



Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas  
Coordenação de Formação Científica - COEDU  
Coordenação de Física Teórica - COTEO

MAURÍCIO MARQUES SOARES FILHO

# Extensividade Entrópica e Grandes Desvios na Presença de Correlações Não Locais

Rio de Janeiro/RJ

2023

**MAURÍCIO MARQUES SOARES FILHO**

**Extensividade Entrópica e Grandes Desvios na  
Presença de Correlações Não Locais**

Dissertação apresentada ao curso de Pós-Graduação em Física do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, como requisito parcial para a obtenção do Título de mestre em Física.

Orientador:  
Prof<sup>o</sup> Dr. Constantino Tsallis

Coorientador:  
Prof<sup>o</sup> Dr. Ugur Tirnakli

Rio de Janeiro/RJ

2023

“EXTENSIVIDADE ENTRÓPICA E GRANDES DESVIOS NA PRESENÇA DE  
CORRELAÇÕES NÃO LOCAIS”

**MAURICIO MARQUES SOARES FILHO**

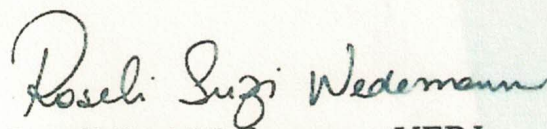
Dissertação de Mestrado em Física apresentada no  
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do  
Ministério da Ciência Tecnologia e Inovação.  
Fazendo parte da banca examinadora os seguintes  
professores:



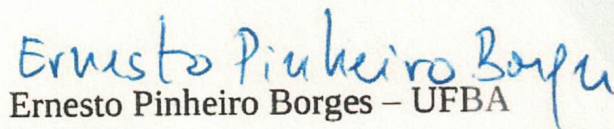
Constantino Tsallis – Orientador/CBPF



Ugur Tirnakli – Coorientador/ ÍZMIR UNIVERSITY OF ECONOMICS



Roseli Suzi Wedemann – UERJ



Ernesto Pinheiro Borges – UFBA

Rio de Janeiro, 23 de outubro de 2023.

Núcleo de Informação C&T e Biblioteca – NIB/CBPF

S676e Soares Filho, Maurício Marques  
Extensividade entrópica e grandes desvios na presença de correlações não locais / Maurício Marques Soares Filho, 2024.  
103 f.  
Dissertação (Mestrado em Física) – Programa de Pós Graduação em Física do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro, 2023.  
Orientador: Constantino Tsallis  
Coorientador: Ugur Tirnakli  
1. Mecânica estatística. 2. Teorema do Limite Central. 3. Modelos matemáticos. I. TSALLIS, Constantino (Orientador). II. TIRNAKLI, Ugur. III. Título.

CDD 530.13

À Petra Marques Burity,  
novo alento para antigas esperanças.

*Não venci todas as vezes que lutei, mas perdi todas as vezes que deixei de lutar.*

Cecília Meireles (1901 - 1964)

*We are driven by the usual insatiable curiosity of the scientist, and our work is a  
delightful game.*

Murray Gell-Mann (1929 - 2019)

# Agradecimentos

O caminho que trilhei foi tortuoso, mas tive sucesso em chegar até aqui e antevejo possibilidades inúmeras em meu futuro. Contudo, sem o auxílio e incentivo de uma grande quantidade de pessoas, certamente não teria conseguido sequer ter dado o primeiro passo nessa minha longa jornada. Peço perdão por não poder citar nominalmente todos e todas que fizeram a diferença em minha vida: seria necessário mais um volume desta obra para tanto. Mencionarei aqui somente aqueles e aquelas diretamente envolvidos, tomando a liberdade de tornar explícito os nomes só dos que, considero, me acompanharam nesta fase da minha formação.

Devo, em primeiro lugar, um agradecimento sempre sincero à minha família. Meus pais e minhas irmãs foram apoio essencial durante meu período no CBPF e, mesmo quando discordaram de mim, me ajudaram a seguir em frente. Tenho um apreço especial pela contribuição de minha avó materna, Arídia Rosa Gomes, e meu obrigado a ela segue *in memoriam*.

Aos professores que contribuíram com minha formação, ministrando as disciplinas que cursei nesta casa, deixo minha profunda gratidão - cito-os pelos nomes, sem me preocupar com os vários títulos que cada um fez por merecer, mas que foram deixados à margem em nossa relação Professor-Aluno. São eles (em ordem alfabética do pré-nome, de forma a não se cometer nenhuma injustiça): Clécio Roque de Bom, Fernando Dantas Nobre, José Abdalla Helayël-Neto e Mucio Amado Continentino. Preciso, pelo bem da lisura, prestar homenagem também ao corpo técnico-administrativo do CBPF, pessoas sem as quais nós, discentes e docentes, não daríamos um passo.

Ao meu orientador, Constantino Tsallis, todas as reverências que eu poderia fazer são insuficientes. Um professor emérito do mais prestigiado polo da Física brasileira anuiu orientar a mim, um bacharel sem distinção que havia anos estava fora da Academia, me instruiu em cada passo do meu trabalho de pesquisa, me apresentou novas forma de encarar velhos temas, foi paciente com minhas deficiências sem nunca parar de incentivar meu progresso - o sentimento de gratidão ao Professor Constantino levarei para a vida, e é em grande parte por sua influência que logrei concluir esta fase da minha formação. Ao meu coorientador, Ugur Tirnakli, deixo meu gentil obrigado pelas contribuições essenciais na concepção e redação do artigo que coroou meu curso de mestrado - é uma pena não termos nos encontrado pessoalmente, ainda.

Por fim, gostaria de mencionar duas pessoas que ajudaram em muito para que eu pudesse retornar ao ambiente acadêmico e me engajar novamente na discência e pesquisa: Erick Souto Maior Petry, que contribuiu com sua expertise para que eu pudesse voltar à sala de aula e retomar meus projetos pessoais, e Gisele Vieira Rocha, que acreditou em mim, nas minhas potencialidades, e me fez vez que era possível.

Alguém disse-me uma vez, numa conversa ocasional, que meu primeiro amor tinha sido a Física: não nego de maneira nenhuma (arrisco até a dizer que esse sentimento se fortaleceu), mas como toda musa ela é benévola, mas exigente: à mesma medida que dá inspiração, demanda sacrifícios. Agradeço a todos aqueles que, animados desse mesmo amor, teceram as obras sobre as quais me debrucei no ofício de aprender. Rogo que eu possa continuar aprendendo, pelos dias que me virão, nunca exaurindo essa vontade que tenho de compreender o mundo.



# Resumo

A Teoria Padrão dos Grandes Desvios (LDT) espelha o fator de Boltzmann-Gibbs (BG) que descreve o equilíbrio térmico de sistemas Hamiltonianos de curto alcance, cuja distribuição de velocidade é Maxwelliana. É genericamente aplicável a sistemas que satisfazem o Teorema do Limite Central (CLT), entre outros. Quando nos concentramos em estados estacionários de sistemas complexos típicos (por exemplo, sistemas Hamiltonianos clássicos de longo alcance), tanto o CLT quanto o LDT precisam ser generalizados. Na presente dissertação procedemos à uma breve revisão conceitual da Mecânica Estatística Não Extensiva de Tsallis, ao CLT e à LDT e suas generalizações para a  $q$ -estatística, além de apresentarmos os resultados de um artigo nosso que vem a ser útil para uma compreensão mais profunda de sistemas de não-equilíbrio com correlações globais e outros sistemas complexos.

**Palavras-chave:** Mecânica Estatística, Teorema do Limite Central, Teoria Padrão dos Grandes Desvios.

# Abstract

The Standard Large Deviation Theory (LDT) is based on the Boltzmann-Gibbs (BG) factor that describes the thermal equilibrium of short-range Hamiltonian systems, whose velocity distribution is Maxwellian. It is generically applicable to systems that satisfy the Central Limit Theorem (CLT), among others. When we focus on the steady states of typical complex systems (for example, classical long-range Hamiltonian systems), both the CLT and the LDT need to be generalized. In the present dissertation, we carry out a brief conceptual review of Tsallis Non-Extensive Statistical Mechanics, the CLT and the LDT and their generalizations to  $q$ -statistics, in addition to presenting the results of an article of ours that come to be useful for an understanding deeper into non-equilibrium systems with global correlations and other complex systems.

**Keywords:** Statistical Mechanics, Central Limit Theorem, Standard Theory of Large Deviations.

# Lista de Figuras

4.1	A distribuição $\tilde{F}_n^N$ é representada como uma função $N\tilde{u} \in [-N/2, N/2]$ . . . . .	90
4.2	A distribuição $\tilde{F}_n^N$ é representada como uma função de $\tilde{u} \in [-1/2, 1/2]$ . Um valor arbitrário de $z \in [0, 1/2]$ é indicado. . . . .	90
4.3	$P(N, z)$ para $Q = 1, 5$ na representação $\log - \log$ . . . . .	91
4.4	$P(N, z)$ para $Q = 1, 5$ na representação $q - \log$ . . . . .	91
4.5	$P(N, z)$ para $Q = 1, 5$ na representação de razão. . . . .	92
4.6	Plot de $q_r$ versus $Q$ . Os pontos foram obtidos através da otimização do <i>fitting</i> de $P(N, z)$ com respeito a $(P_0, q_r)$ para valores típicos de $Q$ e valores $z \in [0, 0035, 0, 17]$ . A linha pontilhada é a conjectura dada na equação 4.19. Para cada valor de $z$ obtemos, através da otimização do <i>fitting</i> , um valor de $q_r$ . Na caixa vemos $P_0$ versus $z$ para todos os valores de $Q$ vistos na figura - as linhas pontilhadas são dadas pela equação 4.20 com o valor ilustrativo de $u = 0, 4$ . . . . .	92
4.7	Valores $r_q$ calculados a partir da equação 4.17 plotados em função de $z^2$ para um valor de $Q$ representativo. A região sombreada indica o intervalo consistente com as barras de erro de $q_r$ para esse valor de $Q$ . . . . .	93

# Lista de Tabelas

2.1	Sumarização dos Casos para $q$ -generalização do Teorema do Limite Central	54
2.2	Atratores Padrão para Diferentes Generalizações do Teorema do Limite Central . . . . .	57

# Lista de Acrônimos e Siglas

TGD	Teoria Padrão dos Grandes Desvios
LDT	<i>Standard Large Deviation Theory</i>
TLC	Teorema do Limite Central
CLT	<i>Central Limit Theorem</i>
ME	Mecânica Estatística
MEBG	Mecânica Estatística de Boltzmann-Gibbs
BG	Referente à Boltzmann-Gibbs ou Mecânica Estatística de Boltzmann-Gibbs
CODATA	<i>Committee on Data of the International Science Council</i>
MENE	Mecânica Estatística Não Extensiva
$q$ -CLT	$q$ -generalização do Teorema do Limite Central
$q$ -LDT	$q$ -generalização do Teoria Padrão dos Grandes Desvios
LGN	Lei dos Grandes Números
PGD	Princípio dos Grandes Desvios
LDP	<i>Large Deviation Principle</i>

# Lista de Símbolos

$V$	Volume de um sistema.
$N$	Número de partículas de um sistema.
$W$	Número de microestados de um sistema.
$k_B$	Constante de Boltzmann.
$k$	Constante de Boltzmann como designada no âmbito da Teoria da Informação.
$p_i$	Probabilidade de ocorrência de um microestado $i$ de um sistema.
$\hat{\rho}$	Operador Matriz de Densidade de um sistema quântico.
$S$	Entropia de um sistema.
$\mathbb{N}$	Conjunto dos Números Naturais.
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos Números Inteiros.
$\mathbb{R}$	Conjunto dos Números Reais.
$S_q$	Entropia de Tsallis.
$q$	Índice de Tsallis.
$\ln_q x$	Função $q$ -logaritmo de $x$ .
$e_q(x)$	Função $q$ -exponencial de $x$ .
$x \oplus_q y$	Função $q$ -soma entre $x$ e $y$ .
$x \ominus_q y$	Função $q$ -diferença entre $x$ e $y$ .
$x \otimes_q y$	Função $q$ -produto entre $x$ e $y$ .
$x \oslash_q y$	Função $q$ -divisão entre $x$ e $y$ .
$\mu$	Média de uma distribuição.
$\sigma$	Desvio Padrão de uma distribuição.
$F_q[f](\xi)$	$q$ -Transformada de Fourier da função não negativa $f$ .
$(a)_b$	Símbolo de Pochhammer.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Mecânica Estatística Não Extensiva</b>	<b>11</b>
A Contribuição de Tsallis . . . . .	11
Conjuntos de Índices $q$ e os $q$ -tripletos . . . . .	18
Possíveis Conexões entre os Diferentes Índices $q$ . . . . .	21
O $q$ -tripleto . . . . .	23
Álgebra e Cálculo Inspirados em Termodinâmica Não Extensiva . . . . .	24
Axiomas e Teorema da Unicidade para a Entropia de Tsallis . . . . .	28
<b>2 Teorema do Limite Central</b>	<b>36</b>
Generalização do CLT para a Entropia Não Aditiva $S_q$ . . . . .	40
$q$ -Transformada de Fourier . . . . .	40
$q$ -CLT . . . . .	47
<b>3 Teoria dos Grandes Desvios</b>	<b>58</b>
Generalização da LDT para a Entropia Não Aditiva $S_q$ . . . . .	74
<b>4 Extensividade Entrópica e Grandes Desvios na Presença de Correlações Não Locais: Nossa Contribuição</b>	<b>78</b>
Apresentação de Nosso Artigo . . . . .	79
Breves Considerações sobre Precedentes . . . . .	82
Modelo e resultados . . . . .	85
<b>Conclusão</b>	<b>89</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>96</b>

# Introdução

A Termodinâmica Clássica é uma ciência física eminentemente empírica que se baseia em conhecimentos fenomenológicos para descrever sistemas através da observação de grandezas macroscópicas: sua história remonta ao século XVII, e desempenhou papel de destaque durante a Primeira Revolução Industrial, quando seus princípios foram utilizados para se projetar máquinas mais eficientes. O marco que alça a Termodinâmica ao panteão da ciência moderna é a publicação por Nicolas Léonard Sadi Carnot, em 1824, de seu *magnum opus* chamado *Reflexões sobre a Potência Motriz do Fogo*, onde são introduzidos os conceitos de Ciclo de Carnot e Máquina de Carnot [1].

No decurso da construção de seu edifício de saberes, a Termodinâmica estabeleceu as leis experimentais na qual seu desenvolvimento se basearia [2]:

1. Lei Zero da Termodinâmica: estabelece que, se dois sistemas em equilíbrio termodinâmico têm a mesma temperatura que um terceiro sistema em equilíbrio termodinâmico, então eles estarão em equilíbrio entre si, à mesma temperatura. Trata-se de um guia para uma definição prática de temperatura e para o conceito de equilíbrio termodinâmico (assim chamado o estado que um sistema isolado atinge após um tempo suficientemente longo, onde nenhuma transformação macroscópica será observada, caracterizando-o a estabilidade das grandezas termodinâmicas associadas).
2. Primeira Lei da Termodinâmica: enuncia o princípio básico da conservação de energia (e massa) para sistemas macroscópicos - "a energia total do universo, entendido como o sistema em estudo e sua vizinhança, é constante no tempo".
3. Segunda Lei da Termodinâmica: base teórica também para o que se designa hoje por Seta do Tempo, foi enunciada pelo matemático alemão Rudolf Julius Emanuel Clausius nestes termos, "a entropia do universo tende a um máximo". Isso significa que, em sistemas isolados, a entropia total relacionada aos processos que tem lugar



nele tende a aumentar ou se manter contante, nunca diminuir.

4. Terceira Lei da Termodinâmica: é enunciada como "a entropia de uma substância cristalina pura na temperatura de zero absoluto é nula". Trata-se do estabelecimento de um referencial para a determinação da entropia.

O conceito de entropia, que emergiu primeiramente no desenvolvimento da Termodinâmica, será de especial interesse neste trabalho. Em [3] e [4] temos sua definição nestes termos: "a entropia é uma função contínua, diferenciável e monotonamente crescente da energia. É aditiva (extensiva) sobre os subsistemas constituintes".

Conforme exposto em [5], a função de estado entropia foi definida como a quantidade de calor trocada de modo reversível a dada temperatura absoluta pela primeira vez por Clausius em 1865 - ele estava, é claro, fazendo referência a todo o momento a processos físicos macroscópicos. Em um sistema isolado e em equilíbrio termodinâmico a entropia deve ser constante, o que implica na reversibilidade dos processos. O diferencial dessa grandeza, dado que ela não muda, deve ser nulo - a entropia possui um extremo, e toda experiência acumulada nos diz que esse extremo é um máximo: todos os processos irreversíveis que ocorrem num sistema isolado são associados ao aumento da entropia desse sistema até que o mesmo atinja o equilíbrio e a entropia seu valor máximo. É disso que trata a Segunda Lei da Termodinâmica. Constata-se mais uma vez que a entropia, a partir dessa definição, é uma quantidade extensiva, uma vez que tanto a energia interna de um sistema quanto sua temperatura são quantidades extensivas no escopo dessa descrição.

Mas como essa descrição macroscópica levada a cabo pela Termodinâmica poderia ser fruto de propriedades dos constituintes microscópicos de um dado sistema em equilíbrio? Essa questão foi levantada pela comunidade científica em paralelo às conquistas desse ramo da física, e muito cedo se percebeu a impossível dificuldade de se levar a cabo uma abordagem determinística para o fenômeno, dado o número absurdo de constituintes e suas interações mesmo nos sistemas mais simples. A saída mais proveitosa seria aplicar um tratamento estatístico descritivo da mecânica das partículas de um sistema termodinâmico em equilíbrio: esse foi o primeiro passo para a concepção da Mecânica Estatística para sistemas clássicos. Deve-se ressaltar que a Mecânica Estatística não tem por motivo revisar a Mecânica Newtoniana (ou a Mecânica Quântica) para a aplicação em sistemas microscópicos: ela propõe regras coerentes cujo objetivo é explicar e prever o comportamento macroscópico de um sistema de muitas partículas não ou fracamente interagentes

em equilíbrio a partir de uma abordagem microscópica, mas sem a necessidade de se coletar todos os dados que seriam necessários para uma abordagem clássica ou quântica.

Porém, qual a interpretação microscópica da entropia e da Segunda Lei? Consultamos novamente [5]: Ludwig Eduard Boltzmann foi o primeiro a mostrar que a tendência de aumento da entropia num sistema isolado, conforme este evolui para seu equilíbrio termodinâmico, também pode ser encontrada na sua descrição estatística e mecânica - é do que trata seu Teorema H de 1872. Boltzmann provou que uma função incerteza (uma medida da predizibilidade de um evento aleatório arbitrário) associada a uma distribuição de velocidades das partículas de um sistema fora do equilíbrio pode somente crescer ou permanecer a mesma no tempo. A distribuição de velocidades de Maxwell-Boltzmann, que descreve como se distribuem os módulos das velocidades das partículas de um gás em equilíbrio termodinâmico, é caracterizada por um máximo da função incerteza - ou seja, para a distribuição de Maxwell-Boltzmann a predição do momento de uma partícula em um gás a dada temperatura é relacionada à máxima função incerteza e, analogamente, a distribuição homogênea de partículas no espaço de coordenadas é associada à máxima incerteza com respeito à predição de coordenadas. Como consequência do Teorema H temos que uma distribuição arbitrária de partículas fora do equilíbrio tende a assumir, após um período suficientemente longo de tempo, a distribuição de Maxwell-Boltzmann de velocidades, e a função incerteza que caracteriza o equilíbrio, demonstra-se, é proporcional à entropia do sistema.

O primeiro desafio de Boltzmann em sua abordagem estatística foi explicar a aparente contradição desta com a invariância com respeito à inversão temporal presente na Mecânica Clássica. Um pequeno exemplo, presente em [5], pode ilustrar a pertinência da descrição de Boltzmann: embora os microestados de um sistema, caracterizados pelo par posição e momento das partículas, mudem com o tempo, no estado de equilíbrio macroscópico observamos as mesmas quantidades de estado termodinâmicas - muitos arranjos de microestados devem ser compatíveis com o mesmo macroestado. Se caracterizarmos o macroestado por seu volume  $V$  e seu número de partículas  $N$ , o número de microestados  $W(V)$  disponíveis a uma partícula é proporcional a  $V$ : ela pode assumir qualquer momento na faixa  $-\infty < p < \infty$  e todas as coordenadas  $q$  no volume  $V$ . Se supusermos que o número de células associadas às coordenadas é ele mesmo proporcional a  $V$ , para  $N$  partículas independentes (iguais, não interagentes, sem memória) o número de microestados

disponíveis seria dado por  $W(V) \propto V^N$ . Vamos considerar agora um sistema semelhante, mas que ocupe metade do volume total do recipiente que o contém:  $W(V/2) \propto (V/2)^N$  - para um número macroscópico de partículas (da ordem do número de Avogadro), o número de microestados disponíveis para essa configuração seria incomensuravelmente pequeno em relação ao original, proporcional a  $(1/2)^{10^{23}}$ . Então, um arranjo onde as partículas ocupem somente metade do recipiente é altamente improvável, segundo a abordagem estatística - para o limite termodinâmico,  $N \rightarrow \infty$ , a probabilidade de qualquer arranjo no equilíbrio termodinâmico que não o dominante tende a zero. As ideias enunciadas por Boltzmann foram posteriormente discutidas e estendidas por Josiah Willard Gibbs em seu livro de 1902 [6], e os esforços de ambos são considerados como fundadores da Mecânica Estatística, a qual nos referiremos como ME por agora. Conforme [7], a própria designação da disciplina como mecânica era matéria controversa no contexto da época: a palavra estava associada a um conhecimento totalmente determinístico de dado sistema (a exemplo da Mecânica Newtoniana) e a descrição probabilística é baseada em conceitos não determinísticos - ademais, havia uma contradição com a visão aristotélica dos fluidos como pertencentes ao reino mineral, onde não havia lugar para movimento espontâneo: a interpretação de Boltzmann do conceito de temperatura como grandeza relacionada diretamente à flutuações espaço-temporais de moléculas (átomos, partículas) que constituíam o fluído ia de encontro a essa interpretação.

Seguindo o exemplo visto em [8], vamos considerar um sistema de  $N$  partículas (átomos, moléculas etc.) idênticas e não interagentes em equilíbrio. A energia  $\epsilon$  de cada partícula será atribuída de maneira aleatória,  $\epsilon \in [0, \infty[$ . Dada a densidade de probabilidade  $\rho(\epsilon)$  associada ao sistema, a probabilidade de encontrarmos uma partícula que apresente energia entre  $\epsilon$  e  $\epsilon + d\epsilon$  é dada por  $\rho(\epsilon)d\epsilon$ . O princípio da normalização de probabilidades para o sistema em estudo nos revela que

$$\int_0^{\infty} \rho(\epsilon)d\epsilon = 1. \quad (1)$$

Sabemos que  $\langle \epsilon \rangle$  a energia média por partícula. Uma vez que estamos considerando  $N$  partículas idênticas não interagentes a energia total do sistema é dada por  $U = N\langle \epsilon \rangle$ .

Seja  $u = U/N$  a energia interna por partícula, então

$$u \equiv \langle \epsilon \rangle = \int_0^\infty \epsilon \rho(\epsilon) d\epsilon. \quad (2)$$

A que esse pequeno exercício nos leva? Podemos obter a energia interna, uma função de estado e, portanto, uma característica macroscópica do sistema, a partir de uma abordagem estatística básica. Nosso desafio passa a ser determinar  $\rho(\epsilon)$ , que pode assumir inúmeras formas e depende eminentemente das condições físicas do sistema. Dadas essas, podemos afirmar que, quando o sistema alcança sua distribuição mais provável, manifestada através de sua função densidade característica  $\rho(\epsilon)$ , ele estará no que chamamos de *equilíbrio estático*, que não implica que as partículas não se movam, mas sim que o ensemble (conceito introduzido por Gibbs durante a consolidação da termoestatística) não muda de estado. Mas como determinar  $\rho$ ?

Antes de respondermos esta pergunta, vamos abordar a interpretação microscópica da entropia. O sistema do nosso exemplo possui inúmeras configurações de suas partículas, estados microscópicos que chamaremos de *microestados*. Consideremos  $W$  o número de microestados que resulta na manifestação de um estado macroscópico específico. Para o caso específico do tipo de sistema em apreço, se o dividirmos em dois subsistemas,  $a$  e  $b$ , é razoável que

$$N = N_a + N_b$$

e

$$W = W_a W_b$$

ou seja, sendo os dois subsistemas independentes, o número total de microestado é, pelo princípio fundamental da contagem, a multiplicação entre o número de microestados do sistema  $a$ ,  $W_a$ , pelo número de microestados do sistema  $b$ ,  $W_b$ . Respondendo finalmente a pergunta pendente, se desejamos encontrar a função densidade  $\rho$  mais provável, que representa o estado de equilíbrio estático do sistema, precisamos buscar o estado mais provável, ou seja, aquele que possui o maior número de microestados: em outras palavras, precisamos maximizar  $W$ , o que implica que  $dW = 0$ . Logo

$$dW = d(W_a W_b) = W_a dW_b + W_b dW_a = 0 \quad (3)$$

dividindo a equação 3 por  $W$  e tendo em mente que  $d \ln(x) = dx/x$ , chegaremos a

$$d \ln W = d \ln W_a + d \ln W_b \quad (4)$$

Como não há razão *a priori* para supor que nosso sistema não siga o princípio da aditividade da entropia (veremos mais sobre isso logo adiante), teremos que a entropia total do sistema é dada por

$$S = S_a + S_b \quad (5)$$

ademais, a Segunda Lei da Termodinâmica nos diz que a condição de equilíbrio é obtida pela maximização da entropia

$$dS = dS_a + dS_b. \quad (6)$$

Ludwig Boltzmann sugeriu uma relação entre a entropia da termodinâmica (propriedade macroscópica) e o número de microestados (propriedade microscópica), que levou à seguinte relação

$$S = k_B \ln W \quad (7)$$

sendo  $k_B$  a chamada Constante de Boltzmann, cujo valor é dado por  $k_B = 1,380649 \cdot 10^{-23} J/K$ , com uma incerteza padrão relativa dada por  $9,1 \cdot 10^{-7}$ , segundo dados de 2018 do CODATA. A equação em apreço serve de epitáfio a Boltzmann em sua lápide no Cemitério Central de Viena, mas foi de fato escrita nesses termos por Max Karl Ernst Ludwig Planck no livro *Teoria do Calor* publicado em 1906 - o nome da constante também foi cunhado por Planck.

A equação 7, resultado das proposições de Boltzmann publicadas ainda em 1872, segue o chamado postulado de igual probabilidade *a priori* - ele diz que "para um sistema isolado com energia conhecida com exatidão e com composição exatamente conhecida, o sistema pode ser encontrado com igual probabilidade em qualquer microestado consistente com tal conjunto de informações".

Foi mostrado [9] que, de forma a satisfazer a Termodinâmica e as transformações

de Legendre associadas, a Mecânica Estatística de Boltzmann-Gibbs é suficiente, mas não necessária. Conforme se argumenta em [9], pode-se dizer que a Termodinâmica é consistente com todas as leis físicas fundamentais e, parodiando Arthur Stanley Eddington em seu *The Nature of the Physical World*, se isso não for verdade eventualmente, "pior para elas"[10]:

The law that entropy always increases, holds, I think, the supreme position among the laws of Nature. If someone points out to you that your pet theory of the universe is in disagreement with Maxwell's equations—then so much the worse for Maxwell's equations. If it is found to be contradicted by observation—well, these experimentalists do bungle things sometimes. But if your theory is found to be against the second law of thermodynamics, I can give you no hope; there is nothing for it but to collapse in deepest humiliation.

Dando continuidade à essa linha de pensamento, pode-se afirmar que a Termodinâmica tem nicho nos mais variados campos científicos, de partículas elementares à astrofísica, passando por sistemas dinâmicos em suas múltiplas manifestações - físicos, biológicos, sociais... Na verdade ela é universal de muitas formas, e um aspecto evidente disso é que a mesma é válida a despeito do modelo particular considerado. E entre a descrição microscópica - seja proposta pela Mecânica Newtoniana, Einsteiniana, Quântica... - e a descrição macroscópica termodinâmica existe a Mecânica Estatística <sup>1</sup>. Nesse papel desempenhado pela Mecânica Estatística de conectar o micro com o macro, a ligação fundamental é o conceito de entropia - e Tsallis e Cirto [9] o colocam como uma das mais frutíferas descobertas das ciências físicas que, embora proposto originalmente no âmbito da ME por Boltzmann nas últimas três décadas do século XIX, vêm sendo aprimorado e passou por verdadeiras revoluções no século XX, sem termos ainda hoje esgotado nem remotamente toda sua potencialidade.

A guisa de exemplo do comentado no último parágrafo, seja a equação 1.7. Ela é uma instância particular (como já foi dito, ela assume a equiprobabilidade de todos os microestados do sistema) de uma proposição mais geral, a saber

$$S_{BG} = -k_B \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i, \quad \sum_{i=1}^W p_i = 1 \quad (8)$$

---

<sup>1</sup>Para ser mais exato, *existem as Mecânicas Estatísticas*, se considerarmos cada uma como caracterizada pelo seu funcional entrópico correspondente.

onde  $p_i$  é a probabilidade de ocorrência de um microestado  $i$  do sistema considerado, com um total de  $W$  microestados. John von Neumann estendeu a equação 8 de forma a compreender sistemas quânticos no seu livro *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* datado de 1932: ele mostrou que a entropia de um sistema quântico pode ser expressa utilizando-se do operador matriz de densidade associado,  $\hat{\rho}$ , da seguinte forma

$$S_{BG} = -k_B \text{Tr}[\hat{\rho} \ln \hat{\rho}]. \quad (9)$$

Esse funcional entrópico é muitas vezes referido como entropia de Boltzmann-Gibbs-von Neumann, e a equação 8 pode ser recuperada fazendo-se  $\hat{\rho}$  diagonal. Extensão semelhante da entropia de Boltzmann-Gibbs foi feita no âmbito da Teoria da Comunicação por Claude Elwood Shannon em 1948 e, no âmbito maior da Teoria da Informação, por Edwin Thompson Jaynes em 1957. Conforme [7], podemos adicionar à discussão que, em todos os casos até aqui vistos, a entropia é uma medida logarítmica da falta de informação sobre sistema: quando sabemos tudo sobre o estado do sistema (mais precisamente, em qual dos estados  $W$  possíveis o sistema está),  $S_{BG}$  desaparece; quando não sabemos nada (equiprobabilidade entre os microestados)  $S_{BG}$  atinge seu valor máximo dado pela equação 7 - a igualdade dada pela equação 8 constitui uma conexão crucial entre o mundo macroscópico (representado pela entropia termodinâmica  $S_{BG}$ ) e o mundo microscópico (representado pelo número total  $W$  de possibilidades microscópicas e suas respectivas probabilidades  $p_i$ ).

Uma propriedade essencial associada à entropia de Boltzmann-Gibbs 8 é sua aditividade, como já vimos. Ou seja, para dois sistemas independentes  $A$  e  $B$ , sendo  $\{p^A\}$  e  $\{p^B\}$  os respectivos conjuntos de probabilidades, vale a relação

$$p_{ij}^{A \cup B} = p_i^A p_j^B \quad (10)$$

e a entropia total do sistema apresenta-se como

$$\begin{aligned} S^{A \cup B} &= -k_B \sum_{i,j} p_i^A p_j^B \ln p_i^A p_j^B \\ &= -k_B \sum_i p_i^A \ln p_i^A - k_B \sum_j p_j^B \ln p_j^B \end{aligned} \quad (11)$$

ou seja, temos

$$S^{AUB} = S^A + S^B. \quad (12)$$

Obviamente essa regra pode ser estendida para um número arbitrário de subsistemas macroscópicos não interagentes ou com interações de curto alcance e sem memória (nesse último caso, designamos como markovianos). Assim, na descrição de Boltzmann-Gibbs e correlatas, a entropia total associada a um conjunto de subsistemas é a soma das entropias de cada subsistema considerado em separado.

Como nos traz [4], a daqui por diante designada como Mecânica Estatística de Boltzmann-Gibbs (MEBG ou BG) mostrou-se utilíssima na explicação e predição do comportamento de sistemas que obedecem a extensividade termodinâmica clássica, ou seja, apresentam interações entre suas partículas que sejam de curto alcance ou que possam ser desprezadas, e quando a memória de seus constituintes não existe ou é de curta duração. Um conceito central na descrição BG, o de sistema isolado, só se mantém válido se as interações entre as partículas constituintes do sistema forem de curto alcance ou estiverem ausentes (existirem somente correlações locais ou nem mesmo essas): se as mesmas caem rapidamente com a distância, podem ser desprezadas e dois ou mais sistemas podem ser considerados isolados. Ademais, segundo salienta [11], não é possível descrever satisfatoriamente através da MEBG sistemas fora do equilíbrio - além disso, nessa mesma obra, Sílvio Salinas ressalta que uma questão levantada por Boltzmann permanece sem ter sido elucidada por completo: como sistemas cuja dinâmica de partículas é baseada em leis mecânicas reversíveis no tempo apresentam comportamento coletivo irreversível?

