\nu - \tilde{J}^\nu \delta A_\nu \\ &= \left(\partial_\mu F^{\mu\nu} - \mu_0 \tilde{J}^\nu \right) \delta A_\nu = 0. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Portanto,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 \tilde{J}^\nu. \quad (5.48)$$

Este resultado dará origem tanto a lei de Gauss para o campo elétrico, quanto a equação de Ampère-Maxwell. Já a lei de Faraday-Lenz e a lei de Gauss para o campo magnético são inalteradas por este cenário e podem ser escritas pela identidade Bianchi,

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \partial_\mu \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) = 0. \quad (5.49)$$

- Lei de Gauss para o campo elétrico:

Tomando $\nu = 0$ na equação (5.48), teremos

$$\begin{aligned}\partial_\mu F^{\mu 0} &= \mu_0 \tilde{J}^0 \\ \partial_i F^{i0} &= \mu_0 \tilde{J}^0 \\ \vec{\nabla}_i \frac{\vec{E}_i}{c} &= \mu_0 \tilde{J}^0.\end{aligned}\tag{5.50}$$

Portando,

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \mu_0 c J_0 = \mu_0 c^2 \rho = \frac{\rho}{\epsilon_0}.}\tag{5.51}$$

- Equação de Ampère-Maxwell:

Tomando $\nu = i$ na equação (5.48), teremos

$$\begin{aligned}\partial_\mu F^{\mu i} &= \mu_0 \tilde{J}^i \\ \partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ji} &= \mu_0 \tilde{J}^i \\ \partial_0 F^{i0} - \partial_j F^{ij} &= -\mu_0 \tilde{J}_i \\ \frac{1}{c} \partial_t F_{i0} - \vec{\nabla}_j F_{ij} &= \text{Re}(\xi) \mu_0 \vec{J}_i \\ -\frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E}_i + \varepsilon_{ijk} \vec{\nabla}_j \vec{B}_k &= \text{Re}(\xi) \mu_0 \vec{J}_i.\end{aligned}\tag{5.52}$$

Portanto,

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \text{Re}(\xi) \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \vec{E}.}\tag{5.53}$$

- Lei de Faraday-Lenz:

A lei de Faraday-Lenz vem da identidade Bianchi tomando $\nu = 0$. Ou seja,

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0.}\tag{5.54}$$

- Lei de Gauss para o campo magnético:

Agora a lei de Gauss para o campo magnético vem da identidade Bianchi tomando $\nu = i$. Ou seja,

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0.}\tag{5.55}$$

5.5.4 Tensor energia-momento

Seguindo os desenvolvimentos da sessão E.2 do Apêndice E, temos que a quadri-divergência do tensor energia-momento proveniente da equação de Dirac modificada e com acoplamento mínimo, descrita por (5.40), tem a forma

$$i\hbar\partial_\mu \left[(\partial_\nu \bar{\psi}) \tilde{\gamma}^\mu \psi - \bar{\psi} \tilde{\gamma}^\mu (\partial_\nu \psi) \right] = -\hbar \left[\partial_\nu \partial_i \text{Im}(\xi(x)) \right] \bar{\psi} \gamma^i \psi - 2qe (\partial_\nu \tilde{A}_\mu) \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (5.56)$$

Já a quadri-divergência do tensor energia-momento proveniente das equações de Maxwell possui a forma Ou seja,

$$\partial_\mu \left(\frac{1}{\mu_0} F^{\mu\alpha} F_{\alpha\nu} + \frac{1}{4\mu_0} \delta^\mu_\nu F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) = \tilde{J}^\alpha F_{\alpha\nu} = -2qe (\partial_\nu \tilde{A}_\alpha) \psi \gamma^\alpha \psi. \quad (5.57)$$

Nestes moldes, podemos falar de um tensor energia momento total que leva em consideração os efeitos deste dois resultados. Ou seja,

$$\partial_\mu \left[i\hbar (\partial_\nu \bar{\psi}) \tilde{\gamma}^\mu \psi - i\hbar \bar{\psi} \tilde{\gamma}^\mu (\partial_\nu \psi) - \frac{1}{\mu_0} F^{\mu\alpha} F_{\alpha\nu} - \frac{1}{4\mu_0} \delta^\mu_\nu F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right] = -\hbar (\partial_\nu \vec{w}_i) \bar{\psi} \gamma^i \psi. \quad (5.58)$$

Lembrando que estamos a considerar que

$$i\partial_i \text{Im}(\xi(x)) = i\vec{w}_i.$$

5.6 Soluções da equação de Dirac modificada

A partir da equação (5.7) temos que a equação de Dirac modificada livre é

$$\left\{ \frac{i\hbar}{c} \gamma^0 \partial_t - i\hbar \text{Re}(\xi) \gamma^i \partial_i - mc + \frac{i\hbar}{2} \partial_i \left[i \text{Im}(\xi(x)) \right] \gamma^i \right\} \psi = 0. \quad (5.59)$$

Com $\text{Im}(\xi(x))$ carregando uma dependência espaço-temporal. Afim de tornar a notação mais agradável aos olhos, iremos adotar que

$$\partial_i \left[\text{Im}(\xi(x)) \right] = \partial_i f(x). \quad (5.60)$$

Com isso, a equação (5.59) toma a forma

$$\left(\frac{i\hbar}{c} \gamma^0 \partial_t - i\hbar \text{Re}(\xi) \gamma^i \partial_i - mc - \frac{\hbar}{2} \partial_i f(x) \gamma^i \right) \psi = 0, \quad (5.61)$$

De forma geral, vamos supor que a dependência de $f(x)$ é dada inteiramente por z e, portanto, temos que

$$\partial_i f(x) = \partial_i f(x^0, x^i) \rightarrow \partial_3 f(x^3) \equiv \partial_3 f(z). \quad (5.62)$$

Com isso, escrevemos

$$\left(\frac{i\hbar}{c} \gamma^0 \partial_t - i\hbar \text{Re}(\xi) \gamma^i \partial_i - mc - \frac{\hbar}{2} \partial_3 f(z) \gamma^3 \right) \psi = 0, \quad (5.63)$$

Dada essa formulação, podemos propor $f(z)$'s que, sob determinadas perspectiva, nos levarão à uma física concentrada em regiões em torno de $z = 0$. Sendo assim, propomos

$$f(z) = \frac{f_0}{\pi\sigma} \sin\left(\frac{z}{\sigma}\right), \quad (5.64)$$

$$f(z) = \frac{f_0}{\sqrt{\pi\sigma}} e^{-z^2/4\sigma}. \quad (5.65)$$

Trabalhando melhor a forma da equação de Dirac, considerando também que o espinor vai obedecer uma física unidimensional na direção \hat{z} , teremos

$$\left(\frac{i\hbar}{c}\gamma^0\partial_t - i\hbar\text{Re}(\xi)\gamma^3\partial_z - mc - \frac{\hbar}{2}\partial_z f(z)\gamma^3\right)\psi(t, z) = 0,$$

$$\left[\frac{i\hbar}{c}\partial_t \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} - \left(i\hbar\text{Re}(\xi)\partial_z + \frac{\hbar}{2}\partial_z f(z)\right) \begin{pmatrix} 0 & \alpha_z \\ -\alpha_z & 0 \end{pmatrix} - mc \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} \chi(z) \\ \zeta(z) \end{pmatrix} e^{-iEt/\hbar} = 0. \quad (5.66)$$

Com $\mathbb{1}$ sendo a matriz identidade 2×2 e α_z sendo a terceira matriz de Pauli,

$$\alpha_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.67)$$

Então, teremos o par de equações diferenciais parciais acopladas,

$$\left(\frac{E}{c} - mc\right)\mathbb{1}\chi(z) - \left(i\hbar\text{Re}(\xi)\partial_z + \frac{\hbar}{2}\partial_z f(z)\right)\alpha_z\zeta(z) = 0, \quad (5.68)$$

$$\left(\frac{E}{c} + mc\right)\mathbb{1}\zeta(z) - \left(i\hbar\text{Re}(\xi)\partial_z + \frac{\hbar}{2}\partial_z f(z)\right)\alpha_z\chi(z) = 0. \quad (5.69)$$

Isolando $\zeta(z)$ em (5.69) e levando o resultado em (5.68), teremos

$$(E - mc^2)\mathbb{1}\chi(z) - \frac{c^2}{(E + mc^2)} \left(i\hbar\text{Re}(\xi)\partial_z + \frac{\hbar}{2}\partial_z f(z)\right)^2 \alpha_z^2\chi(z) = 0. \quad (5.70)$$

Expandindo termo a termos, podemos escrever

$$\left\{ E - mc^2 + \frac{c^2}{(E + mc^2)} \left[\hbar^2\text{Re}(\xi)^2\partial_z^2 - i\hbar^2\text{Re}(\xi)(\partial_z f(z))\partial_z - \frac{i\hbar^2}{2}\text{Re}(\xi)(\partial_z^2 f(z)) - \frac{\hbar^2}{4}(\partial_z f(z))^2 \right] \right\} \mathbb{1}\chi(z) = 0, \quad (5.71)$$

que equivale a

$$\left[c^2\hbar^2\text{Re}(\xi)^2\partial_z^2 - ic^2\hbar^2\text{Re}(\xi)[\partial_z f(z)]\partial_z - \frac{ic^2\hbar^2}{2}\text{Re}(\xi)[\partial_z^2 f(z)] - \frac{c^2\hbar^2}{4}[\partial_z f(z)]^2 + E^2 - m^2c^4 \right] \mathbb{1}\chi(z) = 0. \quad (5.72)$$

Podemos entender $\chi(z)$ como a soma direta da projeção de spin up e down. Ou seja,

$$\chi(z) = \chi_u(z) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \chi_d(z) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5.73)$$

Levando este resultado na equação diferencial (5.72), vamos ter um par de equações diferenciais com a mesma forma da própria (5.72). Uma que determinará $\chi_u(z)$ e outra que determinará $\chi_d(z)$. Isto é,

$$\left[c^2 \hbar^2 \text{Re}(\xi)^2 \partial_z^2 - ic^2 \hbar^2 \text{Re}(\xi) [\partial_z f(z)] \partial_z - \frac{ic^2 \hbar^2}{2} \text{Re}(\xi) [\partial_z^2 f(z)] - \frac{c^2 \hbar^2}{4} [\partial_z f(z)]^2 + E^2 - m^2 c^4 \right] \chi_u(z) = 0 \quad (5.74)$$

e

$$\left[c^2 \hbar^2 \text{Re}(\xi)^2 \partial_z^2 - ic^2 \hbar^2 \text{Re}(\xi) [\partial_z f(z)] \partial_z - \frac{ic^2 \hbar^2}{2} \text{Re}(\xi) [\partial_z^2 f(z)] - \frac{c^2 \hbar^2}{4} [\partial_z f(z)]^2 + E^2 - m^2 c^4 \right] \chi_d(z) = 0. \quad (5.75)$$

5.7 Solução para o primeiro caso para $f(z)$

Para o caso em que

$$f(z) = \frac{f_0}{\pi\sigma} \sin\left(\frac{z}{\sigma}\right), \quad (5.76)$$

que possui um comportamento do tipo

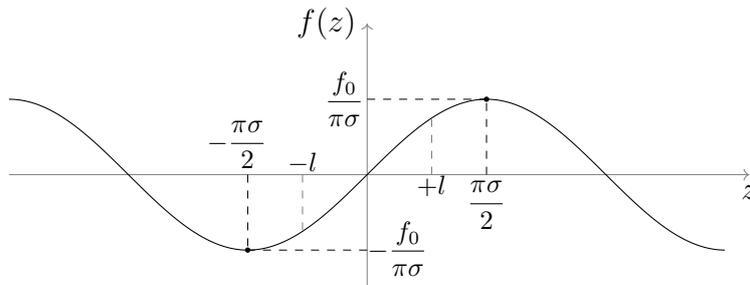


Figura 2 – Gráfico do terceiro caso de $f(z)$.

A nossa proposta é analisar os efeitos de $f(z)$ numa partícula fermiônica que se encontra na região em torno de $z = 0$. Para valores de z que se afastam de zero, dizemos que $f(z)$ toma valores triviais. Nesse sentido, propomos, para o caso acima, que $f(z)$ está confinada na região $-l < z < l$ em torno de zero, conforme ilustrado na Figura 2. A forma de $f(z)$ neste intervalo $-l < z < l$ em torno de zero é dada pela expansão em série de Taylor de $f(z)$ em primeira ordem. Ou seja,

$$f(z) \approx f(0) + \left. \frac{df(z)}{dz} \right|_{z=0} \cdot z = \frac{f_0}{\pi\sigma^2} z. \quad (5.77)$$

Então, de forma geral, estaremos a pensar que

$$f(z) = \frac{f_0}{\pi\sigma} \sin\left(\frac{z}{\sigma}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{f_0}{\pi\sigma^2}z, & -l < z < l; \\ 0, & |z| > l. \end{cases} \quad (5.78)$$

- Solução na região $|z| > l$:

Nessa região, $f(z) = 0$. Sendo assim, as equações diferenciais (5.74) e (5.75) tomam a forma de

$$\left[c^2\hbar^2\text{Re}(\xi)^2\partial_z^2 + E^2 - m^2c^4\right]\tilde{\chi}(z) = 0. \quad (5.79)$$

Onde estamos a considerar que $\tilde{\chi}(z)$ é igual a $\chi_u(z)$ e $\chi_d(z)$. Sendo assim, podemos escrever a equação acima de forma mais compacta,

$$\left(\partial_z^2 + a\right)\tilde{\chi}(z) = 0, \quad (5.80)$$

com

$$a = \frac{E^2 - m^2c^4}{c^2\hbar^2\text{Re}(\xi)^2}. \quad (5.81)$$

Portanto, se $E^2 - m^2c^4 > 0$, teremos

$$\tilde{\chi}(z) = C_1e^{i\sqrt{a}z} + C_2e^{-i\sqrt{a}z}. \quad (5.82)$$

Agora se se $E^2 - m^2c^4 < 0$, teremos

$$\tilde{\chi}(z) = C'_1e^{\sqrt{|a|}z} + C'_2e^{-\sqrt{|a|}z}. \quad (5.83)$$

- Solução na região $-l < z < l$:

Nessa região temos que $f(z) = f_0z/\pi\sigma^2$. Assim, as equações diferenciais (5.74) e (5.75) tomam a forma

$$\left[c^2\hbar^2\text{Re}(\xi)^2\partial_z^2 - ic^2\hbar^2\text{Re}(\xi)[\partial_z f(z)]\partial_z + E^2 - m^2c^4\right]\tilde{\chi}(z) = 0. \quad (5.84)$$

Que equivale a

$$\left[c^2\hbar^2\text{Re}(\xi)^2\partial_z^2 - ic^2\hbar^2\text{Re}(\xi)\frac{f_0}{\pi\sigma^2}\partial_z + E^2 - m^2c^4\right]\tilde{\chi}(z) = 0. \quad (5.85)$$

Que pode ser escrita de forma que

$$\left[\partial_z^2 - i\frac{f_0}{\text{Re}(\xi)\pi\sigma^2}\partial_z + \frac{E^2 - m^2c^4}{c^2\hbar^2\text{Re}(\xi)^2}\right]\tilde{\chi}(z) = 0. \quad (5.86)$$

Ou ainda,

$$\left(\partial_z^2 - ib\partial_z + a\right)\mathbb{1}\chi(z) = 0. \quad (5.87)$$

Com

$$a = \frac{E^2 - m^2 c^4}{c^2 \hbar^2 \operatorname{Re}(\xi)^2}, \quad (5.88)$$

$$b = \frac{f_0}{\operatorname{Re}(\xi) \pi \sigma^2}. \quad (5.89)$$

Portanto se $E^2 - m^2 c^4 > 0$, ou seja, $a > 0$, teremos

$$\tilde{\chi}(z) = C_3 \exp\left(\frac{i}{2}(b + \sqrt{b^2 + 4a})z\right) + C_4 \exp\left(\frac{i}{2}(b - \sqrt{b^2 + 4a})z\right). \quad (5.90)$$

Por outro lado se $E^2 - m^2 c^4 < 0$, ou seja, $a < 0$, teremos

$$\tilde{\chi}(z) = e^{ibz/2} \left[C'_3 \exp\left(\frac{\sqrt{-b^2 + 4|a|}}{2}z\right) + C'_4 \exp\left(-\frac{\sqrt{-b^2 + 4|a|}}{2}z\right) \right]. \quad (5.91)$$

5.7.1 Explorando as condições de contorno para soluções com $E^2 - m^2 c^4 < 0$

De forma geral, $\tilde{\chi}(z) = \chi_u(z) = \chi_d(z)$ e teremos

$$\tilde{\chi}(z) = \begin{cases} \tilde{\chi}_1(z) = C_1 e^{\sqrt{|a|}z} + C_2 e^{-\sqrt{|a|}z} & \text{para } z < -l, \\ \tilde{\chi}_2(z) = e^{ibz/2} (C_3 e^{\kappa z} + C_4 e^{-\kappa z}) & \text{para } -l < z < l, \\ \tilde{\chi}_3(z) = C_5 e^{\sqrt{|a|}z} + C_6 e^{-\sqrt{|a|}z} & \text{para } z > l. \end{cases} \quad (5.92)$$

Em que estamos considerando que

$$\kappa = \frac{\sqrt{-b^2 + 4|a|}}{2}. \quad (5.93)$$

Por questões de finitude,

$$\boxed{C_2 = C_5 = 0}, \quad (5.94)$$

isso é necessário e suficiente para que tanto $\tilde{\chi}_1(z)$, quanto $\tilde{\chi}_3(z)$, sejam nulas quando $z = \pm\infty$, respectivamente. Agora, em $z = -l$ teremos que

$$\tilde{\chi}_1(-l) = C_1 e^{-\sqrt{|a|}l} = e^{-ibl/2} (C_3 e^{-\kappa l} + C_4 e^{\kappa l}) = \tilde{\chi}_2(-l). \quad (5.95)$$

E também

$$\left. \frac{d\tilde{\chi}_1(z)}{dz} \right|_{z=-l} = C_1 \sqrt{|a|} e^{-\sqrt{|a|}l} = e^{-ibl/2} \left[\frac{ib}{2} (C_3 e^{-\kappa l} + C_4 e^{\kappa l}) + \kappa (C_3 e^{-\kappa l} - C_4 e^{\kappa l}) \right] = \left. \frac{d\tilde{\chi}_2(z)}{dz} \right|_{z=-l}. \quad (5.96)$$

Levando uma equação na outra, somos levados a mostrar que

$$\boxed{C_3 = \frac{(2\kappa + 2\sqrt{|a|} - ib)}{4\kappa} e^{(ib/2 + \kappa - \sqrt{|a|})l} C_1}, \quad (5.97)$$

$$C_4 = \frac{(2\kappa - 2\sqrt{|a|} + ib)}{4\kappa} e^{(ib/2 - \kappa - \sqrt{|a|})l} C_1. \quad (5.98)$$

Portanto,

$$\frac{C_3}{C_4} = e^{2\kappa l} \frac{(2\kappa + 2\sqrt{|a|} - ib)}{(2\kappa - 2\sqrt{|a|} + ib)}. \quad (5.99)$$

A partir destes resultados e exigindo que

$$\chi_2(l) = e^{ibl/2} (C_3 e^{\kappa l} + C_4 e^{-\kappa l}) = C_6 e^{-\sqrt{|a|}l} = \chi_3(l), \quad (5.100)$$

mostramos que

$$C_6 = e^{ibl} \frac{[2\kappa \cosh(2\kappa l) + (2\sqrt{a} - ib) \sinh(2\kappa l)]}{2\kappa} C_1. \quad (5.101)$$

Sendo assim, teremos

$$\tilde{\chi}(z) = \begin{cases} \tilde{\chi}_1(z) = C_1 e^{\sqrt{|a|}z} & \text{para } z < -l, \\ \tilde{\chi}_2(z) = e^{ibz/2} (C_3 e^{\kappa z} + C_4 e^{-\kappa z}) & \text{para } -l < z < l, \\ \tilde{\chi}_3(z) = C_6 e^{-\sqrt{|a|}z} & \text{para } z > l. \end{cases} \quad (5.102)$$

Com as constantes C_2 , C_3 e C_6 dadas em termos de C_1 conforme as expressões acima.

5.7.2 A forma das soluções de spin up e down com $E^2 - m^2 c^4 < 0$

Nos resta agora obter $\zeta(z)$ para que tenhamos o espinor que satisfaz a equação de Dirac modificada de forma completa. Para isso, retornamos à equação (5.69),

$$\left(\frac{E}{c} + mc\right) \mathbb{1}\zeta(z) - \left(i\hbar \text{Re}(\xi) \partial_z + \frac{\hbar}{2} \partial_z f(z)\right) \alpha_z \chi(z) = 0, \quad (5.103)$$

e isolamos $\zeta(z)$ em função de $\chi(z)$, que já conhecemos no resultado (5.102) valendo tanto para a projeção de spin up, quanto para a de spin down, se lembramos que $\tilde{\chi}(z) = \chi_u(z) = \chi_d(z)$.

Se estamos interessados primeiramente nas soluções de spin up, teremos que

$$\zeta_u(z) = \tilde{\zeta}(z) = \frac{c}{E + mc^2} \left(i\hbar \text{Re}(\xi) \partial_z + \frac{\hbar}{2} \partial_z f(z)\right) \chi_u(z). \quad (5.104)$$

Assim sendo, em $z < -l$ termos que $f(z) = 0$ e $\tilde{\chi}(z) = \tilde{\chi}_1(z) = \chi_u(z)$ dado em (5.102). Então a equação (5.104) toma a forma

$$\tilde{\zeta}_1(z) = \frac{c}{E + mc^2} [i\hbar \text{Re}(\xi) (\partial_z \tilde{\chi}_1(z))]. \quad (5.105)$$

Portanto,

$$\tilde{\zeta}_1(z) = C_1 \frac{i\hbar c \operatorname{Re}(\xi) \sqrt{|a|}}{E + mc^2} e^{\sqrt{|a|}z}. \quad (5.106)$$

De forma análoga, em $z > l$ termos

$$\tilde{\zeta}_3(z) = -C_6 \frac{i\hbar c \operatorname{Re}(\xi) \sqrt{|a|}}{E + mc^2} e^{-\sqrt{|a|}z}. \quad (5.107)$$

Na região central, $-l < z < l$, temos $f(z)$ não trivial dado por (5.78). Com isso, da equação (5.104), termos

$$\tilde{\zeta}_2(z) = \frac{i\hbar c \operatorname{Re}(\xi) \kappa}{E + mc^2} e^{ibz/2} (C_3 e^{\kappa z} - C_4 e^{-\kappa z}). \quad (5.108)$$

Os resultados (5.106), (5.107) e (5.108) podem ser resumidos de forma que

$$\zeta_u(z) = \tilde{\zeta}(z) = \begin{cases} \tilde{\zeta}_1(z) = C_1 \frac{i\hbar c \operatorname{Re}(\xi) \sqrt{|a|}}{E + mc^2} e^{\sqrt{|a|}z} & \text{para } z < -l, \\ \tilde{\zeta}_2(z) = \frac{i\hbar c \operatorname{Re}(\xi) \kappa}{E + mc^2} e^{ibz/2} (C_3 e^{\kappa z} - C_4 e^{-\kappa z}) & \text{para } -l < z < l, \\ \tilde{\zeta}_3(z) = -C_6 \frac{i\hbar c \operatorname{Re}(\xi) \sqrt{|a|}}{E + mc^2} e^{-\sqrt{|a|}z} & \text{para } z > l. \end{cases} \quad (5.109)$$

Então, dos resultados (5.102) e (5.106), o espinor com projeção de **spin up** que satisfaz a equação de Dirac modificada é

$$\psi_u(z, t) = \begin{pmatrix} \chi(z) \\ \zeta(z) \end{pmatrix} e^{-iEt/\hbar} = \begin{pmatrix} \chi_u(z) \\ 0 \\ \zeta_u(z) \\ 0 \end{pmatrix} e^{-iEt/\hbar}. \quad (5.110)$$

Dum procedimento verdadeiramente análogo, podemos mostrar que para a projeção de spin down teremos

$$\zeta_d(z) = -\zeta_u(z) = \begin{cases} \tilde{\zeta}_1(z) = -C_1 \frac{i\hbar c \operatorname{Re}(\xi) \sqrt{|a|}}{E + mc^2} e^{\sqrt{|a|}z} & \text{para } z < -l, \\ \tilde{\zeta}_2(z) = \frac{i\hbar c \operatorname{Re}(\xi) \kappa}{E + mc^2} e^{ibz/2} (C_4 e^{-\kappa z} - C_3 e^{\kappa z}) & \text{para } -l < z < l, \\ \tilde{\zeta}_3(z) = C_6 \frac{i\hbar c \operatorname{Re}(\xi) \sqrt{|a|}}{E + mc^2} e^{-\sqrt{|a|}z} & \text{para } z > l. \end{cases} \quad (5.111)$$

Assim sendo, a partir dos resultados (5.102) e (5.106) vemos que o espinor com projeção de **spin down** que satisfaz a equação de Dirac modificada é

$$\psi_d(z, t) = \begin{pmatrix} \chi(z) \\ \zeta(z) \end{pmatrix} e^{-iEt/\hbar} = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_d(z) \\ 0 \\ \zeta_d(z) \end{pmatrix} e^{-iEt/\hbar}. \quad (5.112)$$

5.7.3 Explorando as condições de contorno para soluções com $E^2 - m^2c^4 > 0$

Nesse regime, teremos

$$\tilde{\chi}(z) = \begin{cases} \chi_1(z) = C_1 e^{i\sqrt{a}z} + C_2 e^{-i\sqrt{a}z} & \text{para } z < -l, \\ \chi_2(z) = C_3 e^{\frac{i}{2}(b+\sqrt{b^2+4a})z} + C_4 e^{\frac{i}{2}(b-\sqrt{b^2+4a})z} & \text{para } -l < z < l, \\ \chi_3(z) = C_5 e^{i\sqrt{a}z} + C_6 e^{-i\sqrt{a}z} & \text{para } z > l. \end{cases} \quad (5.113)$$

A primeira imposição é de que $\chi(z)$ se propaga, na região $z < -l$, como uma onda no sentido crescente de z . Sendo assim,

$$\boxed{C_1 = 0.} \quad (5.114)$$

Exigimos também que $\chi(z)$ seja continua em $z = -l$. Então,

$$\tilde{\chi}_1(-l) = C_2 e^{i\sqrt{a}l} = e^{-ibl/2} \left(C_3 e^{-i\sqrt{b^2+4a}l/2} + C_4 e^{i\sqrt{b^2+4a}l/2} \right) = \tilde{\chi}_2(-l). \quad (5.115)$$

Da continuidade da primeira derivada em $z = -l$ vem que

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\tilde{\chi}_1(z)}{dz} \right|_{z=-l} &= -i\sqrt{a}C_2 e^{i\sqrt{a}l} \\ &= \frac{i}{2} e^{-ibl/2} \left[(b + \sqrt{b^2 + 4a}) C_3 e^{-i\sqrt{b^2+4a}l/2} + (b - \sqrt{b^2 + 4a}) C_4 e^{i\sqrt{b^2+4a}l/2} \right] = \left. \frac{d\tilde{\chi}_2(z)}{dz} \right|_{z=-l}. \end{aligned} \quad (5.116)$$

Queremos também $\chi(z)$ seja continua em $z = l$. Ou seja,

$$\tilde{\chi}_2(l) = e^{ibl/2} \left(C_3 e^{i\sqrt{b^2+4a}l/2} + C_4 e^{-i\sqrt{b^2+4a}l/2} \right) = C_5 e^{i\sqrt{a}l} + C_6 e^{-i\sqrt{a}l} = \tilde{\chi}_3(l). \quad (5.117)$$

Agora seguindo com a continuidade da primeira derivada em $z = l$, vamos ter

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\tilde{\chi}_2(z)}{dz} \right|_{z=l} &= \frac{i}{2} e^{ibl/2} \left[(b + \sqrt{b^2 + 4a}) C_3 e^{i\sqrt{b^2+4a}l/2} + (b - \sqrt{b^2 + 4a}) C_4 e^{-i\sqrt{b^2+4a}l/2} \right] \\ &= i\sqrt{a}C_5 e^{ial} - iaC_6 e^{-i\sqrt{a}l} = \left. \frac{d\tilde{\chi}_3(z)}{dz} \right|_{z=l}. \end{aligned} \quad (5.118)$$

Destas condições de contorno vem que

$$\boxed{C_3 = \frac{(-2\sqrt{a} - b + \sqrt{b^2 + 4a})}{2\sqrt{b^2 + 4a}} e^{\frac{i}{2}(2\sqrt{a}+b+\sqrt{b^2+4a})l} C_2,} \quad (5.119)$$

$$\boxed{C_4 = \frac{(2\sqrt{a} + b + \sqrt{b^2 + 4a})}{2\sqrt{b^2 + 4a}} e^{-\frac{i}{2}(-2\sqrt{a}-b+\sqrt{b^2+4a})l} C_2,} \quad (5.120)$$

$$\boxed{C_5 = -i \frac{b}{\sqrt{b^2 + 4a}} e^{ibl} \sin(\sqrt{b^2 + 4a} l) C_2,} \quad (5.121)$$

$$\boxed{C_6 = e^{2i(\sqrt{a}+b)l} \frac{[\sqrt{b^2 + 4a} \cos(\sqrt{b^2 + 4a} l) - 2i\sqrt{a} \sin(\sqrt{b^2 + 4a} l)]}{\sqrt{b^2 + 4a}} C_2.} \quad (5.122)$$

Então, de forma geral, temos que

$$\tilde{\chi}(z) = \chi_u(z) = \chi_d(z) = \begin{cases} \tilde{\chi}_1(z) = C_2 e^{-i\sqrt{a}z} & \text{para } z < -l, \\ \tilde{\chi}_2(z) = C_3 e^{\frac{i}{2}(b+\sqrt{b^2+4a})z} + C_4 e^{\frac{i}{2}(b-\sqrt{b^2+4a})z} & \text{para } -l < z < l, \\ \tilde{\chi}_3(z) = C_5 e^{i\sqrt{a}z} + C_6 e^{-i\sqrt{a}z} & \text{para } z > l. \end{cases} \quad (5.123)$$

Com C_3 , C_4 , C_5 e C_6 escritos em termos de C_2 como fizemos acima.

5.7.4 A forma das soluções de spin up e down com $E^2 - m^2 c^4 > 0$

Seguindo os passos dos casos anteriores, podemos mostrar que se estamos pensando na solução de projeção de spin up, temos que

$$\zeta_u(z) = \begin{cases} \tilde{\zeta}_1(z) = C_2 \frac{\hbar c \operatorname{Re}(\xi) \sqrt{a}}{E + mc^2} e^{-i\sqrt{a}z} & \text{para } z < -l, \\ \tilde{\zeta}_2(z) = \frac{1}{2} \frac{\hbar c \operatorname{Re}(\xi) \sqrt{b^2 + 4a}}{E + mc^2} (C_4 e^{\frac{i}{2}(b-\sqrt{b^2+4a})z} - C_3 e^{\frac{i}{2}(b+\sqrt{b^2+4a})z}) & \text{para } -l < z < l, \\ \tilde{\zeta}_3(z) = \frac{\hbar c \operatorname{Re}(\xi) \sqrt{a}}{E + mc^2} (C_6 e^{-i\sqrt{a}z} - C_5 e^{i\sqrt{a}z}) & \text{para } z > l. \end{cases} \quad (5.124)$$

Então, dos resultados (5.123) e (5.124), o espinor com projeção de **spin up** que satisfaz a equação de Dirac modificada é

$$\psi_u(z, t) = \begin{pmatrix} \chi(z) \\ \zeta(z) \end{pmatrix} e^{-iEt/\hbar} = \begin{pmatrix} \chi_u(z) \\ 0 \\ \zeta_u(z) \\ 0 \end{pmatrix} e^{-iEt/\hbar}. \quad (5.125)$$

Dum procedimento verdadeiramente análogo, podemos mostrar que para a projeção de spin down teremos

$$\begin{aligned}
 \zeta_d(z) = -\zeta_u(z) = \\
 = \begin{cases} \tilde{\zeta}_1(z) = -C_2 \frac{\hbar c \operatorname{Re}(\xi) \sqrt{a}}{E + mc^2} e^{-i\sqrt{a}z} & \text{para } z < -l, \\ \tilde{\zeta}_2(z) = \frac{1}{2} \frac{\hbar c \operatorname{Re}(\xi) \sqrt{b^2 + 4a}}{E + mc^2} (C_3 e^{\frac{i}{2}(b+\sqrt{b^2+4a})z} - C_4 e^{\frac{i}{2}(b-\sqrt{b^2+4a})z}) & \text{para } -l < z < l, \\ \tilde{\zeta}_3(z) = \frac{\hbar c \operatorname{Re}(\xi) \sqrt{a}}{E + mc^2} (C_5 e^{i\sqrt{a}z} - C_6 e^{-i\sqrt{a}z}) & \text{para } z > l. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{5.126}$$

Assim sendo, a partir dos resultados (5.123) e (5.126) vemos que o espinor com projeção de **spin down** que satisfaz a equação de Dirac modificada é

$$\psi_d(z, t) = \begin{pmatrix} \chi(z) \\ \zeta(z) \end{pmatrix} e^{-iEt/\hbar} = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_d(z) \\ 0 \\ \zeta_d(z) \end{pmatrix} e^{-iEt/\hbar}. \tag{5.127}$$

5.8 Solução para o segundo caso de $f(x)$

Neste caso temos

$$f(x) = \frac{f_0}{\sqrt{\pi\sigma}} e^{-z^2/4\sigma}. \tag{5.128}$$

A maneira de calcular a solução para equação de Dirac modificada (5.59) para este caso é bastante similar ao caso anterior. A diferença é que a consideração do efeito físico de $f(x)$ limitado numa região em torno de $z = 0$ nos levará a uma potencia quadrática de z , e não linear como no caso anterior. Então, de forma a não alongar demais este capítulo, apresentamos estes cálculos e seus resultados no Apêndice G.

