



CBPF

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Amanda Guerrieri Melchior

**Um estudo sobre meios eletromagnéticos não-lineares
em espaços-convexos**

RIO DE JANEIRO

2023



Amanda Guerrieri Melchior

UM ESTUDO SOBRE MEIOS ELETROMAGNÉTICOS NÃO-LINEARES EM
ESPAÇOS-CURVOS

tese de mestrado apresentada à Banca
Examinadora do Centro Brasileiro de Pesquisas
Físicas, como parte dos requisitos para
obtenção do título de mestre em Física sob
orientação do Prof. Dr. Mário Novello

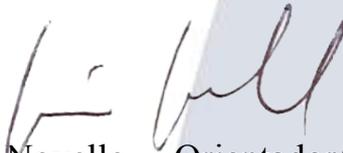
RIO DE JANEIRO

2023

“UM ESTUDO SOBRE MEIOS ELETROMAGNÉTICOS NÃO-LINEARES EM
ESPAÇOS-CURVOS”

AMANDA GUERRIERI MELCHIOR

Dissertação de Mestrado em Física apresentada no
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do
Ministério da Ciência Tecnologia e Inovação.
Fazendo parte da banca examinadora os seguintes
professores:



Mário Novello – Orientador/CBPF



Vitorio Alberto de Lorenci - UNIFEI



José Abdala Helayel-Neto - CBPF

Rio de Janeiro, 24 de janeiro de 2023.

À todos que passaram por esta pandemia, com suas dores e desafios.

Esse trabalho é dedicado ao meu irmão, Alexandre.

Agradecimentos

Esses foram anos difíceis, repletos de ansiedades, tristezas, frustrações e incompreensões. Nós dependemos e precisamos uns dos outros mais do que gostaríamos de admitir. Felizmente, houveram pessoas ao meu lado nestes momentos que me ajudaram, na medida do possível, a prosseguir. Algumas das quais eu jamais imaginei que se importavam. A essas, a minha profunda admiração e gratidão.

Agradeço especialmente ao meu orientador, Dr. Mário Novello, e ao meu ex-orientador, Dr. Rodrigo Ferreira Sobreiro, por me apoiarem durante a minha carreira acadêmica e me desafiarem a trabalhar com pesquisa. Foi um honra ter conhecido e ter sido orientada pelo Dr. Mário Novello durante o meu mestrado acadêmico. Sempre lembrarei desses dois pesquisadores com muito carinho, em particular, lembrarei de todos os anos que passei durante a minha graduação na Universidade Federal Fluminense (UFF). O Dr. Rodrigo, sem dúvidas, foi um divisor de águas na minha formação, sem o qual eu não estaria aqui hoje.

Sinto um enorme carinho pelos meus colegas da UFF e pelos meus antigos professores. Cito, em especial, meus amigos do grupo < *Bra|Kets* > e a Dr. Raissa Mendes, que segue me inspirando até os dias de hoje. Agradeço sua enorme paciência. Dedico esse trabalho aos que se foram durante a pandemia do coronavírus. Em especial, ao meu irmão e a minha querida amiga, Lilyane. Uma parte importante de mim se foi com eles.

Agradeço a todos que tiveram paciência comigo ao longo desses anos. Em particular, agradeço à Nadine de Campos por todo suporte emocional durante essa etapa da minha vida, e a minha avó materna, Wilma, por me incentivar a prosseguir na carreira acadêmica e me dar o apoio necessário para estar aqui. Por fim, agradeço à CAPES pelo suporte financeiro. Desejo que todos enxerguem uns aos outros com mais empatia.

Resumo

Nesse trabalho, consideramos um meio dielétrico não-linear circundando um objeto compacto estático, carregado e esfericamente simétrico, cujo campo gravitacional seja dado pela Relatividade Geral (RG). Através do método das descontinuidades de Hadamard, resolvemos o sistema de equações associado, de forma a obter as geometrias efetivas que descrevem a propagação da luz no meio. Consideramos um fundo gravitacional fixo, tal que nos limitamos a analisar a situação a baixas energias. Como consequência do efeito de birrefringência, obtemos duas geometrias efetivas associadas às polarizações da luz. Com isso, as trajetórias possíveis para os raios de luz foram descritas através de geodésicas nessas geometrias efetivas. Analisamos algumas consequências dessas geometrias na propagação da luz, com relação as previsões do campo gravitacional de fundo, que incluem correções no desvio para o vermelho e na deflexão da luz gerada pelo objeto compacto. Mostramos que o campo eletromagnético de fundo polariza o meio material, tal que diferentes polarizações da luz são distinguidas por diferentes correções nessas quantidades. Como consequência, temos duas trajetórias possíveis para a luz nesta configuração, que coincidem se o campo eletromagnético for nulo ou se a permissividade for constante. Mostramos que a métrica efetiva associada à polarização negativa, para uma dada dependência da permissividade do dielétrico, é conformalmente plana.

Palavras-Chave: gravitação, geometria efetiva, eletrodinâmica, meios dielétricos

Abstract

In this work, we have considered a nonlinear dielectric medium surrounding a static, charged, and spherically symmetric compact body whose gravitational field is described by General Relativity (GR). Considering the method of Hadamard discontinuities, we solved the associated system of equations in order to obtain the effective geometries that describe the propagation of light inside the medium. We considered a fixed background, so we limited ourselves to analyze this situation at low energies. Due to the birefringence effect, we obtained two effective geometries associated with each polarization of light. The possible paths for the light rays were described by geodesics in these effective geometries. We analyzed some consequences of these geometries in the propagation of light, which includes corrections on the gravitational redshift and on the gravitational deflection of light. We have shown that the background electromagnetic field polarizes the material medium, so that different polarizations of light are characterized by different corrections on these quantities. Consequently, there are two possible paths for the light ray in this configuration, which coincide if we turn off the electromagnetic field or if the permittivity is constant. We have shown that the effective metric associated with the negative polarization is conformally flat, for a given dependence of the dielectric permittivity.

Keywords: gravitation, effective geometry, electrodynamics, dielectric medium

Sumário

Lista de Figuras

Notação e Convenções

Introdução	i
1 Eletrodinâmica em meios materiais	1
1.1 Campos em meios materiais	4
1.1.1 Equações de campo	6
1.2 Propagação de ondas	10
1.2.1 Ondas de choque	10
1.2.2 Propagação de ondas em meios dielétricos	12
1.3 Discussão e aplicações	18
2 Buracos negros	22
2.1 Elementos Matemáticos	23
2.1.1 Relatividade Geral	23
2.2 Soluções esfericamente simétricas	26
2.2.1 Horizontes e singularidade	28
2.2.2 Desvio para o vermelho gravitacional	34
2.2.3 Trajetória de partículas	36
2.2.4 Deflexão gravitacional da luz	38
3 Meios não-lineares em espaços-curvos	41
3.1 Potencial Efetivo	43
3.2 Deflexão da luz	45
3.3 Desvio para o vermelho	46
3.4 Horizontes ópticos	48
3.5 Casos particulares	48

3.5.1	A classe de meios materiais com $f = \text{const.}$	48
3.5.2	Um caso particular para a permissividade	50
3.5.3	Solução conformalmente plana	60
Conclusão		62
A Cálculo do tensor de Einstein para soluções esfericamente simétricas		65
A.1	Solução de Reissner-Nordstrom	66
Referências Bibliográficas		68

Lista de Figuras

2.1	Diagrama do espaço-tempo de Schwarzschild nas coordenadas de Kruskal-Szekres. Podemos notar que qualquer fonte de luz emitida na região II encontra-se presa nesta região, tendo em vista que a luz viaja somente a 45° no sentido positivo do eixo temporal. <i>Fonte: imagem de autoria própria.</i>	31
2.2	Caso $M^2 > r_Q^2$. A função $\Delta(r)$ possui duas raízes (2.46), marcadas nos pontos vermelhos. <i>Fonte: imagem de autoria própria.</i>	33
2.3	Do lado esquerdo, temos o caso $M^2 = r_Q^2$. Nele, a função $\Delta(r)$ possui uma raiz $r_- = r_+$, marcada no ponto vermelho. Do lado direito, temos o caso $M^2 < r_Q^2$. A função $\Delta(r)$ não possui raízes. <i>Fonte: imagem de autoria própria.</i>	33
2.4	Gráfico do potencial efetivo seguido pela luz no fundo de Reissner-Nordstrom ($M^2 > r_Q^2$). O eixo horizontal está em unidades de massa M. Notamos que para o potencial de R-N podemos ter órbitas circulares estáveis e instáveis, enquanto que para Schwarzschild encontramos apenas órbitas circulares instáveis. De fato, o gráfico para o potencial de Schwarzschild se assemelha a parte instável do potencial de R-N, mostrada no campo superior direito da figura. <i>Fonte: imagem de autoria própria.</i>	38
2.5	Trajetória seguida por um raio de luz se aproximando da fonte a partir de uma região assintótica. Notamos que o raio é desviado nas proximidades do objeto compacto. Essa figura foi retirada da referência [99].	39
3.1	A figura mostra as alterações na região instável do potencial de R-N. Em azul, temos a previsão do fundo gravitacional. Em laranja, representamos as alterações sentidas pela polarização negativa e, em vermelho, as alterações sentidas pela polarização positiva. Para visualização, consideramos $M^2 > r_Q^2$ no espaço-tempo de fundo. <i>Fonte: imagem de autoria própria.</i>	52

- 3.2 A figura à esquerda mostra como as trajetórias circulares instáveis são afetadas pelo meio material, enquanto que a figura à direita mostra a alteração nas trajetórias circulares estáveis. Consideramos um fundo de R-N com $M^2 > r_Q^2$.
Fonte: imagem de autoria própria. 52
- 3.3 Os potenciais efetivos do exemplo (3.36), definidos pelas equações (3.38), são representados por linhas tracejadas nesta figura. A linha tracejada em laranja representa $V_-(r)$, enquanto a linha tracejada em vermelho representa $V_+(r)$. Em azul, temos o que seria esperado se considerássemos somente as previsões do fundo gravitacional. Vemos que na presença de um campo eletromagnético o potencial representado pela linha azul se separa em dois potenciais, dados pelas linhas tracejadas. Para visualização, consideramos $M^2 > r_Q^2$ no espaço-tempo de fundo.
Fonte: imagem de autoria própria. 53

Notação e Convenções

- A velocidade da luz no vácuo é assumida de forma a apresentar o valor $c = 1$, exceto nos casos em que este símbolo aparecer explicitamente indicado.
- A notação ";" indica uma derivada covariante no espaço Riemanniano, enquanto que a derivada usual é representada por ",", "
- O tensor de projeção é definido pela relação $h^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - v^\mu v^\nu$ e o delta de Kronecker é representado por δ_ν^μ .
- Definimos $\eta^{\lambda\gamma\beta\sigma} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\epsilon^{\lambda\gamma\beta\sigma}$ como sendo proporcional ao tensor de Levi-Civita e ao determinante g da métrica. Consideramos que

$$\eta^{\alpha\tau\gamma\lambda}\eta_{\mu\rho\omega\beta} = -\det \begin{pmatrix} \delta_\mu^\alpha & \delta_\rho^\alpha & \delta_\omega^\alpha & \delta_\beta^\alpha \\ \delta_\mu^\tau & \delta_\rho^\tau & \delta_\omega^\tau & \delta_\beta^\tau \\ \delta_\mu^\gamma & \delta_\rho^\gamma & \delta_\omega^\gamma & \delta_\beta^\gamma \\ \delta_\mu^\lambda & \delta_\rho^\lambda & \delta_\omega^\lambda & \delta_\beta^\lambda \end{pmatrix}. \quad (1)$$

- Chamamos de L_F e L_G as derivadas parciais da lagrangeana $L(F, G)$ com relação aos invariantes F e G , respectivamente.
- Consideramos a notação para as derivadas parciais $\bar{A} = \frac{\partial A}{\partial E}$ e $A' = \frac{\partial A}{\partial H}$.
- A assinatura do espaço-tempo é dada por $(+, -, -, -)$. Para um vetor tipo-espaço arbitrário $X^\mu = (0, \vec{X})$ definimos seu módulo pela relação $X = (-X^\mu X_\mu)^{1/2}$, tal que ele possui vetor unitário $\hat{X} = \vec{X}/X$.
- Para duas quantidades X e Y arbitrárias, denotamos seu produto escalar $X^\mu Y_\mu$ seguindo a notação $(X.Y)$.
- Para o espaço-tempo de fundo, escrevemos as componentes da métrica considerando índices latinos (por exemplo, g_{tt} , g_{rr}, \dots). Já para a métrica efetiva, consideramos índices numéricos, i.e, \hat{g}_{00} , \hat{g}_{11} , etc.

Introdução

A Teoria de Relatividade Geral [28, 30, 34, 35, 98, 99] revolucionou a forma como lidamos com as demais interações físicas. Ela propôs a possibilidade de eliminarmos a aceleração gravitacional a partir de uma modificação na estrutura geométrica do espaço-tempo, mostrando que todos efeitos gravitacionais poderiam ser equivalentemente descritos em termos de uma modificação na métrica de fundo. Dessa forma, na ausência de outras interações, um corpo acelerado pela interação gravitacional poderia ser descrito por um corpo livre, seguindo uma geodésica nessa nova geometria. Devido a natureza universal da gravitação, essa proposta acarretou na existência de um único espaço-tempo no qual todos os corpos estão sujeitos a se propagar. Como consequência, surgiu uma questão na física moderna: é possível descrever as demais interações por meio de uma modificação na estrutura métrica do espaço-tempo?

Sabemos que motivado em tentar unificar a interação gravitacional com a interação eletromagnética, Herman Weyl [100] acabou desenvolvendo o que conhecemos hoje como Teorias de Calibre [89]. Essas, foram responsáveis pelo desenvolvimento de uma das teorias físicas mais relevantes que conhecemos atualmente, o Modelo Padrão de Partículas [44, 91]. No entanto, esta tentativa de unificação com a interação gravitacional não foi bem sucedida e esse modelo não incluí a gravitação, sendo ela tratada por uma teoria a parte. Não obstante, os físicos permaneceram motivados em tentar associar o arcabouço matemático da Relatividade Geral com as demais interações. Nesse contexto, desenvolveu-se um ramo da física chamado de *Metric Relativity* [79]. Neste ramo, assume-se a possibilidade de diferentes fenômenos gerados por uma dada interação estarem associados a diferentes geometrias efetivas. Em contraste com a Relatividade Geral, essas geometrias não são universais nem estão unificadas, pois dependem da característica da força e da cinemática do corpo. Seu único objetivo seria eliminar a ação das diversas forças por meio do desenvolvimento de uma métrica efetiva, de forma similar ao mecanismo apresentado pela Relatividade Geral. Nessa teoria, ao invés de termos forças agindo sobre uma partícula situada em uma geometria de fundo, temos partículas livres seguindo geodésicas em uma dada geometria efetiva [17, 23, 60, 66, 70]. Essa descrição não é indispensável. No entanto, em dadas situações, permite abordarmos os problemas de uma forma simplificada.

Em 1923, Gordon [41, 68] desenvolveu o primeiro modelo de geometria efetiva baseado na propagação da luz dentro de um meio dielétrico em movimento, com permissividade elétrica ϵ e permeabilidade magnética μ constantes. Ele mostrou que a relação de dispersão da luz pode ser dada por $\hat{g}^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = k^\mu k_\mu$, onde $k^\mu = (\omega, \vec{q})$ representa o quadrivetor de onda, cujas projeções espacial e temporal são, respectivamente, dadas pelo vetor de onda \vec{q} e pela frequência angular ω . A métrica efetiva obtida foi

$$\hat{g}^{\mu\nu} = \gamma^{\mu\nu} + v^\mu v^\nu (\mu\epsilon - 1), \quad (2)$$

dado que a geometria de fundo $g^{\mu\nu}$ é descrita pela métrica de Minkowski $\gamma^{\mu\nu}$ em coordenadas arbitrárias e v^μ representa a velocidade do observador com relação ao meio. Com isso, a relação de dispersão prevê que a luz se propaga seguindo geodésicas tipo-nulas $k^\mu k_\mu = 0$ na geometria efetiva (2), não na geometria de fundo.

Desde então, diversos autores generalizaram a métrica de Gordon de forma a englobar meios materiais mais gerais, ao considerar que a permissividade ou a permeabilidade possam depender da intensidade dos campos elétrico e magnético [6, 17]. Existem casos em que foi possível obter uma geometria efetiva para situações onde estas possam depender não só da intensidade, mas também da direção dos campos [20, 22, 23, 25]. Para ambos, as equações de Maxwell precisam ser complementadas por relações constitutivas

$$D_\alpha = \epsilon_\alpha^\beta(E^\mu, H^\mu) E_\beta \quad (3)$$

$$B_\alpha = \mu_\alpha^\beta(E^\mu, H^\mu) H_\beta, \quad (4)$$

que relacionam as componentes dos campos eletromagnéticos externos E^μ , B^μ com as componentes das suas induções D^μ , H^μ . Os meios que não dependem da direção dos campos são chamados de meios isotrópicos

$$\epsilon_\alpha^\beta(E^\mu, H^\mu) = \epsilon(E, H)(\delta_\alpha^\beta - v^\beta v_\alpha) \quad (5)$$

$$\mu_\alpha^\beta(E^\mu, H^\mu) = \mu(E, H)(\delta_\alpha^\beta - v^\beta v_\alpha), \quad (6)$$

enquanto os que dependem são chamados de anisotrópicos. Dado essas relações, o sistema de equações torna-se não-linear. Em todos esses trabalhos foi considerado a aproximação da óptica geométrica, tal que foi possível negligenciar efeitos dispersivos no pacote de ondas. Além disso, foi considerado uma onda monocromática, afim de evitar ambiguidades com respeito a definição da velocidade de onda $v^2 = \omega^2/|\vec{q}|^2$.

No contexto de teorias de eletrodinâmica não-linear (ENL), uma descrição de geometria efetiva também aparece se considerarmos o limite da óptica geométrica em ondas eletromagnéticas. De tal forma que esses resultados podem ser generalizados para uma lagrangeana não-linear $L(F, G)$ que dependa dos invariantes de calibre F, G do campo eletromagnético. Foi obtido [26, 69, 71] que a geometria efetiva para uma dada teoria de eletrodinâmica não-linear é descrita pela métrica efetiva

$$\hat{g}_{\pm}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \Delta_{\pm} F_{\alpha}^{\mu} F^{\alpha\nu}, \quad (7)$$

onde definimos que

$$\begin{aligned} \Delta_{\pm} &= \frac{-L_F(L_{GG} + L_{FF}) + 2F(L_{FF}L_{GG} - L_{FG}^2) \pm \sqrt{\delta}}{2[G^2(L_{FF}L_{GG} - L_{FG}^2) + 2L_F(L_{GG}F - L_{FG}G) - L_F^2]}, \\ \delta &= [2F(L_{FF}L_{GG} - L_{FG}^2) + L_F(L_{GG} - L_{FF})]^2 + [2G(L_{FF}L_{GG} - L_{FG}^2) - 2L_FL_{FG}]^2. \end{aligned}$$

Nesse caso, a geometria efetiva é construída considerando a auto-interação dos campos, representada por Δ_{\pm} , que no caso de Maxwell ($L_F = const.$, $L_G = 0$) se anula. No exemplo anterior, foi a introdução de um meio material que gerou a geometria efetiva, mesmo considerando a teoria de Maxwell. A relação de dispersão associada à equação (7) permite a existência de dois modos de propagação, um para cada polarização da luz. Isso reflete o fato de que, em geral, teorias não-lineares do eletromagnetismo produzem um fenômeno de birrefringência. Esse fenômeno também surge se consideramos meios materiais não-lineares [18].

Propostas de extensão da eletrodinâmica de Maxwell estão associadas à introdução de termos não-lineares na lagrangeana $L(F, G)$, que buscam simular efeitos induzidos por diferentes processos físicos não explicados pela teoria de Maxwell. Por exemplo, podemos lidar com o vácuo quântico como se fosse um meio clássico. Esse meio induz modificações nas equações de movimento descritas em termos das não-linearidades do campo. Desta forma, podemos descrever classicamente os efeitos de polarização do vácuo, previstos pela Eletrodinâmica Quântica. A teoria de Euler-Heisenberg [50, 69] é uma proposta conhecida que descreve esse fenômeno a baixas frequências, sendo representada pela lagrangeana

$$L_{EH} = -\frac{F}{4} + \frac{\mu}{4} \left(F^2 + \frac{7}{4} G^2 \right), \quad (8)$$

com

$$\mu = \frac{8}{25} \alpha^2 \left(\frac{\hbar}{m_e c} \right)^3 \frac{1}{m_e c^2}, \quad (9)$$

onde α representa a constante de estrutura fina. Sabe-se experimentalmente que efeitos de polarização do vácuo aparecem quando é produzido um campo eletromagnético muito intenso em uma dada região do espaço (cerca de $E \approx 1,3 \times 10^{18}$ V/m e $B \approx 4,4 \times 10^{13}$ Gauss). Esse fenômeno está associado a criação e aniquilação de pares de elétrons e pósitrons, que momentaneamente se atraem polarizando o vácuo. Por meio da geometria efetiva (7), o fenômeno de birrefringência é descrito por duas métricas efetivas e é possível calcular as velocidades de propagação associadas aos estados de polarização do vácuo. Experimentalmente, foi desenvolvido um método em 1979 por Iacoppini e Zavattini [51] para se detectar a birrefringência induzida no vácuo e, em seguida, o experimento PVLAS [2] obteve sucesso em detectar esse fenômeno.

Em contraste, podemos citar outra teoria de eletrodinâmica não-linear que ficou amplamente conhecida na literatura, por ser a única teoria de ENL que não prevê fenômenos de birrefringência. A teoria de Born-Infeld [8, 84], diferentemente do caso anterior, tem como objetivo limitar o valor máximo do campo elétrico de uma carga pontual, de forma que a densidade de energia associada a esta passa a ser finita, em contrapartida com as previsões da teoria de Maxwell. A lagrangeana de Born-Infeld é descrita por

$$L_{BI} = b^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{F}{2b^2} - \frac{G^2}{16b^4}} \right). \quad (10)$$

Para esta lagrangeana, temos apenas uma métrica efetiva associada a um único modo de propagação da luz [69].

Desde 1980, várias aplicações das teorias ENL foram propostas no contexto da gravitação e no âmbito da cosmologia, motivando pesquisadores a questionar como a não-linearidade das equações de campo afetam aspectos específicos da gravitação, como o estudo de buracos negros e de objetos compactos. Por exemplo, dado o tensor de energia-momento de uma teoria de ENL [69]

$$T_{\mu\nu} = -4L_F F_\mu^\alpha F_{\alpha\nu} - (L - GL_G)g_{\mu\nu}, \quad (11)$$

podemos considerar as equações de Einstein com o objetivo de desenvolver modelos cosmológicos ou estender soluções conhecidas da RG, como as soluções de Reissner-Nordstrom e Kerr-Newman. Diversas pesquisas foram realizadas nesse sentido [1, 27, 32, 40, 65, 75, 76, 92, 101]. Outras, considerando essas generalizações, estudaram propriedades como estabilidade e termodinâmica de buracos negros [10, 12, 14, 37, 46, 72]. No que tange o estudo do movimento geodésico de partículas tipo-luz e tipo-tempo, sabemos que partículas massivas obedecem as equações de Einstein e tem suas trajetórias ditadas pela geometria de fundo (associada ao tensor de energia-momento da teoria de ENL). Em contrapartida, as trajetórias tipo-luz seguem

geodésicas na geometria efetiva (7), que impõe correções à geometria de fundo e prevê fenômenos de birrefringência em espaços-curvos [16]. No contexto da ENL, esse fenômeno acontece devido a autointeração entre a radiação eletromagnética e o campo eletromagnético de fundo.

Atualmente, sabemos que basta que uma teoria de campos seja não-linear para podermos abordar o problema a partir de uma geometria efetiva [79]. Essa abordagem também é considerada, por exemplo, para tratar campos escalares e campos de spin, não sendo necessário restringir seu uso ao eletromagnetismo [7, 67, 77]. Uma técnica comumente usada nesse processo é o formalismo das descontinuidades de Hadamard [47, 80], o qual abordaremos no capítulo 1 desta tese de mestrado. No contexto das teorias de geometria efetiva, surgiu uma proposta conhecida como *Dynamical Bridge*, baseada na equivalência dinâmica entre diferentes teorias. Quando satisfeita, duas teorias distintas são vistas como diferentes linguagens que representam um mesmo fenômeno. Essa ponte dinâmica entre diferentes teorias que, sob algumas restrições, são equivalentes, motivou a construção dos chamados *Modelos Análogos Gravitacionais*.

Na última década, muitos estudos envolvendo modelos análogos gravitacionais foram publicados [4, 5, 19, 24, 36, 73, 74, 83]. Estes, se concentram nas áreas da eletrodinâmica e meios materiais não-lineares; acústica; hidrodinâmica e sistemas de matéria condensada. Até o momento, essa analogia se limita aos aspectos perturbativos, restringindo os modelos à propagação das excitações dos campos (fótons/quasipartículas) através de um meio material e buscam descrever modelos cujas trajetórias na geometria efetiva sejam idênticas ou ao menos similares a soluções específicas da Relatividade Geral. Essas propostas são interessantes para o estudo de propriedades cinemáticas de situações astrofísicas em escalas muito menores, que possam ser analisadas experimentalmente em laboratórios [31, 33, 53, 61, 95–97].

Os modelos análogos gravitacionais desenvolveram um forte arcabouço teórico e se tornaram a aplicação do método da geometria efetiva mais conhecida na literatura. Modelos eletrodinâmicos em meios materiais estudaram fenômenos de birrefringência e permitiram abordar através da geometria efetiva diferentes fenômenos ópticos conhecidos experimentalmente. Por exemplo, a birrefringência uniaxial, que é um fenômeno bastante conhecido em cristais e materiais que apresentam um eixo óptico. Este fenômeno também pode ocorrer artificialmente como um efeito induzido em meios materiais, quando um campo externo é aplicado em um meio com propriedades eletromagnéticas não-triviais. Dentre os tipos de birrefringência conhecidos na literatura, podemos citar: I- Efeito Pockels; II- Efeito Kerr; III- Efeito Cotton-Mouton e IV- Efeito Jones. O primeiro e o segundo fenômenos são gerados na presença de um campo elétrico externo quando a permissividade elétrica $\epsilon(E)$ possui, respectivamente, uma dependência linear $\propto E$ na intensidade do campo elétrico ou

uma dependência quadrática $\propto E^2$. O terceiro fenômeno é considerado um análogo magnético do segundo e está associado a uma permeabilidade magnética $\mu(B)$ com dependência quadrática na intensidade do campo magnético $\propto B^2$. Já o quarto está associado a uma permissividade (ou permeabilidade) que possa depender do produto entre as intensidades dos campos elétrico e magnético $\propto \vec{E} \cdot \vec{B}$. Esses fenômenos [3, 43, 54, 56, 58] foram amplamente verificados experimentalmente [57, 81, 87, 88] e estudados por meio da técnica da geometria efetiva [18, 21, 25]. O interesse em reescrevê-los usando essa técnica se concentrou no desenvolvimento de modelos análogos gravitacionais, já que estes podem estar associados ao surgimento de horizontes ópticos.

De forma complementar, o efeito de birrefringência é usado como uma técnica para investigar propriedades de sistemas e pode ser controlado experimentalmente através da intensidade do campo eletromagnético externo. Dados mostram, inclusive, que este pode ser considerado uma ferramenta em estudos astrofísicos [38]. Nesse contexto, no que tange o estudo de objetos astrofísicos, surgem diversas questões em aberto a respeito das aplicações do fenômeno de birrefringência em espaços-curvedos:

- Poderíamos distinguir possíveis efeitos de birrefringência associados a teorias de ENL de efeitos provenientes de meios materiais não-lineares em espaços-curvedos?
- Seria possível estudar propriedades de meios materiais a distâncias astrofísicas por meio de fenômenos de birrefringência em espaços-curvedos? O que seria possível inferir a partir deste fenômeno?
- Um observador na Terra poderia determinar a dependência $\epsilon(E)$ de um meio conhecendo como a geometria efetiva altera a propagação da luz em um espaço-curvo?
- Quais são as limitações teóricas e fenomenológicas do estudo de meios materiais não-lineares situados em um espaço-curvo?

Motivados por essas questões, desenvolvemos nesta tese de mestrado um modelo teórico que busca exemplificar o problema. Ressaltamos que essa foi a primeira proposta, considerando a técnica da geometria efetiva, que busca estudar a propagação da luz em meios materiais não-lineares situados em um espaço-curvo. Para isso, utilizamos o arcabouço teórico desenvolvido pelos chamados modelos análogos gravitacionais, propondo uma aplicação diferente da que é usualmente feita na literatura. Além disso, o modelo proposto pode ser generalizado de forma a descrever um meio material não-linear arbitrário em qualquer espaço-curvo de fundo, não se restringindo a análise realizada nesta tese.

Consideramos um meio com propriedades dielétricas não-triviais, que possua permeabilidade magnética constante μ e permissividade elétrica $\epsilon(E)$. Nos restringimos a analisar como a propagação da luz é alterada em um espaço-tempo de Reissner-Nordstrom (R-N), tal que o campo elétrico externo seja dado por essa solução. Supomos que a massa do meio material seja muito menor que a massa do objeto compacto, de tal forma que seja possível negligenciá-la e idealizar um fundo gravitacional fixo. Essa suposição restringe nossa análise a baixas energias. Para altas energias, é necessário saber a forma do tensor de energia-momento que descreve o meio não-linear, o que não é conhecido na literatura. Portanto, uma limitação teórica dessa proposta consiste em analisar o problema a baixas energias¹.