Interações de longo alcance e memória de longa duração podem comprometer a descrição do sistema pela MEBG: quando essas características estão presentes e são relevantes, os parâmetros termodinâmicos podem alterar seu comportamento intensivo ou extensivo. Ainda segundo [4], sistemas que apresentam estrutura fractal podem inviabilizar sua descrição pela BG, dado que existe a possibilidade de que quantidades centrais associadas à descrição pela MEBG diverjam, tornando impossível a caracterização do sistema e sua validação experimental. Uma generalização da MEBG foi proposta por Tsallis em 1988 [12], e é dela que nos apropriaremos no presente trabalho.

Na presente Introdução, pretendemos fazer uma brevíssima apresentação da área das



ciências físicas em que se concentra nosso trabalho.

O Capítulo 1 será dedicado a nos aprofundarmos na Mecânica Estatística Não Extensiva e temáticas associadas relevantes para a compreensão de nosso estudo. Com a plethora de contribuições existentes para o tema, e tendo em vista a publicação recente por Tsallis de um tomo de referência [13], não há pretensão de novidade, apenas apresentação organizada da teoria.

Os Capítulos 2 e 3 serão a revisão, respectivamente, do Teorema do Limite Central (CLT) e da Teoria dos Grandes Desvios (LDT), temáticas que vão preparar caminho para a apresentação de nossos resultados. As situações correntes da generalização tanto do CLT quanto da LDT para a  $q$ -estatística são vistas em cada capítulo.

O Capítulo 4 apresenta a contribuição original do autor desta dissertação (em coautoria com seus orientadores) para o tema em estudo, decorrente de artigo publicado durante o mestrado em revista de impacto internacional.

Por fim, em nossa Conclusão procedemos a alguns apontamentos breves sobre o estudo aqui, sua evolução e perspectivas futuras.

# Capítulo 1

## Mecânica Estatística Não Extensiva

Em 1988 foi proposta por Constantino Tsallis uma generalização da Mecânica Estatística de Boltzmann-Gibbs (MEBG) que ficou conhecida como Mecânica Estatística Não Extensiva (MENE). São as bases dessa que abordaremos no presente capítulo.

### A Contribuição de Tsallis

Em seu seminal artigo, Tsallis [12] usa uma quantidade normalmente associada ao conceito de multifractais para generalizar a expressão padrão da entropia  $S$  em teoria da informação, a saber  $S = -k \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i$ , onde  $W \in \mathbb{N}$  é o número total de possíveis configurações microscópicas do sistema e  $p_i$  são as probabilidades associadas a essas. O autor postula então uma equação característica da entropia baseada na quantidade  $p_i^q$ , onde  $p_i$  é a probabilidade associada a um evento e  $q$  é um número real:

$$S_q \equiv k \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q}{q - 1}, \quad (q \in \mathbb{R}) \quad (1.1)$$

onde  $k$  é uma constante positiva e a probabilidade é normalizada. Podemos verificar que no limite de  $q \rightarrow 1$ , a entropia de Boltzmann-Gibbs é recuperada

$$\begin{aligned}
S_1 \equiv \lim_{q \rightarrow 1} S_q &= k \lim_{q \rightarrow 1} \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i \exp[(q-1) \ln p_i]}{q-1} \\
&= k \lim_{q \rightarrow 1} \frac{1 - \sum_{i=1}^W \{p_i [1 + (q-1) \ln p_i]\}}{q-1} \\
&= -k \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Pode-se reescrever  $S_q$  como

$$S_q = \frac{k}{q-1} \sum_{i=1}^W p_i (1 - p_i^{q-1}) \tag{1.3}$$

e obviamente 1.3 se anula caso haja um único evento com probabilidade unitária,  $\forall q$ . Podemos constatar que  $S_q \geq 0$  para todos os casos - facilmente percebemos a partir das 1.1 e 1.3 que  $S_q$  é positiva definida [4] [14]: se  $q > 1$ , temos  $p_i^q < p_i$  e, conseqüentemente,  $\sum_{i=1}^W p_i^q < \sum_{i=1}^W p_i = 1$ , o que implica  $S_q \geq 0$ ; igualmente, se  $q < 1$ , temos  $p_i^q > p_i$  e, conseqüentemente,  $\sum_{i=1}^W p_i^q > \sum_{i=1}^W p_i = 1$ , e mais uma vez  $S_q \geq 0$ . Ademais,  $S_q$  é expansível para  $q > 0$ : pode-se expandir o conjunto de microestados sem se alterar a entropia do sistema, desde que a probabilidade associada à cada microestado além dos iniciais seja nula,  $S_q(p_1, p_2, \dots, p_W) = S_q(p_1, p_2, \dots, p_W, 0)$ .

Vamos extremar  $S_q$  através do método de multiplicadores de Lagrange, estabelecendo  $\sum_{i=1}^W p_i = 1$  como restrição:

$$\frac{d}{dp_i} \left( k \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q}{q-1} \right) = \lambda \frac{d}{dp_i} \left( \sum_{i=1}^W p_i - 1 \right) \tag{1.4}$$

obtemos que  $S_q$  é extremada, para todos os valores de  $q$ , no caso em que  $p_i = \frac{1}{W}$ ,  $\forall i$ , e temos então

$$S_q = k \frac{W^{1-q} - 1}{1-q} \tag{1.5}$$

que nos dá, tomando o  $\lim_{q \rightarrow 1}$

$$S_1 = k \ln W \quad (1.6)$$

e recuperamos a expressão para a máxima entropia de Boltzmann.

Vamos estudar brevemente a concavidade de  $S_q$  para diferentes valores de  $q$ . Sejam  $\{p_i\}$  e  $\{p'_i\}$  dois conjuntos de probabilidades correspondentes a um único conjunto de  $W$  possibilidades, e seja  $\lambda$  tal que  $0 < \lambda < 1$  - vamos definir uma lei de probabilidades intermediária como segue:

$$p''_i \equiv \lambda p_i + (1 - \lambda)p'_i, \quad \forall i \quad (1.7)$$

e

$$\Delta_q \equiv S_q(\{p''_i\}) - [\lambda S_q(\{p_i\}) + (1 - \lambda)S_q(\{p'_i\})] \quad (1.8)$$

Provamos então que  $\Delta_q \geq 0$  se  $q > 0$ ,  $\Delta_q \leq 0$  se  $q < 0$ , e  $\Delta_q = 0$  se  $q = 0$ , e também se  $q \neq 0$  mas  $p_i = p'_i, \forall i$ . Assim, podemos afirmar que  $S_q$  tem um máximo para  $q > 0$  (é côncava nesse intervalo), e  $S_q$  possui um mínimo para  $q < 0$  (é convexa nesse intervalo).

Vamos agora verificar a propriedade de aditividade de  $S_q$ . Tomemos dois sistemas independentes,  $A$  e  $B$ , com ensembles de configurações de possibilidades dados respectivamente por  $\Omega^A \equiv \{1, 2, \dots, i, \dots, W_A\}$  e  $\Omega^B \equiv \{1, 2, \dots, j, \dots, W_B\}$ , sendo as probabilidades correspondentes  $\{p_i^A\}$  e  $\{p_j^B\}$ . Vamos considerar  $A \cup B$  com ensemble de possibilidades sendo  $\Omega^{A \cup B} \equiv \{(1, 1), (1, 2), \dots, (i, j), \dots, (W_A, W_B)\}$  e  $p_{ij}^{A \cup B}$  denotando as probabilidades correspondentes.

Sabemos que se os sistemas são independentes,  $p_{ij}^{A \cup B} = p_i^A p_j^B, \forall (i, j)$ , então

$$\sum_{i,j}^{W_A W_B} (p_{ij}^{A \cup B})^q = \left[ \sum_{i=1}^{W_A} (p_i^A)^q \right] \left[ \sum_{j=1}^{W_B} (p_j^B)^q \right] \quad (1.9)$$

que nos leva à seguinte definição de aditividade <sup>1</sup>

$$\bar{S}_q^{A \cup B} = \bar{S}_q^A + \bar{S}_q^B \quad (1.10)$$

com

$$\bar{S}_q \equiv k \frac{\ln[1 + (1 - q)S_q/k]}{1 - q} \quad (1.11)$$

No  $\lim_{q \rightarrow 1}$ , a 1.10 se torna  $S_1^{A \cup B} = S_1^A + S_1^B$  e recuperamos a aditividade padrão de entropias de sistemas independentes. A equação 1.11 é uma forma de escrever o funcional entrópico de Renyi, proposto por Alfréd Rényi em 1961 no âmbito da Teoria da Informação [16]: trata-se também de uma generalização pioneira da entropia BG e que preserva sua propriedade de aditividade - veremos que essa característica a diferencia do funcional entrópico introduzido por Tsallis e estudado aqui.

Para o caso de sistemas correlacionados, vamos definir

$$\Gamma(\{p_{ij}^{A \cup B}\}) \equiv \bar{S}_q^{A \cup B}(\{p_{ij}^{A \cup B}\}) - \bar{S}_q^A \left( \left\{ \sum_{j=1}^{W_B} p_{ij}^{A \cup B} \right\} \right) - \bar{S}_q^B \left( \left\{ \sum_{i=1}^{W_A} p_{ij}^{A \cup B} \right\} \right) \quad (1.12)$$

Conforme o estudo levado a cabo em [12], a independência entre os sistemas implica em  $\Gamma_q = 0$ ,  $\forall q$ . Para uma correlação fixa arbitrária, pode-se provar que  $\Gamma_1 < 0$  (subaditividade) e  $\Gamma_0 = 0$ . Se tratarmos valores de  $q$  arbitrários,  $\Gamma_q$  apresenta uma grande sensibilidade a  $\{p_{ij}^{A \cup B}\}$ , não apresentando regularidades além das citadas.

Agora, tomemos o funcional entrópico dado pela equação 1.1, também conhecido como Entropia de Tsallis, e vamos verificar a possibilidade de manifestar a propriedade da aditividade como descrita. Mantendo as mesmas considerações sobre a constituição de subsistemas, vejamos

$$\begin{aligned} S_q^{A \cup B} &= k \frac{1 - \sum_{i,j}^{A,B} (p_i^A)^q (p_j^B)^q}{q - 1} \\ &= k \frac{1 - \sum_{i=1}^A (p_i^A)^q}{q - 1} + k \frac{1 - \sum_{j=1}^B (p_j^B)^q}{q - 1} - k \frac{[1 - \sum_{i=1}^A (p_i^A)^q] [1 - \sum_{j=1}^B (p_j^B)^q]}{q - 1} \end{aligned} \quad (1.13)$$

---

<sup>1</sup>A presente definição de aditividade segue aquela enunciada por Oliver Penrose [15]: um funcional entrópico  $S(\{p_i\})$  é dito aditivo se, para dois sistemas probabilisticamente independentes  $A$  e  $B$  (ou seja,  $p_{ij}^{A \cup B} = p_i^A p_j^B$ ), verificamos que  $S(A \cup B) = S(A) + S(B)$  - de outra forma, o funcional entrópico é dito não aditivo.

e assim, temos

$$S_q^{A \cup B} = S_q^A + S_q^B + \frac{1-q}{k} S_q^A S_q^B. \quad (1.14)$$

Trata-se de um tipo de pseudo-aditividade que se manifesta quando aplicamos a Entropia de Tsallis: o índice  $q$  do funcional entrópico determina a extensão ou grau da aditividade da entropia: lembrando que  $S_q \geq 0, \forall q$ , as características de  $S_{BG}$  são novamente recuperadas quando fazemos  $q = 1$ ;  $q > 1$  corresponde à subextensividade, uma vez que  $S_q^{A \cup B} < S_q^A + S_q^B$ ;  $q < 1$  corresponde à superextensividade, já que  $S_q^{A \cup B} > S_q^A + S_q^B$ . De fato, o funcional entrópico proposto por Tsallis introduz a possibilidade de interconexão não evanescente entre as partes de um sistema físico: a violação da aditividade característica de  $S_q$  põe em xeque o conceito de sistema isolado [4].

Ao propor sua Entropia Não Aditiva, Tsallis cria uma generalização da Mecânica Estatística de Boltzmann-Gibbs, que a recupera no limite de  $q \rightarrow 1$ , a partir de uma premissa crucial: sistemas termodinâmicos com correlações não locais devem apresentar entropia extensiva [9] [13] [17]. Propriedades essenciais à Física como a estrutura de Legendre da Termodinâmica, o Teorema H, o Teorema de Ehrenfest, entre outras múltiplas, são  $q$ -invariantes [12] [14] [18] [19] [20] [21] [4]. A Mecânica Estatística Não Extensiva, como ficou conhecida, motivou a generalização de estruturas matemáticas essenciais à descrição estatística, como o Teorema do Limite Central (TLC ou CLT, em inglês) e a Teoria dos Grandes Desvios (TGD ou LDT, em inglês) [17] - ambos os tópicos serão estudados nos próximos capítulos e constituem elemento essencial para a compreensão adequada de nosso trabalho.

Com base na discussão de Cirto [17], vamos estabelecer os critérios de extensividade, proporcionalidade do funcional entrópico com o tamanho do sistema no chamado limite termodinâmico, para duas diferentes classes de sistemas físicos. Para aqueles coerentemente abrangidos pela MEBG, devemos esperar, como já dissemos, que haja independência entre os  $N$  constituintes microscópicos do sistema, o que nos leva a um número de possibilidades  $W$  que segue o princípio fundamental da contagem, é multiplicativo:  $W \sim \mu^N$ , para  $\mu > 1$ , e  $N \rightarrow \infty$  (que caracteriza o limite termodinâmico). Rememorando a definição de entropia BG no caso da equiprobabilidade de microestados, temos para

esses tipos de sistema

$$S_{BG} = k_B \ln W = k_B \ln \mu^N = N k_B \ln \mu. \quad (1.15)$$

Essa manifestação da extensividade com a independência assintótica impregnou de tal forma a Física do século XX que ainda encontramos como definição mais comumente usada da extensividade como propriedade física a que segue

$$0 < \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S_{BG}}{N} < \infty. \quad (1.16)$$

Contudo o tempo mostrou que a configuração de sistemas físicos regidos pela MEBG pode ser restritiva em muitos casos:  $W \sim \mu^N$  quando  $N \rightarrow \infty$  é uma exigência bastante forte, e só se justifica quando tratamos de sistemas independentes ou com correlações locais, sistemas quânticos pouco emaranhados ou quando os microestados do sistema são acessados de forma que a hipótese ergódica seja justificável.

É facilmente provado que, para sistemas que obedecem à regra  $W \sim \mu^N$  quando  $N \rightarrow \infty$ , o funcional entrópico de Tsallis, além de não aditivo, é não extensivo para  $q \neq 1$ . Vamos considerar agora sistemas com correlações não locais, de tal forma que o número de microestados cresça com o número de constituintes  $N$  na forma  $W \sim N^\rho$ , com  $\rho > 0$  e no limite  $N \rightarrow \infty$ . Seguindo ainda [17], constatamos que  $N^\rho \ll \mu^N$  para  $N$  grande: para sistemas que apresentam esse tipo de comportamento  $S_{BG}$  torna-se não extensiva, e a Entropia de Tsallis, mediante uma escolha acertada do índice  $q$ , deve ser extensiva. Pode-se mostrar que, para o caso em questão, teremos, a partir da equação 1.5

$$S_q = -\frac{k}{1-q} \left(1 - W^{1-q}\right) \sim N^{\rho(1-q)} \quad (1.17)$$

e, escolhendo  $q = 1 - 1/\rho$ , obteremos  $S_q \propto N$ . Esse é o grande salto da Mecânica Estatística Não Extensiva de Tsallis, um paradigma científico novo, que não nega o anterior, mas o expande e aumenta seus horizontes: ao estabelecer a extensividade como propriedade essencial da entropia dos sistemas termodinâmicos, as características matemáticas do funcional entrópico a ser aplicado são ditadas pelo modelo, pela natureza do sistema físico (químico, biológico, social...) em estudo, pela forma como cada um dos seus elementos constituintes se comporta em relação aos demais. Citando [17] (grifos nossos):

Não há receita para determinar quando uma entropia diferente de  $S_{BG}$  deve ser usada. Com as evidências acumuladas, podemos aventar cenários gerais. Os sistemas para os quais a termoestatística de Boltzmann-Gibbs é sabidamente válida são tipicamente aqueles com interação de curto alcance, pouco correlacionados temporal ou espacialmente, fortemente caóticos (expoente de Lyapunov positivo); são sistemas ergódicos, que ocupam os estados acessíveis de modo que  $S_{BG}$  seja proporcional ao seu tamanho. Sem muito rigor, podemos classificá-los de **simples**. Esperamos, por outro lado, que a termoestatística generalizada seja necessária na abordagem de sistemas com interação de longo alcance, fortemente correlacionados, fracamente caóticos (Lyapunov zero); sistemas que possivelmente violem a ergodicidade, explorando parcialmente o espaço de fases, o qual talvez seja melhor descrito pela geometria fractal. São algumas vezes chamados de **complexos**.

Diante dos diferentes funcionais entrópicos propostos nas últimas décadas, espera-se que uma definição mais inclusiva de extensividade vigore como padrão - a mudança é sutil, mas confere reconhecimento a toda uma área da Física que está em franca expansão e apresenta uma profusão de resultados notáveis:

$$0 < \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S(N)}{N} < \infty. \quad (1.18)$$

Nem todos os funcionais entrópicos possíveis são aditivos, muitos não recuperam a  $S_{BG}$ , mas todos devem ser extensivos, no contexto dos sistemas que pressupõe tratar, para ao menos uma configuração específica de seus parâmetros: a extensividade entrópica depende tanto do funcional entrópico escolhido como do próprio sistema (seus constituintes e as correlações entre eles) [7].

Conforme [13] e [7], o Teorema de Enciso-Tempesta [22] estabeleceu que a (genericamente não aditiva) Entropia de Tsallis  $S_q$  é a única que é simultaneamente forma traço<sup>2</sup>, componível<sup>3</sup>, e contém a entropia de Boltzmann-Gibbs  $S_{BG}$  como caso particular.

<sup>2</sup>A chamada forma traço é uma das formas associadas a álgebras de Lie. As entropias forma traço são as únicas que podem ser expressas como  $S = k\langle\sigma\rangle$ , onde  $\sigma \equiv \ln(1/p)$  é a nomeada função surpresa [23] [24], que intuitivamente se anula no caso de certeza e diverge no caso de probabilidade de ocorrência zero.

<sup>3</sup>Diz-se de funções que se prestam bem à composição, que é a agregação de funções mais simples para criar outras, mais elaboradas.

Fonte: <https://www.dicionariotecnico.com/traducao.php?termo=composable>, acessado em 03 de julho



# Conjuntos de Índices $q$ e os $q$ -tripletos

Esta seção é baseada na profícua discussão encontrada principalmente em [25] e [13]. Pelo que vimos até agora, a teoria MENE pode ser válida para valores arbitrários do índice  $q$  - a questão essencial agora proposta é: como podemos determinar os valores dos índices  $q$  associados a um dado sistema ou classe de sistemas? Na verdade não só um, mas toda uma família (de tamanho possivelmente infinito) de índices  $q$  pode ser determinada para um dado sistema - vejamos alguns exemplos<sup>4</sup>:

- $q_{sensitivity}$ : um sistema não linear  $x(t)$  unidimensional dissipativo (ou conservativo bidimensional) tipicamente exhibe sensibilidade às condições iniciais  $\xi \equiv \lim_{\Delta x(0) \rightarrow 0} \frac{\Delta x(t)}{\Delta x(0)}$  da forma

$$\xi = e^{\lambda_{q_{sensitivity}} t}$$

onde  $\lambda_{q_{sensitivity}}$  é o coeficiente de Lyapunov  $q$ -generalizado. Um procedimento numérico para se determinar esse índice consiste em plotar  $\ln_q \xi(t)$  versus  $t$  para vários valores de  $q$  até que seja encontrado um valor que, assintoticamente no limite  $t \rightarrow \infty$ , tenhamos<sup>5</sup>  $\ln_q \xi(t) \propto t$ . Esse valor do índice  $q$  é o  $q_{sensitivity}$  e a inclinação assintótica do gráfico é dada por  $\lambda_{q_{sensitivity}}$ . As duas situações mais interessantes em que esse índice ocorre são caos forte (i.e., quando o expoente de Lyapunov  $\lambda_1$  é positivo), e caos fraco (ou fronteira do caos, onde  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_{q_{sensitivity}} > 0$ ). No primeiro caso temos  $q_{sensitivity} = 1$ , e no último  $q_{sensitivity} < 1$ . Embora não seja particularmente relevante no presente contexto,  $q_{sensitivity} > 1$  também pode ocorrer - tais são os casos de pontos críticos de período duplo e bifurcações tangentes.

- $q_{entropy\ production}$ : suponhamos que o espaço de fase de um sistema dinâmico não linear  $d$ -dimensional esteja particionado em  $W$  células. Colocamos, em uma dessas células (aleatoriamente determinada, ou de outra maneira qualquer que for conveniente),  $M$  condições iniciais, e então deixamos esses pontos evoluírem. Definimos  $p_i(t) \equiv M_i(t)/M$ , ( $i = 1, 2, 3, \dots, W$ ), onde  $M_i(t)$  é o número de pontos dentro da  $i$ -ésima célula em um tempo  $t$ ,  $\sum_{i=1}^W M_i(t) = M$ ,  $\forall t$ . Então calculamos, com esses

---

de 2023.

<sup>4</sup>As designações dos diferentes índices  $q$  foram mantidas em inglês e por extenso (não foram abreviadas), em respeito ao trabalho original.

<sup>5</sup>O  $q$ -logaritmo, ou  $\ln_q x$ , é uma operação fundamental à termoestatística não extensiva e será introduzida na próxima seção: o leitor que não tiver intimidade com essa notação pode visitar o texto adiante, ou abstrair os detalhes até que a definição formal seja apresentada.

$\{p_i(t)\}$ ,  $S_q(t)/k$ . Verificaremos que, para uma ampla classe de sistemas dinâmicos não lineares, existe um valor de  $q$  tal que  $S_q(t) \propto t$ . Esse valor é o  $q_{entropy\ production}$ , e a inclinação é uma taxa de produção de entropia do tipo Kolmogorov-Sinai  $q$ -generalizada,  $K_{q_{entropy\ production}}$ . Para sermos mais precisos, temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{W \rightarrow \infty} \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{S_{q_{entropy\ production}}(t)}{kt} = K_{q_{entropy\ production}}.$$

Na presença de caos forte temos  $q_{entropy\ production} = 1$ , e na presença de caos fraco, temos  $q_{entropy\ production} < 1$ . Para sistemas com  $d = 1$ , esperamos  $q_{entropy\ production} = q_{sensitivity}$  e  $K_{q_{entropy\ production}} = \lambda_{q_{sensitivity}}$ , verificando uma identidade tipo Pesin.

- $q_{relaxation}$ : constam na literatura vários procedimentos utilizados para se determinar esse índice: vamos abordar um caso simples, o de um sistema dinâmico não linear  $d$ -dimensional dissipativo. Vamos particionar seu espaço de fases em  $W$  células, e usar um grande número de condições iniciais uniformemente espalhadas em todas essas células. Então contamos o número de células  $W(t)$  dentro das quais existe ao menos um ponto num dado tempo  $t$ . Sendo o sistema dissipativo, e para um número  $W$  crescente, espera-se

$$W(t)/W \simeq e^{-t/\tau_{q_{relaxation}}}$$

o que define o índice  $q_{relaxation}$ . Para caos forte esperamos  $q_{relaxation} = 1$ , e para caos fraco,  $q_{relaxation} > 1$ . Embora este procedimento computacional não seja o mais preciso, é certamente o mais fácil de ser implementado.

- $q_{stationary\ state}$ : esse índice é um dos que caracterizam a distribuição de energias em um estado estacionário (que coincide com o equilíbrio térmico para  $q = 1$ ). Assim

$$p_i \propto e^{-\beta_{q_{stationary\ state}} E_i}.$$

Embora não exista prova formal, este índice pode coincidir, ao menos em uma grande classe de sistemas, com aquele da distribuição de velocidades,  $v_i$ , i.e.,  $p(v_i) \propto e^{-\beta v_i^2}$ . Ele pode coincidir também com o índice indicado como  $q$ -limite ( $q$ limit) na literatura, onde "limite" se refere a  $N \rightarrow \infty$ , sendo  $N$  o número total de partículas de um sistema probabilístico. O índice em apreço pode também coincidir com  $q_{attractor}$ , onde "attractor" é usado no sentido do Teorema do Limite Central.

Sequer é ignorado que este índice possa coincidir com o índice que caracteriza algumas funções de correlação (e.g., função de autocorrelação velocidade-velocidade ou outras). No equilíbrio térmico temos  $q_{stationary\ state} = 1$  - para estados estacionários mais complexos tipicamente esperamos  $q_{stationary\ state} > 1$  (embora a possibilidade de  $q_{stationary\ state} < 1$  não deva ser excluída).

- $q_{entropy}$ : de modo a ser consistente com a termodinâmica clássica, a entropia de um sistema de  $N$  elementos deve ser extensiva, i.e., assintoticamente proporcional a  $N$  no limite  $N \rightarrow \infty$ . Há uma imensa quantidade de sistemas para os quais existe um valor de  $q$  que satisfaz essa condição: esse valor de  $q$  é o  $q_{entropy}$ , e temos

$$0 < \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S_{q_{entropy}}(N)}{N} < \infty.$$

Se não houver correlações ou as mesmas forem fracas, teremos  $q_{entropy} = 1$ . Se as correlações são fortes, tipicamente (mas não necessariamente) teremos  $q_{entropy} < 1$ . Há sistemas, contudo, para os quais nenhum valor de  $q$  torna a entropia extensiva. Vamos ilustrar os casos listados para um sistema simples marcado pela equiprobabilidade, i.e.,  $p_i = 1/W$ ,  $\forall i$ . Se, no limite  $N \rightarrow \infty$ ,  $W(N) \sim A\mu^N$  ( $\mu > 1; A > 0$ ), teremos  $q_{entropy} = 1$ . Se tivermos  $W(N) \sim BN^\rho$  ( $\rho > 0; B > 0$ ), então  $q_{entropy} = 1 - 1/\rho < 1$ . Concluindo, vamos assumir que  $W(N) \sim C\mu^{N^\gamma}$  ( $\mu > 1; 0 < \gamma < 1; C > 0$ ): nesse caso, não existe valor de  $q$  que possa produzir  $S_q(N) \propto N$ .

- $q_{correlation}$ : esse índice caracteriza sistemas que envolvam fortes correlações. É por vezes apresentada como o  $q$ -produto (para maiores informações sobre a  $q$ -álgebra, consultar a próxima seção) seguinte

$$x \otimes_q y \equiv \left[ x^{1-q} + y^{1-q} - 1 \right]_+^{\frac{1}{1-q}}, \quad (x \geq 0, y \geq 0)$$

que satisfaz  $x \otimes_1 y = xy$  e a propriedade extensiva  $\ln_q(x \otimes_q y) = \ln_q x + \ln_q y$  (a ser comparada com a propriedade não aditiva  $\ln_q(xy) = \ln_q x + \ln_q y + (1-q) \ln_q x \ln_q y$ ). Fortes correlações podem ser introduzidas através da não linearidade ou inhomogeneidade em equações diferenciais. Ausência de correlação (i.e., independência probabilística) corresponde a  $q_{correlation} = 1$ . A presença de fortes correlações é marcada

por  $q_{\text{correlation}} \neq 1$ .

## Possíveis Conexões entre os Diferentes Índices $q$

Seguimos consultando especialmente o trabalho [25]: nesse artigo, Tsallis reputa que o entendimento completo de todas as possíveis conexões entre os diferentes  $q$ -índices permanece distante. Existem muitos exemplos para os quais um ou mais dos  $q$ -índices são conhecidos e compreendidos através de ferramentas analíticas ou numéricas, mas a complexidade dessa questão não foi totalmente desvendada.

Contudo, sob a luz do que é presentemente conhecido, parece-nos que, para um dado sistema, um conjunto contável de  $q$ -índices pode existir, cada um deles associado a uma específica propriedade do sistema (de menor ou maior importância). Vamos denotar esse conjunto como  $\{q_m\}$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Para muitos sistemas, senão todos, a estrutura desse conjunto parece ser tal que muito poucos (tipicamente um único) desses  $q$ -índices são independentes, todos os demais sendo funções desses poucos. Vamos ilustrar o que escrevemos assumindo que somente um deles é independente, denotando-o por  $q_0$ . Tipicamente temos

$$q_m = f_m(q_0), \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; f_0(q_0) = q_0). \quad (1.19)$$

A forma  $f_m(x_0)$ , ou funções similares, podem ser bastante complexas. Contudo, um fato intrigante, muitas dentre elas parecem apresentar estruturas simples. Em alguns casos satisfazem

$$\frac{\alpha}{1 - q_0^+} = \frac{\alpha}{1 - q_0} + m, \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (1.20)$$

onde  $0 < \alpha \leq 2$ . Em outros casos satisfazem, através da chamada dualidade aditiva  $q_0 \leftrightarrow (2 - q_0)$ ,

$$\frac{\alpha}{1 - q_0^-} = \frac{\alpha}{q_0 - 1} + m, \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (1.21)$$

onde novamente  $0 < \alpha \leq 2$ . Pode-se mostrar que, aplicando uma vez mais essa transfor-

mação, voltamos ao valor inicial  $q_0$ . Ou seja, para um  $(\alpha; m)$  fixo, temos

$$q_m^-(q_m^-(q_0)) = q_0, \quad \forall q_0. \quad (1.22)$$

Ou, equivalentemente, a função  $q_m^-(q_0)$  coincide com a função  $q_0(q_m^-)$ .

Segue de 1.20 e 1.21 que

$$\frac{\alpha}{1 - q_m^+} - m = \frac{\alpha}{1 - q_{m'}^+} - m', \quad (m, m' = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (1.23)$$

e

$$\frac{\alpha}{1 - q_m^-} - m = \frac{\alpha}{1 - q_{m'}^-} - m', \quad (m, m' = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (1.24)$$

e facilmente concluimos que

$$q_m^-(q_0) = q_m^+(2 - q_0). \quad (1.25)$$

Se fizermos uma extensão analítica em 1.20 tal que  $m$  e  $m'$  sejam permitidos serem números reais, podemos considerar o caso

$$m' = m - \alpha, \quad (0 < \alpha \leq 2). \quad (1.26)$$

Substituindo essa sentença nas equações 1.23 e 1.24, obteremos respectivamente

$$q_{m-\alpha}^+ = 2 - \frac{1}{q_m^+} \quad (1.27)$$

e

$$q_{m-\alpha}^- = 2 - \frac{1}{q_m^-}. \quad (1.28)$$

Essa forma específica de conexão aparece em muitas ocasiões na MENE de Tsallis.

As famílias 1.20 e 1.21 podem ser reescritas, respectivamente, das seguintes formas

$$q_m^+ = \frac{\alpha q_0 + (1 - q_0)m}{\alpha + (1 - q_0)m}, \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (1.29)$$

e

$$q_m^- = \frac{\alpha(2 - q_0) + (q_0 - 1)m}{\alpha + (q_0 - 1)m}, \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (1.30)$$

Em ambos os casos pode-se verificar que  $q_0 = 1$  produz  $q_m = 1, \forall m$ , e que  $q_{\pm\infty}^\pm = 1, \forall q_0 \neq 1$ . Para um dos ramos da família 1.29 verificamos que  $q_0 > 1$  implica  $q_m^+ > 1, \forall m$ , e que  $q_0 < 1$  implica  $q_m^+ < 1, \forall m$ . Para um dos ramos da família 1.30 temos que  $q_0 > 1$  implica  $q_m^- < 1, \forall m$ , e  $q_0 < 1$  implica  $q_m^- > 1, \forall m$ . É possível escrever ambas as famílias de uma maneira compacta, a saber

$$q_m^\pm = \frac{\alpha[1 \pm (q_0 - 1)] \pm (1 - q_0 m)}{\alpha \pm (1 - q_0)m}, \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

## O $q$ -triplete

Conforme citado por Tsallis em [25], foi heurísticamente conjecturado e trazido a público no ano de 2004 [26] que sistemas físicos complexos deveriam existir com um conjunto de  $q$ -índices relevantes, sejam eles  $q_{sensitivity} < 1, q_{relaxation} > 1$  e  $q_{stationary\ state} > 1$ . Tal conjunto é normalmente designado como  $q$ -triângulo ou  $q$ -triplete. No limite da MEBG, devemos ter  $q_{sensitivity} = q_{stationary\ state} = q_{relaxation} = 1$ , correspondendo [13] a (i) ao funcional entrópico BG (que produz uma entropia extensiva como requerida por Clausius), (ii) ao celebrado fator BG para a distribuição de energias, e (iii) uma relaxação exponencial no equilíbrio térmico, entre outros. Então, a emergência de ao menos um  $q$ -índice diferente da unidade refletiria a complexidade de um sistema.

