

Dissertação de Mestrado

**Radioatividade de dois prótons e sua
distribuição angular**

Henrique Sérgio Davidovich

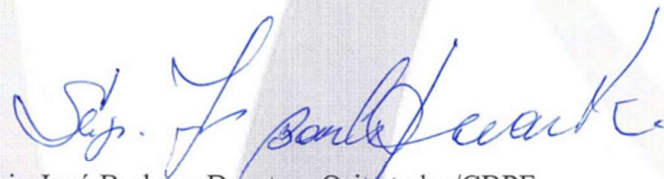
Orientador: Sérgio José Barbosa Duarte

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF)
Rio de Janeiro, abril de 2023

“RADIOATIVIDADE DE DOIS PRÓTONS E SUA DISTRIBUIÇÃO
ANGULAR”

HENRIQUE SÉRGIO DAVIDOVICH

Dissertação de Mestrado em Física apresentada no
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do
Ministério da Ciência Tecnologia e Inovação.
Fazendo parte da banca examinadora os seguintes
professores:



Sérgio José Barbosa Duarte – Orientador/CBPF



Arturo Rodolfo Samana - UESC



Jesús Lubián Ríos – UFF

Dedicatória

Aos meus pais, Helio Davidovich (1932-2013) e
Marly Ribeiro Davidovich (1933-2023), in memoriam

Agradecimentos

Agradeço inicialmente à Comissão Nacional de Energia Nuclear (CNEN) por ter concedido liberação parcial da minha carga horária de trabalho para que eu pudesse fazer o Mestrado em Física, com especialização em Física Nuclear. Espero que a aplicação dos conhecimentos adquiridos no curso recompense a CNEN pela dispensa.

Agradeço depois a todos os meus professores no CBPF, em particular ao orientador Prof. Sérgio Duarte por tudo que me ensinou e pelo seu trabalho incansável para fazer esta dissertação ficar pronta. Estendo esses agradecimentos a todos os funcionários do CBPF, servidores ou terceirizados, que indiretamente contribuíram para este resultado.

Por fim, agradeço à minha sobrinha Marcela Davidovich pelos ensinamentos sobre o programa de desenho gráfico Inkscape, que também se revelaram imprescindíveis à conclusão do trabalho.

Resumo

Na presente dissertação, focamos no estudo do processo de distribuição angular da radioatividade de dois prótons, fenômeno físico que é a emissão de simultânea de dois prótons que ocorre em certos núclídeos deficientes em nêutrons. Os dados da probabilidade dos ângulos formados entre os dois prótons até agora só foram medidos para o ^{45}Fe e o ^{54}Zn . Desenvolvemos uma proposta teórica para esclarecimento dos dados obtidos em experimentos realizados, com resultados bastante razoáveis dadas a escassez e precariedade estatística dos eventos observados. O estudo foi construído com base na análise dos limites cinemáticos do regime assintótico de propagação dos dois prótons emitidos e de considerações na pré-formação do sistema núcleo-filho + 2p. No processo de pré-formação considera-se a hipótese de uma oscilação para o movimento relativo dos dois prótons, transversal ao movimento radial do centro de massa dos mesmos. Considera-se que a pré-formação acontece na atmosfera do meio nuclear, onde a interação de emparelhamento para os dois prótons de valência do núcleo-pai é dominante. Ao estado de oscilação do movimento relativo é atribuída o aspecto gaussiano para a função de onda associada a este grau de liberdade, introduzido na pré-formação do “dipróton”. Atribuímos a característica de estados coerentes da mecânica quântica aos prótons em decaimento pelo menos na sua formação, acontecendo na atmosfera do meio nuclear.

Abstract

In the present dissertation, we focus on the study of the process of angular distribution of two-proton radioactivity, a physical phenomenon that is the simultaneous emission of two protons that occurs in certain neutron-deficient nuclides. Data on the probability of the angles formed between the two protons so far have only been measured for ^{45}Fe and ^{54}Zn . We developed a theoretical proposal to clarify the data obtained in experiments carried out, with very reasonable results given the scarcity and statistical precariousness of the observed events. The study was constructed based on the analysis of the kinematic limits of the asymptotic regime of propagation of the two emitted protons and considerations in the pre-formation of the (nucleus-daughter + 2p) system. In the pre-formation process, the hypothesis of an oscillation is considered for the relative movement of the two protons, transverse to the radial movement of their center of mass. Preformation is considered to take place in the atmosphere of the nuclear medium, where the pairing interaction for the two valence protons of the parent nucleus is dominant. The oscillation state of the relative movement is assigned the Gaussian aspect for the wave function associated with this degree of freedom, introduced in the pre-formation of the “diproton”. We attribute the characteristic of coherent states of quantum mechanics to decaying protons at least in their formation, happening in the atmosphere of the nuclear medium.

Índice

Dedicatória.....	3
Agradecimentos.....	4
Resumo.....	5
Abstract.....	6
Índice.....	7
1. Introdução.....	9
1.1. Núcleos exóticos.....	9
2. Status experimental e teórico do tema.....	12
2.1. Análise experimental e laboratórios envolvidos com o tema.....	12
2.1.a. Pequeno histórico.....	12
2.1.b. Laboratórios no mundo.....	15
2.2. Modelos teóricos para a emissão de prótons em núcleos fracamente ligados.....	16
3. O modelo efetivo da gota líquida (ELDM) e o tunelamento do dipróton.....	18
3.1. O ELDM em sua generalidade.....	18
3.2. Meias-vidas de um e dois prótons no ELDM.....	24
4. Distribuição angular de dois prótons no ELDM.....	28
4.1. Análise dos dados experimentais das distribuições angulares observadas.....	28
4.2. Considerações sobre a pré-formação do dipróton.....	35
4.3. Vínculos cinemáticos definidores do ângulo de saída do do par de prótons.....	36

4.4. Aspectos quânticos que originam a distribuição angular na nossa proposta.....	40
4.5. Determinação final da distribuição do ângulo entre os dois prótons emitidos.....	44
5. Resultados, conclusões e perspectivas.....	47
5.1. Resultados do nosso modelo.....	47
5.2. Conclusões e perspectivas.....	51
Referências.....	53
Apêndice.....	56

Capítulo 1

Introdução

1.1. Núcleos exóticos

De acordo com cômputo de 2023, até o final do ano de 2022 já haviam sido descobertos experimentalmente 3338 núclídeos [1], dos cerca de 7000 previstos pela teoria. De todos esses, apenas 288 são estáveis ou praticamente estáveis (de meia-vida maior que a duração esperada para o sistema solar) [2]. Estes 288 núclídeos formam, na carta de núclídeos, o chamado “vale da estabilidade” (veja Fig. 1.1). Indo além desse vale, acrescentando nucleons, entramos em um vasto território apenas parcialmente explorado, o dos núcleos radioativos de meia-vida curta, que se desintegram de diversas formas. A existência nuclear termina nas duas linhas de gotejamento (*drip lines*), de prótons ou de nêutrons, onde não existe mais energia de ligação para evitar que os últimos nucleons escapem do núcleo.

A curva delineada pela faixa definida pelo vale da estabilidade também é conhecida por *linha da estabilidade β* . Se nos afastamos muito desta linha, aproximando-nos das linhas de gotejamento, entramos na região de núcleos ricos em prótons ou nêutrons. Os núclídeos desta região são muito instáveis e têm meia-vida da ordem de milissegundos ou menos; recebem a denominação geral de *núcleos exóticos*.

Esses núcleos exóticos são objeto de grande interesse na atualidade, e seu estudo começou apenas por volta de 1985. Do ponto de vista da física nuclear fundamental, um dos objetivos é conhecer a sua estrutura, o que já nos revelou grandes surpresas. O caso mais emblemático é o do lítio-11, com sua estrutura borromeana e halo de dois nêutrons [4].

Núcleos exóticos também são importantes na compreensão de certos processos de nucleossíntese estelar e em máquinas conhecidas pela sigla AdS (de *Accelerator driven System*), transmutadoras de elementos radioativos e que pertencem à engenharia nuclear de um futuro próximo. Em astrofísica nuclear, destacamos o processo-p e correlatos, responsáveis pela formação

de núcleos ricos em prótons em explosões de supernovas e halos de agregação de matéria em sistemas binários de nêutrons e de anãs brancas [5].

Em nossa dissertação, trataremos de um fenômeno que ocorre, por vezes, em núcleos exóticos que situam nas proximidades da linha de gotejamento de prótons. A linha de gotejamento de prótons está localizada onde a energia de separação de um próton se anula. Núcleos na linha de gotejamento de prótons não são ligados e podem então decair por emissão de prótons. Contudo, muitos núcleos, particularmente para elementos de massa intermediária e acima, têm existência além da linha de gotejamento de prótons, como consequência de inteirações residuais nucleares e forças de emparelhamento entre nucleons. Para o próton (ou prótons) não ligado(s) ser emitido(s), ele(s) tem (têm) que tunelar a barreira do potencial médio nuclear que mantém os prótons no núcleo, deixando meias-vidas da ordem de milissegundos [6] para estes decaimentos.

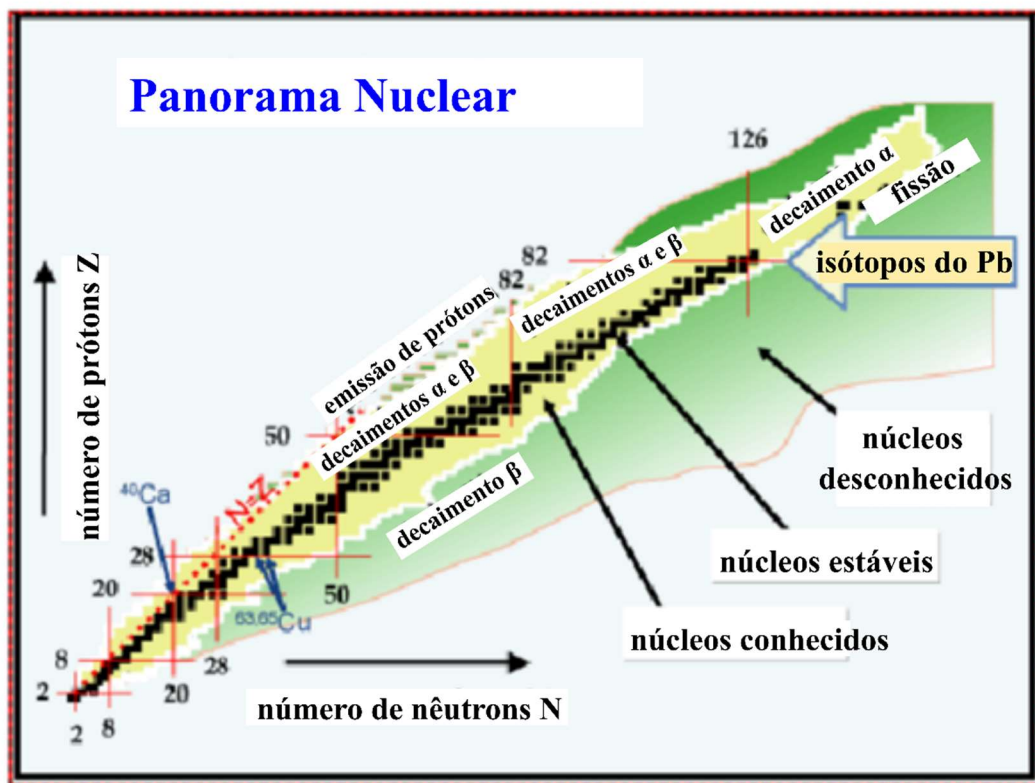


Fig. 1.1. Carta de nuclídeos consistindo dos nuclídeos estáveis ou de vida longa, os conhecidos e instáveis produzidos em laboratório (incluindo os superpesados) e aqueles cuja existência é prevista, mas que ainda não foram identificados experimentalmente. Reproduzida de [3].

Nosso foco é o comportamento de dois destes núclídeos ricos em prótons, e emissores de dois prótons simultaneamente, o ^{45}Fe e o ^{45}Zn . Desenvolvemos um modelo fenomenológico para dar conta da distribuição angular desses prótons medida experimentalmente. Este trabalho pode ser visto como uma continuação da linha de trabalho que vêm sendo realizada por uma escola brasileira de pesquisa fenomenológica em física nuclear, que em seus artigos já fez considerações sobre a meia-vida de núclídeos que apresentam o tipo de decaimento que estamos tratando.

Nesta dissertação, após este breve capítulo de introdução, no Cap. 2 analisaremos a situação de experimentos voltados à obtenção de núcleos exóticos e análise de suas características, bem como o esforço teórico para a explicação do fenômeno e dos modos de decaimento. No Cap. 3, falaremos sobre o instrumental teórico (ELDM) e resultados que aquela escola brasileira de física nuclear obteve para a análise do tunelamento por um próton e por dois prótons. No caso da emissão de um dipróton, o modelo não considera a fase de dissociação, calculando apenas a meia-vida dos emissores tomando o dipróton como um *cluster* que tunela a barreira do potencial nuclear. Então, no Cap. 4, descreveremos a nossa proposta de tratamento teórico original para a emissão de dois prótons considerando o estado final do dipróton dissociado. Neste caso o modelo permitirá calcular a distribuição de probabilidades para o ângulo interprotônico, que é o observável em foco nos experimentos. No mesmo Cap. 4, em seguida, acrescentaremos os procedimentos de cálculo e uma descrição da implementação computacional da proposta. Por fim, analisaremos à luz de nossa proposta os dados experimentais mais confiáveis. Já na primeira seção do Cap. 5, exporemos os resultados que obtivemos e os discutiremos. Finalmente, na segunda seção deste mesmo capítulo, nos dedicaremos a conclusões e perspectivas.

Capítulo 2

Status experimental e teórico do tema

Neste capítulo analisaremos a situação de experimentos voltados à obtenção de núcleos exóticos, bem como o esforço teórico para a explicação do fenômeno e dos modos de decaimento.

2.1. Análise experimental e laboratórios no mundo envolvidos com o tema

2.1.a. Pequeno histórico

Desde a descoberta da radioatividade por Becquerel, no apagar das luzes do século XIX, o decaimento radioativo tem se mostrado uma “sonda” eficiente para o estudo das propriedades dos núcleos atômicos. A emissão de prótons a partir do estado fundamental, prevista pela primeira vez por Goldansky [7] em 1960, tem um papel importante no estudo de núcleos deficientes em nêutrons. Ela ocorre para núcleos onde a energia de separação de prótons torna-se negativa, permitindo portanto a emissão de um ou dois dos prótons constituintes. A primeira observação de um núcleo emissor de um próton a partir do estado fundamental, o ^{151}Lu , ocorreu em 1982 [8].

Se por um lado a radioatividade de um próton é observada para núcleos de Z ímpar, a emissão de dois prótons foi prevista e observada em núcleos de Z par. As considerações de Goldansky o levaram a prever este último fenômeno em núcleos nas proximidades da linha de gotejamento de prótons para os quais, devido a interações de emparelhamento entre estes núcleons, a emissão de um único próton seria energeticamente proibida. Apoiada depois por cálculos mais sofisticados, esta previsão se concentrava em núclídeos com massa atômica em torno de 50. O ^{45}Fe aparecia como o melhor candidato para a observação da radioatividade de dois prótons, mas as dificuldades experimentais eram muitas.

Com o desenvolvimento das tecnologias de detecção e das instalações de feixes radioativos, após uma primeira identificação deste isótopo em 1996 [9], as primeiras observações do decaimento do ^{45}Fe surgiram em 2002 no GSI Darmstadt [10] e no GANIL Caen [11]. Mas o experimento mais completo de que temos notícia foi realizado em 2007 por Miernik *et al.* [12] no National Superconducting Cyclotron Laboratory, localizado na Michigan State University, por uma equipe majoritariamente de poloneses da Universidade de Varsóvia.

Neste experimento, o mencionado decaimento foi estudado em detalhe por meio de um novo tipo de detector gasoso, empregando imageamento digital para registrar os traços das partículas carregadas. O canal da radioatividade de dois prótons foi claramente identificado.