A tese é organizada como se segue. No capítulo 1, revisamos a bibliografia e os fundamentos matemáticos por trás do estudo de fenômenos de birrefringência em um meio material não-linear situado sob um espaço-curvo. No segundo capítulo, revisamos a solução de R-N e calculamos como uma solução esfericamente simétrica arbitrária altera a propagação da luz, dado suas componentes da métrica. No terceiro capítulo, consideramos um meio dielétrico não-linear no espaço-tempo de R-N e obtemos as correções associadas à propagação da luz. Em seguida, analisando dois casos particulares da dependência $\epsilon(E)$ e resolvemos o problema considerando o limite de campos fracos, afim de compararmos os nossos cálculos com resultados conhecidos na literatura para teorias de ENL [16]. Por fim, concluímos com os nossos resultados e perspectivas futuras [45].

Esperamos que correções devido a presença de um meio material sejam mais relevantes do que as correções previstas pela teoria de Euler-Heisenberg. Obtemos que este modelo é capaz de determinar propriedades dielétricas do meio material, mesmo a distâncias astrofísicas, a partir de correções lineares no desvio para o vermelho e no ângulo de deflexão da luz. Essas correções são proporcionais a constante de Pockels, de forma que um observador assintótico poderia inferir características do meio material a partir de tabelas de dados experimentais conhecidas na literatura. Em contrapartida, não acreditamos que seja possível o observador determinar a dependência $\epsilon(E)$ a partir de dados fenomenológicos, tendo em vista que dependências de ordens superiores no campo elétrico se tornam irrelevantes no limite de campos fracos, o que acarretaria em uma limitação fenomenológica para um observador distante do corpo massivo.

¹Na maioria das situações astrofísicas, não é possível determinar a forma do tensor de energia-momento $T_{\mu\nu}$ envolvido no processo. Este é um consenso na literatura, que é muitas vezes contornado se considerarmos teoria de perturbação no tensor de energia-momento $T_{\mu\nu}$ do fundo gravitacional, afim de estipular correções devido a presença de outro corpo compacto ou de um meio material [11, 13, 90]. Para a proposta desta tese, um fundo fixo é o suficiente para enumerarmos como um meio não-linear pode alterar a propagação da luz em um espaço-curvo.

Capítulo 1

Eletrodinâmica em meios materiais

A eletrodinâmica de Maxwell é um caso particular de uma classe de teorias que descrevem a dinâmica do campo eletromagnético [69]. Ela é representada matematicamente por meio de um funcional chamado de Lagrangeana, que deve ser invariante de calibre sob ação do grupo de simetria¹ $U(1)$ e tem como ingredientes fundamentais os invariantes

$$F = F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

$$G = F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} , \quad (1.2)$$

associados às contrações do tensor de campo $F^{\mu\nu}$ e do seu dual $\tilde{F}^{\mu\nu}$. Estes dependem do potencial de calibre $A^\mu = (\phi, \vec{A})$ de acordo com as definições

$$F_{\mu\nu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu} \quad (1.3)$$

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} . \quad (1.4)$$

Essas definições são válidas tanto para o espaço plano quanto para um espaço-curvo, tendo em vista que a conexão afim do espaço de Riemann é simétrica. O tensor de campo é o elemento fundamental por trás das teorias que descrevem a eletrodinâmica e é construído de forma que seja um invariante de calibre.

Podemos decompor o tensor de campo $F^{\mu\nu}$ e seu dual $\tilde{F}^{\mu\nu}$ em termos de um campo de observadores v^μ normalizado $v^\mu v_\mu = 1$. Sabemos que os campos elétrico e magnético são medidos, respectivamente, a partir das relações $F_{\mu\nu} v^\nu = E_\mu$ e $\tilde{F}_{\mu\nu} v^\nu = B_\mu$, e que eles são tipo-

¹Veja, por exemplo, [39].

espaço $E_\mu v^\mu = B_\mu v^\mu = 0$, tal que seus módulos são descritos por $E^2 = -E^\mu E_\mu$ e $B^2 = -B^\mu B_\mu$. Dado essas definições, é possível decompor os tensores como [69]

$$F_{\mu\nu} = E_\mu v_\nu - E_\nu v_\mu + \eta_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} v_\rho B_\sigma \quad (1.5)$$

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = B_\mu v_\nu - B_\nu v_\mu - \eta_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} v_\rho E_\sigma, \quad (1.6)$$

tal que E^μ e B^μ representam as componentes dos vetores campo elétrico e magnético,

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla\phi \\ \vec{B} &= \nabla \times \vec{A}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Dessa forma, a representação matricial do tensor de campo e do seu dual é dada por

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -E_z & E_y \\ -B_y & E_z & 0 & -E_x \\ -B_z & -E_y & E_x & 0 \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

e os invariantes de calibre são descritos pelas relações $G = -4\vec{E} \cdot \vec{B}$ e $F = 2(B^2 - E^2)$.

Em geral, descrevemos uma teoria do eletromagnetismo através de uma lagrangeana $L(F, G)$ arbitrária, cuja ação

$$S = \int \sqrt{-g} L(F, G) d^4x, \quad (1.9)$$

tem associada as equações de campo

$$(L_F F^{\mu\nu} + L_G \tilde{F}^{\mu\nu})_{;\nu} = 0 \quad (1.10)$$

$$\tilde{F}_{;\nu}^{\mu\nu} = 0. \quad (1.11)$$

As equações (1.11) são conhecidas como identidades de Bianchi e independem da Lagrangeana considerada, pois surgem unicamente devido a forma do tensor de campo (1.3) e refletem uma condição de integrabilidade dada pelo lema de Poincaré². No caso de uma teoria linear em que a Lagrangeana só dependa do invariante F , obtemos as equações de Maxwell no vácuo. Estas serão dadas por

$$F_{;\nu}^{\mu\nu} = 0, \quad (1.12)$$

²i.e, dado que $F = dA$ temos $dF = 0$.

e pelas identidades de bianchi (1.11). Se incluirmos na Lagrangeana termos de matéria, obtemos que a equação (1.12) é alterada para

$$F_{;\nu}^{\mu\nu} = j^\mu , \quad (1.13)$$

onde $j^\mu = \{\rho, \vec{j}\}$ representa o quadrivetor corrente, tal que sua primeira componente é a densidade de carga elétrica e a segunda é a densidade de corrente elétrica. Pela antissimetria do tensor de campo, a corrente é conservada, isto é $j_{;\mu}^\mu = 0$. Sabemos que toda simetria contínua gera uma corrente conservada de Noether [59, 63, 89]. Portanto, essa relação é uma consequência da invariância de calibre, e descreve a conservação da corrente de Noether associada às transformações (locais) de calibre. As equações de Maxwell também são invariantes por transformações globais de coordenadas, dadas pelo grupo de Poincaré, tal que também temos uma corrente conservada de Noether associada à conservação do tensor de energia-momento, definido como

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}L)}{\delta g^{\mu\nu}} . \quad (1.14)$$

Para a eletrodinâmica de Maxwell, encontramos

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\alpha}F^\alpha{}_\nu + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} , \quad (1.15)$$

tal que esse tensor pode ser decomposto considerando um campo de observadores v^μ através da relação

$$T_{\mu\nu} = \rho v_\mu v_\nu + p h_{\mu\nu} + q_{(\mu}v_{\nu)} + \pi_{\mu\nu} , \quad (1.16)$$

onde definimos a densidade de energia do campo eletromagnético ρ , o fluxo de calor q_μ e as pressões isotrópica p e anisotrópica $\pi_{\mu\nu}$ pelas relações [69]

$$\begin{aligned} \rho &= (E^2 + B^2) \\ p &= \frac{\rho}{3} \\ q_\lambda &= \eta_\lambda^{\mu\rho\sigma} E_\mu v_\rho B_\sigma \\ \pi_{\mu\nu} &= -E_\mu E_\nu - \frac{1}{3}E^2 h_{\mu\nu} - B_\mu B_\nu - \frac{1}{3}B^2 h_{\mu\nu} . \end{aligned} \quad (1.17)$$

Notamos que o fluxo de calor q_μ e a pressão anisotrópica $\pi_{\mu\nu}$ são tipo-espaço, i.e, ortogonais ao campo de observadores v^μ , e a pressão anisotrópica possui traço nulo $\pi^\mu{}_\mu = 0$.

As equações (1.11) e (1.13) descrevem as equações de Maxwell na presença de fontes. Por representarem uma teoria linear, valerá o princípio da superposição para as soluções destas equações. No caso mais geral, descrito por um sistema de equações não-lineares, a soma de duas

soluções não será mais uma solução. Trabalharemos o resto desse capítulo com as equações de Maxwell em meios materiais, o que requer uma modificação nestas equações. A introdução de um meio material acarreta em um sistema de equações que é, em geral, não-linear.

1.1 Campos em meios materiais

Meios materiais são constituídos por moléculas, que por sua vez são constituídas por átomos. Podemos ter dois tipos de moléculas, as polares e as apolares, tal que no primeiro tipo há a formação de um dipolo elétrico intrínseco e no segundo pode haver a formação de um dipolo elétrico induzido, caso haja um campo elétrico externo. O momento de dipolo elétrico \vec{p} é definido como

$$\vec{p} = q\vec{l}, \quad (1.18)$$

onde \vec{l} é a distância entre as duas cargas que constituem o dipolo. Para observações macroscópicas, o que será fisicamente relevante é a média dos campos em um grande volume comparado ao volume ocupado por átomos e moléculas. A polarização de um meio é obtida através da orientação dos seus dipolos elétricos microscópicos \vec{p}_i , tal que o vetor de polarização é uma quantidade macroscópica representada por

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_i \vec{p}_i. \quad (1.19)$$

Esta, mede o número de dipolos elétricos por unidade de volume V . Considerando a definição acima, definimos o vetor deslocamento elétrico \vec{D} através da fórmula

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad (1.20)$$

onde ϵ_0 representa a permissividade elétrica do vácuo. Podemos, em geral, representá-lo por meio da relação tensorial

$$D_\alpha = \epsilon_\alpha^\beta (E^\mu, H^\mu) E_\beta, \quad (1.21)$$

onde ϵ_α^β representa o tensor permissividade elétrica, que pode depender da direção dos campos eletromagnéticos aplicados sob o meio material. Na forma matricial, essa relação é descrita por

$$\begin{bmatrix} 0 \\ D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} & \epsilon_{24} \\ 0 & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} & \epsilon_{34} \\ 0 & \epsilon_{42} & \epsilon_{43} & \epsilon_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}. \quad (1.22)$$

Meios isotrópicos são um caso particular onde vale a definição (5), tal que a relação acima se reduz a $D_\alpha = \epsilon(E, H)E_\alpha$. Com isso, a matriz permissividade se torna diagonal, de forma que sobrevivem apenas os elementos ϵ_{22} , ϵ_{33} , ϵ_{44} e eles são iguais $\epsilon_{22} = \epsilon_{33} = \epsilon_{44} = \epsilon(E, H)$. Portanto, a polarização não depende da direção dos campos eletromagnéticos, apenas dos seus módulos. Em geral, assumimos a possibilidade de que a polarização dependa da direção dos campos e que essa matriz não seja diagonal. Meios materiais onde a polarização depende da direção dos campos são chamados de meios anisotrópicos.

Analogamente, meios magnéticos podem passar por um fenômeno semelhante. Tendo em vista que os átomos possuem elétrons orbitando os seus núcleos, quando submetidos a um campo magnético externo podem formar um dipolo magnético induzido. Além disso, os próprios elétrons tem uma propriedade chamada de spin, que é considerado uma espécie de dipolo magnético intrínseco. No entanto, embora possamos construir essa ponte entre os casos elétrico e magnético, não existe uma definição análoga para o vetor momento de dipolo magnético \vec{m} em comparação com a definição do momento de dipolo elétrico \vec{p} . Ainda assim, em determinado volume V , podemos descrever o estado de polarização magnética do meio por uma quantidade macroscópica conhecida como polarização magnética \vec{M} , dada por

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_i \vec{m}_i. \quad (1.23)$$

Esta, desempenha no magnetismo um papel semelhante ao que a polarização elétrica desempenha na eletricidade. Assim, podemos definir o vetor indução magnética \vec{H} a partir da relação

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}, \quad (1.24)$$

onde μ_0 representa a permeabilidade magnética do vácuo. Em geral, podemos reescrever essa relação na forma tensorial

$$B_\alpha = \mu_\alpha^\beta(E^\mu, H^\mu)H_\beta, \quad (1.25)$$

onde μ_α^β representa o tensor permeabilidade magnética, que pode depender da direção dos campos eletromagnéticos aplicados sob o meio material. Assim como no caso elétrico, podemos escrever a relação acima através de uma matriz

$$\begin{bmatrix} 0 \\ B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{22} & \mu_{23} & \mu_{24} \\ 0 & \mu_{32} & \mu_{33} & \mu_{34} \\ 0 & \mu_{42} & \mu_{43} & \mu_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix}, \quad (1.26)$$

tal que para meios isotrópicos (6) essa matriz é diagonal $B_\alpha = \mu(E, H)H_\alpha$ e possui elementos não-nulos dados por $\mu_{22} = \mu_{33} = \mu_{44} = \mu(E, H)$. Identificamos as definições (1.21) e (1.25) como as relações constitutivas para um meio material. Nessas relações, os tensores permissividade e permeabilidade definem quantidades que concentram toda a informação sobre as propriedades eletromagnéticas do meio material.

É possível classificar a resposta dos materiais a campos eletromagnéticos externos. Por exemplo, sob ação de um campo elétrico externo, podemos ter materiais dielétricos, em que os dipolos elétricos do material se alinham ao campo externo, produzindo um campo elétrico no sentido oposto e diminuindo a intensidade do campo elétrico dentro do material. A aplicação de um campo elétrico externo sempre produz um efeito dielétrico quando o material é linear. Para materiais não-lineares, podemos ter um efeito ferroelétrico, em que seus dipolos permanecem “congelados” mesmo após cessar o campo externo, de forma que o campo gerado pela amostra não se anula ao desligar os aparelhos. Para o campo magnético, analogamente, temos o diamagnetismo e ferromagnetismo, respectivamente. No entanto, devido a influência do spin, há também o efeito de paramagnetismo, que não tem um equivalente elétrico. Nos materiais paramagnéticos, a aplicação de um campo magnético externo produz na amostra um campo interno maior que o externo, sendo um efeito oposto ao diamagnetismo. A área da física que estuda as propriedades dos materiais é chamada de física da matéria condensada³.

1.1.1 Equações de campo

Tendo em vista possíveis efeitos, precisamos reescrever as equações de Maxwell em termos dos campos de indução D^μ e H^μ para estudar a influência dos meios materiais na eletrodinâmica. Sabemos que as identidades de Bianchi não se alteram, pois dependem apenas da forma do tensor de campo. Com isso, basta alterarmos as equações (1.13) trocando a dependência do

³Para consultar dados experimentais sobre as propriedades dielétricas e magnéticas dos diversos materiais, veja as referências [48, 52].

tensor de campo $F^{\mu\nu}$ com os campos elétrico E^μ e magnético B^μ , como mostrado na relação (1.5), para uma dependência nos campos de deslocamento elétrico D^μ e indução magnética H^μ . Para isso, definimos uma nova quantidade chamada de tensor de polarização [69]

$$P_{\mu\nu} = D_\mu v_\nu - D_\nu v_\mu + \eta_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} v_\rho H_\sigma, \quad (1.27)$$

tal que as equações (1.13) se tornam

$$P_{;\nu}^{\mu\nu} = j^\mu, \quad (1.28)$$

enquanto as equações (1.11) permanecem inalteradas. Dado essa modificação, estamos prontos para analisar consequências da eletrodinâmica em meios materiais. Uma aplicação de interesse é o estudo da propagação da luz em meios dielétricos. No caso de dielétricos não-lineares, a área da física que analisa o comportamento da luz em meios materiais é chamada de óptica não-linear [9].

As equações de Maxwell em meios materiais podem ser reescritas como

$$(D^\mu v^\nu)_{;\nu} - (D^\nu v^\mu)_{;\nu} + (\eta^{\mu\nu\rho\sigma} v_\rho H_\sigma)_{;\nu} = j^\mu, \quad (1.29)$$

$$(B^\mu v^\nu)_{;\nu} - (B^\nu v^\mu)_{;\nu} - (\eta^{\mu\nu\rho\sigma} v_\rho E_\sigma)_{;\nu} = 0. \quad (1.30)$$

Para tal, é necessário considerar a decomposição do campo de observadores em suas partes irreduzíveis [78]

$$v_{\mu;\nu} = \frac{\theta}{3} h_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu} + \dot{v}_\mu v_\nu. \quad (1.31)$$

Lembramos que $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - v_\mu v_\nu$ representa o tensor de projeção. Definimos as quantidades

$$\dot{v}_\mu = v_{\mu;\nu} v^\nu \quad (1.32)$$

$$\theta = v^\alpha{}_{;\alpha} \quad (1.33)$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} h_{(\alpha}{}^\mu h_{\beta)}{}^\lambda v_{\mu;\lambda} - \frac{\theta}{3} h_{\alpha\beta} \quad (1.34)$$

$$\omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} h_{[\alpha}{}^\mu h_{\beta]}{}^\lambda v_{\mu;\lambda}, \quad (1.35)$$

que representam, respectivamente, a aceleração do observador \dot{v}_μ , o fator de expansão θ , o tensor de cisalhamento $\sigma_{\alpha\beta}$, que é simétrico e sem traço, e o tensor de vorticidade $\omega_{\alpha\beta}$, que é antissimétrico.

Projetando a primeira equação no campo de observadores, obtemos

$$\begin{aligned}
& (D^\mu v^\nu)_{;\nu} v_\mu - (D^\nu v^\mu)_{;\nu} v_\mu + (\eta^{\mu\nu\rho\sigma} v_\rho H_\sigma)_{;\nu} v_\mu = j^\mu v_\mu \\
& (D^\mu_{;\nu} v^\nu v_\mu + D^\mu v_\mu v^\nu_{;\nu}) - (D^\nu_{;\nu} v_\mu v^\mu + D^\nu v_\mu v^\mu_{;\nu}) + \eta^{\mu\nu\rho\sigma} (v_{\rho;\nu} v_\mu H_\sigma + v_\rho H_{\sigma;\nu} v_\mu) = \\
& (v_\mu D^\mu_{;\nu} v^\nu + D^\mu v_\mu \theta) - (D^\nu_{;\nu} + D^\nu v^\mu_{;\nu} v_\mu) + \eta^{\mu\nu\rho\sigma} v_{\rho;\nu} v_\mu H_\sigma = \\
& \dot{D}^\mu v_\mu - D^\nu_{;\nu} + \eta^{\mu\nu\rho\sigma} v_{\rho;\nu} v_\mu H_\sigma = \\
& -D^\mu \dot{v}_\mu - D^\nu_{;\nu} + \eta^{\mu\nu\rho\sigma} \left(\frac{\theta}{3} h_{\rho\nu} + \sigma_{\rho\nu} + \omega_{\rho\nu} + \dot{v}_\rho v_\nu \right) v_\mu H_\sigma = \\
& -D^\mu \dot{v}_\mu - D^\nu_{;\nu} + \eta^{\mu\nu\rho\sigma} \omega_{\rho\nu} v_\mu H_\sigma = \\
& -D^\mu \dot{v}_\mu - D^\nu_{;\nu} - 2\omega_\nu H^\nu = j^0,
\end{aligned}$$

onde na quarta linha consideramos que para um dado tensor A^μ vale a relação $\dot{A}^\mu = A^\mu_{;\nu} v^\nu$ e que os campos eletromagnéticos são perpendiculares ao campo de observadores, tal que $D^\nu v_\nu = 0$. Enquanto que, na quinta linha usamos a relação $(D^\nu v_\nu)_{;\alpha} v^\alpha = 0$ e na sexta linha consideramos que os tensores $h_{\mu\nu}$ e $\sigma_{\mu\nu}$ são simétricos. Por fim, na sétima linha, usamos a definição do tensor de vorticidade $\omega_{\mu\nu}$ e obtemos que ela irá permitir uma contração entre tensores de levi-civita ao substituí-la na equação $\omega^\sigma = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu\rho\sigma}\omega_{\rho\nu}v_\mu$, de forma a simplificar o resultado.

Vamos nos reter ao caso de um meio polarizado sem cargas livres, tal que $j^0 = 0$. Portanto, a primeira equação projetada no campo de observadores se reduz a condição

$$D^\mu \dot{v}_\mu + D^\nu_{;\nu} + 2\omega_\nu H^\nu = 0. \quad (1.36)$$

De forma totalmente análoga, fazemos essa projeção na segunda equação substituindo $D^\mu \rightarrow B^\mu$ e $H_\sigma \rightarrow -E_\sigma$ no resultado obtido para a primeira equação (1.36), tendo em vista que elas são semelhantes. Sendo assim, a segunda equação se torna

$$B^\mu \dot{v}_\mu + B^\nu_{;\nu} - 2\omega_\nu E^\nu = 0. \quad (1.37)$$

Para a projeção no tensor $h_{\mu\lambda}$, também mostraremos as duas equações de forma análoga. Encontraremos a projeção para a primeira equação e o resultado para a segunda equação sairá diretamente, por meio de uma substituição de variáveis. Portanto, obtemos para a primeira equação

$$\begin{aligned}
& (D^\mu v^\nu)_{;\nu} h_{\mu\lambda} - (D^\nu v^\mu)_{;\nu} h_{\mu\lambda} + (\eta^{\mu\nu\rho\sigma} v_\rho H_\sigma)_{;\nu} h_{\mu\lambda} = j^\mu h_{\mu\lambda} \\
& (D^\mu_{;\nu} h_{\mu\lambda} v^\nu + D^\mu v^\nu_{;\nu} h_{\mu\lambda}) - (D^\nu_{;\nu} h_{\mu\lambda} v^\mu + D^\nu v^\mu_{;\nu} h_{\mu\lambda}) + \\
& \quad \eta^{\mu\nu\rho\sigma} (v_{\rho;\nu} h_{\mu\lambda} H_\sigma + v_\rho H_{\sigma;\nu} h_{\mu\lambda}) = \\
& (\dot{D}_\lambda + \theta D_\lambda) - D^\nu \left(\frac{\theta}{3} h^\mu{}_\nu + \sigma^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu + \dot{v}^\mu v_\nu \right) h_{\mu\lambda} + \\
& \eta^{\mu\nu\rho\sigma} \left[\left(\frac{\theta}{3} h_{\rho\nu} + \sigma_{\rho\nu} + \omega_{\rho\nu} + \dot{v}_\rho v_\nu \right) h_{\mu\lambda} H_\sigma + v_\rho H_{\sigma;\nu} h_{\mu\lambda} \right] = \\
& (\dot{D}_\lambda + \theta D_\lambda) - D^\nu \left(\frac{\theta}{3} h_{\lambda\nu} + \sigma_{\lambda\nu} + \omega_{\lambda\nu} \right) + \\
& \quad \eta_\lambda{}^{\nu\rho\sigma} [(\omega_{\rho\nu} + \dot{v}_\rho v_\nu) H_\sigma + v_\rho H_{\sigma;\nu}] = \\
& \dot{D}_\lambda + D^\nu \left(\frac{2\theta}{3} h_{\lambda\nu} - \sigma_{\lambda\nu} - \omega_{\lambda\nu} \right) + \eta_\lambda{}^{\nu\rho\sigma} [(\omega_{\rho\nu} + \dot{v}_\rho v_\nu) H_\sigma + v_\rho H_{\sigma;\nu}] = \\
& \dot{D}_\lambda + D^\nu \left(\frac{2\theta}{3} h_{\lambda\nu} - \sigma_{\lambda\nu} - \omega_{\lambda\nu} \right) - 2\omega^\alpha H_\alpha v_\mu h^{\mu\lambda} + \eta_\lambda{}^{\nu\rho\sigma} [\dot{v}_\rho v_\nu H_\sigma + v_\rho H_{\sigma;\nu}] = \\
& \dot{D}_\lambda + D^\nu \left(\frac{2\theta}{3} h_{\lambda\nu} - \sigma_{\lambda\nu} - \omega_{\lambda\nu} \right) + \eta_\lambda{}^{\nu\rho\sigma} [\dot{v}_\rho v_\nu H_\sigma + v_\rho H_{\sigma;\nu}] = j^\mu h_{\mu\lambda} ,
\end{aligned}$$

onde consideramos que $v_\mu h^{\mu\lambda} = 0$, seguindo a definição do tensor de projeção. Dado que a geometria de fundo é descrita pela métrica $g^{\mu\nu}$ na ausência de correntes $j^\mu h_{\mu\lambda} = 0$, obtemos

$$\dot{D}_\lambda + D^\nu \left(\frac{2\theta}{3} h_{\lambda\nu} - \sigma_{\lambda\nu} - \omega_{\lambda\nu} \right) + \eta_\lambda{}^{\nu\rho\sigma} [\dot{v}_\rho v_\nu H_\sigma + v_\rho H_{\sigma;\nu}] = 0 . \quad (1.38)$$

Portanto, substituindo $D^\mu \rightarrow B^\mu$ e $H_\sigma \rightarrow -E_\sigma$ no resultado (1.38), encontramos a equação que descreve a projeção espacial da segunda equação

$$\dot{B}_\lambda + B^\nu \left(\frac{2\theta}{3} h_{\lambda\nu} - \sigma_{\lambda\nu} - \omega_{\lambda\nu} \right) - \eta_\lambda{}^{\nu\rho\sigma} [\dot{v}_\rho v_\nu E_\sigma + v_\rho E_{\sigma;\nu}] = 0 . \quad (1.39)$$

O sistema de equações (1.36-1.39) representa as equações de Maxwell em meios materiais na ausência de cargas livres, para um espaço-tempo de fundo arbitrário.

1.2 Propagação de ondas

Nessa seção, analisaremos a propagação de ondas em um meio dielétrico e isotrópico que esteja situado sob um espaço-curvo de fundo $g^{\mu\nu}$ arbitrário. Mostraremos que a resolução do sistema de equações (1.36-1.39) independe do campo de observadores e provaremos que os resultados conhecidos na literatura para um espaço-plano, representado pela métrica de Minkowski $\gamma^{\mu\nu}$, podem ser generalizados para um fundo arbitrário por meio do acoplamento mínimo $\gamma^{\mu\nu} \rightarrow g^{\mu\nu}$. Para isso, introduziremos o formalismo de ondas de choque, descrito pelo método de Hadamard, que permite estudarmos a propagação de ondas através da evolução das superfícies de descontinuidade dos campos. Este método é amplamente conhecido e usado na literatura, valendo tanto para o espaço plano quanto para espaços-curvos [47, 69, 80].

1.2.1 Ondas de choque

O formalismo de ondas de choque descreve mudanças abruptas nos campos. Essas, se propagam através do espaço-tempo por meio de uma superfície de transição, que divide regiões do espaço que representam o campo na sua forma passada e atual. Um exemplo comum na literatura [80] que nos permite visualizar esse formalismo é dado por uma carga parada em um instante $t = 0$ que passa a se mover aceleradamente. O campo elétrico desta carga no instante inicial é estático e possui suas linhas de campo divergindo de forma isotrópica para todas as regiões do espaço. Quando começa a se mover, o campo elétrico da carga em movimento acelerado, além de variar com o tempo, é representado por outras linhas de campo. Em um dado ponto $r = R$ da posição inicial da carga, o campo elétrico passa por uma transição abrupta conforme a carga se propaga através do espaço. Essa transição é representada por uma superfície Σ que divide a configuração passada do campo da sua configuração atual. O formalismo de ondas de choque é caracterizado pela propagação dessas superfícies de descontinuidade e matematicamente é descrito pelo método de Hadamard.

O método de Hadamard nos dá um mecanismo para a análise de fenômenos de propagação descritos por equações diferenciais parciais hiperbólicas. A equação de onda é um exemplo dessa classe de equações diferenciais. Portanto, podemos utilizar esse método para resolver a equação de onda em um meio material, seguindo a evolução das frentes de onda.

Definimos uma superfície de descontinuidade $\Sigma(x^\mu) = \text{const.}$ que delimita localmente duas regiões, 1 e 2, no espaço-tempo. De tal forma que dada uma função f , chamaremos de $f^{(1)}$

e $f^{(2)}$ os valores tomados pela função nos dois domínios. A descontinuidade de Hadamard da função f , com relação à superfície Σ , é definida por

$$[f(x)]|_{\Sigma} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(f^{(1)}(x + \epsilon) - f^{(2)}(x - \epsilon) \right), \quad (1.40)$$

tal que o ponto x pertence a superfície. Supomos que a função f seja contínua em Σ , mas que as suas primeiras derivadas $f_{,\alpha}$ não o sejam

$$[f]|_{\Sigma} = 0, \quad (1.41)$$

$$[f_{,\alpha}]|_{\Sigma} \neq 0. \quad (1.42)$$

Considerando os diferenciais da função em ambas regiões, sabemos que o vetor deslocamento dx^{α} pertence a superfície Σ , de forma que obtemos

$$df^{(i)} = \partial_{\alpha} f^{(i)} dx^{\alpha}, \quad (1.43)$$

com $i = \{1, 2\}$ representando as regiões. Hadamard mostrou que esses diferenciais devem existir e ser contínuos na superfície de descontinuidade, i.e., $[df]|_{\Sigma} = 0$. Ou seja, a descontinuidade das derivadas de f deve ser um objeto ortogonal a superfície, já que

$$[df]|_{\Sigma} = [\partial_{\alpha} f]|_{\Sigma} dx^{\alpha} = 0. \quad (1.44)$$

Portanto, deve existir um escalar $\sigma(x) \neq 0$ tal que $[f_{,\alpha}]|_{\Sigma} = \sigma(x) \Sigma_{,\alpha}$. Veremos a seguir como esse método se aplica à eletrodinâmica de Maxwell. Vale a pena ressaltar que este método pode ser usado em outras situações, tal como na propagação da radiação gravitacional [80] e na propagação de ondas em outras teorias não-lineares arbitrárias [69, 79].

No caso eletromagnético, identificamos $\Sigma_{,\alpha}$ com o vetor de onda k_{α} . Fora do vácuo, veremos que existirá uma métrica efetiva $\hat{g}^{\mu\nu}$, tida como uma modificação da métrica de fundo devido ao meio material, que irá satisfazer uma relação de dispersão $\hat{g}^{\mu\nu} k_{\mu} k_{\nu} = 0$. Nessa geometria efetiva, a luz irá se propagar seguindo uma geodésica em um espaço-curvo Riemanniano. Essa analogia com a Relatividade Geral permite o desenvolvimento dos chamados modelos análogos gravitacionais a partir da técnica da geometria efetiva [5].