O primeiro  $q$ -triplete detectado na natureza o foi no vento solar, por pesquisadores da NASA [27] [13] trabalhando nos dados da Voyager 1 em 2005. Ele foi interpretado dentro do Grupo de Transformações de Moebius [28] [29]. Essa estrutura matemática possibilitou estabelecer [30] uma regra de conservação de ciclo de três termos, dada por

$$\frac{1}{q_{relaxation} - 1} + \frac{1}{q_{stationary\ state} - 1} + \frac{1}{q_{sensitivity} - 1} = \frac{1 + q_1}{1 - q_1}$$

onde  $q_1$  designa um ponto fixo. Fazendo, no presente caso,  $q_1 = 0$ , obtemos

$$\frac{1}{q_{relaxation} - 1} + \frac{1}{q_{stationary\ state} - 1} + \frac{1}{q_{sensitivity} - 1} = 1$$

que foi o valor encontrado para o sistema do vento solar captado pela Voyager [30], e satisfeito numericamente com uma margem de erro inferior a 10%. Contudo, tendo em vista os dados apresentados sobre o assunto em [13], há necessidade de maiores pesquisas para a compreensão adequada das estruturas matemáticas e físicas dos  $q$ -tripletos.

## Álgebra e Cálculo Inspirados em Termodinâmica Não Extensiva

A presente seção é baseada eminentemente nos trabalhos de Borges [31] e de Nivanen, Méhauté e Wang [32], seguindo o formalismo do primeiro, e trata de uma generalização de operações algébricas e de cálculo diferencial e integral a partir das funções  $q$ -exponencial e  $q$ -logaritmo apresentadas na MENE de Tsallis: é um exercício matemático que demonstra as possibilidades da teoria física, além de prover ferramentas para uso em investigações científicas atuais e futuras.

Vamos começar introduzindo as definições para  $q$ -logaritmo e  $q$ -exponencial

$$\begin{aligned} \ln_q x &\equiv \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q}, & (x > 0), \\ e_q(x) &\equiv [1 + (1 - q)x]_+^{\frac{1}{1-q}}, & (x, q \in \mathbb{R}) \end{aligned} \tag{1.31}$$

onde  $[f]_+ \equiv \max\{f, 0\}$ , e considerar duas relações bem conhecidas

$$\begin{aligned} \ln_q(xy) &= \ln_q x + \ln_q y + (1 - q) \ln_q x \ln_q y \\ e_q(x)e_q(y) &= e_q(x + y + (1 - q)xy) \end{aligned} \tag{1.32}$$

sendo a última válida se  $e_q(x)$  e  $e_q(y)$  assumem valores diferentes de zero e  $+\infty$ . Podemos definir a generalização a operação de soma entre dois números  $x$  e  $y$  da seguinte forma:

$$x \oplus_q y \equiv x + y + (1 - q)xy \tag{1.33}$$

que recupera a adição usual quando  $q = 1$ . A respeito de nossa  $q$ -soma, podemos verificar que:

- é comutativa:  $x \oplus_q y = y \oplus_q x$ ;

- é associativa:  $x \oplus_q (y \oplus_q z) = (x \oplus_q y) \oplus_q z$ ;
- não é distributiva em relação à multiplicação por um escalar:  $a(x \oplus_q y) \neq (ax \oplus_q ay)$ ;
- possui elemento neutro e o mesmo é zero:  $x \oplus_q 0 = x$ .

Segue da definição da  $q$ -soma a de  $q$ -soma de  $n$  termos idênticos:

$$x^{\oplus_q n} = \frac{1}{1-q} \{[1 + (1-q)x]^n - 1\}. \quad (1.34)$$

Podemos definir a operação inversa aditiva como o elemento que,  $q$ -somado a  $x$ , resultará no elemento neutro,  $x \oplus_q (\ominus_q x) = 0$ :

$$\ominus_q x \equiv \frac{-x}{1 + (1-q)x}, \quad \left(x \neq \frac{1}{q-1}\right) \quad (1.35)$$

o que nos leva à  $q$ -diferença, assim definida:

$$x \ominus_q y \equiv x \oplus_q (\ominus_q y) = \frac{x-y}{1 + (1-q)y}, \quad \left(y \neq \frac{1}{q-1}\right) \quad (1.36)$$

Pode-se provar válidas as seguintes propriedades da  $q$ -diferença:

- $x \ominus_q y = \ominus_q y \oplus_q x$ ;
- $x \ominus_q (y \ominus_q z) = (x \ominus_q y) \oplus_q z$ ;
- $a(x \ominus_q y) \neq (ax \ominus_q ay)$ .

Se definirmos um  $q$ -produto como

$$x \otimes_q y \equiv [x^{1-q} + y^{1-q} - 1]_+^{\frac{1}{1-q}}, \quad (x, y > 0) \quad (1.37)$$

isso nos leva a

$$\ln_q(x \otimes_q y) = \ln_q x + \ln_q y$$

e

$$e_q(x) \otimes_q e_q(y) = e_q(x + y).$$

Nosso  $q$ -produto possui, como pode ser provado, as seguintes propriedades



- comutatividade:  $x \otimes_q y = y \otimes_q x$ ;
- associatividade:  $x \otimes_q (y \otimes_q z) = (x \otimes_q y) \otimes_q z$ , desde que  $x \otimes_q y$  e  $y \otimes_q z$  sejam diferentes de zero e de infinito;
- elemento neutro:  $x \otimes_q 1 = x$ .

É imediato, a partir da definição do  $q$ -produto, definirmos a  $q$ -potenciação ( $q$ -produto de  $n$  termos idênticos):

$$x^{\otimes_q n} = \left[ nx^{1-q} - (n-1) \right]_+^{\frac{1}{1-q}}. \quad (1.38)$$

A partir da propriedade do elemento neutro do  $q$ -produto, podemos definir a operação inversa multiplicativa,  $1 \oslash_q x$ , de forma que  $x \otimes_q (1 \oslash_q x) \equiv 1$ :

$$1 \oslash_q x \equiv \left[ 2 - x^{1-q} \right]_+^{\frac{1}{1-q}}, \quad (x \geq 0). \quad (1.39)$$

A  $q$ -divisão é então definida como

$$x \oslash_q y \equiv \left[ x^{1-q} - y^{1-q} + 1 \right]_+^{\frac{1}{1-q}}, \quad (x, y > 0) \quad (1.40)$$

e satisfaz às seguintes propriedades

- $x \oslash_q y = 1 \oslash_q (y \oslash_q x)$ , desde que  $x^{1-q} \leq 1 + y^{1-q}$ ;
- $x \oslash_q (y \oslash_q z) = (x \oslash_q y) \otimes_q z = (x \otimes_q z) \oslash_q y$ , desde que  $z^{1-q} - 1 \leq y^{1-q} \leq x^{1-q} + 1$ .

As relações algébricas  $q$ -generalizadas que definimos nos permitem escrever as seguintes relações, com suas respectivas restrições a serem observadas:

$$\begin{aligned} \ln_q(xy) &= \ln_q x \oplus_q \ln_q y, & (x > 0, y > 0) \\ e_q(x)e_q(y) &= e_q(x \oplus_q y), & (1 + (1-q)x \geq 0) \text{ ou } (1 + (1-q)y \geq 0) \end{aligned} \quad (1.41)$$

$$\begin{aligned} \ln_q(x \otimes_q y) &= \ln_q x + \ln_q y, & (x^{1-q} + y^{1-q} \geq 1) \\ e_q(x) \otimes_q e_q(y) &= e_q(x + y), & (1 + (1-q)x \geq 0) \text{ e } (1 + (1-q)y \geq 0) \end{aligned} \quad (1.42)$$

$$\begin{aligned}\ln_q(x/y) &= \ln_q x \ominus_q \ln_q y, & (x > 0, y > 0) \\ e_q(x)/e_q(y) &= e_q(x \ominus_q y), & (1 + (1 - q)y \geq 0)\end{aligned}\tag{1.43}$$

$$\begin{aligned}\ln_q(x \oslash_q y) &= \ln_q x - \ln_q y, & (x^{1-q} + 1 \geq y^{1-q}) \\ e_q(x) \oslash_q e_q(y) &= e_q(x - y), & (1 + (1 - q)x \geq 0) \text{ ou } (1 + (1 - q)y \geq 0).\end{aligned}\tag{1.44}$$

Ainda seguindo o exposto em [31], vamos lançar as bases para um  $q$ -Cálculo, assim como vimos para uma  $q$ -Álgebra. Seguindo o exemplo do cálculo diferencial e integral newtoniano, podemos nos perguntar: qual seria o operador para o qual uma  $q$ -exponencial é sua autofunção? Como resposta à essa pergunta, vamos definir a  $q$ -derivada como segue

$$D_{(q)}f(x) \equiv \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(x) - f(y)}{x \ominus_q y} = [1 + (1 - q)x] \frac{df(x)}{dx}.\tag{1.45}$$

Podemos inferir a  $q$ -integral correspondente como dada por

$$\int_{(q)} f(x) d_q x = \int \frac{f(x)}{1 + (1 - q)x} dx\tag{1.46}$$

onde

$$d_q \equiv \lim_{y \rightarrow x} x \ominus_q y = \frac{1}{1 + (1 - q)x} dx.\tag{1.47}$$

Tanto para a  $q$ -derivada quanto para a  $q$ -integral devemos esperar que  $1 + (1 - q)x \neq 0$ .

Em um paralelismo ao cálculo usual, é válido que

$$\int_{(q)} D_{(q)}f(x) d_q x = D_{(q)} \int_{(q)} f(x) d_q x = f(x).\tag{1.48}$$

Há um operador  $q$ -derivada dual,  $D^{(q)}$ , associado já definido  $D_{(q)}$ , e ele é dado por

$$D^{(q)}f(x) \equiv \lim_{x \rightarrow y} \frac{f(x) \ominus_q f(y)}{x - y} = \frac{1}{1 + (1 - q)f(x)} \frac{df(x)}{dx}\tag{1.49}$$

com um operador  $q$ -integral dual associado dado por

$$\int^{(q)} f(x)dx \equiv \int [1 + (1 - q)f(x)] f(x)dx. \quad (1.50)$$

Os operadores duais são válidos, como é de se esperar, desde que  $1 + (1 - q)f(x) \neq 0$ .

Temos também que

$$\int^{(q)} D^{(q)} f(x)dx = D^{(q)} \int^{(q)} f(x)dx = f(x). \quad (1.51)$$

As  $q$ -derivadas duais estão relacionadas da seguinte forma

$$D^{(q)} f(x) = \frac{1}{1 + (1 - q)x} \frac{1}{1 + (1 - q)f(x)} D_{(q)} f(x) \quad (1.52)$$

e as  $q$ -derivadas obedecem a Regra da Cadeia das seguintes formas:

$$D^{(q)} [f(x)g(x)] = D_{(q)} [f(x)] g(x) + f(x)D_{(q)} [g(x)] \quad (1.53)$$

e

$$\begin{aligned} D^q [f(x)g(x)] &= \frac{1}{1 + (1 - q)f(x)g(x)} \times \\ &\{ [1 + (1 - q)f(x)] D^{(q)} [f(x)] g(x) + \\ &[1 + (1 - q)g(x)] f(x) D^{(q)} [g(x)] \}. \end{aligned} \quad (1.54)$$

## Axiomas e Teorema da Unicidade para a Entropia de Tsallis

Seguindo o trabalho de Sumiyoshi Abe [33], vamos, nesta seção, generalizar os axiomas de Shannon-Kinchin da entropia informacional ordinária para a entropia não aditiva de Tsallis, além de fornecer uma prova do Teorema da Unicidade para essa.

Como já dissemos, o conceito de entropia é comum tanto à Teoria da Informação quanto à Mecânica Estatística: dada uma distribuição de probabilidades  $\{p_i\}_{i=1,2,\dots,W}$  que satisfaça  $p_i \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, W$ ) e  $\sum_{i=1}^W p_i = 1$ , a entropia informacional ordinária,

designada nesse contexto como entropia de Boltzmann-Shannon, é definida como

$$S(\{p_i\}) = -k \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i, \quad (1.55)$$

sendo  $k$  uma constante positiva (e, no presente escopo, unitária por simplicidade). A entropia de Boltzmann-Shannon é uma função côncava do conjunto de probabilidades, e satisfaz o Teorema H. Seu máximo, conforme podemos inferir do que vimos anteriormente, é atingido por uma distribuição equiprovável,  $p_i = p = 1/W$ , e seu valor é dado por  $S = k \ln W$ .

Claude Elwood Shannon e Aleksandr Yakovlevich Khinchin propuseram uma fundamentação axiomática para a entropia informacional, e seus axiomas são dados como segue:

1.  $S(p_1, p_2, \dots, p_W)$  é contínua com respeito a todos os seus argumentos, e tem seu máximo para uma distribuição equiprovável,  $p_i = 1/W$  ( $i = 1, 2, \dots, W$ );
2.  $S(A, B) = S(A) + S(B|A)$ ;
3.  $S(p_1, p_2, \dots, p_W, 0) = (p_1, p_2, \dots, p_W)$ .

Os axiomas (1) e (3) são de apreensão imediata, mas cabe uma discussão mais profunda sobre o axioma (2). Vejamos,  $S(A, B)$  e  $S(A)$  são respectivamente a entropia do sistema compósito  $(A, B)$  com a distribuição de probabilidade conjunta  $p_{ij}(A, B)$  ( $i = 1, 2, \dots, W; j = 1, 2, \dots, U$ ), e a do subsistema  $A$  com distribuição de probabilidade marginal  $p_i(A) = \sum_{j=1}^U p_{ij}(A, B)$ . O termo  $S(A|B)$  é uma entropia condicional, associada à distribuição de probabilidade condicional

$$p_{ij}(B|A) = \frac{p_{ij}(A, B)}{p_i(A)}. \quad (1.56)$$

A entropia condicional é dada por

$$S[B|A] = \langle S(B|A_i) \rangle^{(A)} = \sum_{i=1}^W p_i(A) S(B|A_i) \quad (1.57)$$

onde  $S(B|A_i)$  é a entropia associada a  $p_{ij}(B|A)$ .

Se cogitarmos o caso particular em que  $A$  e  $B$  são estatisticamente independentes,

teremos  $S(B|A) = S(B)$ , que nos leva à aditividade entrópica

$$S(A, B) = S(A) + S(B). \quad (1.58)$$

O Teorema da Unicidade, como enunciado por Shannon e Khinchin, estabelece que a quantidade que satisfaz os axiomas (1), (2) e (3) é unicamente a entropia dada pela equação 1.55.

Como já vimos, a entropia de Tsallis, uma das possíveis generalizações da entropia de Boltzmann-Shannon e para a qual converge no limite de  $q \rightarrow 1$ , é dada por

$$S_q(p_1, p_2, \dots, p_W) = \frac{k}{1-q} \left[ \sum_{i=1}^W p_i^q - 1 \right], \quad (q \in \mathbb{R}) \quad (1.59)$$

A entropia de Tsallis é positiva e concava, além de satisfazer o Teorema H - contudo, o princípio da aditividade é violado. Ela tem seu máximo também na distribuição equiprovável de probabilidades,  $p_i = 1/W$  ( $i = 1, 2, \dots, W$ ), e assume um valor de  $S_q = k(1-q)^{-1}(W^{1-q} - 1)$ , que cresce monotonamente em função de  $W$ . Para dois sistemas estatisticamente independentes,  $A$  e  $B$ , teremos

$$S_q(A, B) = S_q(A) + S_q(B) + \frac{(1-q)}{k} S_q(A) S_q(B) \quad (1.60)$$

o que é designado como pseudoaditividade.

Abe [33] introduz, com o objetivo de alcançar uma axiomática para a entropia de Tsallis e provar para a mesma o Teorema de Unicidade, o conceito de entropia não aditiva condicional. No âmbito da MENE, a média de uma quantidade  $Q = \{Q_i\}_{i=1,2,\dots,W}$  é dada segundo

$$\langle Q \rangle_q = \sum_{i=1}^W Q_i P_i \equiv \frac{\sum_{i=1}^W Q_i p_i^q}{\sum_{i=1}^W p_i^q} \quad (1.61)$$

onde

$$P_i \equiv \frac{p_i^q}{\sum_{i=1}^W p_i^q}$$

é uma distribuição companheira associada a  $p_i$ . Para manter-se a consistência com o formalismo da MENE, o conceito apresentado em 1.61 deve ser usado para generalizar 1.57: para isso, calcularemos a entropia de Tsallis da seguinte distribuição condicional de

probabilidades

$$S_q(B|A_i) = \frac{k}{1-q} \left\{ \sum_{j=1}^U [p_{ij}(B|A)]^q - 1 \right\} \quad (1.62)$$

Dessa quantidade, podemos definir a entropia não aditiva condicional como segue

$$S_q(B|A) = \langle S_q(B|A_i) \rangle_q^{(A)} = \frac{\sum_{i=1}^W [p_i(A)]^q S_q(B|A_i)}{\sum_{i=1}^W [p_i(A)]^q} \quad (1.63)$$

que pode ser expressa como, utilizando-se a definição de entropia de Tsallis,

$$S_q(B|A) = \frac{S_q(A, B) - S_q(A)}{1 + (1-q)S_q(A)}. \quad (1.64)$$

Podemos perceber facilmente, a partir da forma seguinte, que a pseudoatividade da entropia de Tsallis é recuperada no caso especial em que  $A$  e  $B$  são estatisticamente independentes um do outro

$$S_q(A, B) = S_q(A) + S_q(B|A) + (1-q)S_q(A)S_q(B|A). \quad (1.65)$$

Sumiyoshi Abe [33] introduz, então, seu conjunto de três axiomas para a entropia de Tsallis:

- I.  $S_q(p_1, p_2, \dots, p_W)$  é contínua com respeito a todos os seus argumentos e assume seu máximo para a distribuição equiprovável  $p_i = 1/W$  ( $i = 1, 2, \dots, W$ );
- II.  $S_q(A, B) = S_q(A) + S_q(B|A) + (1-q)S_q(A)S_q(B|A)$ ;
- III.  $S_q(p_1, p_2, \dots, p_W, 0) = S_q(p_1, p_2, \dots, p_W)$ .

Feito isso, enuncia o Teorema da Unicidade para a entropia não aditiva de Tsallis:

**Teorema 1.1.** *Uma quantidade que satisfaça os axiomas (I), (II) e (III) é unicamente igual à Entropia de Tsallis.*

**Prova 1.1.** Vamos considerar a distribuição equiprovável  $p_i = 1/W$  ( $i = 1, 2, \dots, W$ ) e fazer

$$S_q\left(\frac{1}{W}, \frac{1}{W}, \dots, \frac{1}{W}\right) := L_q(W). \quad (1.66)$$

De (III) temos que

$$\begin{aligned} L_q(W) &= S_q\left(\frac{1}{W}, \frac{1}{W}, \dots, \frac{1}{W}, 0\right) \\ &\leq S_q\left(\frac{1}{W+1}, \frac{1}{W+1}, \dots, \frac{1}{W+1}, \frac{1}{W+1}\right) = L_q(W+1) \end{aligned} \quad (1.67)$$

o que nos permite interpretar  $L_q(W)$  como uma função não decrescente de  $W$ .

Consideremos  $m$  sistemas estatisticamente independentes  $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ , cada um deles contendo  $r \geq 2$  eventos igualmente prováveis. Temos então

$$S_q(A_t) = S_q\left(\frac{1}{r}, \frac{1}{r}, \dots, \frac{1}{r}\right) = L_q(r), \quad (1 \leq t \leq m). \quad (1.68)$$

Usando (II) para esses sistemas independentes, encontramos

$$\begin{aligned} S_q(A_1, A_2, \dots, A_m) &= \sum_{t=1}^m \binom{m}{t} (1-q)^{t-1} [L_q(r)]^t \\ &= \frac{1}{1-q} \{[1 + (1-q)L_q(r)]^m - 1\}. \end{aligned} \quad (1.69)$$

Uma vez que  $S_q(A_1, A_2, \dots, A_m) = L_q(r^m)$ , teremos

$$L_q(r^m) = \frac{1}{1-q} \{[1 + (1-q)L_q(r)]^m - 1\}. \quad (1.70)$$

Da mesma forma, para outros inteiros positivos  $n$  e  $s$  ( $n, s \geq 2$ ), teremos

$$L_q(s^n) = \frac{1}{1-q} \{[1 + (1-q)L_q(s)]^n - 1\}. \quad (1.71)$$

É possível fazer com que  $m, r, n$  e  $s$  satisfaçam a seguinte relação

$$r^m \leq s^n \leq r^{m+1}. \quad (1.72)$$

que, suposta, nos leva à seguinte inequação de funcionais  $L_q$ , que, vale lembrar, são funções não decrescentes de suas variáveis

$$L_q(r^m) \leq L_q(s^n) \leq L_q(r^{m+1}) \quad (1.73)$$

que nos leva, de acordo com o visto, a

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-q} \{[1 + (1-q)L_q(r)]^m - 1\} &\leq \frac{1}{1-q} \{[1 + (1-q)L_q(s)]^n - 1\} \\ &\leq \frac{1}{1-q} \{[1 + (1-q)L_q(r)]^{m+1} - 1\}. \end{aligned} \quad (1.74)$$

Abe [33], nesta etapa de sua digressão, estabelece a necessidade de observarmos dois casos separadamente:  $0 < q < 1$  e  $q > 1$ . O fato é que, em ambos os casos, a seguinte inequação se apresenta

$$\frac{m}{n} \leq \frac{\ln[1 + (1-q)L_q(s)]}{\ln[1 + (1-q)L_q(r)]} \leq \frac{m}{n} + \frac{1}{n}. \quad (1.75)$$

No processo de construção da inequação 1.75, o autor [33] concebe o seguinte Ansatz:

$$\begin{aligned} 0 < 1 + (1-q)L_q(r), 1 + (1-q)L_q(s) < 1 \\ \text{para } q > 1. \end{aligned} \quad (1.76)$$

Da equação 1.72 obtemos

$$\frac{m}{n} \leq \frac{\ln s}{\ln r} \leq \frac{m}{n} + \frac{1}{n} \quad (1.77)$$

que, combinada com a equação 1.75 nos dá

$$\left| \frac{\ln[1 + (1-q)L_q(s)]}{\ln[1 + (1-q)L_q(r)]} - \frac{\ln s}{\ln r} \right| \leq \frac{1}{n}. \quad (1.78)$$

Mas podemos fazer  $n$  arbitrariamente grande, e então obtemos

$$\frac{\ln[1 + (1-q)L_q(r)]}{\ln r} = \frac{\ln[1 + (1-q)L_q(s)]}{\ln s} := \lambda(q) \quad (1.79)$$

onde  $\lambda(q)$  é uma constante de separação que depende somente de  $q$ . Assim, teremos

$$L_q(r) = \frac{1}{1-q} [r^{\lambda(q)} - 1]. \quad (1.80)$$

Simple verificação nos leva a  $\lambda(1) = 0$ . Devemos testar agora quaisquer números racionais



da forma

$$p_i = \frac{g_i}{g}, \quad (i = 1, 2, \dots, W) \quad (1.81)$$

onde  $g_i$  ( $i = 1, 2, \dots, W$ ) são inteiros positivos e  $g = \sum_{i=1}^W g_i$ . Vamos considerar dois sistemas,  $A$  e  $B$ . O sistema  $A$  é descrito pela distribuição de probabilidades  $\{p_i = g_i/g\}_{i=1,2,\dots,W}$ . O sistema  $B$  será construído em dependência de  $A$ :  $B$  contém  $g$  eventos, que são particionados em  $W$  grupos,  $B_1, B_2, \dots, B_W$ ;  $B_j$  ( $1 \leq j \leq W$ ) têm  $g_j$  eventos; uma vez que o  $i$ -ésimo evento  $A_i$  do sistema  $A$  seja encontrado (ou seja,  $A = A_i$ ), então, no sistema  $B$ ,  $g_i$  eventos do grupo  $B_{j=i}$  terão a mesma probabilidade condicional  $1/g_i$  e todos os eventos dos demais grupos  $B_{j \neq i}$  terão probabilidade nula. O funcional  $S_q$  de  $B$  assim construído é calculado da seguinte forma

$$\begin{aligned} S_q(B|A_i) &= S_q\left(\frac{1}{g_i}, \frac{1}{g_i}, \dots, \frac{1}{g_i}\right) = L_q(g_i) \\ &= \frac{1}{1-q} \left[ g_i^{\lambda(q)} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (1.82)$$

Portanto, a entropia não aditiva condicional é dada por

$$\begin{aligned} S_q(B|A) &= \langle S_q(B|A_i) \rangle_q^{(A)} = \frac{\sum_{i=1}^W p_i^q S_q(B|A_i)}{\sum_{i=1}^W p_i^q} \\ &= \frac{1}{1-q} \left[ \frac{\sum_{i=1}^W p_i^q g_i^{\lambda(q)}}{\sum_{i=1}^W p_i^q} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (1.83)$$

Já o sistema composto  $(A, B)$  consiste nos eventos  $A_i B_{j=1}$  ( $1 \leq i \leq W$ ): para um dado  $i$ , o número de possíveis eventos  $A_i B_{j=i}$  é  $g_i$  e, portanto, o número total de eventos no sistema composto é dado por  $\sum_{i=1}^W g_i = g$ . A probabilidade de ocorrer o evento  $A_i B_{j=i}$  é  $p_i/g_i = 1/g$ . Então,  $S_q$  do sistema composto como descrito é dada por

$$S_q(A, B) = L_q(g) = \frac{1}{1-q} \left[ g^{\lambda(q)} - 1 \right]. \quad (1.84)$$

Substituindo as equações 1.83 e 1.84 no axioma (II) e usando 1.81, teremos

$$S_q(A) = \frac{1}{1-q} \left[ \frac{\sum_{i=1}^W p_i^q}{\sum_{i=1}^W p_i^{q+\lambda(q)}} - 1 \right] \quad (1.85)$$

que é válida para qualquer distribuição de probabilidade  $\{p_i\}_{i=1,2,\dots,W}$  dada a suposição de continuidade vista em (I).

A última tarefa que nos resta, para demonstrar que uma  $S_q$  que satisfaça o conjunto de axiomas (I), (II) e (III) é unicamente igual à Entropia de Tsallis, é determinar  $\lambda(q)$ . Para tanto, basta calcular a entropia não aditiva condicional usando a equação 1.85 e impondo (II): fazendo isso, encontramos

$$\lambda(q) = 1 - q \tag{1.86}$$

que justifica também a Ansatz manifesta em 1.76. □

## Capítulo 2

# Teorema do Limite Central

Nossa seção introdutória deste capítulo foi mormente baseada na obra de Fischer [34] sobre a história do Teorema do Limite Central, da teoria clássica de probabilidades à moderna. A própria denominação "Teorema do Limite Central" é rastreada até um trabalho de 1920 de Georg Pólya [35], em que o mesmo assevera que é amplamente conhecido que o aparecimento reiterado de uma densidade de probabilidade gaussiana,  $Ce^{-x^2}$ , em muitas situações, poderia ser explicada por um teorema que tem papel central na teoria das probabilidades, um "central limit theorem of probability theory", embora tenha sido Pierre-Simon, Marquês de Laplace, que forjou as bases do que veio a se tornar o TLC (ou CLT na sigla em inglês) ainda em 1810.

Conforme [34], hoje o termo CLT está associado a múltiplas propostas de convergência de distribuição de probabilidades de funções de número crescente de variáveis aleatórias reais uni ou multi-dimensionais, ou até mesmo a elementos aleatórios mais gerais (e.g., valores no espaço de Banach) a distribuições normais, como a seguinte, unidimensional com média  $\mu$  e desvio padrão  $\sigma$

$$G(x) \equiv \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

ou distribuições relacionadas.

A despeito de se designar como caso "clássico" do CLT aquele que lida com a equidade assintótica de distribuições de somas de variáveis aleatórias independentes ou fracamente dependentes a uma distribuição normal padrão (para a dimensão do conjunto a que pertencem essas mesmas variáveis), que corrobora a compreensão de Pólya em seu trabalho

de 1920, hoje o termo Teorema do Limite Central congrega todo um inteiro grupo de teoremas sobre convergência de funções distribuição, densidades ou probabilidades discretas de somas de variáveis aleatórias: um caso que é senão o primeiro ao menos um dos mais antigos de teorema desse grupo foi proposto por Abraham de Moivre ainda em 1733. O trabalho original de Laplace, que ficou famoso (desconhecemos se merecidamente) por generalizar o uso de distribuições normais como aproximação válida em "qualquer situação", com o estabelecimento de uma "lei de frequência" gaussiana para somas de grandes números de variáveis aleatórias independentes, deu a essas propostas o status de leis naturais aos olhos dos probabilistas do século XIX: esse *insight* matemático serviu de base, não sem mérito, para a construção da teoria de erros e do campo de distribuições estatísticas, ambos tão importantes para o desenvolvimento das ciências naturais e sociais, cujo patrono é o polímata francês Lambert Adolphe Jacques Quételet [34].

Continuando a consulta à obra de Fischer [34], o autor nos fala que há uma diferenciação entre os CLTs para somatórios normalizados e matrizes triangulares de um lado, e entre teoremas para integrais e limites locais de outro. A versão historicamente mais importante do Teorema do Limite Central (e aquela a que faremos referência pelas siglas TLC, em português, e CLT em inglês, indistintamente) é uma pertencente à classe de teoremas de limite integral para somas normalizadas. Seja  $\{X_k\}$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes ou fracamente dependentes em um espaço de probabilidade comum. Sob condições particulares sobre  $X_k$ , existem sequências  $\{a_n > 0\}$  e  $\{b_k\}$  tais que

$$\forall r \in \mathbb{R} : P \left( \frac{\sum_{k=1}^n (X_k - b_k)}{a_n} \leq r \right) \rightarrow G(r), \quad (n \rightarrow \infty), \quad (2.1)$$

onde  $G(x)$  designa uma função distribuição do tipo distribuição normal padrão. No caso de  $a_n^2 = \text{Var} \sum_{k=1}^n X_k$  e  $b_k = EX_k$ , fala-se em "normalização clássica".

Pafnuti Lvovitch Chebyshev [36] foi o primeiro a formular uma afirmação envolvendo o CLT como em 2.1 para uma sequência de variáveis aleatórias independentes usando normalização clássica, e buscando provar sua declaração sob condições determinadas. Em entremeios dos séculos XIX e XX, a maioria dos matemáticos consideravam relações que eram equivalentes a 2.1:

$$\forall a \leq b \in \mathbb{R} : P \left( a \leq \frac{\sum_{k=1}^n (X_k - b_k)}{a_n} \leq b \right) \rightarrow G(b) - G(a), \quad (n \rightarrow \infty)$$

ou

$$\forall a < b \in \mathbb{R} : P \left( a < \frac{\sum_{k=1}^n (X_k - b_k)}{a_n} < b \right) \rightarrow G(b) - G(a), \quad (n \rightarrow \infty).$$

A formulação do CLT da forma 2.1 é costumeiramente atribuída a Richard von Mises [37]. Versões locais do CLT aparecem explicitamente no trabalho de Pavel Alekseevic Nekrasov [38] no final do século XIX. O tratamento de normalizações não clássicas começou no início da década de 1920 com os trabalhos de Sergei Natanovich Bernshtein [39] [40] e Paul Lévy [41]. A ideia de se considerar matrizes triangulares (essencialmente múltiplas sequências de variáveis aleatórias) foi encontrada em [39] e no trabalho de Jarl Waldemar Lindeberg [42] [43], mas foi retomada com intensidade somente na década de 1930. O desenvolvimento de CLTs para somatórios de variáveis aleatórias dependentes só teve início com Andrei Andreevich Markov [44]. Da publicação do artigo de Chebyshev até a metade da década de 1930, a forma 2.1 do CLT para variáveis aleatórias independentes esteve no primeiro plano de interesse [34].