Pela primeira vez, as correlações angulares e de energia entre os dois prótons foram determinadas. A meia-vida do ^{45}Fe foi medida como $2,6 \pm 0,2$ ms e a razão de ramificação do decaimento como $70 \pm 4\%$.

Dada a relevância e o pioneirismo desta experiência, interromperemos um momento o apanhado geral que estamos fazendo para dar um pequeno resumo do processo de detecção utilizado. Para tal, foi desenvolvido um novo tipo de detector gasoso, o OTPC (sigla do inglês para *Optical Time Projection Chamber*) [34, 35], inspirado nos conceitos de Charpak *et al.* [36]. Depois de devidamente produzidos e separados, os íons de ^{45}Fe entram em uma câmara preenchida com uma mistura de gases e, até serem detidos por causa dos choques com as moléculas dos gases deixam um rastro de ionização. Os elétrons deslocados são dirigidos a uma região, na própria câmara, onde o campo elétrico é mais intenso, amplificando portanto a corrente que mantém sua direção. Ao final, é desencadeado um processo de avalanche que resulta em emissão de luz ultravioleta que, no fim, é transformada em luz visível por um WLS (do inglês *Wavelength Shifter*). Saindo da câmara por uma janela de vidro, essa luz visível incide sobre uma câmara CCD e uma fotomultiplicadora.

A câmara CCD registra a imagem no plano transversal ao movimento dos elétrons, enquanto o sinal elétrico da fotomultiplicadora dá uma medida do tempo que a luz gasta até chegar até o dispositivo desde o início da emissão dos elétrons provocado pela passagem do íon. Destes dados, é possível reconstruir por software a trajetória do íon.

No momento que o íon de ^{45}Fe para, dentro da câmara de gás, o sistema do detector é chaveado de um modo de baixa sensibilidade para um de alta

sensibilidade, já que o poder de ionização do nuclídeo é bem maior do que o dos prótons emitidos. Na Fig. 2.1, mostramos uma das imagens registradas pelo detector da radioatividade de dois prótons do ^{45}Fe .

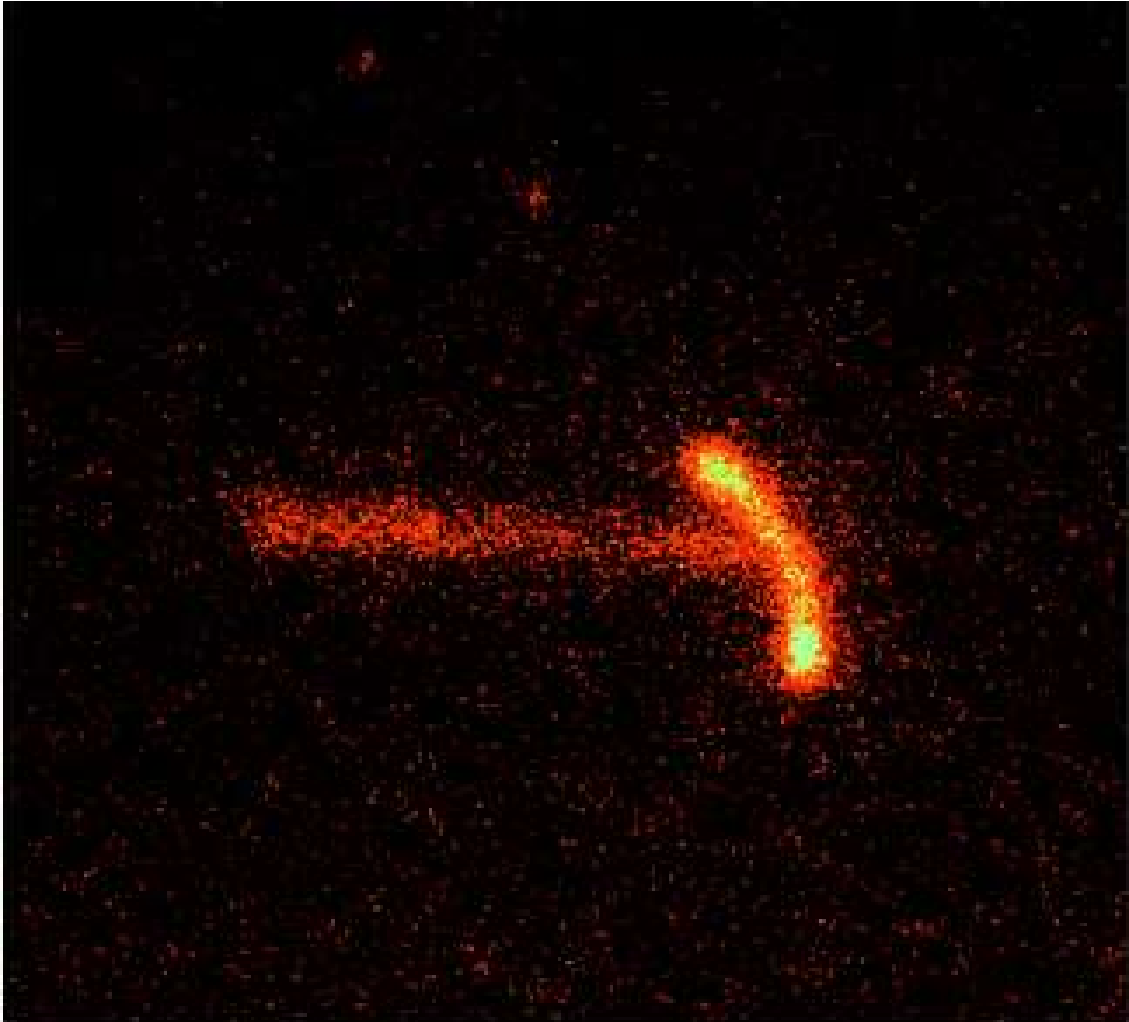


Fig. 2.1. Um exemplo de registro de evento de decaimento do ^{45}Fe . Na imagem da câmara CCD, vemos o nuclídeo entrando da esquerda para a direita. Os dois traços mais brilhantes e curtos são os dois prótons emitidos, cada um com cerca de 0,6 MeV. A informação contida na imagem e no perfil temporal do sinal da fotomultiplicadora permite a reconstrução do decaimento em três dimensões. Assim, para este evento, o ângulo espacial entre os dois prótons foi calculado em $143^\circ \pm 5^\circ$. Figura extraída de [12].

Na mesma faixa de massa atômica que o ^{45}Fe , a radioatividade de dois prótons também foi observada para os nuclídeos ^{54}Zn e ^{48}Ni [13, 14, 15]. Estes três isótopos, muito próximos da linha de fuga para prótons, formam

um conjunto de núcleos quase ou duplamente mágicos (camadas completas de nucleons).

De nosso interesse específico, ou seja, com dados experimentais sobre distribuição angular da radioatividade de dois prótons, é uma medida deste fenômeno para o ^{54}Zn em 2011 [16] no GANIL. Os dados, embora restritos a sete eventos, foram tratados estatisticamente e são utilizados nesta dissertação.

Também foram detectados os decaimentos em dois prótons do isótopo ^{94}Ag em 2006 [17], e mais recentemente, do ^{67}Kr [18], com energia de decaimento de $1,69\text{ MeV}$ (Q da reação) e uma meia-vida parcial (para a emissão 2p) de $20 \pm 7\text{ ms}$. Outro nuclídeo que teve sua radioatividade 2p observada no NSCL (Michigan) em 2014 foi o ^{19}Mg [19].

2.1.b. Laboratórios no mundo

Os principais laboratórios no mundo que fazem pesquisa com núcleos exóticos são:

- GANIL (Grand Accélérateur National d'Ions Lourds), localizado em Caen, França.
A instalação está em operação desde 1983, e consiste primariamente de dois sincrociclotrons serializados. Até 2010, mais de 100 novos nuclídeos já haviam sido descobertos no GANIL.
- RIKEN Nishina Center for Accelerator-Based Science, situado em Wako, Japão.
O primeiro ciclotron do Japão foi construído no RIKEN em 1937, o qual tem atualmente cinco ciclotrons em operação. Um dos fatos mais relevantes na história desse centro nuclear foi a descoberta do elemento superpesado 113, o niônio. Lá são conduzidas pesquisas teóricas e experimentais.
- NSCL (National Superconducting Cyclotron Laboratory), no campus da Michigan State University.
Coroando um trabalho em física nuclear na Michigan State University que vinha desde 1958, o NSCL foi fundado em 1980. É a maior instalação nuclear em uma universidade dos EUA, e o seu ciclotron K1200 é o acelerador de feixe contínuo de mais alta energia do mundo.
- GSI (Centro Helmholtz para Íons Pesados), em Darmstadt, Alemanha.

O GSI, fundado em 1969, tem como coração dos seus aceleradores o síncrotron SIS 18. Merecem destaque entre suas conquistas a síntese e descoberta de seis elementos superpesados.

- JINR (Joint Institute for Nuclear Research), localizado em Dubna, a 110 km de Moscou, Importante centro de pesquisa internacional da Rússia, mais conhecido pela descoberta e síntese de dez elementos superpesados, mas que também faz investigações teóricas e experimentais em núcleos exóticos.
- Aqui no Brasil temos o Acelerador Pelletron, do Departamento de Física Nuclear do IF-USP.

Este acelerador é uma máquina eletrostática tipo Tandem, evolução dos aceleradores Van de Graaf. Foi instalada na USP em 1972. Ultimamente, o grupo experimental tem se dedicado ao estudo de estrutura e mecanismos de reação de núcleos exóticos.

2.2. Modelos teóricos para emissão de prótons em núcleos fracamente ligados

Durante as últimas décadas, vários enfoques teóricos foram propostos para a radioatividade $2p$, com o objetivo de descrever o mecanismo de emissão e dar conta da meia-vida desse modo de decaimento, conforme as características de cada nuclídeo que o apresenta. Brown [20], em 1991, analisou esse fenômeno para núcleos de número atômico Z entre 22 e 28, com base em um modelo de camadas com extrapolação de massa. Propriedades de núcleos ricos em prótons com número de massa A na faixa 37-48 foram investigados por Ormand [21] em 1996, também com base no modelo de camadas. Neste mesmo ano, propriedades de núcleos ricos em prótons em torno do nuclídeo duplamente mágico ${}^{48}_{28}\text{Ni}$ foram estudadas, com base em teorias de campo médio autoconsistentes (Hartree-Fock, Hartree-Fock-Bogoliubov e campo médio relativístico), por Nazarewicz *et al.* [22]; a partir daí, estes autores investigaram energias de separação $2p$, deformações, níveis de energia de cada partícula, potencial médio dos prótons e meias-vidas parciais do decaimento $2p$ nessa faixa de massa. Ainda em 1996, Cole [23] investigou o decaimento de núcleos ricos em prótons na faixa de número atômico Z entre 19 e 30, usando as energias de ligação medidas para núcleos análogos ricos em nêutrons, assim como desvios da energia coulombiana deduzidos de uma parametrização das energias de Coulomb de deslocamento.

Merecem destaque os trabalhos de Grigorenko *et al.* [24, 25, entre outros], que, rompendo com os modelos qualitativos e semiclássicos utilizados até então, aplica um tratamento quântico de três corpos (núcleo residual + p + p) ao fenômeno em questão. Nestes trabalhos, os autores fazem não só previsões de meias-vidas mas também das correlações dos momentos dos prótons emitidos (para alguns núclídeos).

Damos relevo também aos estudos mais recentes, com enfoque fenomenológico, da escola brasileira do CBPF, representados por Gonçalves *et al.* [26] e Tavares *et al.* [27]. Sobre o trabalho de Gonçalves *et al.* discutiremos mais no capítulo seguinte, mas mencionamos aqui o artigo de 2020 de Cui *et al.* [28], que estenderam seu próprio GLDM (*generalized liquid drop model*) – já aplicado com sucesso ao decaimento α , à radioatividade de aglomerados, à fissão espontânea e à emissão de um próton –, ao tratamento da radioatividade de dois prótons, segundo eles mesmos motivados pela referência [26].

O trabalho de Cui *et al.* faz parte de uma tendência recente representada pelo surgimento de uma escola chinesa na área. Omitiremos alguns desses importantes trabalhos sobre o assunto, mas não podemos deixar de mencionar um outro artigo bem atual (de 2023), onde Yuan *et al.* [29] estendem seu DDCM (*density-dependent cluster model*) – com abrangência semelhante aos tipos de modelos utilizados em [26] e [28] –, à radioatividade de dois prótons.

Capítulo 3

O modelo efetivo da gota líquida (ELDM) e o tunelamento do dipróton

Aqui, descreveremos inicialmente o ELDM com um certo detalhe, na sua generalidade. Na segunda seção do capítulo, veremos melhor seu emprego para as radioatividades de um e de dois prótons e vamos comparar suas previsões com os dados experimentais.

3.1. O ELDM em sua generalidade

Uma das principais características do ELDM é que ele se constitui em um arcabouço teórico unificado para calcular a meia-vida de um amplo conjunto de tipos de decaimento, desde a emissão de um próton, passando pelo decaimento alfa e radioatividade de aglomerado, até chegar à fissão a frio [30]. Em todos estes processos radioativos, o modelo é bem-sucedido em explicar os dados experimentais, com poucos parâmetros ajustáveis. Merece destaque especial o uso do ELDM para fazer previsões sobre o decaimento alfa, para o qual existe uma grande abundância de dados. O cálculo de meias-vidas para a radioatividade de um próton com o emprego desse modelo foi realizado em 1998 por Gúzman *et al.* [33] e em 2017, Gonçalves *et al.* [26] mostraram também a aplicabilidade do ELDM à radioatividade de dois prótons. Na próxima seção, nos estenderemos um pouco mais sobre esses dois tipos de decaimentos protônicos.

Uma das bases desse modelo consiste em representar de forma simplificada o sistema nuclear em decaimento (durante o processo de fissão) por meio de uma parametrização por duas calotas em contato (vide Fig.3.1). Isto permite calcular analiticamente tanto sua energia coulombiana como a energia de superfície do fluido nuclear. Por outro lado, o valor do Q da reação, obtido experimentalmente, é colocado como dado de entrada, incorporando portanto efeitos de camada ao modelo. Este Q é inserido duas vezes: na equação para a determinação da energia de superfície e no fator de penetrabilidade de Gamow para a barreira de potencial. Lembramos que este Q , por ser extraído de dados experimentais diretamente ou através de

diferenças de massas medidas, incorpora automaticamente todos efeitos da estrutura nuclear, inclusive os efeitos de camada.

No caso da radioatividade $2p$, para exemplificar, o Q da reação foi calculado pela fórmula

$$Q = \Delta M_P - (\Delta M_{2p} + \Delta M_D), \quad (3.1)$$

onde ΔM_P , ΔM_{2p} e ΔM_D são respectivamente os excessos de massa do núcleo-pai, do sistema $2p$ e do núcleo-filho. Lembramos aqui que o excesso de massa de um nuclide é definido como a diferença entre a sua massa e o seu número de massa em daltons, onde um dalton equivale a $1/12$ da massa de um átomo neutro e não ligado de carbono-12 no seu estado fundamental eletrônico e nuclear, e em repouso. As massas dos núcleos, no artigo [26] para o decaimento $2p$, foram extraídas da Tabela de Massa de Wang *et al.* [37,38] que era a mais recente na época em que foi escrito.

Durante a fase de separação dos dois subsistemas, a configuração geométrica do sistema deformado é aproximada por duas calotas em contato perfeito, como nos mostra a Fig. 3.1. Esta configuração fica especificada por quatro coordenadas, a saber: R_1 e R_2 , os raios das duas esferas que deram origem as duas calotas; ζ , a distância entre os seus centros geométricos; e ξ , a altura da calota maior. Quando a separação dos dois subsistemas se completa, o sistema atinge uma configuração limite de duas esferas tangentes, com raios \bar{R}_1 e \bar{R}_2 .