1.2.2 Propagação de ondas em meios dielétricos

Vamos aplicar o formalismo de ondas de choque ao sistema de equações (1.36-1.39), de forma a encontrar como a luz se propaga em um meio material com propriedades dielétricas. As descontinuidades de Hadamard são representadas em um meio material pelas relações

$$[E_\mu]_\Sigma = 0, \quad [E_{\mu;\lambda}]_\Sigma = e_\mu k_\lambda, \quad (1.45)$$

$$[H_\mu]_\Sigma = 0, \quad [H_{\mu;\lambda}]_\Sigma = h_\mu k_\lambda. \quad (1.46)$$

Tendo em vista que as equações constitutivas (1.21) e (1.25) implicam nas condições $[D_\mu]_\Sigma = 0$ e $[B_\mu]_\Sigma = 0$, ao aplicarmos as descontinuidades nas equações de campo, obtemos

$$\begin{aligned} [D_{;\nu}^\nu]_\Sigma &= 0 \\ [B_{;\nu}^\nu]_\Sigma &= 0 \\ [\dot{D}^\lambda]_\Sigma + \eta^{\lambda\nu\rho\sigma} v_\rho [H_{\sigma;\nu}]_\Sigma &= 0 \\ [\dot{B}^\lambda]_\Sigma - \eta^{\lambda\nu\rho\sigma} v_\rho [E_{\sigma;\nu}]_\Sigma &= 0. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Se quisermos encontrar as soluções desse sistema de equações, precisaremos explicitar as relações constitutivas que definem o meio material.

Nesta dissertação, estamos interessados em trabalhar com meios isotrópicos, afim de simplificar o sistema de equações (1.47). Meios isotrópicos nos permitem escrever as relações

$$D_{;\nu}^\alpha = \epsilon_{;\nu} E^\alpha + \epsilon E_{;\nu}^\alpha \quad (1.48)$$

$$B_{;\nu}^\alpha = \mu_{;\nu} H^\alpha + \mu H_{;\nu}^\alpha. \quad (1.49)$$

Para o caso em que a permissividade $\epsilon(E, H)$ e a permeabilidade $\mu(E, H)$ possam depender da intensidade dos campos, obtemos as equações

$$\epsilon_{;\nu} = \bar{\epsilon} E_{;\nu} + \epsilon' H_{;\nu}, \quad (1.50)$$

$$\mu_{;\nu} = \bar{\mu} E_{;\nu} + \mu' H_{;\nu}, \quad (1.51)$$

tal que, para denotar as derivadas parciais das funções com relação as intensidades dos campos elétrico E e indução magnética H , consideramos a barra sobre a letra e o apóstrofo, respectivamente. Dado as normalizações $E^2 = -E^\mu E_\mu$ e $B^2 = -B^\mu B_\mu$, concluímos que

$$E_{;\alpha} = \left(\sqrt{-E^\mu E_\mu} \right)_{;\alpha} = -\frac{1}{E} E_\mu E_{;\alpha}^\mu, \quad (1.52)$$

$$H_{;\alpha} = \left(\sqrt{-H^\mu H_\mu} \right)_{;\alpha} = -\frac{1}{H} H_\mu H_{;\alpha}^\mu. \quad (1.53)$$

Portanto, as relações (1.48-1.49) se tornam

$$D_{;\nu}^\alpha = -\left(\frac{\bar{\epsilon}}{E} E_\mu E_{;\nu}^\mu + \frac{\epsilon'}{H} H_\mu H_{;\nu}^\mu \right) E^\alpha + \epsilon E_{;\nu}^\alpha \quad (1.54)$$

$$B_{;\nu}^\alpha = -\left(\frac{\bar{\mu}}{E} E_\mu E_{;\nu}^\mu + \frac{\mu'}{H} H_\mu H_{;\nu}^\mu \right) H^\alpha + \mu H_{;\nu}^\alpha. \quad (1.55)$$

Aplicando as descontinuidades (1.45-1.46) nas relações acima e substituindo o resultado no sistema de equações (1.47), encontramos

$$\epsilon e^\alpha k_\alpha - E^\alpha \left(\frac{\bar{\epsilon}}{E} E^\lambda e_\lambda k_\alpha + \frac{\epsilon'}{H} H^\lambda h_\lambda k_\alpha \right) = 0 \quad (1.56)$$

$$\mu h^\alpha k_\alpha - H^\alpha \left(\frac{\bar{\mu}}{E} E^\lambda e_\lambda k_\alpha + \frac{\mu'}{H} H^\lambda h_\lambda k_\alpha \right) = 0 \quad (1.57)$$

$$\epsilon e^\lambda k_\alpha v^\alpha - E^\lambda \left(\frac{\bar{\epsilon}}{E} E^\beta e_\beta k_\alpha v^\alpha + \frac{\epsilon'}{H} H^\beta h_\beta k_\alpha v^\alpha \right) + \eta^{\lambda\nu\rho\sigma} v_\rho h_\sigma k_\nu = 0 \quad (1.58)$$

$$\mu h^\lambda k_\alpha v^\alpha - H^\lambda \left(\frac{\bar{\mu}}{E} E^\beta e_\beta k_\alpha v^\alpha + \frac{\mu'}{H} H^\beta h_\beta k_\alpha v^\alpha \right) - \eta^{\lambda\nu\rho\sigma} v_\rho e_\sigma k_\nu = 0, \quad (1.59)$$

tal que consideramos que a relação $\dot{A}^\mu = A_{;\nu}^\mu v^\nu$ pode ser reescrita em termos das descontinuidades como $[\dot{A}^\mu]_\Sigma = a^\mu k_\nu v^\nu$. Para resolver o sistema de equações acima, obtendo a geometria efetiva associada ao meio material, analisaremos o caso específico de um meio dielétrico que possua permeabilidade magnética constante $\mu = \text{const.}$ e permissividade elétrica $\epsilon = \epsilon(E, H)$. Como consequência, esse sistema de equações se reduz a

$$\epsilon e^\alpha k_\alpha - E^\alpha \left(\frac{\bar{\epsilon}}{E} E^\lambda e_\lambda k_\alpha + \frac{\epsilon'}{H} H^\lambda h_\lambda k_\alpha \right) = 0 \quad (1.60)$$

$$\mu h^\alpha k_\alpha = 0 \quad (1.61)$$

$$\epsilon e^\lambda k_\alpha v^\alpha - E^\lambda \left(\frac{\bar{\epsilon}}{E} E^\beta e_\beta k_\alpha v^\alpha + \frac{\epsilon'}{H} H^\beta h_\beta k_\alpha v^\alpha \right) + \eta^{\lambda\nu\rho\sigma} v_\rho h_\sigma k_\nu = 0 \quad (1.62)$$

$$\mu h^\lambda k_\alpha v^\alpha - \eta^{\lambda\nu\rho\sigma} v_\rho e_\sigma k_\nu = 0. \quad (1.63)$$

Notamos que, se contrairmos as duas últimas equações por k_λ , obtemos as duas primeiras equações. Por esse motivo, é suficiente trabalharmos somente com as duas últimas equações (1.62-1.63).

Da última equação, podemos isolar a relação

$$h_\sigma = \frac{1}{\mu k^\alpha v_\alpha} \eta_{\sigma\nu\rho\mu} v^\rho e^\mu k^\nu, \quad (1.64)$$

de forma que é possível substituir esse resultado na penúltima equação (1.62). Para isso, consideramos que

$$\begin{aligned} \eta^{\lambda\gamma\beta\sigma} \eta_{\sigma\nu\rho\mu} v^\rho e^\mu k^\nu k_\gamma v_\beta &= \\ \delta_{\nu\rho\mu}^{\lambda\gamma\beta} v^\rho e^\mu k^\nu k_\gamma v_\beta &= \left(\delta_\nu^\lambda \delta_\rho^\gamma \delta_\mu^\beta + \delta_\nu^\beta \delta_\rho^\lambda \delta_\mu^\gamma + \delta_\nu^\gamma \delta_\rho^\beta \delta_\mu^\lambda \right) v^\rho e^\mu k^\nu k_\gamma v_\beta + \\ &- \left(\delta_\nu^\gamma \delta_\rho^\lambda \delta_\mu^\beta + \delta_\nu^\lambda \delta_\rho^\beta \delta_\mu^\gamma + \delta_\nu^\beta \delta_\rho^\gamma \delta_\mu^\lambda \right) v^\rho e^\mu k^\nu k_\gamma v_\beta \\ &= \left(v^\rho e^\mu k^\lambda k_\rho v_\mu + v^\lambda e^\mu k^\nu k_\mu v_\nu + v^\beta e^\lambda k^\nu k_\nu v_\beta \right) + \\ &- \left(v^\lambda e^\mu k^\nu k_\nu v_\mu + v^\beta e^\mu k^\lambda k_\mu v_\beta + v^\rho e^\lambda k^\nu k_\rho v_\nu \right) \\ &= \left(v^\rho e^\mu k^\lambda k_\rho v_\mu + v^\lambda e^\mu k^\nu k_\mu v_\nu + e^\lambda k^\nu k_\nu \right) + \\ &- \left(v^\lambda e^\mu k^\nu k_\nu v_\mu + e^\mu k^\lambda k_\mu + v^\rho e^\lambda k^\nu k_\rho v_\nu \right) \\ &= k^\lambda (v^\rho k_\rho e^\mu v_\mu - e^\mu k_\mu) + v^\lambda (e^\mu k_\mu k^\nu v_\nu - e^\mu v_\mu k^\nu k_\nu) + \\ &+ e^\lambda (k^\nu k_\nu - v^\rho k_\rho k^\nu v_\nu). \end{aligned} \quad (1.65)$$

Portanto, a penúltima equação se torna

$$\begin{aligned} 0 &= \epsilon e^\lambda k_\alpha v^\alpha - \frac{\bar{\epsilon}}{E} E^\beta e_\beta k_\alpha v^\alpha E^\lambda - \frac{\epsilon'}{\mu H} \eta_{\beta\nu\rho\mu} H^\beta k^\nu v^\rho e^\mu E^\lambda + \frac{1}{\mu k^\alpha v_\alpha} \left[k^\lambda (v^\rho k_\rho e^\mu v_\mu - e^\mu k_\mu) \right] + \\ &+ \frac{1}{\mu k^\alpha v_\alpha} \left[v^\lambda (e^\mu k_\mu k^\nu v_\nu - e^\mu v_\mu k^\nu k_\nu) + e^\lambda (k^\nu k_\nu - v^\rho k_\rho k^\nu v_\nu) \right]. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Observamos que a seguinte relação deve ser válida

$$\begin{aligned} 0 &= (E^\mu v_\mu)_{;\lambda} \\ &= E_{;\lambda}^\mu v_\mu + E_\mu v_{;\lambda}^\mu, \end{aligned} \quad (1.67)$$

tal que se tirarmos a sua descontinuidade obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \left[E_{;\lambda}^\mu \right]_\Sigma v_\mu + [E_\mu]_\Sigma v_{;\lambda}^\mu \\ &= e^\mu v_\mu k_\lambda. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Logo, encontramos que a condição $e^\mu v_\mu = 0$ é válida. Com isso, podemos simplificar a relação (1.66), que se reduz a

$$0 = \epsilon e^\lambda k_\alpha v^\alpha - \frac{\bar{\epsilon}}{E} E^\beta e_\beta k_\alpha v^\alpha E^\lambda - \frac{\epsilon'}{\mu H} \eta_{\beta\nu\rho\mu} H^\beta k^\nu v^\rho e^\mu E^\lambda - \frac{k^\lambda e^\mu k_\mu}{\mu k^\alpha v_\alpha} + \frac{1}{\mu k^\alpha v_\alpha} \left[v^\lambda e^\mu k_\mu k^\nu v_\nu + e^\lambda (k^\nu k_\nu - v^\rho k_\rho k^\nu v_\nu) \right]. \quad (1.69)$$

Notamos que é possível isolar um tensor $Z^{\mu\lambda}$, chamado de tensor de Fresnel [18, 23, 49], tal que a relação acima pode ser reescrita na forma

$$Z^{\mu\lambda} e_\lambda = 0. \quad (1.70)$$

Verificamos que o tensor de Fresnel pode ser encontrado e definido como

$$Z^{\mu\lambda} = (k.v) v^\mu k^\lambda - (k.v)^2 \frac{\mu \bar{\epsilon}}{E} E^\mu E^\lambda - (k.v) \frac{\epsilon'}{H} E^\mu \eta^{\beta\nu\rho\lambda} H_\beta v_\rho k_\nu - k^\mu k^\lambda + g^{\mu\lambda} [(\mu\epsilon - 1)(k.v)^2 + k^\nu k_\nu]. \quad (1.71)$$

Em geral, existem duas formas equivalentes de resolver esse sistema de equações (1.70). A primeira [42, 82], considera que soluções não-triviais desse sistema podem ser encontradas para os casos em que $\det[Z^{\mu\lambda}] = 0$. Essa condição é conhecida na literatura como equação generalizada de Fresnel e é resolvida por meio do método de Cayley-Hamilton [18, 69]. Já a segunda [42, 82], utiliza o fato de que podemos expandir o vetor de polarização elétrica e^λ como uma combinação linear de quatro vetores linearmente independentes, que podem ser escolhidos como os campos⁴ E^λ , H^λ , k^λ , v^λ . O segundo método é, em geral, menos trabalhoso. Portanto, consideraremos ele na resolução do sistema de equações.

Dado o *ansatz* para a expansão do vetor de polarização $e_\lambda = \alpha_0 E_\lambda + \beta_0 H_\lambda + \gamma_0 k_\lambda + \delta_0 v_\lambda$, o sistema de equações (1.70) pode ser projetado na sua base vetorial. Logo, para cada termo de $Z^{\mu\lambda} e_\lambda$ obtemos, respectivamente, as projeções

$$(k.v) v^\mu k^\lambda e_\lambda = (k.v) v^\mu k^\lambda (\alpha_0 E_\lambda + \beta_0 H_\lambda + \gamma_0 k_\lambda + \delta_0 v_\lambda), \quad (1.72)$$

⁴Ressaltamos que é conhecido na literatura uma escolha alternativa para a base, onde considera-se o vetor de base $\eta^{\mu\nu\sigma\rho} E_\nu v_\rho k_\sigma$ no lugar do campo de indução H^μ . No problema analisado, sabemos que essa escolha não alteram o resultado obtido. Além disso, os autores [18] mostraram que na situação limite em que os vetores de base são paralelos, podemos considerar a aproximação de que o ângulo entre os vetores seja muito pequeno, de forma que a expansão do vetor de polarização nessa base permanece válida.

$$(k.v)^2 \frac{\mu\bar{\epsilon}}{E} E^\mu E^\lambda e_\lambda = (k.v)^2 \frac{\mu\bar{\epsilon}}{E} E^\mu E^\lambda (\alpha_0 E_\lambda + \beta_0 H_\lambda + \gamma_0 k_\lambda) , \quad (1.73)$$

$$(k.v) \frac{\epsilon'}{H} E^\mu H_\beta \eta^{\beta\nu\rho\lambda} v_\rho k_\nu e_\lambda = \alpha_0 (k.v) \frac{\epsilon'}{H} E^\mu H_\beta \eta^{\beta\nu\rho\lambda} v_\rho k_\nu E_\lambda , \quad (1.74)$$

$$k^\mu k^\lambda e_\lambda = k^\mu k^\lambda (\alpha_0 E_\lambda + \beta_0 H_\lambda + \gamma_0 k_\lambda + \delta_0 v_\lambda) , \quad (1.75)$$

$$\begin{aligned} [(\mu\epsilon - 1)(k.v)^2 + k^\nu k_\nu] g^{\mu\lambda} e_\lambda &= [(\mu\epsilon - 1)(k.v)^2 + k^\nu k_\nu] e^\mu \\ &= [(\mu\epsilon - 1)(k.v)^2 + k^\nu k_\nu] (\alpha_0 E^\mu + \beta_0 H^\mu + \gamma_0 k^\mu + \delta_0 v^\mu) , \end{aligned} \quad (1.76)$$

de forma que podemos reescrever (1.70) como um sistema de quatro equações A, B, C, D , obtido a partir da relação

$$AE^\mu + BH^\mu + CK^\mu + Dv^\mu = 0 , \quad (1.77)$$

que implica em

$$A = B = C = D = 0 . \quad (1.78)$$

Temos que suas equações são,

$$\begin{aligned} A &= \alpha_0 \left[\frac{k^\nu k_\nu}{(k.v)^2} - 1 + \mu \frac{\partial(\epsilon E)}{\partial E} - \frac{\epsilon'}{(k.v)H} \eta^{\beta\nu\rho\lambda} H_\beta k_\nu v_\rho E_\lambda \right] + \\ &- \beta_0 \left[\frac{\mu\bar{\epsilon}}{E} E^\alpha H_\alpha \right] - \gamma_0 \left[\frac{\mu\bar{\epsilon}}{E} E^\alpha k_\alpha \right] \end{aligned} \quad (1.79)$$

$$B = \beta_0 [(\mu\epsilon - 1)(k.v)^2 + k^\nu k_\nu] \quad (1.80)$$

$$C = -k^\lambda (\alpha_0 E_\lambda + \beta_0 H_\lambda + \delta_0 v_\lambda) - \gamma_0 (1 - \mu\epsilon)(k.v)^2 \quad (1.81)$$

$$D = (k.v)k^\lambda (\alpha_0 E_\lambda + \beta_0 H_\lambda + \gamma_0 k_\lambda) + \delta_0 [\mu\epsilon(k.v)^2 + k^\nu k_\nu] . \quad (1.82)$$

Resolveremos esse sistema de equações (1.78) de forma a determinar as constantes $\alpha_0, \beta_0, \delta_0$ e γ_0 . A obtenção dessas constantes nos permitirá encontrar uma relação de dispersão para a luz $\hat{g}^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = 0$ e obter uma geometria efetiva $\hat{g}^{\mu\nu}$ que descreva a propagação da luz no meio dielétrico.

Pela segunda equação $B = 0$, é direto notar que temos duas possibilidades. A primeira solução é representada pelo vetor de polarização

$$e_{\lambda}^{-} = \rho^{-} H_{\lambda} , \quad (1.83)$$

onde ρ^{-} é uma constante e $\alpha_0 = \gamma_0 = \delta_0 = 0$. Sua métrica efetiva é definida por

$$\hat{g}_{-}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + v^{\mu} v^{\nu} (\mu\epsilon - 1) , \quad (1.84)$$

com $\mu = const.$ e $\epsilon = \epsilon(E, H)$. Já a segunda solução possui a restrição $\beta_0 = 0$, tal que precisamos resolver as outras equações para obter seu vetor de polarização e_{λ}^{+} e sua geometria efetiva $\hat{g}_{+}^{\mu\nu}$ associada. Esse fenômeno é uma consequência do efeito de birrefringência produzido no meio dielétrico e representa o fato de que temos duas polarizações associadas a propagação da luz e_{λ}^{\pm} , tal que cada uma delas segue uma geometria efetiva $\hat{g}_{\pm}^{\mu\nu}$.

Para obter a segunda solução, substituiremos a restrição $\beta_0 = 0$ nas outras equações. Verificamos que a partir da equação $C = 0$ é possível isolar a relação

$$(k.v)\alpha_0 k^{\lambda} E_{\lambda} = -\delta_0 (k.v)^2 - \gamma_0 (1 - \mu\epsilon) (k.v)^3 \quad (1.85)$$

e substituí-la na equação $D = 0$, de forma a obter a restrição

$$\delta_0 [(\mu\epsilon - 1)(k.v)^2 + k^{\nu} k_{\nu}] - \gamma_0 (k.v) [(1 - \mu\epsilon)(k.v)^2 + k^{\lambda} k_{\lambda}] = 0 . \quad (1.86)$$

É direto verificar que essa restrição implica em

$$\delta_0 = -\gamma_0 (k.v) . \quad (1.87)$$

Portanto, podemos substituir $\beta_0 = 0$ juntamente com esse resultado (1.87) na equação $C = 0$, de forma a obter

$$\alpha_0 = \frac{\mu\epsilon(k.v)^2}{E^{\lambda} k_{\lambda}} \gamma_0 . \quad (1.88)$$

As relações acima (1.87-1.88) juntamente com $\beta_0 = 0$ implicam no vetor de polarização

$$e_{\lambda}^{+} = \rho^{+} \{ \mu\epsilon(k.v)^2 E_{\lambda} + E^{\alpha} k_{\alpha} [k_{\lambda} - (k.v)v_{\lambda}] \} , \quad (1.89)$$

onde ρ^+ representa uma constante. Aplicando essas restrições na equação $A = 0$, obtemos

$$A = \alpha_0 \left[\frac{k^\nu k_\nu}{(k.v)^2} - 1 + \mu \frac{\partial(\epsilon E)}{\partial E} - \frac{\epsilon'}{(k.v)H} \eta^{\beta\nu\rho\lambda} H_\beta k_\nu v_\rho E_\lambda \right] - \alpha_0 \frac{E^\lambda k_\lambda}{\mu \epsilon (k.v)^2} \left[\frac{\mu \bar{\epsilon}}{E} E^\alpha k_\alpha \right] \quad (1.90)$$

o que implica em

$$\begin{aligned} 0 &= k^\nu k_\nu - (k.v)^2 + (k.v)^2 \mu \frac{\partial(\epsilon E)}{\partial E} - \frac{(k.v)}{H} \epsilon' \eta^{\beta\nu\rho\lambda} H_\beta k_\nu v_\rho E_\lambda - \frac{\bar{\epsilon}}{\epsilon E} E^\lambda k_\lambda E^\alpha k_\alpha \\ &= \left\{ g^{\mu\nu} - \left[1 - \mu \frac{\partial(\epsilon E)}{\partial E} \right] v^\mu v^\nu - \frac{\epsilon'}{2H} \eta^{\beta\rho\lambda(\mu} v^{\nu)} H_\beta v_\rho E_\lambda - \frac{\bar{\epsilon}}{\epsilon E} E^\mu E^\nu \right\} k_\mu k_\nu, \end{aligned}$$

onde $\bar{\epsilon}$ e ϵ' são, respectivamente, as derivadas parciais com relação aos módulos dos campos elétrico e indução magnética. Ressaltamos que consideramos a propriedade

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon'}{2H} \eta^{\beta\rho\lambda(\mu} v^{\nu)} H_\beta v_\rho E_\lambda k_\mu k_\nu &= \frac{\epsilon'}{2H} H_\beta v_\rho E_\lambda \left[\eta^{\beta\rho\lambda\mu} v^\nu k_\mu k_\nu + \eta^{\beta\rho\lambda\nu} v^\mu k_\mu k_\nu \right] \\ &= \frac{\epsilon'}{2H} H_\beta v_\rho E_\lambda \left[\eta^{\beta\rho\lambda\mu} v^\nu k_\mu k_\nu + \eta^{\beta\rho\lambda\nu} v^\mu k_\nu k_\mu \right] \\ &= \frac{\epsilon'}{2H} H_\beta v_\rho E_\lambda \left[\eta^{\beta\rho\lambda\mu} v^\nu k_\mu k_\nu + \eta^{\beta\rho\lambda\mu} v^\nu k_\mu k_\nu \right] \\ &= \frac{\epsilon'}{H} \eta^{\beta\rho\lambda\mu} v^\nu H_\beta v_\rho E_\lambda k_\mu k_\nu, \end{aligned} \quad (1.91)$$

com o objetivo de simplificar a métrica efetiva.

Concluimos que a geometria efetiva para a polarização positiva em meios dielétricos com $\mu = const.$ e $\epsilon = \epsilon(E, H)$ é descrita pela métrica efetiva

$$\hat{g}_+^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \left[1 - \mu \frac{\partial(\epsilon E)}{\partial E} \right] v^\mu v^\nu - \frac{\bar{\epsilon}}{\epsilon E} E^\mu E^\nu - \frac{\epsilon'}{2H} \eta^{\beta\rho\lambda(\mu} v^{\nu)} H_\beta v_\rho E_\lambda. \quad (1.92)$$

Notamos que quando $\epsilon = const.$ ambas as métricas $\hat{g}_\pm^{\mu\nu} = \hat{g}^{\mu\nu}$ se reduzem a métrica de Gordon (2), definida em um espaço-tempo de fundo arbitrário.

1.3 Discussão e aplicações

Uma solução geral para meios isotrópicos com permissividade $\epsilon(E, B)$ e permeabilidade $\mu(E, B)$ foi obtida na literatura [18]. Os autores resolveram o sistema de equações para um espaço-tempo de fundo representado pela métrica de Minkowski e consideraram que a propagação das discontinuidades é obtida com relação ao campo magnético B^μ . Sabemos que é arbitrário a escolha de tomar as discontinuidades com relação ao campo magnético ou com relação ao campo de indução, tal que nesta tese escolhemos trabalhar com as discontinuidades do

campo de indução magnética. Como mostramos nesse capítulo, é suficiente trocar a métrica de Minkowski $\gamma^{\mu\nu}$ por uma métrica arbitrária $g^{\mu\nu}$ na solução obtida. Isso ocorre pois os termos que dependem da derivada do campo de observadores $v^\mu_{;\nu}$ são proporcionais aos campos elétrico E^μ e indução magnética H^μ , de forma que ao tomar as descontinuidades desses termos eles se anulam. Portanto, verificamos que a solução independe do campo de observadores, logo, vale o princípio da equivalência e o resultado permanece válido para um espaço-tempo de fundo arbitrário. Os autores [18] notaram que, em geral, não é possível isolar uma geometria efetiva. No entanto, existem certas condições conhecidas na literatura que permitirão obtermos uma geometria efetiva para o problema. Na subseção 1.2.2, exploramos uma dessas condições. A seguir, comentaremos outras condições conhecidas na literatura. Nestas, a polarização negativa permanece sendo descrita pela geometria efetiva (1.84), mas a polarização positiva tem sua geometria efetiva modificada. Por exemplo, temos que

- A geometria efetiva de um material diamagnético que satisfaça $\epsilon = \text{const.}$, $\mu = \mu(E, H)$ é descrita por

$$\hat{g}_+^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \left[1 - \epsilon \frac{\partial(\mu H)}{\partial H} \right] v^\mu v^\nu - \frac{\mu'}{\mu H} H^\mu H^\nu + \frac{\bar{\mu}}{2E} \eta^{\beta\rho\lambda(\mu} v^{\nu)} E_\beta v_\rho H_\lambda . \quad (1.93)$$

Note que no caso $\mu = \text{const.}$ essa métrica se reduz a métrica definida por Gordon em um fundo arbitrário.

- A métrica efetiva que define um material com permissividade $\epsilon(E)$ e permeabilidade $\mu(E)$ é dada por

$$\hat{g}_+^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \left[1 - \mu \frac{\partial(\epsilon E)}{\partial E} \right] v^\mu v^\nu - \frac{\bar{\epsilon}}{E\epsilon} E^\mu E^\nu + \frac{\bar{\mu}}{2E} \eta^{\lambda\rho\sigma(\mu} v^{\nu)} E_\lambda v_\rho H_\sigma . \quad (1.94)$$

Note que ela é muito semelhante com o caso $\epsilon(E, H)$, $\mu = \text{cte}$ descrito por (1.92). Elas são equivalentes se fizermos $\bar{\mu} \rightarrow \frac{E}{H} \epsilon'$ e uma permutação simples nos índices do tensor de levi-civita.

- A métrica efetiva que representa um material com permissividade $\epsilon(H)$ e permeabilidade $\mu(H)$ é dada por

$$\hat{g}_+^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \left[1 - \epsilon \frac{\partial(\mu H)}{\partial H} \right] v^\mu v^\nu - \frac{\mu'}{H\mu} H^\mu H^\nu - \frac{\epsilon'}{2H} \eta^{\lambda\rho\sigma(\mu} v^{\nu)} H_\lambda v_\rho E_\sigma . \quad (1.95)$$

Note que ela é muito semelhante com o caso $\mu(E, H)$, $\epsilon = \text{cte}$ definido por (1.93). Elas são equivalentes se fizermos $\epsilon' \rightarrow \frac{H}{E} \bar{\mu}$ e uma permutação simples nos índices do tensor de levi-civita.

- Para o caso de uma dependência geral na permissividade $\epsilon(E, H)$ e na permeabilidade $\mu(E, H)$, se impormos a restrição $(E.k) = (H.k) = 0$, temos

$$\begin{aligned} \hat{g}_+^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} + \left[\mu \frac{\partial(\epsilon E)}{\partial E} + H \mu' \frac{\partial(\epsilon E)}{\partial E} - E \epsilon' H \bar{\mu} - 1 \right] v^\mu v^\nu + \frac{\bar{\mu}}{2E} \eta^{\alpha\rho\sigma(\mu} v^{\nu)} v_\rho H_\sigma E_\alpha + \\ &- \frac{\epsilon'}{2H} \eta^{\beta\rho\alpha(\mu} v^{\nu)} H_\beta v_\rho E_\alpha, \end{aligned} \quad (1.96)$$

caso contrário não será possível isolar uma métrica efetiva.

Nesta tese, trabalharemos com meios materiais que possuam permissividade $\epsilon(E)$ e permeabilidade constante. Vamos nos restringir a esses meios, pois temos interesse, no capítulo 3, em considerar um fundo gerado por um objeto compacto estático e carregado, de forma que o campo magnético seja nulo e o campo elétrico seja gerado por essa solução. As métricas efetivas que descrevem essa situação são dadas por (1.84) e (1.92) quando $\epsilon' = 0$.