Fischer [34] ressalta que antes das contribuições de Chebyshev, não se estudavam variações do CLT, mas aproximações de densidades de probabilidade, probabilidades individuais ou probabilidades de que uma soma de variáveis aleatórias se situassem “entre” limites predeterminados, de forma absoluta ou relativa. As declarações correspondentes podem ser interpretadas do ponto de vista de ambas somas normalizadas em normas clássicas e matrizes triangulares. Sempre se pressupunha, muitas vezes tacitamente, a independência das variáveis somadas em questão. Aproximações para densidades (no caso de variáveis aleatórias contínuas) ou probabilidades discretas (no caso o caso de variáveis aleatórias distribuídas em rede) e aproximações para probabilidades integrais foram consideradas equivalentes. Por esta razão, é verdadeiramente inútil diferenciar entre formas integrais e formas locais do CLT na era anterior a Chebyshev.

Embora o CLT tenha se tornado um objeto matematicamente discreto, que foi examinado por si mesmo, ainda na virada do século XIX para o XX como resultado dos trabalhos de Aleksandr Mikhailovich Lyapunov [45] [46] [47] [48], somente na década de 1940 o escopo de análise do CLT para somas de variáveis independentes foi expandido para leis mais gerais de limite estáveis não normais e infinitamente divisíveis. A monografia *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables* de Boris Vladimirovich Gnedenko e Andrei Nikolaevich Kolmogorov, originalmente publicada em russo em 1949, foi dedicada a esse complexo de problemas e representou uma das obras mais importantes

da teoria da probabilidade do século XX [34].

Vamos encerrar esta etapa introdutória com as considerações finais de Fischer [34]. Juntamente com as abordagens orientadas para a estrutura e generalizantes, a relevância prática tornou-se novamente um fator determinante nos campos relacionados às somas de variáveis aleatórias por volta do ano de 1950. Considerando que, por exemplo, a análise matematicamente rigorosa das propriedades do movimento browniano foi considerada amplamente sem sentido para a física na década de 1940 [49], apenas alguns anos depois os estudos matemáticos correspondentes foram considerados tão importantes para aplicações militares em processamento de sinais ou óptica que eles - na medida em que se originaram nos EUA - foram muitas vezes promovidos pelo Office of Naval Research, fundado em 1946. O interesse reforçado na colaboração nestas áreas entre a matemática e a física é demonstrado pela monumental monografia *Théorie des Fonctions Aléatoires* de André Blanc-Lapierre e Robert Fortet (1953). Se assim desejarmos, o livro de Gnedenko e Kolmogorov de 1949 pode ser considerado a representação “última” de um subcampo “clássico-moderno” da teoria da probabilidade cujas estruturas básicas já existiam por volta de 1940, mesmo que muitos problemas individuais, como aqueles envolvendo teoremas de limite local, grandes desvios, propriedades especiais de distribuições infinitamente divisíveis e, em particular, estáveis, permanecessem sem solução por enquanto. Por outro lado, quando se tenta descrever a história do CLT entre 1945 e 1955, pode-se espontaneamente tender a falar de um desenvolvimento “pós-moderno”: se *Limit Distributions of Sums of Independent Random Variables* [50] é interpretado como uma “grande narrativa”, nas palavras de Jean-François Lyotard [51], que utiliza uma linguagem e forma de argumentação robustas (funções de distribuição e funções características) e segue uma “ideologia” (conforme a interpretação de Lyotard do termo) consistente (explorando estruturas estocásticas “clássicas” em um discurso matemático), então, particularmente, os desenvolvimentos do pós-guerra caracterizados por uma mistura de métodos e novas interações entre teoria e aplicação, podem ser vistos como tendências com características pós-modernas.

Muitos grandes nomes foram deixados de lado nessa pequena e concisa revisão sobre o Teorema do Limite Central e sua evolução enquanto área de pesquisa durante o tempo: é necessário escusar o autor da presente dissertação, que não possui nem formação histórico-matemática o suficiente, nem dispõe de páginas o bastante, para discorrer a respeito de

ideia tão fértil. Apesar dos "métodos e tendências pós-modernos", como cita [34] e dos quais a ciência hoje inevitavelmente se vale, os primeiros estudiosos da Mecânica Estatística Não Extensiva muito cedo se depararam com a possibilidade de estender a validade do CLT, antevendo tornar sua teoria uma obra mais vigorosa e bela, e não há demérito científico algum nisso, senão bem o contrário.

## Generalização do CLT para a Entropia Não Aditiva $S_q$

A presente seção é baseada principalmente no trabalho de Umarov, Tsallis e Steinberg [52], e é de essencial valor para a compreensão do capítulo final da presente dissertação. A obra de Tsallis [13] foi crucial para nossa busca por referências e por uma apresentação concisa, mas perspicaz, do tema.

De forma geral, [52] nos diz, a  $q$ -generalização do CLT aparenta ser intratável através da álgebra clássica mas, através da  $q$ -álgebra, ela é possível e até relativamente fácil. Abordaremos aqui o  $q$ -CLT para  $1 \leq q < 3$ ,  $q \in \mathbb{R}$  - uma generalização mais abrangente do Teorema do Limite Central seria provavelmente inédita e demandaria espaço de que não dispomos e esforço maior do que podemos empreender, mas o que será apresentado é o suficiente para nossos objetivos. Os teoremas que vamos revisar da literatura dependem de correlações específicas: uma distinção importante entre o CLT e sua  $q$ -generalização é o fato que este último não é possível para somente um dado  $q$ . Isso significa que o parâmetro  $q$  é conectado a dois outros números,  $q_* = z^{-1}(q)$  e  $q^* = z(q)$ , onde  $z(s) = (1+s)/(3-s)$ : será visto que  $q_*$  identifica um atrator, e  $q^*$  determina a taxa de escala. Em geral, a generalização do CLT que é aqui proposta é conectada a um tripleto  $(q_{k-1}, q_k, q_{k+1})$ , onde  $q \in [1, 2)$ , com nosso sistema possuindo correlação identificada por  $q_k$ ,  $q_{k-1}$  corresponde ao  $q_*$ , e  $q_{k+1}$  a  $q^*$ . É imediato que se fizermos  $q = 1$ , toda a família de teoremas que serão propostos se reduzem a um elemento, recuperando-se o CLT clássico.

### $q$ -Transformada de Fourier

Vimos já no Capítulo 1 as generalizações  $q$ -álgebra e  $q$ -cálculo - vamos dar seguimento a esse tópico aqui antes de prosseguirmos ao nosso presente objetivo.

Seja  $\beta$  um numero positivo. A função

$$G_q(\beta; x) = \frac{\sqrt{\beta}}{C_q} e_q^{-\beta x^2} \quad (2.2)$$

é uma  $q$ -gaussiana.  $C_q$  é uma constante de normalização da forma

$$C_q = \int_{-\infty}^{\infty} e_q^{-x^2} dx.$$

É fácil verificarmos que

$$C_q = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{1-q}} \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{\frac{3-q}{1-q}} dt = \frac{2\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1}{1-q})}{(3-q)\sqrt{1-q}\Gamma(\frac{3-q}{2(1-q)})}, & -\infty < q < 1, \\ \sqrt{\pi}, & q = 1, \\ \frac{2}{\sqrt{q-1}} \int_0^{\infty} (1+y^2)^{\frac{-1}{q-1}} dy = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{3-q}{2(q-1)})}{\sqrt{q-1}\Gamma(\frac{1}{q-1})}, & 1 < q < 3. \end{cases} \quad (2.3)$$

Para  $q < 1$  o suporte de  $G_q(\beta; x)$  é compacto uma vez que a densidade se anula para  $|x| > 1/\sqrt{(1-q)\beta}$ . Notemos também que, para  $q < 5/3$ , a variância é finita e, para  $5/3 \leq q < 3$ , ela diverge. Por último, percebe-se que há relações entre diferentes valores de  $q$ , tal qual o seguinte exemplo:

$$e_q^{-x^2} = \left( e_{2-\frac{1}{q}}^{qx^2} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Seguindo [52], apresentamos o lema seguinte, que estabelece uma relação geral entre diferentes  $q$ -gaussianas.

**Lema 2.1.** *Para qualquer  $q_1$  real,  $\beta_1 > 0$  e  $\delta > 0$ , existem grandezas unicamente determinadas,  $q_2 = q_2(q_1, \delta)$  e  $\beta_2 = \beta_2(\beta_1, \delta)$ , tais que:*

$$\left( e_{q_1}^{-\beta_1 x^2} \right)^{\delta} = e_{q_2}^{-\beta_2 x^2}.$$

Ademais,  $q_2 = \delta^{-1}(\delta - 1 + q_1)$ ,  $\beta_2 = \delta\beta_1$ .

**Prova Lema 2.1.** Seja  $q_1 \in \mathbb{R}^1$ , e  $\beta_1 > 0$  e  $\delta > 0$  quaisquer números reais fixos. Para a equação

$$\left( 1 - (1 - q_1)\beta_1 x^2 \right)^{\frac{\delta}{1-q_1}} = \left( 1 - (1 - q_2)\beta_2 x^2 \right)^{\frac{\delta}{1-q_2}}$$

ser uma identidade, é necessário que  $(1 - q_1)\beta_1 = (1 - q_2)\beta_2$  e  $(1 - q_1) = \delta(1 - q_2)$ : essas



equações possuem uma única solução,  $q_2 = \delta^{-1}(\delta - 1 + q_1)$ ,  $\beta_2 = \delta\beta_1$ .  $\square$

O grupo de todas as  $q$ -gaussianas com um fator positivo constante será denotado como  $\mathcal{G}_q$ , ou seja

$$\mathcal{G}_q \equiv \{bG_q(\beta, x) : b > 0, \beta > 0\}.$$

Vamos finalmente ao tema desta subseção. A partir de agora, vamos assumir que  $1 \leq q < 3$ . Para tal intervalo de valores de  $q$  apresentaremos a  $q$ -Transformada de Fourier,  $F_q$ , um operador que, como era de se esperar, coincide com a Transformada de Fourier para  $q = 1$ . Notar-se-á que  $F_q$ , definida tendo como base o  $q$ -produto e a  $q$ -exponencial é, em contraste com a Transformada de Fourier, não linear para  $q \in [1, 3)$ . Seja  $f$  uma função não negativa com<sup>1</sup>  $\text{supp}(f) \subseteq \mathbb{R}$ . A  $q$ -Transformada de Fourier é definida pela seguinte equação

$$F_q[f](\xi) \equiv \int_{\text{supp}(f)} e_q^{ix\xi} \otimes_q f(x) dx, \quad (2.4)$$

onde a integral deve ser entendida na concepção de Lebesgue. Para funções discretas  $f_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $F_q$  é definida como

$$F_q[f](\xi) \equiv \sum_{k \in \mathcal{Z}_f} e_q^{ik\xi} \otimes_q f_k, \quad (2.5)$$

onde  $\mathcal{Z}_f = \{k \in \mathbb{Z} : f_k \neq 0\}$ .

O seguinte lema estabelece a expressão da  $q$ -Transformada de Fourier em termos do produto padrão, ao invés do  $q$ -produto.

**Lema 2.2.** *A  $q$ -Transformada de Fourier pode ser escrita na seguinte forma*

$$F_q[f](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e_q^{ix\xi [f(x)]^{q-1}} dx. \quad (2.6)$$

---

<sup>1</sup>Suponha que a função  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$  esteja definida em um domínio  $\Omega \subset \mathbb{E}^n$ . O *suporte* de  $f$  é o conjunto fechado de pontos  $x \in \Omega$  para os quais  $f(x)$  é diferente de zero ( $f(x) \neq 0$ ). Assim, pode-se dizer também que uma função de suporte compacto em  $\Omega$  é uma função definida em  $\Omega$  tal que seu suporte  $\Lambda$  é um conjunto limitado fechado localizado a uma distância da fronteira  $\Gamma$  de  $\Omega$  por um número maior que  $\delta > 0$ , onde  $\delta$  é suficientemente pequeno. Quando o suporte de  $f(x)$  (escrito  $\text{supp}(f)$ ) é mencionado, pode ser a interseção de todos os suportes,  $\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$  (o suporte da teoria dos conjuntos), ou o menor suporte com algum propriedade de interesse.[53]

**Prova Lema 2.2.** Para  $x \in \text{supp}(f)$  nós temos]

$$e_q^{ix\xi} \otimes_q f(x) = \left\{ 1 + (1-q)ix\xi + [f(x)]^{1-q} - 1 \right\}^{\frac{1}{1-q}} = f(x) \left\{ 1 + (1-q)ix\xi [f(x)]^{q-1} \right\}^{\frac{1}{1-q}}, \quad (2.7)$$

e, integrando ambos os lados dessa equação, encontramos 2.6.  $\square$

Analogamente, para uma função discreta  $f_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , 2.6 pode ser representada como:

$$F_q[f](\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k e_q^{ik\xi f_k^{q-1}}.$$

**Corolário 2.1.** A  $q$ -Transformada de Fourier existe para qualquer  $f$  não negativa pertencente a  $L_1(\mathbb{R})$ . Ademais,  $|F_q[f](\xi)| \leq \|f\|_{L_1}$ , onde  $\|f\|_{L_1} = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx$ ,  $L_1$  sendo o espaço de funções absolutamente integráveis.

**Prova Corolário 2.1.** Essa é uma simples aplicação do Lema 2.2 e das assíntotas de  $e_q^{ix}$  para  $|x|$  grande.  $\square$

**Corolário 2.2.** Assumamos  $f(x) \geq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$  e  $F_q[f](\xi) = 0$  para todo  $\xi \in \mathbb{R}$ . Então  $f(x) = 0$  para quase todo  $x \in \mathbb{R}$ .

**Lema 2.3.** Seja  $1 \leq q < 3$ . Para a  $q$ -Transformada de Fourier de uma  $q$ -gaussiana, a seguinte fórmula é válida

$$F_q[G_q(\beta; x)](\xi) = \left( e_q^{-\frac{\xi^2}{4\beta^2 - qC_q^{2(q-1)}}} \right)^{\frac{3-q}{2}}. \quad (2.8)$$

**Prova do Lema 2.3.** Vamos denotar  $a = \frac{\sqrt{\beta}}{C_q}$  e fazemos

$$F_q[ae_q^{-\beta x^2}](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} (ae_q^{-\beta x^2}) \otimes_q (e_q^{ix\xi}) dx,$$

usando a propriedade  $e_q^{x+y} = e_q^x \otimes_q e_q^y$  da  $q$ -exponencial, na forma

$$\begin{aligned} F_q[ae_q^{-\beta x^2}](\xi) &= a \int_{-\infty}^{\infty} e_q^{-\beta x^2 + ia^{q-1}x\xi} dx \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} e_q^{-\left(\sqrt{\beta}x - \frac{ia^{q-1}\xi}{2\sqrt{\beta}}\right)^2 - \frac{a^{2(q-1)}\xi^2}{4\beta}} dx \end{aligned}$$

$$= a \int_{-\infty}^{\infty} e_q \left( \sqrt{\beta}x - \frac{ia^{q-1}\xi}{2\sqrt{\beta}} \right)^2 \otimes_q e_q^{-\frac{a^2(q-1)\xi^2}{4\beta}} dx.$$

A substituição  $y = \left( \sqrt{\beta}x - \frac{ia^{q-1}\xi}{2\sqrt{\beta}} \right)$  leva à equação

$$F_q [ae_q^{-\beta x^2}] (\xi) = \frac{a}{\sqrt{\beta}} \int_{-\infty+i\eta}^{\infty+i\eta} e_q^{-y^2} \otimes_q e_q^{-\frac{a^2(q-1)\xi^2}{4\beta}} dy,$$

onde  $\eta = \frac{\xi a^{q-1}}{2\sqrt{\beta}}$ . Além disso, o Teorema de Cauchy para integrais sobre curvas fechadas é aplicável já que existe ao menos um decaimento tipo lei de potência da  $q$ -exponencial para qualquer  $1 \leq q < 3$ : usando esse fato, podemos alterar os limites de integração de  $\pm\infty + i\eta$  para  $\pm\infty$ . Mais uma vez aplicando o Lema 2.2, temos

$$\begin{aligned} F_q [G_q(\beta; x)] (\xi) &= \frac{ae^{-\frac{a^2(q-1)\xi^2}{4\beta}}}{\sqrt{\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \left( e_q^{-\frac{a^2(q-1)\xi^2}{4\beta}} \right)^{q-1} dy \\ &= \frac{aC_q}{\sqrt{\beta}} \left( e_q^{-\frac{a^2(q-1)\xi^2}{4\beta}} \right)^{1-\frac{q-1}{2}}. \end{aligned}$$

que simplificada nos dá a equação 2.8. □

Vamos introduzir a função  $z(s) = \frac{1+s}{3-s}$  para  $s \in (-\infty, 3)$ , e denotar sua inversa por  $z^{-1}(t)$ ,  $t \in (-1, \infty)$ . Pode ser facilmente verificado que  $z\left(\frac{1}{z(s)}\right) = \frac{1}{s}$  e que  $z\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{z^{-1}(s)}$ . Seja  $q_1 = z(q)$  e  $q_{-1} = z^{-1}(q)$ . Segue então que

$$z\left(\frac{1}{q_1}\right) = \frac{1}{q} \quad \text{e} \quad z\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{1}{q_{-1}}. \quad (2.9)$$

A função  $z(q)$  também possui as duas seguintes propriedades

$$z(q)z(2-q) = 1 \quad \text{e} \quad z(2-q) + z^{-1}(q) = 2. \quad (2.10)$$

Dessas considerações segue que  $q_{-1} + \frac{1}{q_1} = 2$ .

**Corolário 2.3.** *Para  $q$ -gaussianas as seguintes  $q$ -Transformadas de Fourier são válidas*

$$F_q [G_q(\beta; x)] (\xi) = e_{q_1}^{-\beta_*(q)\xi^2}, \quad q_q = z(q), \quad 1 \leq q < 3, \quad (2.11)$$

$$F_{q-1} [G_{q-1}(\beta; x)](\xi) = e_q^{-\beta_*(q-1)\xi^2}, \quad q_{-1} = z^{-1}(q), \quad 1 \leq q < 3, \quad (2.12)$$

onde  $\beta_*(s) = \frac{3-s}{8\beta^{2-s}C_s^{2(s-1)}}$ , ou ainda:

$$\beta_*^{\frac{1}{\sqrt{2-s}}} \beta^{\sqrt{2-s}} = K(s)$$

com

$$K(s) = \left[ \frac{3-s}{8C_s^{2(s-1)}} \right]^{\frac{1}{\sqrt{2-s}}}, \quad 0 \leq K(s) < 1 \text{ para } s \leq 2, \text{ com } \lim_{s \rightarrow -\infty} K(s) = K(2) = 0.$$

Faz-se notar que  $\beta_*(s) > 0$  se  $s < 3$ .

**Corolário 2.4.** *Os seguintes mapeamentos são válidos e são injetivos*

$$F_q : \mathcal{G}_q \rightarrow \mathcal{G}_{q_1}, \quad q_1 = z(q), \quad 1 \leq q < 3,$$

$$F_{q-1} : \mathcal{G}_{q-1} \rightarrow \mathcal{G}_q, \quad q_{-1} = z^{-1}(q), \quad 1 \leq q < 3.$$

**Corolário 2.5.** *Existem as seguintes  $q$ -Transformadas de Fourier inversas*

$$F_q^{-1} : \mathcal{G}_{q_1} \rightarrow \mathcal{G}_q, \quad q_1 = z(q), \quad 1 \leq q < 3,$$

$$F_{q-1}^{-1} : \mathcal{G}_q \rightarrow \mathcal{G}_{q-1}, \quad q_{-1} = z^{-1}(q), \quad 1 \leq q < 3.$$

**Lema 2.4.** *Os seguintes mapeamentos são válidos*

$$F_{\frac{1}{q_1}} : \mathcal{G}_{\frac{1}{q_1}} \rightarrow \mathcal{G}_{\frac{1}{q}}, \quad q_1 = z(q), \quad 1 \leq q < 3,$$

$$F_{\frac{1}{q}} : \mathcal{G}_{\frac{1}{q}} \rightarrow \mathcal{G}_{\frac{1}{q-1}}, \quad q_{-1} = z^{-1}(q), \quad 1 \leq q < 3.$$

**Prova do Lema 2.4.** As afirmações desse lema seguem do Corolário 2.4, levando-se em conta as propriedades 2.9. □

Vamos introduzir a sequência  $q_n = z_n(q) = z(z_{n-1}(q))$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , com  $q = z_0(q)$ ,  $q < 3$ . É possível estender a sequência  $q_n$  para  $n$  com valores inteiros negativos fazendo-se

$q_{-n} = z_{-n}(q) = z^{-1}(z_{1-n}(q))$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Podemos verificar que

$$q_n = \frac{2q + n(1-q)}{2 + n(1-q)} = 1 + \frac{2(q-1)}{2 - n(q-1)}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2.13)$$

que, para  $q \neq 1$ , pode ser reescrita como  $\frac{2}{1-q_n} = \frac{2}{1-q} + n$ . Percebamos que  $q_n \equiv 1$ ,  $\forall n$ , se  $q = 1$  ou se  $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} z_n(q) = 1$ ,  $\forall q \neq 1$ . Essa propriedade segue de 2.13 onde  $q_n > 1$ ,  $\forall n < \frac{2}{(q-1)}$ ,  $q \in (1, 3)$ . Ademais,  $\frac{2}{(q-1)} > 1$  se  $q \in (1, 3)$ , o que implica  $q_1 > 1$ . Concluimos então que a condição  $q_n > 1$  garante  $q_k > 1$ ,  $k = n-1, n, n+1$ .

**Definição 2.1.**

$$\dots \xrightarrow{z} q_{-2} \xrightarrow{z} q_{-1} \xrightarrow{z} q_0 = q \xrightarrow{z} q_1 \xrightarrow{z} q_2 \xrightarrow{z} \dots \quad (2.14)$$

$$\dots \xleftarrow{z^{-1}} q_{-2} \xleftarrow{z^{-1}} q_{-1} \xleftarrow{z^{-1}} q_0 = q \xleftarrow{z^{-1}} q_1 \xleftarrow{z^{-1}} q_2 \xleftarrow{z^{-1}} \dots \quad (2.15)$$

Ademais temos, para  $k = 1, 2, \dots$  e  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ,

$$F_{q_n}^k = F_{q_{n+k-1}} \circ \dots \circ F_{q_n},$$

$$F_{q_n}^{-k} = F_{q_{n-k}}^{-1} \circ \dots \circ F_{q_{n-1}}^{-1},$$

e ainda, para  $k = 0$ , teremos  $F_q^0[f] = f$ .

Da discussão pretérita, procedem as assertivas seguintes.

**Lema 2.5.** *As seguintes relações de dualidade são válidas*

$$q_{n-1} + \frac{1}{q_{n+1}} = 2, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.16)$$

**Prova do Lema 2.5.** Usando a propriedade 2.10, obtemos

$$q_{n-1} = z^{-1}(q_n) = 2 - z(2 - q_n) = 2 - \frac{1}{z(q_n)} = 2 - \frac{1}{q_{n+1}}.$$

□

**Lema 2.6.** *Os seguintes mapeamentos são válidos*

$$F_{q_n}^k : \mathcal{G}_{q_n} \rightarrow \mathcal{G}_{q_{k+n}}, \quad k, n \in \mathbb{Z},$$

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} F_{q_n}^k \mathcal{G}_{q_n} = \mathcal{G},$$

onde  $\mathcal{G}$  é o conjunto das gaussianas clássicas.

**Lema 2.7.**

$$\dots \xrightarrow{F_{q^{-3}}} \mathcal{G}_{q^{-2}} \xrightarrow{F_{q^{-2}}} \mathcal{G}_{q^{-1}} \xrightarrow{F_{q^{-1}}} \mathcal{G}_q \xrightarrow{F_q} \mathcal{G}_{q_1} \xrightarrow{F_{q_1}} \mathcal{G}_2 \xrightarrow{F_{q_2}} \dots \quad (2.17)$$

$$\dots \xleftarrow{F_{q^{-3}}^{-1}} \mathcal{G}_{q^{-2}} \xleftarrow{F_{q^{-2}}^{-1}} \mathcal{G}_{q^{-1}} \xleftarrow{F_{q^{-1}}^{-1}} \mathcal{G}_q \xleftarrow{F_q^{-1}} \mathcal{G}_{q_1} \xleftarrow{F_{q_1}^{-1}} \mathcal{G}_2 \xleftarrow{F_{q_2}^{-1}} \dots \quad (2.18)$$

onde os lados direitos de ambas sequências são interrompidos para o subíndice  $n \geq \frac{2}{(q-1)}$ .

## $q$ -CLT

Agora, tendo sempre como base [52] e [13], vamos replicar a  $q$ -generalização do Teorema do Limite Central clássico para variáveis aleatórias independentes identicamente distribuídas com variância finita.

Vamos a algumas noções introdutórias. Seja  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  o espaço de probabilidades e  $X$  uma variável aleatória definida no mesmo com uma densidade  $f \in L_q(\mathbb{R})$ ,  $\nu_q(f) = \|f\|_{L_q}^q = \int_{-\infty}^{\infty} [f(x)]^q dx < \infty$ . A densidade

$$f_q = \frac{[f(x)]^q}{\nu_q(f)}$$

é comumente designada como *escort density*. A  $q$ -média de  $X$  é dada por

$$\mu_q = \mu_q(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_q(x) dx$$

e a  $q$ -variância por

$$\sigma_q^2 = \sigma_q^2(X - \mu_q) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_q)^2 f_q(x) dx,$$

supondo-se que as integrais apresentadas nessas definições convirjam.

**Lema 2.8.** *As seguintes relações são verdadeiras*

1.  $\mu_q(aX) = a\mu_q(X)$ ,
2.  $\mu_q(X - \mu_q(X)) = 0$ ,
3.  $\sigma_q^2(aX) = a^2\sigma_q^2(X)$ .

**Definição 2.2.** *Sejam duas variáveis aleatórias  $X_1$  e  $Y_1$ , elas são ditas*

1.  *$q$ -independentes do primeiro tipo se*

$$F_q[X + Y](\xi) = F_q[X](\xi) \otimes_q F_q[Y](\xi), \quad (2.19)$$

2.  *$q$ -independentes do segundo tipo se*

$$F_{q_{-1}}[X + Y](\xi) = F_{q_{-1}}[X](\xi) \otimes_q F_{q_{-1}}[Y](\xi), \quad q = z(q_{-1}), \quad (2.20)$$

3.  *$q$ -independentes do terceiro tipo se*

$$F_{q_{-1}}[X + Y](\xi) = F_q[X](\xi) \otimes_q F_q[Y](\xi), \quad q = z(q_{-1}), \quad (2.21)$$

onde  $X = X_1 - \mu_q(X_1)$ ,  $Y = Y_1 - \mu_q(Y_1)$ .

Essas definições de  $q$ -independência generalizam a noção clássica, que é recuperada (desde que as variáveis  $X$  e  $Y$  sejam independentes, obviamente), nos três casos, fazendo-se  $q = 1$ :

$$F[f_X * f_Y] = F[f_X] \cdot F[f_Y]$$

onde  $*$  denota a operação de convolução entre duas densidades. Se  $q \neq 1$ , então uma  $q$ -independência de certo tipo descreve uma correlação específica. Pode-se facilmente se estender as definições de  $q$ -independência para um caso mais geral de  $q_k$ -independência: as formas das relações permanecem as mesmas, alterando-se os índices, do  $q$  ou  $q_n$ ,  $n = \pm 1$ , originais para  $q_k$  ou  $q_{k\pm 1}$  respectivamente - a título de exemplo, a relação 2.20 generalizada

se torna

$$F_{q_{k-1}}[X + Y](\xi) = F_{q_{k-1}}[X](\xi) \otimes_{q_k} F_{q_{k-1}}[Y](\xi), \quad q_k = z(q_{k-1}). \quad (2.22)$$

As relações 2.19-2.21 podem ser reescritas em termos de densidades. Seja  $f_X$ ,  $f_Y$  e  $f_{X+Y}$  densidades de  $X$ ,  $Y$  e  $X + Y$  respectivamente - como exemplo, a  $q$ -independência de segunda ordem pode ser escrita como

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \otimes_{q-1} f_{X+Y}(x) dx = F_{q-1}[f_X](\xi) \otimes_q F_{q-1}f[Y](\xi). \quad (2.23)$$

**Definição 2.3.** *Seja  $X_1, X_2, \dots, X_N, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias identicamente distribuídas. Façamos  $Y_N = X_1 + \dots + X_N$ . Por definição,  $X_N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , é dito  $q_k$ -independente (ou  $q_k$ -iid<sup>2</sup>) do primeiro tipo se, para todo  $N = 2, 3, \dots$ , as relações seguintes se mantêm*

$$F_{q_k}[Y_N - N\mu_k](\xi) = F_{q_k}[X_1 - \mu_k](\xi) \otimes_{q_k} \dots \otimes_{q_k} F_{q_k}[X_N - \mu_k](\xi), \quad (2.24)$$

$$\mu_k = \mu_{q_k}(X_1).$$

De modo análogo defini-se, para sequências de variáveis aleatórias identicamente distribuídas, as relações de  $q_k$ -independência de segundo e terceiro tipos.

Para  $k = -1$  segue da Definição 2.3 a  $q$ -independência de uma sequência de variáveis aleatórias, a saber

$$F_{q-1}[Y_N - N\mu_{-1}](\xi) = F_{q-1}[X_1 - \mu_{-1}](\xi) \otimes_q \dots \otimes_q F_{q-1}[X_N - \mu_{-1}](\xi), \quad (2.25)$$

$$N = 2, 3, \dots$$

---

<sup>2</sup>Dizemos que uma sequência de variáveis aleatórias  $\{Z_n\}$ , definidas no espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  e tomando valores no espaço de estados  $(E, \mathcal{B}(E))$ , onde  $\mathcal{B}(E)$  é a  $\sigma$ -álgebra de Borel sobre  $E$ , é independente e identicamente distribuída (iid) se

i  $\{Z_n\}$  for independente:

$$\forall k \in \mathbb{N}, n_1 < \dots < n_k \text{ e } A_1, \dots, A_k \in \mathcal{B}(E) \text{ vale}$$

$$P[Z_{n_1} \in A_1, \dots, Z_{n_k} \in A_k] = \prod_{i=1}^k P[Z_{n_i} \in A_i];$$

ii  $\{Z_n\}$  for identicamente distribuída:

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ e } A \in \mathcal{B}(E),$$

$$P[Z_n \in A] = P[Z_1 \in A].$$



**Definição 2.4.** Uma sequência de variáveis aleatórias  $X_N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , é dita ser  $q$ -convergente a uma variável aleatória  $X_\infty$  se

$$\lim_{N \rightarrow \infty} F_q[X_N](\xi) = F_q[X_\infty](\xi)$$

sendo localmente uniforme em  $\xi$ .

A Definição 2.4 é equivalente à convergência fraca de variáveis aleatórias se  $q = 1$ . Para  $q \neq 1$ , denotamos por  $W_q$  o conjunto de funções contínuas  $\phi$  que satisfazem a seguinte condição

$$|\phi(x)| \leq C(1 + |x|)^{-\frac{q}{q-1}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Definição 2.5.** Uma sequência de variáveis aleatórias  $X_N$  com densidade  $f_N$  é chamada fracamente  $q$ -convergente a uma variável aleatória  $X_\infty$  com densidade  $f$  se

$$\int_{\mathbb{R}} f_N(x) dm_q \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dm_q$$

para uma medida arbitrária  $m_q$  definida como

$$dm_q(x) = \phi_q(x) dx, \quad \text{onde } \phi_q \in W_q.$$

A  $q$ -convergência fraca é equivalente à  $q$ -convergência, conforme afirmação em [52] e [54] reputada e discutida em instância à parte.

Após esse necessário preâmbulo preparatório, devidamente exposto e complementado em [52], passamos a partir daqui à formulação da generalização do Teorema do Limite Central de forma consistente com a Mecânica Estatística Não Extensiva de Tsallis. A  $q$ -generalização do CLT depende do tipo de  $q$ -independência assumida: traremos a prova do  $q$ -CLT sob a condição da  $q$ -independência do primeiro tipo.

Estudaremos o limite para  $N \rightarrow \infty$  de somas do tipo

$$Z_N = \frac{1}{D_N(q)} (X_1 + \dots + X_N - N\mu_q), \quad N = 1, 2, \dots$$

onde  $D_N = \left(\sqrt{N\nu_{2q-1}\sigma_{2q-1}}\right)^{\frac{1}{2-q}}$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , no âmbito da Definição 2.4. Conforme [52], há uma questão central em nosso propósito: *há uma distribuição  $q$ -gaussiana que é um atrator para a sequência  $Z_N$ ?* Mais uma vez, para  $q = 1$  a resposta é facilmente encontrada e revela ser a letra do Teorema do Limite Central clássico.