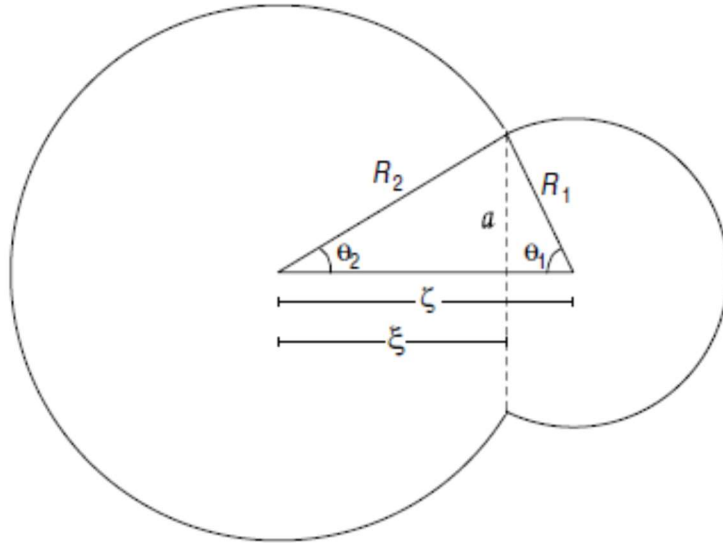


Fig. 3.1. Representação esquemática do sistema dinuclear em decaimento. O núcleo-filho e o fragmento emitido têm raios R_2 e R_1 , respectivamente, e a distância entre os centros das esferas que os originaram é designado por ζ . A altura da calota maior é denotada por ξ . Figura extraída de [30].

Para manter as duas calotas em encaixe perfeito, o teorema de Pitágoras implica no seguinte vínculo entre as quatro coordenadas:

$$R_1^2 - (\zeta - \xi)^2 = R_2^2 - \xi^2. \quad (3.2)$$

Outro vínculo, dado pela conservação do volume total do sistema, é devido à incompressibilidade da matéria nuclear:

$$2(R_1^3 + R_2^3) + 3[R_1^2(\zeta - \xi) + R_2^2\xi] - [(\zeta - \xi)^3 + \xi^3] = 4R_p^3 \quad (3.3)$$

onde R_p é o raio do núcleo-pai.

Um terceiro vínculo está associado ao fluxo de massa através da interface das duas calotas (veja Fig. 3.1). Existem várias versões das hipóteses em que se baseia este fluxo de massa, mas aqui nos limitaremos a descrever, de forma resumida, a versão utilizada em [26] para a radioatividade de dois prótons. Consiste na CMAS (de *constant mass asymmetry shape*) com a

aproximação de Werner-Wheeler para o campo de velocidade do fluxo nuclear. Remetemos o leitor interessado em maiores detalhes ao artigo [26] e às referências ali mencionadas.

A descrição CMAS consiste em supor que o volume de cada fragmento é constante, o que, em termos do raio do fragmento menor nos dá

$$2R_1^3 + 3R_1^2(\zeta - \xi) - (\zeta - \xi)^3 = 4\bar{R}_1^3, \quad (3.4)$$

onde \bar{R}_1 é o raio final do deste fragmento, o qual está determinado (como veremos mais adiante).

Apenas esta última relação já fornece o terceiro vínculo, mas aproveitamos o ensejo para discorrer um pouco sobre a aproximação de Werner-Wheeler (WW). Ela é importante na determinação da massa efetiva μ_{WW}^{CMAS} a ser inserida na fórmula para o fator de penetrabilidade da barreira de potencial.

Na abordagem WW, o campo de velocidades é obtido a partir da solução da equação de continuidade usando a incompressibilidade e irrotacionalidade do fluxo nuclear. Se o problema se reduz ao movimento relativo de duas partes em separação, só um componente do tensor de inércia torna-se relevante. A expressão para o coeficiente de inércia μ_{WW} , que pode ser na forma μ_{WW}^{CMAS} ou μ_{WW}^{VMAS} (o VMAS é de *varying mass asymmetry shape*), é dada por

$$\frac{1}{2} \int \rho \vec{v}^2 dV = \frac{1}{2} \mu_{WW} \dot{\zeta}^2 \quad (3.5)$$

onde ρ é a densidade de massa do sistema e $\dot{\zeta}$ é a velocidade relativa de separação dos centros geométricos dos fragmentos. Ademais, também é aplicado outro tipo de coeficiente de inércia, o coeficiente de inércia efetivo, que também pode ser nas formas $\mu_{eff.}^{CMAS}$ ou $\mu_{eff.}^{VMAS}$.

Para o cálculo da energia eletrostática, o ELDM usa expressão de Gaudin [31] para a geometria já descrita pela Fig. 3.1, supondo a densidade de carga elétrica constante:

$$V_c = \frac{8}{9} \pi a^5 \varepsilon(x_1, x_2) \rho_c^2. \quad (3.6)$$

Aqui, ρ_c é a densidade de carga inicial, ε é uma função analítica bem determinada das variáveis angulares x_1 e x_2 , e a é o raio da interface das duas calotas. As variáveis x_1 e x_2 são expressas de maneira bem simples em função dos ângulos θ_1 e θ_2 , mostrados na Fig. 2. A expressão (3.6) para a energia coulombiana é a solução exata da equação de Poisson para uma distribuição de carga uniforme do sistema em consideração [31].

Para a energia potencial de superfície, o ELDM introduz uma tensão superficial efetiva, σ_{eff} , para o sistema deformado, a qual pode ser calculada por meio da equação

$$\frac{3}{5} e^2 \left[\frac{Z_P^2}{R_P} - \frac{Z_1^2}{R_1} - \frac{Z_2^2}{R_2} \right] + 4\pi\sigma_{eff}(R_P^2 - \bar{R}_1^2 - \bar{R}_2^2) = Q, \quad (3.7)$$

Onde os eZ_i ($i = P, 1, 2$) são as cargas elétricas dos respectivos núcleos. Os raios finais dos fragmentos são avaliados como

$$\bar{R}_i = \left(\frac{Z_i}{Z_P} \right)^{1/3} R_P \quad (3.8)$$

para ser consistente com a hipótese de densidade de carga uniforme usada para o cálculo da energia eletrostática. O raio do núcleo-pai é determinado como

$$R_P = r_0 A_P^{1/3}, \quad (3.9)$$

onde r_0 é um parâmetro livre do modelo. Portanto, a energia potencial de superfície é dada por:

$$V_s = \sigma_{eff}(S_1 + S_2), \quad (3.10)$$

onde S_1 e S_2 são as áreas laterais de cada segmento esférico.

A equação (3.7) assegura que a diferença de energia entre as configurações inicial e final do sistema reproduza a energia liberada na desintegração, definida por $Q = m_p - m_1 - m_2$, estabelecendo assim o caráter efetivo do modelo.

Em uma hipótese simplificadora, o efeito da energia potencial centrífuga depois da cissão é dado por

$$V_l = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu\zeta^2}, \quad (3.11)$$

onde $\bar{\mu}$ é a massa reduzida do sistema na configuração final.

Concluimos então que a energia potencial total, efetiva e unidimensional, fica como

$$V = V_c + V_s + V_l, \quad (3.12)$$

sujeita aos vínculos dados pelas Eq. (3.2) e (3.3), além do vínculo que define a transferência de massa através da janela de contato.

Conhecido o potencial, a taxa de transição quântica entre as configurações inicial e final do sistema é determinada reduzindo-se o problema a uma penetrabilidade de barreira unidimensional, como na teoria de Gamow para o decaimento alfa. O fator de penetrabilidade G é calculado como

$$G = \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \int_{\zeta_0}^{\zeta_c} \sqrt{2\mu[V(\zeta) - Q]} d\zeta \right], \quad (3.13)$$

com os limites de integração dados por $\zeta_0 = R_p - \bar{R}_1$ e $\zeta_c = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{Q}$.

Finalmente, a meia-vida é calculada como $\tau = \frac{\ln}{\lambda}$, onde $\lambda = \lambda_0 G$, na qual λ_0 é relacionado à frequência de assaltos à barreira. Valores típicos para λ_0 estão entre 10^{19} s^{-1} e 10^{21} s^{-1} .

Na Fig. 3.2, o potencial unidimensional do ELDM é mostrado para um decaimento típico.

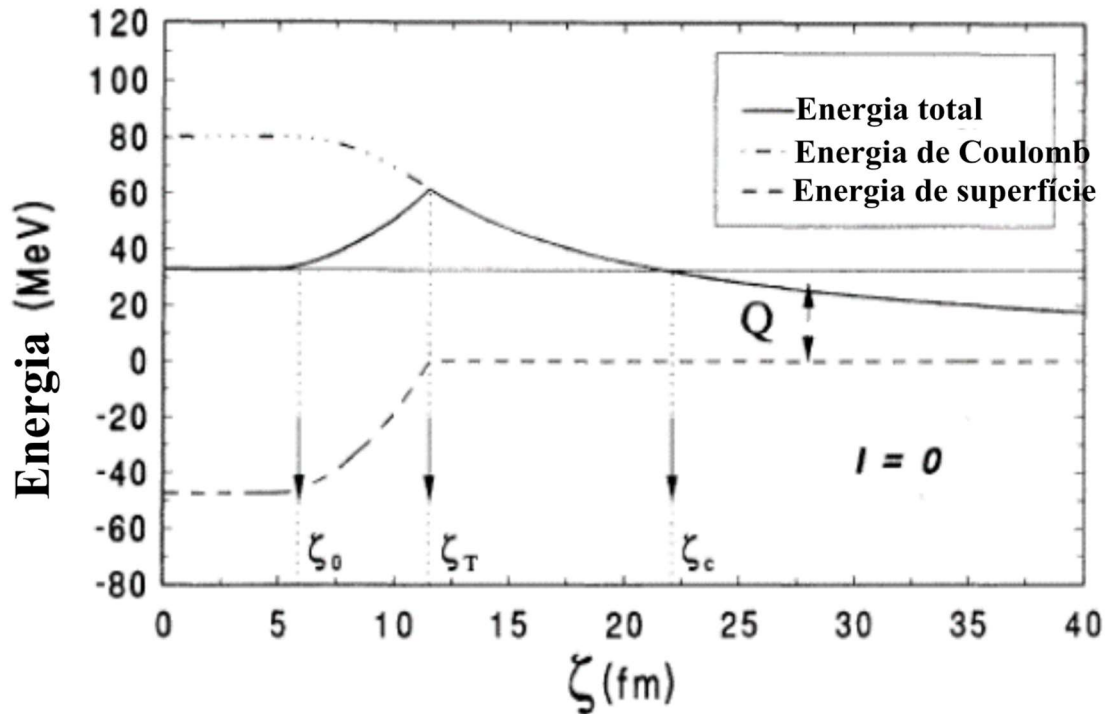


Fig. 3.2. Configuração típica de barreira de potencial unidimensional do ELDM. A energia coulombiana está representada pela linha de pontos e traços, e a de superfície pela linha tracejada. O potencial total é mostrado pela curva contínua. Figura extraída de [32].

3.2 Meias-vidas de um e dois prótons no ELDM

Os resultados do emprego do ELDM para fazer previsões da meia-vida da emissão de um próton por núcleos ricos em prótons [33] foram bastante bons, feitos os ajustes de alguns poucos parâmetros. Foi inicialmente calculada a meia-vida com a suposição que o número quântico l do momento angular fosse zero e, nos casos em que não houve concordância com o valor experimental que porventura existisse, estipulou-se um valor de l adequado. Sugerimos uma consulta às referências [30] e [33] para maiores detalhes. Com esse procedimento, obteve-se um erro foi menor que uma ordem de

magnitude na grande maioria dos casos. As previsões mostradas na Fig. 3.3 foram feitas utilizando como o coeficiente de inércia do tipo μ_{eff}^{VMAS} .

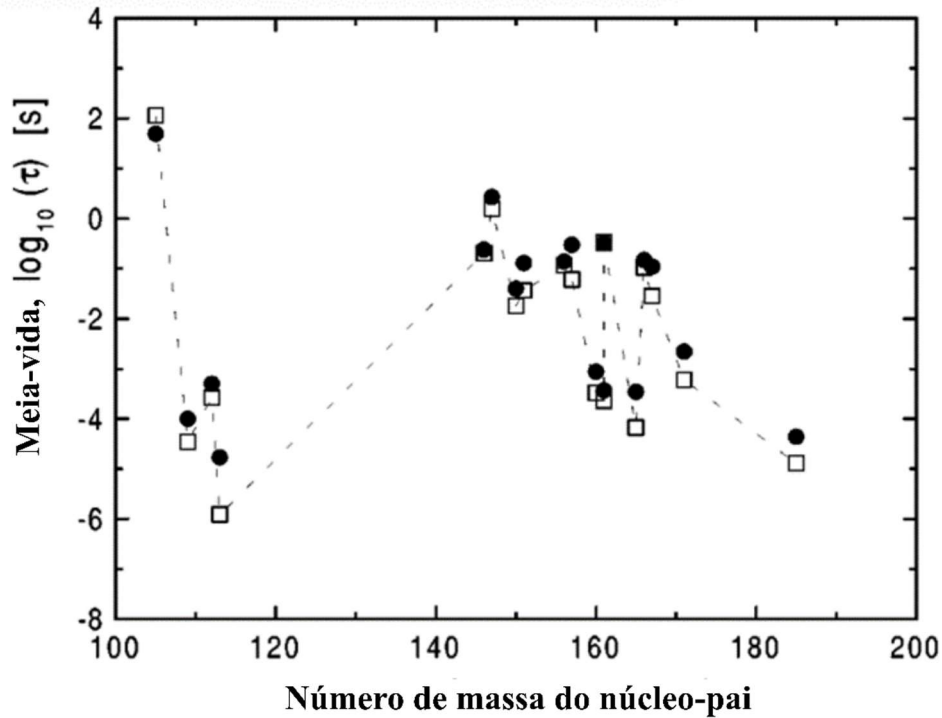


Fig. 3.3. Meias-vidas para a radioatividade de um próton em núcleos ricos em prótons. Os resultados calculados pelo ELDM (quadrados abertos), para os quais são necessários ajustes de uns poucos parâmetros, concordam de forma satisfatória com os dados experimentais (círculos cheios). Figura extraída de [33].

Já na aplicação do ELDM à radioatividade de dois prótons, os cálculos foram realizados para reproduzir a meia-vida do decaimento $^{45}\text{Fe} \rightarrow ^{43}\text{Cr} + 2p$ (que é o mais estudado e com dados experimentais mais confiáveis), variando apenas o parâmetro r_0 na Eq. (3.9). Das quatro descrições já utilizadas para analisar processos nucleares espontâneos desde a emissão de um próton até a fissão a frio, a descrição de assimetria de massa constante (CMAS) com o coeficiente de inércia de Werner-Wheeler (WW) revelou-se a mais apropriada para lidar com o fenômeno em questão, visto que ela se adequa mais à ideia básica de pré-formação do sistema de dois prótons como um aglomerado já existente dentro do núcleo-pai.

Usado o referido decaimento para fixar r_0 , o melhor resultado que atinge o valor médio da meia-vida experimental ($\langle \tau_{exp} \rangle = 3,6$ ms) foi tomar $r_0 = 1,12$ fm. Foi este o valor que foi utilizado em toda a investigação de [26]. Então, conforme a suposição representada pelas Eq. (3.8) e (3.9), o raio do diprótton emitido varia apenas 5% para núcleos-pais com número de massa A_p entre 16 e 67.

Alertamos aqui que os resultados para as meias-vidas, expressos na tabela 3.2, são bastante sensíveis aos valores inseridos dos Q's. Lembramos que, para o cálculo delas, foram utilizados como entrada os valores dos Q's médios experimentais.