Capítulo 6

Considerações finais

Essa parte final é dedicada a uma reflexão geral sobre o texto que se encerra. Mais do que fazer apenas uma retrospectiva de tudo, interessante seria apresentar uma crítica que levanta os pontos positivos e negativos de todo o trabalho, sem esquecer, é claro, de deixar registrado as expectativas de trabalhos que seguirão a partir deste. Nessa linha de pensamento, ressaltar a importância do Capítulo 1 é inevitável. Neste Capítulo buscamos dar uma contextualização forte, desde as discussões embrionárias até ideias mais contemporâneas, sobre a evolução das ideias que permeiam a discussão de possíveis cenários em que a simetria de Lorentz pode vir a ser violada por uma motivação, ou outra. A importância levantada reside no fato de que qualquer pessoa que virá a se inserir na área, terá em mãos um texto conciso onde as principais referências foram registradas e contextualizadas.

No Capítulo 2, nada de muito original fora apresentado, já que a motivação do modelo de Carroll-Field-Jackwi supersimétrico com a presença do termo de minxing entre o fóton e o fotino apresentado, bem como a exploração detalhada do mesmo, foi um dos pontos abordados na tese de doutorado de L. G. D. Bernald [39]. Mas o que fugiu do escopo da tese e foi abordado no Capítulo 2, foi o cálculo do levantamento da degenerescência do espectro de massa do fóton e do fotino. Este é um resultado forte e bastante bonito. A partir deste resultado, seguindo a visão adotada pelo grupo do CBPF, tornou-se perceptível que a quebra da simetria de Lorentz anterior, isto é, em escalas de energias mais altas, causa uma quebra da supersimetria.

Os Capítulos 3 e 4 também carecem de originalidade e soam, para quem é da área há bastante tempo, bastante repetitivos. Mas ainda assim, resultados elegantes foram obtidos. Estes Capítulos vêm de indução gerada pelo Capítulo 2, no sentido de que todo o contexto do Capítulo 2 nos inspirou a estudar mais a fundo cenários onde encontramos generalizações da equação de Dirac por termos que violam a simetria de Lorentz. Como destacado no Capítulo 3, há uma literatura rica para este tipo de situações, mas não é costumeiro encontrar, em razão do surgimento de matemáticas impraticáveis, uma discussão que leva em consideração

muitos termos ao mesmo tempo, focando-se sempre em casos especiais de casos mais gerais. Nesse sentido, no Capítulo 3 fez-se um grande esforço para cercar os resultados mais gerais possíveis. Como uma forma de seguimento imediato deste esforço, interessante seria ir para além desta discussão abeliana, e promover estas discussões para um cenário onde os neutrinos e os quarks sejam indispensáveis para a descrição física. Mas, devido breve intervalo de tempo de trabalho de um Mestrado, essas discussões terão de fazer parte de esforços futuros. Um gosto amargo é deixado porque, apesar de que o caráter generalista dos resultados do Capítulo 3, estes falham para escrita do espectro de energias de algumas situações que seriam bastante interessante, o que caracteriza uma impossibilidade de investigação das soluções da equação de Dirac modificada e, portanto, das fenomenologias que daí devam emergir. Assim sendo, um caso especial, mas não menos importante e interessante, foi considerado no Capítulo 4. E dentro deste contexto, o paradoxo de Klein e o fenômeno *Zitterbewegung* foram revisitados de forma bastante convincente e elegante.

O Capítulo 5 é ponto mais original do texto e que merece olhares mais cuidadosos na obtenção de resultados aplicáveis e publicáveis no futuro próximo. Inspirado pelo citado trabalho de Hiroki Ise e Naoto Nagaosa, datado de 2012 [50], buscou-se desenvolver uma proposta de modelo que leva em consideração as consequências da assimetria entre o espaço e o tempo na equação de Dirac advinda de um parâmetro ξ , que depende das coordenadas espaço-temporais e multiplica a derivada especial. Mais uma vez, a impressão que fica é talvez o capítulo pequeno no quesito repetição, mas devido a origem de sua inspiração, o estudo de isolantes topológicos, este merece a implementação de algum procedimento para investigação de algum sistema físico da matéria condensada. Além disso, esforços futuros deverão ir além deste cenário abeliano, partindo para uma tentativa de entender melhor como essa assimetria afetaria os neutrinos, os quarks e suas interações, são indispensáveis.

Apêndice A

Álgebra das matrizes Gama

Para desenvolver os resultados deste Apêndice, partimos da proposta de Dirac para uma equação diferencial de primeira ordem no espaço e no tempo, que fosse capaz, entre outras coisas, de resolver problemas advindos da equação de Klein-Gordon relacionados com a não obtenção de uma densidade de probabilidades positivo-definida e soluções as quais a energia não é limitada por baixo,

$$\sum_{\bar{i}} [i\hbar(\gamma^\mu)_{\bar{i}\bar{i}} \partial_\mu - mc\mathbb{1}_{\bar{i}\bar{i}}] \psi_{\bar{i}}(x) = 0. \quad (\text{A.1})$$

Em que a priori encaramos $\psi_{\bar{i}}(x)$ com um vetor com uma dimensão arbitrária d e, por tanto, as matrizes $(\gamma^\mu)_{\bar{i}\bar{i}}$ devem ser vistas como matrizes $d \times d$ dimensionais. Com estas considerações, o objeto $\mathbb{1}_{\bar{i}\bar{i}}$ deve descrever a matriz identidade $d \times d$ que pode, portanto, ser escrita na forma de uma delta de Kronecker com a forma $\delta_{\bar{i}\bar{i}}$. O índice μ é um índice espaço-temporal tal que $\mu = 0, 1, 2, 3$.

A equação de Dirac, por premissa, através de algum processo iterativo deve resgar a relação de dispersão relativística, o que é equivalente a resgatar a forma da equação de Klein-Gordon. Sendo assim, omitindo por hora os índices matriciais na matriz de Dirac, podemos obter este resultado através de

$$\begin{aligned} (i\hbar\gamma^\mu \partial_\mu + mc)(i\hbar\gamma^\nu \partial_\nu - mc) \psi(x) &= 0 \\ \left(-\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi(x) &= 0 \\ \left(\frac{\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu}{2} \partial_\mu \partial_\nu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \mathbb{1} \right) \psi &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Nesse sentido, para que o resultado acima tenha a mesma forma da equação de Klein-Gordon, temos que ter como satisfeito que

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta_{\mu\nu} \mathbb{1}, \quad (\text{A.3})$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é o tensor métrico do espaço de Minkowski, $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. A expressão (A.3) é a expressão que define a álgebra de Clifford do espaço de Minkowski. A partir da Álgebra de Clifford, podemos estudar que serão as matrizes gama que aparecem da equação de Dirac.

As primeiras restrições que a Álgebra de Clifford nos impõe sobre as matrizes gama são tais que

$$(\gamma^0)^2 = +\mathbb{1}, \quad (\text{A.4})$$

$$(\gamma^i)^2 = -\mathbb{1}. \quad (\text{A.5})$$

Dai segue então que os autovalores de γ^0 e γ^i são tais que

$$\gamma^0 v = \lambda v \Rightarrow (\gamma^0)^2 v = \lambda^2 v \Rightarrow \lambda = \pm 1, \quad (\text{A.6})$$

$$\gamma^i u = \lambda u \Rightarrow (\gamma^i)^2 u = \lambda^2 u \Rightarrow \lambda = \pm i. \quad (\text{A.7})$$

Estes resultados nos sugerem, na base dos autovetores, que

$$(\gamma^0)^\dagger = +\gamma^0, \quad (\text{A.8})$$

$$(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i. \quad (\text{A.9})$$

Essas propriedades valendo na base dos autovetores, nos garantem a sua validade em qualquer base. Então, de forma geral, podemos resumir estas propriedades em uma única forma, dada por

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0. \quad (\text{A.10})$$

Podemos restringir ainda mais a forma das matrizes gama se tomamos o determinante do produto de duas delas, $\det(\gamma^\mu \gamma^\nu)$, com $\mu \neq \nu$ e mantendo em mente que a priori estamos num espaço onde as matrizes gama são $d \times d$ dimensionais, ou seja,

$$\begin{aligned} \det(\gamma^\mu \gamma^\nu) &= \det(-\gamma^\nu \gamma^\mu) = (-1)^d \det(\gamma^\nu \gamma^\mu) = (-1)^d \det(\gamma^\nu) \det(\gamma^\mu) = \\ &= (-1)^d \det(\gamma^\mu) \det(\gamma^\nu) = (-1)^d \det(\gamma^\mu \gamma^\nu). \end{aligned}$$

Portando,

$$\det(\gamma^\mu \gamma^\nu) = (-1)^d \det(\gamma^\mu \gamma^\nu). \quad (\text{A.11})$$

Assim, para satisfazer a relação acima, temos que que d deve ser par. Tendo essa restrição, podemos descartar de imediato a possibilidade de trabalhar com $d = 0$, uma vez que isso no levaria a trabalhar com escalares ao invés de matrizes. Também podemos descartar a possibilidade de $d = 2$, porque a Álgebra de Clifford exige que tenhamos, neste contexto, quatro matrizes que anti-comutam entre si, e se estamos a trabalhar com matrizes 2×2 , só teremos três matrizes que anti-comutam entre si. Portanto, a dimensão mínima que podemos tomar

para d é quatro. As dimensões mais altas são possíveis, mas devemos manter em mente a ideia de que estamos interessados em trabalhar com possíveis representações irredutíveis do grupo de Lorentz, grupo formado pelo conjunto de transformações lineares que deixam o tensor métrico do espaço de Minkowski invariante, de forma que se nos propomos a trabalhar com uma dimensão maior, sem necessidade porque podemos trabalhar com matrizes 4×4 , estamos nos afastando da possibilidade de estarmos trabalhando com representações irredutíveis. Por essa razão, vamos trabalhar com $d = 4$.

O conjunto das quatro matrizes γ^μ , 4×4 , que satisfazem a Álgebra de Clifford possuem representações diversas. São de interesse físico as seguintes

- **Representação de Dirac**

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_{2 \times 2} \end{pmatrix}; \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

Onde σ^i são as matrizes de Pauli.

- **Representação de Weyl**

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{2 \times 2} \\ \mathbb{1}_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.13})$$

- **Representação de Majorana**

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} i\sigma^3 & 0 \\ 0 & i\sigma^3 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \gamma^3 = \begin{pmatrix} -i\sigma^1 & 0 \\ 0 & -i\sigma^1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.14})$$

De tal forma que as discussões que realizarmos a partir daqui levarão à resultados completamente equivalentes independentemente da representação das matrizes gama que adotarmos.

A.1 A covariância da equação de Dirac

Ao submeter a equação de Dirac a um dos princípio da relatividade restrita, a covariância relativística, isto é, estudar o comportamento da equação de Dirac sob o ponto de vista duma transformação de Lorentz e verificar se há invariância de forma na mudança de um referencial inercial para outro, poderemos obter mais propriedades das matrizes gama. De forma geral, veremos que a partir da forma explicita de como a equação de Dirac se transformam poderemos escrever os geradores do grupo de Lorentz em termos das matrizes gama.

Sendo assim, digamos que num certo referencial inercial S temos a equação de Dirac sob a forma

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{mc}{\hbar} \right) \psi(x) = 0, \quad (\text{A.15})$$

de tal maneira que se a equação de Dirac for covariante, num outro referencial inercial S' deveríamos escrever que

$$\left(i\gamma^\mu\partial'_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi'(x') = 0. \quad (\text{A.16})$$

Então, se desejamos entender de forma explicita a relação da equação de Dirac na passagem de S para S' , devemos compreender também como $\psi(x)$ se transforma do ponto de vista duma transformação de Lorentz. Por essa razão, criamos a hipótese de $\psi(x)$ se transforma de tal maneira que

$$\psi'_i(x') = \sum_{\bar{l}} D_{i\bar{l}}(\Lambda)\psi_{\bar{l}}(x), \quad (\text{A.17})$$

em que $D_{i\bar{l}}(\Lambda)$, Λ sendo a forma explicita da representação do grupo de Lorentz no espaço de Minkowski, é alguma representação do grupo de Lorentz. Então precisamos encontrar quais são os geradores do grupo de Lorentz nesta representação. Faremos isso estudando qual o efeito desta hipótese na covariância da equação de Dirac. Sendo assim, os efeitos da equação (A.17) na equação (A.16), e lembrando que ∂_μ se transforma perante transformações de Lorentz como um quadri-vetor covariante, ou seja, $\partial'_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu$, serão tais que

$$\left(i\gamma^\mu\partial'_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi'(x') = \left[i\gamma^\mu(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu - \frac{mc}{\hbar}\right]D_{i\bar{l}}(\Lambda)\psi_{\bar{l}}(x) = 0. \quad (\text{A.18})$$

Para começar a mostrar que o lado direito da equação acima é igual ao lado esquerdo da equação (A.15), multiplica à esquerda da equação acima por $D^{-1}(\Lambda)$, em que omitiremos por hora os índices da representação do grupo de Lorentz sobre o espaço que define ψ para não carregar demais a notação, teremos

$$D^{-1}(\Lambda)\left[i\gamma^\mu(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu - \frac{mc}{\hbar}\right]D(\Lambda)\psi(x) = \left[iD^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda)(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu - \frac{mc}{\hbar}\right]\psi(x) = 0. \quad (\text{A.19})$$

Como estamos buscando a covariância relativística, temos que ter por satisfeito que

$$D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda)(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu = \gamma^\nu. \quad (\text{A.20})$$

Multiplicando este resultado à esquerda por $\Lambda^\alpha{}_\nu$, vem que

$$\begin{aligned} D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda)\Lambda^\alpha{}_\nu(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu &= \Lambda^\alpha{}_\nu\gamma^\nu \\ D^{-1}(\Lambda)\gamma^\alpha D(\Lambda) &= \Lambda^\alpha{}_\beta\gamma^\beta. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Para avançar, vamos nos restringir a transformações de Lorentz próprias e ortócronas, mantendo sempre em mente que o grupo de Lorentz inteiro pode ser construído aplicando transformações de paridade, reversão temporal e produtos destas duas em transformações próprias e ortócronas. Uma vez que transformações de Lorentz próprias e ortócronas são

conexas por conterem a identidade, podemos propor que a forma da representação $D(\Lambda)$ é tal que seus elementos de dão por

$$D_{\bar{U}}(\Lambda) = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\Sigma_{\bar{U}}^{\mu\nu}\right), \quad (\text{A.22})$$

com $\omega_{\mu\nu}$ sendo os seis parâmetros do grupo de Lorentz e $\Sigma^{\mu\nu}$ sendo os seis geradores. Tomando uma transformação infinitesimal de Lorentz, a equação (A.21) toma a forma

$$\left(1 + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}\right)\gamma^\alpha \left(1 - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}\right) = \left(\delta^\alpha_\beta + \omega^\alpha_\beta\right)\gamma^\beta, \quad (\text{A.23})$$

o que nos leva a escrever, desconsiderando termos de segunda ordem nos parâmetros do grupo,

$$\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}[\Sigma^{\mu\nu}, \gamma^\alpha] = \omega_{\mu\nu}\eta^{\mu\alpha}\delta^\nu_\beta\gamma^\beta = \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\left(\eta^{\mu\alpha}\delta^\nu_\beta - \eta^{\nu\alpha}\delta^\mu_\beta\right)\gamma^\beta. \quad (\text{A.24})$$

De forma que para a equação de Dirac ser covariante, os geradores da representação do grupo de Lorentz que transforma ψ devem satisfazer o vínculo

$$i[\Sigma^{\mu\nu}, \gamma^\alpha] = \left(\eta^{\mu\alpha}\delta^\nu_\beta - \eta^{\nu\alpha}\delta^\mu_\beta\right)\gamma^\beta. \quad (\text{A.25})$$

Trabalhando o lado direito deste vínculo, teremos

$$\begin{aligned} \left(\eta^{\mu\alpha}\delta^\nu_\beta - \eta^{\nu\alpha}\delta^\mu_\beta\right)\gamma^\beta &= \eta^{\mu\alpha}\gamma^\nu - \eta^{\nu\alpha}\gamma^\mu \\ &= \frac{1}{2}(\{\gamma^\mu, \gamma^\alpha\}\gamma^\nu - \{\gamma^\nu, \gamma^\alpha\}\gamma^\mu) \\ &= \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu + \gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\mu - \gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma^\mu) \\ &= \frac{1}{2}(\gamma^\alpha[\gamma^\mu, \gamma^\nu] - \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha + 2\eta^{\alpha\nu}\gamma^\mu + \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\alpha - 2\eta^{\mu\alpha}\gamma^\nu) \\ &= \frac{1}{2}([\gamma^\alpha, [\gamma^\mu, \gamma^\nu]] - 2i[\Sigma^{\mu\nu}, \gamma^\alpha]). \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Com este resultado, o vínculo toma a forma

$$i[\Sigma^{\mu\nu}, \gamma^\alpha] = -\frac{1}{4}[[\gamma^\mu, \gamma^\nu], \gamma^\alpha], \quad (\text{A.27})$$

o que nos permite escrever

$$\Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (\text{A.28})$$

Então, se os geradores da representação $D(\Lambda)$ obedecerem a relação acima, teremos que a equação de Dirac é covariante.

A.2 A matriz γ_5

É bastante útil, tanto dum ponto de vista da álgebra de Clifford quanto dum ponto de vista físico, definir a seguinte matriz

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \quad (\text{A.29})$$

Uma outra forma bastante conveniente de escrever a matriz γ_5 é tal que

$$\gamma_5 = \frac{i}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\kappa \gamma^\lambda. \quad (\text{A.30})$$

É imediato mostrar que γ_5 é hermitiana, pois

$$\begin{aligned} \gamma_5^\dagger &= (i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)^\dagger = -i(\gamma^3)^\dagger(\gamma^2)^\dagger(\gamma^1)^\dagger(\gamma^0)^\dagger = \\ &= i\gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^0 = -i\gamma^0\gamma^3\gamma^2\gamma^1 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^3\gamma^2 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma_5. \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Seus autovalores são iguais a ± 1 , pois

$$\begin{aligned} \gamma_5^2 &= (i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)(i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3) = (\gamma^0)^2\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = (\gamma^1)^2\gamma^2\gamma^3\gamma^2\gamma^3 = \\ &= (\gamma^2)^2(\gamma^3)^2 = \mathbb{1}_{4 \times 4}. \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

γ_5 anti-comuta com todas as matrizes gama

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0. \quad (\text{A.33})$$

A.3 Propriedades algébricas das matrizes Gama

Das sessões anteriores vimos que

$$\Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu], \quad (\text{A.34})$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \quad (\text{A.35})$$

e

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0. \quad (\text{A.36})$$

Abrindo (A.34) e (A.35) e somando, podemos mostrar que o produto de duas matrizes gama é tal que

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = \eta^{\mu\nu} - 2i\Sigma^{\mu\nu}. \quad (\text{A.37})$$

Para construir o produto de três matrizes gama, tomamos a forma geral que a anti-simetrização que um tensor genérico, K , a n índices, tem de obedecer

$$K^{[\mu_1\mu_2\mu_3\cdots\mu_n]} = \frac{1}{n!} \delta_{\nu_1\nu_2\nu_3\cdots\nu_n}^{\mu_1\mu_2\mu_3\cdots\mu_n} K^{\nu_1\nu_2\nu_3\cdots\nu_n}, \quad (\text{A.38})$$

com o símbolo $\delta_{\nu_1\nu_2\nu_3\cdots\nu_n}^{\mu_1\mu_2\mu_3\cdots\mu_n}$ fazendo o papel de um delta de Kronecker generalizada para quatro dimensões. Se nos restringimos ao caso especial em que vamos considerar um tensor a três índices definido de tal forma que este é escrito na forma

$$M^{\kappa\mu\nu} = 6\gamma^\kappa\gamma^\mu\gamma^\nu. \quad (\text{A.39})$$

Aplicando a definição (A.38) em (A.39), vem que

$$\begin{aligned} M^{[\kappa\mu\nu]} &= \frac{1}{6} \delta_{\lambda\theta\rho}^{\kappa\mu\nu} M^{\lambda\theta\rho} \\ &= \frac{6}{6} \delta_{\lambda\theta\rho}^{\kappa\mu\nu} \gamma^\lambda \gamma^\theta \gamma^\rho, \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

com o símbolo $\delta_{\lambda\theta\rho}^{\kappa\mu\nu}$ sendo tal que

$$\delta_{\lambda\theta\rho}^{\kappa\mu\nu} = \det \begin{pmatrix} \delta_\lambda^\kappa & \delta_\theta^\kappa & \delta_\rho^\kappa \\ \delta_\lambda^\mu & \delta_\theta^\mu & \delta_\rho^\mu \\ \delta_\lambda^\nu & \delta_\theta^\nu & \delta_\rho^\nu \end{pmatrix} = -\varepsilon^{\kappa\mu\nu\alpha} \varepsilon_{\lambda\theta\rho\alpha}. \quad (\text{A.41})$$

Então, portanto,

$$\begin{aligned} M^{[\kappa\mu\nu]} &= -\varepsilon^{\kappa\mu\nu\alpha} \varepsilon_{\lambda\theta\rho\alpha} \gamma^\lambda \gamma^\theta \gamma^\rho = -\varepsilon^{\kappa\mu\nu\alpha} \mathbb{1}_{4 \times 4} \varepsilon_{\lambda\theta\rho\alpha} \gamma^\lambda \gamma^\theta \gamma^\rho \\ &= -\frac{1}{4} \varepsilon^{\kappa\mu\nu\alpha} \delta_\alpha^\alpha \varepsilon_{\lambda\theta\rho\alpha} \gamma^\lambda \gamma^\theta \gamma^\rho = i^2 \frac{6}{4!} \varepsilon^{\kappa\mu\nu\alpha} \gamma_\alpha \gamma_\alpha \varepsilon_{\lambda\theta\rho\alpha} \gamma^\lambda \gamma^\theta \gamma^\rho \\ &= (6i \gamma_\alpha \varepsilon^{\kappa\mu\nu\alpha}) \left(\frac{i}{4!} \varepsilon_{\alpha\lambda\theta\rho} \gamma^\alpha \gamma^\lambda \gamma^\theta \gamma^\rho \right) = 6i \varepsilon^{\kappa\mu\nu\alpha} \gamma_\alpha \gamma_5. \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

Por outro lado, se tomamos a forma explícita do determinante em (A.41), teremos que

$$\begin{aligned} M^{[\kappa\mu\nu]} &= \gamma^\kappa \gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\kappa \gamma^\nu \gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma^\kappa \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\kappa \gamma^\mu + \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\kappa - \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\kappa \\ &= 2\eta^{\mu\kappa} \gamma^\nu + 2\eta^{\nu\kappa} \gamma^\mu + 2\eta^{\mu\nu} \gamma^\kappa - 2\gamma^\kappa \gamma^\nu \gamma^\mu - 2\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\kappa - 2\gamma^\mu \gamma^\kappa \gamma^\nu \\ &= 2\eta^{\mu\kappa} \gamma^\nu + 2\eta^{\nu\kappa} \gamma^\mu - 6\eta^{\mu\nu} \gamma^\kappa - 2\gamma^\mu \gamma^\kappa \gamma^\nu + 2\gamma^\kappa \gamma^\mu \gamma^\nu + 2\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\kappa \\ &= 6\eta^{\mu\kappa} \gamma^\nu - 6\eta^{\mu\nu} \gamma^\kappa + 6\eta^{\nu\kappa} \gamma^\mu - 6\gamma^\mu \gamma^\kappa \gamma^\nu. \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

Sendo assim, (A.42) e (A.43) devem ser iguais, o que nos leva a escrever

$$6\gamma^\mu \gamma^\kappa \gamma^\nu = 6\eta^{\mu\kappa} \gamma^\nu - 6\eta^{\mu\nu} \gamma^\kappa + 6\eta^{\nu\kappa} \gamma^\mu - 6i \varepsilon^{\mu\kappa\nu\alpha} \gamma_\alpha \gamma_5. \quad (\text{A.44})$$

Então, o produto de três matrizes gama é tal que

$$\boxed{\gamma^\mu \gamma^\kappa \gamma^\nu = \eta^{\mu\kappa} \gamma^\nu - \eta^{\mu\nu} \gamma^\kappa + \eta^{\nu\kappa} \gamma^\mu + i \varepsilon^{\mu\kappa\nu\alpha} \gamma_\alpha \gamma_5.} \quad (\text{A.45})$$

A partir deste resultado podemos mostrar que

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \Sigma^{\nu\kappa} &= \frac{i}{4} \gamma^\mu (\gamma^\nu \gamma^\kappa - \gamma^\kappa \gamma^\nu) \\ &= \frac{i}{4} (\eta^{\mu\nu} \gamma^\kappa - \eta^{\mu\kappa} \gamma^\nu + \eta^{\nu\kappa} \gamma^\mu + i \varepsilon^{\mu\nu\kappa\alpha} \gamma_\alpha \gamma_5 - \eta^{\mu\kappa} \gamma^\nu + \eta^{\mu\nu} \gamma^\kappa - \eta^{\nu\kappa} \gamma^\mu - i \varepsilon^{\mu\kappa\nu\alpha} \gamma_\alpha \gamma_5), \end{aligned}$$

portanto,

$$\boxed{\gamma^\mu \Sigma^{\nu\kappa} = \frac{i}{2} (\eta^{\mu\nu} \gamma^\kappa - \eta^{\mu\kappa} \gamma^\nu + i \varepsilon^{\mu\nu\kappa\alpha} \gamma_\alpha \gamma_5).} \quad (\text{A.46})$$

De forma semelhante, podemos mostrar que

$$\boxed{\Sigma^{\mu\nu} \gamma^\kappa = \frac{i}{2} (\eta^{\nu\kappa} \gamma^\mu - \eta^{\mu\kappa} \gamma^\nu + i \varepsilon^{\mu\nu\kappa\alpha} \gamma_\alpha \gamma_5).} \quad (\text{A.47})$$

Como γ_5 anti comuta com todas as matrizes gama, podemos escrever que

$$\gamma_5 \gamma^\mu \Sigma^{\nu\kappa} = -\gamma^\mu \Sigma^{\nu\kappa} \gamma_5 = \frac{i}{2} (\eta^{\mu\kappa} \gamma^\nu \gamma_5 - \eta^{\mu\nu} \gamma^\kappa \gamma_5 - i \varepsilon^{\mu\nu\kappa\alpha} \gamma_\alpha). \quad (\text{A.48})$$

E também

$$\gamma_5 \Sigma^{\mu\nu} \gamma^\kappa = -\Sigma^{\mu\nu} \gamma^\kappa \gamma_5 = \frac{i}{2} (\eta^{\mu\kappa} \gamma^\nu \gamma_5 - \eta^{\nu\kappa} \gamma^\mu \gamma_5 - i \varepsilon^{\mu\nu\kappa\alpha} \gamma_\alpha). \quad (\text{A.49})$$

Outra propriedade bastante interessante e útil que usamos para obter alguns resultados no texto, pode ser obtida a partir do resultado (A.46) de forma a escrever que

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \Sigma^{\kappa\lambda} = \frac{i}{2} (\eta^{\nu\kappa} \gamma^\mu \gamma^\lambda - \eta^{\nu\lambda} \gamma^\mu \gamma^\kappa + i \varepsilon^{\nu\kappa\lambda\alpha} \gamma^\mu \gamma_\alpha \gamma_5), \quad (\text{A.50})$$

$$\gamma^\nu \gamma^\mu \Sigma^{\kappa\lambda} = \frac{i}{2} (\eta^{\mu\kappa} \gamma^\nu \gamma^\lambda - \eta^{\mu\lambda} \gamma^\nu \gamma^\kappa + i \varepsilon^{\mu\kappa\lambda\alpha} \gamma^\nu \gamma_\alpha \gamma_5). \quad (\text{A.51})$$

Subtraindo (A.51) de (A.50), termos que

$$\begin{aligned} \Sigma^{\mu\nu} \Sigma^{\kappa\lambda} &= \frac{i}{4} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) \Sigma^{\kappa\lambda} \\ &= \frac{i}{4} \left[\frac{i}{2} (\eta^{\nu\kappa} \gamma^\mu \gamma^\lambda - \eta^{\nu\lambda} \gamma^\mu \gamma^\kappa + i \varepsilon^{\nu\kappa\lambda\alpha} \gamma^\mu \gamma_\alpha \gamma_5) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{2} (\eta^{\mu\kappa} \gamma^\nu \gamma^\lambda - \eta^{\mu\lambda} \gamma^\nu \gamma^\kappa + i \varepsilon^{\mu\kappa\lambda\alpha} \gamma^\nu \gamma_\alpha \gamma_5) \right] \\ &= \frac{i}{4} \left[\frac{i}{2} \eta^{\nu\kappa} (\eta^{\mu\lambda} - 2i \Sigma^{\mu\lambda}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{2} \eta^{\nu\kappa} (\eta^{\mu\lambda} - 2i \Sigma^{\mu\lambda}) - \frac{i}{2} \eta^{\nu\kappa} (\eta^{\mu\lambda} - 2i \Sigma^{\mu\lambda}) + \frac{i}{2} \eta^{\nu\kappa} (\eta^{\mu\lambda} - 2i \Sigma^{\mu\lambda}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \varepsilon^{\nu\kappa\lambda}{}_\alpha (\eta^{\mu\alpha} - 2i \Sigma^{\mu\alpha}) \gamma_5 + \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\kappa\lambda}{}_\alpha (\eta^{\nu\alpha} - 2i \Sigma^{\nu\alpha}) \gamma_5 \right] \\ &= \frac{1}{4} \eta^{\mu\kappa} \eta^{\nu\lambda} - \frac{1}{4} \eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\kappa} + \frac{i}{4} \eta^{\mu\lambda} \Sigma^{\nu\kappa} - \frac{i}{4} \eta^{\mu\kappa} \Sigma^{\nu\lambda} + \frac{i}{4} \eta^{\nu\kappa} \Sigma^{\mu\lambda} - \frac{i}{4} \eta^{\nu\lambda} \Sigma^{\mu\kappa} - \frac{i}{4} \varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} \gamma_5 + \\ &\quad + \frac{i}{8} \varepsilon^{\mu\kappa\lambda}{}_\alpha \varepsilon^{\rho\sigma\nu\alpha} \Sigma_{\rho\sigma} - \frac{i}{8} \varepsilon^{\nu\kappa\lambda}{}_\alpha \varepsilon^{\rho\sigma\mu\alpha} \Sigma_{\rho\sigma}. \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

Em que

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\mu\kappa\lambda}{}_\alpha \varepsilon^{\rho\sigma\nu\alpha} &= -\det \begin{pmatrix} \eta^{\mu\rho} & \eta^{\mu\sigma} & \eta^{\mu\nu} \\ \eta^{\kappa\rho} & \eta^{\kappa\sigma} & \eta^{\kappa\nu} \\ \eta^{\lambda\rho} & \eta^{\lambda\sigma} & \eta^{\lambda\nu} \end{pmatrix} \\ &= -\eta^{\mu\rho} (\eta^{\kappa\sigma} \eta^{\lambda\nu} - \eta^{\kappa\nu} \eta^{\lambda\sigma}) + \eta^{\mu\sigma} (\eta^{\kappa\rho} \eta^{\lambda\nu} - \eta^{\kappa\nu} \eta^{\lambda\rho}) - \eta^{\mu\nu} (\eta^{\kappa\rho} \eta^{\lambda\sigma} - \eta^{\kappa\sigma} \eta^{\lambda\rho}). \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

E também

$$\varepsilon^{\nu\kappa\lambda}{}_\alpha \varepsilon^{\rho\sigma\mu\alpha} = -\eta^{\nu\rho} (\eta^{\kappa\sigma} \eta^{\lambda\mu} - \eta^{\kappa\mu} \eta^{\lambda\sigma}) + \eta^{\nu\sigma} (\eta^{\kappa\rho} \eta^{\lambda\mu} - \eta^{\kappa\mu} \eta^{\lambda\rho}) - \eta^{\nu\mu} (\eta^{\kappa\rho} \eta^{\lambda\sigma} - \eta^{\kappa\sigma} \eta^{\lambda\rho}). \quad (\text{A.54})$$