**Teorema 2.1.** *Suponhamos uma sequência  $q_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , dada como em 2.13 com  $q_k \in [1, 2)$ . Seja  $X_1, \dots, X_N, \dots$  uma sequência  $q_k$ -independente (para um  $k$  fixo) do primeiro tipo de variáveis aleatórias identicamente distribuídas com uma  $q_k$ -média finita  $\mu_{q_k}$  e um  $(2q_k - 1)$ -segundo momento,  $\sigma_{2q_k-1}^2$ , finito. Então*

$$Z_N = \frac{X_1 + \dots + X_N - N\mu_{q_k}}{D_N(q_k)}$$

*é  $q_k$ -convergente para uma distribuição  $q_{k-1}$ -gaussiana conforme  $N \rightarrow \infty$ . Ademais, o atrator correspondente é  $G_{q_{k-1}}(\beta_k; x)$  onde*

$$\beta_k = \left(\frac{3 - q_{k-1}}{4q_k C_{q_{k-1}}^{2q_{k-1}-2}}\right)^{\frac{1}{2-q_{k-1}}}. \quad (2.26)$$

A prova do Teorema 2.1 segue do Teorema 2.2 seguinte e do Lema 2.7.

**Teorema 2.2.** *Assumamos  $1 \leq q < 2$ . Seja  $X_1, \dots, X_N, \dots$  uma sequência  $q$ -independente do primeiro tipo de variáveis aleatórias identicamente distribuídas com uma  $q$ -média finita e um  $(2q - 1)$ -segundo momento,  $\sigma_{2q-1}^2$ , finito. Então*

$$Z_N = \frac{X_1 + \dots + X_N - N\mu_q}{D_N(q)}$$

*é  $q$ -convergente à uma distribuição  $q_{-1}$ -normal conforme  $N \rightarrow \infty$ . A  $q_{-1}$ -gaussiana correspondente é  $G_{q_{-1}}(\beta; x)$ , com*

$$\beta = \left(\frac{3 - q_{-1}}{4q C_{q_{-1}}^{2q_{-1}-2}}\right)^{\frac{1}{2-q_{-1}}}.$$

**Prova do Teorema 2.2.** Seja  $f$  a densidade associada a  $X - \mu_q$ . Primeiramente, vamos encontrara  $F_q(X_1 - \mu_q) = F_q(f(x))$ . Usando o Lema 2.2 temos

$$F_q[f](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e_q^{ix\xi} \otimes_q f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e_q^{ix\xi|f(x)|^{q-1}} dx. \quad (2.27)$$

Fazendo uso da expansão assintótica  $e^x = 1 + x + \frac{q}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^2)$ , para  $x \rightarrow 0$ , podemos reescrever o membro direito da equação 2.27 da seguinte forma:

$$F_q[f](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left\{ 1 + ix\xi[f(x)]^{q-1} - \frac{q}{2}x^2\xi^2[f(x)]^{2(q-1)} + \mathcal{O}\left(x^2\xi^2[f(x)]^{2(q-1)}\right) \right\} dx = \quad (2.28)$$

$$1 + i\xi\mu_q\nu_q - \frac{q}{2}\xi^2\sigma_{2q-1}^2 + \mathcal{O}(\xi^2), \quad \xi \rightarrow 0.$$

De acordo com a condição do Teorema e a relação (2) do Lema 2.8,  $\mu_q = 0$ . Denotaremos  $Y_j = D_N(q)^{-1}(X_j - \mu_q)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ : então  $Z_N = Y_1 + \dots + Y_N$ . É fácil provar que  $F_q[aX](\xi) = F_q[X](a^{2-q}\xi)$  - segue dessa relação que

$$F_q(Y_1) = F_q[f] \left( \frac{\xi}{\sqrt{N\nu_{2q-1}\sigma_{2q-1}}} \right).$$

Ademais, segue da  $q$ -independência de  $X_1, X_2, \dots$  e da associatividade do  $q$ -produto que

$$F_q[Z_N](\xi) = F_q[f] \left( \frac{\xi}{\sqrt{N\nu_{2q-1}\sigma_{2q-1}}} \right) \otimes_q \dots \otimes_q F_q[f] \left( \frac{\xi}{\sqrt{N\nu_{2q-1}\sigma_{2q-1}}} \right) \quad (2.29)$$

sendo  $N$  fatores.

Fazendo uso das propriedades do  $q$ -logaritmo, da equação 2.29 obtemos

$$\begin{aligned} \ln_q F_q[Z_N](\xi) &= N \ln_q F_q[f] \left( \frac{\xi}{\sqrt{N\nu_{2q-1}\sigma_{2q-1}}} \right) \\ &= N \ln_q \left[ 1 - \frac{q}{2} \frac{\xi^2}{N} + \mathcal{O}\left(\frac{\xi^2}{N}\right) \right] \\ &= -\frac{q}{2}\xi^2 + \mathcal{O}(1), \quad N \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (2.30)$$

localmente uniforme em  $\xi$ . Consequentemente, supondo-se as mesmas condições

$$\lim_{N \rightarrow \infty} F_q(Z_N) = e_q^{-\frac{q}{2}\xi^2}. \quad (2.31)$$

Então,  $Z_N$  é  $q$ -convergente a uma variável aleatória  $Z$  cuja  $q$ -Transformada de Fourier é  $e_q^{-\frac{q}{2}\xi^2} \in \mathcal{G}_q$ .

De acordo com o Corolário 2.3, para  $q$  e um  $\beta$  existe uma densidade  $G_{q-1}(\beta; x)$ ,  $q = z(q-1)$ , tal que  $F_{q-1}(G_{q-1}(\beta; x)) = e_q^{-(q/2)\xi^2}$ . Segue do Corolário 2.3 que  $\beta_*(q-1) = q/2$ .

Solucionando essa equação com respeito a  $\beta$ , obtemos

$$\beta = \left( \frac{3 - q_{-1}}{4qC_{q_{-1}}^{2(q_{-1}-1)}} \right)^{\frac{1}{2-q_{-1}}}, \quad (2.32)$$

e a forma explícita da  $q_{-1}$ -gaussiana correspondente é

$$G_{q_{-1}}(\beta; x) = C_{q_{-1}}^{-1} \left( \frac{\sqrt{3 - q_{-1}}}{2C_{q_{-1}}^{q_{-1}-1} \sqrt{z(q_{-1})}} \right)^{\frac{1}{2-q_{-1}}} e_{q_{-1}} \left( \frac{3 - q_{-1}}{4z(q_{-1})C_{q_{-1}}^{2(q_{-1}-1)}} \right)^{\frac{1}{2-q_{-1}}} x^2. \quad (2.33)$$

□

Analogamente, o  $q$ -CLT pode ser provado para  $q_k$ -iid de segundo e terceiro tipos. Os Teoremas correspondentes são o 2.3 e 2.4 abaixo. Suas provas serão suprimidas, mas seguem raciocínio semelhante à prova do Teorema 2.1.

**Teorema 2.3.** *Assumamos uma sequência  $q_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , dada como em 2.13 com  $q_k \in [1, 2]$ . Seja  $X_1, \dots, X_N, \dots$  uma sequência  $q_k$ -independente do segundo tipo (para um  $k$  fixo) de variáveis aleatórias identicamente distribuídas com  $q_{k-1}$ -média,  $\mu_{q_{k-1}}$ , finita e  $(2q_{k-1} - 1)$ -segundo momento,  $\sigma_{q_{k-1}-1}^2$ , finito.*

Então

$$Z_N = \frac{X_1 + \dots + X_N - N\mu_{q_{k-1}}}{D_N(q_{k-1})}$$

é  $q_{k-1}$ -convergente a uma distribuição  $q_{k-1}$ -normal conforme  $N \rightarrow \infty$ . O parâmetro  $\beta_k$ , da  $q_{k-1}$ -gaussiana  $G_{q_{k-1}}(\beta_k; x)$  que faz o papel de atrator, é dado por

$$\beta_k = \left( \frac{3 - q_{k-1}}{4q_{k-1}C_{q_{k-1}}^{2q_{k-1}-2}} \right)^{\frac{1}{2-q_{k-1}}}. \quad (2.34)$$

**Teorema 2.4.** *Assumamos uma sequência  $q_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , dada como em 2.13 com  $q_k \in [1, 2]$ . Seja  $X_1, \dots, X_N, \dots$  uma sequência  $q_k$ -independente do terceiro tipo (para um  $k$  fixo) de variáveis aleatórias identicamente distribuídas com  $q_k$ -média,  $\mu_{q_k}$ , finita e  $(2q_k - 1)$ -segundo momento,  $\sigma_{q_k-1}^2$ , finito. Então*

$$Z_N = \frac{X_1 + \dots + X_N - N\mu_{q_k}}{D_N(q_k)}$$

é  $q_{k-1}$ -convergente a uma distribuição  $q_{k-1}$ -normal conforme  $N \rightarrow \infty$ . Ademais, o atrator

correspondente  $G_{q_{k-1}}(\beta_k; x)$  no presente caso é o mesmo que o do Teorema 2.1 com  $\beta_k$  dado por 2.26.

Por suposto,  $\frac{q+1}{3-q} = 1 \leftrightarrow q = 1$ : esse fato sustenta o Corolário 2.6 seguinte.

**Corolário 2.6.** *Seja  $X_1, \dots, X_N, \dots$  uma dada sequência de variáveis aleatórias  $q_k$ -independentes (de qualquer tipo) que satisfaçam as condições dos Teoremas 2.1, 2.2 e 2.3. Então o atrator de  $Z_N$  é uma  $q_k$ -distribuição normal se, e somente se,  $q_k = 1$ , ou seja, no caso clássico.*

Na Tabela 2.1 resumizamos a  $q$ -generalização do Teorema do Limite Central a partir do tipo de correlação a que corresponde um parâmetro da  $q$ -gaussiana que faz o papel de atrator, as condições impostas sobre a  $q$ -média e a  $q$ -variância e o tipo de convergência, conforme descrito no importante artigo de Umarov, Tsallis e Steinberg [52] e aqui replicado.

Tabela 2.1: Sumarização dos Casos para  $q$ -generalização do Teorema do Limite Central

Correlação	Condições	Convergência	Parâmetro da $q$ -Gaussiana
1º Tipo	$\mu_{q_k} < \infty$ $\sigma_{2q_k-1}^2 < \infty$	$q_k$ -conv.	$\beta_k = \left( \frac{3-q_{k-1}}{4q_k C_{q_{k-1}}^{2q_{k-1}-2}} \right)^{\frac{1}{2-q_{k-1}}}$
2º Tipo	$\mu_{q_{k-1}} < \infty$ $\sigma_{2q_{k-1}-1}^2 < \infty$	$q_{k-1}$ -conv.	$\beta_k = \left( \frac{3-q_{k-1}}{4q_{k-1} C_{q_{k-1}}^{2q_{k-1}-2}} \right)^{\frac{1}{2-q_{k-1}}}$
3º Tipo	$\mu_{q_k} < \infty$ $\sigma_{2q_k-1}^2 < \infty$	$q_{k-1}$ -conv.	$\beta_k = \left( \frac{3-q_{k-1}}{4q_k C_{q_{k-1}}^{2q_{k-1}-2}} \right)^{\frac{1}{2-q_{k-1}}}$

Fonte: Umarov, Tsallis e Steinberg [52].

É visto em [52] que as três variações de

$$q_k = \frac{2q + k(1 - q)}{2 + k(1 - q)}, \quad q \in [1, 2),$$

nominalmente o triploto  $(q_{k-1}, q_k, q_{k+1})$ , desempenham importante papéis na descrição de fenômenos não extensivos: se a correlação é dada por  $q_k$ , o atrator correspondente é uma  $q_{k-1}$ -gaussiana e a taxa de escala é igual a  $q_{k+1}$ . O desenvolvido pelos autores em [52] e aqui replicado, os quatro Teoremas fundamentais da  $q$ -generalização do Teorema do Limite Central, sugerem uma rica estrutura na base da Mecânica Não Extensiva. Essa estrutura pode contribuir para a compreensão do chamado  $q$ -triploto,

( $q_{sensitivity}, q_{relaxation}, q_{stationary}$ ), em estatística não extensiva e já mencionado aqui. Outra questão a ser respondida é se a  $q$ -independência descrita em [52] reflete algum tipo de invariância assintótica de escala conforme  $N$  cresce.

A Tabela 2.2 seguinte foi adaptada da obra [13], e apresenta atratores  $F_q(x)$  que escalam com  $N^{\frac{1}{\alpha(2-q)}}$  quando  $N \rightarrow \infty$ , com variáveis aleatórias idênticas  $q$ -independentes, com distribuição simétrica  $f(x)$ , e com  $Q$ -variância dada por

$$\sigma_Q \equiv \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 [f(x)]^Q dx}{\int_{-\infty}^{\infty} [f(x)]^Q dx},$$

$$Q \equiv 2q - 1; \quad q_1 = \frac{1+q}{3-q}; \quad q \geq 1.$$

Precisamos introduzir uma definição para compreender plenamente o conteúdo a ser explorado. Uma variável aleatória é dita possuir uma distribuição  $L_{q,\alpha}(x)$  ( $q, \alpha$ )-estável se sua  $q$ -Transformada de Fourier apresenta a forma

$$F_q[f](\xi) = a e_{q_{\alpha,1}}^{-b|\xi|^\alpha}, \quad (a > 0, b > 0, 0 < \alpha \leq 2),$$

com

$$q_{\alpha,1} \equiv \frac{\alpha q + 1 - q}{\alpha + 1 - q}.$$

ou seja, se

$$F_q[L_{q,\alpha}(x)](\xi) = a e_{q_{\alpha,1}}^{-b|\xi|^\alpha}, \quad (a > 0, b > 0, 0 < \alpha \leq 2),$$

$L_{1,2}(x)$  correspondem a gaussianas,  $L_{1,\alpha}(x)$  correspondem a distribuições de Lévy  $\alpha$ -estáveis, e  $L_{q,2}(x)$  correspondem a  $q$ -gaussianas. Aplicando  $n$  vezes a  $q$ -Transformada de Fourier em  $L_{q,\alpha}(x)$  obtemos:

$$\frac{\alpha}{1 - q_{\alpha,n}} = \frac{\alpha}{1 - q} + n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

→

$$q_{\alpha,n} = \frac{(2 + \alpha)q_{\alpha,n+2} - 2}{2q_{\alpha,n+2} + \alpha - 2}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

e, com  $\alpha = 2$ , teremos

$$q_{2,n} = 2 - \frac{1}{q_{2,n+2}}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Vamos explorar a tabela em questão:

- Espaço superior esquerdo: o atrator é uma gaussiana, que compartilha com a distribuição  $f(x)$  a mesma variância  $\sigma_1$  (CLT padrão).
- Espaço inferior esquerdo: o atrator é uma distribuição de Lévy  $\alpha$ -estável, que compartilha com  $f(x)$  o mesmo comportamento assintótico, i.e., o coeficiente  $C_\alpha$  (é o CLT de Lévy-Gnedenko, ou  $\alpha$ -generalização do CLT padrão, que não abordamos neste trabalho).
- Espaço superior direito: o atrator é uma  $q$ -gaussiana que compartilha com  $f(x)$  a mesma  $(2q - 1)$ -variância, ou seja, o coeficiente  $C_q$  ( $q$ -generalização do CLT padrão, ou  $q$ -CLT, o que estudamos na presente seção).
- Espaço inferior direito: O atrator é uma distribuição  $(q, \alpha)$ -estável que compartilha com  $f(x)$  o mesmo comportamento assintótico, ou seja, o coeficiente  $C_{q,\alpha}^L$  ( $q$ -generalização de Lévy-Gnedenko do CLT e  $\alpha$ -generalização do  $q$ -CLT, que não vimos no presente trabalho). Podemos perceber que, conforme  $|x|$  cresce, a distribuição de interesse segue essencialmente dois regimes de lei de potência, um distante, que combina com  $\alpha$ -distribuições quando  $q$  se aproxima da unidade, e um intermediário, que combina com  $q$ -gaussianas quando  $\alpha$  se aproxima de 2.

Tabela 2.2: Atratores Padrão para Diferentes Generalizações do Teorema do Limite Central

	$q = 1$ (Independente)	$q \neq 1$ (i.e., $Q = 2q - 1 \neq 1$ ) (Globalmente Correlacionado)
$\sigma_Q < \infty, (\alpha = 2)$	$F_q(x) = \text{Gaussiana } G(x)$ com mesmo $\sigma_1$ de $f(x)$ .	$F_q(x) = G_q(x) \equiv G_{\frac{3q-1}{1+q}}(x)$ , com mesmo $\sigma_Q$ de $f(x)$  $G_q \sim \begin{cases} G(x), & \text{se }  x  \ll x_C(q, 2) \\ f(x) \sim \frac{C_q}{ x ^{\frac{2}{q-1}}}, & \text{se }  x  \gg x_C(q, 2) \end{cases}$ com $\lim_{q \rightarrow 1} x_C(q, 2) = \infty$
$\sigma_q \rightarrow \infty, (0 < \alpha < 2)$	$F_q(x) = L_\alpha(x)$ , com mesmo comportamento para $ x  \rightarrow \infty$  $L_\alpha(x) \sim \begin{cases} G(x), & \text{se }  x  \ll x_C(1, \alpha) \\ f(x) \sim \frac{C_\alpha}{ x ^{1+\alpha}}, & \text{se }  x  \gg x_C(1, \alpha) \end{cases}$ com $\lim_{\alpha \rightarrow 2} x_C(1, \alpha) = \infty$	$F_q(x) = L_{q,\alpha}$ , com mesmo comportamento assintótico para $ x  \rightarrow \infty$  $L_{q,\alpha} \sim \begin{cases} G_{\frac{2(1-q)-\alpha(1+q)}{2(1-q)-\alpha(3-q)}, \alpha}^*(x) \sim \frac{C_{q,\alpha}^*}{ x ^{\frac{2(1-q)-\alpha(3-q)}{2(1-q)}}} & \text{Regime Intermediário} \\ G_{\frac{2\alpha q - \alpha + 3}{\alpha + 1}, 2}(x) \sim \frac{C_{q,\alpha}^L}{ x ^{(1+\alpha q - \alpha)}} & \text{Regime Distante} \end{cases}$

Fonte: Tsallis [13].



# Capítulo 3

## Teoria dos Grandes Desvios

Seguindo o apresentado em [55] a partir de [56], vamos citar dois teoremas na forma que será a base para nossa discussão de grandes desvios. Sejam  $X_1, \dots, X_n, \dots$ , ( $n \in \mathbb{N}$ ), variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (iid) definidas no espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  e tomando valores em  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , onde  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  denota a  $\sigma$ -álgebra<sup>1</sup> de Borel em  $\mathbb{R}$ . Vamos escrever  $E$  para representar a esperança com respeito à probabilidade  $P$ , dessa forma temos  $E[X_1] = a$ ,  $a \in \mathbb{R}$  e  $\text{Var}(X_1) = E[X_1^2] - a^2 = \sigma^2$ ,  $\sigma^2 \in [0, \infty)$ , e  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  são as somas parciais. Dois teoremas clássicos serão agora sucintamente apresentados, ou porque já tratamos deles ou devido à sua ampla disseminação na literatura - são eles:

1. Lei Forte dos Grandes Números:

$$P \left[ \frac{S_n}{n} \rightarrow a, \text{ quando } n \rightarrow \infty \right] = 1$$

2. Teorema do Limite Central:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(S_n - an) \xrightarrow{d} N(0, 1), \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

onde  $N(0, 1)$  é uma distribuição normal ou gaussiana com média 0 e variância 1, e

---

<sup>1</sup>Uma coleção  $\mathcal{X}$  de subconjuntos de um conjunto  $X$  é dita uma  $\sigma$ -álgebra caso satisfaça as seguintes condições:

- i  $\emptyset$  e  $X$  pertencem a  $\mathcal{X}$ .
- ii Se  $A$  pertence a  $\mathcal{X}$  então o seu complementar,  $A^c = X - A$ , pertence a  $\mathcal{X}$ .
- iii Se  $\{A_n\}$  é uma sequência de conjuntos em  $\mathcal{X}$ , então  $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$  pertence a  $\mathcal{X}$ .

A dupla  $(X, \mathcal{X})$  formada por um conjunto  $X$  e uma  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{X}$  é chamada de *espaço mensurável*.

o símbolo  $d$  sobre a seta indica uma convergência em distribuição<sup>2</sup>.

A Lei dos Grandes Números (LGN) trata de convergência de ordem  $n$ , e o Teorema do Limite Central, como apresentado, trata de convergência de ordem  $\sqrt{n}$  - desvios dessa natureza são denominados *normais*. A LGN nos diz que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[ \frac{S_n - an}{n} \gg \delta \right] \rightarrow 0, \text{ para } \delta > 0. \quad (3.1)$$

Desvios associados a eventos com esse tipo de taxa de convergência de probabilidades são chamados de *grandes*.

**Definição 3.1.** *O Princípio de Grandes Desvios (PGD, ou LDP a sigla em inglês) é definido da seguinte forma. Seja  $\{Z_n\}$  uma sequência de variáveis aleatórias definidas no espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  e tomando valores num espaço métrico completo e separável (espaço polonês)  $R$ . Consideremos  $\mathcal{B}(R)$  a  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $R$ , e  $I : R \rightarrow [0, \infty]$  uma função semicontínua inferiormente. Dizemos que  $\{Z_n\}$  satisfaz o Princípio de Grandes Desvios com função taxa  $I$  se as seguintes condições são satisfeitas:*

*i Cota Superior: Seja  $F \in \mathcal{B}(R)$  um fechado. Então*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} P[Z_n \in F] \leq - \inf_{x \in F} I(x).$$

*ii Cota Inferior: Seja  $O \in \mathcal{B}(R)$  um aberto. Então:*

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} P[Z_n \in O] \geq - \inf_{x \in O} I(x).$$

Vamos nos limitar, na presente seção, a provarmos grandes desvios para variáveis aleatórias iid.

Consideremos  $\{X_n\}$  uma sequência de variáveis iid com distribuição normal de média nula e variância unitária,  $X_1 \sim N(0, 1)$ . Seja  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  a soma parcial a ela

---

<sup>2</sup>Sejam  $\{P_n\}$  e  $P$  probabilidades em  $(E, \mathcal{B}(E))$ . Dizemos que  $P_n$  converge fracamente para  $P$ , denotando como  $P_n \Rightarrow P$ , se, para toda  $f$  contínua e limitada,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f dP_n = \int f dP.$$

Se  $\{P_n\}$  e  $P$  acima descritas forem distribuições das variáveis aleatórias  $\{X_n\}$  e  $X$  respectivamente, dizemos que  $X_n$  converge em distribuição para  $X$ , e o denotamos  $X_n \xrightarrow{d} X$ .

associada. Pela Lei dos Grandes Números, se  $m > 0$ , então  $P\left[\frac{S_n}{n} \in [m, \infty)\right]$  converge a 0, mas é desejável saber a taxa dessa convergência. Usando a desigualdade de Chebyshev<sup>3</sup> com  $A = [mn, \infty)$ ,  $X = S_n$  e  $\psi(x) = e^{\lambda x}$ , para algum  $\lambda > 0$ , teremos

$$P\left[\frac{S_n}{n} \in [m, \infty)\right] = P[S_n \geq mn] \leq \frac{E[e^{\lambda S_n}]}{e^{\lambda mn}}. \quad (3.2)$$

Uma vez que  $\{X_n\}$  é uma sequência de variáveis aleatórias iid, temos

$$\begin{aligned} E[e^{\lambda S_n}] &= E[e^{\lambda(X_1 + \dots + X_n)}] \\ &= E[e^{\lambda X_1} \cdot \dots \cdot e^{\lambda X_n}] = E[e^{\lambda X_1}] \cdot \dots \cdot E[e^{\lambda X_n}] = E[e^{\lambda X_1}]^n. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Vamos denotar a Transformada de Laplace de  $X_1$  por

$$\varphi(\lambda) = E[e^{\lambda X_1}]. \quad (3.4)$$

Então, a partir de 3.3, temos que  $E[e^{\lambda S_n}] = E[e^{\lambda X_1}]^n = \varphi(\lambda)^n$ . Dado que  $X_1 \sim N(0, 1)$ , temos que  $E[e^{\lambda S_n}] = e^{\frac{\lambda^2}{2}n}$ . Logo

$$P\left[\frac{S_n}{n} \in [m, \infty)\right] \leq e^{-n\left(\lambda m - \frac{\lambda^2}{2}\right)} \rightarrow 0 \quad (3.5)$$

se  $\lambda m - \frac{\lambda^2}{2} > 0$ , então  $\lambda < 2m$ . É imediato que temos um decaimento exponencial da probabilidade em 3.5 e a taxa de decaimento é dada por  $\lambda m - \frac{\lambda^2}{2}$ : voltando à Definição 3.1, podemos perceber que esta sentença faz às vezes da função  $I$  - por isso a mesma é chamada de *função taxa*.

Vamos trabalhar agora para obtermos dois Teoremas essenciais à compreensão da Teoria dos Grandes Desvios "clássica": o Teorema de Cramér e o Teorema de Gärtner-Ellis.

Prosseguindo nossa consulta ao material de Müller [55], vamos considerar o caso em

---

<sup>3</sup>Denotamos por  $E$  a esperança com respeito à probabilidade  $P$ . Assim,  $P[A] = E[\mathbb{1}_A]$ , onde

$$\mathbb{1}_A = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

Isso posto, vamos à Desigualdade de Chebyshev. Sejam  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ ,  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  e  $i_A = \inf_{y \in A} \psi(y)$ . Então

$$i_A P[X \in A] \leq E[\psi(X)\mathbb{1}_{X \in A}] \leq E[\psi(X)].$$

que  $\{X_n\}$  é uma sequência de variáveis aleatórias iid integráveis tomando valores em  $\mathbb{R}$  e sendo  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . Nosso objetivo inicial será encontrar uma cota superior no intervalo  $[m, \infty)$ . A partir do exemplo 3.5, notemos que

$$P \left[ \frac{S_n}{n} \in [m, \infty) \right] = \mathbb{E} \left[ \mathbf{1}_{\left[ \frac{S_n}{n} \in [m, \infty) \right]} \right]. \quad (3.6)$$

Multiplicando o lado direito da equação por  $e^{-\lambda S_n} e^{\lambda S_n} = 1, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ , teremos

$$P \left[ \frac{S_n}{n} \in [m, \infty) \right] = \mathbb{E} \left[ \mathbf{1}_{\left[ \frac{S_n}{n} \in [m, \infty) \right]} e^{-\lambda S_n} e^{\lambda S_n} \right]. \quad (3.7)$$

Sabemos que  $\frac{S_n}{n} \in [m, \infty) \Rightarrow S_n \geq mn$ . Logo, para  $\lambda \geq 0$  teremos  $\lambda S_n \geq \lambda mn$  e  $e^{-\lambda S_n} \leq e^{-\lambda mn}$ . Assim

$$P \left[ \frac{S_n}{n} \in [m, \infty) \right] = \mathbb{E} \left[ \mathbf{1}_{\left[ \frac{S_n}{n} \in [m, \infty) \right]} e^{-\lambda S_n} e^{\lambda S_n} \right] \leq e^{-\lambda mn} \mathbb{E} \left[ e^{\lambda S_n} \right] = e^{-\lambda mn} \varphi(\lambda)^n \Rightarrow \quad (3.8)$$

$$\frac{1}{n} \log P \left[ \frac{S_n}{n} \in [m, \infty) \right] \leq \frac{1}{n} \log \left[ e^{-\lambda mn} \varphi(\lambda)^n \right] = -\lambda m + \log \varphi(\lambda).$$

Façamos

$$J_s = sx - \log \varphi(s), \quad (3.9)$$

então

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P \left[ \frac{S_n}{n} \in [m, \infty) \right] \leq -J_\lambda(m), \quad \forall \lambda \geq 0. \quad (3.10)$$

Analogamente

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P \left[ \frac{S_n}{n} \in (-\infty, M] \right] \leq -J_\alpha(M), \quad \forall \alpha \leq 0. \quad (3.11)$$

**Teorema 3.1.** *Seja  $\{X_n\}$  uma sequência de variáveis iid integráveis tomando valores em  $\mathbb{R}$ . Seja  $\varphi(\lambda) = \mathbb{E}[e^{\lambda X_1}]$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  e*

$$I(x) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} J_\lambda(x) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} (\lambda x - \log \varphi(\lambda)), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3.12)$$

Sejam verdadeiras as seguintes hipóteses:

i  $\Phi^* := \{\lambda \in \mathbb{R} : \varphi(\lambda) < \infty\}$  é um conjunto aberto,

ii  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $I(x) = \infty$  ou  $\exists \lambda_x$  tal que  $I(x) = \lambda_x x - \log \varphi(\lambda_x)$ ,

então  $\left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \right\}$  satisfaz o Princípio dos Grandes desvios com função taxa  $I$  definida como em 3.12.

**Prova do Teorema 3.1.** Nossa prova será dividida em três etapas:

i Prova-se que a função  $I$  satisfaz as hipóteses para ser função taxa do LDP.

Notemos que  $\varphi(0) = E[e^{0X_1}] = 1$  e, portanto

$$I(x) = \sup_{\lambda \in \Phi^*} (\lambda x - \log \varphi(\lambda)) \geq 0x - \log \varphi(0) = 0,$$

o que indica que a função  $I$  toma valores no intervalo  $[0, \infty)$ . Não será provado aqui, mas  $I$  é uma função semicontínua inferiormente desde que todas as  $J_\lambda$  sejam contínuas em  $\Phi^*$ . Assim,  $I$  satisfaz as hipóteses do LDP e é candidata à ser uma função taxa associada ao mesmo.

ii Prova-se a existência da cota superior.

Seja  $I^+(m) = J_\lambda(m)$ ,  $J_\lambda$  conforme definido em 3.9. Ao minimizarmos para  $\lambda \geq 0$  a inequação 3.10, vamos obter

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P \left[ \frac{S_n}{n} \in [m, \infty) \right] \leq -I^+(m). \quad (3.13)$$

De modo semelhante, podemos minimizar a inequação 3.11 para  $\alpha \leq 0$  e vamos obter

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P \left[ \frac{S_n}{n} \in (-\infty, M] \right] \leq -I^-(M), \quad (3.14)$$

onde  $I^-(M) = \sup_{\alpha \leq 0} J_\alpha(M)$ .

Valendo-nos da Desigualdade de Jensen<sup>4</sup> com  $\varphi = e^{sx}$ ,  $\forall s \in \mathbb{R}$ , temos  $\varphi(s) = E[e^{sX_1}] \geq e^{sE[X_1]} = e^{sa}$ , com  $a = E[X_1]$ . Assim,  $\forall s \in \mathbb{R}$ ,  $J_s(a) \leq sa - \log e^{sa} = 0$  e, portanto,

---

<sup>4</sup>A chamada Desigualdade de Jensen é como é designado o seguinte Teorema: seja  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função convexa, isto é,  $\forall \lambda \in [0, 1]$  e  $x, y \in \mathbb{R}$  é válida a seguinte inequação,  $\lambda\varphi(x) + (1 - \lambda)\varphi(y) \geq$

$I^+(a) \leq 0$  e  $I^-(a) \leq 0$ . Analogamente, podemos mostrar que  $I^+ \geq 0$  e  $I^- \geq 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Daí decorre que  $I^+(a) = I^-(a) = 0$ .

Sabemos que  $b \leq c \Rightarrow \lambda b \leq \lambda c, \forall \lambda \geq 0$ , então

$$I^+(b) = \sup_{\lambda \geq 0} (\lambda b - \log \varphi(\lambda)) \leq \sup_{\lambda \geq 0} (\lambda c - \log \varphi(\lambda)) = I^+(c)$$

o que faz de  $I^+$  uma função não decrescente. Outrossim,  $b \leq c \Rightarrow \lambda b \geq \lambda c, \forall \lambda \leq 0$ , o que nos indica que  $I^-(b) \geq I^-(c)$ , ou seja,  $I^-$  é uma função não crescente.

Seja  $F$  um conjunto fechado. Se  $a \in F$ , concluímos que  $\inf_{x \in F} I(x) \leq I(a) = 0$  e, a partir da Lei dos Grandes Números, que  $P\left[\frac{S_n}{n} \in F\right] \rightarrow 1$ . Assim

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P\left[\frac{S_n}{n} \in F\right] = 0 \leq -\inf_{x \in F} I(x)$$

a condição de cota superior é satisfeita.