Tabela 3.1. Comparação entre os valores médios experimentais e os calculados pela fórmula de massa (3.1) dos Q's da emissão 2p pelos nuclídeos ^{16}Ne , ^{19}Mg , ^{45}Fe , ^{48}Ni , ^{54}Zn e ^{67}Kr . Estes resultados foram extraídos da Tabela 1 de [26].

Núcleo-pai	Valor médio experimental	Valor calculado pela Eq. (3.1)
	Q_{2p} (MeV)	Q_{2p} (MeV)
^{16}Ne	1,365	1,401
^{19}Mg	0,75	0,75
^{45}Fe	1,151	1,154
^{48}Ni	1,32	1,305
^{54}Zn	2,5	1,48
^{67}Kr	1,69	1,69

Tabela 3.2. Comparação entre os valores experimentais médios e os calculados pelo ELDM das meias-vidas da emissão 2p pelos núcleos ^{16}Ne , ^{19}Mg , ^{45}Fe , ^{48}Ni , ^{54}Zn e ^{67}Kr . Esta tabela é uma síntese parcial dos resultados apresentados na Tabela 1 de [26]. A Tabela 2 do mesmo artigo inclui também uma previsão dos nuclídeos que poderiam também apresentar o fenômeno da radioatividade de dois prótons.

Núcleo-pai	Valor médio experimental	Valor calculado pelo ELDM
	Meia-vida (ms)	Meia-vida (ms)
^{16}Ne	$3,25 \times 10^{-18}$	$2,54 \times 10^{-14}$
^{19}Mg	5×10^{-9}	$1,89 \times 10^{-9}$
^{45}Fe	3,6	3,70
^{48}Ni	5,7	4,38
^{54}Zn	2,5	3,03
^{67}Kr	20	$8,73 \times 10^2$

Conforme podemos ver na Tabela 3.2, os resultados do ELDM na previsão da meia-vida de nuclídeos que já tiveram dados medidos com

alguma confiabilidade é bastante boa, onde mais uma vez ressaltamos que são necessários ajustes de parâmetros. Exceção feita ao caso do ^{16}Ne , onde existe uma divergência de quatro ordens de grandeza entre os valores teórico e experimental da meia-vida, o que pode ser explicado talvez por um possível erro de medida devido à pequenez deste valor.

A Fig. 3.4 exibe de forma mais clara o bom desempenho do ELDM na sua utilização para os casos medidos (meias-vidas) de radioatividade de dois prótons, elencando também suas previsões.

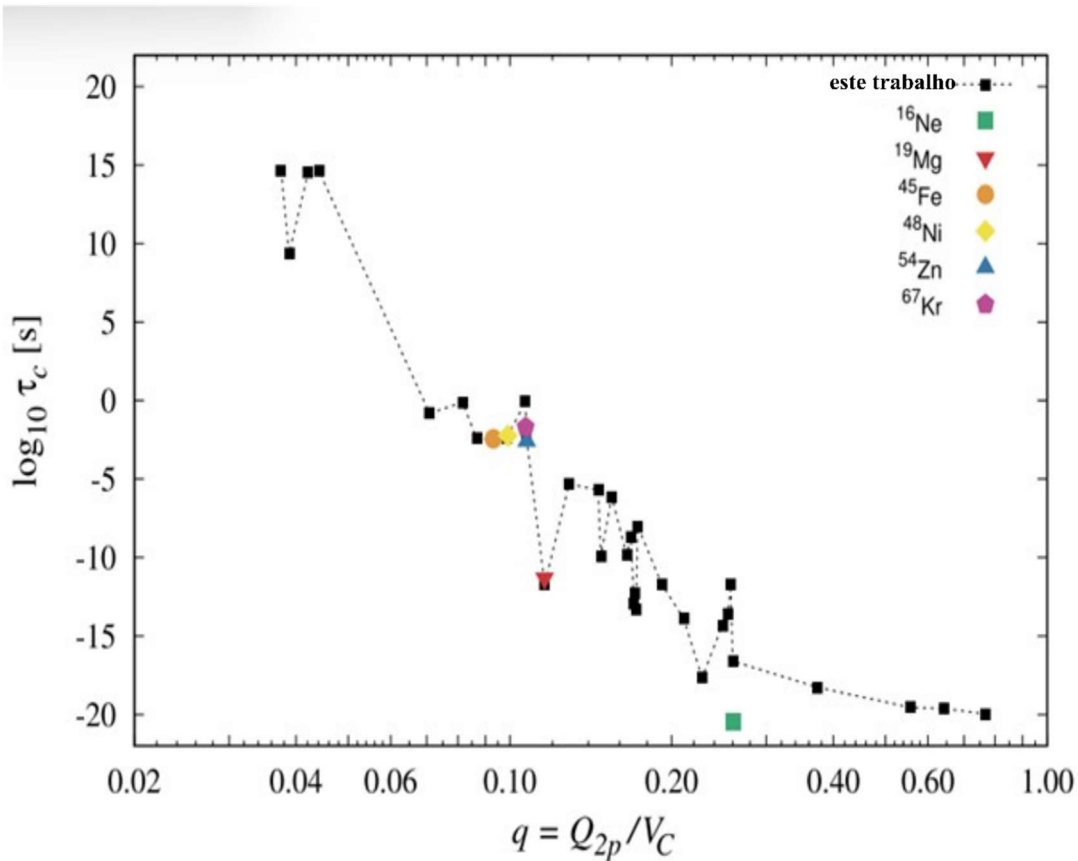


Fig. 3.4, Dependência da meia-vida do decaimento 2p em função do parâmetro $q = Q_{2p}/V_C$ (V_C é a altura da barreira). Os dados provêm das Tabelas 3.1 e 3.2 desta dissertação e da Tabela 2 (não reproduzida aqui) da referência [26]. Figura extraída também de [26].

Chamamos atenção aqui que os dados utilizados como entrada (o Q das reações e as massas dos núclídeos) em todas essas estimativas foram retirados de tabelas de 2017 [37, 38], e mereceriam ser atualizados para os dias de hoje.

Capítulo 4

Distribuição angular de dois prótons no ELDM

Neste capítulo, que traz a contribuição principal de nosso trabalho, propomos uma análise fenomenológica dos dados experimentais existentes e em seguida sugerimos uma interpretação teórica explicativa para a distribuição angular da radioatividade de dois prótons. Pelo menos nos dois casos mais bem medidos desse fenômeno físico, como o do diprotón emitido pelo ^{45}Fe e ^{54}Zn , os nossos resultados são bem-sucedidos e consistentes. Este trabalho se insere dentro do contexto do ELDM, objeto do Cap. 3 desta dissertação, o qual já contemplava de forma igualmente bem-sucedida a determinação de meias-vidas de muitos outros casos observados de emissão de dois prótons e de outros tipos de decaimentos hadrônicos nucleares. Estamos tentando aprimorar o ELDM, desenvolvendo o estudo da distribuição angular desse tipo de radioatividade.

4.1. Análise dos dados experimentais das distribuições angulares observadas

Nossa providência inicial foi examinar com cuidado os melhores dados experimentais das distribuições angulares da radioatividade de dois prótons disponíveis na literatura especializada. Retomamos aqui o que foi apresentado no Cap. 2 acerca da obtenção dos dados experimentais. Em primeiro lugar, destacamos que as distribuições de ângulo obtidas são extraídas da medida dos ângulos entre os traços deixados pelos dois prótons, emitidos pelos núcleos-pais quando estes estão em repouso no sistema de laboratório. Na Fig. 4.1, para bem caracterizar por meio de uma ilustração o ângulo que é o objeto de nossa atenção, exibimos os resultados de uma experiência realizada em 2011 por Blank *et al.* [39].

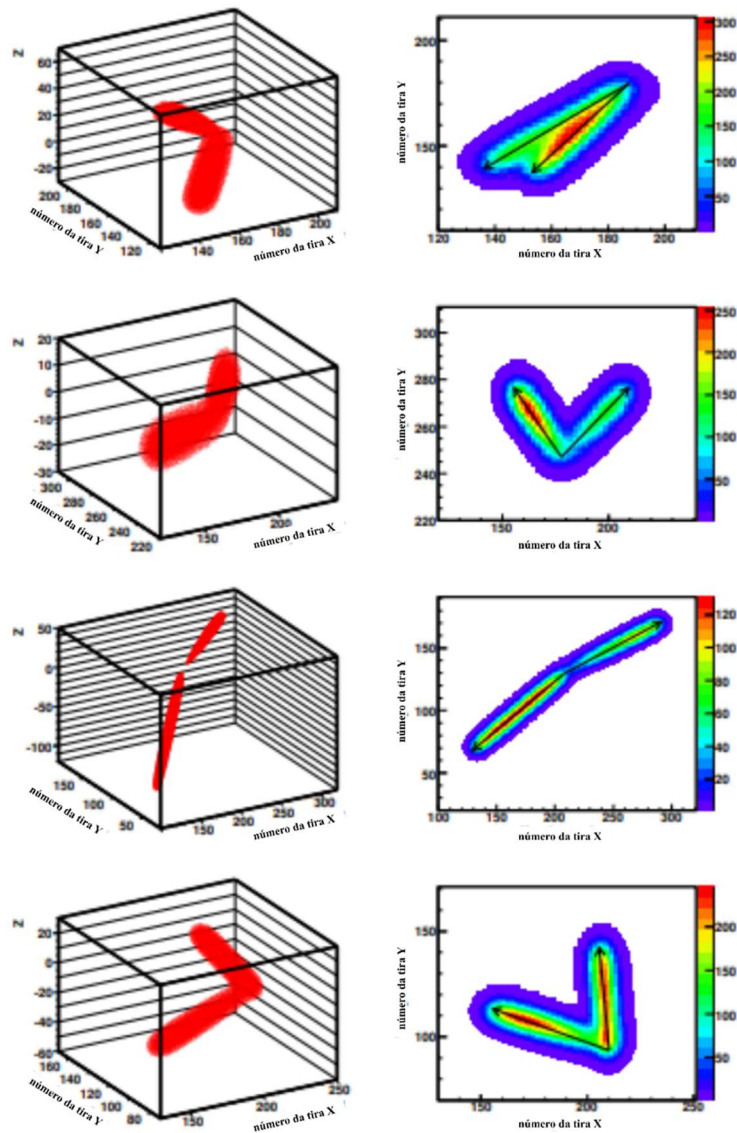
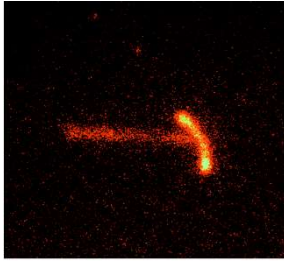


Fig. 4.1. Quatro decaimentos 2p do ^{45}Fe estão aqui representados em três dimensões (coluna da esquerda) e por suas projeções bidimensionais no plano fotográfico (coluna da direita). A distribuição angular que é objeto desta dissertação é a dos ângulos entre os traços espaciais como mostrados na coluna da esquerda. Figura extraída de [39]. Ao alto, bem à esquerda, reproduzimos em escala menor a Fig. 2.1 desta dissertação, que também representa a projeção bidimensional de um evento de decaimento 2p desse nuclídeo, mas em outro experimento.

A experiência com melhor estatística é a de Miernik et al. [12], de 2007, onde é estudado o nuclídeo ^{45}Fe . Reproduzimos na Fig. 4.2 o histograma de rendimentos por ângulo de abertura entre os prótons, encontrado para 75 eventos medidos.

O segundo resultado, apresentado na Fig. 4.3, é para o ^{54}Zn , do artigo de Ascher et al. [16] de 2011. A experiência, feita no GANIL, conseguiu medir apenas sete eventos, representando uma estatística ainda mais precária que a obtida com o ^{45}Fe . Para melhorar o resultado, foi feito um tratamento dos dados, que consistiu em convoluir cada evento com uma gaussiana representativa da resolução angular do sistema de detecção. Veja o histograma na Fig. 4.3.

Por meio de uma inspeção visual dos dados de distribuição do ângulo assintótico dos dois prótons (ângulo θ na Fig. 4.1), mostrada nas Fig. 4.2 e 4.3, detectamos claramente dois picos, um maior em cerca de 50° (nos dois casos) e outro menor, de cerca de 140° no primeiro caso e outro, menos nítido, em cerca de 120° no segundo caso. Estimulados pela forma relativamente definida dos dados do ^{45}Fe , nos propusemos a ajustar uma soma de duas gaussianas a esses dois conjuntos de dados pelo método não linear dos mínimos quadrados, colocando como iguais as variâncias das duas curvas para simplificar. Este ajuste foi feito para os pontos centrais das barras horizontais dos histogramas.

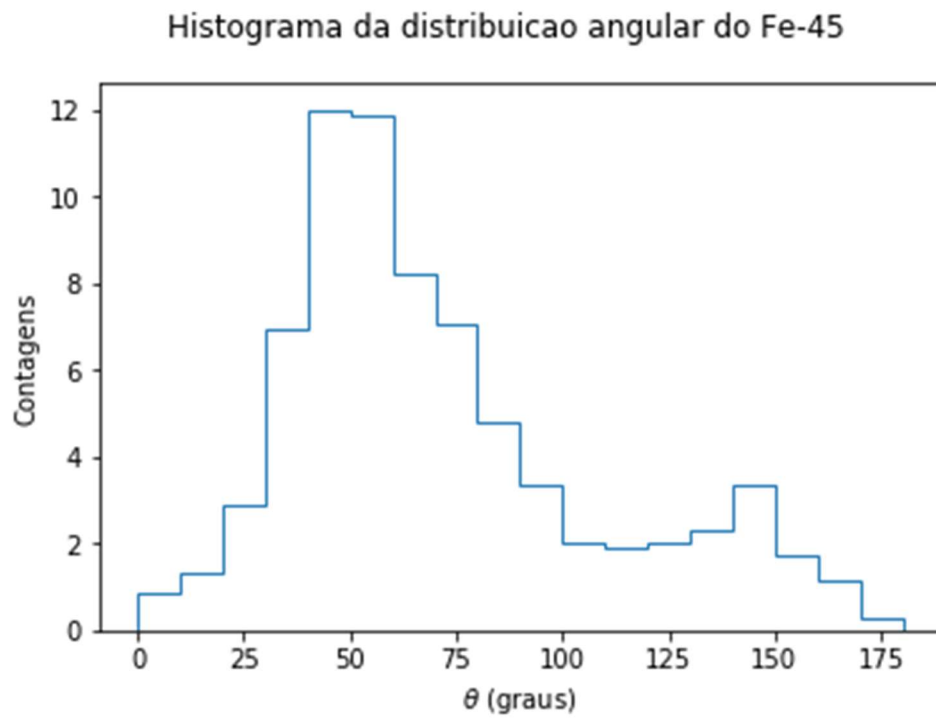


Fig. 4.2. Distribuição do valor do ângulo de abertura entre os prótons no decaimento do ^{45}Fe . Ao todo, foram 75 eventos registrados. Dados extraídos da referência [12].