Sendo assim, termos que

$$\begin{aligned}
 \Sigma^{\mu\nu}\Sigma^{\kappa\lambda} &= \frac{1}{4}\eta^{\mu\kappa}\eta^{\nu\lambda} - \frac{1}{4}\eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\kappa} + \frac{i}{4}\eta^{\mu\lambda}\Sigma^{\nu\kappa} - \frac{i}{4}\eta^{\mu\kappa}\Sigma^{\nu\lambda} + \frac{i}{4}\eta^{\nu\kappa}\Sigma^{\mu\lambda} - \\
 &\quad - \frac{i}{4}\eta^{\nu\lambda}\Sigma^{\mu\kappa} - \frac{i}{4}\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}\gamma_5 + + \frac{i}{8}\left[-\eta^{\mu\rho}\left(\eta^{\kappa\sigma}\eta^{\lambda\nu} - \eta^{\kappa\nu}\eta^{\lambda\sigma}\right) + \right. \\
 &\quad \left. + \eta^{\mu\sigma}\left(\eta^{\kappa\rho}\eta^{\lambda\nu} - \eta^{\kappa\nu}\eta^{\lambda\rho}\right) - \eta^{\mu\nu}\left(\eta^{\kappa\rho}\eta^{\lambda\sigma} - \eta^{\kappa\sigma}\eta^{\lambda\rho}\right) \right]\Sigma_{\rho\sigma} - \\
 &\quad - \frac{i}{8}\left[-\eta^{\nu\rho}\left(\eta^{\kappa\sigma}\eta^{\lambda\mu} - \eta^{\kappa\mu}\eta^{\lambda\sigma}\right) + \eta^{\nu\sigma}\left(\eta^{\kappa\rho}\eta^{\lambda\mu} - \eta^{\kappa\mu}\eta^{\lambda\rho}\right) - \right. \\
 &\quad \left. - \eta^{\nu\mu}\left(\eta^{\kappa\rho}\eta^{\lambda\sigma} - \eta^{\kappa\sigma}\eta^{\lambda\rho}\right) \right]\Sigma_{\rho\sigma} \\
 &= \frac{1}{4}\eta^{\mu\kappa}\eta^{\nu\lambda} - \frac{1}{4}\eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\kappa} + \frac{i}{4}\eta^{\mu\lambda}\Sigma^{\nu\kappa} - \frac{i}{4}\eta^{\mu\kappa}\Sigma^{\nu\lambda} + \frac{i}{4}\eta^{\nu\kappa}\Sigma^{\mu\lambda} - \frac{i}{4}\eta^{\nu\lambda}\Sigma^{\mu\kappa} - \frac{i}{4}\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}\gamma_5 + \\
 &\quad + \frac{i}{4}\eta^{\nu\kappa}\Sigma^{\mu\lambda} - \frac{i}{4}\eta^{\nu\lambda}\Sigma^{\mu\kappa} + \frac{i}{4}\eta^{\mu\lambda}\Sigma^{\nu\kappa} - \frac{i}{4}\eta^{\mu\kappa}\Sigma^{\nu\lambda}. \tag{A.55}
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\boxed{\Sigma^{\mu\nu}\Sigma^{\kappa\lambda} = \frac{1}{4}\eta^{\mu\kappa}\eta^{\nu\lambda} - \frac{1}{4}\eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\kappa} + \frac{i}{2}\eta^{\mu\lambda}\Sigma^{\nu\kappa} - \frac{i}{2}\eta^{\mu\kappa}\Sigma^{\nu\lambda} + \frac{i}{2}\eta^{\nu\kappa}\Sigma^{\mu\lambda} - \frac{i}{2}\eta^{\nu\lambda}\Sigma^{\mu\kappa} - \frac{i}{4}\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}\gamma_5.} \tag{A.56}$$

A.4 Conjugação de carga das matrizes Gama

De forma geral, independentemente da representação que adotamos para escrever as matrizes gama, a matriz de conjugação de carga, C , é definida de tal a satisfazer

$$-\gamma^\mu = C(\gamma^\mu)^t C^{-1}. \tag{A.57}$$

Embora a forma da definição acima seja a mesma em todas as representações, a forma explícita de C irá depender da representação em questão. Além disso, no espaço de Minkowski $(3+1)D$, a matriz C deve ser unitária

$$C^\dagger C = 1 \tag{A.58}$$

e anti-simétrica

$$C^t = -C. \tag{A.59}$$

Sendo assim, podemos mostrar que

$$\begin{aligned}
 -C^{-1}\Sigma^{\mu\nu}C &= -\frac{i}{4}C^{-1}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]C = -\frac{i}{4}(C^{-1}\gamma^\mu C C^{-1}\gamma^\nu C - C^{-1}\gamma^\nu C C^{-1}\gamma^\mu C) \\
 &= \frac{i}{4}\left[(\gamma^\nu)^t(\gamma^\mu)^t - (\gamma^\mu)^t(\gamma^\nu)^t\right] = \frac{i}{4}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)^t = (\Sigma^{\mu\nu})^t.
 \end{aligned}$$

Ou seja,

$$C^{-1}\Sigma^{\mu\nu}C = -(\Sigma^{\mu\nu})^t. \tag{A.60}$$

A.5 Rearranjamento de Fierz

O conjunto de 16 matrizes, dadas por

$$\Gamma^A = \{\mathbb{1}, \gamma^\mu, \gamma_5, \Sigma^{\mu\nu}, \gamma_5 \gamma^\mu\}, \quad (\text{A.61})$$

formam uma base para todas as matrizes 4×4 . Isto é, qualquer matriz M , 4×4 , pode ser escrita em termos das matrizes deste conjunto. Ou seja,

$$M = f_A \Gamma^A. \quad (\text{A.62})$$

Os coeficientes da combinação linear, f_A , são totalmente especificados se multiplicado essa última igualdade à direita por Γ_B . Mas antes, devemos no atentar ao fato de que o índice embaixo em Γ_B significa tomar as matrizes do conjunto (A.61) sob a perspectiva

$$\Gamma_B = \{\mathbb{1}, \gamma_\mu, \gamma_5, \Sigma_{\mu\nu}, \gamma_\mu \gamma_5\}. \quad (\text{A.63})$$

Portanto,

$$\Gamma_A = (\Gamma^A)^{-1}. \quad (\text{A.64})$$

Assim, vamos ter

$$\begin{aligned} M\Gamma_B &= f_A \Gamma^A \Gamma_B \\ \text{Tr}(M\Gamma_B) &= \text{Tr}(\Gamma^A \Gamma_B) \\ \text{Tr}(M\Gamma_B) &= f_A \text{Tr}(\delta_B^A) \\ \therefore f_B &= \frac{1}{4} \text{Tr}(M\Gamma_B). \end{aligned} \quad (\text{A.65})$$

Então, a matriz geral, M , poderá ser escrita sob a seguinte forma

$$M = \frac{1}{4} \text{Tr}(M\Gamma_A) \Gamma^A. \quad (\text{A.66})$$

Agora se compomos uma matrizes de tal maneira que

$$M_{\alpha\beta} = \bar{\psi}_{\beta 0} \psi_{0\alpha}, \quad (\text{A.67})$$

com $\bar{\psi}_{\beta 0} \psi_{0\alpha} = \bar{\psi} \otimes \psi$, podemos usar (A.66) para escrever

$$M_{\alpha\beta} = \bar{\psi}_{\beta 0} \psi_{0\alpha} = \frac{1}{4} \psi_\omega \bar{\psi}_\theta (\Gamma_A)_{\theta\omega} (\Gamma^A)_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} \bar{\psi}_\theta (\Gamma_A)_{\theta\omega} \psi_\omega (\Gamma^A)_{\alpha\beta}. \quad (\text{A.68})$$

De forma que a prescrição geral do Rearranjamento de Fierz é então

$$b \quad (\text{A.69})$$

Apêndice B

Cálculo da inversa da matriz Ω que advém da equação (2.27)

A tal matriz Ω , que advém da equação (2.27), é determinada de tal maneira que

$$\Omega_{ij} = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}v_k. \quad (\text{B.1})$$

Então, para o cálculo de sua inversa podemos se a seguinte prescrição

$$\Omega^{-1} = \frac{1}{\omega\mathbb{1} + \mathbb{A}} = \frac{1}{\omega(\mathbb{1} + \mathbb{A}/\omega)}, \quad (\text{B.2})$$

em que $\mathbb{1} = \delta_{ij}$ é matriz identidade e $\mathbb{A} = A_{ij} = i\varepsilon_{ijk}v_k$. A partir disso, podemos fazer uso dos resultados advindos do estudo da série geométrica para escrever que

$$\Omega^{-1} = \frac{1}{\omega} \left[\mathbb{1} - \frac{\mathbb{A}}{\omega} + \frac{\mathbb{A}^2}{\omega^2} - \frac{\mathbb{A}^3}{\omega^3} + \frac{\mathbb{A}^4}{\omega^4} + \dots \right]. \quad (\text{B.3})$$

Tendo em mente a identidade

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = (\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}), \quad (\text{B.4})$$

com paciência podemos mostrar que

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^2 &= A_{ij}^2 = A_{ia}A_{aj} = (i\varepsilon_{iak}v_k)(i\varepsilon_{ajl}v_l) \\ &= i^2(\varepsilon_{aki}\varepsilon_{ajl})v_kv_l \\ &= i^2(v_iv_j - v^2\delta_{ij}), \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^3 &= A_{ij}^3 = A_{ia}A_{ab}A_{bj} = (i\varepsilon_{iak}v_k)(i\varepsilon_{abl}v_l)(i\varepsilon_{bjm}v_m) \\ &= i^3(\varepsilon_{aki}\varepsilon_{abl})\varepsilon_{bjm}v_kv_lv_m \\ &= i^3(-v^2\varepsilon_{ijk}v_k), \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{A}^4 &= A_{ij}^4 = A_{ia}A_{ab}A_{bc}A_{cj} = (i\varepsilon_{iak}v_k)(i\varepsilon_{abl}v_l)(i\varepsilon_{bcm}v_m)(i\varepsilon_{cjn}v_n) \\
 &= i^4(\varepsilon_{aki}\varepsilon_{abl})(\varepsilon_{cmb}\varepsilon_{cjn})v_kv_lv_mv_n \\
 &= i^4(-v^2v_iv_j + v^4\delta_{ij}),
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{A}^5 &= A_{ij}^5 = A_{ia}A_{ab}A_{bc}A_{cd}A_{dj} = (i\varepsilon_{iak}v_k)(i\varepsilon_{abl}v_l)(i\varepsilon_{bcm}v_m)(i\varepsilon_{cdn}v_n)(i\varepsilon_{djo}v_o) \\
 &= i^5(\varepsilon_{aki}\varepsilon_{abl})(\varepsilon_{cmb}\varepsilon_{cdn})\varepsilon_{djo}v_kv_lv_mv_nv_o \\
 &= i^5(v^4\varepsilon_{ijk}v_k),
 \end{aligned} \tag{B.8}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{A}^6 &= A_{ij}^6 = A_{ia}A_{ab}A_{bc}A_{cd}A_{de}A_{ej} = (i\varepsilon_{iak}v_k)(i\varepsilon_{abl}v_l)(i\varepsilon_{bcm}v_m)(i\varepsilon_{cdn}v_n)(i\varepsilon_{deo}v_o)(i\varepsilon_{ejp}v_p) \\
 &= i^6(\varepsilon_{aki}\varepsilon_{abl})(\varepsilon_{cmb}\varepsilon_{cdn})(\varepsilon_{eod}\varepsilon_{ejp})v_kv_lv_mv_nv_ov_p \\
 &= i^6(v^6\delta_{ij} + v^4v_iv_j).
 \end{aligned} \tag{B.9}$$

Com estes resultados, podemos generalizar para o caso em temos \mathbb{A}^n , com n inteiro, de forma que a inversa de Ω , escrita na forma da equação (B.3), toma a forma

$$\begin{aligned}
 \Omega_{ij}^{-1} &= \left(\frac{1}{\omega}\delta_{ij} - \frac{i}{\omega^2}\varepsilon_{ijk}v_k - \frac{1}{\omega^3}v_iv_j \right) \left[1 + \left(\frac{v}{\omega} \right)^2 + \left(\frac{v}{\omega} \right)^4 + \left(\frac{v}{\omega} \right)^6 + \dots \right] \\
 &= \left(\frac{1}{\omega}\delta_{ij} - \frac{i}{\omega^2}\varepsilon_{ijk}v_k - \frac{1}{\omega^3}v_iv_j \right) \frac{1}{1 - (v^2/\omega^2)}.
 \end{aligned} \tag{B.10}$$

Então, portanto, temos que

$$\Omega_{ij}^{-1} = \frac{\omega}{\omega^2 - \vec{v}^2}\delta_{ij} - \frac{i}{\omega^2 - \vec{v}^2}\varepsilon_{ijk}v_k - \frac{1}{\omega(\omega^2 - \vec{v}^2)}v_iv_j. \tag{B.11}$$

Apêndice C

Cálculo da inversa do operador D

Dado o operador

$$D = a\mathbb{1} + b\gamma_5 + c_\mu\gamma^\mu + d_\mu\gamma^\mu\gamma_5, \quad (\text{C.1})$$

que define a generalização da equação de Dirac, temos que a estrutura geral para sua inversa pode ser escrita sob a forma do ansatz

$$D^{-1} = x\mathbb{1} + y\gamma_5 + z_\mu\gamma^\mu + w_\mu\gamma^\mu\gamma_5 + t_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}. \quad (\text{C.2})$$

Este é razoável assumindo que x e y sendo parâmetros reais ou complexos, e que

$$\Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (\text{C.3})$$

$$z_\mu = \alpha c_\mu + \beta d_\mu \quad (\text{C.4})$$

$$w_\mu = \xi c_\mu + \lambda d_\mu \quad (\text{C.5})$$

$$t_{\mu\nu} = \rho\theta_{\mu\nu} + 2\tau\tilde{\theta}_{\mu\nu}. \quad (\text{C.6})$$

Com $\alpha, \beta, \xi, \lambda, \rho$ e τ sendo coeficientes reais ou complexos. E temos como definição

$$\theta_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} (c_\mu d_\nu - c_\nu d_\mu) \quad \text{e} \quad \tilde{\theta}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \theta^{\alpha\beta}, \quad (\text{C.7})$$

isto é, $\tilde{\theta}_{\mu\nu}$ é o dual de $\theta_{\mu\nu}$. Nesse sentido, a razoabilidade que afirmamos para este ansatz vem dos fatos de que, em primeiro lugar, as matrizes $\{\mathbb{1}, \gamma_5, \gamma^\mu, \gamma^\mu\gamma_5, \Sigma^{\mu\nu}\}$ consistem num conjunto de 16 matrizes que formam uma base geral na qual toda, e qualquer, matriz 4×4 pode ser escrita, e, em segundo lugar, a forma com que os coeficientes x, y, z_μ, w_μ e $t_{\mu\nu}$ foram escritos, tem como compromisso refletir a estrutura tensorial mais geral possível a ser construída a partir dos coeficientes de D quando estamos a procurar por sua inversa.

Neste cenário, se quisermos determinar por completo a inversa D^{-1} , o conjunto de coeficientes $\{x, y, \alpha, \beta, \xi, \lambda, \rho, \tau\}$ devem ser determinados a partir da exigência de que

$$DD^{-1} = \mathbb{1}. \quad (\text{C.8})$$

Dessa exigência, emerge que

$$DD^{-1} =$$

- Termos proporcionais a a :

$$= a \left(x + y\gamma_5 + \alpha c_\mu \gamma^\mu + \beta d_\mu \gamma^\mu + \xi c_\mu \gamma^\mu \gamma_5 + \lambda d_\mu \gamma^\mu \gamma_5 + \rho \theta_{\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu} + \right. \\ \left. + \tau \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \theta^{\alpha\beta} \Sigma^{\mu\nu} \right) + \quad (\text{C.9})$$

- Termos proporcionais a b :

$$+ b \left(x\gamma_5 + y + \alpha c_\mu \gamma_5 \gamma^\mu + \beta d_\mu \gamma_5 \gamma^\mu + \xi c_\mu \gamma_5 \gamma^\mu \gamma_5 + \lambda d_\mu \gamma_5 \gamma^\mu \gamma_5 + \rho \theta_{\mu\nu} \gamma_5 \Sigma^{\mu\nu} + \right. \\ \left. + \tau \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \theta^{\alpha\beta} \gamma_5 \Sigma^{\mu\nu} \right) + \quad (\text{C.10})$$

- Termos proporcionais a c_μ :

$$+ c_\mu \left(x\gamma^\mu + y\gamma^\mu \gamma_5 + c_\nu \alpha \gamma^\mu \gamma^\nu + d_\nu \beta \gamma^\mu \gamma^\nu + c_\nu \xi \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_5 + d_\nu \lambda \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_5 + \right. \\ \left. + \theta_{\kappa\lambda} \rho \gamma^\mu \Sigma^{\kappa\lambda} + \varepsilon_{\kappa\lambda\alpha\beta} \tau \gamma^\mu \Sigma^{\kappa\lambda} \right) + \quad (\text{C.11})$$

- Termos proporcionais a d_μ :

$$d_\mu \left(x\gamma^\mu \gamma_5 + y\gamma^\mu \gamma_5^2 + c_\nu \alpha \gamma^\mu \gamma_5 \gamma^\nu + d_\nu \beta \gamma^\mu \gamma_5 \gamma^\nu + c_\nu \xi \gamma^\mu \gamma_5 \gamma^\nu \gamma_5 + \right. \\ \left. + d_\nu \lambda \gamma^\mu \gamma_5 \gamma^\nu \gamma_5 + \theta_{\kappa\lambda} \rho \gamma^\mu \gamma_5 \Sigma^{\kappa\lambda} + \varepsilon_{\kappa\lambda\alpha\beta} \tau \gamma^\mu \gamma_5 \Sigma^{\kappa\lambda} \right) = \\ = \mathbb{1}. \quad (\text{C.12})$$

Independentemente da representação que tomamos para as matrizes gama as propriedades

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0, \\ \gamma^\mu \gamma^\nu = \eta^{\mu\nu} - 2i\Sigma^{\mu\nu}, \\ \gamma^\mu \Sigma^{\kappa\lambda} = \frac{i}{2} \eta^{\mu\kappa} \gamma^\lambda - \frac{i}{2} \eta^{\mu\lambda} \gamma^\kappa - \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\kappa\lambda\rho} \gamma_\rho \gamma_5, \\ \gamma_5 \gamma^\mu \Sigma^{\kappa\lambda} = -\frac{i}{2} \eta^{\mu\kappa} \gamma^\lambda \gamma_5 + \frac{i}{2} \eta^{\mu\lambda} \gamma^\kappa \gamma_5 + \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\kappa\lambda\rho} \gamma_\rho, \\ \gamma_5 \Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} \varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} \Sigma_{\kappa\lambda} = \Sigma^{\mu\nu} \gamma_5, \end{array} \right. \quad (\text{C.13})$$

serão válidas, veja por favor o Apêndice A. Assim, o conjunto de identidades

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^{\kappa\lambda\alpha\beta} \varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} = -2 \left(\delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta - \delta_\nu^\alpha \delta_\mu^\beta \right), \\ \varepsilon_{\kappa\lambda\alpha\beta} \varepsilon^{\kappa\lambda\rho\mu} = -2 \left(\delta_\alpha^\rho \eta_{\beta\mu} - \eta_{\alpha\mu} \delta_\beta^\rho \right), \\ \varepsilon_{\kappa\lambda\alpha\beta} \varepsilon^{\kappa\lambda}_{\rho\mu} = -2 \left(\eta_{\alpha\rho} \eta_{\beta\mu} - \eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\rho} \right), \end{array} \right. \quad (\text{C.14})$$

junto das propriedades das matrizes gama, fazem com que o resultado para DD^{-1} se reduza a

$$\begin{aligned}
 DD^{-1} = & \left(xa + ya\gamma_5 + \alpha ac_\mu\gamma^\mu + \beta ad_\mu\gamma^\mu + \xi ac_\mu\gamma^\mu\gamma_5 + \lambda ad_\mu\gamma^\mu\gamma_5 + \rho a\theta_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu} + \right. \\
 & \left. + \tau a\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\theta^{\alpha\beta}\Sigma^{\mu\nu} \right) + \\
 & + \left(xb\gamma_5 + yb - \alpha bc_\mu\gamma_5\gamma^\mu\gamma_5 - \beta bd_\mu\gamma^\mu\gamma_5 - \xi bc_\mu\gamma^\mu - \lambda bd_\mu\gamma^\mu + \right. \\
 & \left. + \frac{i}{2}\rho b\theta^{\kappa\lambda}\varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu} - 2i\tau b\theta_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu} \right) + \\
 & + \left(xc_\mu\gamma^\mu + yc_\mu\gamma^\mu\gamma_5 + \alpha c^2 - 2i\alpha c_\mu c_\nu\Sigma^{\mu\nu} + \beta(c \cdot d) - 2i\beta c_\mu d_\nu\Sigma^{\mu\nu} + \right. \\
 & + \xi c^2\gamma_5 - 2i\xi c_\mu c_\nu\Sigma^{\mu\nu}\gamma_5 + \lambda(c \cdot d)\gamma_5 + \lambda c^\kappa d^\lambda\varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu} + i\rho c^\kappa\theta_{\kappa\mu}\gamma^\mu - \\
 & \left. - \frac{1}{2}\rho c^\kappa\theta^{\lambda\rho}\varepsilon_{\kappa\lambda\rho\mu}\gamma^\mu\gamma_5 + i\tau c^\kappa\theta^{\lambda\rho}\varepsilon_{\kappa\lambda\rho\mu}\gamma^\mu + 2\tau c^\alpha\theta_{\alpha\mu}\gamma^\mu\gamma_5 \right) + \\
 & + \left(xd_\mu\gamma^\mu\gamma_5 + yd_\mu\gamma^\mu - \alpha(c \cdot d)\gamma_5 - \alpha d^\kappa c^\lambda\varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu} - \beta d^2\gamma_5 - \xi(c \cdot d) + \right. \\
 & + 2i\xi d_\mu c_\nu\Sigma^{\mu\nu} - \lambda d^2 + i\rho d^\kappa\theta_{\kappa\mu}\gamma^\mu\gamma_5 - \frac{1}{2}\rho d^\kappa\theta^{\lambda\rho}\varepsilon_{\kappa\lambda\rho\mu}\gamma^\mu + i\tau d^\kappa\theta^{\lambda\rho}\varepsilon_{\kappa\lambda\rho\mu}\gamma^\mu\gamma_5 + \\
 & \left. + 2\tau d^\alpha\theta_{\alpha\mu}\gamma^\mu\gamma_5 \right) = \mathbb{1}. \tag{C.15}
 \end{aligned}$$

Devemos notar que contrações do tipo $c_\mu c_\nu\Sigma^{\mu\nu}$ são ideticamente nulas uma vez que $\Sigma^{\mu\nu}$ é anti-simétrico. Também se anulam, ideticamente, os termos do tipo $c^\kappa\theta^{\lambda\rho}\varepsilon_{\kappa\lambda\rho\mu}$ e $d^\kappa\theta^{\lambda\rho}\varepsilon_{\kappa\lambda\rho\mu}$, uma vez que

$$\frac{1}{2}c^\kappa(c^\lambda d^\rho - c^\rho c^\lambda)\varepsilon_{\kappa\lambda\rho\mu} \equiv 0$$

e

$$\frac{1}{2}d^\kappa(c^\lambda d^\rho - c^\rho c^\lambda)\varepsilon_{\kappa\lambda\rho\mu} \equiv 0.$$

O próximo passo seria coletar os coeficientes de cada matriz da base $\mathbb{1}$, γ_5 , γ^μ , $\gamma^\mu\gamma_5$ e $\Sigma^{\mu\nu}$, lembrando que o coeficiente da identidade é igual a 1, enquanto os demais são iguais a zero. Sendo assim, temos que:

- Coeficiente de $\mathbb{1}$:

$$ax + by + c^2\alpha + (c \cdot d)\beta - (c \cdot d)\xi - d^2\lambda = 1. \tag{C.16}$$

- Coeficiente de γ_5 :

$$bx + ay - (c \cdot d)\alpha - d^2\beta + c^2\xi + (c \cdot d)\lambda = 0. \tag{C.17}$$

- Coeficiente de γ^μ :

$$c_\mu \rightarrow x + a\alpha - b\xi - \frac{i}{2}(c \cdot d)\rho - d^2\tau = 0; \tag{C.18}$$

$$d_\mu \rightarrow y + a\beta - b\lambda + \frac{i}{2}c^2\rho + (c \cdot d)\tau = 0. \tag{C.19}$$

- Coeficiente de $\gamma^\mu \gamma_5$:

$$c_\mu \rightarrow y - b\alpha + a\xi - \frac{i}{2}d^2\rho - (c \cdot d)\tau = 0; \quad (\text{C.20})$$

$$d_\mu \rightarrow x - b\beta + a\lambda + \frac{i}{2}(c \cdot d)\rho + c^2\tau = 0. \quad (\text{C.21})$$

- Coeficiente de $\Sigma^{\mu\nu}$:

Este coeficiente tem dependência em θ e $\tilde{\theta}$, que apesar de serem independentes, misturam representações distintas do grupo de Lorentz. Sendo assim, podemos definir, de forma a explicitar as representações distintas, o seguinte:

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}(\theta_{\mu\nu} + i\tilde{\theta}_{\mu\nu}) \in (1, 0); \quad (\text{C.22})$$

$$W_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}(\theta_{\mu\nu} - i\tilde{\theta}_{\mu\nu}) \in (0, 1). \quad (\text{C.23})$$

Nesses moldes, temos que θ e $\tilde{\theta}$ são escritos na forma

$$\theta = T + W, \quad (\text{C.24})$$

$$\tilde{\theta} = -iT + iW. \quad (\text{C.25})$$

De forma que os coeficientes de $\gamma^\mu \gamma_5$ são proporcionais, de forma independente, a T e W sob a seguinte forma:

$$T \rightarrow -2i\alpha - 2i\beta - 2i\xi - 2i\lambda + (a + b)\rho - 2i(a + b)\tau = 0; \quad (\text{C.26})$$

$$W \rightarrow 2i\alpha - 2i\beta - 2i\xi + 2i\lambda + (a - b)\rho + 2i(a - b)\tau = 0. \quad (\text{C.27})$$

Contudo, as equações (C.16), (C.17), (C.18), (C.19), (C.20), (C.21), (C.26) e (C.27) foram um sistema de oito equações envolvendo as oito variáveis $\{x, y, \alpha, \beta, \xi, \lambda, \rho, \tau\}$ a serem determinadas para que D^{-1} seja completamente determinado. Sendo assim, com ajuda do ferramenta computacional, obtemos que:

$$\begin{aligned} \Delta &= (-a^2 + b^2 + c^2)^2 - 4(c \cdot d)^2 + 2(a^2 - b^2 + c^2)d^2 + d^4 \\ &= [a^2 - b^2 - c^2 + d^2 - 2(c \cdot d)][a^2 - b^2 - c^2 + d^2 + 2(c \cdot d)] + 4c^2d^2; \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

$$x = \frac{a(a^2 - b^2 - c^2 + d^2)}{\Delta}; \quad (\text{C.29})$$

$$y = \frac{-b(a^2 - b^2 - c^2 + d^2)}{\Delta}; \quad (\text{C.30})$$

$$\alpha = \frac{-(a^2 - b^2 - c^2 + d^2)}{\Delta}; \quad (\text{C.31})$$

$$\beta = \frac{-2(c \cdot d)}{\Delta}; \quad (\text{C.32})$$

$$\xi = \frac{2(c \cdot d)}{\Delta}; \quad (\text{C.33})$$

$$\lambda = \frac{-(a^2 - b^2 - c^2 + d^2)}{\Delta}; \quad (\text{C.34})$$

$$\rho = \frac{4ib}{\Delta}; \quad (\text{C.35})$$

$$\tau = \frac{2a}{\Delta}. \quad (\text{C.36})$$

Entes resultados especificam por completo quem é D^{-1} .

C.1 Testando o Resultado

- O primeiro teste é caso do usual operador de Dirac, em que assumimos $a = -m$ e $c_\mu = p_\mu$, levando a $D = (\gamma^\mu p_\mu - m)$. A inversa deste operador é

$$\frac{\gamma^\mu p_\mu + m}{p^2 - m^2}.$$

As condições $a = -m$, $c_\mu = p_\mu$ e $b = d_\mu = 0$ se refletem nos resultados para $\{x, y, \alpha, \beta, \xi, \lambda, \rho, \tau\}$ da seguinte forma

$$z_\mu = \alpha p_\mu, \quad (\text{C.37})$$

$$w_\mu = \xi p_\mu, \quad (\text{C.38})$$

$$\theta_{\mu\nu} = \tilde{\theta}_{\mu\nu} = 0. \quad (\text{C.39})$$

E neste contexto, teremos que

$$x = \frac{-m(m^2 - p^2)}{(p^2 - m^2)^2} = \frac{m}{(p^2 - m^2)}, \quad (\text{C.40})$$

$$\alpha = \frac{-(m^2 - p^2)}{(p^2 - m^2)^2} = \frac{1}{(p^2 - m^2)}, \quad (\text{C.41})$$

$$y = \xi = 0. \quad (\text{C.42})$$

Então, portanto, D^{-1} nas condições $a = -m$ e $c_\mu = p_\mu$, que definem o operador de Dirac, tem a forma

$$D^{-1} = x\mathbb{1} + z_\mu \gamma^\mu = \frac{\gamma^\mu p_\mu + m}{p^2 - m^2}. \quad (\text{C.43})$$

Assim, fica evidente que tivemos êxito no primeiro teste.