Para o fundo de Minkowski, é sabido na literatura que a bimetricidade $g_\pm^{\mu\nu}$ acarreta em duas relações de dispersão, cada uma associada a uma velocidade de propagação da luz. Dado as definições para a frequência angular $\omega = k^\alpha v_\alpha$ e para o vetor de onda $q^\mu = h^\mu{}_\nu k^\nu = k^\mu - \omega v^\mu$, podemos decompor o quadrivetor de onda como $k^\mu = (\omega, \vec{q})$, tal que $k^2 = \omega^2 - q^2$ nos permite isolar a velocidade da luz em um meio material $v_\pm^2 = \omega^2/q^2$, associada a cada polarização. Considerando as relações de dispersão k_\pm^2 no espaço de Minkowski, temos para a polarização positiva

$$\omega^2 - |\vec{q}|^2 = [1 - \epsilon \mu - \bar{\epsilon} \mu E] \omega^2 + \frac{\bar{\epsilon}}{\epsilon E} (E \cdot q)^2, \quad (1.97)$$

tendo em vista que o campo elétrico satisfaz $E^\mu v_\mu = 0$ e essa condição implica em $E^\mu k_\mu = E^\mu q_\mu$. A relação acima (1.97) pode ser simplificada para

$$[\epsilon \mu + \bar{\epsilon} \mu E] \omega^2 = |\vec{q}|^2 \left[1 + \frac{E \bar{\epsilon}}{\epsilon} (\hat{q} \cdot \hat{E})^2 \right], \quad (1.98)$$

se considerarmos $\vec{q} = |\vec{q}| \hat{q}$ e $\vec{E} = E \hat{E}$. Já para a polarização negativa, é direto notar que

$$\epsilon \mu \omega^2 = |\vec{q}|^2. \quad (1.99)$$

Com isso, encontramos para $\mu = \text{const.}$ e $\epsilon(E)$ as velocidades de propagação

$$\begin{aligned} v_+^2 &= \frac{1}{\mu \partial(\epsilon E)/\partial E} \left[1 + \frac{E}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial E} (\hat{q} \cdot \hat{E})^2 \right] \\ v_-^2 &= \frac{1}{\mu \epsilon(E)}. \end{aligned} \quad (1.100)$$

Notamos que temos duas trajetórias possíveis para o raio de luz, a depender da sua polarização. Esses raios se propagam com velocidades distintas, dadas pela relação acima. No caso particular em que a luz incide na direção do campo elétrico $\hat{q} \cdot \hat{E} = 1$, ambas velocidades são iguais e a luz segue somente uma trajetória. Isso indica que temos um eixo óptico induzido na direção do campo elétrico, de forma que essa velocidade é chamada de velocidade do raio ordinário. Em geral, teremos duas trajetórias, tal que podemos definir o valor máximo de v_{\pm}^2 quando a luz incide perpendicularmente ao campo $\hat{q} \cdot \hat{E} = 0$. Chamamos a trajetória associada a polarização positiva de trajetória do raio extraordinário, tal que nessa situação temos uma diferença máxima entre as velocidades dos raios ordinário e extraordinário. Considerando $c = 1$, o índice de refração é definido como v_{\pm}^{-1} , tal que a diferença entre os valores máximos e mínimos do índice é dada por

$$n_{\perp} - n_{\parallel} = \sqrt{\mu \partial(\epsilon E) / \partial E} - \sqrt{\mu \epsilon(E)}. \quad (1.101)$$

Na literatura [3, 81, 88], foi verificado experimentalmente que a permissividade $\epsilon(E) = \epsilon_r + \alpha E^2$ acarreta na diferença

$$n_{\perp} - n_{\parallel} \approx \frac{\sqrt{\mu \epsilon_r} \alpha}{\epsilon_r} E^2. \quad (1.102)$$

Essa situação descreve um fenômeno de birrefringência conhecido como efeito Kerr. Outro fenômeno de birrefringência bastante conhecido surge quando consideramos a permissividade $\epsilon(E) = \epsilon + \beta E$, que gera a diferença

$$n_{\perp} - n_{\parallel} \approx \frac{\sqrt{\mu \epsilon} \beta}{2\epsilon} E, \quad (1.103)$$

e está associado ao efeito Pockels[93]. Estamos interessados em analisar as consequências do efeito de birrefringência na propagação da luz em um espaço-curvo, afim de avaliar que tipo de mudanças um meio pode causar nas previsões da Relatividade Geral (RG). Queremos saber se um observador longe do meio é capaz de inferir se este meio possui propriedades eletromagnéticas não-lineares apenas medindo o desvio para o vermelho e o ângulo de deflexão da luz. Esperamos responder se uma correção nestas quantidades poderia levar um observador a determinar a dependência $\epsilon(E)$ a distâncias astrofísicas, i.e, a partir de um laboratório na Terra.

Capítulo 2

Buracos negros

Em 1915, Albert Einstein publicou a teoria da Relatividade Geral. Não demorou muito tempo antes de que a primeira solução exata e não-trivial das equações de Einstein fosse encontrada por Karl Schwarzschild, em 1916, correspondendo a um campo gravitacional gerado por um objeto esfericamente simétrico. No mesmo ano, Hans Reissner generalizou a solução de Schwarzschild de forma a considerar um objeto carregado eletricamente. De maneira independente, Gunnar Nordström chegou à mesma solução em 1918, que passou a ser conhecida como solução de Reissner-Nordström. A métrica de Reissner-Nordström é uma solução famosa das equações de Einstein e descreve a geometria do espaço-tempo gerada por um objeto esfericamente simétrico, sem rotação e carregado eletricamente. Trabalhos recentes [1, 16, 27, 101] buscaram estender a métrica de Reissner-Nordstrom levando em conta uma teoria de eletrodinâmica não-linear descrita por uma lagrangeana $L(F, G)$, ao invés de considerar a eletrodinâmica de Maxwell.

Soluções esfericamente simétricas das equações de campo de Einstein podem descrever tanto a geometria do espaço-tempo ao redor de uma estrela, quanto sua geometria ao redor de um buraco negro. Estrelas, como o sol, queimam combustível nuclear produzindo uma pressão que age contra a pressão associada à força gravitacional. Quando seu combustível termina, a pressão gravitacional excede a pressão produzida pela estrela, ocorrendo um colapso gravitacional. Em 1934, Subrahmanyan Chandrasekhar apontou que a vida de estrelas supermassivas termina após um colapso gravitacional produzir o que chamamos de buraco negro. Enquanto estrelas menos massivas conseguem se estabilizar produzindo objetos menores chamados de anãs, que possuem alguns milhares de quilômetros de diâmetro. O motivo é que a pressão de degenerescência resiste apenas ao colapso de estrelas com massas menores do que cinco a oito massas solares [13].

Em 2019 astrônomos obtiveram a primeira imagem de um buraco negro, situado no centro da galáxia M87, através do “Event Horizon Telescope” [15]. A matéria atraída por ele forma um disco, chamado de disco de acreção, que orbita o buraco negro e emite radiação. Essa

radiação é detectada pelos pesquisadores e analisada, de forma a localizar e reconstruir o objeto. A foto foi capaz de mostrar um anel brilhante, formado pela matéria, ao redor de uma região escura e circular. Nessa região, há um intenso campo gravitacional associado a um objeto que é 6.5 bilhões de vezes mais massivo que o Sol. A observação é consistente com as expectativas de um buraco negro em rotação, descrito pela métrica de Kerr [55]. Acredita-se que assimetria no brilho do anel seja explicada em termos da irradiação relativística de um plasma, que gira próximo à velocidade da luz, em torno de um buraco negro.

Apesar de dados fenomenológicos evidenciarem a existência de objetos em rotação, a solução estática é fundamental para a análise teórica do fenômeno. Um objeto esfericamente simétrico e estático é então descrito pela métrica de Schwarzschild [94]. Sua generalização para incluir objetos carregados eletricamente é dada pela métrica de Reissner-Nordström [64, 85]. Evidentemente, a segunda solução se reduz à primeira quando a carga Q se anula. Neste capítulo, vamos revisar os fundamentos matemáticos que descrevem objetos estáticos e esfericamente simétricos, com o objetivo que aplicá-los no capítulo 3 desta dissertação.

2.1 Elementos Matemáticos

Após um breve resumo sobre os principais aspectos da Relatividade Geral, mostraremos como uma solução esfericamente simétrica descreve a trajetória de partículas. Focaremos em uma métrica arbitrária com simetria esférica, pois as fórmulas descritas aqui serão válidas não apenas para a solução de Reissner-Nordström, mas para uma solução qualquer com essa simetria. Veremos no capítulo 3 que essa arbitrariedade nas fórmulas será necessária para o desenvolvimento desta dissertação.

2.1.1 Relatividade Geral

Em 1915, Albert Einstein publicou a teoria que conhecemos hoje como Relatividade Geral. Ele se imaginou, por meio de um experimento mental, em queda livre junto a um elevador e observou que neste caso qualquer ação da força gravitacional seria localmente anulada. Esse ponto de partida, que separa a Relatividade Restrita da Relatividade Geral, é conhecido como o *Princípio da Equivalência*. Essa seção visa fazer uma breve revisão das ideias introduzidas pela Relatividade Geral, que formam o que chamamos de formulação de segunda ordem da gravidade, onde as equações de campo possuem derivadas de segunda ordem na métrica.

Definição 2.1 (O princípio da equivalência forte). Os princípios da Relatividade Restrita são localmente válidos, em uma pequena região do espaço-tempo.

A afirmação acima diz que um espaço-tempo curvo é localmente plano e representado pelo espaço-tempo de Minkowski. Foi a partir dessa ideia que Einstein descreveu a interação gravitacional, por meio de uma formulação dinâmica do espaço-tempo, isto é, a matéria diz ao espaço-tempo como se deformar e o espaço-tempo diz à matéria como se mover. Por essa característica, também chamamos esse tipo de teoria de geometrodinâmica. A Relatividade Geral é descrita pelas equações de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (2.1)$$

No lado esquerdo dessas equações, temos (em componentes) o tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$. Este, depende da curvatura, representada pelo tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ e pelo escalar de Ricci R , e da métrica $g_{\mu\nu}$. A métrica contém todas as informações sobre a geometria do espaço-tempo ao redor de um objeto, enquanto a curvatura é apenas uma forma de caracterizar essa geometria. Consideramos as definições para essas quantidades

$$R_{\beta\nu} = R^{\alpha}{}_{\beta\alpha\nu}, \quad (2.2)$$

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu}{}^{\alpha}{}_{\beta} = -R^{\beta}{}_{\alpha\mu\nu} = -R^{\alpha}{}_{\beta\nu\mu}, \quad (2.3)$$

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\beta} - \partial_{\nu}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\beta} - \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\beta}, \quad (2.4)$$

$$\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\nu} = \{\kappa_{\mu\nu}\} = \frac{1}{2}g^{\kappa\lambda}(\partial_{\mu}g_{\nu\lambda} + \partial_{\nu}g_{\mu\lambda} - \partial_{\lambda}g_{\mu\nu}), \quad (2.5)$$

$$g_{\mu\nu} = \hat{e}_{\mu}\hat{e}_{\nu}, \quad (2.6)$$

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}, \quad (2.7)$$

$$U^{\mu}U_{\mu} = U^{\mu}U^{\nu}g_{\mu\nu}, \quad (2.8)$$

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\mu}, \quad (2.9)$$

$$g_{\mu\lambda}g^{\lambda\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}, \quad (2.10)$$

$$R = g^{\beta\nu}R_{\beta\nu}. \quad (2.11)$$

A equação que define a métrica depende da simetria do objeto que curva o espaço-tempo. Porém, para qualquer ponto do espaço-tempo e independente da forma matemática de $g_{\mu\nu}$, podemos aproximá-la localmente pela métrica de Minkowski. A métrica de Minkowski define a Relatividade Restrita, descrevendo o fundamento matemático por trás do Princípio da Equivalência. Ou seja, localmente o espaço-tempo é aproximadamente plano e definido por

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} \approx \eta_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (2.12)$$

Voltando ao lado direito da equação (2.1), temos o tensor de energia-momento, tal que G é a constante gravitacional de Newton. Esse tensor representa todas as propriedades físicas que podem gerar a curvatura do espaço-tempo, tal como a densidade de energia, o fluxo de energia, a densidade de momento e o fluxo de momento. Caso o leitor se lembre da equação para força gravitacional, que cai com o quadrado da distância, ele perceberá que para Newton a fonte da força gravitacional é somente a massa. Elas são as “cargas” da teoria. Já para Einstein, o que era força gravitacional se torna uma consequência da dinâmica dos objetos na curvatura do espaço-tempo, e passa a ser provocada não apenas pela massa, mas por tudo o que pode gerar essa curvatura. Enfatizamos que o ente fundamental da formulação de Einstein é o tensor métrico e, por esse motivo, a formulação de segunda ordem também é chamada de formalismo da métrica.

Os objetos se movem através de curvas geodésicas, cujo formato depende da geometria gerada pela deformação do espaço-tempo. Isto é, sua trajetória é o caminho mais curto que conecta dois pontos. Por exemplo, para uma geometria esférica sua geodésica é um arco de círculo, cujo raio é igual ao raio da esfera. Já para uma geometria plana, sua geodésica é uma reta. Nesse sentido, uma geodésica pode ser definida como a curva que transporta paralelamente o seu próprio vetor tangente U^ν . Com isso, uma fórmula geral para a geodésica, considerando essa definição, é

$$U^\nu \nabla_\nu U^\alpha = 0, \quad (2.13)$$

tal que a derivada covariante e o vetor tangente à curva são definidos, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \nabla_\beta T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} &= \partial_\beta T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} + \Gamma^{\mu_1}_{\beta \lambda} T^{\lambda \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} \\ &+ \Gamma^{\mu_2}_{\beta \lambda} T^{\mu_1 \lambda \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} - \Gamma^{\lambda}_{\beta \nu_1} T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\lambda \nu_2 \dots \nu_l} \\ &- \Gamma^{\lambda}_{\beta \nu_2} T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \lambda \dots \nu_l}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$U^\nu = \frac{dx^\nu(\xi)}{d\xi}, \quad (2.15)$$

com ξ sendo o parâmetro afim que usamos para definir a curva.

Vale a pena ressaltar o papel da conexão (2.5) na equação (2.14). Para isso, imagine dois observadores A e B, representando duas bases distintas, em pontos diferentes de uma esfera. Se considerarmos um vetor como uma quantidade observável, o referencial A poderia medir suas componentes com relação à sua base. Então, imagine que o vetor agora seja transportado paralelamente ao longo de uma curva na esfera até o observador B, que critério ele usaria para comparar as suas componentes com as medidas pelo referencial A? Não bastaria ele comparar as

suas medidas. É necessário relacionar essas componentes às suas respectivas bases, diferentes, e encontrar uma forma de relacionar essas duas bases, para então descobrir a variação do observável. A ferramenta matemática que descreve todo esse processo é a derivada covariante (2.14), de forma que a relação entre as bases é dada pela conexão $\Gamma_{\alpha\mu}^{\beta}$ (que pode ser vista como as componentes de uma matriz jacobiana, cujo papel é relacionar os dois sistemas de coordenadas). Para um espaço-tempo plano, poderíamos alinhar os eixos de ambos referenciais e medir apenas a variação direta das componentes. Porém, no espaço-tempo curvo não conseguimos alinhar os eixos, de forma que obrigatoriamente temos que considerar a variação da base.

Para concluir, precisamos enfatizar as seguintes imposições da teoria de Einstein:

1. **Não-metricidade nula:** a derivada covariante do tensor métrico é nula, isto é, $\nabla_{\beta} g_{\mu\nu} = 0$. Isso garante a preservação do comprimento dos vetores diante de qualquer transporte paralelo. Essa condição também é chamada de condição de compatibilidade da métrica.
2. **Torção nula:** $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha}$, implica que a conexão afim é simétrica. Tal conexão é conhecida como conexão de Levi-Civita.

No formalismo de segunda ordem, a conexão afim é unicamente determinada em função de $g_{\mu\nu}$. Entretanto, isso normalmente não é necessário e há formulações geométricas onde a conexão afim não depende apenas da métrica. Para uma demonstração da forma geral da conexão afim, veja por exemplo [62].

2.2 Soluções esfericamente simétricas

Uma métrica esfericamente simétrica pode ser descrita arbitrariamente por um elemento de linha

$$ds^2 = g_{tt} dt^2 + g_{tr} dt dr + g_{rr} dr^2 + g_{\theta\theta} d\Omega^2, \quad (2.16)$$

onde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2$. Essa métrica é invariante sob rotações do grupo de simetria $SO(3)$ e sua invariância é representada por meio dos vetores de Killing

$$\mathbf{K}_r = -\text{sen}\phi \partial_{\theta} + \text{cotg}\theta \cos\phi \partial_{\phi} \quad (2.17)$$

$$\mathbf{K}_{\theta} = \cos\phi \partial_{\theta} - \text{cotg}\theta \text{sen}\phi \partial_{\phi} \quad (2.18)$$

$$\mathbf{K}_{\phi} = \partial_{\phi}, \quad (2.19)$$

de forma que a derivada de Lie da métrica com relação a esses vetores é nula, i.e.,

$$\mathcal{L}_K g_{\mu\nu} = 0. \quad (2.20)$$

Os elementos da métrica (2.16) podem ser funções de r, t . Para que a métrica seja estacionária, admitimos a existência de um vetor de Killing extra, dado por $\mathbf{K}_t = \partial_t$. Esse vetor indica que um espaço-tempo com simetria esférica pode ser folheado por esferas do tipo S^2 . Se além de estacionário o espaço-tempo possuir vetor de Killing \mathbf{K}_t ortogonal às seções espaciais $\mathbf{K}_t \cdot \chi = g_{tk} \chi^k = 0$, onde χ é um vetor puramente espacial, temos que o espaço-tempo é estático.

Sendo assim, em geral representamos uma métrica estática e esfericamente simétrica pelo elemento de linha [30, 99]

$$ds^2 = A(r) dt^2 - B(r) dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (2.21)$$

de forma que para pontos infinitamente distantes do objeto compacto o espaço-tempo seja dado pela métrica de Minkowski em coordenadas esféricas. Resolvendo as equações de Einstein (2.1) para um objeto carregado, podemos considerar o tensor de energia-momento (11) associado a uma carga estática $F_{rt} = -F_{tr} = E(r)$ em uma teoria de eletrodinâmica não-linear [69]

$$T_{00} = -L A - 4E^2 L_F B^{-1} \quad (2.22)$$

$$T_{11} = L B + 4E^2 L_F A^{-1} \quad (2.23)$$

$$T_{22} = L r^2 \quad (2.24)$$

$$T_{33} = L r^2 \text{sen}^2 \theta. \quad (2.25)$$

Como mostrado no apêndice A, dado a simetria esférica, representada pelo elemento de linha (2.21), podemos obter as componentes do tensor de Einstein, de forma a encontrar o sistema de equações

$$\frac{A}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r \left(1 - \frac{1}{B} \right) \right] = \kappa T_{00} \quad (2.26)$$

$$\frac{(1-B)}{r^2} + \frac{A'}{Ar} = \kappa T_{11} \quad (2.27)$$

$$\frac{r^2}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{AB}} \left(\frac{A'}{\sqrt{AB}} \right)' + \frac{1}{Ar} \left(\frac{A}{B} \right)' \right] = \kappa T_{22} \quad (2.28)$$

$$\frac{r^2}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{AB}} \left(\frac{A'}{\sqrt{AB}} \right)' + \frac{1}{Ar} \left(\frac{A}{B} \right)' \right] \text{sen}^2 \theta = \kappa T_{33}. \quad (2.29)$$

Ressaltamos que definimos o apóstrofo como sendo tomado a derivada com relação a variável r e κ representa uma constante. Esse sistema pode ser resolvido, juntamente com as identidades de Bianchi (1.11) e com a relação (1.10),

$$\partial_\nu(\sqrt{-g}L_F F^{\mu\nu}) = 0, \quad (2.30)$$

tal que é possível obter [16] a solução $B(r) = A(r)^{-1}$, dado a componente

$$A(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{S(r)}{r} \quad (2.31)$$

e a definição da função

$$S(r) = 2 \int r^2(-L_F E^2 + L)dr. \quad (2.32)$$

Caso seja considerado a eletrodinâmica de Maxwell, o elemento de linha resultante é representado pela métrica de Reissner-Nordstrom

$$S_{R-N}(r) = \frac{r_Q^2}{r}, \quad (2.33)$$

que se reduz a solução de Schwarzschild quando a carga r_Q se anula, i.e, quando consideramos um objeto compacto neutro. Nesse caso, o tensor de energia-momento $T_{\mu\nu}$ e o escalar de Ricci R são nulos, tal que $R_{\mu\nu} = 0$. Segundo o teorema de Birkhoff [98], é possível mostrar que, se temos simetria esférica, a única solução possível para o vácuo é estática e dada pela métrica de Schwarzschild.

2.2.1 Horizontes e singularidade

Segundo a Relatividade Geral, uma vez que uma esfera constituída por um fluido perfeito e homogêneo de massa M inicia um colapso gravitacional, ele não pode ser interrompido e o objeto permanece encolhendo para diâmetros cada vez menores. Se esse objeto representar uma estrela estática temos que, durante esse processo, enquanto sua superfície estiver fora do raio r_h , qualquer raio de luz emitido da superfície da estrela pode escapar para um observador distante desse evento. No entanto, a partir do momento em que a superfície atingir esse raio, isso não será mais possível e ela continuará colapsando irreversivelmente para o que chamamos de buraco negro. Então, ocorre o colapso de toda a matéria em um ponto com densidade e curvatura infinitas, conhecido como singularidade. Por esse motivo, esse raio é chamado de horizonte de eventos, pois nem mesmo a luz consegue escapar da pressão gravitacional e chegar a um observador distante.

No que tange o estudo da singularidade, sabemos, pela conjectura da censura cósmica [98], que toda singularidade que existe no universo deve estar cercada por um horizonte de eventos. De acordo com a Relatividade Geral, podemos definir três tipos de horizontes

- **Horizonte de Killing:** Este horizonte define uma superfície tipo-luz onde a norma de ao menos um vetor de Killing associado à métrica se anula. É comum afirmar que define o raio r_s em que a seguinte condição é válida

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\left| \frac{g_{tt}}{g_{rr}} \right|} = 0 . \quad (2.34)$$

Isto é, representa o raio no qual $g_{tt}(r_s) = 0$. Essa condição define uma superfície onde a norma do vetor de Killing tipo-tempo se anula e o redshift diverge.

- **Horizonte aparente:** A definição deste horizonte depende do campo de observadores e da métrica de fundo, representando o raio r_θ no qual o fator de expansão θ muda de sinal. A alteração do seu sinal está associada à ideia de região de confinamento. Uma superfície de confinamento é uma superfície compacta bidimensional onde o fator de expansão é negativo $\theta < 0$ para todas geodésicas nulas futuras (entrando e saindo) ortogonais à superfície. O interior dessa superfície é chamado de região de confinamento, tal que identificamos o horizonte aparente como a borda da união de todas as regiões de confinamento.
- **Horizonte de eventos:** Essa definição está associada aos diagramas do espaço-tempo e define um raio r_h onde nem sequer a luz pode escapar. Pode ser definido a partir desses diagramas como sendo a superfície que delimita o buraco negro. Mostraremos um exemplo, para a solução de Schwarzschild, na figura 2.1.

Em geral, esses horizontes descrevem superfícies distintas. No entanto, eles coincidem para algumas soluções. Por exemplo, para a solução de Schwarzschild, que é estática e esfericamente simétrica, os três horizontes descrevem uma mesma superfície. Já para soluções estacionárias e axialmente simétricas, como a solução de Kerr, o que chamamos de horizonte de Killing coincide com o horizonte de eventos, mas não com o horizonte aparente.

Solução de Schwarzschild

A métrica de Schwarzschild descreve um objeto compacto estático, com simetria esférica e sem carga. Essa solução é representada pelo elemento de linha

$$ds^2 = \Delta(r) dt^2 - \Delta(r)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 , \quad (2.35)$$

onde definimos a função

$$\Delta(r) = 1 - \frac{2M}{r}. \quad (2.36)$$

Essa função se anula no raio de Schwarzschild $r_s = 2M$, tal que a componente radial da métrica diverge nesse raio $\Delta(r_s)^{-1} \rightarrow \infty$. Essa divergência não representa uma singularidade real, tendo em vista que ela pode ser eliminada por meio de uma transformação de coordenadas.

Podemos verificar, considerando os escalares de curvatura, que são quantidades que independem do sistema de coordenadas, que o raio de Schwarzschild não representa uma singularidade real. Por exemplo, o escalar de Kretschmann desta solução vale

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{48M^2}{r^6}, \quad (2.37)$$

revelando que o raio r_s não é singular nessa quantidade. Em contrapartida, é possível notar que a origem $r = 0$ representa uma singularidade real. Por esse motivo, com o objetivo de estudar as propriedades do espaço-tempo, é conveniente realizar uma transformação de coordenadas de forma que o raio de Schwarzschild não seja singular. Ressaltamos que esse raio representa um horizonte de Killing da métrica, sendo portanto uma superfície relevante a ser analisada. Uma transformação conveniente de coordenadas nos permitirá construir um diagrama do espaço-tempo, de forma a estudar essa superfície com mais detalhes.

Para essa análise, adotaremos as coordenadas de Kruskal-Szekres (KS). Definimos as novas coordenadas como (R, T, θ, ϕ) , tal que

$$T = \left(\frac{r}{r_s} - 1\right)^{1/2} e^{r/2r_s} \sinh\left(\frac{t}{2r_s}\right), \quad (2.38)$$

$$R = \left(\frac{r}{r_s} - 1\right)^{1/2} e^{r/2r_s} \cosh\left(\frac{t}{2r_s}\right). \quad (2.39)$$

Enfatizamos que valem as seguintes relações

$$T^2 - R^2 = \left(1 - \frac{r}{r_s}\right) e^{r/r_s}, \quad (2.40)$$

$$\frac{T}{R} = \tanh\left(\frac{t}{2r_s}\right). \quad (2.41)$$

Nessas coordenadas, o elemento de linha de Schwarzschild é escrito como

$$ds^2 = \frac{4r_s^3}{r} e^{-r/r_s} (-dT^2 + dR^2) + r^2 d\Omega^2. \quad (2.42)$$

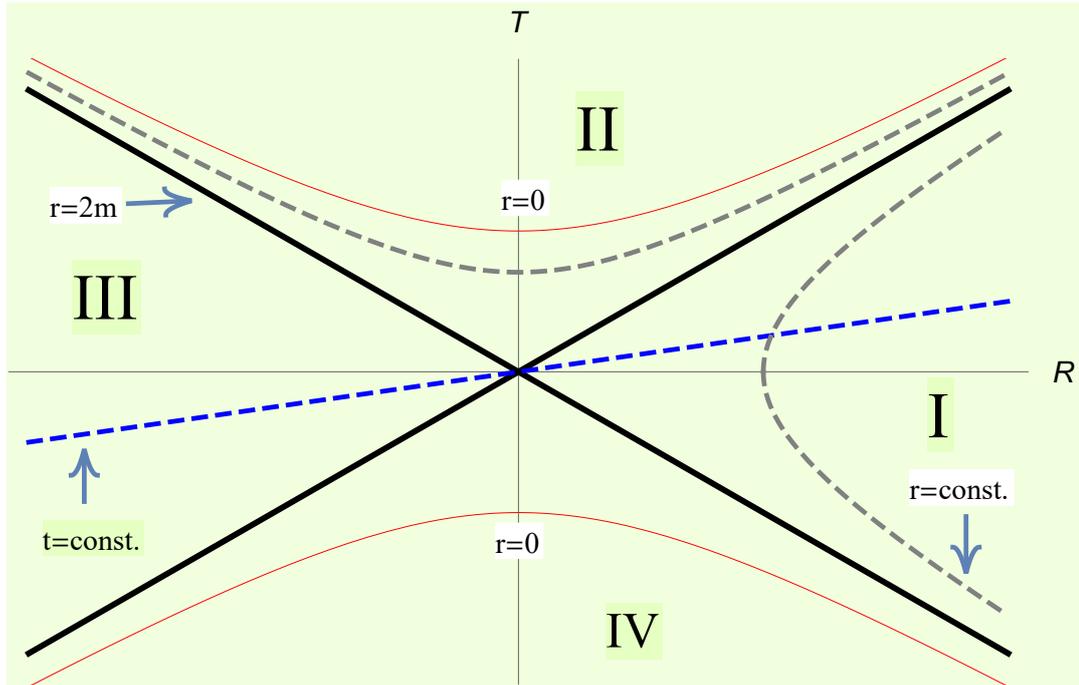


Figura 2.1: Diagrama do espaço-tempo de Schwarzschild nas coordenadas de Kruskal-Szekres. Podemos notar que qualquer fonte de luz emitida na região II encontra-se presa nesta região, tendo em vista que a luz viaja somente a 45° no sentido positivo do eixo temporal. *Fonte: imagem de autoria própria.*

Notamos que as componentes da métrica (2.42) se mantêm bem comportadas no raio de Schwarzschild r_s . Portanto, esse sistema de coordenadas pode ser usado para cobrir uma região maior do que o sistema de coordenadas considerado inicialmente.

Verificamos que a singularidade real, dada por $r = 0$, continua surgindo por meio da relação $T^2 - R^2 = 1$. Essa relação representa duas hipérboles em um diagrama de coordenadas $T \times R$, tal que quando $R = 0$ essas hipérboles possuem vértices em $T = \pm 1$. Nessas novas coordenadas, ao invés de termos duas regiões separadas pelo raio de Schwarzschild ($0 < r < r_s$ e $r_s < r$), temos quatro regiões. Encontramos essas regiões por meio do elemento de linha (2.42), ao considerar intervalos tipo-luz com θ e ϕ constantes. Assim, obtemos a relação

$$T = \pm R, \quad (2.43)$$

que descreve retas concorrentes em $R = 0$. Essas retas representam o horizonte de Schwarzschild nesse sistema de coordenadas, como pode ser verificado a partir da relação (2.40). A luz, neste espaço-tempo, passa a ser representada por retas com um ângulo de 45° no diagrama de coordenadas.