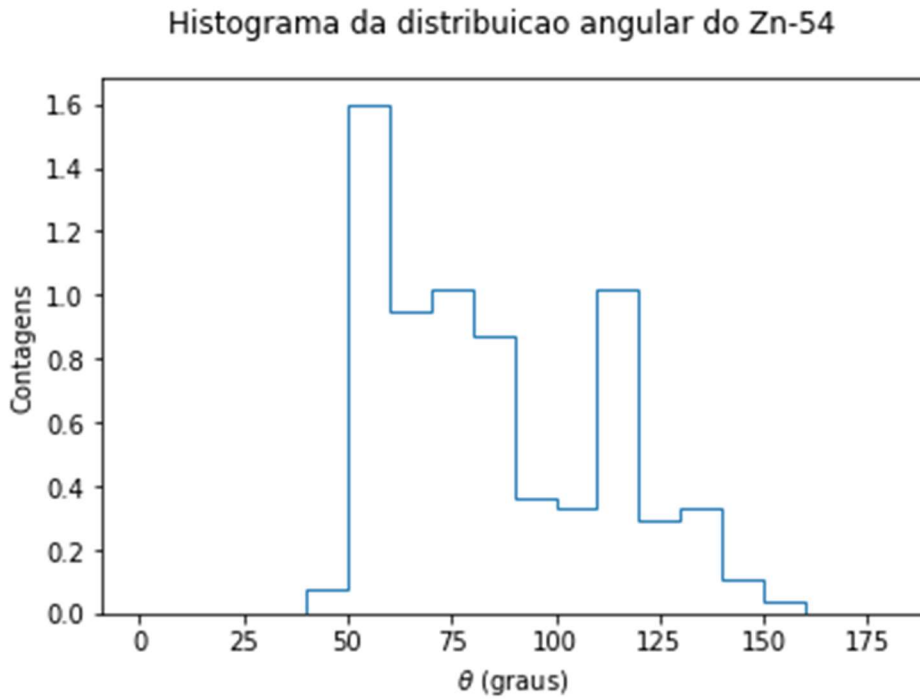


Fig. 4.3. Distribuição do valor do ângulo de abertura entre os prótons no decaimento do ^{54}Zn . Ao todo, foram sete eventos registrados. Cada evento foi convoluído com uma gaussiana representativa da resolução angular dos detetores. Dados extraídos da referência [16].

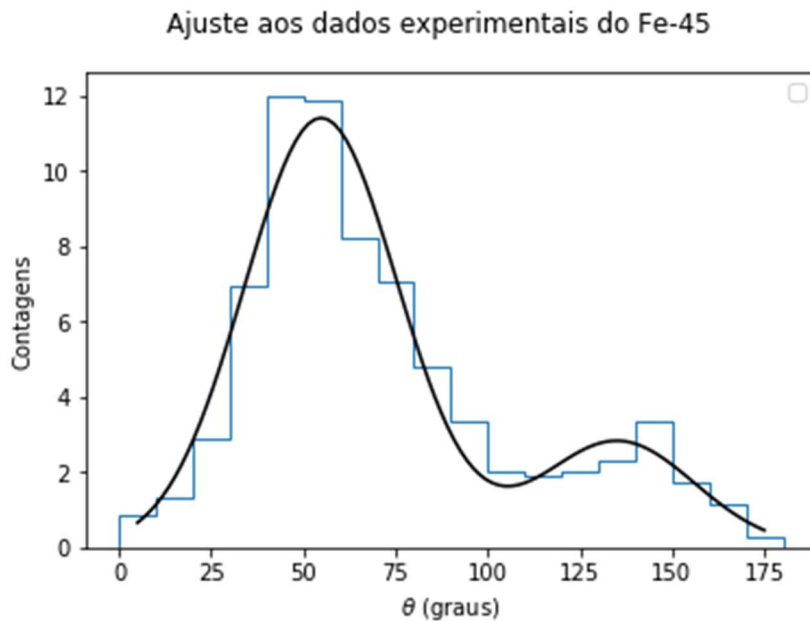


Fig. 4.4. Ajuste pelo método dos mínimos quadrados não linear de uma soma de duas gaussianas aos dados experimentais da distribuição angular da radioatividade de dois prótons do ^{45}Fe . Os parâmetros encontrados para o ajuste estão na Tabela 4.1.

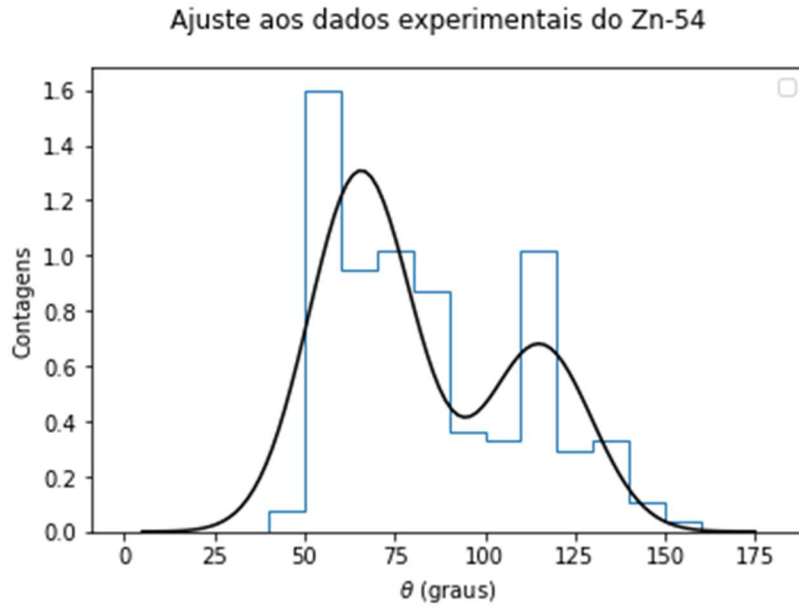


Fig. 4.5. Ajuste pelo método dos mínimos quadrados não linear de uma soma de duas gaussianas aos dados experimentais da distribuição angular da radioatividade de dois prótons do ^{54}Zn . Os parâmetros encontrados para o ajuste estão na Tabela 4.1.

Assim, meramente ajustamos uma soma de duas gaussianas genéricas (com a única restrição sendo que a largura das duas curvas σ_f é a mesma), representada pela função:

$$C(\theta) = A_1 \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta - \mu_1}{\sigma_f}\right)^2\right\} + A_2 \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta - \mu_2}{\sigma_f}\right)^2\right\}, \quad (4.1)$$

onde $C(\theta)$ é o número de contagens para cada ângulo θ , σ_f é a variância de cada gaussiana e μ_1 e μ_2 são os dois centroides.

Apresentamos nas Tabelas 4.1 e 4.2 os parâmetros encontrados para os melhores ajustes a cada um dos dois conjuntos de dados experimentais, e os desvios médios quadráticos das duplas gaussianas em relação aos resultados experimentais.

Tabela 4.1

Parâmetros dos ajustes. Os parâmetros A_1 e A_2 são o número de contagens e μ_1 , μ_2 e σ_f são medidos em graus.

	A_1	μ_1 (Graus)	σ_f (graus)	A_2	μ_2 (Graus)
^{45}Fe	11,4	54,9	20,8	2,8	135,2
^{54}Zn	1,3	65,7	14,4	0,67	115,2

Tabela 4.2

Desvio médio quadrático dos ajustes (σ_{rms}). Não deve ser confundido com o σ_f da tabela anterior, que é uma medida da largura em graus de cada gaussiana. O σ_{rms} que está nesta segunda tabela é um número puro, e mede o quanto os dados de rendimento das contagens experimentais se afastam da curva analítica das Fig. 4.4 e Fig. 4.5, com os parâmetros colocadas na Tabela 4.1. Chamamos a atenção ainda que esses dois histogramas não estão normalizados; desse modo, o valor de σ_{rms} de cada um deles deve ser comparado com os valores dos dados de cada histograma.

^{45}Fe	1,2
^{54}Zn	0,2

Os dois gráficos dos ajustes podem ser vistos nas figuras 4.4 e 4.5. Podemos observar que, para o ^{45}Fe onde a estatística é melhor, o resultado é muito bom, a menos de pequenas divergências no segundo pico (que podem ser creditadas à própria deficiência de dados nesta região). Já para o ^{54}Zn , podemos dizer que o resultado é razoável, embora não conclusivo, devido à baixa estatística dos dados.

O ajuste das duas curvas até agora foi puramente empírico, mas já constituem um indício de que podem estar em jogo densidades de probabilidades na forma de gaussianas, o que resultaria da presença de estados quânticos traduzidos por funções de onda gaussianas para o movimento relativo transversal ao deslocamento do centro de massa dos dois prótons.

O protótipo de estado quântico de cada próton seria um estado coerente. Conjecturamos então – no intuito de explicar os dados experimentais já apurados – que a densidade de probabilidade do momento linear final dos

prótons ejetados é composta pela soma de duas partes, provenientes de dois estados coerentes com centroides distintos, mas mesma variância. Mais à frente, nas seções 4.3 e 4.4, vamos justificar as razões para condição imposta de mesma variância. Adiantamos que isso está associado à nossa hipótese de pré-formação do dipróton na superfície nuclear.

Feita essa suposição, ajustamos, pelo método dos mínimos quadrados não linear, os dois parâmetros de cada estado coerente aos dados experimentais. Esses parâmetros são o centroide e a variância.

4.2. Considerações sobre a pré-formação do dipróton

A hipótese de uma função de onda gaussiana se sustentaria baseada na suposição de que o movimento transversal relativo dos dois prótons seria oscilatório de pequenas amplitudes. A oscilação se deve a competição entre a ação atrativa da interação nucleon-nucleon e o efeito repulsivo do “hard-core” desta mesma interação (juntamente com o efeito coulombiano das cargas dos prótons). Também acrescentamos que é de se supor que estes estados de diprótons se formem na superfície nuclear como estados coerentes, também favorecidos pela interação de emparelhamento dos dois prótons de valência. (Ver ilustração pictórica na Fig. 4.6, a seguir.)

O grau de liberdade transversal ao movimento radial do centro de massa do dipróton foi introduzido como elemento imprescindível para se estudar a distribuição angular dos dois prótons no ELDM. Isto foi feito para permitir a dissociação do dipróton. Até então, o modelo apenas tratou da determinação de meias-vidas de decaimentos considerando apenas o tunelamento do centro de massa dos dois prótons na barreira de potencial de campo médio nuclear do núcleo residual. Na versão original do ELDM apenas consideramos o tunelamento do centro de massa dos dois prótons, sem levar em conta o movimento relativo entre os dois prótons. Os efeitos do emparelhamento dominam sobre o potencial nuclear do núcleo residual, deixado para trás.

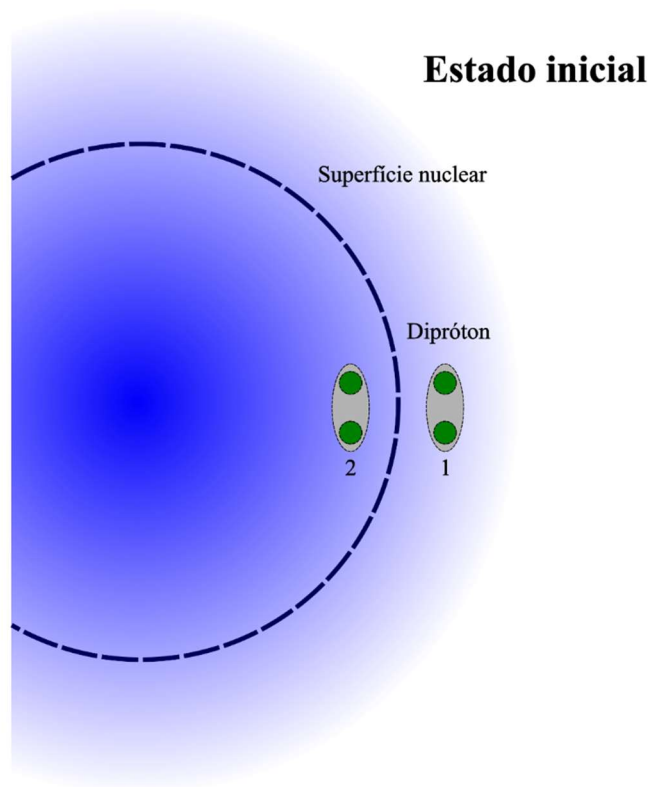


Fig. 4.6. Esquema ilustrativo do estado inicial do sistema, por ocasião da pré-formação do diprôton. São mostradas na figura os possíveis locais de pré-formação do diprôton, um pouco mais para fora da atmosfera nuclear (caso 1) ou um pouco mais para dentro (caso 2). Por finalidades didáticas, na ilustração a largura da atmosfera nuclear está exagerada.

A hipótese de estados coerentes para as oscilações transversais dos dois prótons, além de insinuada pelo ajuste bem-sucedido das distribuições angulares experimentais, fica melhor respaldada por alguns argumentos que veremos nas duas seções seguintes.

4.3. Vínculos cinemáticos definidores do ângulo de saída do par de prótons

Em primeiro lugar, chamamos a atenção para a determinação teórica do ângulo experimental medido através da análise dos vínculos cinemáticos na propagação assintótica dos dois prótons. Ao mesmo tempo lembramos que, para justificar a distribuição angular observada, temos que considerar

também as condições de pré-formação apontadas no final da seção anterior (Fig. 4.6).

Os vínculos cinemáticos são devidos às leis de conservação de momento e energia para a propagação na região suficientemente afastada do núcleo residual, que estamos nomeando como região assintótica. Estas considerações serão compatibilizadas posteriormente com as considerações de pré-formação mencionadas anteriormente para explicar o aparecimento dos dois picos nas distribuições de ângulos experimentais.

Quanto aos vínculos cinemáticos, trabalhamos na região de espalhamento assintótica, na qual o momento linear dos dois prótons já está definido, pois aí os três corpos que compõem no estado final da reação não interagem mais entre si. Fazemos também, sem perda de generalidade, algumas hipóteses simplificadoras, como: i) perfeita simetria axial em relação ao eixo Ox da Fig. 4.7 abaixo; ii) assumimos que a energia total do decaimento é dada pelo valor do Q da reação (medido direta ou indiretamente no experimento).

Esse Q é a energia disponível para se distribuir no sistema, em seus diferentes graus de liberdade. No regime assintótico é a energia puramente cinética do núcleo-filho em recuo e dos dois prótons espalhados. Para a radioatividade de dois prótons do ^{45}Fe , $Q = 1,154$, e para o ^{54}Zn , $Q = 1,48$.

A nossa suposição básica é que ali, na região assintótica, o estado de oscilação dos prótons na direção transversal traga consigo a assinatura de um estado quântico coerente apontado anteriormente na sua formação. Por outro lado, como a tangente do ângulo final de cada próton com o eixo Ox está determinada pela razão entre as componentes transversal (p_y) e longitudinal (p_x) do momento linear de cada um deles (veja a Fig. 4.7), trabalhamos na representação do momento. Como a transformada de Fourier de uma gaussiana também é uma gaussiana, e o quadrado de uma gaussiana é igualmente uma gaussiana, está correto representar a densidade de probabilidade dos momentos como uma função deste tipo.

Devemos ressaltar que, devido à dificuldade experimental de medir o ângulo final de saída entre os prótons, a estatística do fenômeno é um tanto pobre, o que dá lugar a muitas incertezas.

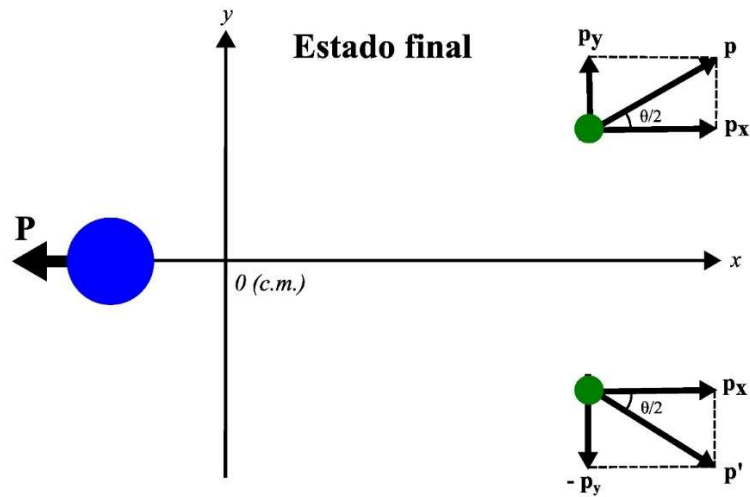


Fig. 4.7. Esquema do sistema núcleo-filho e dois prótons na região assintótica. Em azul está o núcleo-filho e em verde cada um dos prótons ejetados. A origem das coordenadas está no centro de massa do sistema.