- Outro teste viável é fazer $c_\mu = d_\mu = 0$ e $a = b = 1$, o que define

$$D = 1 + \gamma_5,$$

que tem determinante nulo em qualquer representação e por essa razão, não há inversa nesta situação. De fato, nessas condições o determinante, Δ , é singular, pois temos que

$$\Delta = (1 - 1)(1 - 1) = 0. \quad (\text{C.44})$$

Portanto,

$$\nexists D^{-1} \text{ se } c_\mu = d_\mu = 0 \text{ e } a = b = 1. \quad (\text{C.45})$$

- Mais um bom teste, seria considerar $a = 0$ e $d_\mu = 0$, definindo assim

$$D = b\gamma_5 + c_\mu\gamma^\mu,$$

que tem como inversa

$$D^{-1} = \frac{D}{b^2 + c^2}.$$

Nestes moldes, nossos resultados, impondo $a = 0$ e $d_\mu = 0$, levarão a

$$D^{-1} = y\gamma_5 + \alpha c_\mu\gamma^\mu + \xi c_\mu\gamma^\mu\gamma_5, \quad (\text{C.46})$$

de forma que teremos

$$\Delta = (-b^2 - c^2)(-b^2 - c^2) = (b^2 + c^2)^2, \quad (\text{C.47})$$

e, portanto,

$$y = \frac{-b(-b^2 - c^2)}{(b^2 + c^2)^2} = \frac{b}{b^2 + c^2}, \quad (\text{C.48})$$

$$\alpha = \frac{-(-b^2 - c^2)}{(b^2 + c^2)^2} = \frac{1}{b^2 + c^2}, \quad (\text{C.49})$$

$$\xi = 0. \quad (\text{C.50})$$

Assim, podemos claramente ver que a nossa solução para D^{-1} cumpre com excelência mais um teste,

$$D^{-1} = y\gamma_5 + \alpha c_\mu\gamma^\mu = \frac{b}{b^2 + c^2}\gamma_5 + \frac{1}{b^2 + c^2}c_\mu\gamma^\mu = \frac{D}{b^2 + c^2}. \quad (\text{C.51})$$

- Outra possibilidade seria considerar o teste em que $b = 0$ e $c_\mu = 0$, o que define

$$D = a\mathbb{1} + d_\mu\gamma^\mu\gamma_5,$$

que tem como inversa

$$D^{-1} = \frac{a\mathbb{1} - d_\mu\gamma^\mu\gamma_5}{a^2 + d^2}.$$

Novamente sob a perspectiva dos nossos cálculos, temos que a inversa na atual circunstância é dada por

$$D^{-1} = x\mathbb{1} + \beta d_\mu \gamma^\mu + \lambda d_\mu \gamma^\mu \gamma_5, \quad (\text{C.52})$$

e se impomos $b = 0$ e $c_\mu = 0$, vamos ter que

$$\Delta = (a^2 + d^2)(a^2 + d^2) = (a^2 + d^2)^2, \quad (\text{C.53})$$

e também

$$x = \frac{a(a^2 + d^2)}{(a^2 + d^2)^2} = \frac{a}{(a^2 + d^2)}v \quad (\text{C.54})$$

$$\beta = 0, \quad (\text{C.55})$$

$$\lambda = \frac{-(a^2 + d^2)}{(a^2 + d^2)^2} = \frac{-1}{(a^2 + d^2)}. \quad (\text{C.56})$$

Então, mais uma vez, podemos claramente ver que a nossa solução para D^{-1} cumpre outro teste,

$$D^{-1} = \frac{a}{a^2 + d^2}\mathbb{1} - \frac{1}{a^2 + d^2}d_\mu \gamma^\mu \gamma_5 = \frac{a\mathbb{1} - d_\mu \gamma^\mu \gamma_5}{a^2 + d^2}. \quad (\text{C.57})$$

Apêndice D

Cálculo de decomposições de Gordon

D.1 Caso do mixing Fóton-Fotino

Para construir a decomposição de Gordon, devemos multiplicar $\bar{\Lambda}\gamma^\kappa$ à esquerda da equação (2.6), e $\gamma^\kappa\Lambda$ à direita da equação (2.7). Assim, vamos ter

$$i\bar{\Lambda}\gamma^\kappa\gamma^\mu\partial_\mu\Lambda - 2M_1\bar{\Lambda}\gamma^\kappa\Lambda + 2iM_2\bar{\Lambda}\gamma^\kappa\gamma_5\Lambda + \frac{1}{2}R_\mu\bar{\Lambda}\gamma^\kappa\gamma^\mu\gamma_5\Lambda = \sqrt{2}\bar{\Lambda}\gamma^\kappa\Sigma^{\mu\nu}\gamma_5\psi F_{\mu\nu}. \quad (\text{D.1})$$

e também,

$$i\partial_\mu\bar{\Lambda}\gamma^\mu\gamma^\kappa\Lambda + 2M_1\bar{\Lambda}\gamma^\kappa\Lambda - 2iM_2\bar{\Lambda}\gamma_5\gamma^\kappa\Lambda - \frac{1}{2}R_\mu\bar{\Lambda}\gamma^\mu\gamma_5\gamma^\kappa\Lambda = \sqrt{2}\bar{\psi}\Sigma^{\mu\nu}\gamma_5\gamma^\kappa\Lambda F_{\mu\nu}. \quad (\text{D.2})$$

O termo $\bar{\Lambda}\gamma^\kappa\Lambda$ de ser feito igual a ZERO. Isto, pois, uma vez que Λ é espinor de Majorana, devemos ter como satisfeito $(\bar{\Lambda}\gamma^\kappa\Lambda) = (\bar{\Lambda}\gamma^\kappa\Lambda)^T$, e o que temos é que $(\bar{\Lambda}\gamma^\kappa\Lambda) = -(\bar{\Lambda}\gamma^\kappa\Lambda)^T$. Então a condição de Majorana só prevalecerá se $\bar{\Lambda}\gamma^\kappa\Lambda = 0$. Com isso, a subtração do resultado (D.1) do resultado (D.2), chegaremos em

$$i\partial_\mu\bar{\Lambda}\gamma^\mu\gamma^\kappa\Lambda - i\bar{\Lambda}\gamma^\kappa\gamma^\mu\partial_\mu\Lambda + \frac{1}{2}R_\mu\bar{\Lambda}\gamma^\mu\gamma^\kappa\gamma_5\Lambda - \frac{1}{2}R_\mu\bar{\Lambda}\gamma^\kappa\gamma^\mu\gamma_5\Lambda = 0. \quad (\text{D.3})$$

O lado direito é trivial porque uma vez que ψ e Λ são Majorana, o lado direito dos resultado (D.1) do resultado (D.2) são iguais. Com isso, o resultado (D.3) será

$$i\partial_\mu\bar{\Lambda}(\eta^{\mu\kappa} - i2\Sigma^{\mu\kappa})\Lambda - i\bar{\Lambda}(\eta^{\kappa\mu} - i2\Sigma^{\kappa\mu})\partial_\mu\Lambda + \frac{1}{2}R_\mu\bar{\Lambda}(\eta^{\mu\kappa} - i2\Sigma^{\mu\kappa})\gamma_5\Lambda - \frac{1}{2}R_\mu\bar{\Lambda}(\eta^{\kappa\mu} - i2\Sigma^{\kappa\mu})\gamma_5\Lambda = 0. \quad (\text{D.4})$$

Teremos o surgimento de um termo que é $i(\partial^\kappa\bar{\Lambda})\Lambda - i\bar{\Lambda}(\partial^\kappa\Lambda)$, resultando que essa subtração deva ser ZERO, isso mais uma vez em razão da condição de Majorana, que impõe que $(\partial^\kappa\bar{\Lambda})\Lambda = \bar{\Lambda}(\partial^\kappa\Lambda)$. Então, podemos dar continuidade simplesmente escrevendo

$$(\partial_\mu\bar{\Lambda})\Sigma^{\mu\kappa}\Lambda + \bar{\Lambda}\Sigma^{\mu\kappa}(\partial_\mu\Lambda) = iR_\mu\bar{\Lambda}\Sigma^{\mu\kappa}\gamma_5\Lambda. \quad (\text{D.5})$$

Propondo uma transformada de Fourier para escrever esse resultados no espaço dos momentos, virá que

$$\begin{aligned} (p'_\mu + p_\mu)\bar{\Lambda}(p')\Sigma^{\mu\kappa}\Lambda(p) &= R_\mu\bar{\Lambda}(p')\Sigma^{\mu\kappa}\gamma_5\Lambda(p) \\ &= (v_\mu + \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi)\bar{\Lambda}(p')\Sigma^{\mu\kappa}\gamma_5\Lambda(p). \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

Da soma da equação (D.1) e (D.2), escrevemos

$$\begin{aligned} i\bar{\Lambda}\gamma^\kappa\gamma^\mu\partial_\mu\Lambda + i\partial_\mu\bar{\Lambda}\gamma^\mu\gamma^\kappa\Lambda + 4iM_2\bar{\Lambda}\gamma^\kappa\gamma_5\Lambda + \frac{1}{2}R_\mu\{\gamma^\kappa, \gamma^\mu\}\gamma_5\Lambda &= \\ &= \sqrt{2}\bar{\Lambda}\gamma^\kappa\Sigma^{\mu\nu}\gamma_5\psi F_{\mu\nu} + \sqrt{2}\bar{\psi}\Sigma^{\mu\nu}\gamma_5\gamma^\kappa\Lambda F_{\mu\nu} \\ &= \sqrt{2}\bar{\Lambda}\gamma^\kappa\Sigma^{\mu\nu}\gamma_5\psi F_{\mu\nu} + \sqrt{2}\bar{\Lambda}\gamma^\kappa\Sigma^{\mu\nu}\gamma_5\psi F_{\mu\nu} \\ &= 2\sqrt{2}\bar{\Lambda}\gamma^\kappa\Sigma^{\mu\nu}\gamma_5\psi F_{\mu\nu} \\ &= 2\sqrt{2}\bar{\Lambda}\frac{i}{2}\left(\eta^{\kappa\mu}\gamma^\nu - \eta^{\kappa\nu}\gamma^\mu + i\varepsilon^{\kappa\mu\nu\lambda}\gamma_\lambda\gamma_5\right)\gamma_5\psi F_{\mu\nu} \\ &= i\sqrt{2}\bar{\Lambda}\gamma_\nu\gamma_5\psi F^{\kappa\nu} - i\sqrt{2}\bar{\Lambda}\gamma_\mu\gamma_5\psi F^{\mu\kappa} + 2\sqrt{2}\bar{\Lambda}\gamma_\lambda\psi\tilde{F}^{\lambda\kappa} \\ &= -i2\sqrt{2}\bar{\Lambda}\gamma_\mu\gamma_5\psi F^{\mu\kappa} + 2\sqrt{2}\bar{\Lambda}\gamma_\lambda\psi\tilde{F}^{\lambda\kappa} \\ &= -i2\sqrt{2}\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\Lambda F^{\mu\kappa} + 2\sqrt{2}\bar{\Lambda}\gamma_\lambda\psi\tilde{F}^{\lambda\kappa}. \end{aligned}$$

Trabalhando o lado esquerdo deste resultado, vamos ter

$$\begin{aligned} i\bar{\Lambda}(\partial^\kappa\Lambda) + i(\partial^\kappa\bar{\Lambda})\Lambda + 2\bar{\Lambda}\Sigma^{\kappa\mu}(\partial\Lambda) + 2(\partial_\mu\bar{\Lambda})\Sigma^{\mu\kappa}\Lambda + 4iM_2\bar{\Lambda}\gamma^\kappa\gamma_5\Lambda + \frac{1}{2}R^\kappa\bar{\Lambda}\gamma_5\Lambda - \\ - iR_\mu\bar{\Lambda}\Sigma^{\kappa\mu}\gamma_5\Lambda + \frac{1}{2}R^\kappa\bar{\Lambda}\gamma_5\Lambda - iR_\mu\bar{\Lambda}\Sigma^{\mu\kappa}\gamma_5\Lambda = \\ = i\bar{\Lambda}(\partial^\kappa\Lambda) + i(\partial^\kappa\bar{\Lambda})\Lambda + 2\bar{\Lambda}\Sigma^{\kappa\mu}(\partial\Lambda) - 2(\partial_\mu\bar{\Lambda})\Sigma^{\kappa\mu}\Lambda + 4iM_2\bar{\Lambda}\gamma^\kappa\gamma_5\Lambda + R^\kappa\bar{\Lambda}\gamma_5\Lambda. \end{aligned}$$

Contudo, então, podemos escrever

$$\begin{aligned} i\bar{\Lambda}(\partial^\kappa\Lambda) + i(\partial^\kappa\bar{\Lambda})\Lambda + 2\bar{\Lambda}\Sigma^{\kappa\mu}(\partial\Lambda) - 2(\partial_\mu\bar{\Lambda})\Sigma^{\kappa\mu}\Lambda + 4iM_2\bar{\Lambda}\gamma^\kappa\gamma_5\Lambda + R^\kappa\bar{\Lambda}\gamma_5\Lambda = \\ = -i2\sqrt{2}\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\Lambda F^{\mu\kappa} + 2\sqrt{2}\bar{\Lambda}\gamma_\lambda\psi\tilde{F}^{\lambda\kappa}. \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

No espaço dos momento este resultado terá a forma

$$\begin{aligned} (p^\kappa - p'^\kappa)\bar{\Lambda}(p')\Lambda(p) - 2i(p_\mu + p'_\mu)\bar{\Lambda}(p')\Sigma^{\kappa\mu}\Lambda(p) + 4iM_2\bar{\Lambda}(p')\gamma^\kappa\gamma_5\Lambda(p) + R^\kappa\bar{\Lambda}(p')\gamma_5\Lambda(p) = \\ = -i2\sqrt{2}\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\Lambda(p)F^{\mu\kappa} - 2\sqrt{2}\bar{\psi}\gamma_\lambda\Lambda(p')\tilde{F}^{\lambda\kappa}. \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

D.2 Caso da equação de Dirac generalizada

Dada a equação de Dirac estendida na presença de acoplamento mínimo

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc - i\zeta\gamma_5 - \xi_\mu\gamma^\mu - R_\mu\gamma^\mu\gamma_5 - qeA_\mu\gamma^\mu)\psi = 0, \quad (\text{D.9})$$

em que propomos o acoplamento com o campo A_μ por generalidade, seu conjugado de Dirac será

$$i\hbar\left(\partial_\mu\bar{\psi}\right)\gamma^\mu + mc\bar{\psi} + i\zeta\bar{\psi}\gamma_5 + \xi_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu + R_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5 + qeA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu = 0. \quad (\text{D.10})$$

Assim, para efeito de obter a decomposição de Gordon, multiplicamos a equação (D.9) por $\bar{\psi}\gamma^\kappa$ e a equação (D.10) por $\gamma^\kappa\psi$. Dessa forma, obtemos

$$i\hbar\bar{\psi}\gamma^\kappa\gamma^\mu(\partial_\mu\psi) - mc\bar{\psi}\gamma^\kappa\psi - i\zeta\bar{\psi}\gamma^\kappa\gamma_5\psi - \xi_\mu\bar{\psi}\gamma^\kappa\gamma^\mu\psi - R_\mu\bar{\psi}\gamma^\kappa\gamma^\mu\gamma_5\psi - qeA_\mu\bar{\psi}\gamma^\kappa\gamma^\mu\psi = 0 \quad (D.11)$$

e

$$i\hbar(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\gamma^\kappa\psi + mc\bar{\psi}\gamma^\kappa\psi - i\zeta\bar{\psi}\gamma^\kappa\gamma_5\psi + \xi_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^\kappa\psi - R_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^\kappa\gamma_5\psi + qeA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^\kappa\psi = 0. \quad (D.12)$$

Subtraindo o resultado (D.11) do resultado (D.12), teremos

$$i\hbar(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\gamma^\kappa\psi - i\hbar\bar{\psi}\gamma^\kappa\gamma^\mu(\partial_\mu\psi) + 2mc\bar{\psi}\gamma^\kappa\psi + \xi_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^\kappa\psi + \xi_\mu\bar{\psi}\gamma^\kappa\gamma^\mu\psi - R_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^\kappa\gamma_5\psi + R_\mu\bar{\psi}\gamma^\kappa\gamma^\mu\gamma_5\psi + qeA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^\kappa\psi + qeA_\mu\bar{\psi}\gamma^\kappa\gamma^\mu\psi = 0,$$

expandindo,

$$i\hbar(\partial_\mu\bar{\psi})(\eta^{\mu\kappa} - 2i\Sigma^{\mu\kappa})\psi - i\hbar\bar{\psi}(\eta^{\kappa\mu} - 2i\Sigma^{\kappa\mu})(\partial_\mu\psi) + 2mc\bar{\psi}\gamma^\kappa\psi + \xi_\mu\bar{\psi}(\eta^{\mu\kappa} - 2i\Sigma^{\mu\kappa})\psi + \xi_\mu(\eta^{\kappa\mu} - 2i\Sigma^{\kappa\mu})\psi - R_\mu\bar{\psi}(\eta^{\mu\kappa} - 2i\Sigma^{\mu\kappa})\gamma_5\psi + R_\mu\bar{\psi}(\eta^{\kappa\mu} - 2i\Sigma^{\kappa\mu})\gamma_5\psi + qeA_\mu\bar{\psi}(\eta^{\mu\kappa} - 2i\Sigma^{\mu\kappa})\psi + qeA_\mu\bar{\psi}(\eta^{\kappa\mu} - 2i\Sigma^{\kappa\mu})\psi = 0,$$

simplificando,

$$i\hbar(\partial^\kappa\bar{\psi})\psi - i\hbar\bar{\psi}(\partial^\kappa\psi) + 2\hbar(\partial_\mu\bar{\psi})\Sigma^{\mu\kappa}\psi + 2\hbar\bar{\psi}\Sigma^{\mu\kappa}(\partial_\mu\psi) + 2mc\bar{\psi}\gamma^\kappa\psi + \xi^\kappa\bar{\psi}\psi + \xi^\kappa\bar{\psi}\psi - 2i\xi_\mu\bar{\psi}\Sigma^{\mu\kappa}\psi + 2i\xi_\mu\bar{\psi}\Sigma^{\mu\kappa}\psi - R^\kappa\bar{\psi}\gamma_5\psi + R^\kappa\bar{\psi}\gamma_5\psi + 2iR_\mu\bar{\psi}\Sigma^{\mu\kappa}\gamma_5\psi + 2iR_\mu\bar{\psi}\Sigma^{\mu\kappa}\gamma_5\psi + eqA^\kappa\bar{\psi}\psi + eqA^\kappa\bar{\psi}\psi - 2ieqA_\mu\bar{\psi}\Sigma^{\mu\kappa}\psi + 2ieqA_\mu\bar{\psi}\Sigma^{\mu\kappa}\psi = 0,$$

então temos que

$$i\hbar(\partial^\kappa\bar{\psi})\psi - i\hbar\bar{\psi}(\partial^\kappa\psi) + 2\hbar(\partial_\mu\bar{\psi})\Sigma^{\mu\kappa}\psi + 2\hbar\bar{\psi}\Sigma^{\mu\kappa}(\partial_\mu\psi) + 2mc\bar{\psi}\gamma^\kappa\psi + 2\xi^\kappa\bar{\psi}\psi + 4iR_\mu\bar{\psi}\Sigma^{\mu\kappa}\gamma_5\psi + 2eqA^\kappa\bar{\psi}\psi = 0. \quad (D.13)$$

No espaço dos momenta, se adotamos a prescrição

$$\psi(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi\hbar)^4} \psi(p)e^{-ipx/\hbar}, \quad (D.14)$$

$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d^4p'}{(2\pi\hbar)^4} \bar{\psi}(p')e^{+ip'x/\hbar}, \quad (D.15)$$

e

$$A^\kappa(k) = \int \frac{d^4k}{(2\pi\hbar)^4} A^\kappa(k)e^{-ikx/\hbar}, \quad (D.16)$$

vamos poder escrever

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{d^4 p' d^4 p}{(2\pi\hbar)^8} \left[- (p'^\kappa + p^\kappa) \bar{\psi}(p') \psi(p) + 2mc \bar{\psi}(p') \gamma^\kappa \psi(p) + 2\xi^\kappa \bar{\psi}(p') \psi(p) + \right. \\
 & \left. + 2i(p'^\kappa - p^\kappa) \bar{\psi}(p') \Sigma^{\mu\kappa} \psi(p) + 4iR_\mu \bar{\psi}(p') \Sigma^{\mu\kappa} \gamma_5 \psi(p) \right] e^{-i(p-p')x/\hbar} + \\
 & + 2eq \int \frac{d^4 p' d^4 p d^4 k}{(2\pi\hbar)^{12}} \bar{\psi}(p') \psi(p) A^\kappa(k) e^{-i(k+p-p')x/\hbar} = 0.
 \end{aligned} \tag{D.17}$$

Multiplicando ambos os lados deste resultado por $e^{-iq'x}$ e integrando todo o resultado em d^4x , teremos

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{d^4 p' d^4 p d^4 x}{(2\pi\hbar)^8} \left[- (p'^\kappa + p^\kappa) \bar{\psi}(p') \psi(p) + 2mc \bar{\psi}(p') \gamma^\kappa \psi(p) + 2\xi^\kappa \bar{\psi}(p') \psi(p) + \right. \\
 & \left. + 2i(p'^\kappa - p^\kappa) \bar{\psi}(p') \Sigma^{\mu\kappa} \psi(p) + 4iR_\mu \bar{\psi}(p') \Sigma^{\mu\kappa} \gamma_5 \psi(p) \right] e^{-i(q'+p-p')x/\hbar} + \\
 & + 2eq \int \frac{d^4 p' d^4 p d^4 k d^4 x}{(2\pi\hbar)^{12}} \bar{\psi}(p') \psi(p) A^\kappa(k) e^{-i(q'+k+p-p')x/\hbar} = 0,
 \end{aligned} \tag{D.18}$$

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{d^4 p' d^4 p}{(2\pi\hbar)^8} \left[- (p'^\kappa + p^\kappa) \bar{\psi}(p') \psi(p) + 2mc \bar{\psi}(p') \gamma^\kappa \psi(p) + 2\xi^\kappa \bar{\psi}(p') \psi(p) + \right. \\
 & \left. + 2i(p'^\kappa - p^\kappa) \bar{\psi}(p') \Sigma^{\mu\kappa} \psi(p) + 4iR_\mu \bar{\psi}(p') \Sigma^{\mu\kappa} \gamma_5 \psi(p) \right] (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q' + p - p') + \\
 & + 2eq \int \frac{d^4 p' d^4 p d^4 k}{(2\pi\hbar)^{12}} \bar{\psi}(p') \psi(p) A^\kappa(k) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q' + k + p - p') = 0,
 \end{aligned} \tag{D.19}$$

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{d^4 p}{(2\pi\hbar)^4} \left[- \left((p+q')^\kappa + p^\kappa \right) \bar{\psi}(p+q') \psi(p) + 2mc \bar{\psi}(p+q') \gamma^\kappa \psi(p) + 2\xi^\kappa \bar{\psi}(p+q') \psi(p) + \right. \\
 & \left. + 2i \left((p+q')^\kappa - p^\kappa \right) \bar{\psi}(p+q') \Sigma^{\mu\kappa} \psi(p) + 4iR_\mu \bar{\psi}(p+q') \Sigma^{\mu\kappa} \gamma_5 \psi(p) \right] + \\
 & + 2eq \int \frac{d^4 p' d^4 p}{(2\pi\hbar)^8} \bar{\psi}(p') \psi(p) A^\kappa(p' - p - q') = 0.
 \end{aligned} \tag{D.20}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 & - \left((p+q')^\kappa + p^\kappa \right) \bar{\psi}(p+q') \psi(p) + 2mc \bar{\psi}(p+q') \gamma^\kappa \psi(p) + 2\xi^\kappa \bar{\psi}(p+q') \psi(p) + \\
 & + 2i \left((p+q')^\kappa - p^\kappa \right) \bar{\psi}(p+q') \Sigma^{\mu\kappa} \psi(p) + 4iR_\mu \bar{\psi}(p+q') \Sigma^{\mu\kappa} \gamma_5 \psi(p) + \\
 & + 2eq \int \frac{d^4 p'}{(2\pi\hbar)^4} \bar{\psi}(p') \psi(p) A^\kappa(p' - p - q') = 0.
 \end{aligned} \tag{D.21}$$

Agora somando os resultados (D.11) e (D.12), vamos ter que

$$\begin{aligned}
 & i\hbar(\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \gamma^\kappa \psi + i\hbar \bar{\psi} \gamma^\kappa \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) - 2i\zeta \bar{\psi} \gamma^\kappa \gamma_5 \psi + \xi_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^\kappa \psi - \xi_\mu \bar{\psi} \gamma^\kappa \gamma^\mu \psi - R_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^\kappa \gamma_5 \psi - \\
 & - R_\mu \bar{\psi} \gamma^\kappa \gamma^\mu \gamma_5 \psi + qeA_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^\kappa \psi - qeA_\mu \bar{\psi} \gamma^\kappa \gamma^\mu \psi = 0,
 \end{aligned}$$

expandindo,

$$\begin{aligned}
 & i\hbar(\partial_\mu\bar{\psi})(\eta^{\mu\kappa} - 2i\Sigma^{\mu\kappa})\psi + i\hbar\bar{\psi}(\eta^{\kappa\mu} - 2i\Sigma^{\kappa\mu})(\partial_\mu\psi) - 2i\zeta\bar{\psi}\gamma^\kappa\gamma_5\psi + \xi_\mu\bar{\psi}(\eta^{\mu\kappa} - 2i\Sigma^{\mu\kappa})\psi - \\
 & - \xi_\mu(\eta^{\kappa\mu} - 2i\Sigma^{\kappa\mu})\psi - R_\mu\bar{\psi}(\eta^{\mu\kappa} - 2i\Sigma^{\mu\kappa})\gamma_5\psi - R_\mu\bar{\psi}(\eta^{\kappa\mu} - 2i\Sigma^{\kappa\mu})\gamma_5\psi + \\
 & + qeA_\mu\bar{\psi}(\eta^{\mu\kappa} - 2i\Sigma^{\mu\kappa})\psi - qeA_\mu\bar{\psi}(\eta^{\kappa\mu} - 2i\Sigma^{\kappa\mu})\psi = 0,
 \end{aligned}$$

que equivale a

$$\begin{aligned}
 & i\hbar(\partial^\kappa\bar{\psi})\psi + i\hbar\bar{\psi}(\partial^\kappa\psi) + 2\hbar(\partial_\mu\bar{\psi})\Sigma^{\mu\kappa}\psi - 2\hbar\bar{\psi}\Sigma^{\mu\kappa}(\partial_\mu\psi) - 2i\zeta\bar{\psi}\gamma^\kappa\gamma_5\psi - \xi^\kappa\bar{\psi}\psi + \xi^\kappa\bar{\psi}\psi - \\
 & - 2i\xi_\mu\bar{\psi}\Sigma^{\mu\kappa}\psi - 2i\xi_\mu\bar{\psi}\Sigma^{\mu\kappa}\psi - R^\kappa\bar{\psi}\gamma_5\psi - R^\kappa\bar{\psi}\gamma_5\psi + 2iR_\mu\bar{\psi}\Sigma^{\mu\kappa}\gamma_5\psi - 2iR_\mu\bar{\psi}\Sigma^{\mu\kappa}\gamma_5\psi - \\
 & - eqA^\kappa\bar{\psi}\psi + eqA^\kappa\bar{\psi}\psi - 2ieqA_\mu\bar{\psi}\Sigma^{\mu\kappa}\psi - 2ieqA_\mu\bar{\psi}\Sigma^{\mu\kappa}\psi = 0,
 \end{aligned}$$

portanto,

$$\begin{aligned}
 & i\hbar(\partial^\kappa\bar{\psi})\psi + i\hbar\bar{\psi}(\partial^\kappa\psi) + 2\hbar(\partial_\mu\bar{\psi})\Sigma^{\mu\kappa}\psi - 2\hbar\bar{\psi}\Sigma^{\mu\kappa}(\partial_\mu\psi) - 2i\zeta\bar{\psi}\gamma^\kappa\gamma_5\psi - \\
 & - 4i\xi_\mu\bar{\psi}\Sigma^{\mu\kappa}\psi - 2R^\kappa\bar{\psi}\gamma_5\psi - 4iqeA_\mu\bar{\psi}\Sigma^{\mu\kappa}\psi = 0.
 \end{aligned} \tag{D.22}$$

No espaço dos momenta, vamos ter

$$\begin{aligned}
 & - \int \frac{d^4p'd^4p}{(2\pi\hbar)^8} \left[(p'^\kappa - p^\kappa)\bar{\psi}(p')\psi(p) + 2i(p'_\mu + p_\mu)\bar{\psi}(p')\Sigma^{\mu\kappa}\psi(p) - 2\zeta\bar{\psi}(p')\gamma^\kappa\gamma_5\psi(p) - \right. \\
 & \left. - 4i\xi_\mu\bar{\psi}(p')\Sigma^{\mu\kappa}\psi(p) - 2R^\kappa\bar{\psi}(p')\gamma_5\psi(p) \right] e^{-i(p-p')x/\hbar} - \\
 & - \int \frac{d^4p'd^4k}{(2\pi\hbar)^{12}} 4iqe\bar{\psi}(p')\Sigma^{\mu\kappa}\psi(p)A_\mu(k)e^{-i(k+p-p')x/\hbar} = 0.
 \end{aligned} \tag{D.23}$$

Assim como antes, multiplicando ambos os lados deste resultado por $e^{-iq'x}$ e integrando todo o resultado em d^4x , teremos

$$\begin{aligned}
 & - \left((p + q')^\kappa - p^\kappa \right) \bar{\psi}(p + q')\psi(p) + 2i \left((p + q')_\mu + p_\mu \right) \bar{\psi}(p + q')\Sigma^{\mu\kappa}\psi(p) - \\
 & - 2\zeta\bar{\psi}(p + q')\gamma^\kappa\gamma_5\psi(p) - 4i\xi_\mu\bar{\psi}(p + q')\Sigma^{\mu\kappa}\psi(p) - 2R^\kappa\bar{\psi}(p + q')\gamma_5\psi(p) - \\
 & - 4iqe \int \frac{d^4p'}{(2\pi\hbar)^4} \bar{\psi}(p')\Sigma^{\mu\kappa}\psi(p)A_\mu(p' - p - q') = 0.
 \end{aligned} \tag{D.24}$$

D.3 Caso do Zitterbewegung

Na sessão 4.8.2 do capítulo 4, em que estamos a calcular o termo de corrente para o pacote de ondas, somos, naturalmente, levados a calcular a decomposição de Gordon da equação

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc - i\zeta\gamma_5)\psi(x) = 0. \tag{D.25}$$

Mantendo em mente que a equação acima é motivada no apêndice F de forma ser útil no cálculo das soluções da equação de Dirac que estamos considerando. No apêndice F vemos como um

termos do tipo $-\xi_\mu \gamma^\mu$ fez com que seja natural, e necessário, uma redefinição dos momentos e das energias, o que se reflete no cenário de ondas planas como sendo

$$e^{\pm \mathcal{P}_\mu x^\mu / \hbar} \quad (\text{D.26})$$

em que

$$\mathcal{P}^\mu = \left(\frac{E - c\xi_0}{c}, \vec{p}_i - \vec{\xi}_i \right) = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \vec{\mathcal{P}}_i \right).$$

Com isso em jogo, é razoável definir o operador do energia-momento via princípio da correspondência como sendo

$$i\hbar\partial_\mu \rightarrow \hat{\mathcal{P}}_\mu. \quad (\text{D.27})$$

Assim, calcular a decomposição de Gordon da equação (D.25) é mesmo que tomar $A_\mu = R_\mu = 0$ no resultado da equação (D.24). Ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{-1}{2m} \left[(i\hbar\partial_\mu \bar{\psi}) (\eta^{\mu\kappa} - 2i\Sigma^{\mu\kappa}) \psi - \bar{\psi} (\eta^{\kappa\mu} - 2i\Sigma^{\kappa\mu}) (i\hbar\partial_\mu \psi) \right] &= c\bar{\psi}\gamma^\kappa\psi \\ \frac{1}{2m} \left[\bar{\psi}\eta^{\mu\kappa} (i\hbar\partial_\mu \psi) - (i\hbar\partial_\mu \bar{\psi}) \eta^{\mu\kappa} \psi + 2i (i\hbar\partial_\mu) (\bar{\psi}\Sigma^{\mu\kappa}\psi) \right] &= c\bar{\psi}\gamma^\kappa\psi. \end{aligned} \quad (\text{D.28})$$

Ou simplesmente

$$c\bar{\psi}\gamma^\kappa\psi = \frac{1}{2m} \left[\bar{\psi}\eta^{\mu\kappa} (\hat{\mathcal{P}}_\mu \psi) - (\hat{\mathcal{P}}_\mu \bar{\psi}) \eta^{\mu\kappa} \psi + 2i \hat{\mathcal{P}}_\mu (\bar{\psi}\Sigma^{\mu\kappa}\psi) \right]. \quad (\text{D.29})$$

Tomando a componente i , vem que

$$c\bar{\psi}(\vec{x}, t)\gamma^i\psi(\vec{x}, t) = \frac{1}{2m} \left[\bar{\psi} (\hat{\mathcal{P}}^i \psi) - (\hat{\mathcal{P}}^i \bar{\psi}) \psi - 2i \hat{\mathcal{P}}_\nu (\bar{\psi}\Sigma^{i\nu}\psi) \right]. \quad (\text{D.30})$$

D.4 Caso da derivada modificada

Multiplicando à esquerda de (5.40) pelo fator $\bar{\psi}\gamma^\kappa$, teremos

$$i\hbar\bar{\psi}\gamma^\kappa\gamma^\mu (\tilde{\partial}_\mu \psi) - mc\bar{\psi}\gamma^\kappa\psi - \frac{\hbar}{2} \left(\partial_i \text{Im}(\xi(x)) \right) \bar{\psi}\gamma^\kappa\gamma^i\psi - qe\tilde{A}_\mu \bar{\psi}\gamma^\kappa\gamma^\mu\psi = 0. \quad (\text{D.31})$$

Agora multiplicando à direita de (5.41) pelo fato $\gamma^\kappa\psi$, teremos

$$i\hbar (\tilde{\partial}_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \gamma^\kappa \psi + mc\bar{\psi}\gamma^\kappa\psi + \frac{\hbar}{2} \left(\partial_i \text{Im}(\xi(x)) \right) \bar{\psi}\gamma^i \gamma^\kappa \psi + qe\tilde{A}_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu \gamma^\kappa \psi = 0. \quad (\text{D.32})$$

Calculando (D.32) menos (D.31), vem que

$$\begin{aligned} i\hbar (\tilde{\partial}_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \gamma^\kappa \psi - i\hbar \bar{\psi} \gamma^\kappa \gamma^\mu (\tilde{\partial}_\mu \psi) + 2mc\bar{\psi}\gamma^\kappa\psi + \frac{\hbar}{2} \left(\partial_i \text{Im}(\xi(x)) \right) \bar{\psi} (\gamma^\kappa \gamma^i + \gamma^i \gamma^\kappa) \psi + \\ + qe\tilde{A}_\mu \bar{\psi} (\gamma^\mu \gamma^\kappa + \gamma^\kappa \gamma^\mu) \psi = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & i\hbar \left(\tilde{\partial}_\mu \bar{\psi} \right) \left(\eta^{\mu\kappa} - 2i\Sigma^{\mu\kappa} \right) \psi - i\hbar \bar{\psi} \left(\eta^{\kappa\mu} - 2i\Sigma^{\kappa\mu} \right) \left(\tilde{\partial}_\mu \psi \right) + 2mc\bar{\psi}\gamma^\kappa\psi + \\
 & + \frac{\hbar}{2} \left(\partial_i \text{Im}(\xi(x)) \right) \bar{\psi} \left(\eta^{\kappa i} - 2i\Sigma^{\kappa i} + \eta^{i\kappa} - 2i\Sigma^{i\kappa} \right) \psi \\
 & + qe\tilde{A}_\mu \bar{\psi} \left(\eta^{\mu\kappa} - 2i\Sigma^{\mu\kappa} + \eta^{\kappa\mu} - 2i\Sigma^{\kappa\mu} \right) \psi = 0
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 i\hbar \left(\tilde{\partial}^\kappa \bar{\psi} \right) \psi - i\hbar \bar{\psi} \left(\tilde{\partial}^\kappa \psi \right) + 2\hbar \tilde{\partial}_\mu \left(\bar{\psi} \Sigma^{\mu\kappa} \psi \right) + 2mc\bar{\psi}\gamma^\kappa\psi + \hbar \left(\partial^\kappa \text{Im}(\xi(x)) \right) \bar{\psi} \psi + \\
 + 2qe\tilde{A}^\kappa \bar{\psi} \psi = 0. \quad (\text{D.33})
 \end{aligned}$$

Como estamos interessados em considerar que

$$i\text{Im}(\xi(x)) = i\alpha - iw_\mu x^\mu, \quad (\text{D.34})$$

podemos escrever

$$\partial^\kappa \text{Im}(\xi(x)) = \partial^\kappa (\alpha - w_\mu x^\mu) = -w^\mu \eta^{\kappa\mu} = -w^\kappa. \quad (\text{D.35})$$

Portanto,

$$i\hbar \left(\tilde{\partial}^\kappa \bar{\psi} \right) \psi - i\hbar \bar{\psi} \left(\tilde{\partial}^\kappa \psi \right) + 2\hbar \tilde{\partial}_\mu \left(\bar{\psi} \Sigma^{\mu\kappa} \psi \right) + 2mc\bar{\psi}\gamma^\kappa\psi - \hbar w^\kappa \bar{\psi} \psi + 2qe\tilde{A}^\kappa \bar{\psi} \psi = 0. \quad (\text{D.36})$$