Portanto, no diagrama do espaço-tempo de Schwarzschild em coordenadas de Kruskal-Szekres, teremos quatro regiões. A região I corresponde ao exterior do buraco negro $r > r_s$, a

região II ao interior do buraco negro $0 < r < r_s$, a região III é uma região paralela a região I e a região IV é paralela a região II. Físicos especulam que a região III pode representar um outro universo, enquanto a região IV deve representar um buraco branco. Essas regiões paralelas surgem por conta do sinal \pm nas relações. Uma representação pictórica está exposta na figura 2.1 .

Por último, citamos que é possível considerar outros sistemas de coordenadas, de forma a obter outros diagramas que representem o mesmo fenômeno. Como, por exemplo, os diagramas de Eddington-Finkelstein e de Penrose [30].

Solução de Reissner-Nordstrom

Considerando a métrica de Reissner-Nordstrom, representada pelo elemento de linha

$$ds^2 = \Delta(r) dt^2 - \Delta(r)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 , \quad (2.44)$$

onde definimos a função

$$\Delta(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2} , \quad (2.45)$$

verificamos que a condição $\Delta(r_{\pm}) = 0$ é satisfeita para os raios

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - r_Q^2} . \quad (2.46)$$

Sabemos que os coeficientes da métrica são quantidades que dependem do sistema de coordenadas e, como tais, podem apresentar irregularidades. Mostraremos que esses raios r_{\pm} representam singularidades de coordenadas $B(r_{\pm}) \rightarrow \infty$. Para isso, vamos considerar o cálculo do escalar de Kretschmann da métrica de Reissner-Nordstrom

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{8}{r^8}(6M^2r^2 - 12Mr r_Q^2 + 7r_Q^4) . \quad (2.47)$$

Por meio desse escalar, verificamos que a origem $r = 0$ é de fato uma singularidade essencial. Em contrapartida, as soluções da equação (2.46) não definem uma singularidade, mas os horizontes de Killing da métrica. Sabemos que esses horizontes estão associados aos horizontes de eventos que encontraremos em um buraco negro de Reissner-Nordström.

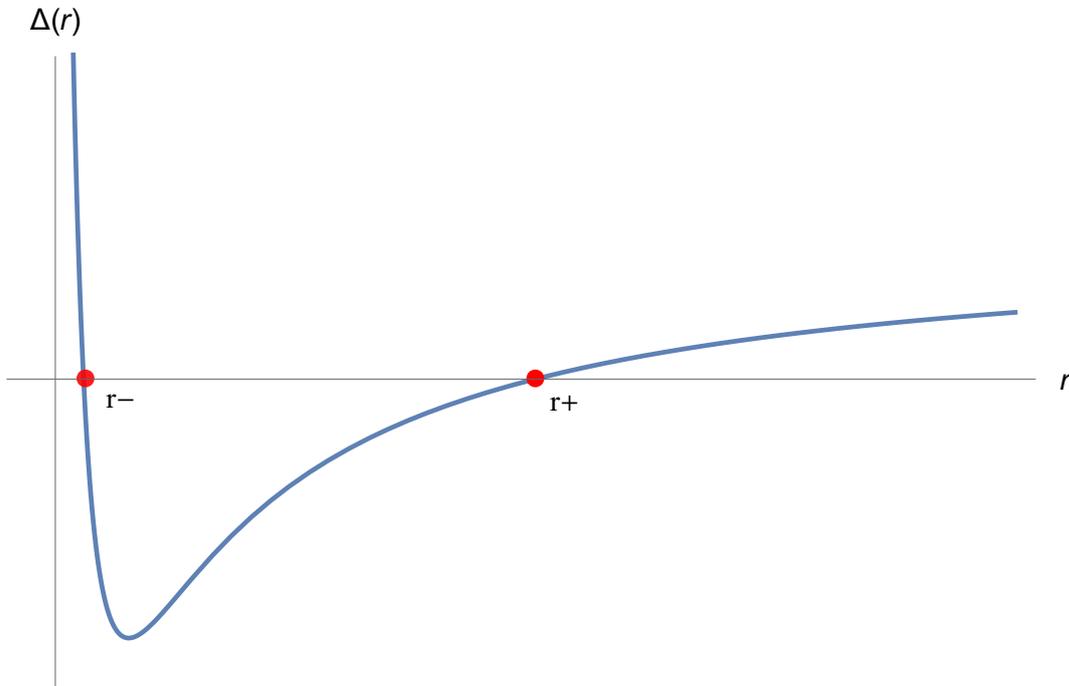


Figura 2.2: Caso $M^2 > r_Q^2$. A função $\Delta(r)$ possui duas raízes (2.46), marcadas nos pontos vermelhos. *Fonte: imagem de autoria própria.*

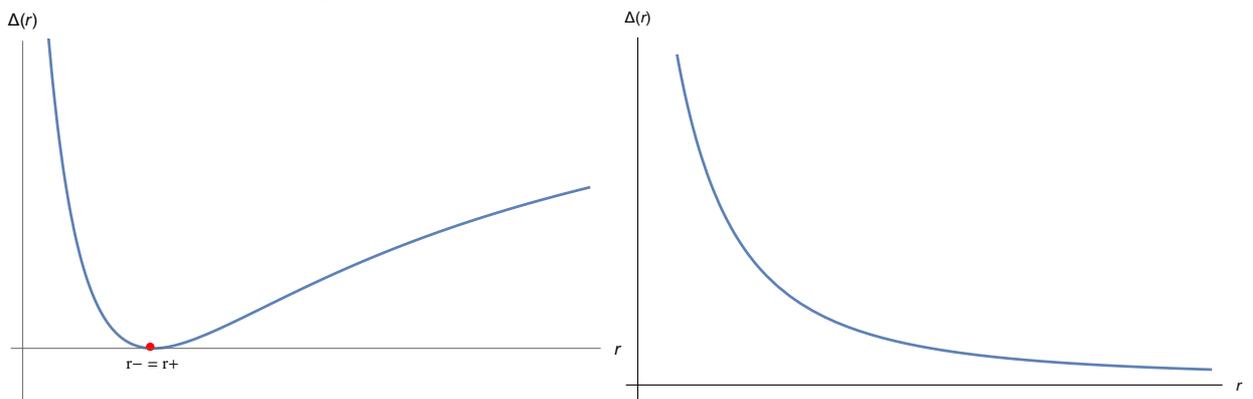


Figura 2.3: Do lado esquerdo, temos o caso $M^2 = r_Q^2$. Nele, a função $\Delta(r)$ possui uma raiz $r_- = r_+$, marcada no ponto vermelho. Do lado direito, temos o caso $M^2 < r_Q^2$. A função $\Delta(r)$ não possui raízes. *Fonte: imagem de autoria própria.*

Podemos, assim como na solução de Schwarzschild, realizar transformações de coordenadas de forma que a métrica seja não-singular nos horizontes de Killing. Sabemos que, ao realizar essas transformações, podemos descrever o espaço-tempo através de diagramas e verificar que esses horizontes coincidem com os horizontes de eventos de Reissner-Nordstrom. De acordo com as referências [13, 29, 30], temos que

1. Para $M^2 < r_Q^2$, teremos uma singularidade nua e r_{\pm} será um número complexo, como mostramos na figura 2.3. Não existirá horizonte de eventos, de forma que nada esconderá a singularidade localizada em $r = 0$ de um observador. Existe um teorema, chamado de conjectura da censura cósmica, que impede esse tipo de solução. Ele nos diz que todas as singularidades formadas a partir de um colapso gravitacional estão necessariamente escondidas por horizontes de eventos. Ou seja, são buracos negros. Portanto, essa não é uma solução física.
2. Para $M^2 = r_Q^2$ temos uma solução extrema de Reissner-Nordström. Buracos negros extremos possuem a solução r_{\pm} em um único raio, $r = M$, que representa um único horizonte de eventos. O gráfico esquerdo da figura 2.3 representa essa situação.
3. Para $M^2 > r_Q^2$, a função $\Delta(r)$ é negativa para $r_- < r < r_+$ e positiva para os outros valores de r , como mostrado na figura 2.2. As superfícies definidas por $r = r_{\pm}$ são tipo-luz e, portanto, são ambas horizontes de eventos.

Os diagramas de Penrose para a solução de Reissner-Nordstrom podem ser encontrados nas referências [13, 30]. De forma complementar, o leitor interessado pode visualizar como seria a aparência desses horizontes de eventos em uma simulação feita na referência [86].

2.2.2 Desvio para o vermelho gravitacional

O desvio para o vermelho gravitacional [30, 98] é um fenômeno que permite que ondas eletromagnéticas percam energia ao viajar sob um campo gravitacional. Como consequência, a frequência dessas ondas pode diminuir e seu comprimento de onda aumentar. Sabemos que um fóton possui energia $E = h\omega$ e um observador v^{μ} mede sua frequência de onda através da relação $\omega = k_{\alpha}v^{\alpha}$, onde k^{μ} representa o quadrivetor de onda. De forma geral, o desvio para o vermelho de um raio de luz emitido radialmente em r_1 e detectado em r_2 , com $r_1 < r_2$, é dado pela fórmula

$$1 + z = \frac{g_{\mu\nu}(r_1)v_1^{\mu}k_1^{\nu}}{g_{\mu\nu}(r_2)v_2^{\mu}k_2^{\nu}}. \quad (2.48)$$

Essa definição inclui o desvio para o vermelho produzido tanto pela gravidade quanto por fontes em movimento. Considerando um fundo estático e esfericamente simétrico, sabemos que podemos encontrar o desvio para o vermelho gravitacional ao considerar observadores estáticos [98]. Em geral, podemos escrever observadores estáticos por meio da relação

$$v^\alpha = \frac{\xi^\alpha}{\sqrt{\xi^\mu \xi_\mu}}, \quad (2.49)$$

onde representamos as componentes do vetor de Killing tipo-tempo como $\xi^\mu = \delta_0^\mu$, tal que seu módulo é dado por $\xi^\mu \xi_\mu = g_{tt}(r)$. Sabemos que os vetores de Killing estão associados a quantidades conservadas e que o vetor de Killing tipo tempo satisfaz a relação $\xi^\mu k_\mu = \text{const.}$, portanto, a equação (2.48) se reduz a

$$1 + z = \frac{g_{\mu\nu}(r_1) k_1^\nu \xi_1^\mu \sqrt{g_{tt}(r_2)}}{g_{\alpha\beta}(r_2) k_2^\beta \xi_2^\alpha \sqrt{g_{tt}(r_1)}}. \quad (2.50)$$

Logo, teremos

$$1 + z = \frac{d\tau_2}{d\tau_1} = \sqrt{\frac{g_{tt}(r_2)}{g_{tt}(r_1)}}, \quad (2.51)$$

onde $d\tau_i$ define a separação temporal entre duas cristas de onda sucessivas, medida pelos relógios. Podemos rescrever essa fórmula de modo a explicitar a dependência com o comprimento de onda λ ou com a frequência angular ω , obtendo

$$\frac{d\tau_2}{d\tau_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2}. \quad (2.52)$$

O desvio para o vermelho ocorre quando $\lambda_2 > \lambda_1$ ($z > 0$), enquanto o desvio para o azul ocorre se $\lambda_2 < \lambda_1$ ($z < 0$). No fundo de Reissner-Nordstrom, a fórmula que descreve o desvio para o vermelho se torna

$$1 + z = \left(1 - \frac{2M}{r_2} + \frac{r_Q^2}{r_2^2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{2M}{r_1} + \frac{r_Q^2}{r_1^2}\right)^{-1/2}. \quad (2.53)$$

Notamos que nos horizontes de Killing (2.46) o desvio para o vermelho diverge, como esperado. No capítulo 3, iremos generalizar essa fórmula de modo a incluir possíveis efeitos de birrefringência em espaços- curvos, devido a presença meios eletromagnéticos não-lineares.

2.2.3 Trajetória de partículas

A equação da geodésica, que descreve a trajetória de uma partícula situada sob um espaço-tempo, é dada por

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0, \quad (2.54)$$

tal que as componentes da conexão afim $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\nu\mu}^\alpha$ para um espaço-tempo estático e com simetria esférica (2.21) são listadas a seguir

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 &= \frac{1}{2g_{tt}(r)} \frac{dg_{tt}(r)}{dr} & \Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2g_{rr}(r)} \frac{dg_{tt}(r)}{dr} & \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2g_{rr}(r)} \frac{dg_{rr}(r)}{dr} \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{r}{g_{rr}(r)} & \Gamma_{33}^1 &= \text{sen}^2\theta \Gamma_{22}^1 & \Gamma_{33}^2 &= -\text{sen}\theta \cos\theta \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r} & \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r} & \Gamma_{23}^3 &= \text{cotg}\theta \end{aligned} \quad (2.55)$$

Ressaltamos que a fim de simplificar a notação, denotamos o módulo das componentes da métrica por $|g_{rr}| = g_{rr}$ e $|g_{tt}| = g_{tt}$. Se aplicarmos as componentes da conexão afim na equação da geodésica, obtemos o sistema de equações

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2 r}{d\lambda^2} + \frac{1}{2g_{rr}} \frac{dg_{rr}}{dr} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - \frac{r}{g_{rr}} \left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 - \frac{r \text{sen}^2\theta}{g_{rr}} \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 + \frac{1}{2g_{rr}} \frac{dg_{tt}}{dr} \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2, \\ 0 &= \frac{d^2\theta}{d\lambda^2} + \frac{2}{r} \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} - \text{sen}\theta \cos\theta \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2, \\ 0 &= \frac{d^2\phi}{d\lambda^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} + 2\text{cotg}\theta \frac{d\phi}{d\lambda} \frac{d\theta}{d\lambda}, \\ 0 &= \frac{d^2 t}{d\lambda^2} + \frac{1}{g_{tt}} \frac{dg_{tt}}{dr} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Como estamos lidando com um problema com simetria esférica, sempre podemos escolher um sistema de coordenadas onde as condições iniciais são $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ e $\dot{\theta}_0 = 0$. Nesse caso, a segunda equação se reduz a $\ddot{\theta} = 0$, o que implica em $\dot{\theta} = \text{const.} = 0$ sempre. Portanto, um movimento que começa no plano $\theta = \frac{\pi}{2}$, se mantém no plano.

Assim, podemos simplificar as duas últimas equações, obtendo

$$0 = \frac{d}{d\lambda} \left[\ln \frac{d\phi}{d\lambda} + \ln r^2 \right], \quad (2.57)$$

$$0 = \frac{d}{d\lambda} \left[\ln \frac{dt}{d\lambda} + \ln g_{tt} \right]. \quad (2.58)$$

É direto verificar que essas equações implicam nas leis de conservação

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{\kappa}{g_{tt}}, \quad (2.59)$$

$$r^2 \frac{d\phi}{d\lambda} = h, \quad (2.60)$$

onde h representa o módulo do momento angular por unidade de massa $\vec{h} = \frac{\vec{L}}{m}$ e κ é uma constante com dimensão de energia por unidade de massa. Podemos aplicar as equações acima na primeira equação de (2.56) e multiplicar a equação resultante por $2g_{rr} \frac{dr}{d\lambda}$, de forma a obter

$$0 = \frac{dr}{d\lambda} \left[2g_{rr} \frac{d^2 r}{d\lambda^2} + \frac{dg_{rr}}{dr} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 - \frac{2h^2}{r^3} + \frac{dg_{tt}}{dr} \left(\frac{\kappa}{g_{tt}} \right)^2 \right]. \quad (2.61)$$

Notamos que essa equação pode ser simplificada para

$$0 = \frac{d}{d\lambda} \left[g_{rr} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \frac{h^2}{r^2} - \frac{\kappa^2}{g_{tt}} \right], \quad (2.62)$$

portanto, encontramos que vale a relação

$$-\sigma = g_{rr} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \frac{h^2}{r^2} - \frac{\kappa^2}{g_{tt}}, \quad (2.63)$$

onde σ é uma constante que representa uma quantidade conservada com dimensão de energia por unidade de massa. Ela relaciona o parâmetro afim λ com tempo próprio τ , por meio da relação $d\tau^2 = \sigma d\lambda^2$, de forma que essa constante é nula para os fótons e positiva para partículas massivas. Sendo assim, podemos definir os potenciais efetivos para partículas massivas $\sigma = 1$ e para o fóton $\sigma = 0$ a partir de

$$\dot{r}^2 = \kappa^2 - V(r), \quad (2.64)$$

tal que seus potenciais efetivos são

$$V(r) = \kappa^2 - \frac{\kappa^2}{g_{rr}g_{tt}} + \left(\sigma + \frac{h^2}{r^2} \right) \frac{1}{g_{rr}}. \quad (2.65)$$

Ressaltamos que nessa notação estamos trabalhando com o módulo das componentes da métrica. Se não estivéssemos trabalhando com os seus módulos, os três últimos termos trocariam de sinal.

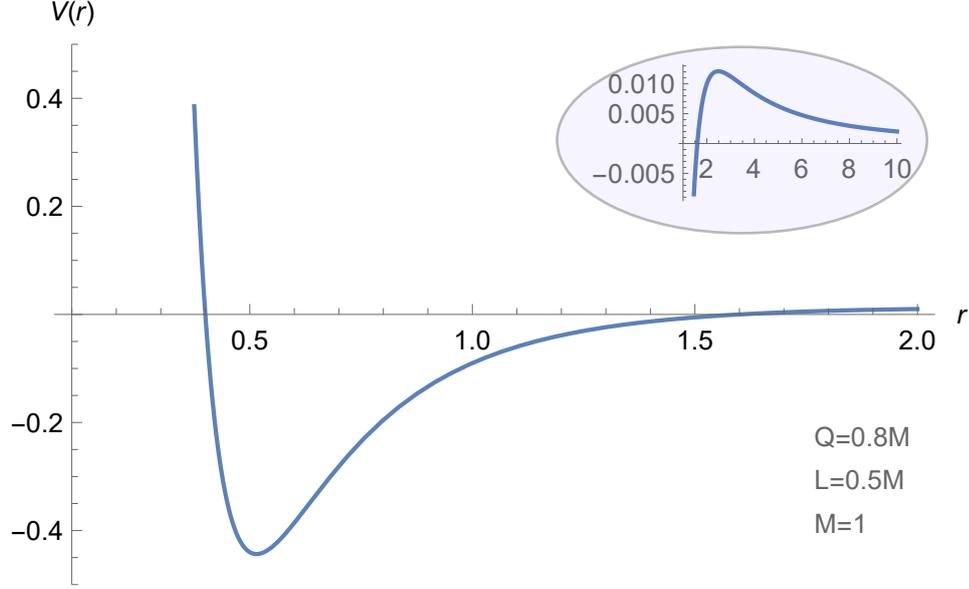


Figura 2.4: Gráfico do potencial efetivo seguido pela luz no fundo de Reissner-Nordstrom ($M^2 > r_Q^2$). O eixo horizontal está em unidades de massa M . Notamos que para o potencial de R-N podemos ter órbitas circulares estáveis e instáveis, enquanto que para Schwarzschild encontramos apenas órbitas circulares instáveis. De fato, o gráfico para o potencial de Schwarzschild se assemelha a parte instável do potencial de R-N, mostrada no campo superior direito da figura. *Fonte: imagem de autoria própria.*

Nesse trabalho, estamos interessados em estudar as trajetórias da luz. Especificamente, temos que a trajetória de um raio de luz no fundo de Reissner-Nordstrom é descrita pelo potencial efetivo

$$V_{R-N}(r) = \frac{h^2}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r_2} + \frac{r_Q^2}{r_2^2} \right). \quad (2.66)$$

Na figura 2.4, plotamos o gráfico deste potencial no caso em que $M^2 > r_Q^2$ e comparamos as suas trajetórias nos fundos de Schwarzschild e Reissner-Nordstrom (R-N). No capítulo 3 dessa tese, encontraremos correções neste potencial, associadas ao efeito de birrefringência produzido por um meio eletromagnético não-linear situado sob o fundo de R-N.

2.2.4 Deflexão gravitacional da luz

É possível reescrever a relação (2.63), juntamente com a equação (2.60), com o objetivo de obter o ângulo de deflexão que as partículas sofrem ao redor de um objeto compacto com simetria esférica. Na figura 2.5 mostramos os ângulos de incidência ϕ_∞ e deflexão $\Delta\phi$ envolvidos no processo. Notamos que a relação (2.63) pode ser escrita como

$$g_{rr} \left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 \frac{h^2}{r^4} = -\sigma - \frac{h^2}{r^2} + \frac{\kappa^2}{g_{tt}}, \quad (2.67)$$

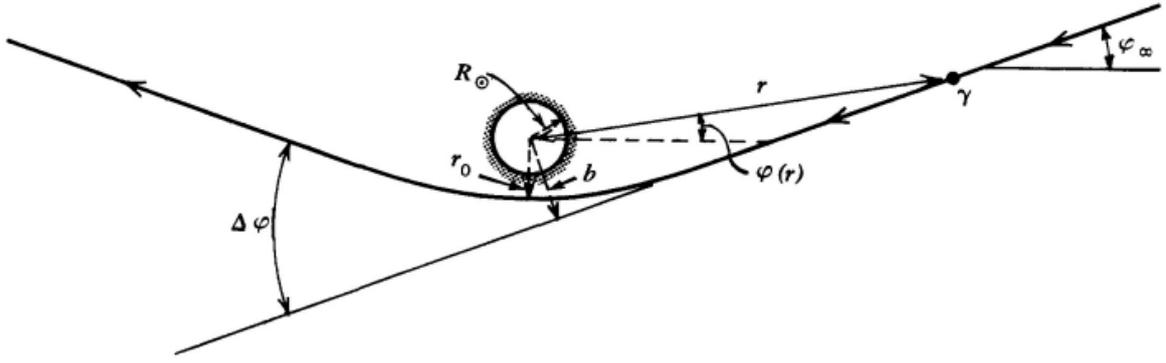


Figura 2.5: Trajetória seguida por um raio de luz se aproximando da fonte a partir de uma região assintótica. Notamos que o raio é desviado nas proximidades do objeto compacto. Essa figura foi retirada da referência [99].

ou ainda

$$\phi = \pm \int \frac{g_{rr}^{1/2}(r) dr}{r^2 \left(\frac{\kappa^2}{h^2 g_{tt}(r)} - \frac{\sigma}{h^2} - \frac{1}{r^2} \right)^{1/2}}. \quad (2.68)$$

Independente do tipo de partícula, o movimento sofre uma alteração devido a geometria do espaço-tempo, representada pelos coeficientes da métrica. Quando $\sigma = 0$ obtemos o desvio sofrido pela luz devido a presença do campo gravitacional. Observamos que na ausência de um campo gravitacional, o fóton segue uma trajetória em linha reta, associada a solução

$$b = r \text{ sen}(\phi - \phi_\infty). \quad (2.69)$$

A uma distância de máxima aproximação $r = r_0$, temos que vale a relação

$$\left. \frac{dr}{d\phi} \right|_{r_0} = 0. \quad (2.70)$$

Assim, para o fóton, vemos que nessa distância a relação (2.67) se torna

$$\frac{h^2}{\kappa^2} = \frac{r_0^2}{g_{tt}(r_0)}. \quad (2.71)$$

Portanto, podemos reescrever (2.68) de forma a representar o ângulo de desvio sofrido pela luz

$$\phi(r) - \phi_\infty = \int_r^\infty \sqrt{g_{rr}(r)} \left[\left(\frac{r^2}{r_0^2} \right) \frac{g_{tt}(r_0)}{g_{tt}(r)} - 1 \right]^{-1/2} \frac{dr}{r}. \quad (2.72)$$

A variação total sofrida por um raio de luz vindo do infinito, passando pela região de máxima aproximação e retomando para o infinito é dada por $2|\phi(r_0) - \phi_\infty|$. Na ausência de fonte sabemos

que a deflexão total seria de π e corresponderia a uma linha reta. Portanto a deflexão total com relação a trajetória em linha reta é dada por [99]

$$\Delta\phi = 2|\phi(r_0) - \phi_\infty| - \pi . \quad (2.73)$$

No capítulo 3 dessa tese, obteremos correções no ângulo de deflexão total da luz, associadas a presença de um meio eletromagnético não-linear no fundo de Reissner-Nordstrom.

Capítulo 3

Meios não-lineares em espaços-curvos

Se considerarmos um meio dielétrico com permeabilidade magnética constante μ e permitir que sua permissividade elétrica dependa da intensidade do campo elétrico $\epsilon(E)$, a propagação da luz será descrita por geodésicas nas métricas efetivas

$$\begin{aligned}\hat{g}_+^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} + v^\mu v^\nu (\epsilon \mu + \bar{\epsilon} \mu E - 1) - \frac{\bar{\epsilon}}{\epsilon E} E^\mu E^\nu \\ \hat{g}_-^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} + v^\mu v^\nu (\epsilon \mu - 1),\end{aligned}\tag{3.1}$$

onde $g^{\mu\nu}$ representa a métrica do campo gravitacional de fundo. Nesse trabalho, focaremos em soluções estáticas e esfericamente simétricas da RG. Lembramos que o elemento de linha para um corpo massivo carregado é representado por

$$ds^2 = \Delta(r) dt^2 - \Delta^{-1}(r) dr^2 - r^2 d\Omega^2,\tag{3.2}$$

onde

$$\Delta = 1 + \frac{r_Q^2}{r^2} - \frac{r_h}{r},\tag{3.3}$$

com constantes

$$r_Q^2 = \frac{\pi G}{c^4} \frac{Q^2}{4\pi^2 \epsilon_0}, \quad r_h = \frac{2MG}{c^2}.\tag{3.4}$$

Nessa tese, iremos considerar as unidades $c = G = 1$ e que o campo eletromagnético, que surge na equação (3.1), seja o campo eletromagnético produzido pelo objeto compacto carregado.

A baixas energias, podemos considerar um fundo gravitacional fixo. Partículas tipo-tempo seguem trajetórias nesse espaço-tempo de fundo, enquanto a luz se propaga através de geodésicas na geometria efetiva¹. Esse limite é suficiente para enumerarmos consequências físicas deste modelo, como mudanças no desvio para o vermelho e na deflexão gravitacional da luz. Considerando os horizontes de Killing como as superfícies tipo-nulas onde o desvio para o vermelho diverge e

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{\hat{g}_{00}(r)}{\hat{g}_{11}(r)}} = 0 \quad (3.5)$$

é satisfeito, somos capazes de quantificar possíveis mudanças na localização dessas superfícies. Uma vez que o horizonte de Killing depende apenas da geometria efetiva, nos referimos a ele como um horizonte óptico.

Notamos que as equações de Einstein estão relacionadas a métrica de fundo, não a métrica efetiva. Portanto, toda discussão conhecida na literatura a respeito da localização da singularidade $r = 0$ permanece válida. A geometria efetiva não altera essas definições, podendo alterar somente definições que dependam diretamente da propagação da luz, como mencionado anteriormente.

Sabemos que a métrica inversa $\hat{g}_{\alpha\nu} = Ag_{\alpha\nu} + Bv_\alpha v_\nu + CE_\alpha E_\nu$ satisfaz a relação $\hat{g}^{\mu\alpha} \hat{g}_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\mu$. Logo, para a polarização positiva temos que

$$\delta_\nu^\mu = \left\{ g^{\mu\alpha} - [1 - \mu(\epsilon E)'] v^\mu v^\alpha - \frac{\epsilon'}{\epsilon E} E^\mu E^\alpha \right\} (Ag_{\alpha\nu} + Bv_\alpha v_\nu + CE_\alpha E_\nu) ,$$

de modo que essa igualdade só é válida se

$$\begin{aligned} A &= 1 , \\ B &= A \frac{1 - \mu(\epsilon E)'}{\mu(\epsilon E)'} = \frac{1 - \mu(\epsilon E)'}{\mu(\epsilon E)'} , \\ C &= \frac{A}{E^2} \frac{\frac{\epsilon' E}{\epsilon}}{1 + \frac{\epsilon' E}{\epsilon}} = \frac{1}{E^2} \frac{\frac{\epsilon' E}{\epsilon}}{1 + \frac{\epsilon' E}{\epsilon}} . \end{aligned} \quad (3.6)$$

Assim, concluímos que as métricas efetivas (3.1) possuem inversa

$$\begin{aligned} \hat{g}_{\mu\nu}^+ &= g_{\mu\nu} - (1 - f_+) v_\mu v_\nu + \frac{\xi}{1 + \xi} l_\mu l_\nu \\ \hat{g}_{\mu\nu}^- &= g_{\mu\nu} - (1 - f_-) v_\mu v_\nu , \end{aligned} \quad (3.7)$$

¹É direto verificar que a relação de dispersão implica que, em um referencial onde a conexão se anule, vale $k_{\mu,\lambda} k^\mu = 0$. Notamos que $k_\mu = \frac{\partial \Sigma}{\partial x^\mu}$ é um gradiente, portanto temos que $k_{\mu,\lambda} = k_{\lambda,\mu}$. Como $k_{\lambda,\mu} k^\mu = 0$ é uma relação tensorial, ela é nula para qualquer referencial. Portanto, obtemos a equação da geodésica $k^\mu \nabla_\mu k_\lambda = 0$.

tal que definimos

$$f_- = \frac{1}{\mu\epsilon(E)}, \quad f_+ = \frac{1}{\mu\epsilon(1+\xi)}, \quad \xi = \frac{\bar{\epsilon}E}{\epsilon}, \quad \bar{\epsilon} = \frac{d\epsilon}{dE}, \quad l_\mu = \frac{E_\mu}{E}. \quad (3.8)$$

Se considerarmos um observador no referencial comóvel do dielétrico $v_\mu = \frac{g_{\mu 0}}{\sqrt{g_{00}}} = \sqrt{g_{00}}\delta_\mu^0$ e admitirmos que o campo elétrico $E(r)$ seja radial e estático $l_\mu = \sqrt{-g_{11}}\delta_\mu^1$, podemos simplificar as componentes das métricas efetivas

$$\begin{aligned} \hat{g}_{00}^+ &= \Delta f_+ \\ \hat{g}_{11}^+ &= -\frac{\Delta^{-1}}{1+\xi}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \hat{g}_{00}^- &= \Delta f_- \\ \hat{g}_{11}^- &= -\Delta^{-1}, \end{aligned}$$

de forma que verificamos que as componentes restantes são as mesmas da métrica de fundo. Está claro que essas métricas são equivalentes quando $\xi = 0$, i.e., $\epsilon = \text{const.}$. Nesse caso, elas se reduzem a métrica de Gordon e ambas polarizações seguem uma mesma geodésica. Apenas no vácuo as métricas efetivas se reduzem a métrica de fundo. Em geral, elas diferem, e os horizontes ópticos das métricas efetivas não necessariamente coincidem com os horizontes de Killing da métrica de fundo. Notamos que as métricas efetivas (3.9) são estáticas e esfericamente simétricas. Portanto, as fórmulas obtidas no capítulo anterior para o potencial efetivo e para a deflexão gravitacional da luz são válidas, se substituirmos $g_{\mu\nu} \rightarrow \hat{g}_{\mu\nu}$. Veremos que a fórmula que descreve o desvio para o vermelho precisa ser recalculada, de forma a considerar os vetores de Killing da métrica efetiva. Nesse caso, a substituição não será direta.