Trabalhando nesta região, como as três partículas envolvidas não interagem mais, podemos escrever a conservação do momento e da energia respectivamente como

$$|P_{nuc,x}| = 2|p_x| \quad (4.2)$$

$$\frac{P_{nuc,x}^2}{2M_{nuc}} + \frac{p_x^2}{m} + \frac{p_y^2}{m} = Q \quad (4.3)$$

Aqui, $P_{nuc,x}$, p_x e p_y são respectivamente o momento do núcleo-filho e os momentos longitudinal e transversal de cada próton expelido. Já M_{nuc} e m são as massas do núcleo-filho e do próton, enquanto Q , colocado à mão, é a energia cinética final do sistema.

Substituindo então (4.2) em (4.3), obtemos

$$\frac{2p_x^2}{M_{nuc}} + \frac{p_x^2}{m} + \frac{p_y^2}{m} = Q, \quad (4.4)$$

ou

$$\left(\frac{2m + M_{nuc}}{mM_{nuc}}\right)p_x^2 = Q - \frac{p_y^2}{m} \quad (4.5)$$

Ora, a massa reduzida do sistema de dois prótons e o núcleo-filho vale

$$M_{red} = \frac{2mM_{nuc}}{2m + M_{nuc}} \quad (4.6)$$

e portanto podemos concluir que

$$p_x^2 = \frac{M_{red}}{2} \left(Q - \frac{p_y^2}{m} \right) \quad (4.7)$$

Por outro lado, o ângulo formado entre os dois prótons, o qual é o objeto principal da nossa atenção, é dado por

$$\theta = 2 \arctg \left(\frac{p_y}{p_x} \right) \quad (4.8)$$

Aqui, cabe fazer uma observação que vai nos conduzir à uma conclusão importante: as projeções do momento p_x e p_y aparecem somente na forma quadrática na Eq. (4.7). Por esta razão, fixado o valor do momento p_y , temos as duas soluções (p_x, p_y) e $(-p_x, p_y)$ satisfazendo a mesma. Dessa forma, pela Eq. (4.8), se observamos um ângulo entre os dois prótons, também deve aparecer um ângulo $\pi - \theta$ (veja Fig. 4.8); isso justificaria a presença dos dois picos na distribuição experimental, um centrado em um ângulo agudo θ_1 e outro (de menor amplitude) centrado em um ângulo obtuso θ_2 , que são de fato aproximadamente suplementares (veja Fig. 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5).

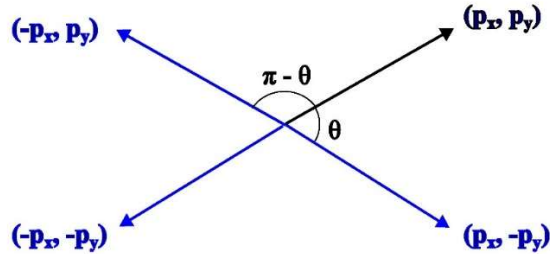


Fig. 4.8. Três matematicamente possíveis estados assintóticos, em azul, do outro próton se um próton é detectado no estado (p_x, p_y) , em preto. Dado este estado, a solução $(-p_x, -p_y)$ deve ser descartada como não física.

4.4. Aspectos quânticos que originam a distribuição angular na nossa proposta

Neste ponto ressaltamos que nosso objetivo consiste em estabelecer a relação entre a distribuição angular dos dois prótons e a densidade de probabilidade do momento transversal p_y na região assintótica. Esta densidade de probabilidade, de origem quântica, estaria associada à função de onda (na representação dos momentos), de forma que a chance do par de prótons ejetados ser emitido cada um deles com momento transversal p_y é dada pelo quadrado do módulo da função de onda associada a este novo grau de liberdade introduzido no ELDM, $\varphi(p_y)$, a qual supomos ser uma gaussiana:

$$\frac{d\wp_{p_y}}{dp_y} = \varphi(p_y)\varphi^*(p_y) \quad (4.9)$$

Precisamos então obter a relação entre esta densidade de probabilidade e a densidade de probabilidade da ocorrência do ângulo θ na emissão. Com este objetivo reescrevendo as Eq. (4.7) e (4.8) como

$$p_x = \left[\frac{M_{red}}{2} \left(Q - \frac{p_y^2}{m} \right) \right]^{1/2} \quad (4.7a)$$

e

$$\frac{p_y}{p_x} = tg \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad (4.8a)$$

podemos obter

$$p_y = \left[\frac{M_{red}}{2} \left(Q - \frac{p_y^2}{m} \right) \right]^{1/2} tg \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad (4.10)$$

Daí, rearranjando os termos nesta última equação, não é difícil concluir que

$$p_y = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{M_{re} Q}{1 + \frac{M_{red}}{2} tg^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)} \right]^{1/2} tg \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad (4.11)$$

Voltando ao nosso fluxo principal de cálculos, precisamos relacionar a distribuição de p_y , ou seja $\frac{d\wp_{p_y}}{dp_y}$, com a do ângulo θ , $\frac{d\wp_{\theta}}{d\theta}$, o que é dado pela fórmula

$$\frac{d\wp_{\theta}}{d\theta} = \frac{d\wp_{p_y}}{dp_y} \frac{1}{|d\theta/dp_y|} \quad (4.12)$$

Vemos então que para isso precisamos calcular quem é o $d\theta/dp_y$, lembrando de tomar o módulo no final. Usando a Eq. (4.8), temos

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dp_y} &= \frac{d}{dp_y} \left[2 \arctg \left(\frac{p_y}{p_x} \right) \right] = \\ &= 2 \frac{d}{dp_y} \left(p_y/p_x \right) \frac{1}{1 + \left(\frac{p_y}{p_x} \right)^2} \end{aligned} \quad (4.13)$$

e a derivada que aparece em (4.13) pode ser calculada como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp_y} \left(p_y/p_x \right) &= \\ &= \frac{p_x (dp_y/dp_y) - p_y (dp_x/dp_y)}{p_x^2} = \\ &= \frac{1}{p_x} - \frac{p_y}{p_x^2} \left(\frac{dp_x}{dp_y} \right) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Por outro lado, lembrando a Eq. (4.7a)

$$p_x = \left[\frac{M_{red}}{2} \left(Q - \frac{p_y^2}{m} \right) \right]^{1/2} \quad (4.7a)$$

segue-se a derivada que aparece em (4.14) pode ser calculada como

$$\begin{aligned}
\frac{dp_x}{dp_y} &= \frac{1}{2} \left[\frac{M_{red}}{2} \left(Q - \frac{p_y^2}{m} \right) \right]^{-1/2} \left(-\frac{M_{red}}{2m} 2p_y \right) = \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{p_x} \left(-\frac{M_{red}}{m} p_y \right) = \\
&= -\frac{M_{red}}{2m} \left(\frac{p_y}{p_x} \right)
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Levando este último resultado à Eq. (4.14), temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dp_y} (p_y/p_x) &= \frac{1}{p_x} + \frac{p_y}{p_x^2} \left[\frac{M_{red}}{2m} \left(\frac{p_y}{p_x} \right) \right] = \\
&= \frac{1}{p_x} \left[1 + \frac{M_{red}}{2m} \left(\frac{p_y}{p_x} \right)^2 \right]
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Agora já podemos escrever o jacobiano. Inserindo o resultado (4.16) em (4.13) e já tomando o módulo:

$$\left| \frac{d\theta}{dp_y} \right| = 2 \frac{1}{|p_x|} \left| 1 + \frac{M_{red}}{2m} \left(\frac{p_y}{p_x} \right)^2 \right| \frac{1}{1 + \left(\frac{p_y}{p_x} \right)^2} \tag{4.17}$$

Invertendo e aplicando esta fórmula na Eq. (4.12), obtemos enfim

$$\frac{d\wp_\theta}{d\theta} = \frac{d\wp_{p_y}}{dp_y} \frac{|p_x| \left[1 + \left(\frac{p_y}{p_x} \right)^2 \right]}{2 \left| 1 + \frac{M_{red}}{2m} \left(\frac{p_y}{p_x} \right)^2 \right|} \tag{4.18}$$

Esta é portanto a relação procurada entre as densidades de probabilidades envolvidas.

4.5. Determinação final da distribuição do ângulo entre os dois prótons emitidos

De posse da Eq. (4.18), que é central nesta dissertação, vamos explicitar o esquema computacional aplicado. A primeira providência que tomamos foi fazer um ajuste (*fitting*) de uma soma de duas gaussianas aos pontos experimentais de $\frac{d\varphi_\theta}{d\theta}$, primeiramente tomados de um histograma ainda não normalizado, com o número de contagens versus cada pequena faixa de ângulos. Para aplicar o método dos mínimos quadrados não linear, deixamos em aberto as amplitudes, os centroides e a variância (assumida como comum) das duas curvas. Conforme já vimos na primeira seção deste capítulo, o resultado desse ajuste é bom, especialmente no caso do ^{45}Fe , com mais pontos experimentais; no caso do ^{54}Zn , o resultado é também bastante razoável.

Fazendo estes ajustes, obtemos os dois máximos locais (θ_1 e θ_2) de $\frac{d\varphi_\theta}{d\theta}$, computando então, pela Eq. (4.11), quais são os momentos ($p_{y,1}$, $p_{y,2}$) que correspondem a esse par de ângulos. Os momentos encontrados são assumidos, em primeira aproximação, como os máximos locais da soma das gaussianas que representam a distribuição de probabilidade:

$$\begin{aligned} & \frac{d\varphi_{p_y}}{dp_y} \\ &= N \left\{ \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{p_y - p_{y,1}}{\sigma_p} \right)^2 \right] + \beta \right. \\ & \cdot \left. \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{p_y - p_{y,1}}{\sigma_p} \right)^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.19)$$

onde

$$N = [(1 + \beta)\sqrt{2\pi} \sigma_p]^{-1} \quad (4.20)$$

é a normalização. β e σ_p são parâmetros livres, os únicos a serem ajustados para que a curva predita se ajuste aos dados experimentais. Notamos que o parâmetro β corresponde ao fator de atenuação para a contribuição do tipo de evento de dissociação do diprótton que gera ângulos em torno do ângulo suplementar (como discutido na seção 4.3 depois de apresentar a Eq. (4.8)), atenuação essa sobre a qual discorreremos nossa conjectura ao final desta seção.

Na Tabela 4.3, vemos os valores encontrados dos ângulos e os momentos transversais para ambos os núclídeos analisados nesta dissertação.

Tabela 4.3. Ângulos medidos em graus e momentos em $\frac{MeV}{c^2}$.

	^{45}Fe	^{54}Zn
θ_1	54,8	65,7
θ_2	135,2	115,2
$p_{y,1}$	14,9	19,9
$p_{y,2}$	30,3	31,3

Agora, já conhecidos os centroides $p_{y,1}$ e $p_{y,2}$ das duas gaussianas, varrendo θ entre 0° e 180° e aplicando sempre a Eq. (4.11), podemos dizer que conhecemos a distribuição de probabilidade $\frac{d\wp_{py}}{dp_y}$, a menos dos parâmetros β e σ_p .

Mas o Jacobiano da transformação $\frac{d\wp_{py}}{dp_y} \rightarrow \frac{d\wp_\theta}{d\theta}$, dado por (4.17), também pode ser expresso exclusivamente em função do ângulo θ entre os prótons, já que ele só depende das variáveis p_y e p_x , e, conforme já vimos, o momento transversal p_y só depende de θ [pela Eq. (4.11)] e p_x é dado em função de

p_y pela Eq. (4.7a). Portanto, podemos dizer que conhecemos numericamente a distribuição de probabilidade $\frac{d\varphi_\theta}{d\theta}$, a menos dos dois já citados parâmetros livres β e σ_p .

Finalmente ressaltamos que a variância σ_p é tomada como igual para as duas gaussianas porque acreditamos que ela é própria da formação do estado coerente do dipróton, independente da situação final de sua propagação.

Por outro lado, no concerne ao parâmetro β , especulamos que a justificativa para que o segundo pico ser mais atenuado seja o fato do dipróton poder se formar um pouco mais para dentro da superfície nuclear ou um pouco mais para fora (veja a Fig. 4.6). Dessa forma, o dipróton que se forma um pouco abaixo dessa superfície tem que superar uma barreira de potencial maior, o que atenuaria o seu momento longitudinal, levando a ângulos maiores. Ademais, pela própria dificuldade de superar essa barreira maior, os casos de libertação do núcleo seriam menos frequentes, e portanto o pico do ângulo maior seria atenuado.

Capítulo 5

Resultados, conclusões e perspectivas

5.1. Resultados do nosso modelo

O primeiro resultado que temos, já subentendido e produto do nosso primeiro tratamento de dados (o ajuste pela soma de duas gaussianas), é sobre a soma dos ângulos dos picos destas gaussianas. A nossa previsão, baseada no argumento colocado no primeiro parágrafo depois da equação (4.7), na seção 3 do capítulo anterior, é que $\theta_1 + \theta_2 = 180^\circ$, ou seja, θ_1 e θ_2 são ângulos suplementares.

De fato, somando para cada um dos dois núclídeos estudados aqui estes ângulos dos picos, mostrados na Tabela 4.3, obtemos

$$\theta_1 + \theta_2 = 190,0^\circ \quad (\text{para o } {}^{45}\text{Fe})$$

$$\theta_1 + \theta_2 = 180,9^\circ \quad (\text{para o } {}^{54}\text{Zn})$$

Portanto, os erros das previsões são 5,6% para o ${}^{45}\text{Fe}$ e 0,50% para o ${}^{54}\text{Zn}$, o que é um excelente resultado obtido de um argumento muito simples – diante da complexidade do fenômeno da radioatividade de dois prótons e da escassez de dados existentes.

Mas o ponto central da dissertação é justificar os dados que temos em mãos em termos da propagação assintótica dos prótons como estados coerentes do movimento relativo entre eles, tendo sido este grau de liberdade introduzido no ELDM para gerar a distribuição angular em questão. Os resultados finais são mostrados nas Fig. 5.1 e 5.2. Todas as curvas e inclusive o histograma, estão normalizadas pela área por eles subentendidas.

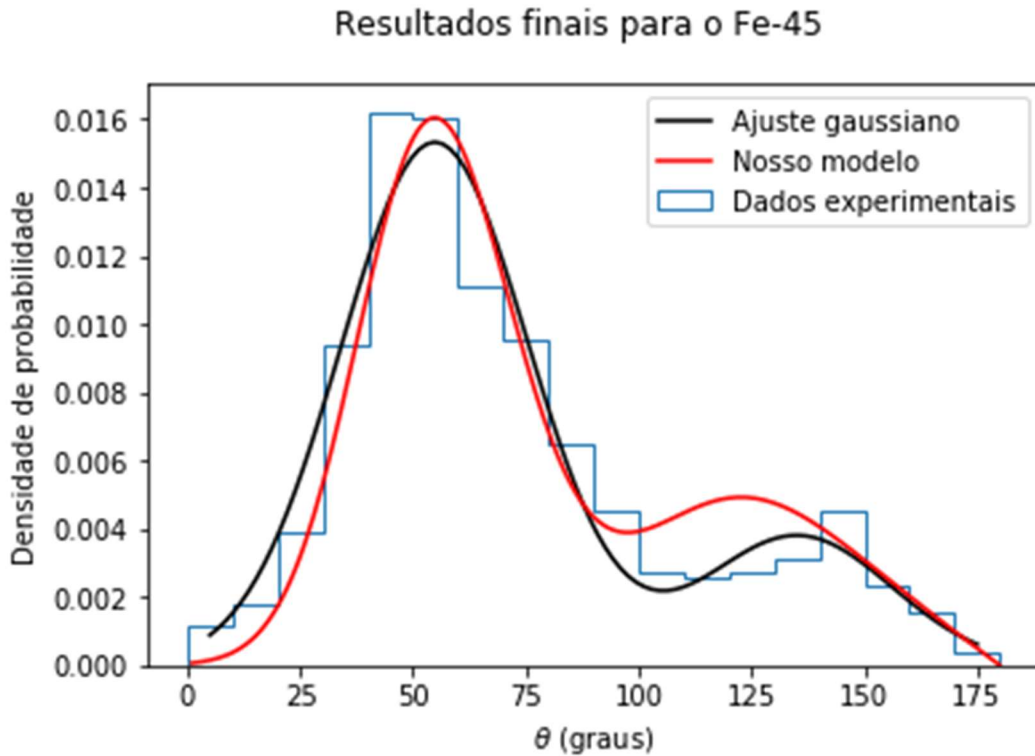


Fig. 5.1. Resultado previsto pelo nosso modelo (em vermelho) para a seção de choque da radioatividade de dois prótons do ^{45}Fe . Em azul, aparece o histograma experimental (já normalizado) e, em preto, o ajuste pela soma de duas gaussianas. Vemos que o ajuste é bom para o primeiro pico, mas no segundo há uma certa não coincidência das duas curvas.