Anotando a seguinte prescrição para migrar para o espaço dos momenta,

$$\psi(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi\hbar)^4} \psi(p) e^{-ip \cdot x/\hbar}, \quad (\text{D.37})$$

$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d^4 p'}{(2\pi\hbar)^4} \bar{\psi}(p') e^{+ip' \cdot x/\hbar} \quad (\text{D.38})$$

e

$$A^\kappa(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi\hbar)^4} \tilde{A}^\kappa(k) e^{-ik \cdot x/\hbar}. \quad (\text{D.39})$$

teremos,

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{d^4 p' d^4 p}{(2\pi\hbar)^8} \left[- \left(\tilde{p}'^\kappa + \tilde{p}^\kappa \right) \bar{\psi}(p') \psi(p) + 2i \left(\tilde{p}'_\mu - \tilde{p}_\mu \right) \bar{\psi}(p') \Sigma^{\mu\kappa} \psi(p) + 2mc\bar{\psi}(p') \gamma^\kappa \psi(p) - \right. \\
 & \left. - \hbar w^\kappa \bar{\psi}(p') \psi(p) \right] e^{i(p'-p) \cdot x/\hbar} + 2qe \int \frac{d^4 p' d^4 p d^4 k}{(2\pi\hbar)^{12}} \tilde{A}^\kappa(k) \bar{\psi}(p') \psi(p) e^{i(p'-p-k) \cdot x/\hbar} = 0. \quad (\text{D.40})
 \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados deste resultado por $e^{-iq \cdot x}$ e integrando todo o resultado em $d^4 x$, teremos

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{d^4 x d^4 p' d^4 p}{(2\pi\hbar)^8} \left[- \left(\tilde{p}'^\kappa + \tilde{p}^\kappa \right) \bar{\psi}(p') \psi(p) + 2i \left(\tilde{p}'_\mu - \tilde{p}_\mu \right) \bar{\psi}(p') \Sigma^{\mu\kappa} \psi(p) + 2mc\bar{\psi}(p') \gamma^\kappa \psi(p) - \right. \\
 & \left. - \hbar w^\kappa \bar{\psi}(p') \psi(p) \right] e^{i(p'-p-q) \cdot x/\hbar} + 2qe \int \frac{d^4 x d^4 p' d^4 p d^4 k}{(2\pi\hbar)^{12}} \tilde{A}^\kappa(k) \bar{\psi}(p') \psi(p) e^{i(p'-p-k-q) \cdot x/\hbar} = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{d^4 p' d^4 p}{(2\pi\hbar)^8} \left[- \left(\tilde{p}'^\kappa + \tilde{p}^\kappa \right) \bar{\psi}(p') \psi(p) + 2i \left(\tilde{p}'_\mu - \tilde{p}_\mu \right) \bar{\psi}(p') \Sigma^{\mu\kappa} \psi(p) + 2mc \bar{\psi}(p') \gamma^\kappa \psi(p) - \right. \\
 & \left. - \hbar \omega^\kappa \bar{\psi}(p') \psi(p) \right] (2\pi\hbar)^4 \delta^4(p' - p - q) + \\
 & + 2qe \int \frac{d^4 x d^4 p' d^4 p d^4 k}{(2\pi\hbar)^{12}} \tilde{A}^\kappa(k) \bar{\psi}(p') \psi(p) (2\pi\hbar)^4 \delta^4(p' - p - k - q) = 0, \\
 & \int \frac{d^4 p}{(2\pi\hbar)^4} \left[- \left((\tilde{p} + \tilde{q})^\kappa + \tilde{p}^\kappa \right) \bar{\psi}(p+q) \psi(p) + 2i \left((\tilde{p} + \tilde{q})_\mu - \tilde{p}_\mu \right) \bar{\psi}(p+q) \Sigma^{\mu\kappa} \psi(p) + \right. \\
 & \left. + 2mc \bar{\psi}(p+q) \gamma^\kappa \psi(p) - \hbar \omega^\kappa \bar{\psi}(p+q) \psi(p) \right] + 2qe \int \frac{d^4 p' d^4 p}{(2\pi\hbar)^8} \tilde{A}^\kappa(p' - p - q) \bar{\psi}(p') \psi(p) = 0,
 \end{aligned}$$

e , finalmente, obtemos que

$$\begin{aligned}
 & - \left((\tilde{p} + \tilde{q})^\kappa + \tilde{p}^\kappa \right) \bar{\psi}(p+q) \psi(p) + 2i \left((\tilde{p} + \tilde{q})_\mu - \tilde{p}_\mu \right) \bar{\psi}(p+q) \Sigma^{\mu\kappa} \psi(p) + \\
 & + 2mc \bar{\psi}(p+q) \gamma^\kappa \psi(p) - \hbar \omega^\kappa \bar{\psi}(p+q) \psi(p) + 2qe \int \frac{d^4 p'}{(2\pi\hbar)^4} \tilde{A}^\kappa(p' - p - q) \bar{\psi}(p') \psi(p) = 0.
 \end{aligned} \tag{D.41}$$

Calculando agora (D.31) mais (D.32), vamos ter que

$$\begin{aligned}
 & i\hbar \left(\tilde{\partial}_\mu \bar{\psi} \right) \gamma^\mu \gamma^\kappa \psi + i\hbar \bar{\psi} \gamma^\kappa \gamma^\mu \left(\tilde{\partial}_\mu \psi \right) + \frac{\hbar}{2} \left(\partial_i \text{Im}(\xi(x)) \right) \bar{\psi} \left(\gamma^i \gamma^\kappa - \gamma^\kappa \gamma^i \right) \psi + \\
 & + qe \tilde{A}_\mu \bar{\psi} \left(\gamma^i \gamma^\kappa - \gamma^\kappa \gamma^i \right) \psi = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & i\hbar \left(\tilde{\partial}_\mu \bar{\psi} \right) \left(\eta^{\mu\kappa} - 2i \Sigma^{\mu\kappa} \right) \psi + i\hbar \bar{\psi} \left(\eta^{\kappa\mu} - 2i \Sigma^{\kappa\mu} \right) \left(\tilde{\partial}_\mu \psi \right) + \\
 & + \frac{\hbar}{2} \left(\partial_i \text{Im}(\xi(x)) \right) \bar{\psi} \left(\eta^{i\kappa} - 2i \Sigma^{i\kappa} - \eta^{\kappa i} + 2i \Sigma^{\kappa i} \right) \psi + \\
 & + qe \tilde{A}_\mu \bar{\psi} \left(\eta^{\mu\kappa} - 2i \Sigma^{\mu\kappa} - \eta^{\kappa\mu} + 2i \Sigma^{\kappa\mu} \right) \psi = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & i\hbar \tilde{\partial}^\kappa \left(\bar{\psi} \psi \right) + 2\hbar \left(\tilde{\partial}_\mu \bar{\psi} \right) \Sigma^{\mu\kappa} \psi - 2\hbar \bar{\psi} \Sigma^{\mu\kappa} \left(\tilde{\partial}_\mu \psi \right) - 2i\hbar \left(\partial_i \text{Im}(\xi(x)) \right) \bar{\psi} \Sigma^{\kappa i} \psi - \\
 & - 4iqe \tilde{A}_\mu \bar{\psi} \Sigma^{\mu\kappa} \psi = 0.
 \end{aligned}$$

Ou ainda,

$$i\hbar \tilde{\partial}^\kappa \left(\bar{\psi} \psi \right) + 2\hbar \left(\tilde{\partial}_\mu \bar{\psi} \right) \Sigma^{\mu\kappa} \psi - 2\hbar \bar{\psi} \Sigma^{\mu\kappa} \left(\tilde{\partial}_\mu \psi \right) - 2i\hbar \vec{w}_i \bar{\psi} \Sigma^{\kappa i} \psi - 4iqe \tilde{A}_\mu \bar{\psi} \Sigma^{\mu\kappa} \psi = 0. \tag{D.42}$$

No espaço dos momenta,

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{d^4 p' d^4 p}{(2\pi\hbar)^8} \left[- \left(\tilde{p}'^\kappa - \tilde{p}^\kappa \right) \bar{\psi}(p') \psi(p) + 2i \left(\tilde{p}'^\kappa + \tilde{p}^\kappa \right) \bar{\psi}(p') \Sigma^{\mu\kappa} \psi(p) - \right. \\
 & \left. - 2i\hbar \vec{w}_i \bar{\psi}(p') \Sigma^{\kappa i} \psi(p) \right] e^{i(p'-p)\cdot x/\hbar} - 4iqe \int \frac{d^4 p' d^4 p d^4 k}{(2\pi\hbar)^{12}} \tilde{A}_\mu(k) \bar{\psi}(p') \Sigma^{\mu\kappa} \psi(p) e^{i(p'-p-k)\cdot x/\hbar} = 0.
 \end{aligned} \tag{D.43}$$

Mais uma vez multiplicando ambos os lados deste resultado por $e^{-iq \cdot x}$ e integrando todo o resultado em d^4x , teremos

$$\begin{aligned}
 & - \left((\tilde{p} + \tilde{q})^\kappa - \tilde{p}^\kappa \right) \bar{\psi}(p+q)\psi(p) + 2i \left((\tilde{p} + \tilde{q})_\mu + \tilde{p}_\mu \right) \bar{\psi}(p+q)\Sigma^{\mu\kappa}\psi(p) - \\
 & - 2i\hbar\vec{v}_i\bar{\psi}(p+q)\Sigma^{\kappa i}\psi(p) - 4iqe \int \frac{d^4p'}{(2\pi\hbar)^4} \tilde{A}_\mu(p' - p - q)\bar{\psi}(p')\Sigma^{\mu\kappa}\psi(p) = 0. \quad (\text{D.44})
 \end{aligned}$$

Apêndice E

Cálculo dos tensores energia-momento

Sessão dedicada aos cálculos explícitos de alguns casos de tensores energia momento.

E.1 Caso da equação de Dirac generalizada

Estamos a considerar a obtenção do tensor energia-momento da equação de Dirac generalizada

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc - \xi_\mu(x)\gamma^\mu - i\zeta(x)\gamma_5 - R_\mu(x)\gamma^\mu\gamma_5)\psi = 0. \quad (\text{E.1})$$

Deu conjugado de Dirac é

$$\bar{\psi}(i\hbar\gamma^\mu\bar{\partial}_\mu + mc + \xi_\mu(x)\gamma^\mu + i\zeta(x)\gamma_5 + R_\mu(x)\gamma^\mu\gamma_5) = 0. \quad (\text{E.2})$$

Para construir o tensor energia-momento simétrico, seguimos multiplicando (E.1) à direita por $(\partial_\nu\bar{\psi})$,

$$(\partial_\nu\bar{\psi})(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc - \xi_\mu(x)\gamma^\mu - i\zeta(x)\gamma_5 - R_\mu(x)\gamma^\mu\gamma_5)\psi = 0,$$

que resulta em

$$i\hbar(\partial_\nu\bar{\psi})\gamma^\mu(\partial_\mu\psi) - mc(\partial_\nu\bar{\psi})\psi - (\partial_\nu\bar{\psi})\xi_\mu(x)\gamma^\mu\psi - i(\partial_\nu\bar{\psi})\zeta(x)\psi - (\partial_\nu\bar{\psi})R_\mu(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi = 0,$$

explicitando quadri-divergências, teremos

$$\begin{aligned} & i\hbar\partial_\mu[(\partial_\nu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi] - i\hbar(\partial_\mu\partial_\nu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi - mc(\partial_\nu\bar{\psi})\psi - \partial_\nu[\xi_\mu(x)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi] + \\ & + [\partial_\nu\xi_\mu(x)]\bar{\psi}\gamma^\mu\psi + \xi_\mu(x)\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\nu\psi) - \partial_\nu[i\zeta(x)\bar{\psi}\gamma_5\psi] + [i\partial_\nu\zeta(x)]\bar{\psi}\gamma_5\psi + \\ & + i\zeta(x)\bar{\psi}\gamma_5(\partial_\nu\psi) - \partial_\nu[R_\mu(x)\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi] + [\partial_\nu R_\mu(x)]\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi + R_\mu(x)\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5(\partial_\nu\psi) = 0, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
 & i\hbar\partial_\mu \left[(\partial_\nu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi \right] + \left\{ \partial_\nu \left[\bar{\psi} (mc + \xi_\mu(x)\gamma^\mu + i\zeta(x)\gamma_5 + R_\mu(x)\gamma^\mu\gamma_5) \right] \right\} \psi - mc (\partial_\nu \bar{\psi}) \psi - \\
 & - \partial_\nu \left[\xi_\mu(x)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \right] + [\partial_\nu \xi_\mu(x)] \bar{\psi}\gamma^\mu\psi + \xi_\mu(x)\bar{\psi}\gamma^\mu (\partial_\nu \psi) - \partial_\nu \left[i\zeta(x)\bar{\psi}\gamma_5\psi \right] + [i\partial_\nu \zeta(x)] \bar{\psi}\gamma_5\psi + \\
 & + i\zeta(x)\bar{\psi}\gamma_5 (\partial_\nu \psi) - \partial_\nu \left[R_\mu(x)\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi \right] + [\partial_\nu R_\mu(x)] \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi + R_\mu(x)\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5 (\partial_\nu \psi) = 0. \quad (\text{E.3})
 \end{aligned}$$

E, também, multiplicando (E.2) à direita por $(\partial_\nu \psi)$,

$$\bar{\psi} \left(i\hbar\gamma^\mu \bar{\partial}_\mu + mc + \xi_\mu(x)\gamma^\mu + i\zeta(x)\gamma_5 + R_\mu(x)\gamma^\mu\gamma_5 \right) (\partial_\nu \psi) = 0,$$

que a partir de manipulações análogas ao caso acima se torna

$$\begin{aligned}
 & i\hbar\partial_\mu \left[\bar{\psi}\gamma^\mu (\partial_\nu \psi) \right] - \bar{\psi} \left\{ \partial_\nu \left[(mc + \xi_\mu(x)\gamma^\mu + i\zeta(x)\gamma_5 + R_\mu(x)\gamma^\mu\gamma_5) \psi \right] \right\} + mc\bar{\psi} (\partial_\nu \psi) + \\
 & + \partial_\nu \left[\xi_\mu(x)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \right] - [\partial_\nu \xi_\mu(x)] \bar{\psi}\gamma^\mu\psi - \xi_\mu(x) (\partial_\nu \bar{\psi}) \gamma^\mu\psi + \partial_\nu \left[i\zeta(x)\bar{\psi}\gamma_5\psi \right] - [i\partial_\nu \zeta(x)] \bar{\psi}\gamma_5\psi - \\
 & - i\zeta(x) (\partial_\nu \bar{\psi}) \gamma_5\psi + \partial_\nu \left[R_\mu(x)\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi \right] - [\partial_\nu R_\mu(x)] \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi - R_\mu(x) (\partial_\nu \bar{\psi}) \gamma^\mu\gamma_5\psi = 0. \quad (\text{E.4})
 \end{aligned}$$

Subtraindo (E.4) de (E.3), teremos

$$\begin{aligned}
 & i\hbar\partial_\mu \left[(\partial_\nu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi - \bar{\psi}\gamma^\mu (\partial_\nu \psi) \right] + 2\partial_\nu \left[\xi_\mu(x)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \right] - 2\partial_\nu \left[\xi_\mu(x)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \right] + \\
 & + 2\partial_\nu \left[i\zeta(x)\bar{\psi}\gamma_5\psi \right] - 2\partial_\nu \left[i\zeta(x)\bar{\psi}\gamma_5\psi \right] + 2\partial_\nu \left[R_\mu(x)\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi \right] - 2\partial_\nu \left[R_\mu(x)\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi \right] + \\
 & + 2[\partial_\nu \xi_\mu(x)] \bar{\psi}\gamma^\mu\psi + 2[i\partial_\nu \zeta(x)] \bar{\psi}\gamma_5\psi + 2[\partial_\nu R_\mu(x)] \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi = 0
 \end{aligned}$$

De forma geral, temos então que

$$\begin{aligned}
 \partial_\mu \left[i\hbar (\partial_\nu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi - i\hbar \bar{\psi}\gamma^\mu (\partial_\nu \psi) \right] &= -2[\partial_\nu \xi_\mu(x)] \bar{\psi}\gamma^\mu\psi - 2i[\partial_\nu \zeta(x)] \bar{\psi}\gamma_5\psi - \\
 & - 2[\partial_\nu R_\mu(x)] \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi. \quad (\text{E.5})
 \end{aligned}$$

Simetrizando o termo dentro dos colchetes no lado direito, vamos poder escrever o tensor energia-momento simétrico, $\theta^\mu{}_\nu$, sob a forma

$$\begin{aligned}
 \partial_\mu \left\{ i\hbar \left[\bar{\psi} \left(\gamma^\mu \bar{\partial}_\nu + \bar{\partial}^\mu \gamma_\nu - \gamma^\mu \bar{\partial}_\nu - \bar{\partial}^\mu \gamma_\nu \right) \psi \right] \right\} &= -4[\partial_\nu \xi_\mu(x)] \bar{\psi}\gamma^\mu\psi - \\
 & - 4i[\partial_\nu \zeta(x)] \bar{\psi}\gamma_5\psi - \\
 & - 4[\partial_\nu R_\mu(x)] \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi. \quad (\text{E.6})
 \end{aligned}$$

Para averiguar a licitude do processo de simetrização que nos levou ao resultado (E.6), é necessário um desenvolvimento em detalhes do lado esquerdo de (E.6) de forma a certificar se este lado se iguala ao direito. Dito isso, seguimos calculando esta parcela,

$$\begin{aligned}
 \partial_\mu \left\{ i\hbar \left[\bar{\psi} \left(\gamma^\mu \bar{\partial}_\nu + \bar{\partial}^\mu \gamma_\nu - \gamma^\mu \bar{\partial}_\nu - \bar{\partial}^\mu \gamma_\nu \right) \psi \right] \right\} &= i\hbar\partial_\mu \left[(\partial^\mu \bar{\psi}) \gamma_\nu \psi - \bar{\psi}\gamma_\nu (\partial^\mu \psi) \right] + \\
 & + i\hbar\partial_\mu \left[(\partial_\nu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi - \bar{\psi}\gamma^\mu (\partial_\nu \psi) \right] \\
 & = i\hbar\partial_\mu \left[(\partial^\mu \bar{\psi}) \gamma_\nu \psi - \bar{\psi}\gamma_\nu (\partial^\mu \psi) \right] - \\
 & - 2[\partial_\nu \xi_\mu(x)] \bar{\psi}\gamma^\mu\psi - \\
 & - 2i[\partial_\nu \zeta(x)] \bar{\psi}\gamma_5\psi - \\
 & - 2[\partial_\nu R_\mu(x)] \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi. \quad (\text{E.7})
 \end{aligned}$$

Resta agora trabalhar o termo

$$\begin{aligned}
 i\hbar\partial_\mu \left[\left(\partial^\mu \bar{\psi} \right) \gamma_\nu \psi - \bar{\psi} \gamma_\nu \left(\partial^\mu \psi \right) \right] &= i\hbar \left(\square \bar{\psi} \right) \gamma_\nu \psi - i\hbar \left(\partial^\mu \bar{\psi} \right) \gamma_\nu \left(\partial_\mu \psi \right) - \\
 &\quad - i\hbar \left(\partial_\mu \bar{\psi} \right) \gamma_\nu \left(\partial^\mu \psi \right) - i\hbar \bar{\psi} \gamma_\nu \left(\square \psi \right) \\
 &= i\hbar \left(\square \bar{\psi} \right) \gamma_\nu \psi - i\hbar \bar{\psi} \gamma_\nu \left(\square \psi \right). \tag{E.8}
 \end{aligned}$$

Para construir os termos acompanhados do operado d'Alambertiano, prosseguimos, em primeiro lugar, multiplicando o lado esquerdo de (E.1) pelo operador

$$\left(i\hbar\gamma^\kappa\partial_\kappa + mc - \xi_\kappa(x)\gamma^\kappa - i\zeta(x)\gamma_5 - R_\kappa\gamma^\kappa\gamma_5 \right).$$

Assim, vamos ter que

$$\begin{aligned}
 \left[i\hbar\gamma^\kappa\partial_\kappa + mc - \xi_\kappa(x)\gamma^\kappa - i\zeta(x)\gamma_5 - R_\kappa\gamma^\kappa\gamma_5 \right] \left[\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc - \xi_\mu(x)\gamma^\mu - i\zeta(x)\gamma_5 - \right. \\
 \left. - R_\mu(x)\gamma^\mu\gamma_5 \right] \psi = 0. \tag{E.9}
 \end{aligned}$$

Que resultará em

$$\begin{aligned}
 (i\hbar)^2\gamma^\kappa\gamma^\mu \left(\partial_\kappa\partial_\mu\psi \right) - (i\hbar) \left[\partial_\kappa\xi_\mu(x) \right] \gamma^\kappa\gamma^\mu\psi - (i\hbar) \left[i\partial_\kappa\zeta(x) \right] \gamma^\kappa\gamma_5\psi - (i\hbar) \left[\partial_\kappa R_\mu(x) \right] \gamma^\kappa\gamma^\mu\gamma_5\psi - \\
 - m^2c^2\psi + \xi_\kappa(x)\xi_\mu(x)\gamma^\kappa\gamma^\mu\psi - \zeta^2(x)\psi - R_\kappa(x)R_\mu(x)\gamma^\kappa\gamma^\mu\psi - \\
 - (i\hbar)\xi_\mu(x)\gamma^\kappa\gamma^\mu \left(\partial_\kappa\psi \right) - (i\hbar)\xi_\kappa(x)\gamma^\kappa\gamma^\mu \left(\partial_\mu\psi \right) - \\
 - (i\hbar)R_\mu(x)\gamma^\kappa\gamma^\mu\gamma_5 \left(\partial_\kappa\psi \right) + (i\hbar)R_\kappa(x)\gamma^\kappa\gamma^\mu\gamma_5 \left(\partial_\mu\psi \right) + \\
 + \xi_\kappa(x)R_\mu(x)\gamma^\kappa\gamma^\mu\gamma_5\psi - R_\kappa(x)\xi_\mu(x)\gamma^\kappa\gamma^\mu\gamma_5\psi = 0,
 \end{aligned}$$

simetrizando,

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\gamma^\kappa\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^\kappa}{2} \right) \left[(i\hbar)^2 \left(\partial_\kappa\partial_\mu\psi \right) + \xi_\kappa(x)\xi_\mu(x)\psi - R_\kappa(x)R_\mu(x)\psi \right] - m^2c^2\psi - \zeta^2(x)\psi - \\
 - (i\hbar) \left[\partial_\kappa\xi_\mu(x) \right] \gamma^\kappa\gamma^\mu\psi - (i\hbar) \left[i\partial_\kappa\zeta(x) \right] \gamma^\kappa\gamma_5\psi - (i\hbar) \left[\partial_\kappa R_\mu(x) \right] \gamma^\kappa\gamma^\mu\gamma_5\psi - \\
 - (i\hbar)\xi_\mu(x)\gamma^\kappa\gamma^\mu \left(\partial_\kappa\psi \right) - (i\hbar)\xi_\kappa(x)\gamma^\kappa\gamma^\mu \left(\partial_\mu\psi \right) - \\
 - (i\hbar)R_\mu(x)\gamma^\kappa\gamma^\mu\gamma_5 \left(\partial_\kappa\psi \right) + (i\hbar)R_\kappa(x)\gamma^\kappa\gamma^\mu\gamma_5 \left(\partial_\mu\psi \right) + \\
 + \xi_\kappa(x)R_\mu(x) \left(\frac{\gamma^\kappa\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^\kappa}{2} \right) \gamma_5\psi - R_\kappa(x)\xi_\mu(x) \left(\frac{\gamma^\kappa\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^\kappa}{2} \right) \gamma_5\psi = 0,
 \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
 (i\hbar)^2 \left(\square \psi \right) - m^2c^2 + \xi^2(x) - \zeta^2(x) - R^2(x) - \\
 - (i\hbar) \left[\partial_\kappa\xi_\mu(x) \right] \gamma^\kappa\gamma^\mu\psi - (i\hbar) \left[i\partial_\kappa\zeta(x) \right] \gamma^\kappa\gamma_5\psi - (i\hbar) \left[\partial_\kappa R_\mu(x) \right] \gamma^\kappa\gamma^\mu\gamma_5\psi - \\
 - (i\hbar)\xi_\mu(x)\gamma^\kappa\gamma^\mu \left(\partial_\kappa\psi \right) - (i\hbar)\xi_\kappa(x)\gamma^\kappa\gamma^\mu \left(\partial_\mu\psi \right) - \\
 - (i\hbar)R_\mu(x)\gamma^\kappa\gamma^\mu\gamma_5 \left(\partial_\kappa\psi \right) + (i\hbar)R_\kappa(x)\gamma^\kappa\gamma^\mu\gamma_5 \left(\partial_\mu\psi \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Então, teremos que

$$\begin{aligned}
 (i\hbar) (\square\psi) = & \left[\frac{m^2c^2 + \zeta^2(x) - \xi^2(x) + R^2(x)}{(i\hbar)} \right] \psi + \\
 & + [\partial_\kappa \xi_\mu(x)] \gamma^\kappa \gamma^\mu \psi + [i\partial_\kappa \zeta(x)] \gamma^\kappa \gamma_5 \psi + [\partial_\kappa R_\mu(x)] \gamma^\kappa \gamma^\mu \gamma_5 \psi + \\
 & + \xi_\mu(x) \gamma^\kappa \gamma^\mu (\partial_\kappa \psi) + \xi_\kappa(x) \gamma^\kappa \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) + \\
 & + R_\mu(x) \gamma^\kappa \gamma^\mu \gamma_5 (\partial_\kappa \psi) - R_\kappa(x) \gamma^\kappa \gamma^\mu \gamma_5 (\partial_\mu \psi). \tag{E.10}
 \end{aligned}$$

Dum procedimento análogo, multiplicamos à direita de (E.2) pelo operador

$$(i\hbar \gamma^\kappa \bar{\partial}_\kappa - mc + \xi_\kappa(x) \gamma^\kappa + i\zeta(x) \gamma_5 + R_\kappa \gamma^\kappa \gamma_5).$$

De tal forma, teremos

$$\begin{aligned}
 \bar{\psi} \left[i\hbar \gamma^\mu \bar{\partial}_\mu + mc + \xi_\mu(x) \gamma^\mu + i\zeta(x) \gamma_5 + R_\mu(x) \gamma^\mu \gamma_5 \right] \left[i\hbar \gamma^\kappa \bar{\partial}_\kappa - mc + \xi_\kappa(x) \gamma^\kappa + i\zeta(x) \gamma_5 + \right. \\
 \left. R_\kappa \gamma^\kappa \gamma_5 \right] = 0. \tag{E.11}
 \end{aligned}$$

Que a partir de manipulações parecidas com as do caso anterior, nos leva a escrever

$$\begin{aligned}
 (i\hbar)^2 (\partial_\kappa \partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \gamma^\kappa + (i\hbar) [\partial_\kappa \xi_\mu(x)] \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^\kappa + (i\hbar) [i\partial_\kappa \zeta(x)] \bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\kappa + (i\hbar) [\partial_\kappa R_\mu(x)] \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \gamma^\kappa - \\
 - m^2 c^2 \bar{\psi} - \zeta^2(x) \bar{\psi} + \xi_\mu(x) \xi_\kappa(x) \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^\kappa - R_\mu(x) R_\kappa(x) \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^\kappa + \\
 + (i\hbar) \xi_\mu(x) (\partial_\kappa \bar{\psi}) \gamma^\mu \gamma^\kappa + (i\hbar) \xi_\kappa(x) (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \gamma^\kappa - \\
 - (i\hbar) R_\mu(x) (\partial_\kappa \bar{\psi}) \gamma^\mu \gamma^\kappa \gamma_5 + (i\hbar) R_\kappa(x) (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \gamma^\kappa \gamma_5 - \\
 - R_\mu(x) \xi_\kappa(x) \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^\kappa \gamma_5 + \xi_\mu(x) R_\kappa(x) \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^\kappa \gamma_5 = 0.
 \end{aligned}$$

Trabalhando termo a termos como antes, teremos que

$$\begin{aligned}
 (i\hbar) (\square\bar{\psi}) = \bar{\psi} \left[\frac{m^2c^2 + \zeta^2(x) - \xi^2(x) + R^2(x)}{(i\hbar)} \right] - \\
 - [\partial_\kappa \xi_\mu(x)] \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^\kappa - [i\partial_\kappa \zeta(x)] \bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\kappa - [\partial_\kappa R_\mu(x)] \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \gamma^\kappa - \\
 - \xi_\mu(x) (\partial_\kappa \bar{\psi}) \gamma^\mu \gamma^\kappa - \xi_\kappa(x) (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \gamma^\kappa + \\
 + R_\mu(x) (\partial_\kappa \bar{\psi}) \gamma^\mu \gamma^\kappa \gamma_5 - R_\kappa(x) (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \gamma^\kappa \gamma_5. \tag{E.12}
 \end{aligned}$$

Como estamos interessados em computar a equação (E.8), calculamos a parcela

$$i\hbar (\square\bar{\psi}) \gamma_\nu \psi - i\hbar \bar{\psi} \gamma_\nu (\square\psi),$$

o que, a partir dos resultado (E.10) e (E.12), resultará em

$$\begin{aligned}
 &= \left[\frac{m^2 c^2 + \zeta^2(x) - \xi^2(x) + R^2(x)}{(i\hbar)} \right] (\bar{\psi} \gamma_\nu \psi - \bar{\psi} \gamma_\nu \psi) - \\
 &\quad - [\partial_\kappa \xi_\mu(x)] \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^\kappa \gamma_\nu \psi - [i \partial_\kappa \zeta(x)] \bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\kappa \gamma_\nu \psi - [\partial_\kappa R_\mu(x)] \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \gamma^\kappa \gamma_\nu \psi - \\
 &\quad - [\partial_\kappa \xi_\mu(x)] \bar{\psi} \gamma_\nu \gamma^\kappa \gamma^\mu \psi - [i \partial_\kappa \zeta(x)] \bar{\psi} \gamma_\nu \gamma^\kappa \gamma_5 \psi - [\partial_\kappa R_\mu(x)] \bar{\psi} \gamma_\nu \gamma^\kappa \gamma^\mu \gamma_5 \psi - \\
 &\quad - \xi_\mu(x) (\partial_\kappa \bar{\psi}) \gamma^\mu \gamma^\kappa \gamma_\nu \psi - \xi_\kappa(x) (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \gamma^\kappa \gamma_\nu \psi - \xi_\mu(x) \bar{\psi} \gamma_\nu \gamma^\kappa \gamma^\mu (\partial_\kappa \psi) - \\
 &\quad - \xi_\kappa(x) \bar{\psi} \gamma_\nu \gamma^\kappa \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) + R_\mu(x) (\partial_\kappa \bar{\psi}) \gamma^\mu \gamma^\kappa \gamma_5 \gamma_\nu \psi - R_\kappa(x) (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \gamma^\kappa \gamma_5 \gamma_\nu \psi - \\
 &\quad - R_\mu(x) \bar{\psi} \gamma_\nu \gamma^\kappa \gamma^\mu \gamma_5 (\partial_\kappa \psi) + R_\kappa(x) \bar{\psi} \gamma_\nu \gamma^\kappa \gamma^\mu \gamma_5 (\partial_\mu \psi),
 \end{aligned}$$

com algumas simplificações óbvias, temos

$$\begin{aligned}
 &= - [\partial^\kappa \xi^\mu(x)] \bar{\psi} [\gamma_\mu (\eta_{\kappa\nu} - 2i \Sigma_{\kappa\nu}) + (\eta_{\nu\kappa} - 2i \Sigma_{\nu\kappa}) \gamma_\mu] \psi - \\
 &\quad - 2\eta_{\kappa\nu} [i \partial^\kappa \zeta(x)] \bar{\psi} \gamma_5 \psi - \\
 &\quad - [\partial^\kappa R^\mu(x)] \bar{\psi} [\gamma_\mu (\eta_{\kappa\nu} - 2i \Sigma_{\kappa\nu}) + (\eta_{\nu\kappa} - 2i \Sigma_{\nu\kappa}) \gamma_\mu] \gamma_5 \psi - \\
 &\quad - \xi_\mu(x) (\partial_\kappa \bar{\psi}) \gamma^\mu \gamma^\kappa \gamma_\nu \psi - \xi_\kappa(x) (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \gamma^\kappa \gamma_\nu \psi - \xi_\mu(x) \bar{\psi} \gamma_\nu \gamma^\kappa \gamma^\mu (\partial_\kappa \psi) - \\
 &\quad - \xi_\kappa(x) \bar{\psi} \gamma_\nu \gamma^\kappa \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) + \\
 &\quad + R_\mu(x) (\partial_\kappa \bar{\psi}) \gamma^\mu \gamma^\kappa \gamma_5 \gamma_\nu \psi - R_\kappa(x) (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \gamma^\kappa \gamma_5 \gamma_\nu \psi - R_\mu(x) \bar{\psi} \gamma_\nu \gamma^\kappa \gamma^\mu \gamma_5 (\partial_\kappa \psi) + \\
 &\quad + R_\kappa(x) \bar{\psi} \gamma_\nu \gamma^\kappa \gamma^\mu \gamma_5 (\partial_\mu \psi),
 \end{aligned}$$

assim, podemos identifica que

$$\begin{aligned}
 &\overbrace{= -2 [\partial_\nu \xi_\mu(x)] \bar{\psi} \gamma^\mu \psi - 2i [\partial_\nu \zeta(x)] \bar{\psi} \gamma_5 \psi - 2 [\partial_\nu R_\mu(x)] \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi +}^{\text{Parte que precisamos, o restante deve se anular.}} \\
 &\quad + 2i [\partial^\kappa \xi^\mu(x)] \bar{\psi} (\gamma_\mu \Sigma_{\kappa\nu} + \Sigma_{\nu\kappa} \gamma_\mu) \psi + 2i [\partial^\kappa R^\mu(x)] \bar{\psi} (\gamma_\mu \Sigma_{\kappa\nu} + \Sigma_{\nu\kappa} \gamma_\mu) \gamma_5 \psi \\
 &\quad - \xi_\mu(x) (\partial_\kappa \bar{\psi}) \gamma^\mu \gamma^\kappa \gamma_\nu \psi - \xi_\kappa(x) (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \gamma^\kappa \gamma_\nu \psi - \xi_\mu(x) \bar{\psi} \gamma_\nu \gamma^\kappa \gamma^\mu (\partial_\kappa \psi) - \\
 &\quad - \xi_\kappa(x) \bar{\psi} \gamma_\nu \gamma^\kappa \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) + \\
 &\quad + R_\mu(x) (\partial_\kappa \bar{\psi}) \gamma^\mu \gamma^\kappa \gamma_5 \gamma_\nu \psi - R_\kappa(x) (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \gamma^\kappa \gamma_5 \gamma_\nu \psi - R_\mu(x) \bar{\psi} \gamma_\nu \gamma^\kappa \gamma^\mu \gamma_5 (\partial_\kappa \psi) + \\
 &\quad + R_\kappa(x) \bar{\psi} \gamma_\nu \gamma^\kappa \gamma^\mu \gamma_5 (\partial_\mu \psi).
 \end{aligned}$$