Para  $a \notin F$ , vamos primeiramente considerar a seguinte igualdade

$$I(y) = \sup_{s \in \mathbb{R}} (sy - \log \varphi(s)) = \max \left\{ \sup_{\alpha \leq 0} J_\alpha(y), \sup_{\lambda \geq 0} J_\lambda(y) \right\} = \max\{I^-(y), I^+(y)\}.$$

Sabendo que  $I^-$  é não crescente,  $I^+$  é não decrescente e que  $I^-(a) = I^+(a) = 0$ , podemos estabelecer que

$$I(y) = I^-(y)\mathbb{1}_{(-\infty, a)}(y) + I^+(y)\mathbb{1}_{[a, \infty)}(y) \quad (3.15)$$

Temos que  $F^c$  é necessariamente um conjunto aberto e  $a \in F^c$ . Seja  $I_F = (y_1, y_2)$  o maior intervalo aberto tal que  $a \in I_F$  e  $I_F \cap F = \emptyset$ , então temos que  $F \subseteq I_{F^c} = (-\infty, y_1] \cup [y_2, \infty)$ . Assim, fazendo  $F^- = F \cap (-\infty, y_1]$  e  $F^+ = F \cap [y_2, \infty)$ , temos que  $F = F^- \cup F^+$ . Podemos então escrever

$$\inf_{y \in F} I(y) = \min \left\{ \inf_{y \in F^-} I(y), \inf_{y \in F^+} I(y) \right\}. \quad (3.16)$$

---

$\varphi(\lambda x + (1 - \lambda)y)$ . Se  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}$ , satisfaz  $E[f] < \infty$  e  $E[\varphi(f)] < \infty$ , temos que

$$\varphi(E(f)) \leq E[\varphi(f)].$$

Uma vez que  $\forall x \in F^+$  e  $\forall z \in F^-$  valem as assertivas  $\mathbb{1}_{(-\infty, a)}(x) = 0$ ,  $\mathbb{1}_{(-\infty, a)}(z) = 1$ ,  $\mathbb{1}_{[a, \infty)}(x) = 1$  e  $\mathbb{1}_{[a, \infty)}(z) = 0$ , segue de 3.15 e 3.16

$$\inf_{y \in F} I(y) = \min \left\{ \inf_{y \in F^-} I^-(y), \inf_{y \in F^+} I^+(y) \right\} = \min \{I^-(y_1), I^+(y_2)\} \quad (3.17)$$

dadas as já citadas propriedades de  $I^-$  e  $I^+$ .

Dado  $F \subseteq (-\infty, y_1] \cup [y_2, \infty)$ , temos

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P \left[ \frac{S_n}{n} \in F \right] \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left( P \left[ \frac{S_n}{n} \in (-\infty, y_1] \right] + P \left[ \frac{S_n}{n} \in [y_2, \infty) \right] \right)$$

e a partir disso pode-se obter que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P \left[ \frac{S_n}{n} \in F \right] \leq \max \left\{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log a_n, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log b_n \right\}.$$

Vamos nos valer das relações 3.13, 3.14 e 3.17 para concluirmos que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P \left[ \frac{S_n}{n} \in F \right] \leq \max \{-I^-(y_1), -I^+(y_2)\} = -\inf_{y \in F} I(y),$$

o que prova a condição de cota superior do LDP.

iii Prova-se a existência da cota inferior.

Seja  $O$  um conjunto aberto. Definamos  $I^* \equiv \{x \in \mathbb{R} : I(x) \leq \infty\}$  e  $O^* = O \cap I^*$ .

Se  $O^* = \emptyset$ , então  $I(x) = \infty$ ,  $\forall x \in O$ . Logo  $\inf_{x \in O} I(x) = \infty$  e vale a cota inferior.

O caso em que  $O^* \neq \emptyset$  não é imediato e depende de ferramentas e definições que não serão apresentadas no presente trabalho: indicamos a compilação feita por Müller [55], da qual nos valemos aqui, que apresenta a prova detalhada deste tópico em particular. □

Vamos apresentar três Lemas, cujas provas podem ser encontradas em [55], e então o primeiro Teorema de relevância desta seção.

**Lema 3.1.** *Suponhamos que  $\varphi(\lambda) < \infty$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ . Vamos denotar por  $f$  a distribuição de  $X_1$  e seja  $\mu = E[X_1]$ . Façamos  $x \in \mathbb{R}$  para o qual  $I(x) < \infty$  e  $\nexists \lambda_x$  tal que  $I(x) = \lambda_x x - \log \varphi(\lambda_x)$ . Então  $f(x, \infty) = 0$  se  $x > \mu$ , e  $f(-\infty, x) = 0$  se  $x < \mu$ , e, em ambos os casos,  $f(\{x\}) = e^{-I(x)}$ .*

**Lema 3.2.** Se  $x \in O$  e é válido que  $f(\{x\}) = e^{-I(x)}$ , então

$$\frac{1}{n} \log P \left[ \frac{S_n}{n} \in O \right] \geq -I(x).$$

**Lema 3.3.** Seja  $\{X_n\}$  uma sequência de variáveis aleatórias iid integráveis tomando valores em  $\mathbb{R}$  tais que  $\varphi(\lambda) = E[e^{\lambda X_1}] < \infty, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ . Então  $X_i$  possui todos os momentos finitos,  $\forall i \in \mathbb{N}$ , e  $\varphi$  é infinitamente derivável,  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ .

**Teorema 3.2 (Teorema de Cramér [56] [55] [57].).** Seja  $\{X_n\}$  uma sequência de variáveis aleatórias iid tomando valores em  $\mathbb{R}$ . Suponhamos que  $\varphi(\lambda) = E[e^{\lambda X_1}] < \infty, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ . Então  $\left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \right\}$  satisfaz o LDP com uma função taxa  $I$  como definida em 3.12.

**Prova do Teorema 3.2.** Pelo Lema 3.3, considerando  $k = 1$ , concluímos que  $X_1$  é integrável. Seja  $\mu = E[X_1]$ . Para demonstrarmos a validade da cota superior, basta retornarmos à prova do Teorema 3.1, uma vez que a mesma utiliza somente o fato de  $X_1$  ser integrável. Para demonstrarmos a compatibilidade com a definição da cota inferior, vamos tomar um  $O$  aberto, fixarmos um  $x \in O$  arbitrário e provar que

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P \left[ \frac{S_n}{n} \in O \right] \geq -I(x). \quad (3.18)$$

Vamos estudar dois casos para  $I(x)$ :

- 1 Para  $I(x) = \infty$  a prova é imediata.
- 2 Para  $I(x) < \infty$ , vamos estudar o comportamento de  $\mu$ :
  - (a) Para  $x = \mu$ , temos  $I(\mu) = 0$ . Ademais, a Lei dos Grandes Números garante que  $P \left[ \frac{S_n}{n} \in O \right] \rightarrow 1$ . portanto é válida a assertiva 3.18.
  - (b) Para  $x \neq \mu$  temos dois casos:
    - i. Existe  $\lambda_x$  tal que  $I(x) = \lambda_x x - \log \varphi(\lambda_x)$ : retornamos à Prova do Teorema 3.1.
    - ii. Não existe  $\lambda_x$  tal que  $I(x) = \lambda_x x - \log \varphi(\lambda_x)$ : pelo Lema 3.1 temos que  $f(\{x\}) = e^{-I(x)}$ . Então a desigualdade 3.18 segue diretamente do Lema 3.2.

□



Vamos continuar com nossa exposição de Teoremas relacionados a LDT que possuem especial relevância para a próxima seção do presente capítulo. Mais uma vez baseamos prioritariamente nossa discussão em [55].

Consideremos  $\{W_n\}$  um conjunto de variáveis aleatórias cujos valores pertencem a  $\mathbb{R}^m$ . Vamos denotar por  $f_n$  a distribuição de  $W_n$  em  $\mathbb{R}^m$ , e seja  $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  a função geradora de momentos, dada por

$$\varphi(\zeta) = \mathbb{E} \left[ e^{\langle \zeta, W_n \rangle} \right],$$

sendo o produto interno, e também a variável  $\zeta$ , em  $\mathbb{R}^m$ .

**Lema 3.4.** *Sejam verdadeiras as seguintes duas Hipóteses*

1 *Existe uma sequência  $a_n \uparrow \infty$  tal que, para cada  $\zeta \in \mathbb{R}^m$ , tem-se*

$$\varphi(\zeta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \log \varphi_n(a_n \zeta),$$

com  $\varphi(\zeta) \in (-\infty, \infty)$ .

2 *Seja  $\mathcal{D}_\varphi = \{\zeta \in \mathbb{R}^m : \varphi(\zeta) < \infty\}$  o conjunto dos pontos onde o limite inferior é finito. Suponhamos<sup>5</sup>  $0 \in \text{int}(\mathcal{D}_\varphi)$ .*

*Seja a chamada Transformada de Fenchel-Legendre de  $\varphi$  dada por*

$$\varphi^*(x) = \sup_{\zeta \in \mathbb{R}^m} (\langle \zeta, x \rangle - \varphi(\zeta)),$$

*um ponto  $\zeta \in \mathbb{R}^m$  é chamado subdiferencial de  $\varphi^*$  em  $y \in \mathbb{R}^m$  se,  $\forall z \in \mathbb{R}^m$  com  $z \neq y$  tivermos*

$$\varphi^*(z) > \varphi^*(y) + \langle \zeta, z - y \rangle,$$

*e então podemos definir*

$$\mathcal{E}(\varphi, \varphi^*) = \{y \in \mathbb{R}^m : \exists \zeta \in \text{int}(\mathcal{D}_\varphi) \text{ que é subdiferencial de } \varphi^* \text{ em } y\}.$$

*Diante das Hipóteses e definição expostas, teremos*

---

<sup>5</sup>Seja  $\mathcal{M} = \mathcal{M}(E)$  o conjunto de todas as probabilidades em  $(E, \mathcal{E})$ , sendo o conjunto  $E = \{z_1, z_2, \dots, z_d\}$  o espaço de estados de uma dada cadeia de Markov e  $\mathcal{E}$  o conjunto das partes de  $E$ . Denotamos por  $\text{int}(\mathcal{M})$  o interior do conjunto  $\mathcal{M}$ , ou seja,  $\text{int}(\mathcal{M}) = \{f \in \mathcal{M} : f(x) > 0, \forall x \in E\}$ , onde  $f$  é uma distribuição de probabilidades inicial para um conjunto de variáveis.

i  $\log \varphi_n$  é convexa;

ii  $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow (-\infty, \infty)$  é convexa;

iii  $\varphi^* : \mathbb{R}^m \rightarrow [0, \infty)$  é convexa e semicontínua inferiormente<sup>6</sup>.

Antes de enunciarmos o próximo Lema necessário à prova do Teorema 3.3, vamos proceder a uma definição: seja  $C \subseteq \mathbb{R}^m$  um conjunto convexo não vazio. O *interior relativo* de  $C$ , denotado por  $\text{ri}(C)$ , é dado por

$$\text{ri}(C) = \{x \in C : \forall y \in C, x - \varepsilon(y - x) \in C, \text{ para algum } \varepsilon > 0\}.$$

Vamos listar algumas propriedades de  $\text{ri}(C)$ :

i  $\text{int}(C) \subseteq \text{ri}(C)$ ;

ii  $\text{ri}(C) \neq \emptyset$ ;

iii Se  $z \in \text{ri}(C)$  e  $y \in C$ , então  $\varepsilon z + (1 - \varepsilon)y \in \text{ri}(C)$ , para qualquer  $\varepsilon \in (0, 1]$ ;

iv Se  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow (-\infty, \infty)$  é uma função convexa, então  $g$  é contínua em  $\text{ri}(\mathcal{D}_g)$ , onde  $\mathcal{D}_g = \{x : g(x) < \infty\}$ .

**Lema 3.5.** *Vamos tomar como válidas as Hipóteses do Lema 3.4. Suponhamos ainda que*

*a  $\varphi$  é semicontínua em  $\mathbb{R}^m$  e diferenciável em  $\text{int}(\mathcal{D}_\varphi)$ ;*

*b  $\mathcal{D}_\varphi = \mathbb{R}^d$  ou  $|\nabla\varphi(\zeta)| \rightarrow \infty$ , quando  $\zeta \rightarrow \partial\mathcal{D}_\varphi$  com  $\zeta \in \text{int}(\mathcal{D}_\varphi)$ .*

*Então,  $\text{ri}(\mathcal{D}_{\varphi^*}) \subseteq \mathcal{E}(\varphi, \varphi^*)$*

Os Lemas 3.4 e 3.5 não serão demonstrados aqui: suas provas podem ser encontradas em [58].

---

<sup>6</sup>Uma função  $f : D \rightarrow (-\infty, \infty)$  é dita *semicontínua superiormente* em  $a \in D$  se, para qualquer sequência  $\{x_n\}$  com  $x_n \rightarrow a$ , é válido que

$$\overline{\lim}_{x_n \rightarrow a} f(x_n) \leq f(a).$$

Uma função  $f : D \rightarrow (-\infty, \infty)$  é dita *semicontínua inferiormente* em  $a \in D$  se, para qualquer sequência  $\{x_n\}$  com  $x_n \rightarrow a$ , é válido que

$$\underline{\lim}_{x_n \rightarrow a} f(x_n) \geq f(a).$$

Uma função é dita simplesmente semicontínua superiormente, ou inferiormente, quando o for em todo o seu domínio.

**Teorema 3.3** (Teorema de Gärtner-Ellis [56] [55] [57]). *Supondo verdadeiras as Hipóteses do Lema 3.4, temos:*

1.  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \log f_n(F) \leq -\inf_{x \in F} \varphi^*$ , para qualquer  $F \subseteq \mathbb{R}^m$  fechado;
2.  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \log f_n(A) \geq -\inf_{x \in A \cup \mathcal{E}} \varphi^*(x)$ , para todo  $A \subseteq \mathbb{R}^m$  aberto, onde  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\varphi, \varphi^*)$ .

Se assumirmos as condições (a) e (b) enunciadas no Lema 3.5 como verdadeiras, nos é permitido substituir  $A \cup \mathcal{E}$  por  $A$  no item (ii) do presente Teorema. Isso nos autoriza asseverar que a sequência  $\{f_n\}$  satisfaz o LDP com função taxa  $\varphi^*$ .

**Prova do Teorema 3.3.** Se fixarmos  $F \subseteq \mathbb{R}^m$  e  $\zeta \in \mathbb{R}^m$  e aplicarmos a Desigualdade de Chebyshev com  $\psi(y) = e^{\langle \zeta, y \rangle}$ , obteremos

$$\inf_{y \in F} \left( e^{\langle \zeta, y \rangle} \right) P[W_n \in F] \leq E \left[ e^{\langle \zeta, W_n \rangle} \right].$$

Uma vez que  $f_n$  é a distribuição de  $W_n$  e a exponencial é crescente, pode-se concluir que

$$e^{\inf_{y \in F} \langle \zeta, y \rangle} f_n(F) \leq E \left[ e^{\langle \zeta, W_n \rangle} \right].$$

Aplicando a definição de  $\varphi_n$ , a desigualdade anterior é reescrita na forma

$$\begin{aligned} f_n(F) &\leq e^{\inf_{y \in F} \langle \zeta, y \rangle} \varphi_n(\zeta) \\ &\Rightarrow \\ \frac{1}{a_n} \log f_n(F) &\leq -\inf_{y \in F} \left\langle \frac{\zeta}{a_n}, y \right\rangle + \frac{1}{a_n} \log \varphi_n(\zeta), \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^m \\ &\Rightarrow \\ \frac{1}{a_n} \log f_n(F) &\leq -\inf_{y \in F} \langle \zeta, y \rangle + \frac{1}{a_n} \log \varphi_n(a_n \zeta) \end{aligned}$$

maximizando a desigualdade acima em  $\zeta$ , encontramos

$$\frac{1}{a_n} \log f_n(F) \leq -\sup_{\zeta \in \mathbb{R}^m} \left( \inf_{y \in F} \langle \zeta, y \rangle - \frac{1}{a_n} \log \varphi_n(a_n \zeta) \right).$$

Seja  $K$  um conjunto compacto: se  $\inf_{x \in K} \varphi^*(x) = 0$ , então o seguinte limite existe e

obedece às seguintes relações

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \log f_n(K) = - \inf_{x \in K} \varphi^*(x) \leq 0$$

dados que  $a_n \uparrow \infty$  e  $f_n \in [0, 1]$ . A partir da inequação, sabemos que existe  $a \in \mathbb{R}$  tal que  $0 < a < \inf_{x \in K} \varphi^*(x)$ . Fixando  $y \in K$ , chegamos a  $0 < a < \varphi^*(y)$ . Pela definição de  $\varphi^*$ , sabemos que existe  $\zeta_y$  tal que  $0 < a < \langle \zeta_y, y \rangle - \varphi(\zeta_y)$ . Ou seja, para qualquer  $y \in K$ , existem  $\zeta_y \in \mathbb{R}^m$  e  $\delta > 0$  tal que

$$\langle \zeta_y, y \rangle - \varphi(\zeta_y) = a + \delta,$$

o que nos diz que  $\varphi(\zeta_y) < \infty$  e que, para todo  $n \geq n_y$ ,  $n_y \in \mathbb{N}$ , teremos

$$\langle \zeta_y, y \rangle - \frac{1}{a_n} \log \varphi_n(a_n \zeta_y) > a + \frac{\delta}{2}.$$

Seja  $\delta_y > 0$ , e  $B(y, \delta_y)$  uma bola centrada em  $y$  com raio  $\delta_y$ . Fazendo  $\delta_y$  suficientemente pequeno, segue que, para todo  $n \geq n_y$ , temos

$$\frac{1}{a_n} \log f_n(B(y, \delta_y)) \leq -a,$$

e, obviamente,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \log f_n(B(y, \delta_y)) \leq -a.$$

Já que determinamos  $K$  compacto, podemos cobri-lo com um número finito  $N$  de bolas  $B(y_i, \delta_{y_i})$  - nesse caso

$$f_n(K) \leq \sum_{i=1}^N f_n(B(y_i, \delta_{y_i}))$$

e, portanto<sup>7</sup>

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \log f_n(K) &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \log \sum_{i=1}^N f_n(B(y_i, \delta_{y_i})) \\ &= \max_{1 \leq i \leq N} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \log f_n(B(y_i, \delta_{y_i})) \leq -a. \end{aligned}$$

---

<sup>7</sup>É possível provar [55] que, dadas as sequências de números reais  $a_n, b_n \geq 0$  e  $c_n \uparrow \infty$ , a seguinte relação é válida

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{c_n} \log(a_n + b_n) = \max \left\{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{c_n} \log a_n, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \log b_n \right\}.$$

Fazendo  $a \rightarrow \inf_{y \in K} \varphi^*(y)$  chegamos a

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \log f_n(K) \leq - \inf_{y \in K} \varphi^*(y)$$

desigualdade que pode ser estendida para qualquer  $F$  fechado (a prova desse assertiva envolve tópicos da teoria das probabilidades que fogem ao escopo do presente trabalho, mas pode ser encontrada em [55]). Isso encerra a demonstração do item (i).

Vamos passar à demonstração do item (ii) do Teorema em questão. Se fixarmos  $x \in \mathcal{E}$  e  $\delta > 0$ , podemos escolher  $\zeta \in \text{int}(D_\varphi)$  subdiferencial de  $\varphi^*$  em  $x$ . Uma vez que  $\zeta \in \text{int}(D_\varphi)$  e pela definição de  $\varphi$ , podemos afirmar que existe  $n_x \in \mathbb{N}$  tal que  $a_n \zeta \in D_{\varphi_n}$ , para todo  $n \geq n_x$ . De tal forma nos é permitido definir probabilidades  $\nu_n$  tais que, para todo  $y \in \mathbb{R}^m$ , teremos

$$\frac{d\nu_n}{df_n}(y) = \frac{e^{a_n \langle \zeta, y \rangle}}{\varphi(a_n \zeta)}. \quad (3.19)$$

Seja  $\delta'$  tal que  $0 < \delta' < \delta$ . Seja  $B(x, \delta)$  a bola com centro em  $x$  e raio  $\delta$ . Assim

$$\frac{1}{a_n} \log f_n(B(x, \delta)) \geq \frac{1}{a_n} \log f_n(B(x, \delta')).$$

Utilizando-nos da definição de  $\nu_n$ , vamos reescrever a inequação anterior da seguinte forma

$$\frac{1}{a_n} \log f_n(B(x, \delta)) \geq \frac{1}{a_n} \log \int_{B(x, \delta')} \frac{\varphi_n(a_n \zeta)}{e^{a_n \langle \zeta, y \rangle}} d\nu_n(y)$$

ou ainda como

$$\frac{1}{a_n} \log f_n(B(x, \delta)) \geq \frac{1}{a_n} \log \varphi_n(a_n \zeta) + \frac{1}{a_n} \log \int_{B(x, \delta')} e^{a_n \langle \zeta, y \rangle} d\nu_n(y).$$

Uma vez que  $|y - x| \leq \delta'$ ,  $\forall y \in B(x, \delta')$ , temos que  $|\langle \zeta, y - x \rangle| \leq \delta' |\zeta|$  - assim, sob as mesmas condições,

$$\langle \zeta, x \rangle - \delta' |\zeta| \leq \langle \zeta, y \rangle \leq \langle \zeta, x \rangle + \delta' |\zeta|$$

dessa forma, chegamos a

$$\frac{1}{a_n} \log f_n(B(x, \delta)) \geq \frac{1}{a_n} \log \varphi_n(a_n \zeta) - \langle \zeta, x \rangle - \delta' |\zeta| + \frac{1}{a_n} \log \nu_n(B(x, \delta')).$$

Tomando o limite inferior para  $n \rightarrow \infty$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \log f_n(B(x, \delta)) \geq \varphi(\zeta) - \langle \zeta, x \rangle - \delta' |\zeta| + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \log \nu_n(B(x, \delta')).$$

impondo  $\delta' \downarrow 0$ , chegamos a

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \log f_n(B(x, \delta)) \geq \varphi(\zeta) - \langle \zeta, x \rangle + \lim_{\delta' \downarrow 0} \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \log \nu_n(B(x, \delta')).$$

Utilizando da definição de  $\varphi^*$ , temos

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \log f_n(B(x, \delta)) \geq -\varphi^*(x) + \lim_{\delta' \downarrow 0} \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \log \nu_n(B(x, \delta')). \quad (3.20)$$

Vamos definir  $\psi$  para todo  $\tau \in \mathbb{R}^m$  da seguinte forma

$$\psi(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \log \psi_n(a_n \tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} \log \int e^{\langle a_n \tau, y \rangle} d\nu_n(y).$$

Pela definição de  $\nu_n$ , obtemos

$$\begin{aligned} \psi(\tau) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \log \int e^{\langle a_n \tau, y \rangle} \frac{e^{\langle a_n \zeta, y \rangle}}{\varphi_n(a_n \zeta)} df_n(y) \\ &\Rightarrow \\ \psi(\tau) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \log \int e^{\langle a_n(\tau + \zeta), y \rangle} df_n(y) - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \log \varphi_n(a_n \zeta) \\ &\Rightarrow \\ \psi(\tau) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \log \varphi(a_n(\tau + \zeta)) - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \log \varphi_n(a_n \zeta) = \varphi(\tau + \zeta) - \varphi(\zeta). \end{aligned}$$

Seja  $\psi^*$  a Transformada de Fenchel-Legendre de  $\psi$ . Desse modo

$$\psi^*(x) = \sup_{\tau \in \mathbb{R}^m} (\langle \tau, x \rangle - \psi(\tau)) = \sup_{\tau \in \mathbb{R}^m} (\langle \tau + \zeta, x \rangle - \langle \zeta, x \rangle - \varphi(\zeta, \tau) + \varphi(\zeta))$$

da definição de  $\varphi^*$  chegamos a

$$\psi^* = \varphi^* - \langle \zeta, x \rangle - \varphi(\zeta).$$

Vamos nos utilizar do item (i) do presente Teorema: para todo  $F \subseteq \mathbb{R}^m$  fechado teremos

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \log \nu_n(F) \leq - \inf_{z \in F} \psi^*(z).$$

Vamos considerar o fechado  $\mathbb{R}^m \setminus B(x, \delta')$ . Temos então

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \log \nu_n(\mathbb{R}^m \setminus B(x, \delta')) \leq - \inf_{z \in \mathbb{R}^m \setminus B(x, \delta')} \psi^* = -\psi^*(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}^m \setminus B(x, \delta')$$

pelas definições e propriedades de  $\varphi^*$  e  $\psi^*$  sabemos que

$$\psi^*(y) = \varphi^*(y) - \langle \zeta, y \rangle + \varphi(\zeta) \geq (\varphi^*(y) - \langle \zeta, y \rangle) - (\varphi^*(x) - \langle \zeta, x \rangle) > 0$$

assim, para todo  $\delta' > 0$ ,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \log \nu_n(\mathbb{R}^m \setminus B(x, \delta')) < 0. \quad (3.21)$$

Nosso objetivo é demonstrar a hipótese de que a probabilidade  $\nu_n$  obedece a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(B(x, \delta')) = 1.$$

Procedemos *reductio ad absurdum* supondo que existe um  $\varepsilon > 0$  tal que  $\nu_n(B(x, \delta')) \leq 1 - \varepsilon$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Neste caso, temos

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \log \nu_n(\mathbb{R}^m \setminus B(x, \delta')) \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \log \varepsilon = 0$$

o que contradiz o fato estabelecido em 3.21. Assim estabelecemos a hipótese citada como verdadeira.

Segue de 3.20 que, para todo  $x \in \mathcal{E}$ ,

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \log f_n(B(x, \delta)) \geq -\varphi^*(x). \quad (3.22)$$

Seja um aberto  $A \subseteq \mathbb{R}^m$  e  $x \in A \cap \mathcal{E}$ . Dada a natureza de  $A$ , existe  $\varepsilon_0(x)$  tal que  $B(x, \varepsilon_0) \subseteq A$  - segue que  $B(x, \varepsilon) \subseteq A$ ,  $\forall \varepsilon \leq \varepsilon_0(x)$ . Assim

$$f_n(B(x, \varepsilon)) \leq f_n(A).$$

Associando a informação trazida pela inequação acima com a equação 3.22 podemos determinar que, para todo  $x \in A \cap \mathcal{E}$ , é válido que

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \log f_n(A) \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \log f_n(B(x, \delta)) \geq -\varphi^*(x).$$

Ao maximizarmos essa desigualdade para  $x$ , temos

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \log f_n(A) \geq - \inf_{x \in A \cap \mathcal{E}} \varphi^*(x)$$

o que encerra a demonstração do item (ii).

Vamos proceder à conclusão da demonstração do presente Teorema: para tanto, provaremos que a seguinte inequação é verdadeira para qualquer aberto  $A \subseteq \mathbb{R}^m$

$$\inf_{x \in A \cap \text{ri}(\mathcal{D}_{\varphi^*})} \varphi^*(x) \leq \inf_{x \in A} \varphi^*(x)$$

Consideremos  $A \cap \mathcal{D}_{\varphi^*} \neq \emptyset$  para eliminarmos a afirmação trivial: temos então  $y \in A \cap \mathcal{D}_{\varphi^*}$  e  $z \in \text{ri}(\mathcal{D}_{\varphi^*})$  e, dado que  $A$  é um aberto, existe  $\delta_0$  tal que  $B(y, \delta_0) \subseteq A$ . Para  $\beta$  suficientemente pequeno temos

$$\beta z + (1 - \beta)y \in B(y, \delta_0) \subseteq A.$$

Ademais, pela Propriedade (iii) da definição do interior relativo, temos que para todo  $\beta \in (0, 1]$  é verdadeiro que

$$\beta z + (1 - \beta)y \in \text{ri}(\mathcal{D}_{\varphi^*}).$$

Conjugando as duas últimas assertivas segue que, para  $\beta > 0$  suficientemente pequeno,

$$\beta z + (1 - \beta)y \in A \cap \text{ri}(\mathcal{D}_{\varphi^*}).$$

Fazendo  $\beta \downarrow 0$  e lembrando da convexidade de  $\varphi^*$  pode-se chegar a seguinte inequação, válida para todo  $y \in A \cup \mathcal{D}_{\varphi^*}$

$$\inf_{x \in A \cap \text{ri}(\mathcal{D}_{\varphi^*})} \varphi^*(x) \leq \lim_{\beta \downarrow 0} \varphi^*(\beta z + (1 - \beta)y) \leq \varphi^*(y)$$



procedendo à minimização da desigualdade em relação a  $y$ , vamos encontrar

$$\inf_{x \in A \cap \text{ri}(\mathcal{D}_{\varphi^*})} \varphi^*(x) \leq \inf_{y \in A \cap \mathcal{D}_{\varphi^*}} \varphi^*(y).$$

Sabendo que  $\mathcal{D}_{\varphi^*} = \{x \in \mathcal{R}^m : \varphi^*(x) < \infty\}$ , deduzimos que  $\varphi^*(x) = \infty$  para todo  $x \in A \cap \mathcal{D}_{\varphi^*}^c$ . Assim

$$\inf_{x \in A \cap \text{ri}(\mathcal{D}_{\varphi^*})} \varphi^*(x) \leq \inf_{y \in A \cap \mathcal{D}_{\varphi^*}} \varphi^*(y) = \inf_{y \in A} \varphi^*(y).$$

Trabalhando sobre a sentença anterior levando em consideração o Lema 3.5, teremos

$$\inf_{x \in A \cap \mathcal{E}} \varphi^*(x) \leq \inf_{x \in A \cap \text{ri}(\mathcal{D}_{\varphi^*})} \varphi^*(x) \leq \inf_{y \in A} \varphi^*(y).$$

Tomando a desigualdade acima e mantendo em foco o provado para o item (ii) do presente Teorema, teremos

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \log f_n(A) \geq - \inf_{x \in A \cap \mathcal{E}} \varphi^*(x) \geq - \inf_{x \in A} \varphi^*(x)$$

o que demonstra que a sequência  $\{W_n\}$  satisfaz o LDP com uma função taxa dada por  $\varphi^*$ . □

## Generalização da LDT para a Entropia Não Aditiva $S_q$

Nesta seção, vamos começar revisando a discussão intuitiva feita por Tsallis [13] a respeito da Teoria dos Grandes Desvios. Imaginemos um experimento mental simples envolvendo um número  $N$  de lançamentos estatisticamente independentes de moedas: qual a probabilidade de tirarmos exatamente ou menos de duas caras em  $N = 10$ ? Se aumentarmos o número de jogadas para  $N = 100$ , qual é a probabilidade de conseguirmos exatamente ou menos de vinte caras como resultado? Generalizando essa questão, poderíamos nos perguntar qual é a probabilidade  $P(N; n/N < x)$  de, num universo de  $N$  lançamentos, conseguirmos obter  $n$  resultados de interesse tal que  $n/N < 20\%$ . Algo podemos afirmar, intuitivamente, sobre tal questão: a probabilidade  $P(N; n/N < x)$  decresce, para um  $0 \leq x < 1/2$ , a zero quando  $N \rightarrow \infty$ . Tsallis, apoiado em [59], afirma que esse decréscimo

é exponencial e, mais exatamente, assume a seguinte forma:

$$P(N; n/N < x) \sim -e^{r_1(x)N} \quad (3.23)$$

onde a função taxa é dada pela entropia de Boltzmann-Gibbs por partícula

$$r_1 = \ln 2 + x \ln x + (1 - x) \ln(1 - x).$$

Podemos perceber que 3.23 é extensiva, atendendo o requerimento termodinâmico de extensividade da entropia total para sistemas clássicos hamiltonianos - de fato, a assertiva em questão é um caso particular de um fator de Boltzmann-Gibbs,  $p_{BG}$ , dado por [60]

$$p_{BG} \propto e^{-\beta \mathcal{H}_N} = e^{-[\beta \mathcal{H}_N / N]N}$$

onde  $\mathcal{H}_N / N$  é uma quantidade intensiva, e  $\mathcal{H}_N$  é o Hamiltoniano para um sistema de  $N$ -corpos com interações de curto alcance.

Quando tratamos de Hamiltonianos que levam em consideração interações de longo alcance, que é o caso de interesse desta monografia, Tsallis [13] nos assevera que o quadro geral deve ser um tanto diferente, e esperamos pela literatura que a  $p_{BG}$  original seja generalizada para uma  $p_q$  do tipo

$$p_q \propto e_q^{-\beta_q \mathcal{H}_N} = e_q^{-(\beta_q \tilde{N}) \frac{\mathcal{H}_N}{N \tilde{N}} N}$$

onde  $-(\beta_q \tilde{N}) \frac{\mathcal{H}_N}{N \tilde{N}}$  é uma quantidade intensiva. Essa extensa classe de sistemas fortemente correlacionados pode ser usada para consistentemente generalizar a equação 3.23 da seguinte forma

$$P(N; n/N < x) \sim e_q^{-r_q(x)N} \quad (3.24)$$

onde a função taxa  $q$ -generalizada é dada, espera-se, por uma  $q$ -entropia relativa por partícula apropriada: percebamos que, mesmo para sistemas com interações de longo alcance, a entropia total deve permanecer extensiva - embora a forma funcional original tenha mudado (de uma exponencial para uma  $q$ -exponencial), é esperado que seu argumento, invariavelmente, permaneça extensivo.