Os valores encontrados utilizam apenas dois parâmetros livres dentro da proposta apresentada, levando a resultados bastante satisfatórios na concordância com os dados experimentais disponíveis.

Os valores destes parâmetros são mostrados na Tabela 5.1. Estes parâmetros, σ_p e β , representam respectivamente a largura do estado coerente na sua formação (na atmosfera nuclear) e a atenuação do estado no ângulo suplementar, devido à perda de coerência do mesmo por ter sido formado numa região mais densa da atmosfera.

Na Tabela 5.2, estão medidas da qualidade dos dois ajustes (da dupla gaussiana e do nosso modelo) aos dados experimentais da radioatividade de dois prótons (já normalizados) no concerne ao ângulo final entre estas partículas, medidas essas feitas através da raiz quadrada do desvio médio quadrático (σ_{rms}).

Resultados finais para o Zn-54

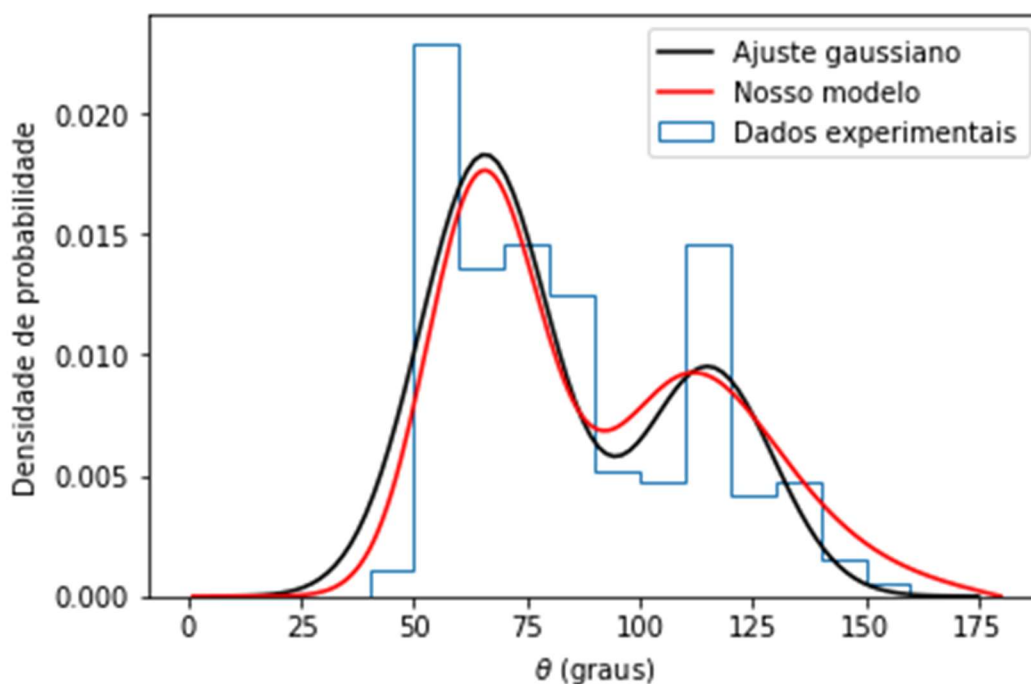


Fig. 5.2. Resultado previsto pelo nosso modelo (em vermelho) para a seção de choque da radioatividade de dois prótons do ^{54}Zn . Em azul, aparece o histograma experimental (já normalizado) e, em preto, o ajuste pela soma de duas gaussianas. Vemos que as duas curvas praticamente coincidem.

Tabela 5.1. Parâmetros encontrados no ajuste do nosso modelo (em vermelho) aos dados experimentais nas Fig. 5.1 e 5.2. Os dois parâmetros ajustados foram σ_p [a variância de cada gaussiana na função representada na Eq. (4.19)] e β (uma constante de atenuação do segundo pico). A variância σ_p é medida em $\frac{\text{MeV}}{c}$ e β é adimensional.

	^{45}Fe	^{54}Zn
σ_p	4,4	3,5
β	0,4	0,6

Tabela 5.2 - Desvio médio quadrático dos ajustes da dupla gaussiana e da previsão do nosso modelo aos dados experimentais. Todas as curvas e histogramas estão normalizados, e os valores de σ_{rms} medem a qualidade dos ajustes. Observe que os dois ajustes pelo nosso modelo são um pouco melhores, mas isto não é conclusivo pois a margem de erro deve ser suposta razoavelmente grande.

	σ_{rms} (dupla gaussiana)	σ_{rms} (nosso modelo)
^{45}Fe	0,0016	0,0013
^{54}Zn	0,0037	0,0034

A seguir, mostramos as curvas da densidade de probabilidade $\frac{d\phi_{py}}{dp_y}$ para os dois radionuclídeos em foco, já com os dois parâmetros σ_p e β ajustados.

Densidade de probabilidade do momento transversal para o Fe-45

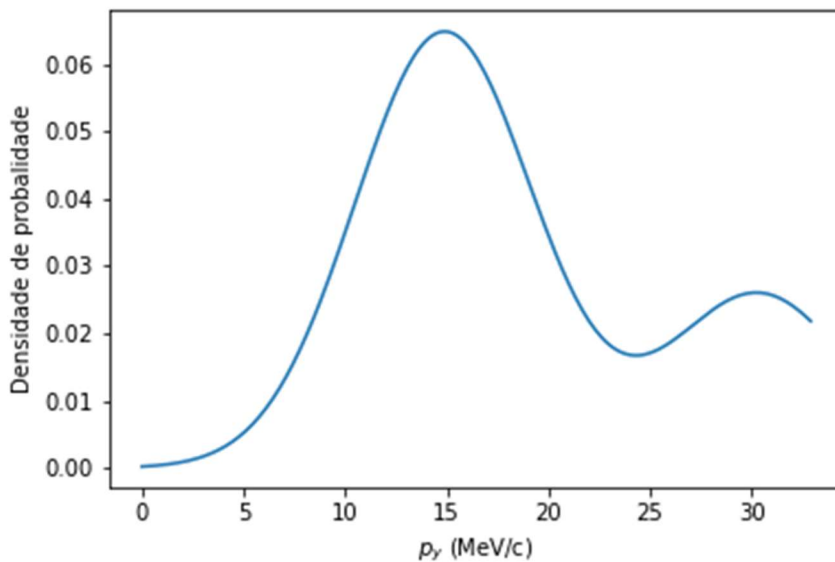


Fig. 5.3. Densidade de probabilidade do momento transversal para o ^{45}Fe . Os valores de p_y só vão até 32,9 MeV/c, pela razão explicada no corpo do texto.

Densidade de probabilidade do momento transversal para o Zn-54

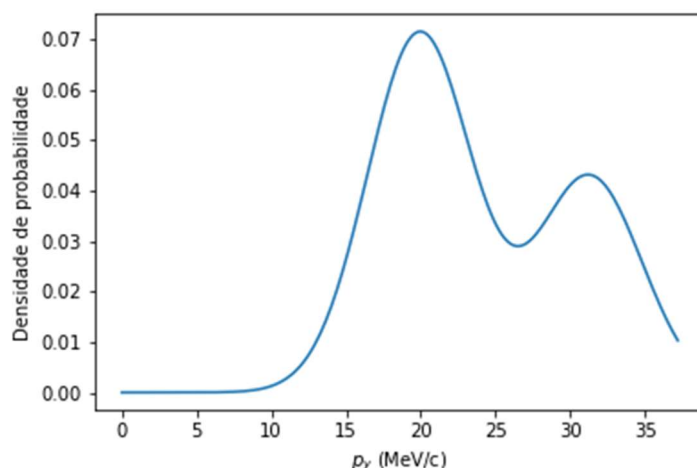


Fig. 5.4. Densidade de probabilidade do momento transversal para o ^{54}Zn . Os valores de p_y só vão até $37,2 \text{ MeV}/c$, pela razão explicada no corpo do texto.

Por causa da equação (4.7), como p_x não pode ser imaginário, os valores de p_y estão truncados em $32,9 \text{ MeV}/c$ para o ^{45}Fe e em $37,2 \text{ MeV}/c$ no caso do ^{54}Zn .

5.2. Conclusões e perspectivas

A nossa proposta de análise dos dados mostrou consistência, com bastante concordância com os dados experimentais dos dois núclídeos em que a distribuição angular dos dois prótons foi objeto de medida. Para sua consolidação precisamos no entanto de uma base mais rica, o que exige novos experimentos.

O ELDM, cujo desenvolvimento é fruto de uma colaboração interestadual e internacional (no âmbito latino-americano), já tem um bom histórico de determinação de meias-vidas em um largo espectro de decaimentos nucleares [26, 30]. Agora, com a continuação que fizemos com a proposta de análise da distribuição angular dos dois prótons, o modelo fica enriquecido como ferramenta de previsões para novos núclídeos emissores da radioatividade de dois prótons.

Como perspectiva inicial, pretendemos estender a proposta desenvolvida aqui a outros sistemas nucleares fracamente ligados. Por outro lado, tornam-se necessárias outras medidas de distribuição angular da radioatividade de dois prótons, seja com uma estatística mais robusta

para os dois nuclídeos estudados aqui, ou para outros nuclídeos que apresentam esse tipo de decaimento para os quais ainda se carece desse tipo de dado. Nesse caso, poderíamos testar melhor o nosso modelo.

Para finalizar, chamamos a atenção que resultados para a radioatividade de dois prótons, por núcleos ricos em prótons, são também válidos (devidamente adaptados) para a radioatividade de dois nêutrons, na região da tabela de nuclídeos ricos em nêutrons. Na atualidade ambas as regiões são de exploração intensa, tanto teórica como experimental, devido a sua grande importância no contexto da nucleossíntese estelar, pela presença desses nuclídeos em reatores de última geração e em processos de reações nucleares com núcleos exóticos. Portanto essa é uma área bastante fértil e ativa da física nuclear nos presentes dias.

Referências:

- [1] M. Thoennessen, Discovery of Nuclides Project, <https://people.nscl.msu.edu/~thoennes/isotopes/> . Acessado em 16 de janeiro de 2023.
- [2] Jochen Erler *et al.*, The limits of nuclear landscape, *Nature* **486**, 509-512 (2012).
- [3] Figura baixada de https://www.researchgate.net/figure/Chart-of-nuclides-Figure-from-Holifield-Radioactive-Ion-Beam-Facility-Oak-Ridge_fig1_45874749 . Acessada em 15 de janeiro de 2023.
- [4] H. Schechter e C.A. Bertulani, Introdução à Física Nuclear, Editora UFRJ (2007).
- [5] M. Thoennessen e B. Sherrill, From isotopes to stars, *Nature* **473**, 25-26 (2011).
- [6] Thoennessen, Michael, and Baumann, Thomas, Proton and neutron drip lines, 2016.
<https://people.nscl.msu.edu/~thoennes/personal/papers/McGraw-2016.pdf>
Acessado em 16 de janeiro de 2023.
- [7] V. Goldansky, On neutron-deficient isotopes of light nuclei and the phenomena of proton and two-proton radioactivity, *Nucl. Phys.* **19** (1960) 482-495.
- [8] S. Hofmann *et al.*, Proton radioactivity of ^{151}Lu , *Z. Phys. A* **305**, 111 (1982).
- [9] B. Blank *et al.*, First Observation of the $T_z = -7/2$ Nuclei ^{45}Fe and ^{49}Ni , *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2893 (1996).
- [10] M. Pfützner *et al.*, First evidence for two-proton decay of ^{45}Fe , *Eur. Phys. J. A* **14**, 279 (2002).
- [11] J. Giovinazzo *et al.*, Two-proton radioactivity of ^{45}Fe , *Phys. Rev. Lett.* **89**, 102501 (2002).
- [12] K. Miernik *et al.*, Two-proton correlations in the decay of ^{45}Fe , *Phys. Rev. Lett* **99**, 192501 (2007).

- [13] B. Blank *et al.*, First observation of ^{54}Zn and its decay by two-proton emission, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 232501 (2005).
- [14] B. Blank *et al.*, On the discovery of doubly-magic ^{48}Ni , *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1116-1119 (2000).
- [15] C. Dossat *et al.*, Two-proton radioactivity studies with ^{45}Fe and ^{48}Ni , *Phys. Rev. C* **72**, 054315 (2005).
- [16] P. Ascher *et al.*, Direct observation of two protons in the decay of ^{54}Zn , *Phys. Rev. Lett.* **107**, 102502 (2011).
- [17] I. Mukha *et al.*, Proton-proton correlations observed in two-proton radioactivity of ^{94}Ag , *Nature* **439**, 298-302 (2006).
- [18] T. Goigoux *et al.*, Two-proton radioactivity of ^{67}Kr , *Phys. Rev. Lett.* **117**, 162501 (2016).
- [19] P. Voss *et al.*, ^{19}Mg two-proton decay lifetime, *Phys. Rev. C* **90**, 014301 (2014).
- [20] B.A. Brown, Diproton decay of nuclei on the proton drip line, *Phys. Rev. C* **43** (1991) R1513-R1517. Veja também erratum: *Phys. Rev. C* **44** (1991) 924.
- [21] W.E. Ormand, Properties of proton drip-line nuclei at the sd-fp-shell interface, *Phys. Rev. C* **53** (1996) 214-221.
- [22] W. Nazarewicz *et al.*, Structure of proton drip-line nuclei around doubly magic ^{48}Ni , *Phys. Rev. C* **53** (1996) 740-751.
- [23] B.J. Cole, Stability of proton-rich nuclei in the upper sd shell and lower pf shell, *Phys. Rev. C* **54** (1996), 1240-1248.
- [24] L.V. Grigorenko *et al.*, Two-proton radioactivity and three-body decay: general problems and theoretical approach, *Phys. Rev. C* **64** (2001) 054002.
- [25] L.V. Grigorenko *et al.*, Two-proton radioactivity and three-body decay. 2. Exploratory studies of lifetimes and correlations, *Phys. Rev. C* **68** (2003) 054005.
- [26] M. Gonçalves *et al.*, Two-proton emission half-lives in the effective liquid drop model, *Phys. Lett. B* **774** (2017) 14-19.
- [27] O.A.P. Tavares *et al.*, A calculation model to half-life estimate of two-proton radioactive decay process, *The Eur. Phys. Journal A* **54**: 65 (2018).