3.1 Potencial Efetivo

Mostraremos que a fórmula que descreve o potencial efetivo (2.65) permanece válida nesta situação $\sigma = 0$, por meio de uma substituição direta da métrica de fundo pela métrica efetiva. Para isso, note que o elemento de linha que descreve a propagação da luz é dado pela métrica efetiva, tal que podemos obter as trajetórias da luz através do princípio da mínima ação. Seja

λ um parâmetro afim, temos que a derivada com relação a ele é representada por $\dot{X} = \frac{dX}{d\lambda}$, de forma que podemos encontrar as trajetórias da luz variando a ação

$$\delta \int ds = 0, \quad (3.10)$$

que é equivalente a considerar

$$\delta \int \left(\hat{g}_{00} \dot{t}^2 + \hat{g}_{11} \dot{r}^2 + \hat{g}_{22} \dot{\theta}^2 + \hat{g}_{33} \dot{\phi}^2 \right) d\lambda = 0. \quad (3.11)$$

Sabemos que a variação dessa ação com relação a variável θ é automaticamente satisfeita se considerarmos $\dot{\theta} = 0$ e $\theta = \pi/2$. Ao variar a ação com relação às coordenadas t, ϕ , obtemos a conservação da energia total κ e a conservação do momento angular h ,

$$\begin{aligned} \hat{g}_{00} \dot{t} &= \kappa, \\ r^2 \dot{\phi} &= h, \end{aligned} \quad (3.12)$$

tendo que vista que as componentes da métrica efetiva não dependem das variáveis t, ϕ . Para a variável r , vamos considerar $ds^2 = 0$, de forma a obter a relação

$$\dot{r}^2 = \kappa^2 - V(r), \quad (3.13)$$

com potencial efetivo $V(r)$ sendo definido como

$$V(r) = \kappa^2 - \frac{\kappa^2}{|\hat{g}_{11}| |\hat{g}_{00}|} + \frac{h^2}{r^2 |\hat{g}_{11}|}. \quad (3.14)$$

Podemos substituir as componentes das métricas efetivas (3.9) na relação acima. Obtemos os potenciais efetivos

$$\begin{aligned} V_+(r) &= \frac{h^2 \Delta}{r^2} (1 + \xi) + \left[1 - \frac{(1 + \xi)}{f_+} \right] \kappa^2 \\ V_-(r) &= \frac{h^2 \Delta}{r^2} + \left[1 - \frac{1}{f_-} \right] \kappa^2, \end{aligned} \quad (3.15)$$

que são válidos para uma permissividade $\epsilon(E)$ arbitrária. Notamos que, como esperado, no vácuo $f_{\pm}(r) = 1$, $\xi = 0$ esses potenciais são iguais e definem o potencial de Reissner-Nordstrom (2.66), que se reduz ao potencial de Schwarzschild quando $r_Q = 0$. Casos particulares serão analisados na próxima seção. Ressaltamos que para obter a fórmula que descreve a deflexão da luz, é direto notar que vale o procedimento apresentado na subseção 2.2.4, quando $\sigma = 0$. Nesse

caso, poderíamos simplesmente dividir o \dot{r} definido na equação (3.13) por $\dot{\phi}$, dado pela relação (3.12), de forma a encontrar a mesma integral obtida anteriormente.

3.2 Deflexão da luz

A fórmula que descreve a deflexão de um raio de luz viajando do infinito até uma distância r da origem de um objeto compacto estático e esféricamente simétrico é conhecida na literatura [99]. Podemos calcular como ela é alterada na presença de um meio dielétrico não-linear. De forma geral, dado essa simetria, a deflexão da luz devido a um objeto compacto cercado por um meio dielétrico é representada pela integral

$$\phi(r) - \phi_\infty = \int_r^\infty \sqrt{|\hat{g}_{11}(r)|} \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \frac{\hat{g}_{00}(r_0)}{\hat{g}_{00}(r)} - 1 \right]^{-1/2} \frac{dr}{r}, \quad (3.16)$$

onde $\phi_\infty = \phi(\infty)$ define o ângulo de incidência e r_0 é a distância de máxima aproximação, descrita como o raio onde a seguinte relação é válida

$$\left. \frac{dr}{d\phi} \right|_{r_0} = 0.$$

O ângulo de deflexão em uma região distante da fonte é dado por [99]

$$\Delta\phi = 2|\phi(r_0) - \phi_\infty| - \pi. \quad (3.17)$$

Esse ângulo prevê uma correção na trajetória da luz medida por um observador longe da fonte. Então, definido $\Delta_0 = \Delta(r_0)$, a deflexão da luz devido a um meio dielétrico no fundo de Reissner-Nordstrom é descrita pelas integrais

$$\phi^+(r) - \phi_\infty^+ = \int_r^\infty \sqrt{\frac{\Delta^{-1}}{1+\xi}} \cdot \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \frac{\Delta_0 f_+(r_0)}{\Delta f_+} - 1 \right]^{-1/2} \frac{dr}{r}, \quad (3.18)$$

$$\phi^-(r) - \phi_\infty^- = \int_r^\infty \sqrt{\Delta^{-1}} \cdot \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \frac{\Delta_0 f_-(r_0)}{\Delta f_-} - 1 \right]^{-1/2} \frac{dr}{r}, \quad (3.19)$$

referentes a cada uma das polarizações. Lembramos que as relações (3.8) permanecem válidas, portanto, $f_\pm = f_\pm(r)$, $\xi = \xi(r)$ são funções do raio, tendo em vista que o módulo do campo elétrico depende deste $E = E(r)$. Para calcular essas integrais, é necessário definir a permissividade elétrica $\epsilon(E)$ do meio material e explicitar o campo elétrico externo $E(r)$. No

caso trivial onde o campo elétrico é constante, temos que as funções f , ξ , ϵ serão constantes com relação a variável de integração r .

3.3 Desvio para o vermelho

Como mostrado na subseção 2.2.2, o desvio para o vermelho gravitacional [30, 98] é um fenômeno que permite que ondas eletromagnéticas percam energia ao viajar sob um campo gravitacional. Como consequência, a frequência dessas ondas pode diminuir e seu comprimento de onda aumentar. Sabemos que a definição (2.48) inclui o desvio para o vermelho produzido tanto pela gravidade quanto por fontes em movimento. Considerando um fundo estático e esfericamente simétrico, podemos descrever observadores estáticos por meio da relação (2.49), onde representamos as componentes do vetor de Killing tipo-tempo da métrica de fundo como $\xi^\mu = \delta_0^\mu$, tal que seu módulo é definido por $\xi^\mu \xi_\mu = g_{00}(r)$.

Deduzimos as geometrias efetivas, que descrevem a propagação da luz no meio, considerando um campo de observadores comóvel ao dielétrico. Esses observadores são estáticos. Portanto, vale a definição (2.49). No entanto, temos agora que o campo de observadores segue trajetórias na geometria de fundo, enquanto a luz segue trajetórias na geometria efetiva. Sabemos que o quadrivetor de onda k^μ é tangente a geodésicas na geometria efetiva, portanto, sua contração com o vetor de killing tipo-tempo da geometria efetiva $\hat{\xi}^\mu k_\mu = \text{const.}$ representa uma quantidade conservada. O módulo desse vetor de Killing é dado pela relação $\hat{\xi}^\mu \hat{\xi}_\mu = \hat{g}_{00}(r)$. Tendo em vista que temos duas geometrias efetivas $\hat{g}_{00}^\pm = f_\pm g_{00}$, obtemos que $\xi_\mu = \delta_\mu^0 g_{00}$ se relaciona com os vetores de killing tipo-tempo das geometrias efetivas através da relação $\hat{\xi}_\mu^\pm = \delta_\mu^0 \hat{g}_{00}^\pm = f_\pm \xi_\mu$. Portanto, a equação (2.48) se torna

$$\begin{aligned} (1+z)_\pm &= \frac{\xi_\nu k^\nu(r_1) \sqrt{g_{00}(r_2)}}{\xi_\beta k^\beta(r_2) \sqrt{g_{00}(r_1)}} \\ &= \frac{\hat{\xi}_\nu^\pm k^\nu(r_1) \sqrt{g_{00}(r_2)} f_\pm(r_2)}{\hat{\xi}_\beta^\pm k^\beta(r_2) \sqrt{g_{00}(r_1)} f_\pm(r_1)}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Logo, teremos

$$(1+z)_\pm = \frac{d\tau_2}{d\tau_1} = \sqrt{\frac{g_{00}(r_2) f_\pm(r_2)}{g_{00}(r_1) f_\pm(r_1)}}, \quad (3.21)$$

onde $d\tau_i$ define a separação temporal entre duas cristas de onda sucessivas, medida pelos relógios.

Se $r_1 = r$ e $r_2 \rightarrow \infty$ com $f_\infty^\pm = f_\pm(\infty)$, vale a relação

$$(1+z)_\pm = \sqrt{\frac{1}{\Delta} \frac{f_\infty^\pm}{f_\pm}}. \quad (3.22)$$

Notamos que para os casos $f_{\pm} = \text{const.}$ o desvio para o vermelho permanece inalterado com relação as previsões do fundo gravitacional

$$(1+z)_B = \sqrt{\frac{1}{\Delta}}. \quad (3.23)$$

Esses casos estão relacionados uma classe de meios materiais, que inclui o vácuo, e será analisada na próxima seção. Para $f_{\pm} \neq \text{const.}$, estamos considerando um meio eletromagnético não-linear arbitrário, definido pelas relações (3.8), situado sob o espaço-curvo. É apropriado reescrever esse caso geral como

$$\frac{(1+z)_{\pm}}{(1+z)_B} = \frac{f_{\infty}^{\pm}}{f_{\pm}}. \quad (3.24)$$

Notamos que podemos expandir a permissividade elétrica dos meios materiais em função do módulo do campo elétrico

$$\epsilon(E) = \epsilon + \sum_n c_n E^n, \quad (3.25)$$

onde ϵ define uma constante. Se $E(r) = Q/r^\alpha$ com $\alpha, \epsilon, c_n > 0$, teremos $f_{\infty}^{\pm} = \text{const.}$ e

$$\frac{f_{\infty}^{\pm}}{f_{\pm}} > 1, \quad (3.26)$$

o que implica que a intensidade do desvio para o vermelho será maior do que a prevista pelo fundo gravitacional, para ambas polarizações. Se $c_n < 0$ está claro que o oposto irá ocorrer (terá sua intensidade atenuada). Temos que a constante ϵ deve satisfazer $\epsilon \neq 0$, caso contrário, um campo elétrico nulo implicaria em $\epsilon = 0$, o que não consideramos uma situação física. Notamos que, nesse caso, a fração divergiria em todos os raios, para ambas as polarizações. Se permitirmos que $\epsilon < 0$, a análise acima para materiais que satisfazem (3.25), com $c_n > 0$, implica em

$$\frac{f_{\infty}^{\pm}}{f_{\pm}} < 1, \quad (3.27)$$

tal que o desvio para o vermelho possui sua intensidade reduzida com relação as previsões do fundo gravitacional. Não podemos definir um campo elétrico com dependência $E(r) \propto r^\alpha$, caso contrário, o desvio para o vermelho divergiria em todos os pontos, se considerarmos materiais com permissividade (3.25). Os únicos tipos de materiais que permitem essa configuração devem possuir permissividade

$$\epsilon(E) = \epsilon + \sum_n c_n E^{-n}. \quad (3.28)$$

Entretanto, eles não são de interesse físico, pois queremos que o campo eletromagnético se anule no infinito. Focaremos nossa análise em materiais com permissividade (3.25) e na classe especial de materiais que satisfazem $f_{\pm} = \text{const.}$

3.4 Horizontes ópticos

Não esperamos que as métricas efetivas (3.9) produzam alterações nos horizontes de Killing, tendo em vista que essas métricas definem $\hat{g}_{00}^{\pm} = g_{00}f_{\pm}$. Considerando $\hat{g}_{00}^{\pm}(r_h) = 0$ obtemos imediatamente $g_{00}(r_h) = 0$, tal que encontramos as mesmas superfícies previstas pela métrica de fundo. Poderíamos argumentar que é possível existir horizontes ópticos dados pela relação $f_{\pm}(r_h) = 0$, entretanto, segundo as definições (3.8), verificamos que essa condição só é válida para $\epsilon(E) \rightarrow \infty$. Dado (3.25), a única solução possível é $r_h = 0$ (sabemos que esse raio representa uma singularidade no espaço-tempo e que a métrica efetiva não é capaz de alterá-la, então essa solução não representa um horizonte óptico). De forma complementar, no caso particular $f_{+} = \text{const.}$ poderíamos obter $r_h = \infty$, o que parece inesperado, mas sua única consequência é que a luz está presa em uma região por conta do meio dielétrico, entretanto, essa região inclui todo o universo. Portanto, concluimos que os horizontes ópticos coincidem com os horizontes de Killing da métrica de fundo, por conta da simetria do problema.

3.5 Casos particulares

3.5.1 A classe de meios materiais com $f = \text{const.}$

Um caso particular de interesse ocorre quando $f_{\pm}(r) = \text{const.}$, já que nos dá uma situação limite onde o desvio para o vermelho não é alterado com relação as previsões do fundo gravitacional. Notamos que é possível separar esses meios em duas classes: I- $f_{-} = f_{+} = \text{const.}$, que representa o caso de Gordon, ou II- $f_{-} \neq \text{const.}$, $f_{+} = \text{const.}$. . Mostramos abaixo suas consequências.

O caso de Gordon

Nessa subseção, analisaremos a primeira classe. Considerando a relação

$$\frac{1}{\mu\epsilon(E)} = \text{const.} , \quad (3.29)$$

encontramos que

$$\epsilon(E) = \epsilon . \quad (3.30)$$

Temos que para essa permissividade o desvio para o vermelho e a deflexão gravitacional da luz de ambas polarizações coincidem com as previsões do fundo gravitacional. Em contrapartida, os potenciais efetivos preveem correções, dadas pelas equações (3.15). Verificamos que o efeito de polarização desaparece e ambas polarizações passam a ter suas trajetórias definidas por um único potencial, tal que a luz segue somente uma trajetória. Como a permissividade é constante, temos que $\xi = 0$ e $f_{\pm} = f = \frac{1}{\mu\epsilon}$, com $\epsilon = \text{const.}$ e $\mu = \text{const.}$. As componentes das métricas efetivas se tornam

$$\begin{aligned}\hat{g}_{00}^{\pm} &= \Delta f, \\ \hat{g}_{11}^{\pm} &= -\Delta^{-1},\end{aligned}\tag{3.31}$$

onde Δ é definido pelo fundo de Reissner-Nordstrom. Notamos que o caso de Gordon é uma situação particular onde $f = \text{const.}$, o que implica que a resolução de $\hat{g}_{00}^{\pm}(r_h) = 0$ só pode acarretar em $g_{00}(r_h) = 0$. O vácuo é uma situação particular desse exemplo, representado por $\epsilon = \epsilon_0$ e $\mu = \mu_0$.

Se a métrica efetiva for definida pelo caso de Gordon, podemos calcular seu potencial efetivo $V_{\pm}(r) = V(r)$, representado por

$$V(r) = \frac{\hbar^2}{r^2}\Delta + [1 - n^2]\kappa^2,\tag{3.32}$$

onde $n^2 = \mu\epsilon$ define o quadrado do índice de refração do meio. Particularmente, se considerarmos que o meio é o vácuo, temos $n = 1$ e $V_{\text{Gordon}} = V_{R-N}$.

O caso $f_+ = \text{const.}$

Impondo a restrição $f_+(r) = \text{const.}$, podemos obter a permissividade mais geral $\epsilon(E)$ que satisfaz

$$\frac{1}{\mu\epsilon(1 + \xi)} = \text{const.}.\tag{3.33}$$

É direto integrar essa relação, de forma a encontrar o resultado

$$\epsilon(E) = \varepsilon + \frac{a}{E}.\tag{3.34}$$

Essa permissividade se reduz ao caso anterior somente se $a = 0$. Em geral, podemos ter $f_+ = \text{const.}$ com $f_- \neq \text{const.}$. Dado a permissividade (3.34), temos que apenas o desvio para o vermelho associado à polarização positiva coincide com a previsão do fundo

gravitacional. Esperamos correções no desvio gravitacional da luz e no potencial efetivo, para ambas polarizações. De fato, considerando essa permissividade, temos

$$f_- = \frac{1}{\mu(\varepsilon + a/E)}, \quad f_+ = \frac{1}{\mu\varepsilon}, \quad (1 + \xi) = \frac{\varepsilon}{\epsilon}, \quad (3.35)$$

tal que é direto substituir essas relações nas equações (3.15) e (3.18-3.19), dado um campo elétrico $E = E(r)$. Notamos que neste caso peculiar temos $\frac{f_-^\infty}{f_-} = 0$, o que implica que o desvio para o vermelho associado à polarização negativa deve ser nulo. Interpretamos que um observador assintótico seria capaz de medir somente um desvio para o vermelho, associado à polarização positiva, e obteria as mesmas previsões do fundo gravitacional. Apesar disso, verificamos que o observador poderia notar a existência de duas trajetórias para o raio de luz.

3.5.2 Um caso particular para a permissividade

Dados experimentais mostram que a função permissividade $\epsilon(E) = \varepsilon + c_1 E + c_2 E^2$ é suficiente para descrever aproximadamente um meio dielétrico arbitrário. De fato, eles indicam que para a maioria dos materiais c_2 é menor que c_1 por muitas ordens de magnitude [93]. Por essa razão, ao lidarmos com campos fracos, parece razoável esperar que o efeito Pockels seja mais relevante que o efeito Kerr [3, 81, 88]. Portanto, vamos restringir nossa análise a uma permissividade definida por

$$\epsilon(E) = \varepsilon + c_1 E, \quad (3.36)$$

com $E(r) = r_Q^2/r^2$ representando o campo elétrico de fundo². Gostaríamos de descobrir como o efeito de birrefringência, ocasionado por essa dependência no campo elétrico, altera a propagação da luz em um espaço-curvo esfericamente simétrico.

Por cálculo direto, obtemos

$$1 + \xi = \frac{\varepsilon + 2c_1 E}{\epsilon}, \quad f_+ = \frac{1}{\mu(\varepsilon + 2c_1 E)}, \quad f_- = \frac{1}{\mu(\varepsilon + c_1 E)}. \quad (3.37)$$

²Note que o campo elétrico de fundo possui dependência explícita $E(r) = \frac{r_Q^2}{r^2} \frac{c^4}{QG}$. Com exceção da variável r , os outros termos são constantes. Portanto, como havíamos definido $c = G = 1$ definimos também $Q = 1$, afim de evitar sobrecarregar a notação. Perceba que essas constantes podem ser facilmente reintroduzidas por meio de uma análise dimensional. De fato, ao obtermos os resultados, faremos isso com o objetivo de explicitar sua dependência.

Os potenciais efetivos associados às trajetórias da luz no meio dielétrico são definidos por

$$\begin{aligned} V_+(r) &= \frac{\hbar^2 \Delta}{r^2} \left[1 + \frac{c_1 E}{\varepsilon + c_1 E} \right] + \left[1 - \mu \frac{(\varepsilon + 2c_1 E)^2}{\varepsilon + c_1 E} \right] \kappa^2 \\ V_-(r) &= \frac{\hbar^2 \Delta}{r^2} + [1 - \mu(\varepsilon + c_1 E)] \kappa^2, \end{aligned} \quad (3.38)$$

para cada polarização. Mostramos nas figuras 3.1, 3.2 e 3.3 como a presença do meio material altera as previsões para o potencial efetivo do fundo gravitacional.

Notamos que não é possível calcular as integrais que descrevem o desvio da luz (3.18-3.19) analiticamente, mas podemos considerar uma aproximação de campos fracos, tal que podemos expandir as funções integradas $\Phi_{\pm}(r)$, de forma a solucionar suas integrais em uma dada ordem. Mostraremos que essas integrais podem ser resolvidas desta forma, de modo que podemos encontrar correções de primeira ordem às previsões da RG. Para isso, consideraremos $\frac{2m}{r} \sim \frac{r_q^2}{r^2} \ll 1$ e $\frac{2m}{r_0} \sim \frac{r_q^2}{r_0^2} \ll 1$ junto com a condição $\frac{c_1}{\varepsilon} \ll 1$, que é esperada para a maioria dos meios materiais. Além disso, consideraremos que as correções associadas ao efeito Pockels sejam muito pequenas $\frac{c_1 E}{\varepsilon} \ll 1$, de forma que podemos expandir as funções (3.37).

Assim, dado essas condições, notamos que a fração

$$\frac{\Delta(r_0)}{\Delta(r)} = \left[1 - \frac{2m}{r_0} + \frac{r_q^2}{r_0^2} \right] \left[1 - \frac{2m}{r} + \frac{r_q^2}{r^2} \right]^{-1} \quad (3.39)$$

pode ser expandida como

$$\frac{\Delta(r_0)}{\Delta(r)} \approx \left[1 - \frac{2m}{r_0} + \frac{r_q^2}{r_0^2} \right] \left[1 + \frac{2m}{r} - \frac{r_q^2}{r^2} \right], \quad (3.40)$$

tal que podemos simplificá-la para

$$\frac{\Delta(r_0)}{\Delta(r)} \approx 1 + 2m \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) - r_q^2 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2} \right). \quad (3.41)$$

De maneira semelhante, podemos aproximar

$$\frac{f_{\pm}(r_0)}{f_{\pm}(r)} = \frac{\varepsilon + c_1^{\pm} r_q^2 / r^2}{\varepsilon + c_1^{\pm} r_q^2 / r_0^2}, \quad (3.42)$$

com $c_1^+ = 2c_1^-$ e $c_1^- = c_1$, de forma a encontrar

$$\frac{f_{\pm}(r_0)}{f_{\pm}(r)} \approx 1 + \frac{c_1^{\pm} r_q^2}{\varepsilon} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2} \right). \quad (3.43)$$

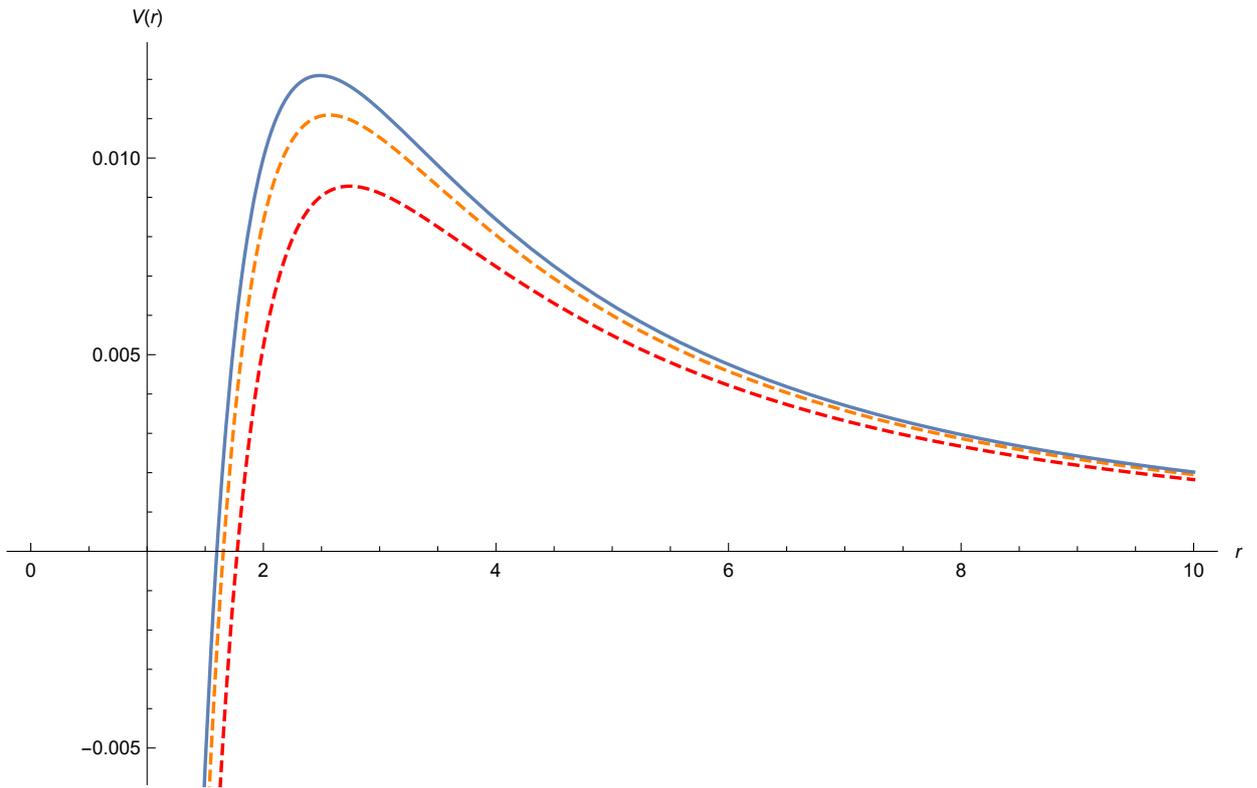


Figura 3.1: A figura mostra as alterações na região instável do potencial de R-N. Em azul, temos a previsão do fundo gravitacional. Em laranja, representamos as alterações sentidas pela polarização negativa e, em vermelho, as alterações sentidas pela polarização positiva. Para visualização, consideramos $M^2 > r_Q^2$ no espaço-tempo de fundo. *Fonte: imagem de autoria própria.*

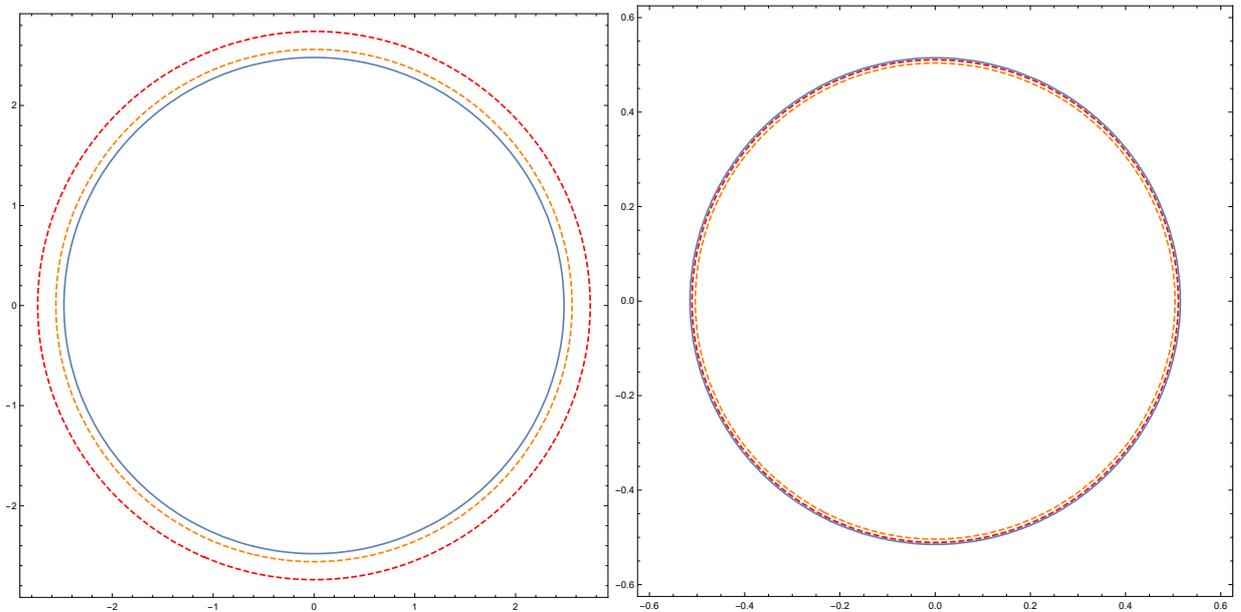


Figura 3.2: A figura à esquerda mostra como as trajetórias circulares instáveis são afetadas pelo meio material, enquanto que a figura à direita mostra a alteração nas trajetórias circulares estáveis. Consideramos um fundo de R-N com $M^2 > r_Q^2$. *Fonte: imagem de autoria própria.*