Para seguir, escrevemos a parcela acima sob a forma

$$\begin{aligned}
 &\overbrace{= -2 [\partial_\nu \xi_\mu(x)] \bar{\psi} \gamma^\mu \psi - 2i [\partial_\nu \zeta(x)] \bar{\psi} \gamma_5 \psi - 2 [\partial_\nu R_\mu(x)] \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi +}^{\text{Parte que precisamos, o restante deve se anular.}} \\
 &\quad + 2i [\partial^\kappa \xi^\mu(x)] \bar{\psi} (\gamma_\mu \Sigma_{\kappa\nu} + \Sigma_{\nu\kappa} \gamma_\mu) \psi + 2i [\partial^\kappa R^\mu(x)] \bar{\psi} (\gamma_\mu \Sigma_{\kappa\nu} + \Sigma_{\nu\kappa} \gamma_\mu) \gamma_5 \psi \\
 &\quad + T + W,
 \end{aligned} \tag{E.13}$$

e mantemos em mente que de forma geral

$$\begin{aligned}
 \gamma_\mu \Sigma_{\kappa\nu} &= \frac{i}{2} (\eta_{\mu\kappa} \gamma_\nu - \eta_{\mu\nu} \gamma_\kappa + i \varepsilon_{\mu\kappa\nu\sigma} \gamma^\sigma \gamma_5), \\
 \Sigma_{\nu\kappa} \gamma_\mu &= \frac{i}{2} (\eta_{\kappa\mu} \gamma_\nu - \eta_{\nu\mu} \gamma_\kappa + i \varepsilon_{\nu\kappa\mu\sigma} \gamma^\sigma \gamma_5).
 \end{aligned}$$

Trabalhando o penúltimo termo de (E.13), vamos ter

$$\begin{aligned}
 T &= -\xi_\mu(x) (\partial_\kappa \bar{\psi}) \gamma^\mu \gamma^\kappa \gamma_\nu \psi - \\
 &\quad -\xi_\kappa(x) (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \gamma^\kappa \gamma_\nu \psi - \\
 &\quad -\xi_\mu(x) \bar{\psi} \gamma_\nu \gamma^\kappa \gamma^\mu (\partial_\kappa \psi) - \\
 &\quad -\xi_\kappa(x) \bar{\psi} \gamma_\nu \gamma^\kappa \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) \\
 &= -\xi^\mu (\partial_\nu \bar{\psi}) \gamma_\mu \psi + 2i (\partial^\kappa \bar{\psi}) \gamma_\mu \Sigma_{\kappa\nu} \psi - \\
 &\quad -\xi_\nu (\partial^\mu \bar{\psi}) \gamma_\mu \psi + 2i \xi^\kappa (\partial^\mu \bar{\psi}) \gamma_\mu \Sigma_{\kappa\nu} \psi \\
 &\quad -\xi_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\nu \psi) + 2i \xi^\mu \bar{\psi} \Sigma_{\nu\kappa} \gamma_\mu (\partial^\kappa \psi) - \\
 &\quad -\xi_\nu \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) + 2i \xi^\kappa \bar{\psi} \Sigma_{\nu\kappa} \gamma_\mu (\partial_\mu \psi) \\
 &= -\xi^\mu (\partial_\nu \bar{\psi}) \gamma_\mu \psi - 2i (\partial^\kappa \xi^\mu) \bar{\psi} \gamma_\mu \Sigma_{\kappa\nu} \psi - 2i \xi^\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \Sigma_{\kappa\nu} (\partial^\kappa \psi) + 2i \partial^\kappa (\xi^\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \Sigma_{\kappa\nu} \psi) - \\
 &\quad -\xi_\nu (\partial^\mu \bar{\psi}) \gamma_\mu \psi - \xi_\mu (\partial^\mu \bar{\psi}) \gamma_\nu \psi + \xi_\kappa (\partial_\nu \bar{\psi}) \gamma^\kappa \psi - i \varepsilon_{\mu\kappa\nu\sigma} \xi^\kappa (\partial^\mu \bar{\psi}) \gamma^\sigma \gamma_5 \psi - \\
 &\quad -\xi_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\nu \psi) - 2i (\partial^\kappa \xi^\mu) \bar{\psi} \Sigma_{\nu\kappa} \gamma_\mu \psi - 2i \xi^\mu (\partial^\kappa \bar{\psi}) \Sigma_{\nu\kappa} \gamma_\mu \psi + 2i \partial^\kappa (\xi^\mu \bar{\psi} \Sigma_{\nu\kappa} \gamma_\mu \psi) - \\
 &\quad -\xi_\nu \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) - \xi_\mu \bar{\psi} \gamma_\nu (\partial^\mu \psi) + \xi^\kappa \bar{\psi} \gamma_\kappa (\partial_\nu \psi) - i \varepsilon_{\nu\kappa\mu\sigma} \xi^\kappa \bar{\psi} \gamma^\sigma \gamma_5 (\partial^\mu \psi) \\
 &= -\xi^\mu (\partial_\nu \bar{\psi}) \gamma_\mu \psi - 2i (\partial^\kappa \xi^\mu) \bar{\psi} \gamma_\mu \Sigma_{\kappa\nu} \psi + \xi_\kappa \bar{\psi} \gamma_\nu (\partial^\kappa \psi) - \xi_\nu \bar{\psi} \gamma_\kappa (\partial^\kappa \psi) + \\
 &\quad + i \varepsilon_{\mu\kappa\nu\sigma} \xi^\mu \bar{\psi} \gamma^\sigma \gamma_5 (\partial^\kappa \psi) + 2i \partial^\kappa (\xi^\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \Sigma_{\kappa\nu} \psi) - \\
 &\quad -\xi_\nu (\partial^\mu \bar{\psi}) \gamma_\mu \psi - \xi_\mu (\partial^\mu \bar{\psi}) \gamma_\nu \psi + \xi_\kappa (\partial_\nu \bar{\psi}) \gamma^\kappa \psi - i \varepsilon_{\mu\kappa\nu\sigma} \xi^\kappa (\partial^\mu \bar{\psi}) \gamma^\sigma \gamma_5 \psi - \\
 &\quad -\xi_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\nu \psi) - 2i (\partial^\kappa \xi^\mu) \bar{\psi} \Sigma_{\nu\kappa} \gamma_\mu \psi + \xi_\kappa (\partial^\kappa \bar{\psi}) \gamma_\nu \psi - \xi_\nu (\partial^\kappa \bar{\psi}) \gamma_\kappa \psi + \\
 &\quad + i \varepsilon_{\nu\kappa\mu\sigma} \xi^\mu (\partial^\kappa \bar{\psi}) \gamma^\sigma \gamma_5 \psi + 2i \partial^\kappa (\xi^\mu \bar{\psi} \Sigma_{\nu\kappa} \gamma_\mu \psi) - \\
 &\quad -\xi_\nu \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) - \xi_\mu \bar{\psi} \gamma_\nu (\partial^\mu \psi) + \xi^\kappa \bar{\psi} \gamma_\kappa (\partial_\nu \psi) - i \varepsilon_{\nu\kappa\mu\sigma} \xi^\kappa \bar{\psi} \gamma^\sigma \gamma_5 (\partial^\mu \psi) \\
 &= -2i [\partial^\kappa \xi^\mu(x)] \bar{\psi} (\gamma_\mu \Sigma_{\kappa\nu} + \Sigma_{\nu\kappa} \gamma_\mu) \psi - 2\xi_\nu \partial^\mu (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) + 2i \partial^\kappa (\xi^\mu \bar{\psi} \Sigma_{\nu\kappa} \gamma_\mu \psi) + \\
 &\quad + 2i \partial^\kappa (\xi^\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \Sigma_{\kappa\nu} \psi) \\
 &= -2i [\partial^\kappa \xi^\mu(x)] \bar{\psi} (\gamma_\mu \Sigma_{\kappa\nu} + \Sigma_{\nu\kappa} \gamma_\mu) \psi - 2\xi_\nu \partial^\mu (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) - 2\partial^\kappa (\xi_\kappa \bar{\psi} \gamma_\nu \psi) + 2\partial^\kappa (\xi_\nu \bar{\psi} \gamma_\kappa \psi).
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$T = -2i [\partial^\kappa \xi^\mu(x)] \bar{\psi} (\gamma_\mu \Sigma_{\kappa\nu} + \Sigma_{\nu\kappa} \gamma_\mu) \psi - 2\partial_\mu (\xi^\mu \bar{\psi} \gamma_\nu \psi) + 2(\partial_\mu \xi_\nu) (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi). \quad (\text{E.14})$$

Trabalhando agora o último termo em (E.13), vamos ter

$$\begin{aligned}
 W &= + R_\mu(x) (\partial_\kappa \bar{\psi}) \gamma^\mu \gamma^\kappa \gamma_5 \gamma_\nu \psi \\
 &\quad - R_\kappa(x) (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \gamma^\kappa \gamma_5 \gamma_\nu \psi \\
 &\quad - R_\mu(x) \bar{\psi} \gamma_\nu \gamma^\kappa \gamma^\mu \gamma_5 (\partial_\kappa \psi) \\
 &\quad + R_\kappa(x) \bar{\psi} \gamma_\nu \gamma^\kappa \gamma^\mu \gamma_5 (\partial_\mu \psi) \\
 &= - R^\mu (\partial_\nu \bar{\psi}) \gamma_\mu \gamma_5 \psi - 2i (\partial^\kappa R^\mu) \bar{\psi} \gamma_\mu \Sigma_{\kappa\nu} \gamma_5 \psi + R_\kappa \bar{\psi} \gamma_\nu \gamma_5 (\partial^\kappa \psi) - R_\nu \bar{\psi} \gamma_\kappa \gamma_5 (\partial^\kappa \psi) + \\
 &\quad + i\varepsilon_{\mu\kappa\nu\sigma} R^\mu \bar{\psi} \gamma^\sigma (\partial^\kappa \psi) + 2i \partial^\kappa (R^\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \Sigma_{\kappa\nu} \gamma_5 \psi) + \\
 &\quad + R_\nu (\partial^\mu \bar{\psi}) \gamma_\mu \gamma_5 \psi + R_\mu (\partial^\mu \bar{\psi}) \gamma_\nu \gamma_5 \psi - R_\kappa (\partial_\nu \bar{\psi}) \gamma^\kappa \gamma_5 \psi + i\varepsilon_{\mu\kappa\nu\sigma} R^\kappa (\partial^\mu \bar{\psi}) \gamma^\sigma \psi - \\
 &\quad - R_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\nu \gamma_5 \psi) - 2i (\partial^\kappa R^\mu) \bar{\psi} \Sigma_{\nu\kappa} \gamma_\mu \gamma_5 \psi + R_\kappa (\partial^\kappa \bar{\psi}) \gamma_\nu \gamma_5 \psi - R_\nu (\partial^\kappa \bar{\psi}) \gamma_\kappa \gamma_5 \psi + \\
 &\quad + i\varepsilon_{\nu\kappa\mu\sigma} \xi^\mu (\partial^\kappa \bar{\psi}) \gamma^\sigma \psi + 2i \partial^\kappa (R^\mu \bar{\psi} \Sigma_{\nu\kappa} \gamma_\mu \psi \gamma_5) + \\
 &\quad + R_\nu \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 (\partial_\mu \psi) + R_\mu \bar{\psi} \gamma_\nu \gamma_5 (\partial^\mu \psi) - R^\kappa \bar{\psi} \gamma_\kappa \gamma_5 (\partial_\nu \psi) + i\varepsilon_{\nu\kappa\mu\sigma} \xi^\kappa \bar{\psi} \gamma^\sigma (\partial^\mu \psi) \\
 &= - 2i [\partial^\kappa R^\mu(x)] \bar{\psi} (\gamma_\mu \Sigma_{\kappa\nu} + \Sigma_{\nu\kappa} \gamma_\mu) \gamma_5 \psi - 2R_\mu \partial_\nu (\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi) + 2R_\mu \partial^\mu (\bar{\psi} \gamma_\nu \gamma_5) + \\
 &\quad + 2i\varepsilon_{\mu\kappa\nu\sigma} R^\mu \partial^\kappa (\bar{\psi} \gamma^\sigma \psi) + 2i \partial^\kappa (R^\mu \bar{\psi} \Sigma_{\nu\kappa} \gamma_\mu \psi \gamma_5) + 2i \partial^\kappa (R^\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \Sigma_{\kappa\nu} \gamma_5 \psi) \\
 &= - 2i [\partial^\kappa R^\mu(x)] \bar{\psi} (\gamma_\mu \Sigma_{\kappa\nu} + \Sigma_{\nu\kappa} \gamma_\mu) \gamma_5 \psi - 2R_\mu \partial_\nu (\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi) + 2R_\mu \partial^\mu (\bar{\psi} \gamma_\nu \gamma_5) + \\
 &\quad + 2i\varepsilon_{\mu\kappa\nu\sigma} R^\mu \partial^\kappa (\bar{\psi} \gamma^\sigma \psi) \\
 &\quad - (\partial_\kappa R^\kappa) \bar{\psi} \gamma_\nu \gamma_5 \psi - R^\kappa \partial_\kappa (\bar{\psi} \gamma_\nu \gamma_5 \psi) + (\partial^\kappa R_\nu) \bar{\psi} \gamma_\kappa \gamma_5 \psi + R_\nu \partial^\kappa (\bar{\psi} \gamma_\kappa \gamma_5 \psi) - \\
 &\quad - i\varepsilon_{\mu\kappa\nu\sigma} (\partial^\kappa R^\mu) \bar{\psi} \gamma^\sigma \psi - i\varepsilon_{\mu\kappa\nu\sigma} R^\mu \partial^\kappa (\bar{\psi} \gamma^\sigma \psi) \\
 &\quad - (\partial_\kappa R^\kappa) \bar{\psi} \gamma_\nu \gamma_5 \psi - R^\kappa \partial_\kappa (\bar{\psi} \gamma_\nu \gamma_5 \psi) + (\partial^\kappa R_\nu) \bar{\psi} \gamma_\kappa \gamma_5 \psi + R_\nu \partial^\kappa (\bar{\psi} \gamma_\kappa \gamma_5 \psi) - \\
 &\quad - i\varepsilon_{\nu\mu\kappa\sigma} (\partial^\kappa R^\mu) \bar{\psi} \gamma^\sigma \psi - i\varepsilon_{\nu\mu\kappa\sigma} R^\mu \partial^\kappa (\bar{\psi} \gamma^\sigma \psi).
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 W &= - 2i [\partial^\kappa R^\mu(x)] \bar{\psi} (\gamma_\mu \Sigma_{\kappa\nu} + \Sigma_{\nu\kappa} \gamma_\mu) \gamma_5 \psi - 2R_\mu \partial_\nu (\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi) + 2\partial^\kappa (R_\nu \bar{\psi} \gamma_\kappa \gamma_5 \psi) - \\
 &\quad - 2 (\partial_\kappa R^\kappa) \bar{\psi} \gamma_\nu \gamma_5 \psi + i\varepsilon_{\mu\kappa\nu\sigma} (R^\kappa \partial^\mu - R^\mu \partial^\kappa) (\bar{\psi} \gamma^\sigma \psi). \tag{E.15}
 \end{aligned}$$

Então, finalmente, levando os resultados (E.14) e (E.15) em (E.13), teremos

$$\begin{aligned}
 &\overbrace{- 2 [\partial_\nu \xi_\mu(x)] \bar{\psi} \gamma^\mu \psi - 2i [\partial_\nu \zeta(x)] \bar{\psi} \gamma_5 \psi - 2 [\partial_\nu R_\mu(x)] \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi}^{\text{Parte que precisamos.}} \\
 &\quad - \overbrace{2\partial_\mu (\xi^\mu \bar{\psi} \gamma_\nu \psi) + 2 (\partial_\mu \xi_\nu) (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)}^{\text{Parte que vem de } T.} \\
 &\quad - \overbrace{2R_\mu \partial_\nu (\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi) + 2\partial^\kappa (R_\nu \bar{\psi} \gamma_\kappa \gamma_5 \psi) - 2 (\partial_\kappa R^\kappa) \bar{\psi} \gamma_\nu \gamma_5 \psi + i\varepsilon_{\mu\kappa\nu\sigma} (R^\kappa \partial^\mu - R^\mu \partial^\kappa) (\bar{\psi} \gamma^\sigma \psi)}^{\text{Parte que vem de } W.} \\
 &\tag{E.16}
 \end{aligned}$$

Assim, fica mostrado que o processo de simetrização não é válido.

E.2 Caso da equação de com derivada modificada

- Proveniente da equação de Dirac livre:

Partindo das equações de campo

$$\left\{ \frac{i\hbar}{c} \gamma^0 \partial_t - i\hbar \text{Re}(\xi) \gamma^i \partial_i - mc - \frac{\hbar}{2} [\partial_i \text{Im}(\xi(x))] \gamma^i \right\} \psi = 0 \quad (\text{E.17})$$

e

$$\bar{\psi} \left\{ \frac{i\hbar}{c} \gamma^0 \bar{\partial}_t - i\hbar \text{Re}(\xi) \gamma^i \bar{\partial}_i + mc + \frac{\hbar}{2} [\partial_i \text{Im}(\xi(x))] \gamma^i \right\} = 0. \quad (\text{E.18})$$

Proponho reescrever estas equações sob a forma

$$\left\{ i\hbar \gamma^\mu \tilde{\partial}_\mu - mc - \frac{\hbar}{2} [\partial_i \text{Im}(\xi(x))] \gamma^i \right\} \psi = 0 \quad (\text{E.19})$$

e

$$i\hbar (\tilde{\partial}_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu + \bar{\psi} \left\{ mc + \frac{\hbar}{2} [\partial_i \text{Im}(\xi(x))] \gamma^i \right\} = 0. \quad (\text{E.20})$$

Isso considerando que

$$\tilde{\partial}_\mu = \left(\partial_0, -\text{Re}(\xi) \partial_i \right). \quad (\text{E.21})$$

Então, para construir o tensor energia momento começo multiplicando a equação (E.19) à esquerda pelo fator $(\partial_\nu \bar{\psi})$. Ou seja,

$$i\hbar (\partial_\nu \bar{\psi}) \gamma^\mu (\tilde{\partial}_\mu \psi) - mc (\partial_\nu \bar{\psi}) \psi - \frac{\hbar}{2} [\partial_i \text{Im}(\xi(x))] (\partial_\nu \bar{\psi}) \gamma^i \psi = 0. \quad (\text{E.22})$$

Explicitando uma quadri-divergência em $\tilde{\partial}_\mu$, teremos

$$i\hbar \tilde{\partial}_\mu [(\partial_\nu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi] - i\hbar [(\partial_\nu \tilde{\partial}_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi] - mc (\partial_\nu \bar{\psi}) \psi - \frac{\hbar}{2} [\partial_i \text{Im}(\xi(x))] (\partial_\nu \bar{\psi}) \gamma^i \psi = 0,$$

$$i\hbar \tilde{\partial}_\mu [(\partial_\nu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi] + \left\{ \partial_\nu \left[\bar{\psi} \left(mc + \frac{\hbar}{2} (\partial_i \text{Im}(\xi(x))) \gamma^i \right) \right] \right\} \psi - mc (\partial_\nu \bar{\psi}) \psi - \frac{\hbar}{2} (\partial_i \text{Im}(\xi(x))) (\partial_\nu \bar{\psi}) \gamma^i \psi = 0.$$

Portanto,

$$i\hbar \tilde{\partial}_\mu [(\partial_\nu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi] + \frac{\hbar}{2} [\partial_\nu \partial_i \text{Im}(\xi(x))] \bar{\psi} \gamma^i \psi = 0. \quad (\text{E.23})$$

Agora multiplicando à direita da equação (E.20) pelo fator $(\partial_\nu \psi)$, teremos

$$i\hbar (\tilde{\partial}_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu (\partial_\nu \psi) + \bar{\psi} mc (\partial_\nu \psi) + \frac{\hbar}{2} \left[\partial_i \text{Im}(\xi(x)) \right] \bar{\psi} \gamma^i (\partial_\nu \psi) = 0. \quad (\text{E.24})$$

Explicitando uma quadri-divergência em $\tilde{\partial}_\mu$, teremos

$$i\hbar \tilde{\partial}_\mu \left[\bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\nu \psi) \right] - i\hbar \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\nu \tilde{\partial}_\mu \psi) + \bar{\psi} mc (\partial_\nu \psi) + \frac{\hbar}{2} \left[\partial_i \text{Im}(\xi(x)) \right] \bar{\psi} \gamma^i (\partial_\nu \psi) = 0,$$

$$i\hbar \tilde{\partial}_\mu \left[\bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\nu \psi) \right] - \bar{\psi} \left\{ \partial_\nu \left[\left(mc + \frac{\hbar}{2} \left(\partial_i \text{Im}(\xi(x)) \right) \gamma^i \right) \psi \right] \right\} + \bar{\psi} mc (\partial_\nu \psi) + \frac{\hbar}{2} \left[\partial_i \text{Im}(\xi(x)) \right] \bar{\psi} \gamma^i (\partial_\nu \psi) = 0.$$

Portanto,

$$i\hbar \tilde{\partial}_\mu \left[\bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\nu \psi) \right] - \frac{\hbar}{2} \left[\partial_\nu \partial_i \text{Im}(\xi(x)) \right] \bar{\psi} \gamma^i \psi = 0. \quad (\text{E.25})$$

Calculando agora a equação E.23 menos a equação (E.25), vamos ter que

$$i\hbar \tilde{\partial}_\mu \left[(\partial_\nu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi - \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\nu \psi) \right] = -\hbar \left[\partial_\nu \partial_i \text{Im}(\xi(x)) \right] \bar{\psi} \gamma^i \psi. \quad (\text{E.26})$$

Explicitando a soma em μ , temos que o lado direito deste resultado toma a forma

$$\begin{aligned} \tilde{\partial}_\mu \left[(\partial_\nu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi - \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\nu \psi) \right] &= \partial_0 \left[(\partial_\nu \bar{\psi}) \gamma^0 \psi - \bar{\psi} \gamma^0 (\partial_\nu \psi) \right] - \\ &\quad - \text{Re}(\xi) \partial_i \left[(\partial_\nu \bar{\psi}) \gamma^i \psi - \bar{\psi} \gamma^i (\partial_\nu \psi) \right] \\ &= \partial_0 \left[(\partial_\nu \bar{\psi}) \gamma^0 \psi - \bar{\psi} \gamma^0 (\partial_\nu \psi) \right] - \\ &\quad - \partial_i \left[(\partial_\nu \bar{\psi}) \text{Re}(\xi) \gamma^i \psi - \bar{\psi} \text{Re}(\xi) \gamma^i (\partial_\nu \psi) \right] \\ &= \partial_\mu \left[(\partial_\nu \bar{\psi}) \tilde{\gamma}^\mu \psi - \bar{\psi} \tilde{\gamma}^\mu (\partial_\nu \psi) \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.27})$$

Em que da passagem da primeira pra segunda linha uso fato de que $\text{Re}(\xi)$ é uma constante real e adoto a prescrição

$$\tilde{\gamma}^\mu = (\gamma^0, \text{Re}(\xi) \gamma^i). \quad (\text{E.28})$$

Sendo assim, posso escrever

$$i\hbar \tilde{\partial}_\mu \left[(\partial_\nu \bar{\psi}) \tilde{\gamma}^\mu \psi - \bar{\psi} \tilde{\gamma}^\mu (\partial_\nu \psi) \right] = -\hbar \left[\partial_\nu \partial_i \text{Im}(\xi(x)) \right] \bar{\psi} \gamma^i \psi. \quad (\text{E.29})$$

Como estamos a considerar que

$$i \partial_i \text{Im}(\xi(x)) = i \vec{w}_i, \quad (\text{E.30})$$

podemos escrever

$$i\hbar \tilde{\partial}_\mu \left[(\partial_\nu \bar{\psi}) \tilde{\gamma}^\mu \psi - \bar{\psi} \tilde{\gamma}^\mu (\partial_\nu \psi) \right] = -\hbar (\partial_\nu \vec{w}_i) \bar{\psi} \gamma^i \psi. \quad (\text{E.31})$$

- Proveniente da equação de Dirac com acoplamento mínimo:

Multiplicando à esquerda de (5.40) pelo fator $(\partial_\nu \bar{\psi})$, teremos

$$i\hbar (\partial_\nu \bar{\psi}) \gamma^\mu (\tilde{\partial}_\mu \psi) - mc (\partial_\nu \bar{\psi}) \psi - \frac{\hbar}{2} (\partial_i \text{Im}(\xi(x))) (\partial_\nu \bar{\psi}) \gamma^i \psi - qe \tilde{A}_\mu (\partial_\nu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi = 0. \quad (\text{E.32})$$

Explicitando a quadri-divergência em μ e fazendo manipulações parecidas com as anteriores, teremos

$$\begin{aligned} i\hbar \tilde{\partial}_\mu [(\partial_\nu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi] + \left\{ \partial_\nu \left[\bar{\psi} \left(mc + \frac{\hbar}{2} (\partial_i \text{Im}(\xi(x))) + qe \tilde{A}_\mu \gamma^\mu \right) \right] \right\} \psi - mc (\partial_\nu \bar{\psi}) \psi - \\ - \frac{\hbar}{2} (\partial_i \text{Im}(\xi(x))) (\partial_\nu \bar{\psi}) \gamma^i \psi - qe \tilde{A}_\mu (\partial_\nu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi = 0, \\ i\hbar \tilde{\partial}_\mu [(\partial_\nu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi] + \frac{\hbar}{2} (\partial_\nu \partial_i \text{Im}(\xi(x))) \bar{\psi} \gamma^i \psi + qe (\partial_\nu \tilde{A}_\mu) \bar{\psi} \gamma^\mu \psi = 0. \end{aligned} \quad (\text{E.33})$$

Agora multiplicando à direita de (5.41) pelo fator $(\partial_\nu \psi)$, teremos que

$$i\hbar (\tilde{\partial}_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu (\partial_\nu \psi) + mc \bar{\psi} (\partial_\nu \psi) + \frac{\hbar}{2} (\partial_i \text{Im}(\xi(x))) \bar{\psi} \gamma^i (\partial_\nu \psi) + qe \tilde{A}_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\nu \psi) = 0. \quad (\text{E.34})$$

Mais uma vez explicitando, como antes, a quadri-divergência em μ , poderemos escrever

$$\begin{aligned} i\hbar \tilde{\partial}_\mu [\bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\nu \psi)] - \bar{\psi} \left\{ \partial_\nu \left[\left(mc + \frac{\hbar}{2} (\partial_i \text{Im}(\xi(x))) \right) \gamma^i + qe \tilde{A}_\mu \gamma^\mu \right] \psi \right\} + mc \bar{\psi} (\partial_\nu \psi) + \\ + \frac{\hbar}{2} (\partial_i \text{Im}(\xi(x))) \bar{\psi} \gamma^i (\partial_\nu \psi) + qe \tilde{A}_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\nu \psi) = 0, \end{aligned}$$

$$i\hbar \tilde{\partial}_\mu [\bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\nu \psi)] - \frac{\hbar}{2} (\partial_\nu \partial_i \text{Im}(\xi(x))) \bar{\psi} \gamma^i \psi - qe (\partial_\nu \tilde{A}_\mu) \bar{\psi} \gamma^\mu \psi = 0. \quad (\text{E.35})$$

Subtraindo (E.33) menos (E.35), vem que

$$i\hbar \tilde{\partial}_\mu [(\partial_\nu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi - \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\nu \psi)] = -\hbar [\partial_\nu \partial_i \text{Im}(\xi(x))] \bar{\psi} \gamma^i \psi - 2qe (\partial_\nu \tilde{A}_\mu) \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (\text{E.36})$$

Trabalhando o lado esquerdo teremos, explicitando a soma em μ ,

$$\begin{aligned} \tilde{\partial}_\mu [(\partial_\nu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi - \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\nu \psi)] &= \partial_0 [(\partial_\nu \bar{\psi}) \gamma^0 \psi - \bar{\psi} \gamma^0 (\partial_\nu \psi)] - \\ &\quad - \text{Re}(\xi) \partial_i [(\partial_\nu \bar{\psi}) \gamma^i \psi - \bar{\psi} \gamma^i (\partial_\nu \psi)] \\ &= \partial_0 [(\partial_\nu \bar{\psi}) \gamma^0 \psi - \bar{\psi} \gamma^0 (\partial_\nu \psi)] - \\ &\quad - \partial_i [(\partial_\nu \bar{\psi}) \text{Re}(\xi) \gamma^i \psi - \bar{\psi} \text{Re}(\xi) \gamma^i (\partial_\nu \psi)] \\ &= \partial_\mu [(\partial_\nu \bar{\psi}) \tilde{\gamma}^\mu \psi - \bar{\psi} \tilde{\gamma}^\mu (\partial_\nu \psi)]. \end{aligned} \quad (\text{E.37})$$

Levando o resultado (E.37) em (E.36), poderemos escrever

$$i\hbar \partial_\mu [(\partial_\nu \bar{\psi}) \tilde{\gamma}^\mu \psi - \bar{\psi} \tilde{\gamma}^\mu (\partial_\nu \psi)] = -\hbar [\partial_\nu \partial_i \text{Im}(\xi(x))] \bar{\psi} \gamma^i \psi - 2qe (\partial_\nu \tilde{A}_\mu) \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (\text{E.38})$$

- Proveniente das equações de Maxwell:

Tomando a equação (5.48) e multiplicando-a pela esquerda por $F_{\nu\rho}$, teremos

$$\begin{aligned}
 (\partial_\mu F^{\mu\nu}) F_{\nu\rho} - \mu_0 \tilde{J}^\nu F_{\nu\rho} &= 0, \\
 \partial_\mu (F^{\mu\nu} F_{\nu\rho}) - F^{\mu\nu} (\partial_\mu F_{\nu\rho}) - \mu_0 \tilde{J}^\nu F_{\nu\rho} &= 0, \\
 \partial_\mu (F^{\mu\nu} F_{\nu\rho}) - F^{\mu\nu} (-\partial_\nu F_{\rho\mu} - \partial_\rho F_{\mu\nu}) - \mu_0 \tilde{J}^\nu F_{\nu\rho} &= 0, \\
 \partial_\mu (F^{\mu\nu} F_{\nu\rho}) + \partial_\rho \left(\frac{1}{2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) + \partial_\nu (F^{\mu\nu} F_{\rho\mu}) - (\partial_\nu F^{\mu\nu}) F_{\rho\mu} - \mu_0 \tilde{J}^\nu F_{\nu\rho} &= 0, \\
 \partial_\mu (F^{\mu\nu} F_{\nu\rho}) + \partial_\rho \left(\frac{1}{2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) + \partial_\nu (F^{\mu\nu} F_{\rho\mu}) - (\partial_\nu F^{\nu\mu}) F_{\mu\rho} - \mu_0 \tilde{J}^\nu F_{\nu\rho} &= 0, \\
 \partial_\mu (2F^{\mu\nu} F_{\nu\rho}) + \partial_\mu \left(\frac{1}{2} \delta^\mu{}_\rho F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) - \mu_0 \tilde{J}^\mu F_{\mu\rho} - \mu_0 \tilde{J}^\nu F_{\nu\rho} &= 0.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \partial_\mu \left(\frac{1}{\mu_0} F^{\mu\alpha} F_{\alpha\nu} + \frac{1}{4\mu_0} \delta^\mu{}_\nu F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) &= \tilde{J}^\alpha F_{\alpha\nu} = -\tilde{J}^\alpha F_{\nu\alpha} \\
 &= -2\tilde{J}^\alpha (\partial_\nu A_\alpha) \\
 &= -2(\partial_\nu A_0) J^0 + 2(\partial_\nu \vec{A}_i) J^i \\
 &= -2qe (\partial_\nu A_0) \bar{\psi} \gamma^0 \psi + 2\text{Re}(\xi) qe (\partial_\nu \vec{A}_i) \bar{\psi} \gamma^i \psi \\
 &= -2qe (\partial_\nu \tilde{A}_\alpha) \psi \gamma^\alpha \psi.
 \end{aligned} \tag{E.39}$$

Ou seja,

$$\partial_\mu \left(\frac{1}{\mu_0} F^{\mu\alpha} F_{\alpha\nu} + \frac{1}{4\mu_0} \delta^\mu{}_\nu F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) = \tilde{J}^\alpha F_{\alpha\nu} = -2qe (\partial_\nu \tilde{A}_\alpha) \psi \gamma^\alpha \psi. \tag{E.40}$$

- Tensor energia-momento total:

Dos resultados acima, podemos ver que o último termo do lado esquerdo da equação (E.38) é exatamente igual ao resultado que obtivemos para o tensor energia-momento eletromagnético na equação (E.40). Sendo assim, podemos escrever a equação (E.38) sob a forma

$$\begin{aligned}
 i\hbar \partial_\mu \left[(\partial_\nu \bar{\psi}) \tilde{\gamma}^\mu \psi - \bar{\psi} \tilde{\gamma}^\mu (\partial_\nu \psi) \right] &= -\hbar \left[\partial_\nu \partial_i \text{Im}(\xi(x)) \right] \bar{\psi} \gamma^i \psi + \\
 &+ \partial_\mu \left(\frac{1}{\mu_0} F^{\mu\alpha} F_{\alpha\nu} + \frac{1}{4\mu_0} \delta^\mu{}_\nu F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right).
 \end{aligned} \tag{E.41}$$

Então, portanto, temos

$$\partial_\mu \left[i\hbar (\partial_\nu \bar{\psi}) \tilde{\gamma}^\mu \psi - i\hbar \bar{\psi} \tilde{\gamma}^\mu (\partial_\nu \psi) - \frac{1}{\mu_0} F^{\mu\alpha} F_{\alpha\nu} - \frac{1}{4\mu_0} \delta^\mu{}_\nu F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right] = -\hbar \left[\partial_\nu \partial_i \text{Im}(\xi(x)) \right] \bar{\psi} \gamma^i \psi. \tag{E.42}$$

Como estamos a considerar que

$$i\partial_i \text{Im}(\xi(x)) = i\vec{w}_i, \quad (\text{E.43})$$

podemos escrever

$$\partial_\mu \left[i\hbar (\partial_\nu \bar{\psi}) \tilde{\gamma}^\mu \psi - i\hbar \bar{\psi} \tilde{\gamma}^\mu (\partial_\nu \psi) - \frac{1}{\mu_0} F^{\mu\alpha} F_{\alpha\nu} - \frac{1}{4\mu_0} \delta^\mu_\nu F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right] = -\hbar (\partial_\nu \vec{w}_i) \bar{\psi} \gamma^i \psi. \quad (\text{E.44})$$

Apêndice F

Soluções da equação de Dirac modificada com

$$R_\mu = 0$$

F.1 Soluções de energias positivas no referencial do laboratório

Para a obtermos as soluções de energia positiva para a equação de Dirac estendida no referencial do laboratório, assumimos solução em ondas planas do tipo

$$\psi(x, \pm s) = u(\mathcal{P}) e^{-i\mathcal{P}_\mu x^\mu / \hbar} = \begin{pmatrix} u_a(\mathcal{P}, \pm s) \\ u_b(\mathcal{P}, \pm s) \end{pmatrix} e^{-i\mathcal{P}_\mu x^\mu / \hbar}. \quad (\text{F.1})$$

Onde $\psi(\mathcal{P}, \pm s)$ é um espinor no espaço dos momenta que descrevendo um férmion no referêcia do laboratório com projeção de spin $\pm s$. Estamos considerando o quadri-momento \mathcal{P}_μ tomando a forma das prescrições da igualdade (4.8) e (4.9) da seguinte forma:

$$\mathcal{P}_\mu = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, -\vec{\mathcal{P}}_i \right). \quad (\text{F.2})$$

Lembrando que

$$\mathcal{E} = \pm \varepsilon, \quad (\text{F.3})$$

considerando que

$$\varepsilon = c \sqrt{\vec{\mathcal{P}}_i^2 + m^2 c^2 - \zeta^2}, \quad (\text{F.4})$$

vamos considerar que a proposta de solução dada pela equação (F.1) esta vinculada com o espectro de energias positivas, isto é, $\mathcal{E} = +\varepsilon$.