- [28] J.P. Cui *et al.*, Two-proton radioactivity within a generalized liquid drop model, *Phys. Rev. C* **101** (2020) 014301.
- [29] Yuan, Z. *et al.*, Research on two-proton radioactivity in density-dependent cluster model, *Sci. China Phys. Mech. Astron.*, **66** 222012 (2023).
- [30] S.B. Duarte *et al.*, Half-lives for proton emission, alpha decay, cluster radioactivity and cold fission processes calculated in a unified theoretical framework, *At. Data Nucl. Data Tables* **80** (2002) 235-299.
- [31] M. Gaudin, Énergie coulombienne du solide uniformément chargé limité par deux sphères sécantes, *J. Phys.* **35** (1974) 885-894.
- [32] M. Gonçalves *et al.*, Effective liquid drop description for the exotic decay of nuclei, *Phys. Rev. C* **48** (1993) 2409-2414.
- [33] F. Gúzman *et al.*, Proton radioactivity from proton-rich nuclei, *Phys. Rev.* **59** R2339 (1999).
- [34] M. Cwiok *et al.*, Optical Time Projection Chamber for Imaging of Two-Proton Decay of ^{45}Fe Nucleus, *IEEE Trans. Nucl. Sc.*, **52**, 6 (2005).
- [35] K. Miernik *et al.*, Optical Time Projection Chamber for imaging nuclear decays, *Nucl. Instr. Meth. Phys. Res A*, **581**, 194-197 (2007).
- [36] G. Charpak *et al.*, The Multistep Avalanche Chamber: A New High-Rate, High-Accuracy Gaseous Detector, *Phys. Lett.* **78B**, 4 (1978).
- [37] W. Huang *et al.*, The AME2016 atomic mass evaluation (I), Evaluation of input data, *Chin. Phys. C* **41** (2017) 030002.
- [38] M. Wang *et al.*, The AME2016 atomic mass evaluation (II), Tables, graphs and references, *Chin. Phys. C* **41** (2017) 030003.
- [39] B. Blank *et al.*, Two-proton radioactivity as a tool of nuclear structure studies, *Acta Physica Polonica B*, **42** 545 (2011).

Apêndice

Programas em Python utilizados na dissertação

Código para o ^{45}Fe :

```
# Angular distribution of two-proton radioactivity of Fe-45:
# histogram, double gaussian fitting and our model prevision
# Code by Henrique Davidovich
# October 3rd, 2022, CBPF

import time

ini = time.time()

import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import curve_fit
import numpy as np
import math

Pi = math.pi

# Physical parameters

u = 931.4940954
m = 938.2720813
M = 42.99771*u
Mred = (2*m*M)/(2*m+M)
Q = 1.154

# Function to construct the distribution of momenta
```



```

def func(x, A, mu, sigma):
    return A * np.exp(-((x-mu)/sigma)**2/2)

def sumgauss(x, A1, mu1, sigma, A2, mu2):
    return func(x, A1, mu1, sigma) + func(x, A2, mu2, sigma)

# Defining the data to be fitted:

bins = [0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 120, 130, 140, 150, 160, 170, 180]
counts = [3, 4.5, 10, 24, 41.5, 41, 28.5, 24.5, 16.5, 11.5, 7, 6.5, 7, 8, 11.5, 6, 4, 1]

for l in range(0, 18):
    counts[l] = 0.28915*counts[l]

fig = plt.figure()

plt.hist(bins[:-1], bins, weights=counts, histtype='step')
plt.xlabel(r'$\theta$ (graus)')
plt.ylabel('Contagens')
plt.suptitle('Histograma da distribuicao angular do Fe-45')
plt.show()

xdata = np.linspace(5, 175, 18)
ydata = [3, 4.5, 10, 24, 41.5, 41, 28.5, 24.5, 16.5, 11.5, 7, 6.5, 7, 8, 11.5, 6, 4, 1]
for l in range(0, 18):
    ydata[l] = 0.28915*ydata[l]

# Fit for the parameters A1, mu1, sigma1, A2, mu2 the function sumgauss

popt, pcov = curve_fit(sumgauss, xdata, ydata, p0=[10, 54, 20, 3, 140])

```

```

xdata2 = np.linspace(5, 175, 171)
plt.plot(xdata2, sumgauss(xdata2, *popt), 'k-')
plt.hist(bins[:-1], bins, weights=ydata, histtype='step')
plt.xlabel(r'$\theta$ (graus)')
plt.ylabel('Contagens')
plt.suptitle('Ajuste aos dados experimentais do Fe-45')
plt.show()

(A1, mu1, sigma, A2, mu2) = pop

sumgaussdiscr = sumgauss(xdata2, A1, mu1, sigma, A2, mu2)
mse = 0
for i in range(0, (len(xdata)-1)):
    mse = mse + (ydata[i]-sumgaussdiscr[5+10*i])**2
mse = mse/len(xdata)
rms = math.sqrt(mse)
print("root-mean-squared deviation =", rms, end='\n')

# Normalization constant

NA = 1/(A1*sigma*math.sqrt(2*Pi)+A2*sigma*math.sqrt(2*Pi))

# Discovering the momenta of maxima

thetarad1 = (Pi/180)*mu1
thetarad2 = (Pi/180)*mu2

pymu1 =
(math.sqrt((1/2)*((Mred*Q)/(1+((Mred/(2*m))*((math.tan(thetarad1/2))**2))))))*((math.tan(t
hetarad1/2))

```

```

pymu2 =
(math.sqrt((1/2)*((Mred*Q)/(1+((Mred/(2*m))*((math.tan(thetarad2/2))**2))))))*(math.tan(t
hetarad2/2))

# Adjustable parameter (variance of momenta distribbution)

pysigma = 4.4

for i in range(0, len(xdata)):
    ydata[i] = NA*ydata[i]
plt.plot(xdata2, NA*sumgauss(xdata2, *popt), 'k-')

plt.xlabel(r'$\theta$ (degrees)')
plt.ylabel('Probability density')

beta = 0.4 # adjustable parameter (attenuation constant)
pyB = 1/((1+beta)*pysigma*math.sqrt(2*Pi))

InvJ = [0 for i in range(180)]
Ppy = [0 for i in range(180)]
Ptheta = [0 for i in range(180)]
theta = np.linspace(1, 180, 180)
theta = (Pi/180)*theta
for i in range(0, 179):
    py =
math.sqrt((1/2)*(Mred*Q)/(1+(Mred/(2*m))*math.tan(theta[i]/2)**2))*math.tan(theta[i]/2)
    px = math.sqrt((Mred/2)*(Q-(py**2)/m))
    InvJ[i] =
(px/2)*(1+(math.tan(theta[i]/2))**2)/(1+(Mred/(2*m))*(1+(math.tan(theta[i]/2))**2)))
    Ppy[i] = ((math.exp((-1/2)*((py-pymu1)/pysigma)**2))+beta*(math.exp((-1/2)*((py-
pymu2)/pysigma)**2)))
    Ptheta[i] = (1/24)*Ppy[i]*InvJ[i]
theta = (180/Pi)*theta

```

```
# Normalization of Ptheta (Simpson's rule)
```

```
N = 180
```

```
h = 180/N
```

```
Sum = Ptheta[0]
```

```
fac = 2
```

```
for j in range(1, N):
```

```
    if fac==2:
```

```
        fac=4
```

```
    else:
```

```
        fac=2
```

```
    Sum = Sum + Ptheta[j]*fac
```

```
Sum = Sum + Ptheta[N-1]
```

```
integral = (h/3)*Sum
```

```
print('integral = ', integral)
```

```
for k in range(0, N):
```

```
    Ptheta[k] = (1/integral)*Ptheta[k]
```

```
bins = [0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 120, 130, 140, 150, 160, 170, 180]
```

```
counts = [3, 4.5, 10, 24, 41.5, 41, 28.5, 24.5, 16.5, 11.5, 7, 6.5, 7, 8, 11.5, 6, 4, 1]
```

```
#fig = plt.figure()
```

```
plt.hist(bins[:-1], bins, density=True, weights=counts, histtype='step')
```

```
plt.plot(theta, Ptheta, 'r')
```

```
plt.xlabel(r'$\theta$ (graus)')
```

```
plt.ylabel('Densidade de probabilidade')
```

```
plt.suptitle('Resultados finais para o Fe-45')
```

```

plt.legend(['Ajuste gaussiano', 'Nosso modelo', 'Dados experimentais'])
plt.show()

# Plotting the transversal momentum distribution

pydata = np.linspace(0, 32.9, 200)
plt.plot(pydata, sumgauss(pydata, pyB, pymu1, pysigma, beta*pyB, pymu2))
plt.xlabel(r'$p_y$ (MeV/c)')
plt.ylabel('Densidade de probabilidade')
plt.suptitle('Densidade de probabilidade do momento transversal para o Fe-45')

# Computing rms deviations

sumgaussdiscr = (NA*sumgauss(xdata2, A1, mu1, sigma, A2, mu2))
mse = 0
for i in range(0, len(xdata)-1):
    mse = mse + (ydata[i]-sumgaussdiscr[5+10*i])**2
mse = mse/(len(xdata))
rms1 = math.sqrt(mse)
print("root-mean-squared deviation of normalized gaussian fitting =", rms1, end='\n')

mse = 0
for i in range(0, len(xdata)-1):
    mse = mse + (ydata[i]-Ptheta[5+10*i])**2
mse = mse/(len(xdata))
rms2 = math.sqrt(mse)
print("root-mean-squared deviation of our model =", rms2, end='\n')

end = time.time()
duration = end - ini
print('Processing time =', duration, 'seconds')

```

Código para o ^{54}Zn :

```
# Angular distribution of two-proton radioactivity of Zn-54:
# histogram, double gaussian fitting and our model prevision
# Code by Henrique Davidovich
# September 21st, 2022, CBPF

import time
ini = time.time()

import numpy as np
import math
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import curve_fit

# Physical parameters

u = 931.4940954
m = 938.2720813
M = 51.97568*u
Mred = (2*m*M)/(2*m+M)
Q = 1.48

Pi = math.pi

def func(x, A, mu, sigma):
    return A * np.exp(-(((x-mu)/sigma)**2)/2)

def sumgauss(x, A1, mu1, sigma, A2, mu2):
    return func(x, A1, mu1, sigma) + func(x, A2, mu2, sigma)
```

```
# Defining the data to be fitted:
```

```
bins = [0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 120, 130, 140, 150, 160, 170, 180]
```

```
counts = [0, 0, 0, 0, 1, 22, 13, 14, 12, 5, 4.5, 14, 4, 4.5, 1.5, 0.5, 0, 0]
```

```
for l in range(0, 18):
```

```
    counts[l] = (1.6/22)*counts[l]
```

```
fig = plt.figure()
```

```
plt.hist(bins[:-1], bins, weights=counts, histtype='step')
```

```
plt.xlabel(r'$\theta$ (graus)')
```

```
plt.ylabel('Contagens')
```

```
plt.suptitle('Histograma da distribuicao angular do Zn-54')
```

```
plt.show()
```

```
xdata = np.linspace(5, 175, 18)
```

```
ydata = counts #[0, 0, 0, 0, 1, 22, 13, 14, 12, 5, 4.5, 14, 4, 4.5, 1.5, 0.5, 0, 0]
```

```
# Fit for the parameters A1, mu1, sigma1, A2, mu2 the function sumgauss
```

```
popt, pcov = curve_fit(sumgauss, xdata, ydata, p0=[20, 50, 20, 12, 120])
```

```
xdata2 = np.linspace(5, 175, 171)
```

```
plt.hist(bins[:-1], bins, weights=counts, histtype='step')
```

```
plt.plot(xdata2, sumgauss(xdata2, *popt), 'k-')
```

```
plt.xlabel(r'$\theta$ (graus)')
```

```
plt.ylabel('Contagens')
```

```
plt.suptitle('Ajuste aos dados experimentais do Zn-54')
```

```
plt.show()
```

```

(A1, mu1, sigma, A2, mu2) = popt

sumgaussdiscr = sumgauss(xdata2, A1, mu1, sigma, A2, mu2)

mse = 0
for i in range(0, (len(xdata)-1)):
    mse = mse + (ydata[i]-sumgaussdiscr[5+10*i])**2
mse = mse/len(xdata)
rms = math.sqrt(mse)
print("root-mean-squared deviation =", rms, end='\n')

# Normalization constant

NA = 1/(A1*sigma*math.sqrt(2*Pi)+A2*sigma*math.sqrt(2*Pi))

# Discovering the momenta of maxima

thetarad1 = (Pi/180)*mu1
thetarad2 = (Pi/180)*mu2

pymu1 =
(math.sqrt((1/2)*((Mred*Q)/(1+((Mred/(2*m))*((math.tan(thetarad1/2))**2))))))*((math.tan(t
hetarad1/2))

pymu2 =
(math.sqrt((1/2)*((Mred*Q)/(1+((Mred/(2*m))*((math.tan(thetarad2/2))**2))))))*((math.tan(t
hetarad2/2))

# Adjustable parameter (variance of momenta distribution)

pysigma = 3.5

for i in range(0, len(xdata)):
    ydata[i] = NA*ydata[i]

```



```

plt.plot(xdata, ydata, 'kx', label='Normalized data')
plt.plot(xdata2, NA*sumgauss(xdata2, *popt), 'k-')

plt.xlabel(r'$\theta$ (graus)')
plt.ylabel('Densidade de probabilidade')

beta = 0.6 # attenuation constant
pyB = 1/((1+beta)*pysigma*math.sqrt(2*Pi))

InvJ = [0 for i in range(180)]
Ppy = [0 for i in range(180)]
Ptheta = [0 for i in range(180)]
theta = np.linspace(1, 180, 180)
theta = (Pi/180)*theta
for i in range(0, 179):
    py =
math.sqrt((1/2)*(Mred*Q)/(1+(Mred/(2*m))*math.tan(theta[i]/2)**2))*math.tan(theta[i]/2)
    px = math.sqrt((Mred/2)*(Q-(py**2)/m))
    InvJ[i] =
(px/2)*(1+(math.tan(theta[i]/2)**2)/(1+(Mred/(2*m))*(1+(math.tan(theta[i]/2)**2))))
    Ppy[i] = pyB*((math.exp((-1/2)*((py-pymu1)/pysigma)**2))+beta*(math.exp((-1/2)*((py-
pymu2)/pysigma)**2)))
    Ptheta[i] = (1/24)*Ppy[i]*InvJ[i]
theta = (180/Pi)*theta

# Normalization of Ptheta (Simpson's rule)

N = 180
h = 180/N

Sum = Ptheta[0]
fac = 2

```

```

for j in range(1, N):
    if fac==2:
        fac=4
    else:
        fac=2
    Sum = Sum + Ptheta[j]*fac
Sum = Sum + Ptheta[N-1]
integral = (h/3)*Sum
print('integral = ', integral)

for k in range(0, N):
    Ptheta[k] = (1/integral)*Ptheta[k]

bins = [0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 120, 130, 140, 150, 160, 170, 180]
counts = [0, 0, 0, 0, 1, 22, 13, 14, 12, 5, 4.5, 14, 4, 4.5, 1.5, 0.5, 0, 0]
plt.hist(bins[:-1], bins, density=True, weights=counts, histtype='step')

plt.plot(theta, Ptheta, 'r')
plt.xlabel(r'$\theta$ (graus)')
plt.ylabel('Densidade de probabilidade')
plt.suptitle('Resultados finais para o Zn-54')
plt.legend(['Ajuste gaussiano', 'Nosso modelo', 'Dados experimentais'])
plt.show()

# Plotting the transversal momentum distribution

pydata = np.linspace(0, 37.2, 200)
plt.plot(pydata, sumgauss(pydata, pyB, pymu1, pysigma, beta*pyB, pymu2))
plt.xlabel(r'$p_y$ (MeV/c)')
plt.ylabel('Densidade de probabilidade')
plt.suptitle('Densidade de probabilidade do momento transversal para o Zn-54')

```

```
# Computing rms deviations
```

```
sumgaussdiscr = (NA*sumgauss(xdata2, A1, mu1, sigma, A2, mu2))
```

```
mse = 0
```

```
for i in range(0, len(xdata)-1):
```

```
    mse = mse + (ydata[i]-sumgaussdiscr[5+10*i])**2
```

```
mse = mse/(len(xdata))
```

```
rms1 = math.sqrt(mse)
```

```
print("root-mean-squared deviation of normalized gaussian fitting =", rms1, end='\n')
```

```
mse = 0
```

```
for i in range(0, len(xdata)-1):
```

```
    mse = mse + (ydata[i]-Ptheta[5+10*i])**2
```

```
mse = mse/(len(xdata))
```

```
rms2 = math.sqrt(mse)
```

```
print("root-mean-squared deviation of our model =", rms2, end='\n')
```

```
end = time.time()
```

```
duration = end - ini
```

```
print('Processing time =', duration, 'seconds')
```