A título de exemplo, vamos replicar de modo sucinto aqui a abordagem feita em [13] de um modelo probabilístico apresentado em [61] e [62] e tratado numericamente em [63]: seja um sistema simétrico e invariante por escala de  $N$  variáveis binárias aleatórias permutáveis e fortemente correlacionadas definidas ao se adotar  $e^z_{q_{correlat}}$  como sua função geradora, sendo  $q_{correlat} \geq 1$  ( $q_{correlat} = 1$  corresponde à distribuição binomial independente). O atrator relacionado a  $N \rightarrow \infty$  é uma  $q_{attract}$ -gaussiana que é conseguida como segue: a partir de um  $q_{correlat}$  proposto,

$$q_{correlat} \equiv 1 + \frac{1}{\alpha}, \quad (\alpha > 0), \quad (3.25)$$

nós obteremos a distribuição normalizada mais geral que satisfaça a Regra de Leibnitz, ou seja

$$p_{N,n}(\eta) = \frac{x_N!}{x_{N-n}!x_n!} q_n(\eta) q_{N-n}(\eta) \quad (3.26)$$

onde  $q_s$  é um polinômio de grau  $s$ ,  $\eta$  é um parâmetro no intervalo  $[0, 1]$  e  $\{x_N\}$  é uma sequência infinita estritamente crescente de números reais não negativos. Partindo de 3.25 e 3.26 e fixando  $\eta = 1/2$ , eventualmente chegaremos a

$$p_{N,n}(\alpha) = \frac{N!}{(N-n)!n!} \frac{(\alpha/2)_n (\alpha/2)_{N-n}}{(\alpha/2)_N}, \quad \sum_{n=0}^N p_{N,n}(\alpha) = 1,$$

onde a estrutura  $(a)_b \equiv a(a+1) \cdot \dots \cdot (a+b-1)$ ,  $(a)_0 = 1$ , é o chamado Símbolo de Pochhammer. O atrator para  $N \rightarrow \infty$  é uma  $q_{attract}$ -gaussiana com

$$q_{attract} = \frac{\alpha - 4}{\alpha - 2} \leq 1.$$

Pode-se verificar que

$$\frac{1}{q_{correlat} - 1} - \frac{2}{1 - q_{attract}} = 2, \quad \forall \alpha.$$

Ao se estender a Equação 3.23 para a forma seguinte (em [63] menciona-se a necessidade de se considerar a quantidade escalada  $n/N^{\gamma(\alpha)}$  em lugar da original, o que estabelece uma analogia com o coeficiente de difusão anômala introduzido nas equações

de Fokker-Planck não-lineares)

$$P(N; n/N^{\gamma(\alpha)} < x) \sim e_q^{-r_q(x)N}, \quad (\gamma(\alpha) > 0), \quad (3.27)$$

conclui-se através do tratamento numérico que, no limite da LDT, o sistema em questão é satisfatoriamente descrito pela Equação 3.27 com

$$q = 1 + \frac{2}{\alpha}.$$

## Capítulo 4

# Extensividade Entrópica e Grandes Desvios na Presença de Correlações Não Locais: Nossa Contribuição

O presente capítulo é francamente baseado no artigo [64] de cuja concepção o autor da presente monografia tomou parte: foi obra publicada em revista de renome internacional, cujos coautores são também meu orientador e coorientador. Executei, sob a supervisão estrita e muito próxima do Professor Pesquisador Constantino Tsallis, as primeiras incursões numéricas no modelo físico proposto pelo mesmo. O Professor Pesquisador Ugur Tirnakli foi um colaborador de valor inestimável para a publicação do referido *paper*, propôs os códigos finais na linguagem Python que otimizaram os processos numéricos, e detém a primeira autoria do artigo. Cabe aqui declarar que participar, mesmo que modestamente, da construção desse átomo de saber científico foi uma experiência de intenso aprendizado e troca, que certamente me tornou mais capaz de exercer, no devido momento, minhas próprias e colaborativas contribuições à Física, *regina* das Ciências Naturais, se é que as antigas categorizações ainda fazem jus aos apelos transdisciplinares que testemunhamos numa época em que o fazer científico mais profícuo necessariamente transcende barreiras e especializações - exemplo vivo disso são as aplicações do aparato conceitual da Mecânica Estatística Não Extensiva em modelos e dados provindos das mais diversas áreas do saber, como pode ser visto em [13].

A Teoria Padrão dos Grandes Desvios (LDT) espelha o fator de Boltzmann-Gibbs (BG) que descreve o equilíbrio térmico de sistemas hamiltonianos de curto alcance, cuja

distribuição de velocidade é Maxwelliana. É genericamente aplicável a sistemas que satisfazem o Teorema do Limite Central (CLT), entre outros. Quando nos concentramos em estados estacionários de sistemas complexos típicos (por exemplo, sistemas hamiltonianos clássicos de longo alcance), tanto o CLT quanto o LDT precisam ser generalizados. Focamos aqui em um processo estocástico invariante em escala envolvendo variáveis aleatórias intercambiáveis fortemente correlacionadas que, através do teorema de Laplace-de Finetti, é conhecido por produzir um atrator  $Q$ -Gaussiano de cauda longa para  $N \rightarrow \infty$  em o espaço de distribuições ( $1 < Q < 3$ )<sup>1</sup>. Apresentamos fortes indicações numéricas de que a distribuição de probabilidade LDT correspondente é dada por  $P(N, z) = P_0 e^{-r_q(z)N} = P_0 [1 - (1 - q)r_q(z)N]^{1/(1-q)}$  com  $q = 2 - 1/Q \in (1, 5/3)$ . A função taxa  $r_q(z)$  é aparentemente igual à  $q_r$ -entropia relativa não aditiva por partícula, com  $q_r \simeq \frac{7}{10} + \frac{6}{10} \frac{1}{Q-1}$  exibindo assim uma singularidade em  $Q = 1$  e recuperando o valor BG  $q_r = 1$  no limite  $Q \rightarrow 3$ . Ressaltamos que a extensividade de  $r_q(z)N$  parece verificada, consistentemente com o que se espera da estrutura de Legendre da termodinâmica, para uma entropia total. A presente análise de um modelo relativamente simples que espelha um pouco a interação de longo alcance de ferromagnetos de spin-1/2 (por exemplo, com acoplamento XY fortemente anisotrópico) pode ser útil para uma compreensão mais profunda de sistemas de não-equilíbrio com correlações globais e outros sistemas complexos.

## Apresentação de Nosso Artigo

A mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs (BG) produz várias relações importantes. Ainda assim, é justo considerar a distribuição Maxwelliana de velocidades e a distribuição exponencial de energias (peso BG ou fator BG) como suas impressões digitais mais importantes [65] [66]. Esses fatos refletem o Teorema do Limite Central (CLT) que leva, quando o número  $N$  de variáveis aleatórias envolvidas aumenta indefinidamente, à convergência para distribuições gaussianas, e a Teoria dos Grandes Desvios (LDT) que caracteriza a velocidade na qual se aproxima de gaussianas enquanto  $N$  aumenta. Para ser mais preciso, uma distribuição BG,  $p_{BG}$ , associada a um  $\mathcal{H}_N$  hamiltoniano de muitos corpos em equilíbrio térmico é dada por  $p_{BG} \propto e^{-\beta \mathcal{H}_N}$  sempre que  $\mathcal{H}_N$  inclui interações de curto alcance ou nenhuma interação. Podemos então escrever que  $p_{BG} \propto e^{-[\beta \mathcal{H}_N / N]N}$ , onde,

---

<sup>1</sup>Mantivemos aqui a notação padrão do nosso artigo, [64], designando o índice de Tsallis de trabalho principal como  $Q$ . A ligeira alteração não deve ser impedimento para a inteligibilidade do todo.

consistentemente com a termodinâmica,  $[\beta\mathcal{H}_N/N]$  é uma quantidade intensiva. A instrução LDT correspondente para um sistema estocástico binário com  $N$  variáveis aleatórias produzindo  $n$  vezes 0 e  $(N - n)$  vezes 1 diz respeito à probabilidade  $P_N(n/N > z) \in [0, 1]$  da variável aleatória  $n/N$  assumindo valores maiores que um valor fixo  $z \in \mathcal{R}$  para valores cada vez maiores de  $N$ . Sob a hipótese de independência probabilística, ou configurações semelhantes, esperamos  $P_N(n/N > z) \approx e^{-r_1(z)N}$ , onde a função taxa  $r_1$  é igual a uma entropia relativa BG por partícula. Portanto  $r_1(z)N$  desempenha o papel de uma entropia total termodinâmica que, consistentemente com a estrutura de Legendre da termodinâmica clássica, é extensiva, ou seja,  $r_1(z)N \propto N(N \gg 1)$ .

Dentro da MENE (ou  $q$ -estatística), normalmente lidamos com sistemas hamiltonianos de interação de longo alcance, entre outros sistemas fortemente correlacionados. As distribuições associadas de velocidades parecem ser  $q$ -gaussianas com  $q > 1$ , com  $q$  se aproximando da unidade quando o alcance das interações se aproxima do regime de curto alcance. Esses fatos devem ser associados a um  $q$ -Teorema do Limite Central ( $q$ -CLT) que leva, quando  $N \rightarrow \infty$ , a uma convergência para uma distribuição  $q$ -gaussiana. Já existem provas de condições suficientes para o  $q$ -CLT [52] [67] [68], mas as condições necessárias para o  $q$ -CLT ainda permanecem como um desafio.

Dentro da  $q$ -estatística, esperamos que a energia total de um sistema de interação de longo alcance em seu estado estacionário, ou quase estacionário, seja superextensiva, portanto, não proporcional a  $N$ , como é o caso de sistemas interativos de curto alcance. Mais precisamente, esperamos  $p_q \propto e_q^{-\beta_q \mathcal{H}_N}$ , onde  $\mathcal{H}_N$  é um hamiltoniano superextensivo,  $\beta_q$  desempenhando o papel de uma temperatura efetiva inversa ( $\beta_1 = \beta$  corresponde à temperatura cinética inversa usual);  $\beta_q$  difere genericamente de  $\beta$ . Lembramos que  $e_q^z = [1 + (1 - q)z]^{1/(1-q)}$  com  $e_1^z = e^z$ . Para, digamos, interações de dois corpos (atrativas) decaindo como  $1/(\text{distância})^\alpha$  ( $\alpha \in [0, \infty)$ ) dentro de um sistema  $d$ -dimensional, podemos reescrever  $p_q \propto e_q^{-[(\beta_q \tilde{N})(\mathcal{H}_N/N\tilde{N})]N}$  onde  $\tilde{N} = \frac{N^{1-\alpha/d}-1}{1-\alpha/d}$  é, para  $N$  crescentemente grande, constante para  $\alpha/d > 1$  (curto alcance), aumenta como  $N^{1-\alpha/d}$  para  $0 \leq \alpha/d < 1$  (longo alcance) e aumenta como  $\ln N$  para  $\alpha/d = 1$ .

Vamos enfatizar neste ponto que tanto  $(\beta_q \tilde{N})$  quanto  $(\mathcal{H}_N/N\tilde{N})$  são quantidades intensivas. De fato, vamos ilustrar esses fatos focando na seguinte relação para a energia

termodinâmica paradigmática de Gibbs:

$$G(V, T, p, \mu, H, \dots) = U(V, T, p, \mu, H, \dots) - TS(V, T, p, \mu, H, \dots) + pV - \mu N(V, T, p, \mu, H, \dots) + HM(V, T, p, \mu, H, \dots) - \dots, \quad (4.1)$$

onde  $T, p, \mu, H$  são temperatura, pressão, potencial químico, campo magnético externo, e  $U, S, V, N, M$  são energia interna, entropia, volume, número de partículas (por sua vez proporcional ao número de graus de liberdade), magnetização. Dividindo ambos os lados por  $N\tilde{N}$  obtemos:

$$\frac{G(V, T, p, \mu, H, \dots)}{N\tilde{N}} = \frac{U(V, T, p, \mu, H, \dots)}{N\tilde{N}} - \frac{T}{\tilde{N}} \frac{S(V, T, p, \mu, H, \dots)}{N} + \frac{p}{\tilde{N}} \frac{V}{N} - \frac{\mu}{\tilde{N}} - \frac{H}{\tilde{N}} \frac{M(V, T, p, \mu, H, \dots)}{N} - \dots \quad (4.2)$$

Foi profusamente verificado na literatura (ver [13] [69] e referências neles contidas) que todas as grandezas  $G/(N\tilde{N})$ ,  $U/(N\tilde{N})$ ,  $T/\tilde{N}$ ,  $S/N$ ,  $p/\tilde{N}$ ,  $V/N$ ,  $\mu/\tilde{N}$ ,  $H/\tilde{N}$ ,  $M/N$  são termodinamicamente intensivas, no sentido de que, no limite  $N \rightarrow \infty$ , todas elas produzem quantidades finitas, preservando assim a estrutura de Legendre da termodinâmica clássica para ambas interações de curto e longo alcance.

Em seguida, identificamos três classes de variáveis termodinâmicas para todos os valores de  $\alpha/d$ , a saber (i) aquelas que se espera que são sempre extensivas ( $S, V, N, M, \dots$ ), ou seja, escalando com  $N$ , (ii) as que caracterizam as condições externas sob as quais o sistema está colocado ( $T, p, \mu, H, \dots$ ), escalando com  $\tilde{N}$ , e (iii) as correspondentes às energias ( $G, U$ ), escalando com  $N\tilde{N}$ . Para interações de curto alcance (ou seja,  $\alpha/d > 1$ ), essas três classes colapsam nas duas tradicionais (intensiva e extensiva) atualmente indicadas nos livros de termodinâmica.

A contrapartida matemática desejável para tais sistemas seria, obviamente, ter uma  $q$ -Teoria dos Grandes Desvios ( $q$ -LDT) com uma probabilidade correspondente a  $n/N - 1/2 \geq z$  dada por  $P(N, z) \approx e_q^{-r_q(z)N}$ , onde a função de taxa  $r_q(z)$  seria mais uma vez igual a alguma entropia não aditiva relativa por partícula definida por meio de [12]:

$$S_q = k \frac{1 - \sum_i p_i^q}{q - 1}, \quad (q \in \mathbb{R}) \quad (4.3)$$

com  $S_1 = S_{BG} = -k \sum_i p_i \ln p_i$ , sendo  $k$  uma constante positiva convencional (doravante



considerada  $k = 1$ ). Uma notação mais precisa para  $r_q(z)$  seria  $r_{q_r}(z)$ , pois, como veremos a seguir, não há razão para ser  $q_r = q$ ; de fato, em todos os casos não triviais que conhecemos, parece ser  $q_r \neq q$ . No entanto, por simplicidade, manteremos a notação  $r_q$ .

Espera-se que a quantidade  $r_q(z)N$  desempenhe um papel semelhante ao de uma entropia termodinâmica total do sistema que, como mencionado acima, deve ser sempre extensiva, ou seja,  $\propto N$ , ( $N \gg 1$ ). Naturalmente, para unificar todas as situações acima, esperamos  $q = f(Q)$ , sendo  $f(Q)$  uma função suave que satisfaz  $f(1) = 1$ , recuperando assim o usual LDT.

O cenário  $q$ -LDT acima já foi verificado numericamente para um modelo puramente probabilístico com fortes correlações [59] [70] [71], bem como para diversos modelos físicos [72].

## Breves Considerações sobre Precedentes

Nosso trabalho é, como todo aquele produzido dentro de todas as ciências, baseado em esforços precedentes: é o "sobre os ombros de gigantes", ditado latino que é mais conhecido hoje como máxima atribuída a Isaac Newton. Dois foram os artigos fundamentais para a concepção do modelo que vamos abordar: se ele é já bastante desenvolvido por Hanel, Thurner e Tsallis [73] em publicação de 2009, não podemos ignorar a relevância das bases estabelecidas por Rodríguez, Schwämmle e Tsallis [74] em *paper* que veio à luz no ano anterior. Citamos aqui breves resumos sobre os conteúdos dessas obras para a contextualização do leitor: fazer uma recapitulação mais detida seria eminentemente desnecessário, uma vez que os artigos originais estão disponíveis em diversas bases de dados e, além do que, descrever a gênese do nosso modelo em si mesma, com todos os detalhes que lhe são pertinentes, vai além das atribuições que pautam esta dissertação.

Podemos nos perguntar: o que acontece com as propriedades da BG quando as variáveis aleatórias binárias de um dado sistema não são independentes e as correlações entre essas variáveis (espalhadas homoganeamente sobre o sistema) são fortes o suficiente? Em princípio, não há motivo para esperar que a distribuição limitante relevante seja uma gaussiana e a entropia, que é extensiva (ou seja,  $S(N) \propto N$ , quando  $N \gg 1$ ), seja  $S_{BG}$ . O objetivo do artigo de Hanel, Thurner e Tsallis [73] é responder a essas perguntas para uma classe matematicamente intrigante de processos correlacionados - que podem ser interpretados como modelos de campo médio prototípicos - e que, portanto, são relevantes

para sistemas naturais, artificiais e sociais.

Vamos discutir, no âmbito de [73], as  $q$ -gaussianas, que ocorrem frequentemente como generalização de gaussianas, e são definidas como

$$p_q(x) \propto [1 - (1 - q)\beta x^2]^{\frac{1}{1-q}}, \quad p_1(x) = p_{BG}(x)$$

onde  $x \in \mathbb{R}$  para  $q < 3$  (para  $q \geq 3$  a normalização é perdida) e  $x^2 \leq 1/[(1 - q)\beta]$  para  $q < 1$ . Inferimos, do já exposto, que os atratores relativos a um  $q$ -CLT sejam  $q$ -gaussianas. Os autores citam, além disso, a possibilidade de se encontrar  $q$ -gaussianas em (i) soluções paradigmáticas em processos de Langevin não markovianos, ou equações de Fokker-Planck não-lineares homogêneas; (ii) existem sistemas com funções de distribuição (que não são, no geral,  $q$ -gaussianas) dependentes de  $N$  tal que  $S_{BG}$  não é mais extensiva, sendo que  $S_q$  se torna a entropia extensiva para valores específicos de  $q < 1$  indicados por  $q_{ent}$ , ou seja,  $S_{q_{ent}}(N) \propto N$ , ( $N \gg 1$ ) - como é conhecido, para todos os sistemas de muitos corpos cujos hamiltonianos descrevem interações de curto alcance, temos  $q_{ent} = 1$ , ou seja,  $S_{BG}$ , que é idêntico a  $S_1$ , é extensivo; (iii) indicações numéricas para as distribuições de velocidades em estados quasistacionários de hamiltonianos de longo alcance sugerem  $q$ -gaussianas; (iv) uma pletera de evidências experimentais para  $q$ -gaussianas existem em tópicos tão distintos como movimento de células biológicas, turbulência, vento solar, átomos frios em armadilhas ópticas dissipativas, plasma etc.

No artigo [74], estuda-se famílias de entes matemáticos tipo Triângulos de Leibnitz: suas regras de construção, em termos probabilísticos, correspondem a uma forma específica de correlação de  $N$  igualmente prováveis variáveis binárias que satisfazem invariância por escala. Nesse artigo, Rodríguez, Schwämmle e Tsallis observam que as propriedades desse sistema levam a  $q$ -gaussianas como funções de distribuição de probabilidade limitantes com um  $q \leq 1$ , onde a distribuição limitante poderia ser exatamente calculada. O índice  $q$ , no sistema em estudo, caracterizaria a força da correlação. O caso  $q \rightarrow -\infty$  corresponde a variáveis fortemente correlacionadas, fornecendo uma distribuição limitante uniforme.

No artigo em pauta, foi explorado o fato que coeficientes de outro tipo de triângulos foram construídos por  $q$ -gaussianas discretas. Esses triângulos, tendo agora por construção  $q$ -gaussianas com  $q < 1$  como funções de probabilidade limitantes, mostraram um comportamento que depende do modo específico de discretização do intervalo de suporte. Exceto por um caso específico, a regra de Leibnitz, relacionada à invariância da escala do

sistema, é apenas assintoticamente satisfeita. O sistema se aproxima da invariância de escala com uma lei de potência proporcional a  $1/N^2$  para  $N$  grande, exceto pelos coeficientes de borda, onde a convergência para invariância por escala é muito mais lenta, do tipo  $1/N$ . A lei  $1/N^2$  se reduz a  $1/N$  em todo o triângulo ao se considerar  $q$ -gaussianas com  $q \geq 1$ .

A entropia BG permanece extensiva para todos os tipos de triângulos estudados. Modelos mais sofisticados, por exemplo, o modelo de hamiltoniano de campo médio, parecem abordar uma  $q$ -gaussiana caracterizada por um estado estacionário de não equilíbrio, com a  $q$ -entropia possivelmente extensiva para  $q \neq 1$ .

A Regra de Leibnitz fornece uma ferramenta simples para o estudo de modelos compostos de variáveis aleatórias binárias correlacionadas e permite o cálculo exato de suas funções limitantes. Essa regra não pode estar relacionada exclusivamente à termostática não extensiva. De fato, existem triângulos do tipo Leibnitz que levam precisamente a  $q$ -gaussianas (como mostrado no artigo), bem como a outras funções de probabilidade limitantes. O cenário que surge é que a validade assintótica da regra de Leibnitz pode representar uma condição necessária, mas certamente não é suficiente para o sistema tender a  $q$ -gaussianas como distribuições limitantes quando  $N \rightarrow \infty$ .

O fato de que diferentes implementações de correlações entre as variáveis de um sistema podem levar à mesma função ( $q$ -gaussianas em [74]) pode ser visto como uma sugestão dessas funções como sendo atratores para uma variedade de sistemas diferentes e, portanto, apoia a demanda da generalização do Teorema do Limite Central, um  $q$ -CLT. No entanto, para garantir a aplicabilidade desse Teorema do Limite Central, a estabilidade das  $q$ -gaussianas como funções limitantes dos sistemas apresentados no artigo precisaria ser comprovada, seja estabelecendo que as correlações correspondem à  $q$ -independência, ou pela introdução, por exemplo, de perturbações fracas.

Em [74] um modelo específico para variáveis aleatórias binárias correlacionadas efetivamente convergiu para distribuições  $q$ -gaussianas no limite termodinâmico para  $q < 1$ . No entanto, nenhum mecanismo foi dado de como esses modelos podem ser gerados a partir de princípios gerais. Isso foi feito por Hanel, Thurner e Tsallis [73]. Em particular, foi mostrado como o modelo fornecido em [74] pode ser gerado e como, pelo mesmo meio, as distribuições  $q$ -gaussianas podem ser alcançadas para  $1 < q < 3$ .

## Modelo e resultados

No artigo em referência, focamos em um modelo probabilístico invariante por escala introduzido em [73] e baseado no Teorema Laplace-de Finetti para processos estocásticos intercambiáveis. As variáveis aleatórias são binárias (tipo Ising) e podem ser não correlacionadas ( $Q = 1$ ) ou fortemente correlacionadas ( $Q > 1$ ), cada uma delas assumindo os valores 0 e 1. Um microestado específico com  $n$  valores 0 e  $(N - n)$  valores 1 corresponde a  $r_n^N = 1/2^N$  para  $Q = 1$  e a

$$r_n^N = \frac{B\left(\frac{3-Q}{2Q-2} + n, \frac{3-Q}{2Q-2} + N - n\right)}{B\left(\frac{3-Q}{2Q-2}, \frac{3-Q}{2Q-2}\right)} \quad (4.4)$$

para distribuições de cauda longa ( $1 < Q < 3$ ), onde  $B(x, y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x + y)$  é a função Beta de Euler. Neste modelo,  $(Q - 1)$  mede a força das correlações globais e varia de zero a 2. Como um análogo físico, podemos pensar em um ferromagneto clássico XY d-dimensional com spin-1/2 altamente anisotrópico com interações entre dois corpos decaindo como  $1/(\text{distância})^\alpha$ . Esse classe de sistemas se aproxima do ferromagneto de Ising e normalmente corresponde a ímãs com interações XY altamente anisotrópicas de dois corpos na ausência de termos de um corpo, e também a interações XY totalmente isotrópicas de dois corpos, mas tendo, além disso, termos de um corpo altamente anisotrópicos. Então  $Q = 1$  corresponde a  $\alpha/d > 1$ , enquanto  $Q > 1$  é esperado para espelhar sistemas com  $0 < \alpha/d < 1$ . Um caso extremo é o  $\alpha = 0$ , onde todos os spins interagem igualmente fortemente com todos os outros spins do sistema. A distribuição  $Q$ -Gaussiana possivelmente espelharia uma distribuição não Maxwelliana de velocidades. Tais distribuições foram repetidamente observadas em sistemas complexos semelhantes, por exemplo, ferromagnetos XY isotrópico de longo alcance e ferromagnetos de Heisenberg, bem como o modelo Fermi-Pasta-Ulam  $\beta$  de longo alcance.

No presente modelo existem  $N!/n!(N-n)!$  microestados equivalentes ( $n = 0, 1, 2, \dots, N$ ). Consistentemente, temos

$$\sum_{n=0}^N \frac{N!}{n!(N-n)!} r_n^N = 1. \quad (4.5)$$

As quantidades  $r_n^N$  definidas na equação 4.4 satisfazem (ver [73]) a chamada regra do

triângulo de Leibnitz, ou seja,

$$r_n^N + r_{n+1}^N = r_n^{N-1}, \quad (\forall N, \forall n). \quad (4.6)$$

Tais conjuntos de probabilidades também são conhecidos como invariantes de escala, uma vez que sua distribuição em uma dada escala  $N$  pode sempre ser obtida por marginalização probabilística de escalas superiores (correspondente a  $N + 1, N + 2, \dots$ ). Esta propriedade é bastante especial e não deve ser confundida com a chamada "regra de marginalização", que é válida para qualquer distribuição de probabilidades. Um exemplo de distribuição bem definida de  $N$  variáveis aleatórias binárias que viola genericamente a relação 4.6 pode ser visto em [28]. A força da regra do triângulo de Leibnitz pode ser ilustrada pelo fato de que, sob esta hipótese notável, todo o conjunto  $r_n^N, \forall(N, n)$ , pode ser recuperado de forma genérica e unívoca fornecendo apenas, por exemplo, o conjunto  $r_0^N, \forall N$ . A fim de fornecer uma visão mais completa sobre esta questão, vamos esclarecer, no entanto, que se o sistema satisfaz, como no presente modelo, a permutabilidade das variáveis aleatórias, então a regra de marginalização implica a regra do triângulo de Leibnitz.

O atrator  $N \rightarrow \infty$  deste modelo para  $Q$  fixo acaba sendo [73] precisamente uma Q-Gaussiana, o que o torna um caso interessante para verificar seu comportamento LDT.

Vamos revisar brevemente o algoritmo de [73] para construir as distribuições que, no limite  $N \rightarrow \infty$ , fornecem Q-Gaussianas exatas. Nós definimos

$$u_n^N = \frac{(n/N - 1/2)}{\sqrt{(Q-1)(n/N)(1-n/N)}} \quad (4.7)$$

e também

$$\tilde{u}_n^N = \frac{u_n^N}{2 \max_{n=1,2,\dots,N-1} \{u_n^N\}} \quad (4.8)$$

onde  $\max_{n=1,2,\dots,N-1} \{u_n^N\} = \frac{1/2-1/N}{\sqrt{(Q-1)(N-1)/N^2}}$ . Também definimos a largura discreta

$$du_n^N = \frac{[(n/N)(1-n/N)]^{-3/2}}{4(N+1)\sqrt{Q-1}} \quad (4.9)$$

da qual segue a distribuição (não normalizada)

$$F_n^N = \left(du_n^N\right)^{-1} \frac{N!}{n!(N-n)!} r_n^N, \quad (4.10)$$

onde  $r_n^N$  é dado pela Eq. 4.4 e, após a normalização, temos

$$\tilde{F}_n^N = \frac{F_n^N}{\sum_{n=1}^{N-1} F_n^N}. \quad (4.11)$$

Os valores  $n = 0$  e  $n = N$  são excluídos da soma porque esses valores são mapeados para o infinito na Eq. 4.9.  $\tilde{F}_n^N$  é a distribuição que, para  $N \rightarrow \infty$ , é atraída por uma  $Q$ -Gaussiana. Na Fig. 4.1 representamos os dados  $\{(N\tilde{u}_n^N, \tilde{F}_n^N)\}$ , enquanto na Fig. 4.2 os mesmos dados foram plotados em relação a  $\tilde{u}$  para que a distribuição possa ser dada na região  $[-1/2, 1/2]$ . Através do reescalonamento  $\tilde{u} = \sqrt{2N}\tilde{u}$ , pode-se facilmente obter o atrator normalizado  $\tilde{F}_n^N(\tilde{u}) = \sqrt{2N}\tilde{F}_n^N(\tilde{u}) = e^{\tilde{u}^2}$ . A largura discreta na Eq. 4.9 está relacionada com a não equidistância observada entre os pontos da Fig. 4.1.

Agora, no domínio LDT, focamos na probabilidade  $P(N, z) \in [0, 1]$  que é definida como aquela cujos valores de  $F_n^N$  correspondem a  $n/N > 1/2 + z$ . Mais precisamente, é a soma de todos os valores cujo  $\tilde{u} > z$  (ver áreas sombreadas na Fig. 1b). É claro que  $P(N, 0) = 1/2$  e  $P(N, 1/2) = 0$ . Em vista do que foi discutido acima, esperamos verificar numericamente que

$$P(N, z) = P_0(Q, z)e^{-r_q(Q, z)N} \quad (4.12)$$

com  $P_0(Q, 0) = 1/2$ ,  $P_0(Q, 1/2) = 0$  e  $r_q(Q, 0) = 0$ .

Ao ajustar otimamente em relação a  $(q, r_q, P_0)$ , os dados com a Eq. 4.12, encontramos heurísticamente que  $q$  é dado pela composição simples da bem conhecida dualidade aditiva ( $q \rightarrow 2 - q$ ) sobre a dualidade multiplicativa ( $q \rightarrow 1/q$ ) (ver, por exemplo, [28] [75]), ou seja

$$q = 2 - \frac{1}{Q}, \quad (1 \leq Q < 3), \quad (4.13)$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{1}{q-1} = \frac{1}{Q-1} + 1. \quad (4.14)$$

Para variáveis binárias não correlacionadas, temos (de [59] com  $z = x - 1/2$ ) a seguinte entropia relativa BG (com relação a probabilidades iguais)

$$r_1(z) = \ln 2 + \frac{1+2z}{2} \ln \frac{1+2z}{2} + \frac{1-2z}{2} \ln \frac{1-2z}{2} \quad (4.15)$$

$$\sim 2z^2 + \frac{4}{3}z^4, \quad (z \rightarrow 0), \quad (4.16)$$

portanto  $r^1(z) \in [0, \ln 2]$ . De forma mais geral, para variáveis binárias fortemente correlacionadas, temos (de [59])

$$r_q(z) = \frac{1}{q_r - 1} \left\{ \frac{1}{2} [(1+2z)^{q_r} + (1-2z)^{q_r}] - 1 \right\} \quad (4.17)$$

$$\sim 2q_r z^2 + \frac{2}{3}(3 - q_r)(2 - q_r)q_r z^4, \quad (z \rightarrow 0), \quad (4.18)$$

onde usamos  $p = 1/2 + z$  e  $1 - p = 1/2 - z$  na expressão 4.3, adotando como distribuição de referência o caso de igual probabilidade. Segue que  $r_q(z) \in [0, \ln_{2-q_r} 2]$ , e verificamos que  $r_q(z)$  recupera  $r_1(z)$  para  $q_r \rightarrow 1$ .

Através do ajuste otimizado, encontramos heurísticamente a seguinte relação

$$q_r = \frac{7}{10} + \frac{6}{10} \frac{1}{Q-1}, \quad (1 < Q < 3). \quad (4.19)$$

Este resultado foi obtido fazendo  $z$  variar tipicamente até 0,17 para diversos valores de  $Q$ , o que garante a verificação do termo dominante na Eq. 4.18. Se pudéssemos verificar numericamente até  $z = 1/2$ , poderíamos garantir a expressão completa 4.17, mas isso permanece fora de nossa atual capacidade computacional.