Então, considerando que essa proposta geral é solução de

$$(i\hbar\gamma^\mu \partial_\mu - mc - i\zeta\gamma_5) \psi(x, \pm s) = 0, \quad (\text{F.5})$$

podemos ver que retomamos, sem maiores problemas, a equação (3.6), que descreve a equação de Dirac estendida que estamos considerando no espaço dos momenta. Ou seja, de fato $\psi(\mathcal{P}, \pm s)$ é solução da equação (3.6). Sob essa perspectiva, calculando as derivadas da equação (F.5), podemos escrever

$$\left(\mathcal{E}\gamma^0 - c\vec{\mathcal{P}}_i\gamma^i - mc^2 - ic\zeta\gamma_5\right)u(\mathcal{P}, \pm s) = 0. \quad (\text{F.6})$$

O que equivale a

$$\left[\varepsilon \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} - c\vec{\mathcal{P}}_i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} - mc^2 \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} - ic\zeta \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} u_a(\mathcal{P}, \pm s) \\ u_b(\mathcal{P}, \pm s) \end{pmatrix} = 0, \quad (\text{F.7})$$

em que estamos considerando a representação de Dirac para as matrizes gama. Este resultado se reduz de tal forma que devemos satisfazer

$$(\varepsilon - mc^2)u_a(\mathcal{P}, \pm s) = (c\vec{\mathcal{P}}_i\sigma_i + ic\zeta)u_b(\mathcal{P}, \pm s) \quad (\text{F.8})$$

e

$$(\varepsilon + mc^2)u_b(\mathcal{P}, \pm s) = (c\vec{\mathcal{P}}_i\sigma_i - ic\zeta)u_a(\mathcal{P}, \pm s). \quad (\text{F.9})$$

Então, teremos que

$$u_b(\mathcal{P}, \pm s) = \frac{(c\vec{\mathcal{P}}_i\sigma_i - ic\zeta)}{(\varepsilon + mc^2)}u_a(\mathcal{P}, \pm s). \quad (\text{F.10})$$

• Solução de spin up

Assim como no caso da equação de Dirac usual, para construir a solução de spin up, tomamos

$$u_a(\mathcal{P}, +s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de forma que

$$u_b(\mathcal{P}, +s) = \frac{c}{\varepsilon + mc^2} \begin{pmatrix} \vec{\mathcal{P}}_3 - i\zeta & \vec{\mathcal{P}}_1 - i\vec{\mathcal{P}}_2 \\ \vec{\mathcal{P}}_1 + i\vec{\mathcal{P}}_2 & -\vec{\mathcal{P}}_3 - i\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{F.11})$$

e assim, teremos que

$$u_b(\mathcal{P}, +s) = \frac{c}{\varepsilon + mc^2} \begin{pmatrix} \vec{\mathcal{P}}_3 - i\zeta \\ \vec{\mathcal{P}}_1 + i\vec{\mathcal{P}}_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{F.12})$$

Com isso, teremos que a solução para uma partícula com spin up no referencial do laboratório sera

$$u(\mathcal{P}, +s) = N_+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c(\vec{\mathcal{P}}_3 - i\zeta)}{\varepsilon + mc^2} \\ \frac{c(\vec{\mathcal{P}}_1 + i\vec{\mathcal{P}}_2)}{\varepsilon + mc^2} \end{pmatrix}. \quad (\text{F.13})$$

Onde N_+ é um coeficiente de normalização a ser determinada.

- **Solução de spin down**

Já no caso solução de spin down, tomamos

$$u_a(\mathcal{P}, -s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

de forma que

$$u_b(\mathcal{P}, -s) = \frac{c}{\varepsilon + mc^2} \begin{pmatrix} \vec{\mathcal{P}}_3 - i\zeta & \vec{\mathcal{P}}_1 - i\vec{\mathcal{P}}_2 \\ \vec{\mathcal{P}}_1 + i\vec{\mathcal{P}}_2 & -\vec{\mathcal{P}}_3 - i\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{F.14})$$

e então, teremos que

$$u_b(\mathcal{P}, -s) = \frac{c}{\varepsilon + mc^2} \begin{pmatrix} \vec{\mathcal{P}}_1 - i\vec{\mathcal{P}}_2 \\ -\vec{\mathcal{P}}_3 - i\zeta \end{pmatrix}. \quad (\text{F.15})$$

Sendo assim, a solução para uma partícula com spin down no referencial do laboratório sera

$$u(\mathcal{P}, -s) = N_- \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c(\vec{\mathcal{P}}_1 - i\vec{\mathcal{P}}_2)}{\varepsilon + mc^2} \\ \frac{-c(\vec{\mathcal{P}}_3 + i\zeta)}{\varepsilon + mc^2} \end{pmatrix}. \quad (\text{F.16})$$

Onde N_- é outro um coeficiente de normalização a ser determinado.

F.1.1 Condição de normalização para as soluções de energias positivas

- **Para o caso do spin up, vamos ter que**

$$\begin{aligned} \bar{u}(\mathcal{P}, +s)u(\mathcal{P}, +s) &= u^\dagger(\mathcal{P}, +s)\gamma_0 u(\mathcal{P}, +s) = \\ &= N_+^2 \begin{pmatrix} 1, 0, \frac{c(\vec{\mathcal{P}}_3 + i\zeta)}{\mathcal{E} + mc^2}, \frac{c(\vec{\mathcal{P}}_1 - i\vec{\mathcal{P}}_2)}{\varepsilon + mc^2} \end{pmatrix} \gamma_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c(\vec{\mathcal{P}}_3 - i\zeta)}{\varepsilon + mc^2} \\ \frac{c(\vec{\mathcal{P}}_1 + i\vec{\mathcal{P}}_2)}{\mathcal{E} + mc^2} \end{pmatrix} \\ &= N_+^2 \left[1 - c^2 \frac{\vec{\mathcal{P}}_i^2 + \zeta^2}{(\varepsilon + mc^2)^2} \right] \\ &= N_+^2 \frac{(\mathcal{E} + mc^2)^2 - c^2(\vec{\mathcal{P}}_i^2 + \zeta^2)}{(\varepsilon + mc^2)(\mathcal{E} + mc^2)} \\ &= N_+^2 \frac{2mc^2(\mathcal{E} + mc^2)}{(\varepsilon + mc^2)(\varepsilon + mc^2)} = 1. \end{aligned} \quad (\text{F.17})$$

Portanto,

$$N_+ = \sqrt{\frac{\varepsilon + mc^2}{2mc^2}}. \quad (\text{F.18})$$

Isso se reflete em $u^\dagger(\mathcal{P}, +s)u(\mathcal{P}, +s)$ de forma que

$$\begin{aligned} u^\dagger(\mathcal{P}, +s)u(\mathcal{P}, +s) &= \frac{\varepsilon + mc^2}{2mc^2} \left(1, 0, \frac{c(\vec{\mathcal{P}}_3 + i\zeta)}{\mathcal{E} + mc^2}, \frac{c(\vec{\mathcal{P}}_1 - i\vec{\mathcal{P}}_2)}{\varepsilon + mc^2} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c(\vec{\mathcal{P}}_3 - i\zeta)}{\varepsilon + mc^2} \\ \frac{c(\vec{\mathcal{P}}_1 + i\vec{\mathcal{P}}_2)}{\varepsilon + mc^2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\varepsilon + mc^2}{2mc^2} \left[1 + c^2 \frac{\vec{\mathcal{P}}_i^2 + \zeta^2}{(\varepsilon + mc^2)^2} \right] = \frac{1}{2mc^2} \left[\frac{2(\mathcal{E} + mc^2)\mathcal{E}}{\varepsilon + mc^2} \right] \\ &= \frac{\varepsilon}{mc^2}. \end{aligned} \quad (\text{F.19})$$

- Para o caso do spin down, vamos ter que

$$\begin{aligned} \bar{u}(\mathcal{P}, -s)u(\mathcal{P}, -s) &= u^\dagger(\mathcal{P}, -s)\gamma_0 u(\mathcal{P}, -s) = \\ &= N_-^2 \left(0, 1, \frac{c(\vec{\mathcal{P}}_1 + i\vec{\mathcal{P}}_2)}{\varepsilon + mc^2}, \frac{-c(\vec{\mathcal{P}}_3 - i\zeta)}{\varepsilon + mc^2} \right) \gamma_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c(\vec{\mathcal{P}}_1 - i\vec{\mathcal{P}}_2)}{\varepsilon + mc^2} \\ \frac{-c(\vec{\mathcal{P}}_3 + i\zeta)}{\varepsilon + mc^2} \end{pmatrix} \\ &= N_-^2 \left[1 - c^2 \frac{\vec{\mathcal{P}}_i^2 + \zeta^2}{(\mathcal{E} + mc^2)^2} \right] \\ &= N_-^2 \frac{(\varepsilon + mc^2)^2 - c^2(\vec{\mathcal{P}}_i^2 + \zeta^2)}{(\mathcal{E} + mc^2)(\varepsilon + mc^2)} \\ &= N_-^2 \frac{2mc^2(\varepsilon + mc^2)}{(\varepsilon + mc^2)(\varepsilon + mc^2)} = 1. \end{aligned} \quad (\text{F.20})$$

Portanto,

$$N = \sqrt{\frac{\varepsilon + mc^2}{2mc^2}}. \quad (\text{F.21})$$

O que se reflete em $u^\dagger(\mathcal{P}, -s)u(\mathcal{P}, -s)$ de tal maneira que

$$\begin{aligned}
 u^\dagger(\mathcal{P}, -s)u(\mathcal{P}, -s) &= \frac{\varepsilon + mc^2}{2mc^2} \left(0, 1, \frac{c(\vec{\mathcal{P}}_1 + i\vec{\mathcal{P}}_2)}{\varepsilon + mc^2}, \frac{-c(\vec{\mathcal{P}}_3 - i\zeta)}{\varepsilon + mc^2} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c(\vec{\mathcal{P}}_1 - i\vec{\mathcal{P}}_2)}{\varepsilon + mc^2} \\ \frac{-c(\vec{\mathcal{P}}_3 + i\zeta)}{\varepsilon + mc^2} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{\varepsilon + mc^2}{2mc^2} \left[1 + c^2 \frac{\vec{\mathcal{P}}_i^2 + \zeta^2}{(\varepsilon + mc^2)^2} \right] = \frac{1}{2mc^2} \left[\frac{2(\varepsilon + mc^2)\varepsilon}{\varepsilon + mc^2} \right] \\
 &= \frac{\varepsilon}{mc^2}.
 \end{aligned} \tag{F.22}$$

Então, de forma geral, podemos escrever

$$\bar{u}(\mathcal{P}, \pm s)u(\mathcal{P}, \pm s') = \delta_{\pm s, \pm s'} \tag{F.23}$$

$$u^\dagger(\mathcal{P}, \pm s)u(\mathcal{P}, \pm s) = \frac{\varepsilon}{mc^2} \delta(\pm s, \pm s'). \tag{F.24}$$

F.2 Soluções de energias negativas no referencial do laboratório

No caso de soluções para energia negativa, devemos partir da equação (F.6) com a imposição de energia negativa, ou seja

$$\mathcal{E} = -\varepsilon. \tag{F.25}$$

O que nos leva a seguinte equação de Dirac:

$$(-\varepsilon\gamma^0 - c\vec{\mathcal{P}}_i\gamma^i - mc^2 - ic\zeta\gamma_5)v(\mathcal{P}, \pm s) = 0. \tag{F.26}$$

Explicitando agora as matrizes, teremos

$$\left[\varepsilon \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} + c\vec{\mathcal{P}}_i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} + mc^2 \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} + ic\zeta \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} v_a(\mathcal{P}, \pm s) \\ v_b(\mathcal{P}, \pm s) \end{pmatrix} = 0, \tag{F.27}$$

o que nos leva a

$$(\varepsilon + mc^2)u_a(\mathcal{P}, \pm s) = -(c\vec{\mathcal{P}}_i\sigma_i + ic\zeta)u_b(\mathcal{P}, \pm s) \tag{F.28}$$

e

$$(\varepsilon - mc^2)u_b(\mathcal{P}, \pm s) = -(c\vec{\mathcal{P}}_i\sigma_i - ic\zeta)u_a(\mathcal{P}, \pm s). \tag{F.29}$$

Então podemos escrever

$$v_a(\mathcal{P}, \pm s) = \frac{-c(\vec{\mathcal{P}}_i\sigma_i + ic\zeta)}{(\varepsilon + mc^2)}v_b(\mathcal{P}, \pm s). \tag{F.30}$$

- **Solução de spin up**

Para construir a solução de spin up, tomamos

$$v_b(\mathcal{P}, +s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de forma que

$$v_a(\mathcal{P}, +s) = \frac{-c}{\varepsilon + mc^2} \begin{pmatrix} \vec{\mathcal{P}}_3 + i\zeta & \vec{\mathcal{P}}_1 - i\vec{\mathcal{P}}_2 \\ \vec{\mathcal{P}}_1 + i\vec{\mathcal{P}}_2 & -\vec{\mathcal{P}}_3 + i\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{F.31})$$

e assim, teremos que

$$v_a(\mathcal{P}, +s) = \frac{-c}{\varepsilon + mc^2} \begin{pmatrix} \vec{\mathcal{P}}_3 + i\zeta \\ \vec{\mathcal{P}}_1 + i\vec{\mathcal{P}}_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{F.32})$$

Então, teremos que a solução para uma partícula com spin up no referencial do laboratório sera

$$v(\mathcal{P}, +s) = N_+ \begin{pmatrix} \frac{-c(\vec{\mathcal{P}}_3 + i\zeta)}{\varepsilon + mc^2} \\ \frac{-c(\vec{\mathcal{P}}_1 + i\vec{\mathcal{P}}_2)}{\varepsilon + mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{F.33})$$

Onde N_+ é, novamente, um coeficiente de normalização a ser determinado.

- **Solução de spin down**

Já no caso solução de spin down, tomamos

$$v_b(\mathcal{P}, -s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

de forma que

$$v_a(\mathcal{P}, -s) = \frac{-c}{\varepsilon + mc^2} \begin{pmatrix} \vec{\mathcal{P}}_3 + i\zeta & \vec{\mathcal{P}}_1 - i\vec{\mathcal{P}}_2 \\ \vec{\mathcal{P}}_1 + i\vec{\mathcal{P}}_2 & -\vec{\mathcal{P}}_3 + i\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{F.34})$$

e assim, teremos que

$$v_a(\mathcal{P}, -s) = \frac{-c}{\varepsilon + mc^2} \begin{pmatrix} \vec{\mathcal{P}}_1 - i\vec{\mathcal{P}}_2 \\ -\vec{\mathcal{P}}_3 + i\zeta \end{pmatrix}. \quad (\text{F.35})$$

Assim, a solução para uma partícula com spin down no referencial do laboratório sera

$$v(\mathcal{P}, -s) = N_- \begin{pmatrix} \frac{-c(\vec{\mathcal{P}}_1 - i\vec{\mathcal{P}}_2)}{\varepsilon + mc^2} \\ \frac{-c(-\vec{\mathcal{P}}_3 + i\zeta)}{\varepsilon + mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{F.36})$$

Com N_- sendo o coeficiente de normalização a ser determinado.

F.2.1 Condição de normalização para as soluções de energias negativas

- Para o caso do spin up, vamos ter que

$$\begin{aligned}
 \bar{v}(\mathcal{P}, +s)v(\mathcal{P}, +s) &= v^\dagger(\mathcal{P}, +s)\gamma_0v(\mathcal{P}, +s) = \\
 &= N_+^2 \left(\frac{-c(\mathcal{P}_3 - i\zeta)}{\mathcal{E} + mc^2}, \frac{-c(\mathcal{P}_1 + i\mathcal{P}_2)}{\mathcal{E} + mc^2}, 1, 0 \right) \gamma_0 \begin{pmatrix} \frac{-c(\mathcal{P}_3 + i\zeta)}{\mathcal{E} + mc^2} \\ \frac{-c(\mathcal{P}_1 + i\mathcal{P}_2)}{\mathcal{E} + mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= N_+^2 \left[c^2 \frac{\mathcal{P}_i^2 + \zeta^2}{(\mathcal{E} + mc^2)^2} - 1 \right] \\
 &= N_+^2 \frac{c^2(\mathcal{P}_i^2 + \zeta^2) - (\mathcal{E} + mc^2)^2}{(\mathcal{E} + mc^2)(\mathcal{E} + mc^2)} \\
 &= N_+^2 \frac{-2mc^2(\mathcal{E} + mc^2)}{(\mathcal{E} + mc^2)(\mathcal{E} + mc^2)} = -1. \tag{F.37}
 \end{aligned}$$

Então, portanto,

$$N_+ = \sqrt{\frac{\mathcal{E} + mc^2}{2mc^2}}. \tag{F.38}$$

Isso se reflete em $v^\dagger(\mathcal{P}, +s)v(\mathcal{P}, +s)$ de maneira que

$$\begin{aligned}
 v^\dagger(\mathcal{P}, +s)v(\mathcal{P}, +s) &= \frac{\mathcal{E} + mc^2}{2mc^2} \left(\frac{-c(\mathcal{P}_3 - i\zeta)}{\mathcal{E} + mc^2}, \frac{-c(\mathcal{P}_1 + i\mathcal{P}_2)}{\mathcal{E} + mc^2}, 1, 0 \right) \begin{pmatrix} \frac{-c(\mathcal{P}_3 + i\zeta)}{\mathcal{E} + mc^2} \\ \frac{-c(\mathcal{P}_1 + i\mathcal{P}_2)}{\mathcal{E} + mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{\mathcal{E} + mc^2}{2mc^2} \left[1 + c^2 \frac{\mathcal{P}_i^2 + \zeta^2}{(\mathcal{E} + mc^2)^2} \right] = \frac{1}{2mc^2} \left[\frac{2(\mathcal{E} + mc^2)\mathcal{E}}{\mathcal{E} + mc^2} \right] \\
 &= \frac{\mathcal{E}}{mc^2}. \tag{F.39}
 \end{aligned}$$

- Já no caso de spin down, vamos ter que

$$\begin{aligned}
 \bar{v}(\mathcal{P}, -s)v(\mathcal{P}, -s) &= v^\dagger(\mathcal{P}, -s)\gamma_0v(\mathcal{P}, -s) = \\
 &= N_-^2 \left(\frac{-c(\mathcal{P}_1 + i\mathcal{P}_2)}{\varepsilon + mc^2}, \frac{-c(-\mathcal{P}_3 - i\zeta)}{\varepsilon + mc^2}, 0, 1 \right) \gamma_0 \begin{pmatrix} \frac{-c(\mathcal{P}_1 - i\mathcal{P}_2)}{\varepsilon + mc^2} \\ \frac{-c(-\mathcal{P}_3 + i\zeta)}{\varepsilon + mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= N_-^2 \left[c^2 \frac{\mathcal{P}_i^2 + \zeta^2}{(\mathcal{E} + mc^2)^2} - 1 \right] \\
 &= N_-^2 \frac{c^2(\mathcal{P}_i^2 + \zeta^2) - (\varepsilon + mc^2)^2}{(\mathcal{E} + mc^2)(\varepsilon + mc^2)} \\
 &= N_-^2 \frac{-2mc^2(\varepsilon + mc^2)}{(\varepsilon + mc^2)(\varepsilon + mc^2)} = -1. \tag{F.40}
 \end{aligned}$$

Temos assim que

$$N_- = \sqrt{\frac{\varepsilon + mc^2}{2mc^2}}. \tag{F.41}$$

Isso se reflete em $v^\dagger(\mathcal{P}, -s)v(\mathcal{P}, -s)$ de modo que

$$\begin{aligned}
 v^\dagger(\mathcal{P}, -s)v(\mathcal{P}, -s) &= \frac{\varepsilon + mc^2}{2mc^2} \left(\frac{-c(\mathcal{P}_1 + i\mathcal{P}_2)}{\varepsilon + mc^2}, \frac{-c(-\mathcal{P}_3 - i\zeta)}{\varepsilon + mc^2}, 0, 1 \right) \begin{pmatrix} \frac{-c(\mathcal{P}_1 - i\mathcal{P}_2)}{\varepsilon + mc^2} \\ \frac{-c(-\mathcal{P}_3 + i\zeta)}{\varepsilon + mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{\varepsilon + mc^2}{2mc^2} \left[1 + c^2 \frac{\mathcal{P}_i^2 + \zeta^2}{(\varepsilon + mc^2)^2} \right] = \frac{1}{2mc^2} \left[\frac{2(\varepsilon + mc^2)\varepsilon}{\varepsilon + mc^2} \right] \\
 &= \frac{\varepsilon}{mc^2}. \tag{F.42}
 \end{aligned}$$

Assim, tanto \bar{v}_+v_- , quanto $v_+^\dagger v_-$, respeitam uma relação de ortogonalidade bem definida, pois

$$\begin{aligned}
 \bar{v}(\mathcal{P}, +s)v(\mathcal{P}, -s) &= \frac{\varepsilon + mc^2}{2mc^2} \left(\frac{-c(\mathcal{P}_3 - i\zeta)}{\mathcal{E} + mc^2}, \frac{-c(\mathcal{P}_1 + i\mathcal{P}_2)}{\varepsilon + mc^2}, 1, 0 \right) \gamma_0 \begin{pmatrix} \frac{-c(\mathcal{P}_1 - i\mathcal{P}_2)}{\varepsilon + mc^2} \\ \frac{-c(-\mathcal{P}_3 + i\zeta)}{\varepsilon + mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2m} \left[\frac{(\mathcal{P}_3 - i\zeta)(\mathcal{P}_1 - i\mathcal{P}_2) + (-\mathcal{P}_3 + i\zeta)(\mathcal{P}_1 + i\mathcal{P}_2)}{\varepsilon + mc^2} \right] = 0 \tag{F.43}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 v^\dagger(\mathcal{P}, +s)v(\mathcal{P}, -s) &= \frac{\varepsilon + mc^2}{2mc^2} \left(\frac{-c(\vec{\mathcal{P}}_3 - i\zeta)}{\mathcal{E} + mc^2}, \frac{-c(\vec{\mathcal{P}}_1 + i\vec{\mathcal{P}}_2)}{\varepsilon + mc^2}, 1, 0 \right) \begin{pmatrix} \frac{-c(\mathcal{P}_1 - i\mathcal{P}_2)}{\varepsilon + mc^2} \\ \frac{-c(-\mathcal{P}_3 + i\zeta)}{\varepsilon + mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2m} \left[\frac{(\mathcal{P}_3 - i\zeta)(\mathcal{P}_1 - i\mathcal{P}_2) + (-\mathcal{P}_3 + i\zeta)(\mathcal{P}_1 - i\mathcal{P}_2)}{\varepsilon + mc^2} \right] = 0. \quad (\text{F.44})
 \end{aligned}$$

Então, de forma geral, podemos escrever

$$\bar{v}(\mathcal{P}, \pm s)v(\mathcal{P}, \pm s') = \delta_{\pm s, \pm s'} \quad (\text{F.45})$$

$$v^\dagger(\mathcal{P}, \pm s)v(\mathcal{P}, \pm s') = \frac{\varepsilon}{mc^2} \delta_{\pm s, \pm s'}. \quad (\text{F.46})$$

Apêndice G

Solução da equação de Dirac modificada (5.59) para o segundo caso de $f(z)$

Neste caso temos que

$$f(z) = \frac{f_0}{\sqrt{\pi\sigma}} e^{-z^2/4\sigma}, \quad (\text{G.1})$$

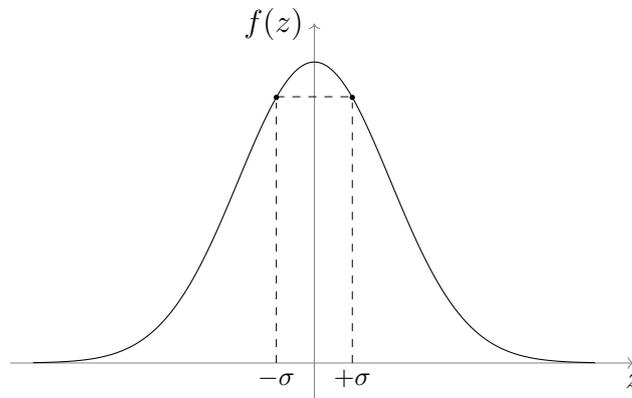


Figura 3 – Gráfico do segundo caso de $f(z)$.

A proposta é analisar os efeitos de $f(z)$ sobre uma partícula fermiônica numa região em torno de $z = 0$. Para valores de z que se afastam de zero, dizemos que $f(z)$ toma valores triviais. Nesse sentido, propomos, para o caso acima, que $f(z)$ está confinada na região $-\sigma < z < \sigma$ em torno de zero, conforme ilustrado na Figura 3. A forma de $f(z)$ neste intervalo $-\sigma < z < \sigma$ em torno de zero é dada pela expansão em série de Taylor de $f(z)$ em primeira ordem. Ou seja,

$$\begin{aligned} f(z) &\approx f(0) + \left. \frac{df(z)}{dz} \right|_{z=0} \cdot z + \left. \frac{d^2f(z)}{dz^2} \right|_{z=0} \cdot z^2 \\ &= \frac{f_0}{\sqrt{\pi\sigma}} \left[1 - \left. \frac{ze^{-z^2/4\sigma}}{2\sigma} \right|_{z=0} \cdot z + \left. \frac{(z^2 - 2\sigma)e^{-z^2/4\sigma}}{4\sigma^2} \right|_{z=0} \cdot z^2 \right] = \frac{f_0}{\sqrt{\pi\sigma}} \left(1 - \frac{z^2}{2\sigma} \right). \quad (\text{G.2}) \end{aligned}$$

De forma que estaremos a considerar uma situação em que

$$f(z) = \frac{f_0}{\sqrt{\pi\sigma}} e^{-z^2/4\sigma} \Rightarrow \begin{cases} \frac{f_0}{\sqrt{\pi\sigma}} \left(1 - \frac{z^2}{2\sigma}\right), & -\sigma < z < \sigma; \\ 0, & |z| > \sigma. \end{cases} \quad (\text{G.3})$$

Para determinar as soluções de spin up e down, na situação em que temos $f(z)$ dado por (G.3), é necessário solucionar as equações diferenciais (5.74) e (5.75), respectivamente. Mas como essas equações diferenciais são idênticas, vamos trabalhar para encontrar a função solução $\tilde{\chi}(z) = \chi_u(z) = \chi_d(z)$ que deve satisfazer tanto (5.74), quanto (5.75).