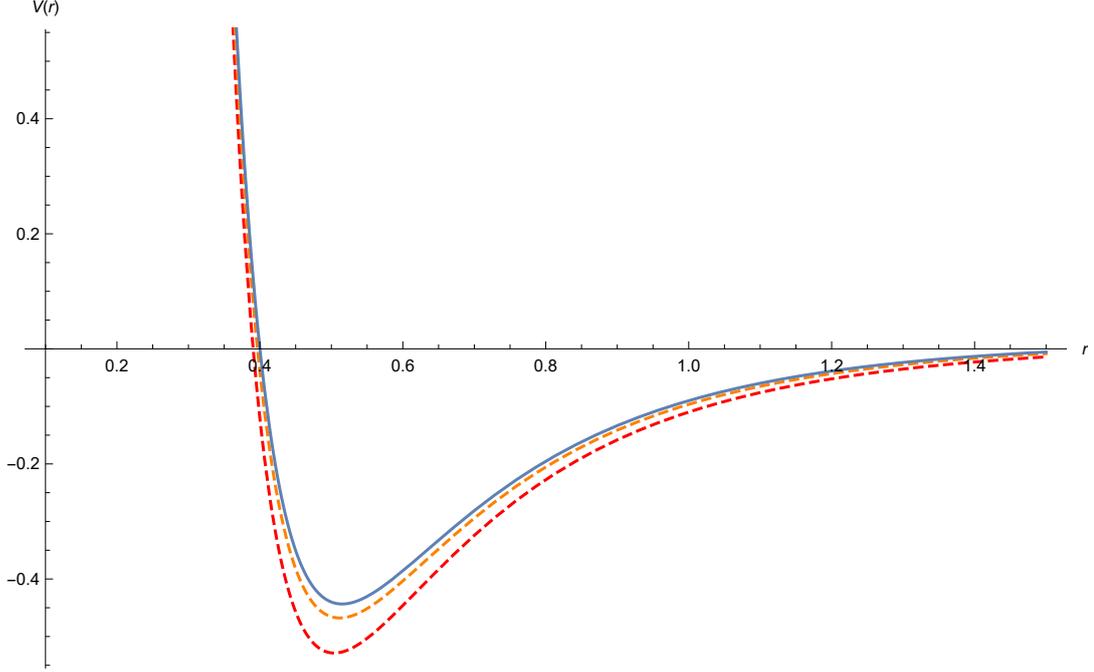


Figura 3.3: Os potenciais efetivos do exemplo (3.36), definidos pelas equações (3.38), são representados por linhas tracejadas nesta figura. A linha tracejada em laranja representa $V_-(r)$, enquanto a linha tracejada em vermelho representa $V_+(r)$. Em azul, temos o que seria esperado se considerássemos somente as previsões do fundo gravitacional. Vemos que na presença de um campo eletromagnético o potencial representado pela linha azul se separa em dois potenciais, dados pelas linhas tracejadas. Para visualização, consideramos $M^2 > r_Q^2$ no espaço-tempo de fundo. *Fonte: imagem de autoria própria.*

Com isso, obtemos a aproximação

$$\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \frac{\hat{g}_{00}^\pm(r_0)}{\hat{g}_{00}^\pm(r)} - 1 \approx \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \left[1 + 2m \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) - r_q^2 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2}\right)\right] \left[1 + \frac{c_1^\pm r_q^2}{\varepsilon} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2}\right)\right] - 1.$$

Se definirmos $a_\pm = 1 - \frac{c_1^\pm r_q^2}{\varepsilon r_0^2}$, podemos simplificar

$$\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \left[1 + \frac{c_1^\pm r_q^2}{\varepsilon} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2}\right)\right] - 1 = \left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - 1\right] a_\pm \quad (3.44)$$

tal que a relação acima se torna

$$\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \frac{\hat{g}_{00}^\pm(r_0)}{\hat{g}_{00}^\pm(r)} - 1 \approx \left\{1 + \frac{g(r)}{\left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - 1\right] a_\pm}\right\} \left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - 1\right] a_\pm,$$

definido a função

$$g(r) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \left[2m \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) - r_q^2 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2}\right) \right] \left[a_{\pm} + \frac{c_1^{\pm} r_q^2}{\varepsilon r^2} \right].$$

Então, é possível reescrever a expressão

$$\begin{aligned} \frac{g(r)}{\left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - 1\right] a_{\pm}} &= \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \left[1 + \frac{c_1^{\pm} r_q^2}{a_{\pm} \varepsilon r^2} \right] \frac{\left[2m \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) - r_q^2 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2}\right) \right]}{\left(\frac{r}{r_0} - 1\right) \left(\frac{r}{r_0} + 1\right)} \\ &= \left[1 + \frac{c_1^{\pm} r_q^2}{a_{\pm} \varepsilon r^2} \right] \frac{\left[\frac{r_q^2 r}{r_0} \left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r}\right) - \frac{2mr}{r_0} \right]}{(r + r_0)}, \end{aligned} \quad (3.45)$$

e verificar que

$$(1 + \xi)^{-1/2} \approx \left(1 + \frac{c_1 r_q^2}{\varepsilon r^2} \right)^{-1/2} \approx 1 - \frac{c_1 r_q^2}{2\varepsilon r^2} = 1 - \frac{c_1^+ r_q^2}{4\varepsilon r^2}. \quad (3.46)$$

Como consequência, temos

$$\begin{aligned} \Phi^+(r) &= \sqrt{\frac{\Delta^{-1}}{1 + \xi}} \cdot \left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \frac{\Delta_0 f_+(r_0)}{\Delta f_+} - 1 \right]^{-1/2} \\ &\approx \Delta^{-1/2} \left\{ 1 + \frac{g(r)}{\left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - 1\right] a_+} \right\}^{-1/2} \left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - 1 \right]^{-1/2} a_+^{-1/2} (1 + \xi)^{-1/2} \\ &\approx a_+^{-1/2} \frac{\left\{ 1 + \frac{m}{r} - \frac{r_q^2}{2r^2} \right\}}{\sqrt{\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - 1}} \left\{ 1 + \left[1 + \frac{c_1^+ r_q^2}{a_+ \varepsilon r^2} \right] \frac{\left[\frac{mr}{r_0} - \frac{r_q^2 r}{2r_0} \left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r}\right) \right]}{(r + r_0)} \right\} \left(1 - \frac{c_1^+ r_q^2}{4\varepsilon r^2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi^-(r) &= \sqrt{\Delta^{-1}} \cdot \left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \frac{\Delta_0 f_-(r_0)}{\Delta f_-} - 1 \right]^{-1/2} \\ &\approx \Delta^{-1/2} \left\{ 1 + \frac{g(r)}{\left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - 1\right] a_-} \right\}^{-1/2} \left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - 1 \right]^{-1/2} a_-^{-1/2} \\ &\approx a_-^{-1/2} \frac{\left\{ 1 + \frac{m}{r} - \frac{r_q^2}{2r^2} \right\}}{\sqrt{\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - 1}} \left\{ 1 + \left[1 + \frac{c_1^- r_q^2}{a_- \varepsilon r^2} \right] \frac{\left[\frac{mr}{r_0} - \frac{r_q^2 r}{2r_0} \left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r}\right) \right]}{(r + r_0)} \right\}. \end{aligned}$$

A partir da substituição de variáveis $u = r_0/r$, podemos calcular aproximadamente a integral dessas funções analiticamente. Obtemos,

$$\begin{aligned}\phi^+(u) - \phi_0^+ &= \int_0^u \Phi^+(u) du \\ \phi^-(u) - \phi_0^- &= \int_0^u \Phi^-(u) du ,\end{aligned}$$

onde as funções integradas são

$$\begin{aligned}\Phi^+(u) &\approx a_+^{-1/2} \frac{\left\{1 + \frac{mu}{r_0} - \frac{r_q^2 u^2}{2r_0^2}\right\}}{\sqrt{1-u^2}} \left\{1 + \left[1 + \frac{c_1^+ r_q^2 u^2}{a_+ \varepsilon r_0^2}\right] \frac{\left[\frac{m}{r_0} - \frac{r_q^2}{2r_0^2}\right] - \frac{r_q^2 u}{2r_0^2}}{1+u}\right\} \left(1 - \frac{c_1^+ r_q^2 u^2}{4\varepsilon r_0^2}\right) \\ \Phi^-(u) &\approx a_-^{-1/2} \frac{\left\{1 + \frac{mu}{r_0} - \frac{r_q^2 u^2}{2r_0^2}\right\}}{\sqrt{1-u^2}} \left\{1 + \left[1 + \frac{c_1^- r_q^2 u^2}{a_- \varepsilon r_0^2}\right] \frac{\left[\frac{m}{r_0} - \frac{r_q^2}{2r_0^2}\right] - \frac{r_q^2 u}{2r_0^2}}{1+u}\right\} .\end{aligned}$$

Se considerarmos o produto dos termos $\frac{2m}{r}$, $\frac{r_q^2}{r^2}$, $\frac{2m}{r_0}$, $\frac{r_q^2}{r_0^2}$ como aproximadamente nulo, podemos ignorar termos provenientes desses produtos. Finalmente, temos a aproximação

$$\begin{aligned}\Phi^+(u) &\approx a_+^{-1/2} \left[\frac{1 - \frac{c_1^+ r_q^2 u^2}{4\varepsilon r_0^2} + \frac{mu}{r_0} - \frac{r_q^2 u^2}{2r_0^2}}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{\frac{m}{r_0} - \frac{r_q^2}{2r_0^2} - \frac{r_q^2 u}{2r_0^2}}{(1+u)\sqrt{1-u^2}} \right] \\ \Phi^-(u) &\approx a_-^{-1/2} \left[\frac{1 + \frac{mu}{r_0} - \frac{r_q^2 u^2}{2r_0^2}}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{\frac{m}{r_0} - \frac{r_q^2}{2r_0^2} - \frac{r_q^2 u}{2r_0^2}}{(1+u)\sqrt{1-u^2}} \right] ,\end{aligned}$$

onde $a_{\pm}^{-1/2} \approx 1 + \frac{c_1^{\pm} r_q^2}{2\varepsilon r_0^2}$, o que implica em

$$\begin{aligned}\Phi^+(u) &\approx \frac{1 + \frac{c_1^+ r_q^2}{2\varepsilon r_0^2} - \frac{c_1^+ r_q^2 u^2}{4\varepsilon r_0^2} + \frac{mu}{r_0} - \frac{r_q^2 u^2}{2r_0^2}}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{\frac{m}{r_0} - \frac{r_q^2}{2r_0^2} - \frac{r_q^2 u}{2r_0^2}}{(1+u)\sqrt{1-u^2}} \\ \Phi^-(u) &\approx \frac{1 + \frac{c_1^- r_q^2}{2\varepsilon r_0^2} + \frac{mu}{r_0} - \frac{r_q^2 u^2}{2r_0^2}}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{\frac{m}{r_0} - \frac{r_q^2}{2r_0^2} - \frac{r_q^2 u}{2r_0^2}}{(1+u)\sqrt{1-u^2}} .\end{aligned}$$

Chamaremos de $h(u)$ a função

$$h(u) = \frac{1 + \frac{mu}{r_0} - \frac{r_q^2 u^2}{2r_0^2}}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{\frac{m}{r_0} - \frac{r_q^2}{2r_0^2} - \frac{r_q^2 u}{2r_0^2}}{(1+u)\sqrt{1-u^2}} , \quad (3.47)$$

tal que podemos escrever suas correções lineares como

$$\Phi^+(u) \approx h(u) + \frac{\frac{c_1^+ r_q^2}{2\epsilon r_0^2} - \frac{c_1^+ r_q^2 u^2}{4\epsilon r_0^2}}{\sqrt{1-u^2}} \quad (3.48)$$

$$\Phi^-(u) \approx h(u) + \frac{\frac{c_1^- r_q^2}{2\epsilon r_0^2}}{\sqrt{1-u^2}}, \quad (3.49)$$

de forma que a integral da função $h(u)$ representa o desvio da luz gerado pelo fundo gravitacional e as correções estão associadas à presença do meio material. Conhecemos a solução das seguintes integrais,

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} &= \arcsin\left(\frac{r_0}{r}\right), \\ \int \frac{u du}{\sqrt{1-u^2}} &= -\sqrt{1-\left(\frac{r_0}{r}\right)^2}, \\ \int \frac{u^2 du}{\sqrt{1-u^2}} &= -\frac{r_0}{2r}\sqrt{1-\left(\frac{r_0}{r}\right)^2} + \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{r_0}{r}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{u^4 du}{\sqrt{1-u^2}} &= -\sqrt{1-\left(\frac{r_0}{r}\right)^2} \left[\frac{3r_0}{8r} + \frac{r_0^3}{4r^3} \right] + \frac{3}{8}\arcsin\left(\frac{r_0}{r}\right), \\ \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}(1+u)} &= -\sqrt{\frac{1-\frac{r_0}{r}}{1+\frac{r_0}{r}}}, \\ \int \frac{u du}{\sqrt{1-u^2}(1+u)} &= \sqrt{\frac{1-\frac{r_0}{r}}{1+\frac{r_0}{r}}} + \arcsin\left(\frac{r_0}{r}\right). \end{aligned}$$

Como consequência, temos para a primeira integral

$$\begin{aligned} \int_0^u h(u) du &\approx -\arcsin\left(\frac{r_0}{r}\right) \Big|_r^\infty - \left[\frac{m}{r_0} \left(-\sqrt{1-\left(\frac{r_0}{r}\right)^2} - \sqrt{\frac{1-\frac{r_0}{r}}{1+\frac{r_0}{r}}} \right) \right]_r^\infty \\ &\quad - \left[\frac{r_q^2}{2r_0^2} \left(\frac{r_0}{2r}\sqrt{1-\left(\frac{r_0}{r}\right)^2} - \frac{3}{2}\arcsin\left(\frac{r_0}{r}\right) \right) \right]_r^\infty, \end{aligned}$$

de forma que o desvio gerado pelo campo gravitacional é

$$\phi(r) - \phi_\infty \approx \arcsin\left(\frac{r_0}{r}\right) + \frac{m}{r_0} h_1(r) - \frac{r_q^2}{2r_0^2} h_2(r), \quad (3.50)$$

definido as funções

$$h_1(r) = 2 - \sqrt{1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2} - \sqrt{\frac{1 - \frac{r_0}{r}}{1 + \frac{r_0}{r}}}$$

$$h_2(r) = \frac{3}{2} \arcsin\left(\frac{r_0}{r}\right) - \frac{r_0}{2r} \sqrt{1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2}.$$

As correções (3.48-3.49) representam termos extras à previsão do fundo gravitacional (3.50), associados a cada polarização. A desvio total vale

$$(\phi(r) - \phi_\infty)_\pm \approx \arcsin\left(\frac{r_0}{r}\right) + \frac{m}{r_0} h_1(r) - \frac{r_q^2}{2r_0^2} h_2^\pm(r), \quad (3.51)$$

considerando as correções $h_2^\pm(r)$ definidas como

$$h_2^+(r) = \left[\frac{3}{2} + \frac{c_1^+}{2\varepsilon}\right] \arcsin\left(\frac{r_0}{r}\right) - \left[1 + \frac{c_1^+}{2\varepsilon}\right] \frac{r_0}{2r} \sqrt{1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2} \quad (3.52)$$

$$h_2^-(r) = \left[\frac{3}{2} + \frac{c_1^-}{\varepsilon}\right] \arcsin\left(\frac{r_0}{r}\right) - \frac{r_0}{2r} \sqrt{1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2}. \quad (3.53)$$

Sabemos que a deflexão da luz medida em uma região distante da fonte é definida pela equação (3.17). Tendo em vista que temos $h_1(r_0) = 2$ e $h_2^\pm(r_0) = \left[\frac{3}{2} + \frac{c_1^\pm}{2\varepsilon}\right] \frac{\pi}{2}$, os raios de luz polarizados são defletidos pelos ângulos

$$\Delta\phi_+ \approx \frac{4m}{r_0} - \frac{r_q^2}{r_0^2} \left[\frac{3}{2} + \frac{c_1^+}{2\varepsilon}\right] \frac{\pi}{2}, \quad (3.54)$$

$$\Delta\phi_- \approx \frac{4m}{r_0} - \frac{r_q^2}{r_0^2} \left[\frac{3}{2} + \frac{c_1^-}{\varepsilon}\right] \frac{\pi}{2}, \quad (3.55)$$

tal que, pelas definições dessas constantes, em primeira ordem os ângulos de deflexão são

$$\Delta\phi_\pm \approx \frac{4m}{r_0} - \frac{r_q^2}{r_0^2} \left[\frac{3}{2} + \frac{c_1}{\varepsilon}\right] \frac{\pi}{2}. \quad (3.56)$$

Portanto, em primeira ordem, ambas polarizações são defletidas por um mesmo ângulo, então nesta aproximação elas são indistinguíveis. Ambas preveem a mesma correção na previsão do fundo gravitacional. Esperamos que termos de ordens superiores sejam negligenciáveis se considerarmos essa aproximação, mas é possível que eles sejam capazes de distinguir as polarizações. Entretanto, devido a sua pequena ordem de magnitude, provavelmente não seria possível medir essas correções fenomenologicamente. Logo, para campos fracos, esperamos que um observador distante da fonte não seja capaz de distinguir as polarizações da luz medindo apenas sua deflexão no campo gravitacional. Porém, teoricamente, o observador poderia

determinar o valor da constante de Pockels c_1 , o que é bastante relevante para prevermos propriedades do meio dielétrico. Diferentes materiais possuem diferentes valores para essa constante [93], então se um observador pudesse medi-la a distância, seria possível compará-la com dados experimentais conhecidos na literatura e estimar características do meio material.

Com relação ao desvio para o vermelho, temos $f_{\pm}(\infty) = 1/\mu\varepsilon$ e

$$\frac{f_+(\infty)}{f_+} = 1 + 2\frac{c_1}{\varepsilon}E, \quad \frac{f_-(\infty)}{f_-} = 1 + \frac{c_1}{\varepsilon}E.$$

É possível notar que, para $c_1 > 0$ o desvio para o vermelho tem sua intensidade intensificada e para $c_1 < 0$ possui sua intensidade atenuada, com relação as previsões do fundo gravitacional. A polarização positiva é mais afetada que a negativa. Apenas no infinito as previsões são iguais as do fundo gravitacional ($E(r) \rightarrow 0$). É possível realizar a mesma aproximação no desvio para o vermelho, considerando campos fracos, de forma a encontrar

$$(1+z)_{\pm} \approx 1 + \frac{m}{r} + \frac{3m^2}{2r^2} - \frac{r_q^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2c_1^{\pm}}{\varepsilon}\right). \quad (3.57)$$

Notamos que considerando esse limite, é possível distinguir ambas polarizações. Portanto, as relações (3.56-3.57) poderiam ser usadas em conjunto de modo a obter uma medida mais eficiente da constante de pockels c_1 , para um meio material em um espaço-curvo. Reintroduzindo as constantes c, G, Q temos, por análise dimensional, que as fórmulas (3.56-3.57) são descritas, respectivamente, por

$$\Delta\phi_{\pm} \approx \frac{4mG}{c^2r_0} - \frac{r_q^2}{r_0^2} \left[\frac{3}{2} + \frac{c_1c^4}{QG\varepsilon} \right] \frac{\pi}{2}, \quad (3.58)$$

$$(1+z)_{\pm} \approx 1 + \frac{mG}{c^2r} + \frac{3m^2G^2}{2c^4r^2} - \frac{r_q^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2c_1^{\pm}c^4}{QG\varepsilon}\right). \quad (3.59)$$

Assim, podemos estimar a ordem de grandeza das suas correções. Para isso, vamos tratar de um exemplo concreto.

Consideraremos um objeto compacto com as mesmas características físicas do nosso sol. Supomos que o corpo tenha massa $m \approx 10^{30}kg$, com um raio da ordem de $R_0 \approx 10^8m$. Com isso, seu raio de Schwarzschild deve ser $2M = \frac{2mG}{c^2} \approx 3 \times 10^3m$. De acordo com a solução extrema de Reisser-Nordstrom $r_Q^2 = M^2$, esse objeto está limitado a possuir carga elétrica extrema $Q_E = \sqrt{4\pi\epsilon_0 Gm} \approx 10^{19}C$ com $c^4/GQ_E \approx 10^{24}N/C$. Além disso, vamos considerar que a constante de Pockels esteja limitada a $10^{-10}m/V < c_1/\varepsilon < 10^{-12}m/V$, tendo em vista que o seu valor depende do meio material e esperamos que para um meio arbitrário o seu valor esteja entre esses limites [93]. Como consideramos campos fracos, não podemos usar a solução

extrema de Reissner-Nordstrom, que prevê campos eletromagnéticos muito intensos. Estamos lidando com soluções do tipo $r_Q^2 \ll M^2$, caso contrário não poderíamos considerar a aproximação realizada. Assim, a carga elétrica do objeto compacto deve estar limitada a ser muito menor que sua carga extrema $Q \ll Q_E$. Felizmente, essa é uma situação realista e temos interesse físico em considerá-la. A critério de exemplo, vamos supor uma carga da ordem de $Q \approx 10^{10}C$, para um objeto com as mesmas dimensões do sol.

Lembramos que na fórmula que descreve o desvio para o vermelho, consideramos a condição $r_2 \rightarrow \infty$ e $r_1 = r$, tal que a luz parte de um raio r em direção ao infinito, que representa um observador muito distante da fonte. Podemos considerar que esse raio r represente a superfície do sol, de forma que ele seja igual ao raio solar $r = R_0$. Algo análogo pode ser feito na fórmula que descreve a deflexão da luz, se considerarmos que o raio de máxima aproximação r_0 pode ser aproximado pelo raio do objeto compacto $r_0 \cong R_0$. Esse é o valor mínimo que o raio de máxima aproximação pode atingir, tendo em vista que, em geral, $R_0 < r_0$. Portanto, para ambas quantidades, teremos uma mesma ordem de grandeza nas correções, que pode ser estimada pelo termo

$$10^{-5} \leq \frac{r_q^2 c_1 c^4}{QG\epsilon R_0^2} \leq 10^{-7}. \quad (3.60)$$

Notamos que essa quantidade é adimensional. A desigualdade se refere aos diferentes meios materiais conhecidos na literatura. Estimamos que a menor correção possível seja da ordem de 10^{-7} enquanto que a maior seja da ordem de 10^{-5} , a depender das propriedades do meio considerado. Ressaltamos que não conhecemos o meio material, e o interessante é justamente tentar inferir suas propriedades a distância, comparando com tabelas de dados experimentais disponíveis na literatura. Com relação a fórmula que descreve o desvio para o vermelho, sabemos que as correções para as duas polarizações são distintas, mas esperamos que possuam uma mesma ordem de grandeza, tendo em vista que $c_1^+ = 2c_1$ e $c_1^- = c_1$.

Por fim, comparamos nossos resultados com o que seria esperado de uma teoria de eletrodinâmica não-linear, descrita pela lagrangeana de Euler-Heisenberg. Os autores [16] estimaram uma correção nessas quantidades, adimensional, de cerca de 10^{-15} , para ambas as polarizações. Sabemos que a teoria considerada por eles está associada ao efeito de polarização do vácuo, que surge para campos eletromagnéticos muito intensos (cerca de $E \approx 1,3 \times 10^{18} V/m$ e $B \approx 4,4 \times 10^{13} \text{ Gauss}$). Nesse sentido, os autores [16] usaram que a carga de um objeto compacto, com as mesmas características do nosso sol, seja dada pela solução extrema $Q_E \approx 10^{19}C$. Portanto, consideraram um campo eletromagnético muito mais intenso do que o que foi considerado neste trabalho. Concluímos que o nosso trabalho obteve ordens de grandezas mais relevantes, mesmo considerando energias mais baixas. Pelas nossas aproximações, não podemos

considerar um campo com esta intensidade, já que restringimos nossa análise a campos fracos, com fundo gravitacional fixo. Ainda assim, mesmo considerando uma solução mais realista $r_Q^2 \ll M^2$, com um campo elétrico menos intenso, fomos capazes de obter correções mais relevantes. Esperamos que a altas energias essas correções tenham ordens de grandeza ainda maiores, tendo em vista que um campo elétrico mais intenso costuma, em laboratório, intensificar os efeitos de birrefringência no meio. Com isso, acreditamos ser possível distinguir ambas birrefringências pela ordem de grandeza das suas correções. Ressaltamos que se diminuirmos o valor da carga elétrica Q , mantendo o mesmo raio para o objeto compacto, obtemos correções cada vez menores.

3.5.3 Solução conformalmente plana

Para certas geometrias, como por exemplo, o espaço-tempo de Reissner-Nordstrom, podemos escrever a métrica efetiva $\hat{g}^{\mu\nu}$, definida na equação (3.1), de forma que ela seja conformalmente plana. Para provar essa afirmação, vamos considerar o elemento de linha isotrópico

$$ds^2 = A(r)dt^2 - B(r)(dr^2 + r^2d\Omega^2), \quad (3.61)$$

que descreve uma solução esfericamente simétrica e estática, e se reduz à solução de Schwarzschild no caso particular em que $A = (1-x)^2/(1+x)^2$ e $B = (1+x)^4$ com $x = m/2r$. Ressaltamos que nesse sistema de coordenadas o horizonte de Schwarzschild está localizado em $m/2$. Além disso, a transformação de coordenadas que conecta as coordenadas padrão de Schwarzschild (t, R, θ, ϕ) com as coordenadas isotrópicas (t, r, θ, ϕ) é dada por $r = 1/2(R - m + \sqrt{R^2 - 2mR})$. Para uma dependência arbitrária $A(r)$ e $B(r)$, chamamos a métrica efetiva associada à polarização negativa (3.1) de $Q^{\mu\nu}$. Encontramos que ela possui componentes

$$\begin{aligned} Q^{00} &= \frac{1}{A} + (\mu\epsilon - 1)a^2, & Q^{11} &= -\frac{1}{B}, \\ Q^{22} &= -\frac{1}{Br^2}, & Q^{33} &= \frac{Q^{22}}{\text{sen}^2\theta}, \end{aligned} \quad (3.62)$$

considerando que $v^\mu = a\delta_0^\mu$ está normalizado com $a = A^{-1/2}$. Então, para observadores comóveis ao meio, a métrica efetiva será conformalmente plana $Q^{\mu\nu} = \xi\gamma^{\mu\nu}$ se

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{B} \\ \epsilon\mu &= \frac{A}{B}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Note que no caso particular representado pelo fundo de Schwarzschild, na região externa ao horizonte de eventos, a função $\epsilon\mu$ presente na equação (3.63) está limitada a assumir os valores $0 < \epsilon\mu < 1$. Como consequência, existe uma transformação conforme que pode eliminar os efeitos gravitacionais na propagação da luz. Em outras palavras, é possível que a luz ao invés de se mover ao longo de geodésicas na geometria gerada pelo campo gravitacional, se mova através de geodésicas na geometria de Minkowski. Para verificar isso, o leitor pode notar que as trajetórias da luz são descritas por $ds^2 = 0$, tal que no caso em que a métrica efetiva é conformalmente plana obtemos o elemento de linha de Minkowski. Essa transformação conforme só poderia eliminar o efeito gravitacional sentido pelo raio de luz com polarização negativa.

Conclusão

Nesse trabalho, estudamos um meio com propriedades dielétricas não-triviais situado sob um espaço-curvo. Permitimos que esse meio tenha permeabilidade magnética constante μ e que sua permissividade elétrica possa depender da intensidade do campo elétrico $\epsilon(E)$. Através do método das descontinuidades de Hadamard, resolvemos o sistema de equações associado, de forma a obter as geometrias efetivas que descrevem a propagação da luz no meio. Como consequência do efeito de birrefringência, obtemos duas geometrias efetivas associadas às polarizações da luz. Com isso, as trajetórias possíveis para os raios de luz foram descritas por geodésicas nessas geometrias efetivas. Nos restringimos a analisar como a propagação da luz é alterada em um fundo de Reissner-Nordstrom, de forma que o campo elétrico externo seja dado por esta solução. Além disso, supomos que a massa do meio material seja muito menor do que a massa do objeto compacto, de tal forma que foi possível negligenciá-la e idealizar um fundo gravitacional fixo.

Assim, fomos capazes de obter correções nas fórmulas que descrevem o desvio para o vermelho, o potencial efetivo e a deflexão da luz, tal que diferentes estados de polarização são associados a diferentes correções nestas quantidades. Com isso, temos duas trajetórias possíveis para o raio de luz no fundo de Reissner-Nordstrom. Caso o campo elétrico se anule, ambas trajetórias coincidem. A partir dessas correções, encontramos dois casos que não produzem alterações no desvio para o vermelho. O primeiro é dado por uma permissividade constante, tal que ambas polarizações se tornam indistinguíveis e o desvio para o vermelho permanece inalterado. O segundo é dado por uma permissividade não-trivial $\epsilon(E)$ capaz de anular as correções no desvio para o vermelho associadas à polarização positiva. Nesse caso particular, a polarização negativa tem seu desvio para o vermelho atenuado de tal forma que podemos considerá-lo nulo. De forma complementar, mostramos que a métrica efetiva associada à polarização negativa é conformalmente plana, dada uma dependência específica nas funções do dielétrico.

No limite assintótico, estudamos que tipos de correções um observador distante da fonte esperaria obter. Para isso, consideramos que estamos lidando com campos fracos. Dado essa

suposição, esperamos que possamos aproximar a dependência da permissividade elétrica como $\epsilon(E) \approx \epsilon + c_1 E$, tal que o efeito Pockels seja mais relevante que o efeito Kerr. Logo, fomos capazes de estimar aproximadamente as correções no desvio para o vermelho e no ângulo de deflexão da luz. Em primeira ordem, obtemos que ambas as polarizações preveem uma mesma correção no ângulo de deflexão da luz. Em contrapartida com o desvio para o vermelho, que em primeira ordem já podemos distingui-las. Assumimos a possibilidade de que, ao considerar uma ordem superior, os ângulos de deflexão da luz associados a cada polarização possam ser distinguidos. No entanto, como supomos o limite de campos fracos, esperamos que correções de ordens superiores sejam irrelevantes, tendo em vista que é provável que um observador a distâncias astrofísicas não consiga estimá-las fenomenologicamente.

Portanto, acreditamos que um observador assintótico não poderia determinar a dependência $\epsilon(E)$ do meio, tendo em vista que estaria lidando com campos fracos. Para obter correções superiores, associadas a uma ordem de grandeza menor, estaria sujeito a uma limitação fenomenológica nas suas observações. Ainda assim, correções de primeira ordem permitem ao observador estimar a constante de Pockels c_1/ϵ a distâncias astrofísicas, de tal forma que imaginamos ser possível determinar propriedades do meio material mesmo a distância. Sabemos que diferentes constantes estão associadas a diferentes meios materiais e diferentes estados da matéria, além disso, dados experimentais mostram que elas devem ter uma ordem de grandeza entre $10^{-10} - 10^{-12} m/V$. Com isso, fomos capazes de comparar as correções obtidas para o fenômeno de birrefringência devido à presença de um meio não-linear com as correções conhecidas na literatura, propostas pela ENL [16]. Estimamos que a birrefringência devido a um meio material produza correções mais relevantes do que as propostas pela teoria de Euler-Heisenberg. Portanto, poderíamos distinguir ambas birrefringências pela ordem de grandeza das suas correções. Esperamos que correções passíveis de serem obtidas fenomenologicamente tenham origem associada a não-linearidade de meios materiais, não ao fenômeno de polarização do vácuo.