A determinação numérica de  $P_0(Q, z)$  é muito mais difícil do que a de  $(q, q_r)$ . No entanto, apenas como uma simples indicação, comparamos os dados numéricos com

$$P_0(Q, z) = 1/4 + az^u + a(1/2 - z)^u, \quad (0 \leq z \leq 1/2), \quad (4.20)$$

onde  $a = 2^u/4$  para satisfazer as condições  $P_0(Q, 0) = 1/2$ ,  $P_0(Q, 1/2) = 0$ . Esta forma particular foi proposta heurísticamente como uma ilustração simples; ela satisfaz  $P_0(Q, z) = P_0(Q, 1/2 - z)$ , exibindo assim um ponto de inflexão em  $z = 1/4$  que foi sugerido pela exploração numérica (veja a caixa da Fig. 4.6). No entanto, vamos enfatizar aqui que os valores numéricos precisos de  $P_0$  (bem como sua expressão analítica exata desconhecida) não têm relevância particular. Eles desempenham, de fato, um papel bastante menor na conjectura 4.12, em completa semelhança com o pré-fator correspondente no LDT padrão.

Como pode ser visto nas Figs. 4.3, 4.4, 4.5, 4.6 e 4.7, fortes evidências numéricas apoiam a conjectura na Eq. 4.12 com as relações 4.13, 4.17, 4.19 e 4.20. Vamos enfatizar que a função de taxa  $r_q$  produz uma entropia total extensiva (relativa)  $r_q N$  para todos os valores de  $Q \in [1, 3)$ , conforme exigido pela estrutura de Legendre da termodinâmica. No entanto, o índice entrópico correspondente não é  $q(Q)$ , mas um diferente, ou seja,  $q_r(Q)$ . Permanece em aberto se este é o caso genérico, ou antes uma exceção associada ao presente modelo específico. O fato de surgirem três índices entrópicos diferentes, a saber  $(Q, q, q_r)$ , não é particularmente surpreendente, dada a álgebra de Moëbius que caracteriza a estatística  $q$  (ver [28] [30] e referências). Outro ponto que merece destaque diz respeito ao fato de que existem infinitas classes de distribuição que são assintoticamente leis de potência, para  $N \gg 1$ . Entretanto, apenas uma dessas infinitas formas funcionais é a  $q$ -exponencial. Todas essas leis de potência diferem definitivamente na região não assintótica, isto é, para valores relativamente baixos de  $N$ , digamos  $N \sim 50, 100$ . Esta é a razão pela qual atenção numérica especial foi aqui dedicada àquela região de  $N$ . As evidências que foram alcançadas apontam fortemente a favor precisamente da forma  $q$ -exponencial.

Nas figuras 4.1 e 4.2 temos, distribuições  $F_n^N$  dadas a partir de valores de  $N$  representativos. As linhas pontilhadas são referentes a  $Q$ -gaussianas ( $\propto e_Q^{-2Nu^2}$ ), e a soma de cada conjunto de pontos é igual à unidade.



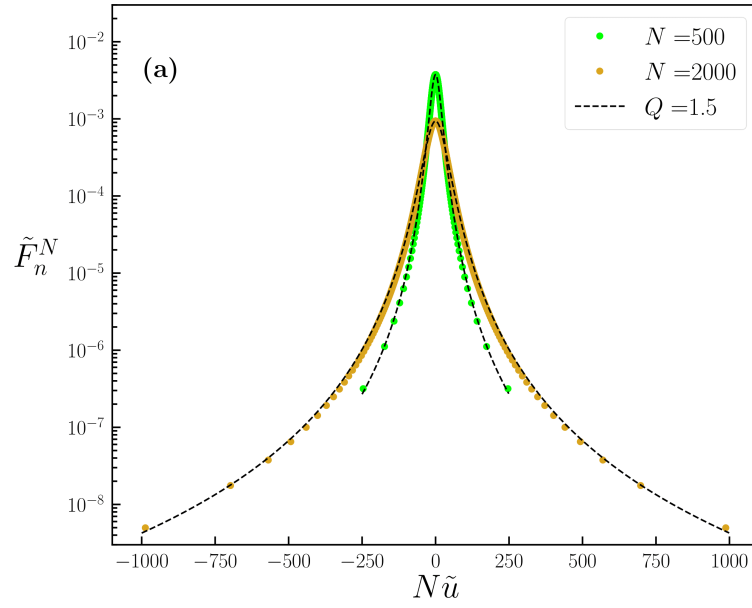


Figura 4.1: A distribuição  $\tilde{F}_n^N$  é representada como uma função  $N\tilde{u} \in [-N/2, N/2]$ .

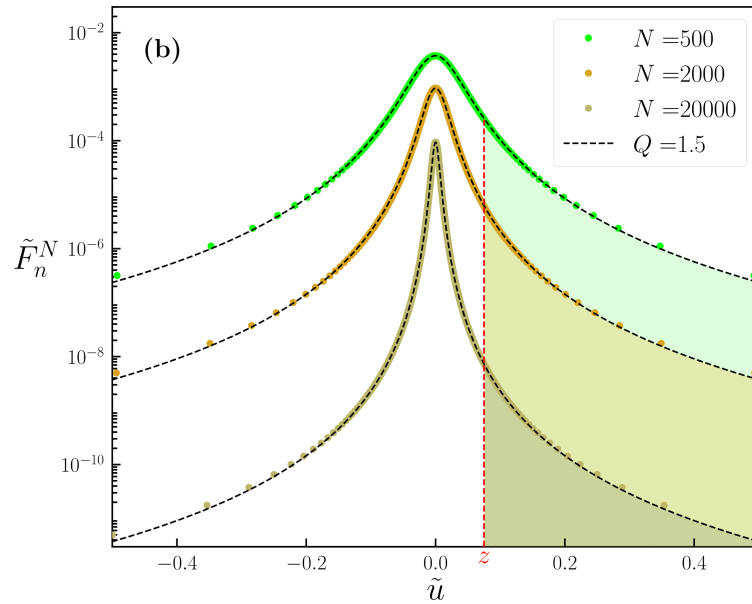


Figura 4.2: A distribuição  $\tilde{F}_n^N$  é representada como uma função de  $\tilde{u} \in [-1/2, 1/2]$ . Um valor arbitrário de  $z \in [0, 1/2]$  é indicado.

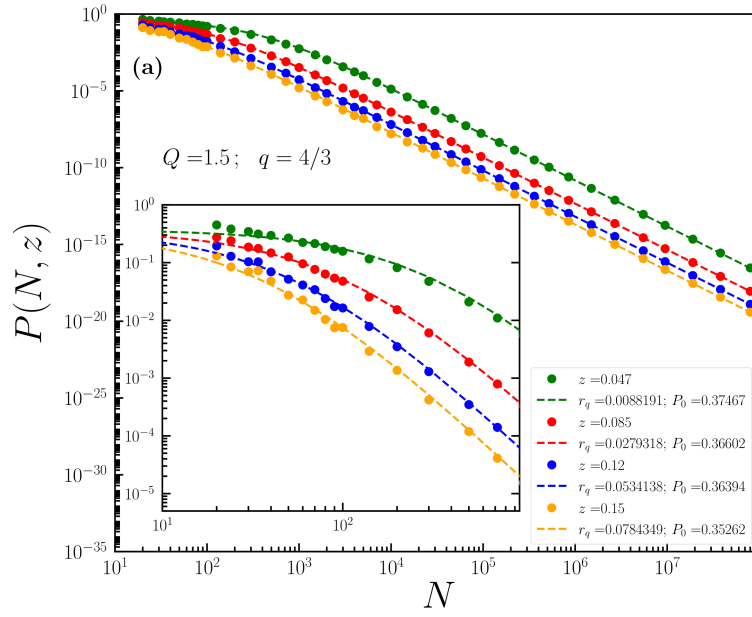


Figura 4.3:  $P(N, z)$  para  $Q = 1, 5$  na representação log – log.

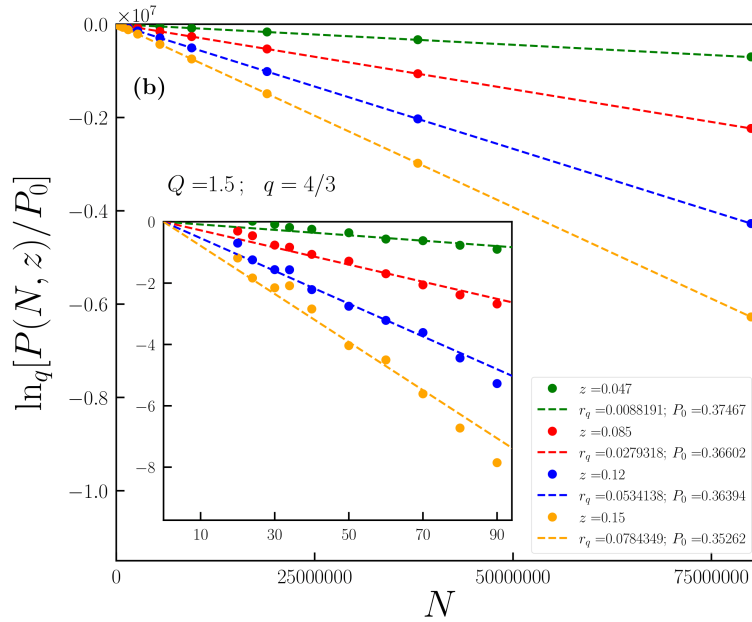


Figura 4.4:  $P(N, z)$  para  $Q = 1, 5$  na representação  $q - \log$ .

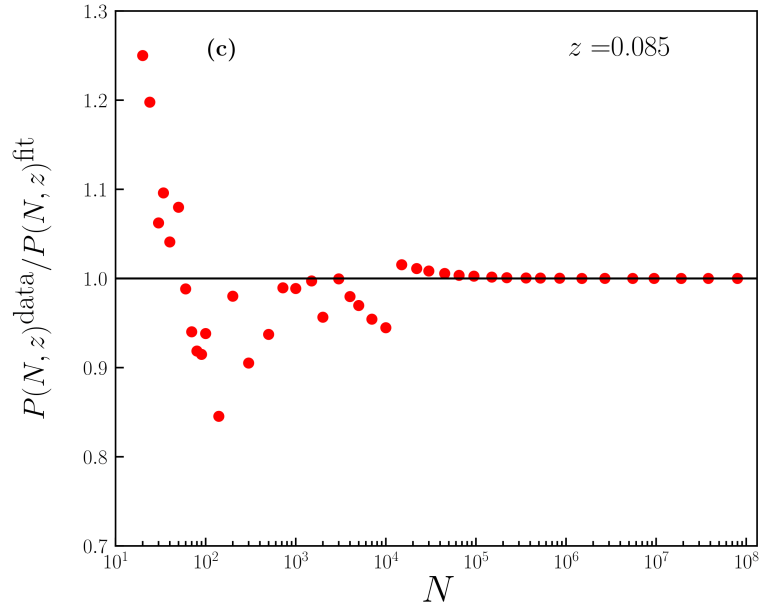


Figura 4.5:  $P(N, z)$  para  $Q = 1, 5$  na representação de razão.

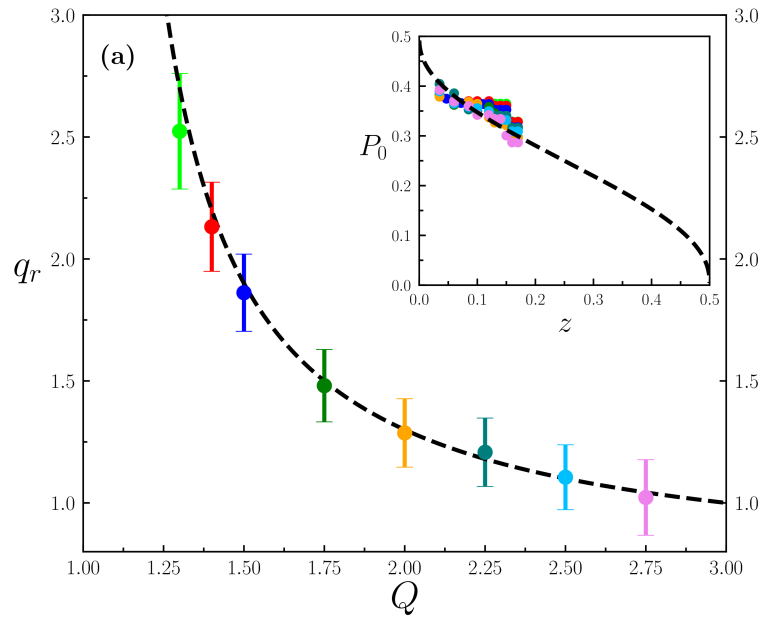


Figura 4.6: Plot de  $q_r$  versus  $Q$ . Os pontos foram obtidos através da otimização do *fitting* de  $P(N, z)$  com respeito a  $(P_0, q_r)$  para valores típicos de  $Q$  e valores  $z \in [0, 0035, 0, 17]$ . A linha pontilhada é a conjectura dada na equação 4.19. Para cada valor de  $z$  obtemos, através da otimização do *fitting*, um valor de  $q_r$ . Na caixa vemos  $P_0$  versus  $z$  para todos os valores de  $Q$  vistos na figura - as linhas pontilhadas são dadas pela equação 4.20 com o valor ilustrativo de  $u = 0, 4$ .

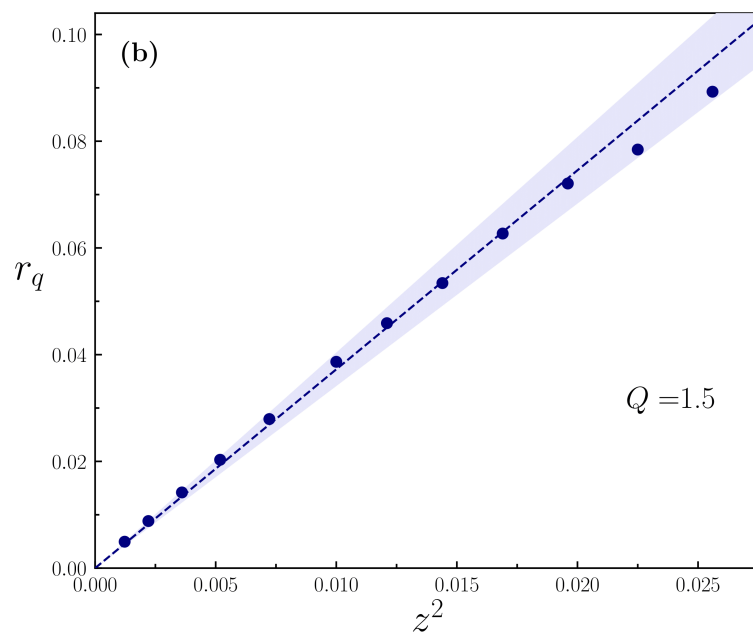


Figura 4.7: Valores  $r_q$  calculados a partir da equação 4.17 plotados em função de  $z^2$  para um valor de  $Q$  representativo. A região sombreada indica o intervalo consistente com as barras de erro de  $q_r$  para esse valor de  $Q$ .

# Conclusão

Esta dissertação teve como objetivo ser uma memória de meu curso de mestrado, uma compilação dos tópicos que qualquer estudante dos temas em pauta poderia consultar de modo a se informar com o objetivo de travar conhecimento com as temáticas em apreço, especialmente as extrapolações do CLT e da LDT para a  $q$ -estatística.

Parafraseando nosso artigo [64], concluímos lembrando que nosso objetivo foi abordar em nosso trabalho, dentro de um contexto mais geral, as impressões digitais da Mecânica Estatística de Boltzmann-Gibbs, ou seja, a distribuição Maxwelliana de velocidades e o peso exponencial BG para as energias. De fato, no reino das estatísticas  $q$  baseadas em entropias não aditivas, uma distribuição  $Q$ -Gaussiana emerge para as velocidades e um peso  $q$ -exponencial surge para as energias, com  $Q \geq q \geq 1$ , as igualdades válidas precisamente para a teoria BG. Essas considerações devem refletir, respectivamente, as generalizações correspondentes do Teorema do Limite Central e da Teoria dos Grandes Desvios clássicos.

Em nosso *paper*, foi possível discutir numericamente (com precisão satisfatória em alguns casos) (i) A  $(Q, z)$ -dependência do pré-fator  $P_0(Q, z)$  (esta é a primeira vez que tal pré-fator foi abordado na literatura de sistemas complexos); (ii) A possível identificação da função de taxa  $r_q(z)$  com uma entropia relativa não aditiva cujo índice é  $q_r$ , definitivamente diferente do índice  $q$  (uma possibilidade que nunca foi tratada antes) [uma identificação numérica definitiva de  $r_q(z)$  com a  $q_r$ -entropia para toda a faixa de  $z$  não foi possível porque nossa atual capacidade computacional não nos permite aumentar  $z$  até  $z = 1/2$ ; ainda assim, a discussão para  $z = 0$  nunca foi realizada antes]; (iii) A  $Q$ -dependência  $q_r(Q)$  conforme indicado na Eq. 4.19, que inclui uma singularidade inesperada em  $Q = 1$ . Esta dependência de  $q_r(Q)$  só se tornou acessível devido ao fato matemático de toda a informação necessária já estar disponível no primeiro termo assintótico, nomeadamente no termo quadrático de  $r_q(z)$  em função de  $z$ , conforme apresentado

na Eq. 4.18. Até onde sabemos, os três pontos acima nunca foram alcançados simultaneamente para qualquer modelo não trivial. Por último, mas não menos importante, usualmente os valores de  $(Q, q)$  apresentados em outras obras são numéricos, enquanto no artigo em apreço obtivemos expressões analíticas para  $Q$  real arbitrário maior do que 1.

Na linha dos resultados promissores aqui apresentados, abordagens analíticas (ou abordagens numéricas de altíssima precisão) seriam naturalmente muito bem-vindas, seja para os modelos específicos estudados em [64] ou outros, ou na forma ambiciosa de um  $q$ -teorema generalizado para grandes desvios baseado, digamos, em um  $q$ -Teorema do Limite Central generalizado para uma importante classe de variáveis aleatórias fortemente correlacionadas, que frequentemente emerge em física, geofísica, astrofísica, economia, entre outras áreas. Um fascinante campo de pesquisa aparentemente existe na encruzilhada da Teoria dos Grandes Desvios e entropias não aditivas como  $S_q$ . Uma vez que  $S_q$  está na base da mecânica estatística não extensiva, tais contribuições naturalmente permitiriam uma compreensão mais profunda da estrutura matemática desta generalização atual da teoria de Boltzmann-Gibbs. O artigo de Zamora e Tsallis [76] generaliza o nosso [64]: o tema principal desta dissertação abriu portas para tópicos ainda mais abrangentes, o que deixa patente sua relevância para a ciência e para este ramo da Física em particular.

Em  $q$ -estatísticas, como já citado aqui, novos conceitos como o  $q$ -tripleto aparecem. Não existe tal estrutura complexa na teoria de Boltzmann-Gibbs, onde, genericamente, um valor único para  $q$  é admissível, ou seja,  $q = 1$ . Os vários valores dos índices  $(Q, q(Q), q_r(Q))$  que emergem no presente modelo, juntamente com mais um [73] ( $q_{\text{entropia}} = 1, \forall Q$ ), correspondente ao índice do funcional entrópico  $S_{q_{\text{entropia}}}(N)$  que, para o presente sistema estocástico intercambiável, é termodinamicamente extensiva, ou seja,  $S_{q_{\text{entropia}}}(N) \propto N$  para  $N \rightarrow \infty, \forall Q$ , ainda não estão totalmente elucidados. Esta rica questão ainda permanece como um problema de pesquisa não trivial e intrigante em aberto.

# Referências Bibliográficas

- [1] PERROT, P. *A to Z of Thermodynamics*. Oxford: Oxford University Press, 1998.
- [2] SEARS, F. W.; SALINGER, G. L. *Termodinâmica, Teoria Cinética e Termodinâmica Estatística*. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1979.
- [3] CALLEN, H. B. *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*. New York: John Wiley & Sons, 1985.
- [4] PEDRON, I. T. *Integrais, Equações Diferenciais e Entropia de Tsallis*. Maringá: Dissertação de Mestrado, UEM, 1999.
- [5] GREINER, W.; NEISE, L.; STÖCKER, H. *Thermodynamics and Statistical Mechanics*. New York: Springer, 1997.
- [6] GIBBS, J. W. *Elementary Principles in Statistical Mechanics: Developed with Special Reference to the Rational Foundation of Thermodynamics*. New York: Scribner's Sons, 1902.
- [7] TSALLIS, C. Thermodynamics is more powerful than the role to it reserved by boltzmann-gibbs statistical mechanics. *Encyclopedia*, v. 2, p. 264–300, 2022.
- [8] ALMEIDA, F. A. G. de. *Introdução à Física Estatística*. São Cristóvão: Universidade Federal de Sergipe, CESAD, 2012.
- [9] TSALLIS, C.; CIRTO, L. J. L. Thermodynamics is more powerful than the role to it reserved by boltzmann-gibbs statistical mechanics. *The European Physical Journal Special Topics*, v. 223, n. 11, p. 2161–2175, 2014.
- [10] EDDINGTON, A. S. *The Nature of the Physical World*. New York: The Macmillan Company, 1929.

- [11] SALINAS, S. R. A. *Física estatística*. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1999.
- [12] TSALLIS, C. Possible generalization of boltzmann-gibbs statistics. *Journal of Statistical Physics*, n. 52, p. 479–487, 1988.
- [13] TSALLIS, C. *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics: Approaching a Complex World*. New York: Springer, 2022.
- [14] CURADO, E. M. F.; TSALLIS, C. Generalized statistical mechanics: connection with thermodynamics. *J. Phys. A*, v. 24, n. 2, p. L69–L72, 1991.
- [15] PENROSE, O. *Foundations of Statistical Mechanics: A Deductive Treatment*. Oxford: Pergamon, 1970.
- [16] RÉNYI, A. On measures of information and entropy. *Proceedings of the fourth Berkeley Symposium on Mathematics, Statistics and Probability*, p. 547–561, 1961.
- [17] CIRTO, L. J. L. *Mecânica Estatística Não Extensiva e Sistemas Hamiltonianos de Longo Alcance e Aplicações Recentes de Entropias Não Aditivas*. Rio de Janeiro: Tese de Doutorado, CBPF, 2016.
- [18] MARIZ, A. M. On the irreversible nature of the tsallis and renyi entropies. *Phys. Lett. A*, v. 165, n. 5-6, p. 409–411, 1992.
- [19] PLASTINO, A. R.; PLASTINO, A. Tsallis'entropy, ehrenfest theorem and information theory. *Phys. Lett. A*, v. 177, n. 3, p. 177–179, 1993.
- [20] CACERES, M. O. Irreversible thermodynamics in the framework of tsallis entropy. *Phys. A*, v. 218, n. 3-4, p. 471–481, 1995.
- [21] CHAME, V.; MELLO, E. V. L. D. The onsager reciprocity relations within tsallis statistics. *Phys. Rev. Lett. A*, v. 228, n. 3, p. 159–163, 1997.
- [22] ENCISO, A.; TEMPESTA, P. Uniqueness and characterization theorems for generalized entropies. *J. Stat. Mech.*, p. 123101, 2017.
- [23] WATANABE, S. *Knowing and Guessing*. New York: Wiley, 1969.



- [24] BARLOW, H. Conditions for versatile learning, helmholtz's unconscious inference, and the task of perception. *Vis. Res.*, v. 30, n. 11, p. 1561–1571, 1990.
- [25] TSALLIS, C. Nonadditive entropy and nonextensive statistical mechanics -an overview after 20 years. *Brazilian Journal of Physics*, v. 102, n. 43, p. 15377–15382, 2009.
- [26] TSALLIS, C. Dynamical scenario for nonextensive statistical mechanics. *Physica A*, v. 340, n. 1-3, p. 1–10, 2004.
- [27] BURLAGA, L. F.; VINAS, A. F. Triangle for the entropic index  $q$  of non-extensive statistical mechanic observed by voyager 1 in the distant heliosphere. *Phys. A*, v. 361, n. 1, p. 173–179, 2005.
- [28] TSALLIS, C.; GELL-MANN, M.; SATO, Y. Asymptotically scale-invariant occupancy of phase space makes the entropy  $s_q$  extensive. *Proc. Natl. Acad. Sc. USA*, v. 102, n. 43, p. 15377–15382, 2005.
- [29] TSALLIS, C. Statistical mechanics for complex systems: on the structure of  $q$ -triplets, in physical and mathematical aspects of symmetries. *Proceedings of the 31st International Colloquium in Group Theoretical Methods in Physics*, p. 51–60, 2017.
- [30] GAZEAU, J. P.; TSALLIS, C. Moebius transforms, cycles and  $q$ -triplets in statistical mechanics. *Entropy*, v. 21, n. 12, 2019.
- [31] BORGES, E. P. A possible deformed algebra and calculus inspired in nonextensive thermostatics. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, v. 340, n. 1-3, p. 95–101, 2004.
- [32] NIVANEN, L.; MÉHAUTÉ, A. L.; WANG, Q. A. Generalized algebra within a nonextensive statistics. *Reports on Mathematical Physics*, v. 52, n. 3, p. 437–444, 2003.
- [33] ABE, S. Axioms and uniqueness theorem for tsallis entropy. *Physics Letters A*, v. 271, n. 1-2, p. 74–79, 2000.
- [34] FISCHER, H. *A History of the Central Limit Theorem: From Classical to Modern Probability Theory*. New York: Springer, 2011.
- [35] PÓLYA, G. Über den zentralen grenzwertsatz der wahrscheinlichkeitsrechnung und das momentenproblem. *Mathematische Zeitschrift*, n. 8, p. 171–181, 1920.

- [36] CHEBYSHEV, P. L. Sur deux théorèmes relatifs aux probabilités. *Zapiski Akademii Nauk*, n. 55, p. 305–315, 1887.
- [37] MISES, R. V. Fundamentalsätze der wahrscheinlichkeitsrechnung. *Mathematische Zeitschrift*, n. 4, p. 1–97, 1919.
- [38] NEKRASOV, P. A. Obshchie svoistva massovykh nezavimimykh yavlenii v svyazi s priblizhennym vychicleniem funksii vesma bolshikh chisel. *Matematicheskii Sbornik*, n. 20, p. 431–442, 1898.
- [39] BERNSHTEIN, S. N. Sur le théorème limite du calcul des probabilités. *Mathematische Annalen*, n. 85, p. 237–241, 1922.
- [40] BERNSHTEIN, S. N. Sur l'extension du théorème limite du calcul des probabilités aux sommes des quantités dépendantes. *Mathematische Annalen*, n. 97, p. 1–59, 1926.
- [41] LÉVY, P. *Calcul des probabilités*. Paris: Gauthier–Villars, 1925.
- [42] LINDBERG, J. W. Über das gauss'sche fehlergesetz. *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, n. 5, p. 217–234, 1922.
- [43] LINDBERG, J. W. Eine neue herleitung des exponentialgesetzes in der wahrscheinlichkeitsrechnung. *Mathematische Zeitschrift*, n. 15, p. 211–225, 1922a.
- [44] MARKOV, A. A. Recherches sur un cas remarquable d'épreuves dépendantes. *Acta mathematica*, n. 33, p. 87–104, 1910.
- [45] LYAPUNOV, A. M. Sur une proposition de la théorie des probabilités. *Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg*, v. 5, n. 13, p. 359–386, 1900.
- [46] LYAPUNOV, A. M. Sur un théorème du calcul des probabilités. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences de Paris*, n. 132, p. 126–128, 1901a.
- [47] LYAPUNOV, A. M. Nouvelle forme du théorème sur la limite de probabilité. *Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg VIIIe Série, Classe Physico-Mathématique*, n. 12, p. 1–24, 1901b.

- [48] LYAPUNOV, A. M. Une proposition générale du calcul des probabilités. *Comptes rendus hebdomadaires de l' Académie des Sciences de Paris*, n. 132, 1901c.
- [49] KAC, M. *Enigmas of Chance. An Autobiography*. Berkeley: University of California Press, 1985.
- [50] GNEDENKO, B. V.; KOLMOGOROV, A. N. *Limit Distributions of Sums of Independent Random Variables*. New York: Wiley, 1949.
- [51] LYOTARD, J. F. *The Postmodern Condition*. Manchester: Manchester University Press, 1984.
- [52] UMAROV, S.; TSALLIS, C.; STEINBERG, S. On a  $q$ -central limit theorem consistent with nonextensive statistical mechanics. *Milan Journal of Mathematics*, v. 76, n. 1, p. 307–328, 2008.
- [53] VLADIMIROV, V. S. *Generalized Functions in Mathematical Physics*. New York: MIR, 1979.
- [54] UMAROV, S.; TSALLIS, C. Multivariate generalizations of the  $q$ -central limit theorem. 2007.
- [55] MÜLLER, G. H. *Uma Introdução aos Grandes Desvios*. Porto Alegre: Dissertação de Mestrado, UFRS, 2016.
- [56] DURRETT, R. *Probability: theory and examples*. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.
- [57] JÁUREGUÍ, M. *Grandes Desvios e Independência Assintótica em Sistemas Fortemente Correlacionados*. Rio de Janeiro: Tese de Doutorado, CBPF, 2015.
- [58] ROCKAFELLAR, R. T. *Convex Analysis*. Princeton: Princeton University Press, 1997.
- [59] RUIZ, G.; TSALLIS, C. Towards a large deviation theory for strongly correlated systems. *Phys. Lett. A*, v. 376, n. 36, p. 2451–2454, 2012.
- [60] TOUCHETTE, H. The large deviation approach to statistical mechanics. *Phys. Rep.*, n. 478, p. 1–69, 2009.

- [61] BERGERON, H. et al. Symmetric generalized binomial distributions. *J. Math. Phys.*, v. 54, n. 12, p. 123301, 2013.
- [62] BERGERON, H. et al. Symmetric deformed binomial distributions: an analytical example where the boltzmann-gibbs entropy is not extensive. *J. Math. Phys.*, v. 57, n. 2, p. 023301, 2016.
- [63] RUIZ, G.; TSALLIS, C. Emergence of  $q$ -statistical functions in a generalized binomial distribution with strong correlations. *J. Math. Phys.*, v. 56, n. 5, p. 053301, 2015.
- [64] TIRNAKLI, U.; MARQUES, M.; TSALLIS, C. Entropic extensivity and large deviations in the presence of strong correlations. *Physica D*, v. 431, p. 133132, 2022.
- [65] REIF, F. *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*. Long Grove: Waveland Press, 2008.
- [66] PATHRIA, R. K.; BEALE, P. D. *Statistical Mechanics*. New York: Academic Press, 2011.
- [67] UMAROV, S. et al. Generalization of symmetric  $\alpha$ -stable lévy distributions for  $q > 1$ . *J. Math. Phys.*, v. 51, n. 3, 2010.
- [68] HAHN, M. G.; JIANG, X. X.; UMAROV, S. On  $q$ -gaussians and exchangeability. *J. Phys. A*, v. 43, n. 16, 2010.
- [69] TSALLIS, C.; CIRTO, L. J. L. Black hole thermodynamical entropy. *Eur. Phys. J. C*, v. 73, n. 7, p. 2487, 2013.
- [70] TOUCHETTE, H. Comment on towards a large deviation theory for strongly correlated systems. *Phys. Lett. A*, v. 377, n. 5, p. 436–438, 2013.
- [71] RUIZ, G.; TSALLIS, C. Reply to comment on towards a large deviation theory for strongly correlated systems. *Phys. Lett. A*, v. 377, n. 6, p. 491–495, 2013.
- [72] TIRNAKLI, U.; TSALLIS, C.; AY, N. Approaching a large deviation theory for complex systems. *Nonlinear Dyn.*, v. 106, p. 2537, 2021.
- [73] HANEL, R.; THURNER, S.; TSALLIS, C. Limit distributions of scale-invariant probabilistic models of correlated random variables with the  $q$ -gaussian as an explicit example. *Eur. Phys. J. B*, v. 72, n. 2, p. 263–268, 2009.

- [74] RODRÍGUEZ V. SCHWÄMMLE, C. T. A. Strictly and asymptotically scale invariant probabilistic models of  $n$  correlated binary random variables having  $q$ -gaussians as  $n \rightarrow \infty$  limiting distributions. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, n. 9, p. 1–20, 2008.
- [75] MOYANO, L. G.; TSALLIS, C.; GELL-MANN, M. Numerical indications of a  $q$ -generalised central limit theorem. *Europhysics Letters (EPL)*, v. 73, n. 6, p. 813–819, 2006.
- [76] ZAMORA, D. J.; TSALLIS, C. Probabilistic models with nonlocal correlations: Numerical evidence of  $q$ -large deviation theory. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 608, n. 1, p. 128275, 2022.

*Ad Astra Per Aspera*