- Solução na região $|z| > \sigma$:

Nessa região, $f(z) = 0$. Sendo assim, as equações diferenciais (5.74) e (5.75) tomam a forma de

$$\left[c^2 \hbar^2 \text{Re}(\xi)^2 \partial_z^2 + E^2 - m^2 c^4 \right] \tilde{\chi}(z) = 0. \quad (\text{G.4})$$

Ou ainda,

$$\left(\partial_z^2 + a \right) \tilde{\chi}(z) = 0, \quad (\text{G.5})$$

com

$$a = \frac{E^2 - m^2 c^4}{c^2 \hbar^2 \text{Re}(\xi)^2}. \quad (\text{G.6})$$

Portanto, se $E^2 - m^2 c^4 > 0$, teremos

$$\tilde{\chi}(z) = C_1 e^{i\sqrt{a}z} + C_2 e^{-i\sqrt{a}z}. \quad (\text{G.7})$$

Agora se se $E^2 - m^2 c^4 < 0$, teremos

$$\tilde{\chi}(z) = C'_1 e^{\sqrt{|a|}z} + C'_2 e^{-\sqrt{|a|}z}. \quad (\text{G.8})$$

- Solução na região $-\sigma < z < \sigma$:

Nesta região, em torno de $z = 0$, temos que

$$\frac{df(z)}{dz} \approx 0.$$

Nestes moldes, a equação diferencial (5.72) toma a forma

$$\left[c^2 \hbar^2 \text{Re}(\xi)^2 \partial_z^2 - \frac{ic^2 \hbar^2}{2} \text{Re}(\xi) \left[\partial_z^2 f(z) \right] + E^2 - m^2 c^4 \right] \tilde{\chi}(z) = 0. \quad (\text{G.9})$$

Que é então igual a, usando os resultados da forma (G.3),

$$\left[c^2 \hbar^2 \text{Re}(\xi)^2 \partial_z^2 - \frac{ic^2 \hbar^2}{2} \text{Re}(\xi) \left(-\frac{f_0}{\sqrt{\pi\sigma^{3/2}}} \right) + E^2 - m^2 c^4 \right] \tilde{\chi}(z) = 0. \quad (\text{G.10})$$

Ou ainda,

$$\left(\partial_z^2 + ib + a\right) \tilde{\chi}(z) = 0. \quad (\text{G.11})$$

Em que

$$a = \frac{E^2 - m^2 c^4}{c^2 \hbar^2 \text{Re}(\xi)^2}, \quad (\text{G.12})$$

$$b = \frac{f_0}{2\sqrt{\pi} \text{Re}(\xi) \sigma^{3/2}}. \quad (\text{G.13})$$

Então, temos como solução geral para $E^2 - m^2 c^4 > 0$

$$\tilde{\chi}(z) = C_3 e^{i\sqrt{a+ib}z} + C_4 e^{-i\sqrt{a+ib}z}. \quad (\text{G.14})$$

Para $E^2 - m^2 c^4 < 0$

$$\tilde{\chi}(z) = C'_3 e^{\sqrt{|a|-ib}z} + C'_4 e^{-\sqrt{|a|-ib}z}. \quad (\text{G.15})$$

G.1 Explorando as condições de contorno para soluções com $E^2 - m^2 c^4 < 0$

Nesta situação temos que $a = -|a|$. Dos resultados (G.15) e (G.8), temos que as soluções gerais são

$$\tilde{\chi}(z) = \begin{cases} \tilde{\chi}_1(z) = C_1 e^{\sqrt{|a|}z} + C_2 e^{-\sqrt{|a|}z} & \text{para } z < -\sigma, \\ \tilde{\chi}_2(z) = C_3 e^{\sqrt{|a|-ib}z} + C_4 e^{-\sqrt{|a|-ib}z} & \text{para } -\sigma < z < \sigma, \\ \tilde{\chi}_3(z) = C_5 e^{\sqrt{|a|}z} + C_6 e^{-\sqrt{|a|}z} & \text{para } z > \sigma. \end{cases} \quad (\text{G.16})$$

Em $z = -\infty$, $\tilde{\chi}_1(z)$ deve ser igual a zero. Portanto,

$$\tilde{\chi}_1(-\infty) = C_1 e^{-\sqrt{|a|}\infty} + C_2 e^{\sqrt{|a|}\infty} = 0 \Rightarrow \boxed{C_2 = 0}. \quad (\text{G.17})$$

Já em $z = \infty$, $\tilde{\chi}_3(z)$ deve ser igual a zero. Portanto,

$$\tilde{\chi}_3(\infty) = C_5 e^{\sqrt{|a|}\infty} + C_6 e^{-\sqrt{|a|}\infty} = 0 \Rightarrow \boxed{C_5 = 0}. \quad (\text{G.18})$$

Por razões de continuidade, temos que em $z = -\sigma$ deva haver uma igualdade entre $\tilde{\chi}_1(z)$ e $\tilde{\chi}_2(z)$. Sendo assim, vem que

$$\tilde{\chi}_1(-\sigma) = C_1 e^{-\sqrt{|a|}\sigma} = C_3 e^{-\sqrt{|a|-ib}\sigma} + C_4 e^{\sqrt{|a|-ib}\sigma} = \tilde{\chi}_2(-\sigma). \quad (\text{G.19})$$

Também temos que garantir a igualdade das derivadas de $\tilde{\chi}_1(z)$ e $\tilde{\chi}_2(z)$ em $z = -\sigma$. Ou seja,

$$\left. \frac{d\tilde{\chi}_1(z)}{dz} \right|_{z=-\sigma} = C_1 \sqrt{|a|} e^{-\sqrt{|a|}\sigma} = \sqrt{|a|-ib} C_3 e^{-\sqrt{|a|-ib}\sigma} - \sqrt{|a|-ib} C_4 e^{\sqrt{|a|-ib}\sigma} = \left. \frac{d\tilde{\chi}_2(z)}{dz} \right|_{z=-\sigma}. \quad (\text{G.20})$$

De forma análoga, temos que em $z = \sigma$ deva haver uma igualdade entre $\tilde{\chi}_2(z)$ e $\tilde{\chi}_3(z)$. Então,

$$\tilde{\chi}_2(\sigma) = C_3 e^{\sqrt{|a|-ib}\sigma} + C_4 e^{-\sqrt{|a|-ib}\sigma} = C_6 e^{-|a|\sigma} = \tilde{\chi}_3(\sigma). \quad (\text{G.21})$$

Destas condições de contorno mostramos que

$$C_3 = \frac{(\sqrt{|a|} + \sqrt{|a|-ib})}{2\sqrt{|a|-ib}} e^{(-\sqrt{|a|} + \sqrt{|a|-ib})\sigma} C_1, \quad (\text{G.22})$$

$$C_4 = \frac{(-\sqrt{|a|} + \sqrt{|a|-ib})}{2\sqrt{|a|-ib}} e^{-(\sqrt{|a|} + \sqrt{|a|-ib})\sigma} C_1, \quad (\text{G.23})$$

$$C_6 = e^{-2\sqrt{|a|}\sigma} \left(\frac{\sqrt{|a|-ib} \cosh(2\sqrt{|a|-ib}\sigma) + \sqrt{|a|} \sinh(2\sqrt{|a|-ib}\sigma)}{\sqrt{|a|-ib}} \right) C_1. \quad (\text{G.24})$$

De forma geral, temos então que

$$\tilde{\chi}(z) = \begin{cases} \tilde{\chi}_1(z) = C_1 e^{\sqrt{|a|}z} & \text{para } z < -\sigma, \\ \tilde{\chi}_2(z) = C_3 e^{\sqrt{|a|-ib}z} + C_4 e^{-\sqrt{|a|-ib}z} & \text{para } -\sigma < z < \sigma, \\ \tilde{\chi}_3(z) = C_6 e^{-\sqrt{|a|}z} & \text{para } z > \sigma. \end{cases} \quad (\text{G.25})$$

Com as constantes C_2 , C_3 e C_6 dadas em termos de C_1 conforme as expressões acima.

G.2 A forma das soluções de spin up e down com $E^2 - m^2 c^4 < 0$

Nos resta agora obter $\zeta(z)$ para que tenhamos o espinor que satisfaz a equação de Dirac modificada de forma completa. Para isso, retornamos à equação (5.69),

$$\left(\frac{E}{c} + mc \right) \mathbb{1} \zeta(z) - \left(i\hbar \text{Re}(\xi) \partial_z + \frac{\hbar}{2} \partial_z f(z) \right) \alpha_z \chi(z) = 0, \quad (\text{G.26})$$

e isolamos $\zeta(z)$ em função de $\chi(z)$, que já conhecemos no resultado (G.25) valendo tanto para a projeção de spin up, quanto para a de spin down, se lembramos que $\tilde{\chi}(z) = \chi_u(z) = \chi_d(z)$.

Sendo assim, vamos nos concentrar primeiramente na projeção de spin up que é constituída por

$$\chi(z) = \chi_u(z) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{G.27})$$

com

$$\zeta(z) = \zeta_u(z) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \zeta_d(z) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{G.28})$$

Então, nos concentramos nas soluções de spin up, se levamos (G.27) em (G.26), vamos poder determinar $\zeta(z)$ de tal forma que

$$\left(\frac{E}{c} + mc\right) \zeta_u(z) - \left(i\hbar\text{Re}(\xi)\partial_z + \frac{\hbar}{2}\partial_z f(z)\right) \chi_u(z) = 0. \quad (\text{G.29})$$

Nessa linha, para $z < -\sigma$ temos que $f(z) = 0$ e que $\chi_u(z) = \tilde{\chi}_1(z)$. Assim vem que

$$\zeta_u(z) = \tilde{\zeta}_1(z) = \frac{i\hbar c \text{Re}(\xi)}{E + mc^2} [\partial_z \tilde{\chi}_1(z)].$$

Portanto,

$$\tilde{\zeta}_1(z) = C_1 \frac{i\hbar c \text{Re}(\xi) \sqrt{|a|}}{E + mc^2} e^{\sqrt{|a|}z}. \quad (\text{G.30})$$

Analogamente, para $z > \sigma$ temos que $\zeta_u(z) = \tilde{\zeta}_3(z)$ em função de $\chi_u(z) = \tilde{\chi}_3(z)$ será

$$\tilde{\zeta}_3(z) = -C_6 \frac{i\hbar c \text{Re}(\xi) \sqrt{|a|}}{E + mc^2} e^{-\sqrt{|a|}z}. \quad (\text{G.31})$$

Na região central, $-\sigma < z < \sigma$, $f(z)$ tem a forma

$$f(z) = \frac{f_0}{\sqrt{\pi\sigma}} \left(1 - \frac{z^2}{2\sigma}\right).$$

Assim, $\zeta_u(z) = \tilde{\zeta}_2(z)$ em função de $\chi_u(z) = \tilde{\chi}_2(z)$ emerge de

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}_2(z) &= \frac{c}{E + mc^2} \left(i\hbar\text{Re}(\xi)\partial_z + \frac{\hbar}{2}\partial_z f(z) \right) \tilde{\chi}_2(z) \\ &= \frac{c}{E + mc^2} \left[i\hbar\text{Re}(\xi) (\partial_z \tilde{\chi}_2(z)) + \frac{\hbar}{2} (\partial_z f(z)) \tilde{\chi}_2(z) \right]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\tilde{\zeta}_2(z) = \frac{-i\hbar c \text{Re}(\xi) \left[\left(\sqrt{|a|} - ib + ibz \right) C_3 e^{\sqrt{|a|-ib}z} - \left(\sqrt{|a|} - ib - ibz \right) C_4 e^{-\sqrt{|a|-ib}z} \right]}{E + mc^2}. \quad (\text{G.32})$$

Os resultados (G.30), (G.31) e (G.32), que descrevem a projeção de spin up para a parte que advém $\zeta(x)$ no espinor solução, podem ser resumidos de tal forma que

$$\zeta_u(x) = \begin{cases} \tilde{\zeta}_1(z) = C_1 \frac{i\hbar c \text{Re}(\xi) \sqrt{|a|}}{E + mc^2} e^{\sqrt{|a|}z} & \text{para } z < -\sigma, \\ \tilde{\zeta}_2(z) = \frac{i\hbar c \text{Re}(\xi) [(\kappa - ibz) C_4 e^{-\kappa z} - (\kappa + ibz) C_3 e^{\kappa z}]}{E + mc^2} & \text{para } -\sigma < z < \sigma, \\ \tilde{\zeta}_3(z) = -C_6 \frac{i\hbar c \text{Re}(\xi) \sqrt{|a|}}{E + mc^2} e^{-\sqrt{|a|}z} & \text{para } z > \sigma. \end{cases} \quad (\text{G.33})$$

Com

$$\kappa = \sqrt{|a| - ib}. \quad (\text{G.34})$$

Sendo assim, a **solução de spin up** pode ser escrita sob a forma

$$\psi_u(z, t) = \begin{pmatrix} \chi(z) \\ \zeta(z) \end{pmatrix} e^{-iEt} = \begin{pmatrix} \chi_u(z) \\ 0 \\ \zeta_u(z) \\ 0 \end{pmatrix} e^{-iEt}. \quad (\text{G.35})$$

Com $\chi_u(z)$ e $\zeta_u(z)$ sendo dados pelos resultados (G.25) e (G.33), respectivamente.

Para escrever o espinor com projeção de spin down tomamos agora

$$\chi(z) = \chi_d(z) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{G.36})$$

e lavamos este resultados na equação (G.26). Lembrando que $\tilde{\chi}(z) = \chi_d(z)$, de procedimentos análogos aos realizados para o caso de spin up, mostramos que

$$\zeta_d(x) = -\zeta_u(x) = \begin{cases} \tilde{\zeta}_1(z) = -C_1 \frac{i\hbar c \text{Re}(\xi) |a|}{E + mc^2} e^{\sqrt{|a|}z} & \text{para } z < -\sigma, \\ \tilde{\zeta}_2(z) = \frac{i\hbar c \text{Re}(\xi) [(\kappa + ibz) C_3 e^{\kappa z} - (\kappa - ibz) C_4 e^{-\kappa z}]}{E + mc^2} & \text{para } -\sigma < z < \sigma, \\ \tilde{\zeta}_3(z) = C_6 \frac{i\hbar c \text{Re}(\xi) |a|}{E + mc^2} e^{-\sqrt{|a|}z} & \text{para } z > \sigma. \end{cases} \quad (\text{G.37})$$

Com

$$\kappa = \sqrt{|a| - ib}. \quad (\text{G.38})$$

A **solução de spin down** pode ser escrita então sob a forma

$$\psi_d(z, t) = \begin{pmatrix} \chi(z) \\ \zeta(z) \end{pmatrix} e^{-iEt/\hbar} = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_d(z) \\ 0 \\ \zeta_d(z) \end{pmatrix} e^{-iEt/\hbar}. \quad (\text{G.39})$$

Com $\chi_d(z)$ e $\zeta_d(z)$ sendo dados pelos resultados (G.25) e (G.37), respectivamente.

G.3 Explorando as condições de contorno para soluções com $E^2 - m^2 c^4 > 0$

Dos resultados (G.15) e (G.7), temos que as soluções gerais são

$$\tilde{\chi}(z) = \begin{cases} \tilde{\chi}_1(z) = C_1 e^{i\sqrt{a}z} + C_2 e^{-i\sqrt{a}z} & \text{para } z < -\sigma, \\ \tilde{\chi}_2(z) = C_3 e^{i\sqrt{a+ib}z} + C_4 e^{-i\sqrt{a+ib}z} & \text{para } -\sigma < z < \sigma, \\ \tilde{\chi}_3(z) = C_5 e^{i\sqrt{a}z} + C_6 e^{-i\sqrt{a}z} & \text{para } z > \sigma. \end{cases} \quad (\text{G.40})$$

A primeira imposição é de que $\tilde{\chi}(z)$ se propaga, na região $z < -\sigma$, como uma onda no sentido crescente de z . Sendo assim,

$$\boxed{C_1 = 0.} \quad (\text{G.41})$$

Exigimos também que $\tilde{\chi}(z)$ seja continua em $z = -\sigma$. Então,

$$\tilde{\chi}_1(-\sigma) = C_2 e^{i\sqrt{a}\sigma} = C_3 e^{-i\sqrt{a+ib}\sigma} + C_4 e^{i\sqrt{a+ib}\sigma} = \tilde{\chi}_2(-\sigma). \quad (\text{G.42})$$

Da continuidade da primeira derivada em $z = -\sigma$ vem que

$$\left. \frac{d\tilde{\chi}_1(z)}{dz} \right|_{z=-\sigma} = -i\sqrt{a}C_2 e^{i\sqrt{a}\sigma} = i\sqrt{a+ib}C_3 e^{-i\sqrt{a+ib}\sigma} - i\sqrt{a+ib}C_4 e^{i\sqrt{a+ib}\sigma} = \left. \frac{d\tilde{\chi}_2(z)}{dz} \right|_{z=-\sigma}. \quad (\text{G.43})$$

Queremos também $\tilde{\chi}(z)$ seja continua em $z = \sigma$. Ou seja,

$$\tilde{\chi}_2(\sigma) = C_3 e^{i\sqrt{a+ib}\sigma} + C_4 e^{-i\sqrt{a+ib}\sigma} = C_5 e^{i\sqrt{a}\sigma} + C_6 e^{-i\sqrt{a}\sigma} = \tilde{\chi}_3(\sigma). \quad (\text{G.44})$$

Já a continuidade da primeira derivada em $z = \sigma$ exige que

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\tilde{\chi}_2(z)}{dz} \right|_{z=\sigma} &= i\sqrt{a+ib}C_3 e^{i\sqrt{a+ib}\sigma} - i\sqrt{a+ib}C_4 e^{-i\sqrt{a+ib}\sigma} = \\ &= i\sqrt{a}C_5 e^{i\sqrt{a}\sigma} - i\sqrt{a}C_6 e^{-i\sqrt{a}\sigma} = \left. \frac{d\tilde{\chi}_3(z)}{dz} \right|_{z=\sigma}. \end{aligned} \quad (\text{G.45})$$

Dessas condições de contorno, mostramos que

$$\boxed{C_3 = \frac{(-\sqrt{a} + \sqrt{a+ib})}{2\sqrt{a+ib}} e^{i(\sqrt{a} + \sqrt{a+ib})\sigma} C_2,} \quad (\text{G.46})$$

$$\boxed{C_4 = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{a+ib})}{2\sqrt{a+ib}} e^{-i(-\sqrt{a} + \sqrt{a+ib})\sigma} C_2,} \quad (\text{G.47})$$

$$\boxed{C_5 = -\frac{b}{2\sqrt{a}\sqrt{a+ib}} \sin(2\sqrt{a+ib}\sigma) C_2.} \quad (\text{G.48})$$

$$\boxed{C_6 = e^{2i\sqrt{a}\sigma} \left[\frac{2\sqrt{a}\sqrt{a+ib} \cos(2\sqrt{a+ib}\sigma) + (b-2ia) \sin(2\sqrt{a+ib}\sigma)}{2\sqrt{a}\sqrt{a+ib}} \right] C_2.} \quad (\text{G.49})$$

Então, de forma geral, temos como solução

$$\tilde{\chi}(z) = \begin{cases} \tilde{\chi}_1(z) = C_2 e^{-i\sqrt{a}z} & \text{para } z < -\sigma, \\ \tilde{\chi}_2(z) = C_3 e^{i\sqrt{a+ib}z} + C_4 e^{-i\sqrt{a+ib}z} & \text{para } -\sigma < z < \sigma, \\ \tilde{\chi}_3(z) = C_5 e^{i\sqrt{a}z} + C_6 e^{-i\sqrt{a}z} & \text{para } z > \sigma. \end{cases} \quad (\text{G.50})$$

Com C_3 , C_4 , C_5 e C_6 sendo dados em termos de C_2 como escrevemos acima.

G.4 A forma das soluções de spin up e down com $E^2 - m^2 c^4 > 0$

Como antes, nos resta agora obter $\zeta(z)$ para que tenhamos o espinor que satisfaz a equação de Dirac modificada de forma completa. Para isso, retornamos à equação (5.69),

$$\left(\frac{E}{c} + mc\right) \mathbb{1}\zeta(z) - \left(i\hbar\text{Re}(\xi)\partial_z + \frac{\hbar}{2}\partial_z f(z)\right) \alpha_z \chi(z) = 0, \quad (\text{G.51})$$

e isolamos $\zeta(z)$ em função de $\chi(z)$, que já conhecemos no resultado (G.50) valendo tanto para a projeção de spin up, quanto para a de spin down, se lembramos que $\tilde{\chi}(z) = \chi_u(z) = \chi_d(z)$.

Sendo assim, vamos nos concentrar primeiramente na projeção de spin up que é constituída por

$$\chi(z) = \chi_u(z) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{G.52})$$

com

$$\zeta(z) = \zeta_u(z) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \zeta_d(z) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{G.53})$$

Então, nos concentramos nas soluções de spin up, se levamos (G.52) em (G.51), vamos poder determinar $\zeta(z)$ de tal forma que

$$\left(\frac{E}{c} + mc\right) \zeta_u(z) - \left(i\hbar\text{Re}(\xi)\partial_z + \frac{\hbar}{2}\partial_z f(z)\right) \chi_u(z) = 0. \quad (\text{G.54})$$

Nessa linha, para $z < -\sigma$ temos que $f(z) = 0$ e que $\chi_u(z) = \tilde{\chi}_1(z)$. Assim vem que

$$\zeta_u(z) = \tilde{\zeta}_1(z) = \frac{i\hbar c \text{Re}(\xi)}{E + mc^2} [\partial_z \tilde{\chi}_1(z)].$$

Portanto,

$$\boxed{\tilde{\zeta}_1(z) = C_2 \frac{\hbar c \text{Re}(\xi) \sqrt{a}}{E + mc^2} e^{-iaz}.} \quad (\text{G.55})$$

Analogamente, para $z > \sigma$ temos que $\zeta_u(z) = \tilde{\zeta}_3(z)$ em função de $\chi_u(z) = \tilde{\chi}_3(z)$ será

$$\boxed{\tilde{\zeta}_3(z) = \frac{\hbar c \text{Re}(\xi) \sqrt{a}}{E + mc^2} (C_6 e^{-i\sqrt{a}z} - C_5 e^{i\sqrt{a}z}).} \quad (\text{G.56})$$

Na região central, $-\sigma < z < \sigma$, $f(z)$ tem a forma

$$f(z) = \frac{f_0}{\sqrt{\pi}\sigma} \left(1 - \frac{z^2}{2\sigma}\right).$$

Assim, $\zeta_u(z) = \tilde{\zeta}_2(z)$ em função de $\chi_u(z) = \tilde{\chi}_2(z)$ emerge de

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}_2(z) &= \frac{c}{E + mc^2} \left(i\hbar\text{Re}(\xi)\partial_z + \frac{\hbar}{2}\partial_z f(z)\right) \tilde{\chi}_2(z) \\ &= \frac{c}{E + mc^2} \left[i\hbar\text{Re}(\xi) (\partial_z \tilde{\chi}_2(z)) + \frac{\hbar}{2} (\partial_z f(z)) \tilde{\chi}_2(z)\right]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\tilde{\zeta}_2(z) = \frac{\hbar c \operatorname{Re}(\xi) \left[(\sqrt{a - i\bar{b}} - bz) C_4 e^{-i\sqrt{a-i\bar{b}}z} - (\sqrt{a - i\bar{b}} + bz) C_3 e^{i\sqrt{a-i\bar{b}}z} \right]}{E + mc^2}. \quad (\text{G.57})$$

Os resultados (G.55), (G.56) e (G.57), que descrevem a projeção de spin up para a parte que advém $\zeta(x)$ no espinor solução, podem ser resumidos de tal forma que

$$\zeta_u(x) = \begin{cases} \tilde{\zeta}_1(z) = C_2 \frac{\hbar c \operatorname{Re}(\xi) \sqrt{a}}{E + mc^2} e^{-iaz} & \text{para } z < -\sigma, \\ \tilde{\zeta}_2(z) = \frac{\hbar c \operatorname{Re}(\xi) \left[(\sqrt{a - i\bar{b}} - bz) C_4 e^{-i\sqrt{a-i\bar{b}}z} - (\sqrt{a - i\bar{b}} + bz) C_3 e^{i\sqrt{a-i\bar{b}}z} \right]}{E + mc^2} & \text{para } -\sigma < z < \sigma, \\ \tilde{\zeta}_3(z) = \frac{\hbar c \operatorname{Re}(\xi) \sqrt{a}}{E + mc^2} (C_6 e^{-i\sqrt{a}z} - C_5 e^{i\sqrt{a}z}) & \text{para } z > \sigma. \end{cases} \quad (\text{G.58})$$

Sendo assim, **a solução de spin up** pode ser escrita sob a forma

$$\psi_u(z, t) = \begin{pmatrix} \chi(z) \\ \zeta(z) \end{pmatrix} e^{-iEt} = \begin{pmatrix} \chi_u(z) \\ 0 \\ \zeta_u(z) \\ 0 \end{pmatrix} e^{-iEt}. \quad (\text{G.59})$$

Com $\chi_u(z)$ e $\zeta_u(z)$ sendo dados pelos resultados (G.50) e (G.58), respectivamente. Agora para escrever o espinor com projeção de spin down tomamos agora

$$\chi(z) = \chi_d(z) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{G.60})$$

e lavamos este resultados na equação (G.51). Lembrando que $\tilde{\chi}(z) = \chi_d(z)$, de procedimentos análogos aos realizados para o caso de spin up, mostramos que

$$\zeta_d(x) = -\zeta_u(x) = \begin{cases} \tilde{\zeta}_1(z) = -C_2 \frac{\hbar c \operatorname{Re}(\xi) \sqrt{a}}{E + mc^2} e^{-iaz} & \text{para } z < -\sigma, \\ \tilde{\zeta}_2(z) = \frac{\hbar c \operatorname{Re}(\xi) \left[(\sqrt{a - i\bar{b}} + bz) C_3 e^{i\sqrt{a-i\bar{b}}z} - (\sqrt{a - i\bar{b}} - bz) C_4 e^{-i\sqrt{a-i\bar{b}}z} \right]}{E + mc^2} & \text{para } -\sigma < z < \sigma, \\ \tilde{\zeta}_3(z) = \frac{\hbar c \operatorname{Re}(\xi) \sqrt{a}}{E + mc^2} (C_5 e^{i\sqrt{a}z} - C_6 e^{-i\sqrt{a}z}) & \text{para } z > \sigma. \end{cases} \quad (\text{G.61})$$

A solução de spin down pode ser escrita então sob a forma

$$\psi_d(z, t) = \begin{pmatrix} \chi(z) \\ \zeta(z) \end{pmatrix} e^{-iEt/\hbar} = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_d(z) \\ 0 \\ \zeta_d(z) \end{pmatrix} e^{-iEt/\hbar}. \quad (\text{G.62})$$

Com $\chi_d(z)$ e $\zeta_d(z)$ sendo dados pelos resultados (G.50) e (G.61), respectivamente.

Referências

- [1] P. A. M. Dirac, “*Is there an aether?*”, Nature **168** (1951) 906.
- [2] G. Scharf, “*Finite quantum electrodynamics: the causal approach*”, Courier Corporation, (2014).
- [3] H. Bondi e T. Gold, “*Is there an aether?*”, Letter to the Editors, Nature **169** (1951) 146.
- [4] J. D. Bjorken, “*A dynamical origin for the electromagnetic field*”, Ann. Phys. **24** (1963) 174.
- [5] P. R. Phillips, “*Is the graviton a Goldstone boson?*”, Phys. Rev. **146** (1966) 966.
- [6] T. G. Pavlopoulos, “*Breakdown of Lorentz invariance*”, Phys. Rev. **159** (1967) 1106.
- [7] L. B. Rédei, “*Validity of special relativity at small distances and the velocity dependence of the muon lifetime*”, Phys. Rev. **162** (1967) 1299.
- [8] T. D. Lee e C. N. Yang, “*Question of parity conservation in weak interactions*”, Phys. Rev. **104** (1956) 254.
- [9] C. S. Wu, E. Ambler, R. W. Hayward, D. D. Hoppes e R. P. Hudson, “*Experimental test of parity conservation in beta decay*”, Phys. Rev. **105** (1957) 1413.
- [10] H. B. Nielsen e M. Ninomiya, “ *β -function in a non-covariant Yang-Mills theory*”, Nucl. Phys. B **141** (1978) 153.
- [11] J. Ellis, M. K. Gaillard, D. V. Nanopoulos e S. Rudaz, “*Uncertainties in the proton lifetime*”, Nucl. Phys. B **176** (1980) 161.
- [12] A. Zee, “*Perhaps proton decay violates Lorentz invariance*”, Phys. Rev. D **25** (1982) 1864.
- [13] H. B. Nielsen e I. Picek, “*The Rédei-like model and testing Lorentz invariance*”, Phys. Lett. B **114** (1982) 141.

- [14] H. B. Nielsen e S. Chadha, “*Lorentz invariance as a low energy phenomenon*”, Nucl. Phys. B **217** (1983) 125.
- [15] H. B. Nielsen e I. Picek, “*Lorentz non-invariance*”, Nucl. Phys. B **211** (1983) 269.
- [16] V. A. Kostelecký e S. Samuel, “*Spontaneous breaking of Lorentz symmetry in string theory*”, Phys. Rev. D **39** (1989) 683.
- [17] V. A. Kostelecký e S. Samuel, “*Phenomenological gravitational constraints on strings and higher-dimensional theories*”, Phys. Rev. Lett. **63** (1989) 224.
- [18] S. M. Carroll, G. B. Field, e R. Jackiw, “*Limits on a lorentz -and parity-violating modification of electrodynamics*”, Phys. Rev. D **41** (1990) 1231.
- [19] D. Colladay e V. A. Kostelecký, “*CPT violation and the standard model*”, Phys. Rev. D **55** (1997) 6760.
- [20] D. Colladay e V. A. Kostelecký, “*Lorentz-violating extension of the standard-model*”, Phys. Rev. D **58** (1998) 11602.
- [21] N. Seiberg e E. Witten, “*String theory and noncommutative geometry*”, JHEP **09** (1999) 224.
- [22] G. Amelino-Camelia, J. Ellis, N. Mavromatos e D. V. Nanopoulos, “*Distance measurement and wave dispersion in a Liouville-string approach to quantum gravity*”, Int. J. Mod. Phys. A **12** (1997) 607.
- [23] J. R. Ellis, N. Mavromatos e D. V. Nanopoulos, “*Probing models of quantum space-time foam*”, hep-ph, arXiv:gr-qc/9909085, (1999).
- [24] R. Gambini e J. Pullin, “*Nonstandard optics from quantum space-time*”, Phys. Rev. D **59**, (1999) 124021.
- [25] G. Amelino-Camelia e S. Majid, “*Waves on noncommutative space-time and gamma-ray bursts*”, Int. J. Mod. Phys. A **15** (2000) 4301.
- [26] J. Alfaro, H. A. Morales-Tecotl e L. F. Urrutia, “*Loop quantum gravity and light propagation*”, Phys. Rev. D **65** (2002) 103509.
- [27] S. Coleman e S. L. Glashow, “*Loop high-energy tests of Lorentz invariance*”, Phys. Rev. D **59** (1999) 116008.
- [28] G. Amelino-Camelia, “*Doubly-Special Relativity: first results and key open problems*”, Int. J. Mod. Phys. D, **11** (2002) 1643.
- [29] J. Magueijo, “*New varying speed of light theories*”, Rept. Prog. Phys. **66** (2003) 2025.

- [30] V. A. Kostelecký e N. Russel, “*Data tables for lorentz and cpt violation*”, hep-ph, arXiv:0801.0287v14, (2020).
- [31] J. Bolmont e C. Perennes, “*Probing modified dispersion relations in vacuum with high-energy γ -ray sources: review and prospects*”, J. Phys.: Conference Series **1586** (2020) 012033.
- [32] M. Berger e V. A. Kostelecký, “*Supersymmetry and Lorentz violation*”, Phys. Rev. D **65** (2002) 091701.
- [33] M. Berger, “*Superfield realizations of Lorentz and CPT violation*”, Phys. Rev. D **68** (2003) 115005.
- [34] H. Belich, J. L. Boldo, L. P. Colatto, J. A. Helayël-Neto e Á. L. M. A. Nogueira, “*Supersymmetric extension of the Lorentz and CPT-violating Maxwell-Chern-Simons model*”, Phys. Rev. D **68** (2003) 065030.
- [35] A. P. Baeta Scarpelli, H. Belich, J. L. Boldo, L. P. Colatto, Á. L. M. A. Nogueira e J. A. Helayël-Neto “*Remarks on the causality, unitarity and supersymmetric extension of the Lorentz and CPT-violating Maxwell-Chern-Simons model*”, Nucl. Phys. B **127** (2004) 105.
- [36] P. A. Bolokhov, S. G. Nibbelink e M. Pospelov, “*Lorentz violating supersymmetric quantum electrodynamics*”, Phys. Rev. D **72** (2005) 015013.
- [37] A. Katz e Y. Shadmi, “*Lorentz violation and superpartner masses*”, Phys. Rev. D **74** (2006) 115021.
- [38] C. Farias, A. Lehum, J. Nascimento e A. Y. Petrov, “*Superfield supersymmetric aetherlike lorentz-breaking models*”, Phys. Rev. D **86** (2012) 065035.
- [39] L. G. D. Bernald, “*Cenários Supersimétricos em Presença de Anisotropias Espaço-Temporais*”, Tese de Doutorado, CBPF, (2015).
- [40] J. A. Helayël-Neto e A. D. A. M. Spallicci “*Frequency variation for in vacuo photon propagation in the Standard-Model Extension*”, Eur. Phys. J. C **79** (2019) 590.
- [41] Y. M. P. Gomes e P. C. Malta. “*Lab-based limits on the Carroll-Field-Jackiw Lorentz violating electroynamics*”, Phys. Rev. D **94** (2016) 025031.
- [42] V. A. Kostelecký e N. Russell. “*Data tables for Lorentz and CPT violation*”, Rev. Mod. Phys. **83** (2011) 11.
- [43] P. A. Zyla *et al.* “*Particle Data Group*), Prog. Theor. Exp. Phys. ", **2020** (2020) 083C01.
- [44] L.-C. Tu, J. Luo, e G. T Gillies. “*The mass of the photon*”, Rep. Prog. Phys. **68** (2005) 77.
- [45] B. Zhang, Y.-T. Chai, Y.-C. Zou e X.-F. Wu. “*Constraining the mass of the photon with gamma-ray bursts*”, J. H. E. Astrophys. **11–12** (2016) 20.

-
- [46] V. A. Kostelecký, C. D. Lane e A. G. Pickering, “*One-loop renormalization of Lorentz-violating electrodynamics*”, Phys. Rev. D **65** (2002) 056006.
- [47] R. Turcati, “*Aspectos do Eletromagnetismo de Partículas Elementares Neutras na Mecânica Quântica Relativística*”, Dissertação de Mestrado, CBPF, (2008).
- [48] O. Klein, “*Die reflexion von elektronen an einem potentialsprung nach der relativistischen dynamik von dirac*”, Zeit. für Phys. **53** (1929) 157.
- [49] E. Schrödinger, “*Über die kraftfreie bewegung in der relativistischen quantenmechanik*”, Sitzung Phys.-Math. **31** (1930) 418.
- [50] H. Isobe e N. Nagaosa, “*Theory of a quantum critical phenomenon in a topological insulator: (3 + 1)-dimensional quantum electrodynamics in solids*”, Phys. Rev. B **86** (2012) 165127.