Por fim, verificamos que os horizontes ópticos associados às métricas efetivas coincidem com os horizontes de Killing previstos pelo fundo gravitacional. Isso só ocorre devido a forma da métrica efetiva neste fundo. Outros fundos gravitacionais podem prever, mesmo a baixas energias, correções nos horizontes de Killing. Além disso, assumimos a possibilidade de que a

altas energias também tenhamos correções, pois a métrica do fundo seria alterada de forma a levar em conta o tensor de energia-momento do meio material.

Um modelo mais realista poderia ser construído considerando um fundo de Kerr-Newman permeado por um meio material que possua $\mu = \text{const.}$ e $\epsilon(E, H)$ ou $\epsilon = \text{const.}$ e $\mu(E, H)$, tendo em vista que sabemos que esses casos mais gerais também podem ser descritos através de geometrias efetivas. Poderíamos escolher um observador qualquer v^μ , pois o sistema de equações permite essa arbitrariedade. Além disso, existem alguns meios anisotrópicos que permitem que a propagação da luz no meio seja descrita através de métricas efetivas. Isso sugere que é possível trabalhar com meios anisotrópicos em espaços-curvos e essa abordagem poderia vir a ser interessante, tendo em vista que esses meios favorecem alguma direção para o efeito de polarização. Se esse meio material representar um disco de acreção, parece razoável considerar que ele permeie uniformemente o objeto compacto. Entretanto, talvez diferentes direções sejam favorecidas, ou o material não esteja uniformemente distribuído. Como uma perspectiva futura, o modelo apresentado aqui poderia ser generalizado de forma a englobar uma descrição mais geral.

Concluimos ressaltando outras questões que podem vir a ser interessantes em uma análise futura. Dentre elas, citamos o estudo do efeito Cherenkov em espaços-curvos e o estudo de meios materiais com índice de refração negativo, chamados de metamateriais. Uma outra proposta ainda mais imediata seria aplicar os nossos resultados para cristais em laboratórios terrestres. Por exemplo, poderíamos tentar examinar como os nossos resultados poderiam produzir observáveis associados à presença da gravitação, tal como determinar se seria possível ter um medidor de curvatura somente examinando a luz em um cristal e se esses efeitos gravitacionais seriam superiores aos efeitos de flutuações quânticas do vácuo no interior desses meios. Além disso, devemos observar que ambientes dinâmicos, como os encontrados em atmosferas estelares, por exemplo, podem produzir efeitos de dispersão espacial e temporal significativos. Nestas situações especiais, o regime de validade dos resultados obtidos nesta dissertação, deve ser avaliado com cautela, particularmente no que se refere à aproximação implementada para meios materiais instantâneos. No que se refere ao estudo de cristais em laboratórios terrestres, a aproximação de materiais instantâneos é, em geral, suficiente.

Apêndice A

Cálculo do tensor de Einstein para soluções esfericamente simétricas

Neste trabalho, consideramos soluções estáticas e esfericamente simétricas da Relatividade Geral, representadas pelo elemento de linha (2.21). Dado essa simetria, obtemos para as componentes da conexão afim $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha}$ os resultados

$$\begin{aligned}\Gamma_{01}^0 &= \frac{A'}{2A} & \Gamma_{00}^1 &= \frac{A'}{2B} & \Gamma_{11}^1 &= \frac{B'}{2B} \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{r}{B} & \Gamma_{33}^1 &= \text{sen}^2\theta \Gamma_{22}^1 & \Gamma_{33}^2 &= -\text{sen}\theta \cos\theta \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r} & \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r} & \Gamma_{23}^3 &= \text{cotg}\theta .\end{aligned}\tag{A.1}$$

Enquanto que para o tensor de Ricci, encontramos

$$\begin{aligned}R_{00} &= \frac{A''}{2B} - \frac{A'}{4B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{A'}{Br} & R_{11} &= -\frac{A''}{2A} + \frac{A'}{4A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{B'}{Br} \\ R_{22} &= 1 + \frac{r}{2B} \left(\frac{B'}{B} - \frac{A'}{A} \right) - \frac{1}{B} & R_{33} &= R_{22} \text{sen}^2\theta ,\end{aligned}\tag{A.2}$$

e para o escalar de Ricci, obtemos

$$R = \frac{1}{2A'} \left(\frac{A'^2}{AB} \right)' + \frac{2}{Ar^2} \left[\left(\frac{rA}{B} \right)' - A \right] .\tag{A.3}$$

Podemos escrever o tensor de Einstein a partir do tensor de Ricci e do seu escalar (2.1), tal que suas componentes são

$$\begin{aligned}
G_{00} &= \frac{A}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r \left(1 - \frac{1}{B} \right) \right] & G_{11} &= \frac{(1-B)}{r^2} + \frac{A'}{Ar} \\
G_{22} &= \frac{r^2}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{AB}} \left(\frac{A'}{\sqrt{AB}} \right)' + \frac{1}{Ar} \left(\frac{A}{B} \right)' \right] & G_{33} &= G_{22} \operatorname{sen}^2 \theta .
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Ressaltamos que nesta notação o apóstrofo ' representa uma derivada com relação a variável r .

A.1 Solução de Reissner-Nordstrom

Considerando a definição $\Sigma(r) \equiv r^2 - 2Mr + r_Q^2$, as componentes dos tensores para a métrica de Reissner-Nordström estão tabeladas a seguir. Para a conexão afim, obtemos

$$\begin{aligned}
\Gamma_{01}^0 &= \frac{Mr - r_Q^2}{r\Sigma} & \Gamma_{00}^1 &= \frac{(Mr - r_Q^2)\Sigma}{r^5} & \Gamma_{11}^1 &= -\frac{(Mr - r_Q^2)}{r\Sigma} \\
\Gamma_{22}^1 &= -\frac{\Sigma}{r} & \Gamma_{33}^1 &= -\operatorname{sen}^2 \theta \frac{\Sigma}{r} & \Gamma_{33}^2 &= -\operatorname{sen} \theta \cos \theta \\
\Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r} & \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r} & \Gamma_{23}^2 &= \cot \theta .
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Para o tensor de Riemann, encontramos

$$\begin{aligned}
R_{101}^0 &= \frac{2Mr - 3r_Q^2}{r^2\Sigma} & R_{202}^0 &= -\frac{(Mr - r_Q^2)}{r^2} & R_{303}^0 &= -\frac{(Mr - r_Q^2)}{r^2} \operatorname{sen}^2 \theta \\
R_{010}^1 &= -\frac{(2Mr - 3r_Q^2)\Sigma}{r^6} & R_{212}^1 &= -\frac{(Mr - r_Q^2)}{r^2} & R_{313}^1 &= -\frac{(Mr - r_Q^2)}{r^2} \operatorname{sen}^2 \theta \\
R_{020}^2 &= \frac{(Mr - r_Q^2)\Sigma}{r^6} & R_{121}^2 &= -\frac{(Mr - r_Q^2)}{r^2\Sigma} & R_{323}^2 &= \operatorname{sen}^2 \theta \left(1 - \frac{\Sigma}{r^2} \right) \\
R_{030}^3 &= \frac{(Mr - r_Q^2)\Sigma}{r^6} & R_{131}^3 &= -\frac{(Mr - r_Q^2)}{r^2\Sigma} & R_{232}^3 &= 1 - \frac{\Sigma}{r^2}
\end{aligned} \tag{A.6}$$

e para o tensor de Ricci, temos

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{\Delta r_Q^2}{r^4} & R_{11} &= -\frac{r_Q^2}{\Delta r^4} \\ R_{22} &= \frac{r_Q^2}{r^2} & R_{33} &= R_{22} \operatorname{sen}^2 \theta . \end{aligned} \tag{A.7}$$

Note que o escalar de Ricci é nulo $R = 0$. Para $r_Q = 0$, temos $R_{\mu\nu} = 0$, de forma que esses resultados se reduzem a solução de Schwarzschild.

Referências Bibliográficas

- [1] AYON-BEATO, E., GARCIA, A., 1998, “Regular black hole in general relativity coupled to nonlinear electrodynamics”, *Phys. Rev. Lett.*, v. 80, pp. 5056–5059. doi: 10.1103/PhysRevLett.80.5056.
- [2] BAKALOV (ET AL), D., 1994, “PVLAS: Vacuum birefringence and production and detection of nearly massless, weakly coupled particles by optical techniques”, *Nucl. Phys. B*, v. 35, pp. 180–182.
- [3] BARANOVA, N. B., BOGDANOV, I. V., ZELDOVICH, B. I., 1977, “New electro-optical and magneto-optical effects in liquids”, *Uspekhi Fizicheskikh Nauk*, v. 123 (out.), pp. 349–360.
- [4] BARCELÓ, C., 2019, “Analogue black-hole horizons”, *Nature Phys.*, v. 15, n. 3, pp. 210–213. doi: 10.1038/s41567-018-0367-6.
- [5] BARCELÓ, C., LIBERATI, S., VISSER, M., 2005, “Analogue Gravity”, *Living Reviews in Relativity*, v. 8 (12). doi: 10.12942/lrr-2011-3.
- [6] BITTENCOURT, E., DE LORENCI, V. A., KLIPPERT, R., et al., 2014, “Analogue black holes for light rays in static dielectrics”, *Classical and Quantum Gravity*, v. 31 (07). doi: 10.1088/0264-9381/31/14/145007.
- [7] BITTENCOURT, E., FACI, S., NOVELLO, M., 2014, “Chiral symmetry breaking as a geometrical process”, *Int. J. Mod. Phys. A*, v. 29, n. 26, pp. 1450145. doi: 10.1142/S0217751X14501450.
- [8] BORN, M., INFELD, L., 1934, “Foundations of the new field theory”, *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, v. 144, n. 852, pp. 425–451. doi: 10.1098/rspa.1934.0059.
- [9] BOYD, R. W., 2008, *Nonlinear Optics, Third Edition*. 3rd ed. USA, Academic Press, Inc. ISBN: 0123694701.
- [10] BRETÓN, N., PEREZ BERGLIAFFA, S. E., 2014, “On the stability of black holes with nonlinear electromagnetic fields”, (2).
- [11] BURTON, J. Y. J., OSBURN, T., 2020, “Reissner-Nordström perturbation framework with gravitational wave applications”, *Phys. Rev. D*, v. 102 (Nov), pp. 104030. doi: 10.1103/PhysRevD.102.104030. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.102.104030>>.

- [12] CAÑATE, P., PEREZ BERGLIAFFA, S. E., 2022, “Transforming singular black holes into regular black holes sourced by nonlinear electrodynamics”, (3).
- [13] CHANDRASEKHAR, S., 1985, *The mathematical theory of black holes*. ISBN: 978-0-19-850370-5.
- [14] CHEMISSANY, W. A., DE ROO, M., PANDA, S., 2008, “Thermodynamics of Born-Infeld Black Holes”, *Class. Quant. Grav.*, v. 25, pp. 225009. doi: 10.1088/0264-9381/25/22/225009.
- [15] COLLABORATION, T. E., 2019, “First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole.” *The Astrophysical Journal Letters*, v. 875, n. 1, pp. 17. doi: 10.3847/2041-8213/ab0ec7. Disponível em: <<https://iopscience.iop.org/article/10.3847/2041-8213/ab0ec7/pdf>>.
- [16] CUZINATTO, R. R., MELO, C. A. M., VASCONCELOS, K. C., et al., 2015, “Non-linear effects on radiation propagation around a charged compact object”, *Astrophys. Space Sci.*, v. 359, n. 2, pp. 59. doi: 10.1007/s10509-015-2505-2.
- [17] DE LORENCI, V. A., 2002, “Effective geometry for light traveling in material media”, *Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics*, v. 65 (03), pp. 026612. doi: 10.1103/PhysRevE.65.026612.
- [18] DE LORENCI, V. A., GOULART, G. P., 2008, “Magnetolectric birefringence revisited”, *Phys. Rev. D*, v. 78 (Aug), pp. 045015. doi: 10.1103/PhysRevD.78.045015.
- [19] DE LORENCI, V. A., KLIPPERT, R., 2004, “Non gravitational black holes”, *Brazilian Journal of Physics*, v. 34 (12), pp. 1367–1373. doi: 10.1590/S0103-97332004000700013.
- [20] DE LORENCI, V. A., KLIPPERT, R., 2002, “Analogue gravity from electrodynamics in nonlinear media”, *Phys. Rev. D*, v. 65 (02). doi: 10.1103/PhysRevD.65.064027.
- [21] DE LORENCI, V. A., PEREIRA, D. D., 2010, “Magnetolectric birefringence as a unique effect in isotropic media”, *Phys. Rev. E*, v. 82 (Sep), pp. 036605. doi: 10.1103/PhysRevE.82.036605. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.82.036605>>.
- [22] DE LORENCI, V. A., SALIM, J., 2006, “Aspects of light propagation in anisotropic dielectric media”, *Physics Letters A*, v. 360 (12), pp. 10–13. doi: 10.1016/j.physleta.2006.08.011.
- [23] DE LORENCI, V. A., SOUZA, M., 2001, “Electromagnetic wave propagation inside a material medium: An effective geometry interpretation”, *Physics Letters B*, v. 512 (02). doi: 10.1016/S0370-2693(01)00588-3.
- [24] DE LORENCI, V. A., KLIPPERT, R., OBUKHOV, Y., 2002, “Optical black holes in moving dielectrics”, *Physical Review D*, v. 68 (10). doi: 10.1103/PhysRevD.68.061502.

- [25] DE LORENCI, V. A., KLIPPERT, R., TEODORO, D., 2006, “Birefringence in nonlinear anisotropic dielectric media”, *Physical review D: Particles and fields*, v. 70 (04). doi: 10.1103/PhysRevD.70.124035.
- [26] DE MELO, C. A. M., MEDEIROS, L. G., POMPEIA, P. J., 2015, “Causal Structure and Birefringence in Nonlinear Electrodynamics”, *Mod. Phys. Lett. A*, v. 30, n. 06, pp. 1550025. doi: 10.1142/S021773231550025X.
- [27] DE OLIVEIRA, H. P., 1994, “Nonlinear charged black holes”, *Class. Quant. Grav.*, v. 11, pp. 1469–1482. doi: 10.1088/0264-9381/11/6/012.
- [28] DE SABBATA, V., GASPERINI, M., 1986, *Introduction to Gravity*. Singapore, World Scientific, 346p.
- [29] DE SOUZA, L. K., 2019, *Um estudo da métrica exterior de Reissner-Nordstrom*. Natal, Monografia de conclusão de curso.
- [30] D’INVERNO, R., 1992, *Introducing Einstein’s Relativity*. Clarendon Press.
- [31] DRORI, J., ROSENBERG, Y., BERMUDEZ, D., et al., 2019, “Observation of Stimulated Hawking Radiation in an Optical Analogue”, *Phys. Rev. Lett.*, v. 122 (Jan), pp. 010404. doi: 10.1103/PhysRevLett.122.010404. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.122.010404>>.
- [32] DYADICHEV, V. V., GAL’TSOV, D. V., ZORIN, A. G., et al., 2002, “NonAbelian Born-Infeld cosmology”, *Phys. Rev. D*, v. 65, pp. 084007. doi: 10.1103/PhysRevD.65.084007.
- [33] ECKEL, S., KUMAR, A., JACOBSON, T., et al., 2018, “A rapidly expanding Bose-Einstein condensate: an expanding universe in the lab”, *Phys. Rev. X*, v. 8, n. 2, pp. 021021. doi: 10.1103/PhysRevX.8.021021.
- [34] EINSTEIN, A., 1915, “Zur allgemeinen Relativitätstheorie”, *Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften*, pp. 799–801.
- [35] EINSTEIN, A., 1915, “Die Feldgleichungen der Gravitation”, *Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften*, pp. 844–847.
- [36] FACCIO, D., BELGIORNO, F., CACCIATORI, S., et al., 2013, *Analogue Gravity Phenomenology: Analogue Spacetimes and Horizons, from Theory to Experiment*. Switzerland, Springer.
- [37] FALCIANO, F. T., PEÑAFIEL, M. L., BERGLIAFFA, S. E. P., 2019, “Entropy bounds and nonlinear electrodynamics”, *Phys. Rev. D*, v. 100 (Dec), pp. 125008. doi: 10.1103/PhysRevD.100.125008. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.100.125008>>.

- [38] FLEISHMAN, G., FU, Q., WANG, M., et al., 2002, “Birefringence effect as a tool for astrophysical plasma study”, *Physical Review Letters*, v. 88, n. 25 I (jun.), pp. 2511011–2511014. ISSN: 0031-9007. doi: 10.1103/PhysRevLett.88.251101.
- [39] FURTADO, J., HELAYEL-NETO, J. A., 2020, “Teoria de Grupos e o Papel das Simetrias em Física”, doi: <https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2020-0338>.
- [40] GARCIA-SALCEDO, R., BRETON, N., 2000, “Born-Infeld cosmologies”, *Int. J. Mod. Phys. A*, v. 15, pp. 4341–4354. doi: 10.1016/S0217-751X(00)00216-9.
- [41] GORDON, W., 1923, “Zur Lichtfortpflanzung nach der Relativitätstheorie”, *Annalen der Physik*, v. 377 (03), pp. 421 – 456. doi: 10.1002/andp.19233772202.
- [42] GOULART, G. P., 2007, *Fenomenos eletromagneto opticos em meios materiais*. Itajubá, Dissertação de mestrado.
- [43] GRAHAM, E. B., RAAB, R. E., 1984, “A molecular theory of linear birefringence induced by crossed electric and magnetic fields”, *Molecular Physics*, v. 52, n. 5 (jan.), pp. 1241–1249. doi: 10.1080/00268978400101911.
- [44] GRIFFITHS, D., 2008, *Introduction to Elementary Particles*. ISBN: 978-3-527-40601-2.
- [45] GUERRIERI, A., NOVELLO, M., 2022, “Photon propagation in a material medium on a curved spacetime”, *Classical and Quantum Gravity*, v. 39, n. 24, pp. 5008. doi: 10.1088/1361-6382/aca23a.
- [46] GUNASEKARAN, S., MANN, R. B., KUBIZNAK, D., 2012, “Extended phase space thermodynamics for charged and rotating black holes and Born-Infeld vacuum polarization”, *JHEP*, v. 11, pp. 110. doi: 10.1007/JHEP11(2012)110.
- [47] HADAMARD, J., 1903, *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l’hydrodynamique*. Paris, A. Hermann.
- [48] HAYNES, W. M., 2014, *CRC Handbook of Chemistry and Physics*. CRC Handbook of Chemistry and Physics.
- [49] HEHL, F. W., OBUKHOV, Y. N., 2003, “Foundations of classical electrodynamics : charge, flux, and metric” . .
- [50] HEISENBERG, W., EULER, H., 1936, “Folgerungen aus der Diracschen Theorie des Positrons”, *Zeitschrift für Physik*, v. 98, n. 11-12, pp. 714–732. doi: 10.1007/BF01343663.
- [51] IACOPINI, E., ZAVATTINI, E., 1979, “Experimental Method to Detect the Vacuum Birefringence Induced by a Magnetic Field”, *Phys. Lett. B*, v. 85, pp. 151. doi: 10.1016/0370-2693(79)90797-4.
- [52] JACKSON, J. D., 1998, *Classical Electrodynamics*. Wiley. ISBN: 978-0-471-30932-1.

- [53] JACQUET, M. J., WEINFURTNER, S., KÖNIG, F., 2020, “The next generation of analogue gravity experiments”, *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A*, v. 378, n. 2177, pp. 20190239. doi: 10.1098/rsta.2019.0239.
- [54] JONES, R. C., 1948, “A New Calculus for the Treatment of Optical Systems. VII. Properties of the N-Matrices”, *Journal of the Optical Society of America*, v. 38, pp. 671–685.
- [55] KERR, R. P., 1963, “Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics”, *PHYSICAL REVIEW LETTERS*, v. 11, n. 5, pp. 237–238. doi: 10.1103/PhysRevLett.11.237. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.11.237>>.
- [56] LANDAU, L. D., LIFSHITZ, E. M., 1984, *Electrodynamics of Continuous Media*. New York, Pergamon.
- [57] LL.D., J. K., “XL. A new relation between electricity and light: Dielectrified media birefringent”, *Philosophical Magazine Series 1*, v. 50, pp. 337–348.
- [58] MAHMOOD, W., ZHAO, Q., 2015, “The Double Jones Birefringence in Magneto-electric Medium”, *Scientific Reports*, v. 5 (09). doi: 10.1038/srep13963.
- [59] MIELING, T. B., 2017, “Noether’s theorem applied to classical electrodynamics”, *Boltzmann-gasse*.
- [60] M.NOVELLO, 2012, “EFFECTIVE GEOMETRY IN NONLINEAR ELECTRODYNAMICS”, *International Journal of Modern Physics A*, v. 17 (01). doi: 10.1142/S0217751X02013216.
- [61] MUÑOZ DE NOVA, J., GOLUBKOV, K., KOLOBOV, V., et al., 2019, “Observation of thermal Hawking radiation and its temperature in an analogue black hole”, *Nature*, v. 569, n. 7758, pp. 688–691. doi: 10.1038/S41586-019-1241-0.
- [62] NAKAHARA, M., 2003, *Geometry, Topology and Physics*. Taylor Francis Group.
- [63] NOETHER, E., 1918, “Invariante Variationsprobleme”, *Weidmannsche Buchhandlung*.
- [64] NORDSTRÖM, G., 1918, “On the Energy of the Gravitational Field in Einstein’s Theory”, *Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen*, v. 20, n. 2, pp. 1238–1245.
- [65] NOVELLO, M., 2005, “Cosmological effects of nonlinear electrodynamics”, *Int. J. Mod. Phys. A*, v. 20, pp. 2421–2430. doi: 10.1142/S0217751X05024717.
- [66] NOVELLO, M., BERGLIAFFA, S. E. P., 2003, “Effective Geometry”. doi: 10.1063/1.1587103.
- [67] NOVELLO, M., BITTENCOURT, E., 2014, “A geometrical origin of the right-handed neutrino magnetic moment”, *Int. J. Mod. Phys. A*, v. 29, pp. 1450075. doi: 10.1142/S0217751X14500754.

- [68] NOVELLO, M., BITTENCOURT, E., 2012, “Gordon Metric Revisited”, *Physical Review D*, v. 86 (11). doi: 10.1103/PhysRevD.86.124024.
- [69] NOVELLO, M., GOULART, E., 2010, *Eletrodinâmica não-linear. Causalidade e efeitos cosmológicos*. São Paulo, Livraria da Física.
- [70] NOVELLO, M., SALIM, J. M., 2001, “Effective electromagnetic geometry”, *Phys. Rev. D*, v. 63, pp. 083511. doi: 10.1103/PhysRevD.63.083511.
- [71] NOVELLO, M., DE LORENCI, V. A., SALIM, J. M., et al., 2000, “Geometrical aspects of light propagation in nonlinear electrodynamics”, *Phys. Rev. D*, v. 61 (Jan), pp. 045001. doi: 10.1103/PhysRevD.61.045001. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.61.045001>>.
- [72] NOVELLO, M., PEREZ BERGLIAFFA, S. E., SALIM, J. M., 2000, “Singularities in general relativity coupled to nonlinear electrodynamics”, *Class. Quant. Grav.*, v. 17, pp. 3821–3832. doi: 10.1088/0264-9381/17/18/316.
- [73] NOVELLO, M., VISSER, M., VOLOVIK, G., 2002, *Artificial Black Holes*. Singapore; River Edge, U.S.A., World Scientific.
- [74] NOVELLO, M., PEREZ-BERGLIAFFA, S., SALIM, J., et al., 2003, “Analogue black holes in flowing dielectrics”, *Classical and Quantum Gravity*, v. 20 (02), pp. 859. doi: 10.1088/0264-9381/20/5/306.
- [75] NOVELLO, M., PEREZ BERGLIAFFA, S. E., SALIM, J., 2004, “Non-linear electrodynamics and the acceleration of the universe”, *Phys. Rev. D*, v. 69, pp. 127301. doi: 10.1103/PhysRevD.69.127301.
- [76] NOVELLO, M., ARAUJO, A. N., SALIM, J. M., 2009, “Cyclic Magnetic Universe”, *Int. J. Mod. Phys. A*, v. 24, pp. 5639–5658. doi: 10.1142/S0217751X09046321.
- [77] NOVELLO, M., SALIM, J. M., FALCIANO, F. T., 2011, “On a Geometrical Description of Quantum Mechanics”, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.*, v. 8, pp. 87–98. doi: 10.1142/S0219887811004987.
- [78] NOVELLO, M., 2010, *Cosmologia, 4^o volume da coleção Tópicos de Física do CBPF*. Livraria da física. ISBN: 8578610768.
- [79] NOVELLO, M., BITTENCOURT, E., 2015, “Metric Relativity and the Dynamical Bridge: Highlights of Riemannian Geometry in Physics”, *Brazilian Journal of Physics*, v. 45 (08). doi: 10.1007/s13538-015-0362-7.
- [80] PAPANETROU, A., 1977, “Shock Waves in General Relativity”, *NATO Sci. Ser. B*, v. 27, pp. 83–101. doi: 10.1007/978-1-4684-0853-9_4.
- [81] PELLE, B., BITARD, H., BAILLY, G., et al., 2011, “Observation of magneto-electric non-reciprocity in molecular nitrogen gas”, (05).

- [82] PEREIRA, D. D., 2009, *Estudo Comparativo entre o Formalismo Eikonal e o Formalismo das Ondas de Choque*. Itajubá, Dissertação de mestrado.
- [83] PIWNICKI, P., LEONHARDT, U., 2001, “Optics of moving media”, *Applied Physics B-lasers and Optics - APPL PHYS B-LASERS OPT*, v. 72 (01), pp. 51–59. doi: 10.1007/s003400000512.
- [84] PLEBANSKI, J., 1970, “Lectures on Non Linear Electrodynamics”, .
- [85] REISSNER, H., 1916, “Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie”, *Annalen der Physik.*, v. 355, n. 9, pp. 106–120. doi: 10.1002/andp.19163550905. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/andp.19163550905>>.
- [86] RIAZUELO, A., 2018, “Seeing relativity – II. Revisiting and visualizing the Reissner-Nordström metric”, *International Journal of Modern Physics*, v. 28, n. 6, pp. 37. doi: 10.1142/S0218271819500846. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1812.07705>>.
- [87] ROTH, T., RIKKEN, G. L. J. A., 2000, “Observation of Magnetolectric Jones Birefringence”, *Phys. Rev. Lett.*, v. 85 (Nov), pp. 4478–4481. doi: 10.1103/PhysRevLett.85.4478. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.85.4478>>.
- [88] ROTH, T., RIKKEN, G. L. J. A., 2002, “Observation of Magnetolectric Linear Birefringence”, *Phys. Rev. Lett.*, v. 88 (Jan), pp. 063001. doi: 10.1103/PhysRevLett.88.063001. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.88.063001>>.
- [89] RUBAKOV, V., 2002, *Classical Theory of Gauge Fields*. Princeton University Press.
- [90] RUTKOWSKI, M., 2019, “Nonlinear perturbations of Reissner-Nordström black holes”, , 100(4):044017. doi: 10.1103/PhysRevD.100.044017.
- [91] RYDER, L. H., 1996, *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press. ISBN: 978-0-521-47814-4, 978-1-139-63239-3, 978-0-521-23764-2.
- [92] SALAZAR, I. H., GARCIA, A., PLEBANSKI, J., 1987, “Duality Rotations and Type *D* Solutions to Einstein Equations With Nonlinear Electromagnetic Sources”, *J. Math. Phys.*, v. 28, pp. 2171–2181. doi: 10.1063/1.527430.
- [93] SALEH, B. E. A., TEICH, M. C., 1991, “Fundamentals of Photonics”. cap. 18, pp. 696–736, John Wiley Sons, Ltd. ISBN: 9780471213741. doi: <https://doi.org/10.1002/0471213748.ch18>.
- [94] SCHWARZSCHILD, K., 1916, “Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie”, *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der*

Wissenschaften, v. 50, pp. 189–196. Disponível em: <http://old.phys.huji.ac.il/~barak_kol/Courses/Black-holes/reading-papers/Schwarzschild.pdf>.

- [95] STEINHAUER, J., ABUZARLI, M., ALADJIDI, T., et al., 2022, “Analogue cosmological particle creation in an ultracold quantum fluid of light”, *Nature Commun.*, v. 13, pp. 2890. doi: 10.1038/s41467-022-30603-1.
- [96] TORRES, T., PATRICK, S., COUTANT, A., et al., 2017, “Observation of superradiance in a vortex flow”, *Nature Phys.*, v. 13, pp. 833–836. doi: 10.1038/nphys4151.
- [97] TORRES, T., PATRICK, S., RICHARTZ, M., et al., 2020, “Quasinormal Mode Oscillations in an Analogue Black Hole Experiment”, *Phys. Rev. Lett.*, v. 125, n. 1, pp. 011301. doi: 10.1103/PhysRevLett.125.011301.
- [98] WALD, R. M., 1984, *General Relativity*. Chicago, USA, Chicago Univ. Pr. doi: 10.7208/chicago/9780226870373.001.0001.
- [99] WEINBERG, S., 1972, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. New York, John Wiley and Sons. ISBN: 978-0-471-92567-5, 978-0-471-92567-5.
- [100] WEYL, H., 1919, “Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie”, *Annalen der Physik*, v. 364, n. 10, pp. 101–133.
- [101] YAJIMA, H., TAMAKI, T., 2001, “Black hole solutions in Euler-Heisenberg theory”, *Phys. Rev. D*, v. 63, pp. 064007. doi: 10.1103/PhysRevD.63.064007.